

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

HAREKET GEOMETRİSİNDE SABİT İVMELİ EĞRİLER

Nemat ABAZARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2012

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

HAREKET GEOMETRİSİNDE SABİT İVMELİ EĞRİLER

Nemat ABAZARI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu çalışmada, katı hareketlerinin Lie grubu olan $SE(3)$ üzerindeki eğrilerin sabit ivmeli olma şartları araştırılmıştır. Bunun için çeşitli hipotezler verilmiştir. Bu tez 7 bölüm halinde düzenlenmiştir. 1. Bölüm girişe ayrılmıştır. 2. bölüm temel kavramlara ayrılmıştır. 3. bölümde, $SE(3)$ üzerindeki eğrilerin sabit ivmeli olma şartları araştırılmıştır. 4. bölümde, yüzey üzerinde bir eğri ve bu eğrinin jeodezik çatısı yardımıyla $SE(3)$ üzerinde bir eğri tanımlanmış bu eğrinin sabit ivmeli olma şartları incelenmiştir. 5. bölümde, eğri bi-invariant metriğe sahip Lie grupları üzerinde alınmış ve eğrinin sabit ivmeli olma hipotezleri verilmiştir. 6. bölümde, kompakt Riemann manifoldlarında bir eğrinin sabit ivmeli olması için şartlar incelenmiştir.

Son bölümde, Lorentz uzayında bir eğri ele alınmıştır. Bu eğrinin elastik eğri olması için hipotezler verilmiştir.

Ocak 2012, 62 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Katı cisim hareketi, Sabit ivme, Jeodezik çatı, Genel helis, Lie grubu, Elastik eğri, Spacelike, Timelike, Yarı-Riemann Manifoldu.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

STATIONARY ACCELERATION CURVE IN MOTION GEOMETRY

Nemat ABAZARI

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

In this thesis, conditions of the curves on the Lie group $SE(3)$ of rigid body motions to be in the stationary acceleration state have been studied. For this reason, different kinds of hypotheses have been given. This thesis contains seven sections. The first section has been introduction. The second section has been composed of basic concepts. In the third section, conditions of curves on $SE(3)$ to be with stationary acceleration have been studied. In the forth section, a curve on the surface and an other curve on $SE(3)$ with the help of geodesic frame of the former curve have been described and stationary acceleration situations of this curve have been discussed. This curve has been considered in a Lie group with a bi-invariant metric in the fifth section and stationary acceleration hypotheses have been given for it. In the sixth section, stationary acceleration conditions of a curve in compact Riemannian manifolds have been investigated.

In the last section, a curve in the Lorentz space have been considered. Hypotheses for this to be an elastic curve have been given.

January 2012, 62 pages

Key Words: Rigid body motion, Stationary acceleration, Geodesic frame, General helix, Lie group, Elastic curve, Spacelike, Timelike, Indefinite-Riemannian Manifold.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri ve teşvikiyle bana yol gösteren, tüm iyi niyeti, hoşgörüsü ve bilgi birikimi ile gerek insani gerekse akademik gelişimimde büyük emeği bulunan tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya (Ankara Üniv., Fen Fak., Matematik Böl.) içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca hem akademik hem de teknik destek sağlayarak fikirleriyle beni yönlendiren Sayın Prof. Dr. H Hilmi. HACISALİHOĞLU'na (Bilecik Üniv., Fen Edebiyat Fak., Matematik Böl.) ve Sayın Doç. Dr. Nejat EKMEKÇİ'ye (Ankara Üniv., Fen Fak., Matematik Böl.) ve Sayın Prof. Dr. Baki KARLIĞA'ya (Gazi Üniv., Fen Fak., Matematik Böl.) teşekkürü bir borç bilirim.

Tezin türkçe düzenlemesinde bana yaptığı yardımları için Sayın Dr. Çağıl KADEROĞLU'na içten teşekkür ederim.

Maddi ve manevi anlamda beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok sevgili annem Hargol ADL ve babam Mousa ABAZARI'ye bana gösterdikleri tüm sevgi, hoşgörü ve sabırları için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm yaşamım boyunca, sevgisini ve desteğini her koşulda hissettiğim en iyi arkadaşım, anneannem Basti BARADARAN ve her an büyük ruhu ile bize destek olan dedem Ghafar ABAZARI'ye tüm emekleri için; ve ayrıca, sevgili kızım Selda ABAZARI ve aziz oğlum Sahand ABAZARI ve eşim Raveyeh AZIZZADEH'ye ise hayatımı olabildiğince güzelleştirdikleri için içtenlikle teşekkür ederim.

Ayrıca, aziz ve sevgili dostlarım Shokat FADAKAR, Said VESALIAN ve Arian VESALIAN'a hayatımda bana verdikleri manevi destekleri için tüm samimiyetimle teşekkür ederim.

Nemat ABAZARI

Ankara, Ocak 2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
3. SABİT İVMELİ EĞRİLER	19
4. JEODEZİK ÇATI HAREKETİ	24
5. Bİ-İNVARİANT METRİĞE SAHİP OLAN BİR LİE GRUBUNDA SABİT İVMELİ EĞRİLER	33
6. KOMPAKT RIEMANN MANİFOLDUNDA SABİT İVMELİ EĞRİLER.....	40
7. 3-BOYUTLU YARI-RIEMANN MANİFOLDUNDA KLASİK ELASTİK EĞRİLER.....	47
7.1 Frenet Denklemleri	47
7.2 Klasik Elestik Denklemi	47
7.2.1 Timelike eğri.....	50
7.2.2 Spacelike eğri.....	52
8. SONUÇLAR	58
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ.....	611

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
E^n	n boyutlu öklid uzayı
X_P	P noktasındaki vektör
$(X, \mathcal{T})$	X cümlesi üzerinde topolojik uzay
(U, Ψ)	M topolojik manifold nun P noktasaki bir haritesi veya koordinat komşuluğu
$\{(\Psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$	M topolojik manifold nun bir atlası
C^r	r mertebesinden diferansiyellenebilir
$T_M(P)$	M manifoldu üzerindeki tanjant vektörlerin cümlesi
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	M manifoldu üzerinde her mertebeden diferansiyellenebilir reel fonksiyonlar
$\chi(M)$	M manifoldu üzerinde vektör alanlarının cümlesi
$[,]$	Lie operatörü
D_X	X vektör alanına göre kovaryant türev operatörü
$S(X)$	Weingarten dönüşümü
$\langle , \rangle$	İç çarpım
L_V	V yönünde Lie türevi
L_a	Lie grubunun sol operatörü
R_a	Lie grubunun sağ operatörü
$\mathcal{K}^L(G)$	G Lie grubu üzerinde tüm sol-invaryant vektör alanları cümlesi
$\nabla_Y X$	X nin Y boyunca kovaryant türevi
$R(X, Y)W$	Riemann eğriliği
$SO(3)$	E^3 de dönme grubu
$so(3)$	$SO(3)$ grubunun Lie cebiri
k_n	Normal eğrilik
k_g	Jeodezik eğrilik
t_r	Jeodezik burulma
T	Tanjant vektör alanı
N	Normal vektör alanı
B	Bi-normal vektör alanı

