T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ TÜREVLERE SAHİP DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI

Emre ENKÜR

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER
KASIM-2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ TÜREVLERE SAHİP DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emre ENKÜR

(101121126)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 16 Ekim 2012

KASIM-2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ TÜREVLERE SAHİP DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emre ENKÜR

(101121126)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 Ekim 2012
Tezin Savunulduğu Tarih : 6 Kasım 2012

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)
Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER (İnönü Ü.)

KASIM-2012

ÖNSÖZ

Tezimin hazırlanmasında ve düzenlenmesinde bana destek olan, bilgilerinden her alanda faydalandığım ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER'e, değerli fikir ve yardımlarından yararlandığım Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya, Arş. Gör. Ökkeş ÖZTÜRK'e ve çalışmalarım boyunca benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Emre ENKÜR
ELAZIĞ - 2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ TÜREVLERE SAHİP DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI

Emre ENKÜR

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
2012, Sayfa : VII + 49

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; kesirli hesaplamaların tarihçesinden, bu konu ile ilgili ünlü matematikçilerin çalışmalarından ve kesirli hesaplamaların kullanım alanlarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde; kesirli türev ve integrallerin nasıl hesaplanacağından, bunların hesaplanmasında kullanılan bazı tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde; kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğini ifade eden bazı teoremler verilmiştir.

Tezin son bölümünde ise; ikinci mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler için kesirli hesap yardımıyla özel çözümler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Türev ve İntegraller (Diferintegraller), Riemann – Liouville Kesirli Türevi, Grünwald – Letnikov Kesirli Türevi, Caputo Kesirli Türevi, Gama Fonksiyonu, Beta Fonksiyonu, Mittag - Leffler Fonksiyonu, Hata Fonksiyonu.

SUMMARY

Master of Arts

DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVE AND THEIR APPLICATIONS

Emre ENKÜR

Fırat University
Institute of Basic and Applied Sciences
Department of Mathematics

2012, Page : VII + 49

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter; the history of fractional calculus, the works of famous mathematicians about this subject and usage field of fractional calculus are mentioned.

In the second chapter; how to calculate the fractional derivative and integrals, some definitions and theorems which are used in calculation about this subject are mentioned.

In the third chapter; some theorems which are definite the existence and uniqueness of solutions of fractional differential equations are given.

The last chapter of this thesis; particular solutions with the help of fractional calculus to ordinary and partial differential equations of the second order are obtained.

Key words: Fractional Derivative and Integrals (*Differintegrals*), Riemann – Liouville Fractional Derivative, Grünwald – Letnikov Fractional Derivative, Caputo Fractional Derivative, Gama Function, Beta Function, Mittag - Leffler Function, Error Function.

SEMBOLLER LİSTESİ

${}_aD_t^{\alpha}f(t)$	:	Kesirli Türev Operatörü
${}_aD_t^{-\beta}f(t)$	:	Kesirli İntegral Operatörü
${}_a^CD_t^{\alpha}f(t)$	:	Caputo Kesirli Türevi
$\Gamma(z)$	:	Gama Fonksiyonu
$B(z,w)$	:	Beta Fonksiyonu
$erf(x)$	:	Hata Fonksiyonu
$E_{\alpha}(z)$	:	Bir Parametreli Mittag - Leffler Fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$	:	İki Parametreli Mittag - Leffler Fonksiyonu
L	:	Laplace Dönüşüm Operatörü
f_{α}	:	$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun α. mertebeden türevi
$f_{-\alpha}$	:	$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun α katlı integrali

1. GİRİŞ

Matematiksel analizin bir kolu olan kesirli türev ve integral, adından da tahmin edileceği üzere türev ve integralin tam sayı olmayan (keyfi) mertebelere genişletilmiş bir şeklidir. Doğal ve yapay sistemlerin çalışma prensiplerini anlamada çok önemli bir araçtır.

Leibnitz $n \in \mathbb{Z}^+$ için $y = f(x)$ fonksiyonunun $n.$ mertebeden türevini;

$$\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$$

şeklinde tanımladıktan sonra L'Hospital'ın 30 Eylül 1695'de Leibnitz'e sorduğu "Tam sayı mertebeden türevler, kesirli mertebeden türevlere genişletilebilir mi?" sorusu kesirli diferansiyelin doğum tarihi olarak gösterilebilir. Leibnitz cevabında bunun sonsuz seri yardımıyla tanımlanabileceğini söylüyor. Çünkü sonsuz seriler sadece pozitif veya negatif tam sayıların üssü olarak değil kesirli ifadelerin üssü olarak da yazılabilir. L'Hospital bu sorusuyla belki de farkında olmadan literatüre ilk defa yarı türev kavramını kazandırmıştır. $n = 1/2$ olduğu durumda operatöre yarı türev operatörü denir. Yarı türev operatörü bir fonksiyona ard arda iki defa uygulandığında o fonksiyonun birinci mertebeden türevine eşdeğer bir sonuç elde edilir. Leibnitz'in kesirli türevler üzerine ortaya attığı bu soru, 300 yıldan daha fazla bir zamandır üzerinde çalışılan ve ortaya konulan tanımlarla geliştirilen önemli bir konu olmuştur. Leibnitz'in yanı sıra Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Holmgren, Weyl, Heaviside, Laplace, Lagrange, Hadamard, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi ünlü birçok matematikçi de bu konu üzerinde çalışmalar yapmıştır.

α, reel mertebeli keyfi türevli ardışık operatörlerin interpolasyonu olmak üzere kesirli türevler için Davis tarafından;

$${}_aD_t^{\alpha} f(t)$$

notasyonu kullanılmıştır. Burada a ve t indisleri kesirli diferansiyelleme işleminin limit değerleridir. Kesirli diferansiyelleme sembolündeki uç noktalar önemlidir. Bu uç noktalar kesirli türevlerin reel problemlere uygulamalarında belirsizlikten kurtulmada yardımcı olur.

Kesirli integraller için ayrı bir notasyon kullanmayacağız. $\beta > 0$ olmak üzere kesirli mertebeden integrali;

$$ {}_aD_t^{-\beta} f(t) $$

ile göstereceğiz.

Kesirli diferansiyel denklemler içerisinde kesirli türev ve integral bulunduran denklemlerdir.

Kesirli mertebeden türev için literatürde çeşitli tanımlar verilmiştir ancak kesirli mertebeden türev nasıl tanımlanırsa tanımlansın türev mertebesi tam sayıya eşit olacak şekilde seçildiğinde ortaya çıkan ifade Leibnitz ve Newton tarafından önerilen tam sayılı mertebeden türev ifadesi ile aynı olmaktadır.

Bu alandaki ilk sistematik çalışmalar 19. yüzyılın başlangıcında ve ortalarında kaydedilmiştir. Bu çalışmaların bir kısmını özetleyecek olursak;

1772'de J.L. Lagrange, dolaylı olarak kesirli hesaplamalara katkıda bulunmuştur. Tam sayı mertebeden diferansiyel operatörlerin kuvvetini genişletmiş ve

$$ \frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y $$

olduğunu göstermiştir. Kesirli hesaplamalar teorisi geliştikçe m ve n keyfi değerleri için benzer kural doğru olduğundan dolayı $y(x)$'den kaynaklanan sınırlamaların ne olduğuyla ilgilenilmiştir.

1812'de P.S. Laplace integral yardımıyla kesirli türevi tanımlamıştır ve 1819'da ilk defa keyfi mertebeli türevden bahsetmiştir.

Lacroix ise 700 sayfalık çalışmasının yaklaşık 2 sayfasını bu konuya ayırmıştır. Tam sayı mertebeden temel matematik uygulamalarını genişletmiştir. Lacroix, başlangıçta $y = x^m$ ve m bir pozitif tam sayı olmak üzere $n.$ mertebeden türevi;

$$ \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n $$

şeklinde kolayca genişletmiştir. Daha sonra bu ifadeyi gama fonksiyonu yardımıyla;

$$ \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} $$

şeklinde tanımlamıştır. Bunu bir örnek üzerinde $y = x$ ve $n = \frac{1}{2}$ alarak;

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

olduğunu göstermiştir.

1832'de Liouville, üstel serileri genişletmiş ve $q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere böyle serilerin q. türevini tanımlamıştır. Liouville'ın 1832'de üç makalesi yayımlandıktan sonraki çalışmalarında yaptığı tanımlamalar, hızlı bir yükseliş ve başarı göstermesini mümkün kılmıştır. Bu dönemde kullanılan Lacroix'in ve Liouville'ın farklı çalışmalarına farklı matematikçiler destek vermiştir. 1840'da De Morgan kesirli hesap ile ilgili yayımladığı makalelerinde bu iki sistemin aslında daha genel bir sistemin parçaları olduğunu söylemiştir. 1844'de Boole, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde kesirli hesabı kullanmıştır. 1853'de Riemann, belirli bir integrali içeren ve üssü tam sayı olmayan kuvvet serilerine uygulanabilen farklı bir tanım geliştirmiştir. Riemann ve Liouville'ın elde ettikleri sonuçları Grünwald ve Krug birleştirmiştir. 1867'de Grünwald, limiti kullandığı bir türev tanımını benimsemiş ve q. türev için belirli integral formüllerine ulaşmıştır. 1868'de ise Holmgren kesirli hesabın adi diferansiyel denklemlere uygulanışı hakkında uzun bir monolog çalışması yapmıştır. Riemann - Liouville tanımının ilk çalışması, Sonin'in 1869'da yayımladığı "keyfi mertebeden diferansiyel" adlı makalesinde ortaya konmuştur. 1890'da ise Krug, alışılmış türevler için Cauchy integral formülü üzerine çalışmıştır. 1892'de Heaviside, elektromanyetik teorisinin bazı problemlerini çözmek için kesirli hesabı kullanmıştır. 1920'de ise iletkenlik teorisinde, kesirli diferansiyelden yararlanmıştır. 1936'da Gemant, esneklik problemlerinde kullanmak üzere kesirli diferansiyelden faydalanmıştır.

1967'de Caputo; tam sayı mertebeden başlangıç durumlarını kullanmak yerine, kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri çözmek için Riemann - Liouville kesirli türevinin daha klasik tanımını formülize etmiştir.

İlgi çekici yönünün ve geniş uygulama alanlarına sahip olmasının keşfedilmesiyle bilim dünyasında yerini alan kesirli hesap tekniği, bir çok çalışmaya imkan sağlamış ve de sağlamaktadır. Bunun temel sebebi; kaos, yayılım ve dalga hareketleri, filtreleme ve tersinmezlik gibi pek çok olgunun kesirli analiz kullanılarak daha gerçeğe uygun modellenebilmesi ve açıklanabilmesidir. Bu ilginç konunun difüzyon, Schrödinger denklemi, malzeme bilimi, iletim hatları teorisi, sıvıların kimyasal analizi, ısı transferi, akışkanlar, biyoloji, biyofizik, biyomühendislik, elektromanyetik teori, mekanik, fizik ve kontrol teorisi, analitik ve sayısal yöntemler gibi alanlarda kullanılmasının yanında her geçen gün yeni ve ilginç uygulamaları da çıkmaktadır. Ekonomi, finans, deprem bilimleri gibi alanlara uygulamaları ise, şüphesiz çok ilginç olacaktır. Sıradan matematiğin, doğrusal olmayan ve denge durumundan uzak süreçlerin çalışılmasında karşılaşılan fraktal fonksiyonların incelenmesinde yetersiz kaldığı bilinir. Fraktal eğriler ve yüzeylerle kesirli matematik arasındaki ilişki ise, yoğun araştırılan konular arasındadır. Kesirli türev ve integraller, bazı belirli integrallerin alınması, seri toplamlarının bulunması gibi konularda da yararlı bir teknik olarak karşımıza çıkar.

Ayrıca histerezis, hafıza ve gerilim faktörlerinin doğal olarak ortaya çıktığı viskoelastik (yapışkan ve esnek) materyallerin (kıkırdak, deri, kas) fiziksel durumlarının modellenmesinde kesirli hesaplamanın kullanımı kendiliğinden ortaya çıkar.