$\{T, N, B\}$	Frenet çatısı
w	Darboux vektörü
Ω	w nin 3x3 anti-simetrik matris gösterimi
$SE(3)$	Tüm olası katı cisim hareketleri uzayı olan Lie grubu
$\mathfrak{g}$	G grubunun Lie cebiri
κ	Eğrilik
τ	Burulma
S^n	E^n de n boyutlu küre
k_i	i inci eğrilik
$\mathcal{C}$	Kesitsel eğrilik
IR_n^m	$m \times n$ matrisler cümlesi

1. GİRİŞ

Minimum ivme eğrileri kavramı Zefran ve Kumar (1998) ve onlardan bağımsız olarak Noakes, Heinzinger ve Paden tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmaların amaçları, spline eğrilerini kısmen grup eğrileri ve özellikle de robotiklerle ilgili gruplar haline getirmektir. Mesela katı cisim hareket grubu $SE(3)$ 'teki bir eğri katı bir cismin yörüngesi olarak düşünülebilir. Bu sebeple bu fikirlerin hareket planlama ve interpolasyon uygulamaları vardır. Bahsi geçen çalışmalarda, gruptaki bi-invaryant metrikler kullanılarak analiz tekrarlanmıştır.

Robotiklerde, robot bağlantılarını katı cisim olarak kabul etmek olağandır. Bu sebeple, robotun hareketi $SE(3)$ 'teki bir eğri olarak alınabilir. Bu eğrilerin geometrisinin detaylı bir araştırmasının robotiklerde birçok uygulaması olabilir. Mesela, doğal olarak ortaya çıkan bir soru, bir robotun uç-etkileticileri (end-effector) için bir başlangıç ve bitiş noktası verilse, uç-etkileticileri için 'en iyi' yol ne olurdu? Erken bir öneri olarak robotun uç-etkileticileri bir dönme hareketi boyunca zorlayabileceği söylenebilir. Yani, sabit bir eksen etrafında dönme aynı eksen üzerinde öteleme ile devam eder. Bir konumdan diğerinin içine hareket eden benzersiz bir dönme hareketi her zaman vardır. Bu hareketler katı cisim hareketleri grubunda tek parametrelili alt gruplara ve gruptaki jeodeziklere karşılık gelir. Buradaki jeodezik, grupta tanımlanan bi-invaryant metrikle ilgili sabit yay uzunluklu eğridir. Fakat burada dönme hareketleri kullanılmamıştır. Çünkü bazı başlangıç ve bitiş nokta çiftleri uç-etkileticilerinin aşırı geniş hareketlerine sebep olan dönme hareketleri oluşturmaktadır.

Robotikler ve bilgisayar grafiklerinin her ikisinde de yıllar boyunca spline eğrileri oluşturmaları için bir çok algoritma öne sürülmüştür; ancak bu metotlar için kullanılan geometri çok açık değildir.

Son zamanlarda, biomekanik çalışmaları insanların el, kol ve bacak hareketlerini minimum titreme ile gerçekleştirdiklerini gösterdi. Ancak, bu fikirdeki güçlük, titremenin yer değiştirmenin üçüncü türevi olması ve bu biomekanik çalışmalarda, insan elindeki titremenin yalnızca bir noktaya kadar ölçülmüş olmasıdır. Elin diğer

kısımlarındaki titreminin de minimize olduğu açık değildir. Yani, bu katı cisim hareketleri fikri genel olarak, Zefran ve Kumar (1998) tarafından, katı cisim ivmelenmesi katı cisim hareketinin kovaryant türevi ve titreme de ikinci kovaryant türevi olacak şekilde açıklanmıştır. Zefran ve Kumar (1998) daha sonra da bu ölçümleri minimize eden eğriler üzerine çalışmıştır. Kovaryant türevi açıklarsak, otomatik olarak koordinatsız olan eğriler diyebiliriz, mesela koordinatlardaki değişikliklere göre invaryant ya da referans noktası seçimi buna örnektir.

Ne yazık ki bu çalışmada bir diğer belirsizlik ise kovaryant türevin gruptaki metriğin seçimine bağlı olmasıdır. İvme ya de titreşimi minimize etmektense metriğin pozitif sonsuzda olması daha önemlidir. Fakat $SE(3)$ 'ten seçilebilecek çok fazla metrik vardır. Bir süre önce, Noakes ve diğerleri (1989) $SO(3)$ 'teki minimum ivme eğrileri için olan denklemlerin türevinde aynı ivme tanımını kullanmıştır. Yukarıdaki belirsizliği, $SO(3)$ dönme grubunda pozitif bi-invaryant tanımını kullanarak yok saymışlardır.

Neyse ki, $SE(3)$ 'te pozitif tanımlı bi-invaryant metriklerin olmadığı iyi bilinir. Bunun yerine Zefran ve Kumar (1998) pozitif tanımlı sol-invaryant metrikleri kullandı. Bu sol-invaryant metrikler katı cisimler için eylemsizlik sensörü olarak düşünülebilir. Aslında bu gibi metrikler için jeodezikler, minimum sürat eğrileri ve dış kuvvetlerin konusu değil; katı cisimler için dinamik denklemlerin basit çözümleridir. Bu yorumla birlikte, Zefran ve Kumar'ın (1998) seçtiği ana metrik küresel simetrik cismin eylemsizlik tensörüdür.

Bu tez çalışmasında, $SE(3)$ 'teki bi-invaryant metrikler kullanılarak Zefran ve Kumar'ın çalışmaları tekrarlandı. Bu metrikler pozitif sonsuzda olmadığı için, tanımlanan eğriler minimum olmayacaktır fakat sabittir.

Aslında, ne Zefran ve Kumar (1998) ne de Noakes ve diğerleri (1989) eğrilerinin minimum olduğunu ve minimal özelliklerinin sonradan kullanılmadığını kontrol etmiştir. Burada gösterilen türev Zefran ve Kumar'dan alınmıştır fakat normal olarak, sonuçlar Noakes ve diğerleri (1989) ile tıpatıp aynıdır. Bununla birlikte bi-invaryant metrikler

burada çalışıldığı üzere, bağıntıdaki standart sonuçları ve eğriliği açıklamayı kısaltmak için kullanılabilir.

Aslında, burada tanımlanan eğriler kullanılan belirli bi-invaryant metriklerle ilgili değildir. Bu sebeple bu eğriler grubun gerçek içsel özellikleridir, bunlar koordinat çatısı seçimine ya da referans noktasına bağlı değildir. Bundan dolayı bu eğrileri bir anlamda doğal kabul edebiliriz ve çözümün en azından teorik açıdan basit olacağını umabiliriz. Buna rağmen eğri denklemleri kapalı formda genellikle çözülebilir değildir, oldukça basit şekilde bulunabilecek birçok kapalı form çözümü vardır.

Bu tez çalışmasında Zefran ve Kumar (1998)'in fikirleri, Öklid uzayında tanımlanan bir yüzey üzerindeki eğriler için jeodezik çatı kullanılarak yeniden ele alınmıştır.

Ayrıca bu çalışmada bi-invaryant metriğe sahip olan 3-boyutlu bir Lie grubunda, küresel genel helisin, sabit ivmeli olma şartları araştırılmıştır.

Elastik olarak bilinen klasik eğri, 1744'de Daniel Bernoulli tarafından Leonhard Euler'e önerilen, esnemeyen ince bir telin esneklik enerjisini minimize eden varyasyonel problemin çözümüdür (Love 1927). Bu problemin matematiksel idealizasyonu, verilen birinci derece sınır koşullarının yeterli olduğu sabit uzunluklu eğriler için, eğriliğin karesinin integralinin minimize edilmesidir.

Riemann manifoldundaki bir $\alpha(s)$ eğrisi için iki nicelik tanımlanır: uzunluk $L(\alpha)$ ve eğriliğin karesinin toplamı $E(\alpha)$. Sabit L_0 uzunluklu eğriler uzayına kısıtlanmış E fonksiyonelinin kritik bir noktası olan α eğrisine, bir elastik denir. Elastik kavramı epey eskidir. Fakat bu kavramla ilgili diferansiyel geometrideki modern yaklaşımlar daha yenidir. J. Langer ve D. A. Singer, Öklid uzayındaki tüm kapalı elastikleri sınıflandırmıştır (Langer 1984). Ayrıca N. Koiso, Öklid uzaylarının durumunu ele almıştır ve bir elastığe yakınsayan bir başlangıç değer probleminin tek bir uzun zamanlı çözümünü bulmuştur (Koiso 1996). N. Koiso'nun bir diğer çalışmasında (Koiso 1992), alt manifolda kısıtlanmış bir elastik ele alınmıştır.

Elastiğin, kompleks izdüşümsel düzlemde eğrilik sabitiyle birlikte tam olarak sınıflandırılması Barros'un 1999 tarihli çalışmasında gerçekleştirilmiştir.

Singer (2007)'in çalışmasında, elastik denklemlerini türetmek için varyasyon hesaplamalarının klasik yöntemleri kullanılmıştır. Öklid uzayındaki klasik varyasyonel problem ve onun Riemann manifoldlarına genelleştirilmesi de aynı çalışmada gösterilmiştir. Sager (2001)'de kesitsel eğriliğin $C = 0$ durumu çalışılmıştır. Bu çalışmada klasik varyasyonel problem 3-boyutlu belirsiz Riemann manifoldunda ele alınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 X bir cümle ve X in alt cümlelerinin bir $\mathcal{T}$ koleksiyonu, aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır:

i. $X, \emptyset \in \mathcal{T},$

ii. $A_1, A_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T},$

iii. $\forall i \in I, \quad A_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i,$

(Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2 Bir X cümlesi ve üzerideki bir $\mathcal{T}$ topolojisinden oluşan $(X, \mathcal{T})$ ikilisine bir topolojik uzay denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3 $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için X de, sırası ile, P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse, X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.4 M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir topolojik n -manifold'dur denir.

i. M bir hausdorff uzayıdır.

ii. M nin herbir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık altcümlesine homeomorftur.

iii. M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.5 M bir topolojik manifold olsun. $P \in M$ noktasının M deki bir V açık komşuluğu, E^n in bir U açık alt cümlesine homeomorf olarak alınabilir. Bu homeomorfizimi

$$\Psi: U \rightarrow V,$$

ile gösterelim. (U, Ψ) ikilisine M nin P noktasaki bir haritası veya koordinat komşuluğu denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.6 M bir topolojik n -manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin, α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazılır. E^n de U_α ya bir Ψ_α homeomorfizimi altında homeomorf olan açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan

$$\{(\Psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A},$$

koleksiyonuna bir atlas denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.7 M topolojik n -manifoldunun, C^r sınıfından bir atlası var ise, M ye C^r sınıfından diferansiyellenebilir manifold denir (Matsushima 1972).

Tanım 2.8 M bir diferansiyellenebilir manifold ve bir noktası $P \in M$ olsun. Bir

$$X_P: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

fonksiyonu, M üzerinde en az bir eğrinin P noktasındaki tanjant vektörü ise, X_P ye M nin P noktasındaki bir tanjant vektörü denir. M üzerindeki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_M(P)$ ile gösterilir.

$T_M(P)$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan iç ve dış işlemler sayesinde, $T_M(P)$ bir reel vektör uzayı olur.

İç işlem:

$$+ : T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow T_M(P)$$

$$(X_P, Y_P) \rightarrow X_P + Y_P$$

öyle ki, $\forall f \in C^\infty(M, R)$ için,

$$(X_P + Y_P)(f) = X_P(f) + Y_P(f),$$

dir.

Dış işlem:

$$\cdot : R \times T_M(P) \rightarrow T_M(P)$$

$$(\lambda, X_P) \rightarrow \lambda X_P$$

öyle ki, $\forall f \in C^\infty(M, R)$ için,

$$(\lambda X_P)(f) = \lambda X_P(f),$$

dir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.9 M bir diferansiyellenebilir manifold ve $P \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin uzayı $T_M(P)$ olsun. $T_M(P)$ vektör uzayına, M nin P noktasındaki tanjant uzayı denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.10 M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye

$$X : M \xrightarrow[\text{örten}]{\text{birebir}} \bigcup_{P \in M} T_M(P),$$

olarak tanımlanan X fonksiyonuna denir ve M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.11 Bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ verilsin. O zaman,

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow [,](X, Y) = [X, Y],$$

öyle ki, $\forall f \in C^\infty(M, R)$ için,

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf),$$

şeklinde tanımlı $[,]$ dönüşümüne $\chi(M)$ üzerinde Lie operatörü denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Lemma 2.1 Lie operatörü $\chi(M)$ üzerinde aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X],$

ii. $[X, aV + bW] = a[X, V] + b[X, W],$

iii. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$ (Jakobi özdeşliği)

İspat (O'Neill 1983).

Teorem 2.1 Bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ verilsin. O zaman, $\forall f \in C^\infty(M, R)$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X,$$

dir (Hacısalıhoğlu 2000).