Kesirli analizin klasik analizden en önemli farkı, klasik analizde olduğu gibi tek bir türev tanımının olmayışıdır. Kesirli analizdeki birden fazla türev tanımının varlığı problemin türüne en uygun olanının kullanılması, problemin en iyi çözümünün elde edilmesi fırsatını verir. Başlıcaları Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevleridir. Birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları açısından farklılık gösterirler.

Kesirli hesap tekniğinin matematik uygulamalarının çoğu 20. yüzyıl bitmeden ortaya koyulmuş, mühendislik ve bilimsel uygulamalarda heyecan verici başarılar elde edilmiştir.

Kesirli hesaplamalar 17. yüzyıldan itibaren konferanslara ve tezlere konu olmuştur. B. Ross ilk konferansın önemli olması nedeniyle doktora tezini verdikten kısa bir süre sonra 1974'de Ulusal Bilim Kuruluşu'nun sponsorluğunda Connecticut'taki New Haven Üniversitesi'nde "First conference on Fractional Calculus and its Applications" adlı konferansı organize etmiştir. 2. Uluslararası konferans 1984'de, İskoçya'da Strathclyde Üniversitesi'nde gerçekleştirilmiştir. Bu konferansa, ilk konferansa katılanların bazıları (P. Hegwood, S. Kalla, W. Lamb, J.S. Lowndes, K. Nishimoto, P.G. Rooney ve H.M. Srivastava) da katılmıştır. Yine 1980'lerde dikkate değer matematiksel aktiviteler Japonya'da Owa, Saigo ve Nishimoto tarafından gerçekleştirilmiştir. 4 ciltlik makalede kesirli türevin adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması incelenmiştir. Sovyetler Birliği'nde ise Samko, Marichev, Kilbas kesirli hesap ve uygulamaları konusunda ansiklopedik bir kitap yayımlamıştır. 3. Uluslararası konferans ise 1989'da, Tokyo'da Nihon Üniversitesi'nde düzenlenmiştir. Bu konferansa katılanlardan bazıları ise M. Al-Bassam, R. Bagley, Y.A. Brychkov, L.M.B.C. Campos, R. Gorenflo, J.M.C. Joshi, S. Kalla, E.R. Love, M. Mikolas, K. Nishimoto, S. Owa, A.P. Prudnikov, B. Ross, S. Samko ve H.M. Srivastava'dır [1-7].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonu kesirli hesaplamayla direkt ilişkilidir. Gama fonksiyonu en basit anlamıyla faktöriyelin reel sayılara genelleştirilmesidir. $\Gamma(z)$ ile gösterilir.

Gama fonksiyonu negatif değerlerde tanımsızdır fakat tam sayı olmayan değerlerde hatta kompleks sayılarda bile tanımlıdır. Gama fonksiyonu;

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1.2.3\ldots n}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}n^{z}\,,\quad z\neq 0,-1-2,-3,\ldots$$

şeklinde tanımlanır. Burada z yerine $z+1$ alırsak;

$$\Gamma(z+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1.2.3\ldots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+n+1)}n^{z+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{nz}{z+n+1}.\frac{1.2.3\ldots n}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}n^{z}$$

$$=z\Gamma(z)$$

elde edilir. Tanımdan;

$$\Gamma(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n(n+1)}n=1$$

$$\Gamma(2)=1$$

$$\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n)=1.2.3\ldots(n-1)=(n-1)!$$

olduğu kolayca görülebilir.

Gama fonksiyonunun ikinci tanımı olan Euler integrali;

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du\,,\quad Re(z)>0$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca;

$$\int_0^\infty e^{-u}u^n du = n! = \int_0^\infty e^{-u}u^{(n+1)-1}du = \Gamma(n+1)$$

olduğundan gama fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktoriyel fonksiyonu da denir.

Ayrıca gama fonksiyonunu;

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \equiv ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$$

şeklinde Weierstrass formu ile de yazabiliriz. Burada $\gamma = 0{,}577216$ ... Euler - Mascheroni sabitidir [1,8].

2.2. Beta Fonksiyonu

Bazı durumlarda gama fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonlarının yerine beta fonksiyonu olarak adlandırılan bir bağıntı kullanmak daha uygundur. Beta fonksiyonu genellikle;

$$B(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau\,, \quad (Re(z) > 0,\ \ Re(w) > 0)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $p > 0$ ve $q > 0$ olmak üzere beta fonksiyonu ile gama fonksiyonu arasında;

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q,p)$$

ilişkisi vardır [1].

2.3. Mittag - Leffler Fonksiyonu

$\alpha > 0$ olmak üzere bir parametreli Mittag - Leffler fonksiyonu;

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

seri açılımı ile verilir. Üstel fonksiyonun bir genelleştirmesi olan bu fonksiyon, 1903 yılında Mittag - Leffler tarafından tanımlanmıştır.

Gerçekte Agrawal tarafından bulunan iki parametreli Mittag - Leffler fonksiyonu ise kesirli hesaplamalarda önemli bir rol oynar. $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere iki parametreli Mittag - Leffler fonksiyonu;

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

şeklinde tanımlanır. α ve β parametrelerinin özel seçimleri ile $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonu bilinen bazı fonksiyonlara dönüşür. Örneğin;

$$E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z\,,$$

$$E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^z-1}{z}\,,$$

$$E_{1,3}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{e^z-1-z}{z^2}\,,$$

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}=E_\alpha(z)$$

şeklinde yazılabilir [1].

2.4. Hata (Error) Fonksiyonu

Hata fonksiyonu Gauss hata fonksiyonu olarak da adlandırılır ve

$$erf(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\,, & x>0\\ \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_x^0 e^{-t^2}dt\,, & x<0\end{cases}$$

şeklinde hesaplanır [3].

2.5. Türev ve İntegralin Ortak Yazımı

2.5.1. Kullanılan Notasyon ve Tanımlar

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe n, N pozitif tam sayıları, q ve Q ise, herhangi bir sayıyı gösterecektir. Bir fonksiyonun $n.$ türevi genelde

$$\frac{d^n f}{dx^n}$$

olarak gösterildiğinden ve integral de türevin tersi bir işlem olduğundan;

$$\frac{d^{-1}f}{d[x]^{-1}} = \int_0^x f(x_0)dx_0$$

yazabiliriz. Böylece ardışık integraller;

$$\frac{d^{-2}f}{d[x]^{-2}} = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} f(x_0)dx_0$$

$$\frac{d^{-3}f}{d[x]^{-3}} = \int_0^x dx_2 \int_0^{x_2} dx_1 \int_0^{x_1} f(x_0)dx_0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{-n}f}{d[x]^{-n}} = \int_0^x dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} dx_{n-2} \ldots \int_0^{x_2} dx_1 \int_0^{x_1} f(x_0)dx_0$$

şeklinde olur. Alt sınırın sıfırdan farklı olduğu durumlarda ise;

$$\frac{d^{-1}f}{[d(x-a)]^{-1}} = \int_a^x f(x_0)dx_0$$

$$\frac{d^{-2}f}{[d(x-a)]^{-2}} = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0$$

$$\frac{d^{-3}f}{[d(x-a)]^{-3}} = \int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}} = \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_{n-2} \ldots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0$$

olur. Ancak, burada

$$\frac{d^n}{[d(x-a)]^n} = \frac{d^n}{[dx]^n}$$

olmasına rağmen, integraller için

$$\frac{d^{-n}}{[d(x-a)]^{-n}} \neq \frac{d^{-n}}{[dx]^{-n}}$$

olduğuna dikkat etmeliyiz. n. mertebeden türev için

$$f^{(n)}(x)$$

ifadesi de kullanıldığından, n ardışık integral için

$$f^{(-n)} = \int_{a_n}^{x} dx_{n-1} \int_{a_{n-1}}^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \int_{a_2}^{x_2} dx_1 \int_{a_1}^{x_1} f(x_0) dx_0$$

yazımını da kullanacağız. Karışıklığa yol açmayacak durumlarda ise;

$$\frac{d^q f(x)}{[d(x-0)]^q} = \frac{d^q f(x)}{[dx]^q}$$

$$= \frac{d^q f(x)}{dx^q}$$

$$= f^{(q)}(x)$$

ifadeleri de kullanılacaktır. Bir diferintegralin b noktasındaki değeri ise;

$$\left.\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q}\right|_{x=b} = \frac{d^q f(b)}{[d(x-a)]^q}$$

olarak gösterilecektir. Diferintegralin literatürde kullanılan başka gösterimleri de

$$\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} = D_a^q f(x) = {}_aD_x^q f(x)$$

şeklindedir [2].

2.5.2. Bir Fonksiyonun n. Türevi

Türevin tanımının;

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x - \delta x)}{\delta x}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Bu ifadenin ardışık olarak türevleri alınırsa;

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x) - 2f(x - \delta x) + f(x - 2\delta x)}{[\delta x]^2}$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x) - 3f(x - \delta x) + 3f(x - 2\delta x) - f(x - 3\delta x)}{[\delta x]^3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{\delta x \to 0} \left\{ [\delta x]^{-n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\delta x) \right\}$$

elde edilir. Bu ifadede bütün limitlerin var olduğu varsayılmıştır.

Ayrıca $[\delta x]$ sıfıra giderken türev ile integralin ortak bir tanımı için sınırlandırılmış bir limit işlemi gerekecektir. Bunun için $[a, x]$ aralığını N eşit parçaya bölerek,

$$\delta_N x = \frac{x-a}{N} \ , \ \ N = 1, 2, 3, \ldots$$

yazarsak bu durumda;

$$\frac{d^n f}{[dx]^n} = \lim_{\delta_N x \to 0} \left\{ [\delta_N x]^{-n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\delta_N x) \right\}$$

olacaktır. Bu ifadede $j > n$ değerleri için $\binom{n}{j}$ terimi sıfır olacağından;

$$\frac{d^n f}{[dx]^n} = \lim_{\delta_N x \to 0} \left\{ [\delta_N x]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\delta_N x) \right\}$$

yazılır. Böylece limitin sürekli durumlarda da var olduğu anlayışı ile n. mertebeden türev;

$$\frac{d^n f}{[dx]^n} = \lim_{N \to \infty} \left\{ \left[\frac{x-a}{N}\right]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f\left(x - j\left[\frac{x-a}{N}\right]\right) \right\} \qquad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir [2].

2.5.3. n Ardışık İntegralin Genel Yazımı

Bir fonksiyonun integrali, onun altındaki alana eşit olacağından Riemann toplamı olarak;

$$\frac{d^{-1} f}{[d(x-a)]^{-1}} = \int_a^x f(x_0) dx_0$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0} \{\delta_N x [f(x) + f(x - \delta_N x) + f(x - 2\delta_N x) + \cdots + f(a + \delta_N x)]\}$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0} \left\{ \delta_N x \sum_{j=0}^{N-1} f(x - j\delta_N x) \right\}$$

şeklinde yazılır. Burada $\delta_N x = [x-a]/N$, $N = 1, 2, 3, \ldots$ olarak alınmıştır. Bu ifadeyi genelleştirirsek;

$$\frac{d^{-2}f}{[d(x-a)]^{-2}} = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0} \{[\delta_N x]^2 [f(x) + 2f(x-\delta_N x) + 3f(x-2\delta_N x)$$

$$+ \cdots + Nf(a+\delta_N x)]\}$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0} \left\{ [\delta_N x]^2 \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) f(x - j\delta_N x) \right\},$$

$$\frac{d^{-3}f}{[d(x-a)]^{-3}} = \int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0} \left\{ [\delta_N x]^3 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(j+1)(j+2)}{2} f(x - j\delta_N x) \right\}$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla bu ifadenin n ardışık integrali ise;

$$\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}} = \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0} \left\{ [\delta_N x]^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} f(x - j\delta_N x) \right\}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left\{ \left[\frac{x-a}{N}\right]^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} f\left(x - j\left[\frac{x-a}{N}\right]\right) \right\} \qquad (2.2)$$

olur. Burada (2.2) denklemi (2.1) denklemiyle oldukça benzerdir. Ancak (2.2)'deki katsayılar (2.1) denkleminden farklı olarak $\binom{j+n-1}{j}$ şeklinde gitmektedir ve (2.2)'deki bütün terimler pozitif işaretlidir [2].