İspat (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.12 M bir diferansiyellenebilir manifold ve M üzerinde reel değerli C^1 sınıfından bir fonksiyon f olsun. O zaman, f nin bir $P \in M$ noktasındaki diferansiyeli diye, $\forall X_P \in T_M(P)$ için

$$(df|_P)(X_P) = X_P[f],$$

şeklinde tanımlı $df|_P$ fonksiyonuna denir.

Geçen tanım gereğince $\forall X_P \in T_M(P)$ için

$$df(X_P) = X_P[f] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_P dx_i(X_P),$$

dir. Buradan

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_P dx_i,$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.13 M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, R)$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R),$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise, M ye bir Riemann manifoldu denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.14 M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, R)$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R),$$

fonksiyonu,

1) 2-lineer,

2) simetrik,

3) $(\forall X \in \chi(M), \langle X, Y \rangle = 0) \Rightarrow Y = 0$

özelliklerini sağlıyor ise, M ye yarı-Riemann manifoldu denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.15 M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y,$$

fonksiyonu için,

$$i. \forall X, Y, Z \in \chi(M), \forall f, g \in C^\infty(M, R), D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ,$$

$$ii. \forall X, Y \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M, R), D_X(fY) = fD_XY + (Xf)Y,$$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üzerinde bir afin koneksiyon ve D_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir (Hacısalıhoğlu 2000).

E^n üzerindeki bir C^∞ vektör alanı olan Y nin bir diğer X vektör alanı yönündeki türevi, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$D_XY = (X[y_1], X[y_2], \dots, X[y_n]), y_i \in C(E^n, R),$$

olarak tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.16 M bir C^∞ manifold ve $I \subseteq R$ bir açık aralık olsun.

$$\alpha : I \rightarrow M \subset E^n,$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise, α ya M üzerinde diferansiyellenebilir bir eğri denir (Matsushima 1972).

Burada diferansiyellenebilir eğri yerine kısaca eğri diyeceğiz.

Tanım 2.17 $\bar{M}$ bir C^∞ , $(n-1)$ -manifold olsun.

$$f : \bar{M} \rightarrow E^n,$$

fonksiyonu bir immersiyon ise, $f(\bar{M}) = M$ manifolduna E^n nin bir hiperyüzeyi denir (Hicks 1974).

Tanım 2.18 (Weingarten dönüşümü): E^n nin bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n deki kovaryant türev D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$S(X) = -D_X N,$$

olarak tanımlanan,

$$S : \chi(M) \rightarrow \chi(M),$$

lineer dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir. Böylece tanımlanan S dönüşümü self adjointtir (Hicks 1974).

Tanım 2.19 (Gauss denklemi): E^n de bir hiperyüzey M ve M şekil operatörü S olsun. E^n deki kovaryant türev D olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N,$$

şeklinde tanımlı $\bar{D}$ operatörüne M üzerinde Gauss anlamında kovaryant türev operatörü denir ve yukarıdaki denkleme de Gauss denklemi denir (Hicks 1974).

Jeodezikler, E^{n+1} de ki M hiperyüzeyleri üzerinde öyle özel eğrilerdir ki, bunlar E^{n+1} de doğruların oynadığı rolü M üzerinde oynarlar.

Tanım 2.20 E^{n+1} de M hiperyüzeyi üzerinde Jeodezik denen eğri öyle bir parametrik eğridir ki bu eğrinin her noktasındaki ivme vektörü M ye ortogonaldır. Yani eğri

$$\alpha : I \rightarrow M,$$

ise

$$\ddot{\alpha}(t) \in T_M^\perp(\alpha(t)), \quad \forall t \in I,$$

dır (Hacısalıhoğlu 2000).

Buradan şu sonuç elde edilir;

Teorem 2.2 Jeodeziklerin her noktadaki hız vektörlerinin uzunlukları sabittir.

İspat (Hacısalıhoğlu 2000).

Örnek 2.1 E^3 deki S^2 küresi üzerindeki herbir maksimal jeodezik ya bir büyük çemberdir ya da bir tek noktadır (Hacısalıhoğlu 2000).

Örnek 2.2 Bir silindir için de maksimal jeodezikler ya ana doğrular ya da bunlara dik olan çemberlerdir veya da helislerdir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.21 F bir cisim olsun. F üzerinde olan bir V vektör uzayına Lie cebiri denir eğer V nin sahip olduğu bir Lie operatörü $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ de aşağıdaki özellikler, tüm $X, Y, Z \in V$ ve $a, b \in F$ için sağlanıyorsa:

- 1) $[X, X] = 0$,
- 2) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,
- 3) $[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$,
- 4) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Tanım 2.22 M diferansiyellenebilir bir manifold üzerinde r derecesinden kovaryant tensör alanı

$$\alpha : \chi(M) \times \dots \times \chi(M) \rightarrow C(M, R),$$

şeklinde olan öyle bir dönüşümdür ki aşağıdaki koşulu tüm $f_i, g_i \in C(M, R), X_1, \dots, X_r$, ve $Y_i, Z_i \in \chi(M)$ için sağlar:

$$\alpha(X_1, \dots, f_i Y_i + g_i Z_i, \dots, X_r) = f_i \alpha(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_r) + g_i \alpha(X_1, \dots, Z_i, \dots, X_r).$$

Lemma 2.2 Riemann koneksiyonu olan D aşağıdaki özellikleri, tüm $X, Y, Z \in \chi(M)$, $f, g \in C(M, R)$ ve $a, b \in R$ için sağlar:

- 1) $D_{fX+gY} = fD_X + gD_Y$,
- 2) $D_X(aY + bZ) = aD_X Y + bD_X Z$,
- 3) $D_X fY = X[f]Y + fD_X Y$,
- 4) $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$,
- 5) $X\langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$.

Tersine, eğer

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M),$$

yukarıdaki (1)-(5) özellikleri sağlıyor ise, D bir Riemann koneksiyonudur.

İspat (Gray 1939).

Teorem 2.3 M yarı-Riemann manifoldu üzerinde tek bir D koneksiyonu vardır öyle ki:

i. $[V, W] = D_V W - D_W V,$

ii. $X\langle V, W \rangle = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle,$

tüm $X, V, W \in \chi(M)$. Buradaki D ye M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu denir ve aşağıdaki Koszul formülü ile elde edilir:

$$2\langle D_V W, X \rangle = V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle.$$

(O'Neill 1983).

Tanım 2.23 $V \in \chi(M)$ olsun. L_V tensör türevine V e göre bir Lie türevi denir eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise:

i. $L_V(f) = Vf$, tüm $f \in C(M, R)$ için,

ii. $L_V(X) = [V, X]$, tüm $X \in \chi(M)$ için,

(O'Neill 1983).