2.5.4. Tam Sayı Değerleri İçin Türev ve İntegralin Ortak Yazımı

Gama fonksiyonunun binom katsayıları cinsinden

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)}$$

eşitliğini kullanarak, tam sayı değerler için türev ve integrali;

$$\frac{d^n f}{[d(x-a)]^n} = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\left[\frac{x-a}{N}\right]^{-n}}{\Gamma(-\mathrm{n})}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(j+1)} f\left(x-j\left[\frac{x-a}{N}\right]\right)\right\} \tag{2.3}$$

gibi tek bir formül ile ifade edebiliriz. Burada n hem pozitif hem de negatif işaretleri alabilmektedir [2].

2.6. Kesirli Türev ve İntegraller

2.6.1. Diferintegralin Grünwald Tanımı

(2.3) eşitliğinde eğer n pozitif ise; türevin (2.1) genel tanımına, n negatif ise; integralin (2.2) genel tanımına ulaşılır.

n yerine tüm değerleri alabilen q ifadesi yazılırsa (2.3) bağıntısı en genel haliyle;

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\left[\frac{x-a}{N}\right]^{-q}}{\Gamma(-q)}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f\left(x-j\left[\frac{x-a}{N}\right]\right)\right\}$$

olur ve bu bağıntı Grünwald tanımı olarak adlandırılır. Bu tanımın en büyük avantajı, verilen bir fonksiyonun diferintegralinin o fonksiyonun türevlerine veya integrallerine gerek kalmadan, sadece kendisinin aldığı değerler ile bulunabilmesidir [2].

2.6.2. Riemann - Liouville Kesirli Türevi

Her sonlu (a,x) aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olsun. $n \in \mathbb{N}^+$, $n-1 \leq q < n$ ve $q > 0$ olmak üzere $x > a$ için reel bir f fonksiyonunun q. mertebeden Riemann - Liouville kesirli türevi;

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n+q}}dt$$

şeklinde tanımlanır. Bu yöntemde integralin n kez türevi alınacağından uygulamada zorluk çıkarabilir [1].

2.6.3. Riemann - Liouville Kesirli İntegrali

Her sonlu (a,x) aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olsun. $x > a$ olmak üzere f fonksiyonunun q katlı Riemann - Liouville kesirli integrali;

$$\frac{d^{-q} f(x)}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-q}}dt$$

şeklinde tanımlanır (Burada $q \in \mathbb{R}$ ve $q > 0$'dır.) [1].

2.6.4. Grünwald - Letnikov Kesirli Türev ve İntegrali

$[a, t]$ kapalı aralığında sürekli $f^{(k)}(t)$, $(k = 1,2, \dots m + 1)$ türevleri var ve m, $m < p < m + 1$ olacak şekilde bir tam sayı olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun p. mertebeden Grünwald - Letnikov kesirli türevi $p > 0$ olmak üzere;

$$ {}_aD_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau $$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun p katlı Grünwald - Letnikov kesirli integrali ise;

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m+p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau $$

şeklinde tanımlanır [1].

2.6.5. Caputo Kesirli Türevi

M. Caputo, Riemann - Louville tanımının Laplace dönüşüm ifadesinin uygulamalarında ortaya çıkan başlangıç değerlerin hesaplanması veya deneysel yolla ölçülmesi problemini ortadan kaldırmak amacıyla 1967'de kesirli türevin bir başka tanımı olan Caputo kesirli türevini;

$$ {}_a^CD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad (n-1 < \alpha < n) $$

şeklinde tanımlamıştır. Caputo yaklaşımının en temel avantajı, Caputo kesirli türevlerinin tam sayı mertebeden diferansiyel denklemlerle aynı formda başlangıç şartlarına sahip olmasıdır [1].

Teorem 2.1. $f(t) = (t-a)^v$ olmak üzere $f(t)$'nin diferintegrali;

$$ {}_aD_t^p (t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t-a)^{v-p}, \quad (v \in \mathbb{R}) $$

eşitliğiyle verilir.

İspat: $f(t)=(t-a)^v$ ise önce $-p$ katlı Riemann - Liouville kesirli integrali alınırsa;

$$ {}_aD_t^p(t-a)^v=\frac{1}{\Gamma(-p)}\int_a^t(t-\tau)^{-p-1}(\tau-a)^v d\tau $$

yazılır. Kabul edelim ki $v>-1$ olsun. $\tau=a+\xi(t-a)$ alarak;

$$ {}_aD_t^p(t-a)^v=\frac{1}{\Gamma(-p)}(t-a)^{v-p}\int_0^1\xi^v(1-\xi)^{-p-1}d\xi $$

$$ =\frac{1}{\Gamma(-p)}B(-p,v+1)(t-a)^{v-p} $$

$$ =\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)}(t-a)^{v-p}\,,\quad (p<0,\;\; v>-1) $$

elde edilir.

Şimdi $0\le m\le p<m+1$ durumunu göz önüne alalım. Grünwald - Letnikov kesirli türevini kullanmak için $v>m$ almalıyız. Grünwald - Letnikov kesirli türevinde seri toplamı sıfır olduğundan;

$$ {}_aD_t^p(t-a)^v=\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t(t-\tau)^{m-p}\frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}}d\tau $$

elde edilir. Bu son eşitlikte

$$ \frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}}=v(v-1)\dots(v-m)(\tau-a)^{v-m-1}=\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)}(\tau-a)^{v-m-1} $$

ve $\tau=a+\xi(t-a)$ alırsak;

$$ {}_aD_t^p(t-a)^v=\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)}\int_0^1(1-\xi)^{m-p}\,(\xi)^{v-m-1}d\xi $$

$$ =\frac{\Gamma(v+1)B(-p+m+1,v-m)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)}(t-a)^{v-p} $$

$$ =\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-p+v+1)}(t-a)^{v-p} $$

elde edilir [1].

Örnek 2.1. $f(x) = C$ sabit fonksiyonunun kesirli integralini bulalım.

Çözüm: Riemann - Liouville kesirli integralinde $f(x) = C$ alınırsa;

$$ {}_aD_x^{-q}C = \frac{C}{\Gamma(q)}\int_a^x (x-t)^{q-1}dt = \frac{C}{\Gamma(q+1)}(x-a)^q $$

bulunur.

Örnek 2.2. $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini bulalım.

Çözüm: Önce x^2 ve 1'in ayrı ayrı $\frac{1}{2}$. mertebeden türevlerini bulup daha sonra $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini bulabiliriz. O halde Teorem 2.1 yardımıyla

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}x^2}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)}x^{2-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}, $$

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}1}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\frac{1}{2}+1)}x^{0-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}} $$

bulunur, buradan da

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{d^{\frac{1}{2}}(x^2+1)}{dx^{\frac{1}{2}}} $$

$$ = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}} $$

elde edilir.

Örnek 2.3. $f(x) = e^{3x}$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini hesaplayalım.

Çözüm: Burada $q = \frac{1}{2}$ için $n - 1 \leq q < n$ eşitsizliğinden $n = 1$ olduğu görülür. Dolayısıyla $f(t) = e^{3t}$, $n = 1$ ve $q = \frac{1}{2}$ ifadelerini

$$ \frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n+q}}dt $$

Rieman - Liouville kesirli türev formülünde yerine yazarsak;

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}e^{3x}}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{e^{3t}}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}}dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{e^{3t}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt$$

elde ederiz. İlk önce

$$\int_0^x \frac{e^{3t}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt$$

integralini Mathematica programında hesaplarsak;

$$\int_0^x \frac{e^{3t}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt = e^{3x}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{3x})$$

olduğunu görürüz. Daha sonra bu eşitliğin bir kez x'e göre türevi alınırsa;

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{e^{3t}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} + e^{3x}\sqrt{3\pi}\,\mathrm{erf}\big(\sqrt{3x}\big)$$

olur. Böylece;

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}e^{3x}}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{e^{3t}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{3}e^{3x}\,\mathrm{erf}\big(\sqrt{3x}\big)$$

elde edilir.

Örnek 2.4. $f(x) = e^{3x}$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ katlı integralini hesaplayalım.

Çözüm: $f(t) = e^{3t}$ ve $q = \frac{1}{2}$ ifadelerini

$$\frac{d^{-q}f(x)}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-q}}dt$$

Riemann - Liouville kesirli integral formülünde yerine yazarsak;

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}}e^{3x}}{dx^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x \frac{e^{3t}}{(x-t)^{1-\frac{1}{2}}}dt$$

elde ederiz. İlk önce

$$\int_0^x \frac{e^{3t}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt$$

integralini Mathematica programında hesaplarsak;

$$\int_0^x \frac{e^{3t}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt = e^{3x}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{3x})$$

olduğunu görürüz. Böylece;

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}}e^{3x}}{dx^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x \frac{e^{3t}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt=\frac{e^{3x}}{\sqrt{3}}\mathrm{erf}\,(\sqrt{3x})$$

elde edilir.

2.7. Kesirli Türevlerin Özellikleri

2.7.1. Lineerlik

Tam sayı mertebeden türevlere benzer olarak kesirli türevler de lineer bir operatördür.

Lemma 2.1. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$${}_aD_t^p\big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)=\lambda\, {}_aD_t^p f(t)+\mu\, {}_aD_t^p g(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $n-1\le p<n$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}{}_aD_t^p\big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)&=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}\big(\lambda f(\tau)+\mu g(\tau)\big)d\tau\\&=\frac{\lambda}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau\\&\quad+\frac{\mu}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}g(\tau)d\tau\\&=\lambda\, {}_aD_t^p f(t)+\mu\, {}_aD_t^p g(t)\end{aligned}$$

elde edilir [1].

2.7.2. Homojenlik

Herhangi bir C sabiti için homojen olma özelliği;

$$\frac{d^q(Cf)}{[d(x-a)]^q} = C\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}$$

olarak verilir [2].

2.7.3. Bir Serinin Diferintegrali

Diferintegral operatörünün lineerlik özelliğinden faydalanarak her q değeri için, düzgün yakınsak bir serinin;

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q}\sum_{j=0}^{\infty} f_j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{d^q f_j}{[d(x-a)]^q}$$

şeklinde diferintegrali alınabilir. Burada diferintegrali alınan seri de yine aynı aralıkta düzgün yakınsaktır [2].

2.7.4. Birleşme Özelliği

$$D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha$$

$$D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$$

$$D^\alpha f = g \text{ ise } f = D^{-\alpha} g$$

eşitlikleri sınırlı durumlarda geçerlidir. Eğer n ve N değerleri pozitif tam sayı ise;

$$\frac{d^n}{[d(x-a)]^n}\left\{\frac{d^N f}{[d(x-a)]^N}\right\} = \frac{d^{n+N} f}{[d(x-a)]^{n+N}}$$

$$= \frac{d^N}{[d(x-a)]^N}\left\{\frac{d^n f}{[d(x-a)]^n}\right\}$$

ve

$$\frac{d^{-n}}{[d(x-a)]^{-n}}\left\{\frac{d^{-N} f}{[d(x-a)]^{-N}}\right\} = \frac{d^{-n-N} f}{[d(x-a)]^{-n-N}}$$

$$= \frac{d^{-N}}{[d(x-a)]^{-N}}\left\{\frac{d^{-n} f}{[d(x-a)]^{-n}}\right\}$$

yazılabilir. Ancak

$$\frac{d^{\pm n}}{[d(x-a)]^{\pm n}}\left\{\frac{d^{\mp N}f}{[d(x-a)]^{\mp N}}\right\}$$

ifadesini bulmak istediğimizde sonuç her zaman

$$\frac{d^{\pm n \mp N}f}{[d(x-a)]^{\pm n \mp N}}$$

olmaz. Önce integral sonra türevin alındığı durumlarda operatörler;

$$\frac{d^{N}}{[d(x-a)]^{N}}\left\{\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}}\right\}=\frac{d^{N-n}f}{[d(x-a)]^{N-n}}$$

şeklinde, önce türev sonra integralin alındığı durumlarda ise operatörler;

$$\frac{d^{-n}}{[d(x-a)]^{-n}}\left\{\frac{d^{N}f}{[d(x-a)]^{N}}\right\}=\frac{d^{N-n}f}{[d(x-a)]^{N-n}}-\sum_{k=n-N}^{n-1}\frac{[x-a]^{k}}{k!}f^{(N+k-n)}(a)$$

şeklinde birleştirilir [2].

2.7.5. Leibnitz Kuralı

f ve g diferansiyellenebilir ve tek değişkenli fonksiyonlar olmak üzere fg'nin diferintegrali $\gamma \in \mathbb{R}$ için;

$$\frac{d^{\gamma}[fg]}{[d(x-a)]^{\gamma}}=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\gamma}{j}\frac{d^{\gamma-j}f}{[d(x-a)]^{\gamma-j}}\frac{d^{j}g}{[d(x-a)]^{j}}$$

şeklinde gösterilir [2].

2.8. Laplace Dönüşümü

Lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden birisi integral dönüşümüdür. Bir integral dönüşümü;

$$F(s)=\int_{\alpha}^{\beta}K(s,t)f(t)dt$$

şeklindedir. Bu integral dönüşümü yardımı ile, verilen bir $f(t)$ fonksiyonu diğer bir $F(s)$ fonksiyonuna dönüştürülür. $F(s)$ fonksiyonuna $f(t)$'nin integral dönüşümü ve $K(s,t)$'ye de integral dönüşümünün çekirdeği denir. İntegral dönüşümünün $K(s,t)$ çekirdeği değiştikçe, integral dönüşümü değişik adlar alır. İntegral dönüşümünde

$K(s,t) = e^{-st}$ seçilir ve integral sınırları $\alpha = 0$ ve $\beta = \infty$ alınırsa, bu integral dönüşüme Laplace dönüşümü denir. Kısaca

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

denklemi ile tanımlanan, $L\{f(t)\}$ veya $F(s)$'e $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

Riemann - Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü $\alpha > 0$ olmak üzere;

$$L\{\,{}_0D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\,{}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0}, \quad (n-1 \leq \alpha < n)$$

ile tanımlanır.

Ayrıca;

$$L^{-1}\{s^{-\alpha}\} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

ve

$$L^{-1}\{s^{-\alpha}F(s)\} = \,{}_0D_t^{-\alpha} f(t)$$

şeklindedir [9].

3. VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Bu bölümde, kesirli diferansiyel denklemler için başlangıç - değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmiştir. Burada denklemlerin tüm sonuçları Miller - Ross ardışık kesirli türevleri cinsinden verilmiştir. Bunun nedeni, elde edilen sonuçların Miller - Ross ardışık kesirli türevlerinin özel durumları kabul edilen Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevlerine direkt olarak uygulanabilmesidir.

İlk olarak; değişken katsayılı lineer kesirli diferansiyel denklemleri inceleyip, bir terimli ve n - terimli diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremini ispatlayacağız.

Daha sonra, genel formda kesirli diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremini inceleyeceğiz [1].

3.1. Lineer Kesirli Diferansiyel Denklemler

$$ {}_0D_t^{\sigma_n}y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t)\ {}_0D_t^{\sigma_{n-j}}y(t) + p_n(t)y(t) = f(t)\,,\ \ (0 < t < T < \infty) \tag{3.1} $$

$$ \left[\ {}_0D_t^{\sigma_k - 1}y(t)\right]_{t=0} = b_k\,,\ \ k = 1,2,\dots,n \tag{3.2} $$

başlangıç - değer problemini ele alalım. Burada Miller - Ross ardışık kesirli türevleri

$$ {}_aD_t^{\sigma_k} \equiv\ {}_aD_t^{\alpha_k}\ {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \dots\ {}_aD_t^{\alpha_1}; $$

$$ {}_aD_t^{\sigma_k - 1} \equiv\ {}_aD_t^{\alpha_k - 1}\ {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \dots\ {}_aD_t^{\alpha_1}; $$

$$ \sigma_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\,,\ \ (k = 1,2,\dots n); $$

$$ 0 < \alpha_j \leq 1\,,\ \ (j = 1,2,\dots n) $$

şeklindedir ve $f(t) \in L_1(0,T)$ yani

$$ \int_0^T |f(t)|\,dt < \infty $$

dur. Kolaylık olması amacıyla $t > T$ için $f(t) \equiv 0$ olduğunu varsayalım.

İlk olarak $p_k(t) \equiv 0, \ (k = 1,2, \dots n)$ durumunu göz önüne alalım.

Teorem 3.1. $f(t) \in L_1(0, T)$ olmak üzere;

$$ {}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = f(t) \tag{3.3} $$

denklemi (3.2) başlangıç şartlarını sağlayan tek bir $y(t) \in L_1(0, T)$ çözümüne sahiptir.

İspat:

$$ L\{ {}_0D_t^{\sigma_m} f(t); s\} = s^{\sigma_m} F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\sigma_m - \sigma_{m-k}} \left[{}_0D_t^{\sigma_{m-k}-1} f(t) \right]_{t=0} $$

$$ {}_aD_t^{\sigma_{m-k}-1} \equiv {}_aD_t^{\alpha_{m-k}-1} \, {}_aD_t^{\alpha_{m-k-1}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1}, \quad (k = 0,1, \dots, m-1) $$

Laplace dönüşüm formülünü (3.3) denklemine uygularsak;

$$ s^{\sigma_n} Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\sigma_n - \sigma_{n-k}} \left[{}_0D_t^{\sigma_{n-k}-1} y(t) \right]_{t=0} = F(s) $$

denklemini elde ederiz. Burada $Y(s)$ ve $F(s)$ sırasıyla $y(t)$ ve $f(t)$'nin Laplace dönüşümleridir. Ayrıca (3.2) başlangıç şartlarını kullanarak;

$$ Y(s) = s^{-\sigma_n} F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} s^{-\sigma_{n-k}} $$

eşitliğini yazabiliriz. Ters Laplace dönüşümü yardımıyla

$$ y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n - 1} f(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-k}}{\Gamma(\sigma_{n-k})} t^{\sigma_{n-k}-1} $$

veya $i = n - k$ için;

$$ y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n - 1} f(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i - 1} \tag{3.4} $$

yazılabilir. $(t-a)^v$ fonksiyonunun

$$ {}_aD_t^p(t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)}(t-a)^{v-p} $$

şeklinde tanımlı kesirli diferansiyelini alma kuralını uygular ve

$$ \frac{1}{\Gamma(-m)} = 0\,, \quad m = 0,1,2,\ldots $$

olduğunu dikkate alırsak;

$$ {}_0D_t^{\sigma_k}\left(\frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)}\right) = \begin{cases} \dfrac{t^{\sigma_i-\sigma_k-1}}{\Gamma(\sigma_i-\sigma_k)}\,, & (k<i) \\ 0\,, & (k \geq i) \end{cases} \tag{3.5} $$

$$ {}_0D_t^{\sigma_k-1}\left(\frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)}\right) = \begin{cases} \dfrac{t^{\sigma_i-\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_i-\sigma_k)}\,, & (k<i) \\ 1\,, & (k=i) \\ 0\,, & (k>i) \end{cases} \tag{3.6} $$

elde ederiz. Burada $k = 1,2,\ldots,n$ ve $i = 1,2,\ldots,n$’dir.

(3.4)’den $y(t) \in L_1(0,T)$’dir. (3.5) ve (3.6) yardımıyla, (3.4) ile tanımlanan $y(t)$ fonksiyonu (3.2) başlangıç şartını ve (3.3) denklemini sağlar. Buradan çözümün var olduğunu söyleyebiliriz.

Laplace dönüşümünün özelliklerinden ve kesirli diferintegralin lineerliğinden çözüm tektir. Gerçekten de $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ gibi iki tane çözümün var olduğunu düşünürsek $z(t) = y_1(t) - y_2(t)$ fonksiyonu ${}_0D_t^{\sigma_n}z(t) = 0$ denklemini sağlamalıdır. Burada $z(t)$’nin Laplace dönüşümü $Z(s) = 0$’dır. Bu sebeple $z(t) = 0$ olup verilen aralıkta $L_1(0,T)$’deki çözüm tektir.

Şimdi (3.1) - (3.2) probleminin çözümünün varlık ve tekliğini ispatlayalım.

Teorem 3.2. Eğer $f(t) \in L_1(0,T)$ ve $p_j(t)$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, $[0,T]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ise bu takdirde (3.1) - (3.2) başlangıç – değer probleminin $y(t) \in L_1(0,T)$ çözümü tektir.

İspat: Kabul edelim ki (3.1) - (3.2) problemi $y(t)$ çözümüne sahip ve

$$ {}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = \phi(t) \tag{3.7} $$

olsun. Teorem (3.1)'i kullanarak;

$$ y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n - 1} \phi(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \tag{3.8} $$

yazabiliriz. (3.8), (3.1)'de yerine yazılırsa;

$$ {}_0D_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t)\ {}_0D_t^{\sigma_k} y(t) + p_n(t) y(t) = f(t) $$

elde edilir. (3.5) kullanılarak $\phi(t)$ fonksiyonu için;

$$ \phi(t) + \int_0^t K(t,\tau)\phi(\tau) d\tau = g(t) \tag{3.9} $$

şeklinde ikinci cins Volterra integral denklemi elde edilir. Burada;

$$ K(t,\tau) = p_n(t) \frac{(t-\tau)^{\sigma_n - 1}}{\Gamma(\sigma_n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \frac{(t-\tau)^{\sigma_n - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_n - \sigma_k)} $$

$$ g(t) = f(t) - p_n(t) \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} - \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \sum_{i=k+1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_i - \sigma_k)} $$

dır.

$p_j(t)$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, $[0,T]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olduğu için $K(t,\tau)$ çekirdek fonksiyonu;

$$ K(t,\tau) = \frac{K^*(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\mu}} \tag{3.10} $$

şeklinde zayıf singüler çekirdek formunda yazılabilir. Burada $K^*(t,\tau)$, $0 \le t \le T$, $0 \le \tau \le T$ için sürekli ve

$$ \mu = min\{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_{n-1}, \sigma_n - \sigma_{n-2}, \ldots, \sigma_n - \sigma_1\} = min\{\sigma_n, \alpha_n\} $$

dir. Benzer şekilde $g(t)$ fonksiyonu;

$$g(t) = \frac{g^*(t)}{t^{1-v}}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g^*(t)$, $[0, T]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca;

$$v = min\{\sigma_1, \dots, \sigma_n; \sigma_2 - \sigma_1, \dots, \sigma_n - \sigma_1; \sigma_3 - \sigma_2, \dots, \sigma_n - \sigma_2; \dots; \sigma_n - \sigma_{n-1}\}$$

$$= min\{\sigma_1, \dots, \sigma_n; \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

$$= min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \qquad (0 < \mu \leq 1\,,\ 0 < v \leq 1)$$

dir.

(3.10) ile tanımlı çekirdeği bulunduran (3.9) denklemi $\phi(t) \in L_1(0, T)$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir. Bu takdirde Teorem (3.1)'e göre (3.7) - (3.2) probleminin $y(t) \in L_1(0, T)$ çözümü tektir. Aynı zamanda (3.1) - (3.2) probleminin çözümü (3.8) formülü kullanılarak elde edilebilir. Böylece Teorem (3.2)'nin ispatı tamamlanır.

$$m - 1 \leq \sigma_n < m$$

olmak üzere;

$$y^j(0) = 0\,,\ \ (j = 0,1, \dots, m-1) \tag{3.11}$$

olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda Riemann - Liouville kesirli türev kuralı kullanılarak, (3.1) denkleminde aynı σ_k mertebeden ardışık kesirli türevler alınırsa;

$$_0D_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t)\ {_0D_t^{\sigma_{n-j}}} y(t) + p_n(t) y(t) = f(t) \tag{3.12}$$

elde edilir.