Lemma 2.3 $V \in \chi(M)$ olsun. L_V Lie türevi aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. $L_{aV+bW} = aL_V + bL_W$, ($a, b \in R$),

ii. $[L_V, L_W] = L_{[V, W]}$,

iii. $L_V(df) = d(Vf)$, $f \in C(M, R)$.

Tanım 2.24 G diferensiyellenebilir manifold ve aynı zamanda grup olsun. $G \times G \rightarrow G$ grup işlemi ve $a \in G$ için a elemanını a^{-1} elemanına götüren dönüşüm diferansiyellenebilir ise G ye Lie grubu denir (Sternberg 1995).

Tanım 2.25 G Lie grubu olsun.

$$L_a: G \rightarrow G, g \rightarrow L_a(g) = ag,$$

ve

$$R_a: G \rightarrow G, g \rightarrow R_a(g) = ga,$$

dönüşümlerine, sırasıyla, sol ve sağ öteleme denir. L_a ve R_a dönüşümleri diffeomorfizimlerdir. Bu dönüşümlerin tersleri $L_{a^{-1}}$ ve $R_{a^{-1}}$ dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.26 G Lie grubu ve X , G üzerinde vektör alanı olsun. $\forall a, g \in G$ için $dL_a(X_g) = X_{ag}$ ise X vektör alanına sol-invaryant vektör alanı denir. X sol-invaryant ise $dL_a(X) = X$ dir (O'Neill 1983).

Teorem 2.4 $X_0 \in T_e G$ için $X_0 = X_e$ olacak şekilde bir tek X sol-invaryant vektör alanı vardır. e , grubun birim elemanıdır (Karger 1929).

G Lie grubu üzerinde tüm sol-invaryant vektör alanlarının cümlesini $\mathcal{K}^L(G)$ ile gösteriyoruz.

Teorem 2.5 G bir Lie grubu, $X, Y \in \mathcal{K}^L(G)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

i. $X + Y \in \mathcal{K}^L(G),$

ii. $\lambda X \in \mathcal{K}^L(G),$

iii. $[X, Y] \in \mathcal{K}^L(G)$,

dır (Karger 1929).

Tanım 2.27 G bir Lie grubu ve G 'nin birim elemanı e olsun. $\xi, \eta \in T_e(G)$ nin sol-invariant vektör alanları, sırasıyla, X, Y olmak üzere, $[\xi, \eta] = [X, Y]_e$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda, Lie grubunun birim elemanındaki tanjant uzayı $T_e(G)$ bir Lie cebri olur. Bu Lie cebrine G Lie grubuna ait Lie cebri denir ve $\mathfrak{g}$ ile gösterilir (Karger 1929).

Teorem 2.6 G bir Lie grubu ve G 'nin Lie cebri $\mathfrak{g}$ olsun. O zaman,

$$X \in \mathfrak{g} \text{ dir} \Leftrightarrow \forall t \in R \text{ için } \exp(tX) \in G$$

dir (Sternberg 1994).

Tanım 2.28 G bir Lie grubu ve $d : G \times G \rightarrow R$ bir metrik olsun. $\forall a, x, y \in G$ için,

i. $d(ax, ay) = d(x, y)$ ise d metriğine sol-invariant metrik,

ii. $d(xa, ya) = d(x, y)$ ise d metriğine sağ-invariant metrik,

denir.

Tanım 2.29 d metriği hem sol-invariant hem de sağ-invariant ise, d metriğine **bi-invariant metrik** denir.

Tanım 2.30 Uzayda katı hareketler grubu $SE(3)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$SE(3) = \left\{ \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| R \in IR_3^3, d \in IR_1^3, R^T R = I_3, \det(R) = 1 \right\}.$$

Ayrıca, $SE(3)$ bir Lie grubu ve bir manifolddur (Zefran 1995).

Tanım 2.31 $SE(3)$ Lie grubuna ait Lie cebiri $se(3)$ ile gösterilir ve

$$se(3) = \left\{ \begin{bmatrix} \Omega & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \Omega \in IR_3^3, u \in IR_1^3, \Omega^T = -\Omega \right\},$$

dır. Burada Ω , 3×3 'lük sabit bir anti-simetrik matristir.

Ayrıca $\forall x \in IR^3, \Omega x = \omega \times x$, olmak üzere bir tek $\omega \in IR_1^3$ vardır. Burada $\times, IR^3$ uzayındaki vektörel çarpımıdır. Ayrıca her $S \in se(3)$, elemanı $\{\omega, u\}$ vektörleri ile verilebilir. Bundan başka $S \in se(3)$, için $G = e^S \in SE(3)$ dır.

3. SABİT İVMELİ EĞRİLER

Bu bölümde, $SE(3)$ üzerinde alınan bir eğrinin ne zaman sabit ivmeli bir eğri olacağını araştıracağız. Bunun için Zefran ve Kumar (1998) ve Selig'in (2007) çalışmalarını ele alacağız. Bir eğri boyunca hareket eden bir katı cismin belirttiği hareket $G(t) \in SE(3)$ olsun. Burada t , eğrinin parametresidir. $V = \frac{d}{dt}GG^{-1}$ olmak üzere, ivmenin integrali aşağıdaki gibi tanımlanır

$$J = \left(\frac{1}{2}\right) \int_a^b \langle \nabla_V V, \nabla_V V \rangle dt.$$

Burada, $\langle X, Y \rangle$ notasyonu bi-invaryant metriği gösteriyor ve ∇ bu metriğin tanımladığı kovaryant türev operatörüdür. J integralinin S vektör alanı boyunca Lie türevi alınırsa

$$\begin{aligned} L_S J &= \left(\frac{1}{2}\right) \int_a^b S \langle \nabla_V V, \nabla_V V \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle \nabla_S \nabla_V V, \nabla_V V \rangle dt, \end{aligned}$$

elde edilir. R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X, Y)W = -\nabla_X \nabla_Y W + \nabla_Y \nabla_X W + \nabla_{[X, Y]} W,$$

olmak üzere, integrand $I = \langle \nabla_S \nabla_V V, \nabla_V V \rangle$ ifadesini aşağıdaki şekilde yazabiliriz

$$I = \langle \nabla_V \nabla_S V + \nabla_{[S, V]} V - R(S, V)V, \nabla_V V \rangle.$$

Ayrıca,

$$\langle \nabla_V \nabla_S V, \nabla_V V \rangle = V \langle \nabla_S V, \nabla_V V \rangle - \langle \nabla_S V, \nabla_V^2 V \rangle,$$

yazabiliriz.

Riemann koneksiyonu için

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y], \quad (3.1)$$

dır. Burada, S ve $\nabla_V S$ nin sınırlarda sıfırlandığını kabul ettiğimiz için, $\nabla_S V$ nin integralinin de sıfırlandığını kabul ederiz.

Burada (3.1) denkleminde

$$\langle \nabla_S V, \nabla_V^2 V \rangle = \langle \nabla_V S + [S, V], \nabla_V^2 V \rangle,$$

denklemini elde edilir.