Teorem 3.3. $f(t)$ ve $p_j(t)$ $(j = 1,2, \dots, n)$ fonksiyonları $[0, T]$ aralığında sürekli ise bu takdirde (3.12) - (3.11) başlangıç - değer problemi;

$$m - 1 \leq \sigma_n < m\,, \quad \sigma_n > \sigma_{n-1} > \sigma_{n-2} > \cdots > \sigma_2 > \sigma_1 > 0$$

olmak üzere $[0, T]$ aralığında sürekli tek bir $y(t)$ çözümüne sahiptir.

3.2. Genel Formda Kesirli Diferansiyel Denklem

Uygulamalarda lineer kesirli diferansiyel denklemlerin yanı sıra lineer olmayan diferansiyel denklemler de görülür.

Miller - Ross, Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevleri birbiriyle ilişkili olduğundan dolayı kesirli diferintegralin tüm durumları için sonuçlar aşağıdaki gibi verilebilir.

$$ {}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = f(t,y) \tag{3.13}$$

$$ \left[{}_0D_t^{\sigma_k - 1} y(t) \right]_{t=0} = b_k \,, \quad (k = 1,2,\dots,n) \tag{3.14}$$

başlangıç - değer problemini göz önüne alalım. Burada

$$ {}_aD_t^{\sigma_k} \equiv {}_aD_t^{\alpha_k} \, {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \cdots {}_aD_t^{\alpha_1}; $$

$$ {}_aD_t^{\sigma_k - 1} \equiv {}_aD_t^{\alpha_k - 1} \, {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \cdots {}_aD_t^{\alpha_1}; $$

$$ \sigma_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \,, \quad (k = 1,2,\dots n); $$

$$ 0 < \alpha_j \leq 1 \,, \quad (j = 1,2,\dots n) $$

dir.

Farzedelim ki $f(t,y)$ fonksiyonu (t,y) düzleminin bir G bölgesinde tanımlı olsun. $(t,y) \in G$ noktalarının kümesi $R(h,k) \subset G$ olmak üzere;

$$ 0 < t < h \,, \quad \left| t^{1-\sigma_1} y(t) - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - \sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq K $$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada h ve K sabitlerdir.

Teorem 3.4. $f(t,y)$, G bölgesinde tanımlı, reel değerli, sürekli ve y'ye göre Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Yani her $(t,y) \in G$ için;

$$ |f(t,y)| \leq M < \infty $$

olmak üzere

$$ |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq A|y_1 - y_2| $$

dir. Aynı zamanda;

$$K \geq \frac{Mh^{\sigma_n - \sigma_1 + 1}}{\Gamma(1+\sigma_n)}$$

dir. O zaman (3.13) - (3.14) başlangıç - değer probleminin $R(h, K)$ bölgesinde sürekli bir $y(t)$ çözümü var ve tektir.

4. İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ VE KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN KESİRLİ HESABIN UYGULAMALARI

Bu bölümde kesirli hesap yardımıyla singüler katsayılı ikinci mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmamıza yarayan teoremler vereceğiz.

Nishimoto [10] çalışmalarında kesirli diferansiyel denklemlerin ve bazı sınıflarının çözümlerini bulmak için bir takım teoriler geliştirmiştir.

Bazı singüler katsayılı adi ve kısmi diferansiyel denklemler için özel çözümleri; Romero, Srivastava [11], Srivastava, Owa, Nishimoto [12], Tu, Chyan, Srivastava [13], Tu, Nishimoto, Jaw, Lin [14], Nishimoto [15-18], Nishimoto, Kalla [19] çalışmalarında elde etmişlerdir.

$f = f(z)$ olsun. Düzgün bir D bölgesinde $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere v. mertebeden kesirli türev ve integrali alınabilir fonksiyonların kümesini $\mathcal{F}$ ile gösterelim. Buna göre D’de

$$|f_v| < \infty \Leftrightarrow f \in \mathcal{F}$$

dir [14].

Teorem 4.1. $f \in \mathcal{F}$ ve $f_{-\alpha-1} \neq 0$ olsun. O zaman

$$(z-a)(z-b)\phi_2 + (C+Dz)\phi_1 + E\phi = f\,, \quad (z \neq a\,, z \neq b) \tag{4.1}$$

şeklinde homojen olmayan ikinci mertebeden adi lineer diferansiyel denklem $a \neq b$ için;

$$\phi = \Big(\big(f_{-\alpha-1}[(z-a)(z-b)]^{-(\alpha+2)}(z-a)^{(C+aD)/(a-b)}(z-b)^{-(C+bD)/(a-b)}\big)_{-1}$$

$$.\,[(z-a)(z-b)]^{1+\alpha}(z-a)^{-(C+aD)/(a-b)}(z-b)^{(C+bD)/(a-b)}\Big)_{\alpha} \tag{4.2}$$

ve $a = b$ için;

$$\phi = \Big(\big(f_{-\alpha-1}(z-a)^{-(2\alpha+4-D)}e^{-(C+aD)/(z-a)}\big)_{-1}(z-a)^{2\alpha+2-D}e^{(C+aD)/(z-a)}\Big)_{\alpha} \tag{4.3}$$

formunda özel çözümlere sahiptir.

Burada a, b, C, D ve E’ler sabitler, $\Phi = \Phi(z)$, $f = f(z)$ bilinen fonksiyon ve

$$\alpha = \frac{(D-3) \mp \sqrt{(D-1)^2 - 4E}}{2}, \quad (D-1)^2 \geq 4E$$

dir.

İspat: $a \neq b$ için α'yı;

$$(\alpha+1)(D-\ \alpha-2) = E \tag{4.4}$$

ya da

$$\alpha = \frac{(D-3) \mp \sqrt{(D-1)^2 - 4E}}{2}, \quad (D-1)^2 \geq 4E \tag{4.5}$$

olacak şekilde seçelim.

$$\phi = \omega_\alpha\,,\ \ \phi_1 = \omega_{\alpha+1}\,,\ \ \phi_2 = \omega_{\alpha+2} \tag{4.6}$$

olsun. (4.6), (4.1)'de yerine yazılırsa;

$$(z-a)(z-b)\omega_{\alpha+2} + (C+Dz)\omega_{\alpha+1} + (\alpha+1)(D-\ \alpha-2)\omega_\alpha = f \tag{4.7}$$

elde edilir. Leibnitz kuralından;

$$\begin{aligned}\big(\omega_1(z-a)(z-b)\big)_{\alpha+1} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha-k+2)\Gamma(k+1)} \omega_{\alpha+2-k}\big((z-a)(z-b)\big)_k \\ &= \omega_{\alpha+2}(z-a)(z-b) + (\alpha+1)(2z-a-b)\omega_{\alpha+1} \\ &\quad +\alpha(\alpha+1)\omega_\alpha\,,\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}(2\alpha+2-D)(\omega \mathrm{z})_{\alpha+1} &= (2\alpha+2-D)\sum_{k=0}^{1} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha-k+2)\Gamma(k+1)} \omega_{\alpha+1-k} z_k \\ &= (2\alpha+2-D)(z\omega_{\alpha+1} + (\alpha+1)\omega_\alpha) \\ &= (2\alpha+2-D)z\omega_{\alpha+1} + (2\alpha+2-D)(\alpha+1)\omega_\alpha\end{aligned} \tag{4.9}$$

ve

$$([C+(a+b)(\alpha+1)]\omega)_{\alpha+1}=[C+(a+b)(\alpha+1)]\omega_{\alpha+1} \tag{4.10}$$

olur. Böylece (4.8), (4.9) ve (4.10) yardımıyla, (4.7)'yi

$$\big(\omega_1(z-a)(z-b)\big)_{\alpha+1}-(2\alpha+2-D)(\omega z)_{\alpha+1}+[C+(a+b)(\alpha+1)]\omega_{\alpha+1}$$

$$=(z-a)(z-b)\omega_{\alpha+2}+(C+Dz)\omega_{\alpha+1}+[\alpha(\alpha+1)-(2\alpha+2-D)(\alpha+1)]\omega_\alpha$$

$$=f$$

şeklinde elde ederiz. Buna göre son eşitlikten;

$$\Big(\omega_1(z-a)(z-b)-\big[(2\alpha+2-D)z-\big(C+(a+b)(\alpha+1)\big)\big]\omega\Big)_{\alpha+1}=f$$

olur. Buradan

$$\omega_1-\frac{(2\alpha+2-D)z-\big(C+(a+b)(\alpha+1)\big)}{(z-a)(z-b)}\omega=f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)(z-b)} \tag{4.11}$$

eşitliği elde edilir.

$$P(z)=-\int\frac{(2\alpha+2-D)z-\big(C+(a+b)(\alpha+1)\big)}{(z-a)(z-b)}dz$$

$$=-\left\{\left[(1+\alpha)-\frac{\mathrm{C+aD}}{\mathrm{a-b}}\right]\log(z-a)+\left[(1+\alpha)+\frac{\mathrm{C+bD}}{\mathrm{a-b}}\right]\log(z-b)\right\} \tag{4.12}$$

olsun. Buradan;

$$e^{P(z)}=(z-a)^{-\left[(1+\alpha)-\frac{\mathrm{C+aD}}{\mathrm{a-b}}\right]}(z-b)^{-\left[(1+\alpha)+\frac{\mathrm{C+bD}}{\mathrm{a-b}}\right]}$$

olur. O zaman (4.11) ifadesinden;

$$\left(\omega e^{P(z)}\right)_1=f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)(z-b)}e^{P(z)}$$

elde edilir. Böylece

$$\omega=\left(f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)(z-b)}e^{P(z)}\right)_{-1}e^{-P(z)} \tag{4.13}$$

olur. Bu nedenle $a\neq b$ için (4.1)'in ϕ özel çözümü;

$$\phi = \omega_\alpha = \left[\left(f_{-\alpha-1} \tfrac{1}{(z-a)(z-b)} e^{P(z)}\right)_{-1} e^{-P(z)}\right]_\alpha$$

$$= \left[\left(f_{-\alpha-1}[(z-a)(z-b)]^{-(\alpha+2)}(z-a)^{(C+aD)/(a-b)}(z-b)^{-(C+bD)/(a-b)}\right)_{-1}\right.$$

$$\left. .\,[(z-a)(z-b)]^{\alpha+1}(z-a)^{-(C+aD)/(a-b)}(z-b)^{(C+bD)/(a-b)}\right]_\alpha \qquad (4.14)$$

olur, burada α (4.5)'deki gibidir.