Ayrıca, son eşitliğin V ye göre birinci türevini tekrar alırsak, aşağıdaki denklemi yazabiliriz

$$\langle \nabla_S V, \nabla_V^2 V \rangle = V \langle S, \nabla_V^2 V \rangle - \langle S, \nabla_V^3 V \rangle + \langle [S, V], \nabla_V^2 V \rangle.$$

Bir kez daha, yukarıdaki denklemin birinci teriminin integrali alınabilir fakat sınır noktalarında sıfırlanır. İntegrand I 'nin ikinci terimi, benzer işlemler tekrarlanarak

$$L_S J = \int_a^b \langle S, \nabla_V^3 V \rangle - 2 \langle [S, V], \nabla_V^2 V \rangle + \langle [[S, V], V], \nabla_V V \rangle - \langle R(S, V)V, \nabla_V V \rangle dt,$$

elde edilir.

X, Y, Z sol-invariant vektör alanı olmak üzere

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle, \quad (3.2)$$

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{2} [[X, Y], Z],$$

yazılabilir. Bu eşitlikler Milnor (1969)'da bulunabilir.

Böylece integralin birinci varyasyonu şu şekle gelir;

$$L_S J = \int_a^b \langle S, \nabla_V^3 V + 2[\nabla_V^2 V, V] + \frac{3}{4} [[\nabla_V V, V], V] \rangle dt.$$

S varyasyonu keyfi olduğundan yukarıdaki denklemin sıfıra eşitlenmesi halinde

$$\nabla_V^3 V + 2[\nabla_V^2 V, V] + \frac{3}{4} [[\nabla_V V, V], V] = 0,$$

elde edilir.

Buradan, eğer $\nabla_V V = \dot{V}$, yerine konulursa, o zaman sabit ivme koşulunu sağlayan denklem;

$$\nabla_V^2 \dot{V} + 2[\nabla_V \dot{V}, V] + \frac{3}{4} [[\dot{V}, V], V] = 0, \quad (3.3)$$

olur.

Şimdi, metriğin bi-invaryant olma özeliği kullanılırsa,

$$\nabla_V \nabla_V V = \ddot{V} + \frac{1}{2} [V, \dot{V}],$$

bulunur. Buradan

$$\nabla_V \dot{V} = \frac{1}{2} [V, \dot{V}] + \ddot{V},$$

olur ve böylece;

$$\nabla_V \nabla_V \dot{V} = \frac{1}{4} [V, [V, \dot{V}]] + [V, \ddot{V}] + V^{(3)},$$

olur. Ayrıca bu denklemi (3.3)'de kullanırsak;

$$V^{(3)} + [\ddot{V}, V] = 0, \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) denklemi sağlanıyor ise eğri sabit ivmelidir. Gerçekten

(3.4) den integral alarak;

$$\ddot{V} + [\dot{V}, V] = C, \quad (3.5)$$

sonucu elde edilir. Şimdi, $\mathfrak{K} = \langle \ddot{V}, \dot{V} \rangle$ ifadesinin sabit olduğunu gösterelim.

$$V \langle \ddot{V}, \dot{V} \rangle = 2 \langle \ddot{V}, \nabla_V \dot{V} \rangle$$

$$= 2 \langle \ddot{V}, (V^{(3)} + [\ddot{V}, V]) - \frac{3}{2} [\ddot{V}, V] \rangle$$

$$= 0.$$

Ayrıca (3.4)'deki denklem yerine sabit ivmeli eğrileri bulmak için aşağıdaki yolu izleyebiliriz.

Eğer V için

$$\ddot{V} = GXG^{-1},$$

Eşitliğini sağlayacak şekilde bir X sabit vektörü var ise eğrimiz sabit ivmelidir. Gerçekten (3.4) denkleminin sağlandığını görebiliriz. Bu eşitliğin doğruluğunu görmek için, $dG/dt = VG$ ifadesini kullanarak yukarıdaki denklemin türevi alınırsa,

$$V^{(3)} = VGXG^{-1} + GX \frac{d}{dt} G^{-1},$$

elde edilir.

Burada dG^{-1}/dt yi bulmak için, $GG^{-1} = I$ denkleminin türevini alarak

$$dG^{-1}/dt = -G^{-1}V,$$

elde edilir. Böylece,

$$V^{(3)} = VGXG^{-1} - GXG^{-1}V = [V, \ddot{V}].$$

Böylece (3.4) denklemi gerçekleşmiş olur.

Ayrıca, $\ddot{V} = GXG^{-1}$ den $\aleph = \langle \ddot{V}, \ddot{V} \rangle = \langle X, X \rangle$ nin sabit olması sağlanacaktır.

4. JEODEZİK ÇATI HAREKETİ

Bu bölümde bir yüzey üzerinde, yatan bir eğrinin jeodezik çatısı ele alınarak sabit ivmeli eğriler araştırılacaktır.

Teorem 4.1 E^3 ün S yüzeyi üzerinde birim hızlı α eğrisinin sabit ivmeli eğri olması için gerekli ve yeterli şart k_n normal eğriliği, k_g jeodezik eğriliği ve t_r jeodezik burulmasının t nin bir lineer ifadesi olmasıdır.

İspat α eğrisi, E^3 ün bir S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. S yüzeyinin bir $\alpha(t)$ noktasında $T_{\alpha(t)}R^3$ teğet vektör uzayının bir ortonormal bazı $\{T(t), Y(t), Z(t)\}$ olsun. Burada $Z = Z \circ \alpha$, S yüzeyinin α eğrisi boyunca ortogonal birim vektör alanıdır ve $Y = Z \times T$ olmak üzere, $R(t) = (T | Y | Z) \in SO(3)$ çatısına $\alpha : I \rightarrow S$ üzerinde bir jeodezik çatı denir. Böylece aşağıdaki denklemler sağlanır:

$$\dot{\alpha}(t) = T, \quad \nabla_T T = k_g Y + k_n Z, \quad \nabla_T Y = -k_g T + t_r Z, \quad \nabla_T Z = -k_n T - t_r Y,$$

Burada k_n normal eğrilik, k_g jeodezik eğrilik ve t_r jeodezik burulma olarak adlandırılır.

Eğer α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olursa ve γ , Z ve B nin arasındaki açı olmak üzere

$$k_n = k \sin \gamma, \quad k_g = k \cos \gamma, \quad t_r = \tau - \dot{\gamma},$$

yazılabilir.

α eğrisinin Darboux vektörü $w = t_r T - k_n Y + k_g Z$ dir. Gerçekten,

$$\nabla_T T = w \times T, \quad \nabla_T Y = w \times Y, \quad \nabla_T Z = w \times Z,$$

dir. Darboux vektörünün özelliklerinden $R(t) = (T, Y, Z)$ olmak üzere

$$\dot{R} = \Omega R,$$

yazılabilir. Burada Ω , w nin 3×3 anti-simetrik matris gösterimidir. Böylece

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & t_r \\ -k_n & -t_r & 0 \end{bmatrix},$$

elde edilir.