Diğer taraftan (4.14) doğrudur. Çünkü (4.12) ve (4.13)'den

$$\left(e^{-P(z)}\right)_1 = e^{-P(z)}(-P(z))_1$$

$$= e^{-P(z)} \frac{(2\alpha+2-D)z - \left(C + (a+b)(\alpha+1)\right)}{(z-a)(z-b)}$$

ve

$$\omega_1 = \left[\left(f_{-\alpha-1} \frac{1}{(z-a)(z-b)} e^{P(z)}\right)_{-1} e^{-P(z)}\right]_1$$

$$= f_{-\alpha-1} \tfrac{1}{(z-a)(z-b)} + \left(f_{-\alpha-1} \tfrac{1}{(z-a)(z-b)} e^{P(z)}\right)_{-1} e^{-P(z)}$$

$$.\frac{(2\alpha+2-D)z - \left(C + (a+b)(\alpha+1)\right)}{(z-a)(z-b)}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.1)'in sol tarafında ω ve ω_1 yerine yazılırsa;

$$(z-a)(z-b)\phi_2 + (C+Dz)\phi_1 + E\phi$$

$$= \left(\omega_1(z-a)(z-b)\right)_{\alpha+1} - (2\alpha+2-D)(\omega \mathrm{z})_{\alpha+1} + [C + (a+b)(\alpha+1)]\omega_{\alpha+1}$$

$$= \{\omega_1(z-a)(z-b) - [\{(2\alpha+2-D)z - [C+(a+b)(\alpha+1)]\}\omega]\}_{\alpha+1}$$

$$= \left\{f_{-\alpha-1} + \left(f_{-\alpha-1} \frac{1}{(z-a)(z-b)} e^{P(z)}\right)_{-1}\right.$$

$$.\,e^{-P(z)}\left((2\alpha+2-D)z - [C+(a+b)(\alpha+1)]\right)$$

$$-\left((2\alpha+2-D)z - [C+(a+b)(\alpha+1)]\right)$$

$$\left. .\left(f_{-\alpha-1} \frac{1}{(z-a)(z-b)} e^{P(z)}\right)_{-1} e^{-P(z)}\right\}_{\alpha+1}$$

$$= (f_{-\alpha-1})_{\alpha+1} = (f)_0 = f$$

olur. Bu ise bize (4.14) eşitliğinin $\alpha \neq b$ için (4.1)'in özel çözümü olduğunu gösterir.

Şimdi de $a = b$ durumunu göz önüne alalım. $a = b$ için (4.1) ifadesi;

$$(z-a)^2\phi_2 + (C+Dz)\phi_1 + E\phi = f\,, \qquad (z \neq a) \tag{4.15}$$

şeklinde olur.

$$\alpha = \frac{(D-3) \mp \sqrt{(D-1)^2 - 4E}}{2}\,, \quad (D-1)^2 \geq 4E$$

veya

$$(\alpha+1)(D-\ \alpha-2) = E$$

ve

$$\phi = \omega_\alpha,\ \ \phi_1 = \omega_{\alpha+1}\,,\ \ \phi_2 = \omega_{\alpha+2}$$

alınırsa;

$$(z-a)^2\omega_{\alpha+2} + (C+Dz)\omega_{\alpha+1} + (\alpha+1)(D-\alpha-2)\omega_\alpha = f$$

elde edilir. Leibnitz kuralından;

$$(\omega_1(z-a)^2)_{\alpha+1} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha-k+2)\Gamma(k+1)}\omega_{\alpha+2-k}((z-a)^2)_k$$

$$= \omega_{\alpha+2}(z-a)^2 + 2(\alpha+1)(z-a)\omega_{\alpha+1} + \alpha(\alpha+1)\omega_\alpha\,, \tag{4.16}$$

$$(2\alpha+2-D)(\omega z)_{\alpha+1} = (2\alpha+2-D)\sum_{k=0}^{1} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha-k+2)\Gamma(k+1)}\omega_{\alpha+1-k}z_k$$

$$= (2\alpha+2-D)(z\omega_{\alpha+1} + (\alpha+1)\omega_\alpha)$$

$$= (2\alpha+2-D)z\omega_{\alpha+1} + (2\alpha+2-D)(\alpha+1)\omega_\alpha \tag{4.17}$$

ve

$$([C+2a(\alpha+1)]\omega)_{\alpha+1} = [C+2a(\alpha+1)]\omega_{\alpha+1} \tag{4.18}$$

bulunur. Bu durumda (4.15),

$$(\omega_1(z-a)^2)_{\alpha+1} - \big[\big((2\alpha+2-D)z - [C+2a(\alpha+1)]\big)\omega\big]_{\alpha+1} = f$$

şeklinde yazılabileceğinden;

$$\omega_1 - \frac{(2\alpha + 2 - D)z - [C + 2a(\alpha + 1)]}{(z-a)^2}\omega = f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)^2} \tag{4.19}$$

olur.

$$Q(z) = -\int \frac{(2\alpha + 2 - D)z - [C + 2a(\alpha + 1)]}{(z-a)^2}dz$$

$$= -(2\alpha + 2 - D)\log(z-a) - \frac{(C + aD)}{(z-a)}, \tag{4.20}$$

olsun. Buradan

$$e^{Q(z)} = (z-a)^{-(2\alpha+2-D)}e^{-(C+aD)/(z-a)}$$

olur. (4.19)'dan;

$$\left(\omega e^{Q(z)}\right)_1 = f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)^2}e^{Q(z)} \tag{4.21}$$

elde edilir. Böylece (4.21)'den;

$$\omega = \left(f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)^2}e^{Q(z)}\right)_{-1} e^{-Q(z)} \tag{4.22}$$

bulunur. Bu nedenle (4.15)'in bir ϕ özel çözümü;

$$\phi = \omega_\alpha = \left[\left(f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)^2}e^{Q(z)}\right)_{-1} e^{-Q(z)}\right]_\alpha$$

$$= \left[\left(f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)^2}(z-a)^{-(2\alpha+2-D)}e^{-(C+aD)/(z-a)}\right)_{-1}\right.$$

$$\left. .\,(z-a)^{(2\alpha+2-D)}e^{(C+aD)/(z-a)}\right]_\alpha$$

$$= \left[\left(f_{-\alpha-1}(z-a)^{-(2\alpha+4-D)}e^{-(C+aD)(z-a)}\right)_{-1}\right.$$

$$\left. .\,(z-a)^{(2\alpha+2-D)}e^{(C+aD)/(z-a)}\right]_\alpha \tag{4.23}$$

olur. Tersine, (4.23) sağlanırsa (4.20) ve (4.22)'den

$$\left(e^{-Q(z)}\right)_1 = e^{-Q(z)}(-Q(z))_1$$

$$= e^{-Q(z)}\frac{(2\alpha+2-D)z-[C+2a(\alpha+1)]}{(z-a)^2}$$

ve

$$\omega_1 = \left[\left(f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)^2}e^{Q(z)}\right)_{-1} e^{-Q(z)}\right]_1$$

$$= f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)^2} + \left(f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)^2}e^{Q(z)}\right)_{-1} e^{-Q(z)}$$

$$.\frac{(2\alpha+2-D)z-[C+2a(\alpha+1)]}{(z-a)^2}$$

elde edilir. (4.15)'in sol tarafında ω ve ω_1 ifadesi yerine yazılırsa;

$$(z-a)^2\phi_2 + (C+Dz)\phi_1 + E\phi$$

$$= (z-a)^2\omega_{\alpha+2} + (C+Dz)\omega_{\alpha+1} + E\omega_\alpha$$

$$= (z-a)^2\omega_{\alpha+2} + (C+Dz)\omega_{\alpha+1} + [\alpha(\alpha+1)-(2\alpha+2-D)(\alpha+1)]\omega_\alpha$$

$$= \left[\omega_1(z-a)^2 - \big((2\alpha+2-D)z-C-2a(\alpha+1)\big)\omega\right]_{\alpha+1}$$

$$= \Bigg[f_{-\alpha-1} + \left(f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)^2}e^{Q(z)}\right)_{-1}$$

$$.\,e^{-Q(z)}\big((2\alpha+2-D)z-[C+2a(\alpha+1)]\big)$$

$$-\big((2\alpha+2-D)z-C-2a(\alpha+1)\big)$$

$$.\left(f_{-\alpha-1}\frac{1}{(z-a)^2}e^{Q(z)}\right)_{-1} e^{-Q(z)}\Bigg]_{\alpha+1}$$

$$= (f_{-\alpha-1})_{\alpha+1} = f$$

olur. Böylece Teorem 4.1'in ispatı tamamlanır.

Teorem 4.2.

$$(z-a)(z-b)\phi_2 + (C+Dz)\phi_1 + E\phi = 0\,, \quad (z \neq a, z \neq b) \tag{4.24}$$

şeklinde homojen ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem $a \neq b$ için;

$$\phi = M\left(\left((z-a)(z-b)\right)^{1+\alpha}(z-a)^{-\frac{(C+aD)}{(a-b)}}(z-b)^{\frac{(C+bD)}{(a-b)}}\right)_\alpha \tag{4.25}$$

ve $a = b$ için;

$$\phi = M\left((z-a)^{2\alpha+2-D}e^{(C+aD)/(z-a)}\right)_\alpha \tag{4.26}$$

formunda çözümlere sahiptir. Burada a, b, C, D ve E'ler sabitler, M bir keyfi integral sabiti, $\phi = \phi(z)$'dir.

İspat: $a \neq b$ için α ve ϕ'yi (4.4) ve (4.6)'daki gibi tanımlayalım. O halde (4.24)'den

$$(z-a)(z-b)\omega_{\alpha+2} + (C+Dz)\omega_{\alpha+1} + [\alpha(\alpha+1) - (2\alpha+2-D)(\alpha+1)]\omega_\alpha = 0$$

elde edilir. (4.8), (4.9) ve (4.10)'dan;

$$(\omega_1(z-a)(z-b))_{\alpha+1} - (2\alpha+2-D)(\omega z)_{\alpha+1} + (C+(a+b)(\alpha+1))\omega_{\alpha+1} = 0$$

yani

$$\omega_1 - \frac{(2\alpha+2-D)z - C - (a+b)(\alpha+1)}{(z-a)(z-b)}\omega = 0 \tag{4.27}$$

olur. (4.27) diferansiyel denkleminin çözümü;

$$\omega = Me^{-P(z)}$$

ile verilir. Burada $P(z)$ (4.12)'deki gibi tanımlı ve M bir keyfi integral sabitidir. Böylece;

$$\phi = \omega_\alpha = \left(Me^{-P(z)}\right)_\alpha$$

$$= M\left[\left((z-a)(z-b)\right)^{1+\alpha}(z-a)^{-\frac{(C+aD)}{(a-b)}}(z-b)^{\frac{(C+bD)}{(a-b)}}\right]_\alpha \tag{4.28}$$

olur. Tersine, (4.24)'ün sol tarafında ω ve ω_1 yerine yazılırsa;

$$(z-a)(z-b)\phi_2+(C+Dz)\phi_1+E\phi$$

$$=\big(\omega_1(z-a)(z-b)\big)_{\alpha+1}-(2\alpha+2-D)(\omega z)_{\alpha+1}+\big(C+(a+b)(\alpha+1)\big)\omega_{\alpha+1}$$

$$=\Bigg\{Me^{-P(z)}\frac{(2\alpha+2-D)z-\big(C+(a+b)(\alpha+1)\big)}{(z-a)(z-b)}(z-a)(z-b)$$

$$-\big[(2\alpha+2-D)z-\big(C+(a+b)(\alpha+1)\big)\big]Me^{-P(z)}\Big\}_{\alpha+1}$$

$$=(0)_{\alpha+1}=0$$

elde edilir.

Son olarak $a=b$ için (4.26)'nın ispatını yapalım. α ve ϕ'yi (4.4) ve (4.6)'daki gibi tanımlayalım. Bu durumda

$$(z-a)^2\phi_2+(C+Dz)\phi_1+E\phi=0\,,\qquad (z\neq a) \tag{4.29}$$

ifadesi;

$$(\omega_1(z-a)^2)_{\alpha+1}+(C+Dz)\omega_{\alpha+1}+(\alpha+1)(D-\alpha-2)\omega_\alpha=0$$

şeklinde yazılabilir. (4.16), (4.17) ve (4.18)'den;

$$\Big(\omega_1(z-a)^2-\Big((2\alpha+2-D)z-\big(C+2a(\alpha+1)\big)\Big)\,\omega\Big)_{\alpha+1}=0$$

yani

$$\omega_1-\frac{(2\alpha+2-D)z-\big(C+2a(\alpha+1)\big)}{(z-a)^2}\omega=0 \tag{4.30}$$

yazılabilir. $Q(z)$, (4.20)'deki gibi tanımlı olmak üzere (4.30) denkleminin çözümü;

$$\omega=Me^{-Q(z)}$$

ile verilir. Öyleyse;

$$\phi=\omega_\alpha=\big(Me^{-Q(z)}\big)_\alpha$$

$$=M\big((z-a)^{2\alpha+2-D}e^{(C+aD)/(z-a)}\big)_\alpha$$

olur. Tersine, ω ve ω_1 (4.29)'un sol tarafında yerine yazılırsa;

$$(z-a)^2\phi_2+(C+Dz)\phi_1+E\phi$$

$$=(\omega_1(z-a)^2)_{\alpha+1}-(2\alpha+2-D)(\omega z)_{\alpha+1}+\big(C+2a(\alpha+1)\big)\omega_{\alpha+1}$$

$$=\Bigg\{Me^{-Q(z)}\frac{(2\alpha+2-D)z-\big(C+2a(\alpha+1)\big)}{(z-a)^2}(z-a)^2$$

$$-\big[(2\alpha+2-D)z-\big(C+2a(\alpha+1)\big)\big]Me^{-Q(z)}\Big\}_{\alpha+1}$$

$$=(0)_{\alpha+1}=0$$

elde edilir.