Katı hareket grubu $SE(3)$ cümlesinin elemanlarını,

$$G(t) = \begin{pmatrix} R(t) & \alpha(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

şeklinde alabiliriz. $G(t)$, $SE(3)$ Lie grubunda bir eğri olur. Bu eğrinin sabit ivmeli olma hipotezlerini araştıralım.

İlk olarak,

$$V = \frac{d}{dt} G G^{-1},$$

hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
V &= \begin{pmatrix} \dot{R}(t) & \dot{\alpha}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & -R^T \alpha(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Omega R & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & -R^T \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Omega & T - \Omega \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

elde edilir burada $\dot{\alpha} = T$ dir. Ayrıca türev alınırsa,

$$\dot{V} = \begin{pmatrix} \dot{\Omega} & -\dot{w} \times \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dır, tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\ddot{V} &= \begin{pmatrix} \ddot{\Omega} & -\ddot{w} \times \alpha - \dot{w} \times \dot{\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ddot{\Omega} & -\ddot{w} \times \alpha - \dot{w} \times T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ddot{\Omega} & -\ddot{w} \times \alpha + \dot{k}_n Y \times T - \dot{k}_g Z \times T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ddot{\Omega} & -\ddot{w} \times \alpha - \dot{k}_n Z - \dot{k}_g Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, Darboux vektörü $w = t_r T - k_n Y + k_g Z$ ifadesinden

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{t}_r T - \dot{k}_n Y + \dot{k}_g Z + t_r \nabla_T T - k_n \nabla_T Y + k_g \nabla_T Z \\
&= \dot{t}_r T - \dot{k}_n Y + \dot{k}_g Z + t_r (k_g Y + k_n Z) - k_n (-k_g T + t_r Z) + k_g (-k_n T - t_r Y) \\
&= \dot{t}_r T - \dot{k}_n Y + \dot{k}_g Z,
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan benzer şekilde

$$\ddot{w} = (\ddot{t}_r + \dot{k}_n k_g - \dot{k}_g k_n) T + (k_g \dot{t}_r - \ddot{k}_n - \dot{k}_g t_r) Y + (k_n \dot{t}_r - \dot{k}_n t_r + \ddot{k}_g) Z,$$

elde edilir.

Şimdi

$$\begin{aligned}
G^{-1} \ddot{V} G &= \begin{pmatrix} R^T & -R^T \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\Omega} & -\ddot{w} \times \alpha - \dot{k}_n Z - \dot{k}_g Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R^T \ddot{\Omega} R & R^T \ddot{\Omega} \alpha + R^T (-\ddot{w} \times \alpha - \dot{k}_n Z - \dot{k}_g Y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R^T \ddot{\Omega} R & -\dot{k}_n R^T Z - \dot{k}_g R^T Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$G^{-1} \ddot{V} G = \begin{pmatrix} 0 & -k_n \dot{t}_r + \dot{k}_n t_r - \ddot{k}_g & k_g \dot{t}_r - \ddot{k}_n - \dot{k}_g t_r & 0 \\ k_n \dot{t}_r - \dot{k}_n t_r + \ddot{k}_g & 0 & -\ddot{t}_r - \dot{k}_n k_g + \dot{k}_g k_n & -\dot{k}_g \\ -k_g \dot{t}_r + \ddot{k}_n + \dot{k}_g t_r & \dot{t}_r + \dot{k}_n k_g - \dot{k}_g k_n & 0 & -\dot{k}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

elde edilir.

Bizim amacımız sabit ivmeli eğriyi bulmaktır. Bunun için $G^{-1}\ddot{V}G$ nin sabit olmasını istiyoruz. $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ reel değerli katsayılar olmak üzere (4.6) ifadesinden,

$$\dot{k}_g = a_1, \quad \dot{k}_n = a_2,$$

dır. Buradan

$$k_g = a_1 t + b_1, \quad k_n = a_2 t + b_2,$$

dir. Ayrıca (4.6) ifadesinden,

$$\ddot{k}_n + \dot{k}_g t_r - k_g \dot{t}_r = a,$$

dır ki eğer k_n ve k_g nin değerleri yerlerine konulursa

$$(a_1 t + b_1) \dot{t}_r - a_1 t_r = -a,$$

denklemini elde edilir. Şimdi $a_1 \neq 0$ ve $t \neq \frac{-b_1}{a_1}$ olmak üzere,

$$\dot{t}_r - \frac{a_1}{a_1 t + b_1} t_r = \frac{-a}{a_1 t + b_1},$$

olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$t_r = e^{\int \frac{a_1}{a_1 t + b_1} dt} \left(\int -\frac{a}{a_1 t + b_1} e^{-\int \frac{a_1}{a_1 t + b_1} dt} + c_1 \right)$$

$$= (a_1 t + b_1) \left(\frac{a}{a_1} (a_1 t + b_1)^{-1} + c_1 \right)$$

$$= c_1 a_1 t + c_1 b_1 + \frac{a}{a_1},$$

olarak elde edilir. Burada $a_3 = c_1 a_1$ ve $b_3 = c_1 b_1 + \frac{a}{a_1}$ olmak üzere $t_r = a_3 t + b_3$ dir. Bu durumda $b = a_2 b_1 - a_1 b_2$ ve $c = b_2 a_3 - a_2 b_3$ olmak üzere

$$\ddot{t}_r + \dot{k}_n k_g - \dot{k}_g k_n = b,$$

ve

$$\ddot{k}_g + k_n \dot{t}_r - \dot{k}_n t_r = c,$$

olur.

Dolayısıyla

$$G^{-1} \ddot{V} G = \begin{pmatrix} 0 & -c & -a & 0 \\ c & 0 & -b & -a_1 \\ a & b & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

4×4 'lük sabit bir matris olur. Böylece k_g, k_n, t_r, t nin bir lineer ifadesi olur.

Tersine, eğer k_g, k_n, t_r, t nin bir lineer ifadesi iseler, o zaman $G^{-1} \ddot{V} G$ sabit bir matristir. Böylece $G(t)$ eğrisi $SE(3)$ üzerinde sabit ivmeli bir eğridir.

Sonuç 4.1 S yüzeyi üzerinde alınan bir jeodezik (asimtotik) eğri yardımıyla tanımlanan $SE(3)$ deki eğrinin, sabit ivmeli eğri olması için gerekli ve yeterli şart, $\dot{k}$ ve $\dot{\tau}k - \dot{k}\tau$ nin sabit olmasıdır.