Teorem 4.3. $f\in\mathcal{F}$ ve $f_{-\alpha-1}\neq 0$ olsun. $a\neq b$ için;

$$\phi=\Big(\big(f_{-\alpha-1}[(z-a)(z-b)]^{-(\alpha+2)}(z-a)^{(C+aD)/(a-b)}(z-b)^{-(C+bD)/(a-b)}\big)_{-1}$$

$$.\,[(z-a)(z-b)]^{\alpha+1}(z-a)^{-(C+aD)/(a-b)}(z-b)^{(C+bD)/(a-b)}\Big)_{\alpha}$$

$$+M\left(\big((z-a)(z-b)\big)^{\alpha+1}(z-a)^{-\frac{(C+aD)}{(a-b)}}(z-b)^{\frac{(C+bD)}{(a-b)}}\right)_{\alpha}$$

fonksiyonu (4.1) denklemini ve $a=b$ için;

$$\phi=\left(\left(f_{-\alpha-1}(z-a)^{-(2\alpha+4-D)}e^{-\frac{(C+aD)}{(z-a)}}\right)_{-1}(z-a)^{2\alpha+2-D}e^{\frac{(C+aD)}{(z-a)}}\right)_{\alpha}$$

$$+M\big((z-a)^{2\alpha+2-D}e^{(C+aD)/(z-a)}\big)_{\alpha}$$

fonksiyonu da (4.15) denklemini sağlar.

Burada a,b,C,D ve E'ler sabitler, $\phi=\phi(z)$, α (4.5)'deki gibi tanımlı ve M bir keyfi integral sabitidir.

Örnek 4.1. Homojen olmayan ikinci mertebeden

$$(z^2-z)\phi_2-2z\phi_1+2\phi=(z-1)^3\ ,\ \ (z\neq 0, z\neq 1)$$

diferansiyel denklemi;

$$\phi=\frac{1}{2}(z-1)^3$$

formunda özel bir çözüme sahiptir.

Eğer Teorem 4.1'de $a=C=0,\ b=1,\ D=-2,\ E=2$ ve $f=(z-1)^3$ alınırsa;

$$\alpha = \frac{(D-3) \mp \sqrt{(D-1)^2 - 4E}}{2}$$

den $\alpha = -2$ veya $\alpha = -3$ olur. Buradan; $\alpha = -2$ için (4.2)'den

$$\phi = \left((f_1(z-1)^{-2})_{-1} \frac{z-1}{z}\right)_{-2} = (3(z-1))_{-2} = \frac{1}{2}(z-1)^3$$

elde edilir.

Örnek 4.2. Homojen olmayan ikinci mertebeden

$$(z^2 - 2z)\phi_2 + \left(\frac{5}{2}z - 2\right)\phi_1 + \frac{1}{2}\phi = \left(\left(\frac{z-2}{z}\right)_1 z^{\frac{1}{2}}\right)_{\frac{1}{2}}, \quad (z \neq 0, z \neq 2)$$

diferansiyel denklemi;

$$\phi = \left(z^{-\frac{3}{2}}\right)_{-\frac{1}{2}} = i\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} z^{-1}$$

formunda özel bir çözüme sahiptir.

Eğer Teorem 4.1'de $a = 0,\ b = 2,\ C = -2,\ D = \frac{5}{2},\ E = \frac{1}{2}$ ve $f = \left(\left(\frac{z-2}{z}\right)_1 z^{\frac{1}{2}}\right)_{\frac{1}{2}}$

alınırsa;

$$\alpha = \frac{(D-3) \mp \sqrt{(D-1)^2 - 4E}}{2}$$

den $\alpha = 0$ veya $\alpha = -\frac{1}{2}$ olur. Buradan; $\alpha = -\frac{1}{2}$ için (4.2)'den

$$\phi = \left(\left(f_{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}\right)_{-1} z^{-\frac{1}{2}}(z-2)^{-1}\right)_{-\frac{1}{2}} = \left(z^{-\frac{3}{2}}\right)_{-\frac{1}{2}} = i\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} z^{-1}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1. Teorem 4.2'de $a = b = 0,\ C = 0,\ D = 2v - k$ ve $E = v(v-1-k)$ alırsak; $\alpha = v - 1$ elde ederiz. Bu durumda

$$z^2\phi_2 + [(2v-k)z]\phi_1 + v(v-1-k)\phi = 0$$

denkleminin çözümü;

$$\phi = M(\,z^k\, e^0)_{v-1} = M(\,z^k)_{v-1}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.2. Teorem 4.1'de $a=0,\ b=1,\ C=\gamma-1,\ D=\gamma$ ve $E=k(\gamma-k-1)$ alırsak; (4.1) denklemi hipergeometrik diferansiyel denklem olur ve $\alpha=k-1$ elde ederiz. Bu durumda

$$z(z-1)\phi_2+(\gamma-1+\gamma z)\phi_1+k(\gamma-k-1)\phi=f$$

denkleminin çözümü;

$$\phi=\left(\left(f_{-k}\big(z(z-1)\big)^{-k-1}z^{1-\gamma}(z-1)^{2\gamma-1}\right)_{-1}\big(z(z-1)\big)^{k}z^{\gamma-1}(z-1)^{1-2\gamma}\right)_{k-1}$$

$$=((f_{-k}z^{-k-\gamma}(z-1)^{-k+2\gamma-2})_{-1}z^{k+\gamma-1}(z-1)^{k-2\gamma+1})_{k-1}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.3. Teorem 4.1'de $a=1,\ b=-1,\ C=0,\ D=2$ ve $E=-v(v+1)$ alırsak (4.1) denklemi v. mertebeden Legendre denklemi olur ve $\alpha=v$ elde ederiz. Bu durumda

$$(z-1)(z+1)\phi_2+(2z)\phi_1-v(v+1)\phi=f$$

denkleminin çözümü;

$$\phi=\left(\left(f_{-v-1}(z^2-1)^{-(v+2)}(z^2-1)\right)_{-1}(z^2-1)^{v+1}\,(z^2-1)^{-1}\right)_{v}$$

$$=((f_{-v-1}(z^2-1)^{-v-1})_{-1}\,(z^2-1)^{v})_{v}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.4. Teorem 4.1'de $a=1,\ b=-1,\ C=-k,\ D=2v$ ve $E=v(v-1)$ alırsak; $\alpha=v-1$ elde ederiz. Bu durumda

$$(z-1)(z+1)\phi_2+(-k+2vz)\phi_1+v(v-1)\phi=f$$

denkleminin çözümü;

$$\phi=\left(\left(f_{-v}\big((z-1)(z+1)\big)^{-v-1}(z-1)^{(-k+2v)/2}(z+1)^{-(-k-2v)/2}\right)_{-1}\right.$$

$$\left..\big((z-1)(z+1)\big)^{v}(z-1)^{-(-k+2v)/2}(z+1)^{(-k-2v)/2}\right)_{v-1}$$

$$=\left(\left(f_{-v}(z-1)^{-1-\frac{k}{2}}(z+1)^{\frac{k}{2}-1}\right)_{-1}(z-1)^{\frac{k}{2}}(z+1)^{-\frac{k}{2}}\right)_{v-1}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.5. Teorem 4.1'de $a = 0,\ b = 1,\ C = -v - 1,\ D = 2v$ ve $E = v(v - 1)$ alırsak; $\alpha = v - 1$ elde ederiz. Bu durumda

$$z(z-1)\phi_2 + (-v - 1 + 2vz)\phi_1 + v(v-1)\phi = f$$

denkleminin çözümü;

$$\phi = \left(\left(f_{-v}\big(z(z-1)\big)^{-v-1} z^{v+1}(z-1)^{v-1}\right)_{-1} \big(z(z-1)\big)^{v} z^{-v-1}(z-1)^{-v+1}\right)_{v-1}$$

$$= \left((f_{-v}(z-1)^{-2})_{-1} \frac{z-1}{z}\right)_{v-1}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.6. Teorem 4.1'de $a = 0,\ b = v,\ C = -v^2 + v,\ D = 2v$ ve $E = v(v - 1)$ alırsak; $\alpha = v - 2$ elde ederiz. Bu durumda

$$z(z-v)\phi_2 + (-v^2 + v + 2vz)\phi_1 + v(v-1)\phi = f$$

denkleminin çözümü;

$$\phi = \left(\left(f_{1-v}\big(z(z-v)\big)^{-v} z^{v-1}(z-v)^{v+1}\right)_{-1} \big(z(z-v)\big)^{v-1} z^{-v+1}(z-v)^{-v-1}\right)_{v-2}$$

$$= \left(\left(f_{1-v}\frac{z-v}{z}\right)_{-1} \frac{1}{(z-v)^2}\right)_{v-2}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.7. Teorem 4.1'de $a = 0,\ b = 1,\ C = -\gamma,\ D = \alpha_1 + \beta + 1$ ve $E = \alpha_1\beta$ alırsak; $\alpha = \alpha_1 - 1$ elde ederiz. Bu durumda

$$(z^2 - z)\phi_2 + \{z(\alpha_1 + \beta + 1) - \gamma\}\phi_1 + \alpha_1\beta\phi = f\ , \quad (z \neq 0{,}1)$$

homojen olmayan Gauss hipergeometrik denkleminin çözümü;

$$\phi = \left(\left(f_{-\alpha_1} z^{\gamma-\alpha_1-1}(z-1)^{\beta-\gamma}\right)_{-1} z^{\alpha_1-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1}\right)_{\alpha_1-1}$$

şeklindedir.

Teorem 4.4. $z \neq a \neq b$ olmak üzere, ikinci mertebeden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z-a)(z-b) + (C+Dz)\frac{\partial u}{\partial z} + \delta . u(z,t) = A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial u}{\partial t} \tag{4.31}$$

kısmi diferansiyel denklemi $AB \neq 0$ için;

$$u(z,t) = M\left(\left(\left((z-a)(z-b)\right)^{\alpha+1}(z-a)^{-\frac{(C+aD)}{(a-b)}}(z-b)^{\frac{(C+bD)}{(a-b)}}\right)\right)_{\alpha}$$

$$.\, e^{\frac{-B\mp\sqrt{B^2+4A(\delta-E)}}{2A}t}, \tag{4.32}$$

$A \neq 0, B = 0$ için;

$$u(z,t) = M\left(\left((z-a)(z-b)\right)^{\alpha+1}(z-a)^{-\frac{(C+aD)}{(a-b)}}(z-b)^{\frac{(C+bD)}{(a-b)}}\right)_{\alpha} e^{\mp\left(\frac{\delta-E}{A}\right)^{\frac{1}{2}}t} \tag{4.33}$$

ve $A = 0, B \neq 0$ için;

$$u(z,t) = M\left(\left((z-a)(z-b)\right)^{\alpha+1}(z-a)^{-\frac{(C+aD)}{(a-b)}}(z-b)^{\frac{(C+bD)}{(a-b)}}\right)_{\alpha} e^{\left(\frac{\delta-E}{B}t\right)} \tag{4.34}$$

formunda özel çözümlere sahiptir. Burada a, b, C, D ve δ'lar sabitler, M bir keyfi integral sabiti,

$$E = (\alpha+1)(D-\alpha-2)\,,\ (D-1)^2 \geq 4E$$

dir.

İspat: $$u(z,t) = \phi(z)e^{\lambda t}\,,\ (\lambda \neq 0)$$

(4.31)'in bir çözümü olsun.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \phi\lambda e^{\lambda t}, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \phi\lambda^2 e^{\lambda t} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \phi_1 e^{\lambda t}, & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \phi_2 e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{4.35}$$

olduğundan, bu eşitlikler (4.31)'de yerine yazılırsa;

$$\phi_2(z-a)(z-b)+\phi_1(C+Dz)+\phi(\delta-A\lambda^2-B\lambda)=0 \qquad (4.36)$$

olur.

Burada λ'yı

$$\delta-A\lambda^2-B\lambda=E$$

eşitliğinden, yani

$$\lambda=\frac{-B\mp\sqrt{B^2+4A(\delta-E)}}{2A}, \qquad (AB\neq 0 \text{ için})$$

$$\lambda=\frac{\delta-E}{B}, \qquad (A=0, B\neq 0 \text{ için})$$

$$\lambda=\mp\left(\frac{\delta-E}{A}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (A\neq 0, B=0 \text{ için})$$

olacak şekilde seçelim.

Böylece (4.36) ifadesi;

$$\phi_2(z-a)(z-b)+\phi_1(C+Dz)+E\phi=0\,, \ \ (z\neq a, z\neq b, a\neq b)$$

olur. Teorem 4.2'de çözüm

$$\phi=M\left(\left((z-a)(z-b)\right)^{\alpha+1}(z-a)^{-\frac{(C+aD)}{(a-b)}}(z-b)^{\frac{(C+bD)}{(a-b)}}\right)_{\alpha}, \qquad (a\neq b \text{ için})$$

şeklinde verilmişti.

$u(z,t)=\phi(z)e^{\lambda t}$ olduğundan, $AB\neq 0$ için (4.31) kısmi diferansiyel denklemi (4.32) formunda bir çözüme sahip olur. Benzer şekilde $A\neq 0, B=0$ için (4.31)'in çözümü (4.33) ile, $A=0,\ B\neq 0$ için ise çözüm (4.34) ile verilir.

Tersine $AB\neq 0$ için (4.32)'nin (4.31)'i sağladığını gösterelim.

$$M\left(\left((z-a)(z-b)\right)^{\alpha+1}(z-a)^{-\frac{(C+aD)}{(a-b)}}(z-b)^{\frac{(C+bD)}{(a-b)}}\right)_{\alpha}=\phi(z)$$

ve

$$\frac{-B\mp\sqrt{B^2+4A(\delta-E)}}{2A}=\lambda$$

olsun. Böylece;

$$u(z,t) = \phi(z)e^{\lambda t}$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \phi_1 e^{\lambda t}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \phi_2 e^{\lambda t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \phi \lambda e^{\lambda t}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi \lambda^2 e^{\lambda t}$$

eşitlikleri (4.31)'in sol tarafında yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z-a)(z-b) + (C+Dz)\frac{\partial u}{\partial z} + \delta.u(z,t) = e^{\lambda t}[\phi_2(z-a)(z-b)$$
$$+\phi_1(C+Dz) + \delta\phi]$$

olur. Teorem 4.2'den;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z-a)(z-b) + (C+Dz)\frac{\partial u}{\partial z} + \delta.u(z,t) = e^{\lambda t}(\delta - E)\phi$$
$$= e^{\lambda t}\,\phi(A\lambda^2 + B\lambda)$$
$$= A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial u}{\partial t}$$

elde edilir.

Teorem 4.5. İkinci mertebeden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z-a)^2 + (C+Dz)\frac{\partial u}{\partial z} + \delta.u(z,t) = A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial u}{\partial t}, \quad (z \neq a) \tag{4.37}$$

kısmi diferansiyel denklemi $AB \neq 0$ için;

$$u(z,t) = M\left((z-a)^{2\alpha+2-D} e^{\frac{(C+aD)}{(z-a)}}\right)_{\alpha} e^{\frac{-B\mp\sqrt{B^2+4A(\delta-E)}}{2A}t}, \tag{4.38}$$

$A \neq 0, B = 0$ için;

$$u(z,t) = M\left((z-a)^{2\alpha+2-D} e^{\frac{(C+aD)}{(z-a)}}\right)_{\alpha} e^{\mp\left(\frac{\delta-E}{A}\right)^{\frac{1}{2}}t} \tag{4.39}$$

ve $A = 0, B \neq 0$ için;

$$u(z,t) = M\left((z-a)^{2\alpha+2-D} e^{\frac{(C+aD)}{(z-a)}}\right)_{\alpha} e^{\left(\frac{\delta-E}{B}t\right)} \tag{4.40}$$

formunda özel çözümlere sahiptir. Burada a, C, D ve δ'lar sabitler, M bir keyfi integral sabiti,

$$E = (\alpha+1)(D-\alpha-2)\,,\ (D-1)^2 \geq 4E$$

dir.

İspat: $$u(z,t) = \phi(z)e^{\lambda t}\,,\ (\lambda \neq 0)$$

(4.37)'nin bir çözümü olsun. (4.35) eşitliklerinden (4.37) ifadesi;

$$\phi_2(z-a)^2 + \phi_1(C+Dz) + \phi(\delta - A\lambda^2 - B\lambda) = 0 \tag{4.41}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada λ'yı

$$\delta - A\lambda^2 - B\lambda = E$$

eşitliğinden, yani;

$$\lambda = \frac{-B \mp \sqrt{B^2 + 4A(\delta - E)}}{2A}, \qquad (AB \neq 0 \text{ için})$$

$$\lambda = \frac{\delta - E}{B}, \qquad (A = 0, B \neq 0 \text{ için})$$

$$\lambda = \mp\left(\frac{\delta - E}{A}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (A \neq 0, B = 0 \text{ için})$$

olacak şekilde seçelim.

Böylece (4.41) ifadesi;

$$\phi_2(z-a)^2 + \phi_1(C+Dz) + E\phi = 0\,,\ (z \neq a)$$

olur. Teorem 4.2'de çözüm;

$$\phi = M\left((z-a)^{2\alpha+2-D}e^{\frac{(C+aD)}{(z-a)}}\right)_{\alpha}, \qquad (z \neq a \text{ için})$$

şeklinde verilmişti.

$u(z,t) = \phi(z)e^{\lambda t}$ olduğundan, $AB \neq 0$ için (4.37) kısmi diferansiyel denklemi (4.38) formunda bir çözüme sahip olur. Benzer şekilde $A \neq 0, B = 0$ için (4.37)'nin çözümü (4.39) ile, $A = 0, B \neq 0$ için ise çözüm (4.40) ile verilir.

Tersine $AB \neq 0$ için (4.38)'in (4.37)'yi sağladığını gösterelim.

$$M\left((z-a)^{2\alpha+2-D}e^{\frac{(C+aD)}{(z-a)}}\right)_{\alpha} = \phi(z)$$

ve

$$\frac{-B \mp \sqrt{B^2+4A(\delta-E)}}{2A} = \lambda$$

alalım. Böylece

$$u(z,t) = \phi(z)e^{\lambda t}$$

ve (4.35) eşitlikleri (4.37)'nin sol tarafında yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z-a)^2 + (C+Dz)\frac{\partial u}{\partial z} + \delta.u(z,t) = e^{\lambda t}[\phi_2(z-a)^2 + \phi_1(C+Dz) + \delta\phi]$$

olur. Teorem 4.2'den;

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z-a)^2 + (C+Dz)\frac{\partial u}{\partial z} + \delta.u(z,t) &= e^{\lambda t}(\delta - E)\phi \\ &= e^{\lambda t}\phi(A\lambda^2 + B\lambda) \\ &= A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek. 4.3. Fuchs tipinde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z^2-1) + \frac{\partial u}{\partial z}2z + u(z,t) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

kısmi diferansiyel denklemi;

$$u(z,t) = 4(3z^2 - 1)e^{\frac{-1\mp\sqrt{57}}{4}t}$$

formunda özel çözüme sahiptir. Teorem 4.4'de

$$a = 1,\ b = -1,\ C = 0,\ D = 2,\ \delta = 1,\ \alpha = 2,\ A = 2 \text{ ve } B = 1$$

alınırsa (4.32)'den

$$u(z,t) = M((z^2 - 1)^2)_2 e^{\frac{-1\mp\sqrt{57}}{4}t}$$

çözümü elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] **Podlubny, I.,** 1999, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Enginering, vol. 198, Academic Press, New York, London, Tokyo and Toronto.

[2] **Bayın, S.,** 2006, Mathematical Methods in Science and Engineering, Wiley Interscience, New Jersey.

[3] **Miller, K.S., Ross, B.,** 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation, Wiley Interscience, New York.

[4] **Mainardi F. and Gorenflo R.,** 2000, Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order, CISM, Italy, pp 223-276.

[5] **Oldham, K.B., Spainer, J.,** 1974, The Fractional Calculus, Academic Press, New York.

[6] **Loverro A.,** 2004, Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer, Notre Dame.

[7] **Ross, B.,** 1975, Fractional Calculus and Its Applications, Springer, New York.

[8] **Arfken G.B. and Weber H.J.,** 2001, Mathematical Methods For Physicists, Fifth Edition, Harcourt Academic Press, Boston.

[9] **Cesur Y.,** 2011, Diferansiyel Denklemler ve Mathematica, İstanbul.

[10] **Nishimoto, K.,** 1984, 1987, 1989, 1991 and 1996, Fractional Calculus (Volumes I, II, III, IV, V), Descartes Press, Koriyama.

[11] **de Romero, S.S. ; Srivastava, H.M.,** 2000, An Application of the N-Fractional Calculus Operator method to a Modified Whittaker Equation, Appl. Math. and Comp. 115, 11-21.

[12] **Srivastava, H. M., Owa, S., Nishimoto, K.,** 1985, Some Fractional Differintegral Equations, J. Math. Anal. Appl. 106, 360-366.

[13] **Tu, S.-T., Chyan, D.-K., Srivastava, H.M.,** 2001, Some Families of Ordinary and Partial Fractional Differintegral Equations, Integral Transform. Spec. Funct., No.3, 291-302.

[14] **Tu, S.-T., Nishimoto, K., Jaw, S.-J. and Lin, S.-D.,** 1993, Applications of Fractional Calculus to Ordinary and Partial Differential Equations of the second order, Hiroshimo Math. J. , 63-77.

[15] **Nishimoto K.,** 1985, Applications of Fractional Calculus to the Solutions of linear Second Order Differential Equations of Fuchs Type, Research Notes in Math., Vol. 138, 140-153.

[16] **Nishimoto, K.,** 1988, An application of Fractional Calculus to a Differential Equation of Fuchs Type $\phi_2(z^2-1)+\phi_1 2z-\phi.v(v+1)=f,$ J. Coll Eng. Nihon Univ., B-29, 9-19.

[17] **Nishimoto, K.,** 1986, An application of Fractional Calculus to Differential Equations of Fuchs Type $\phi_2(z^2-1)+\phi_1(2vz-v-1)+\phi.v(v-1)=f,$ J. Coll Eng. Nihon Univ., B-27, 5-16.

[18] **Nishimoto, K.,** 1987, An Application of Fractional Calculus to the Non - Homogeneous Gauss' Equations, J. Coll Eng. Nihon Univ. , B-28, 1-8, ISSN 0285-6182.

[19] **Nishimoto, K. and Kalla, S.L.,** 1989, Application of Fractional Calculus to Ordinary Differential Equation of Fuchs Type, Rev. Tec. Ing. Univ. Zulia 12, 43-46.

ÖZGEÇMİŞ

Emre ENKÜR, 1988 yılında Afyon'da doğdu. Lise öğrenimini Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2006 yılında Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde başlamış olduğu lisans öğrenimini 2010 yılında tamamladı. Aynı yıl Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.