İspat Eğer α , S yüzeyi üzerinde alınan bir jeodezik eğri ise, o halde $k_g = 0$ ve (4.6) ya göre $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $k_n = k$ ve $t_r = \tau$ eşitliklerini elde edebiliriz. Böylece

$$G^{-1}\ddot{V}G = \begin{pmatrix} 0 & -k\dot{\tau} + \dot{k}\tau & -\ddot{k} & 0 \\ k\dot{\tau} - \dot{k}\tau & 0 & -\ddot{\tau} & 0 \\ \ddot{k} & \ddot{\tau} & 0 & -\dot{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dır. Eğer α asimptotik bir eğri ise, $k_n = 0$ dır ve (4.6) den $\gamma = 0$, $k_g = k$ ve $t_r = \tau$ olduğunu buluruz. Böylece

$$G^{-1}\ddot{V}G = \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{k} & k\dot{\tau} - \dot{k}\tau & 0 \\ \ddot{k} & 0 & -\ddot{\tau} & -\dot{k} \\ -k\dot{\tau} + \dot{k}\tau & \ddot{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

olur.

Eğer $\dot{k} = u$ sabit ise $\ddot{k} = 0$ olmalıdır. Bu diferansiyel denklemin çözümünden, $k = ut + u_0$ fonksiyonu elde edilir. Şimdi $\dot{\tau}k - \dot{k}\tau$, denkleminin yerine k değeri konulursa burulma için çözüm, bir diğer lineer fonksiyon olan $\tau = \alpha t + \beta$ dır. Burada $\alpha u_0 - \beta u = \omega$ ve $\ddot{\tau} = 0$ dır (Selig 2005).

Örnek 4.1 (Silindir yüzeyinde jeodezikler): Dairesel α helisi R^3 de C silindiri üzerinde spirala benzeyen bir eğridir ki parametrik denklemi,

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = bv,$$

şeklindedir. Burada a yarıçap ve b 'de C silindirin yüksekliğidir. Dairesel α helisinin eğriliği ve burulmasını hesaplırsak,

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

elde edilir. Dairesel α helisi, C silindiri üzerinde bir jeodeziktir. α eğrisinin k eğriliği ve τ burulmasının her ikisi de sabit olduğu için, $G^{-1}\ddot{V}G$ sabit bir matrisdir. Bu nedenle α yardımıyla $SE(3)$ de elde edilen G eğrisi, sabit ivmelidir.

Örnek 4.2 $v \rightarrow (\sin u, \cos u, v)$ doğruları $(u, v) \rightarrow (\sin u, \cos u, v)$ silindirinde asimtotik eğrilerdir. Bir doğrunun eğriliği sıfır olduğundan, silindir yüzeyindeki herhangi bir doğru asimtotik bir eğridir. Ayrıca doğrunun burulması da sıfır olduğundan, Sonuç 4.1'ye göre bu doğru yardımıyla $SE(3)$ de elde edilen G eğrisi, sabit ivmelidir.

Sonuç 4.2 Eğer $\dot{k}$, γ ve $\dot{k}_g k_n - \dot{k}_n k_g$ sabit ise, S yüzeyi üzerinde, eğrilik çizgisi yardımıyla $SE(3)$ de elde edilen G eğrisi sabit ivmelidir.

İspat Eğer α bir eğrilik çizgisi olan bir eğri ise, bu durumda $t_r = 0$ olur, böylece

$$G^{-1}\ddot{V}G = \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{k}_g & -\ddot{k}_n & 0 \\ \ddot{k}_g & 0 & -\dot{k}_n k_g + \dot{k}_g k_n & -\dot{k}_g \\ \ddot{k}_n & \dot{k}_n k_g - \dot{k}_g k_n & 0 & -\dot{k}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

olur.

γ sabit olduğundan, $\tau = 0$ dır ve Sonuç 4.3'e göre k_g ve k_n her ikisi de t nin lineer fonksiyonlarıdır. Bu sebeple $k_g = \alpha_1 t + \alpha_0$ ve $k_n = \beta_1 t + \beta_0$ yazabiliriz, dolayısıyla $\dot{k}_g k_n - \dot{k}_n k_g = \omega$ sabit olduğunu elde etmiş oluruz. Bu sabitlikten dolayı $\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0 = \omega$ ve $\ddot{k}_g = \ddot{k}_n = 0$ olduğunu kolaylıkla elde ederiz. O halde $G^{-1}\ddot{V}G$ matrisi sabit olduğuna göre α eğrisi S yüzeyi üzerinde bir sabit ivmeli eğridir.

Örnek 4.3 $\beta : (a, b) \rightarrow R^3$ bir birim hızlı eğri olsun. β nın $c > 0$ yarıçaplı ve $q \in R^3$ merkezli, $\{p \mid \|p - q\| = c\}$ küresi üzerinde olduğunu varsayalım. Eğer β , yarıçapı c olan bir çember ise o halde $k_g = 0$ ve $k = k_n = \frac{1}{c}$ olur ve dolayısıyla $\dot{k} = \ddot{k} = 0$ olduğu için β nın burulması sıfırdır (Gray 1939). Böylece Sonuç 4.2'e göre, β yardımıyla $SE(3)$ de elde edilen G eğrisi, sabit ivmelidir.

5. Bİ-INVARIANT METRİĞE SAHİP OLAN BİR LIE GRUBUNDA SABİT İVMELİ EĞRİLER

Bi-invariant metrik $\langle, \rangle$ e sahip olan bir Lie grubu G ve ∇ onun Levi – Civita koneksiyonu olsun. G nin Lie cebiri $\mathfrak{g}$ olsun. Dolayısıyla

$$\mathfrak{g} \approx T_e G,$$

olduğunu biliyoruz. Burada e , G nin birim elemanıdır. Ayrıca

$$\langle X, [Y, Z] \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle,$$

ve

$$\nabla_X Y = [X, Y],$$

dır. Burada $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ dir.

Tanım 5.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ bir parametrelili eğri olsun. Bu durumda α ya genel helis denir eğer α nın teğet vektör alanı bir sol-invariant vektör alanı ile sabit açı sağlar ise.

Tanım 5.2 Eğer $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay parametrelili eğri olsun ve eğer α nın Frenet çatısını (T, N, B, κ, τ) ile göstermiş olursak,

$$\tau_G = \frac{1}{2} \langle [T, N], B \rangle,$$

şeklinde α nın burulmasını tanımlayabiliriz.

Teorem 5.1 (Lancert): G bir Lie grubu olsun. G de bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeterli şart $\tau = c\kappa + \tau_G$ dir, burada c sabittir.

İspat (Çiftçi 2009).

Tanım 5.3 G bir Lie grubu ve g, G nin Lie cebiri ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ bir yay parametrelili eğri olsun. O zaman $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow g$ eğrisine, α eğrisinin **sol şifti** denir, eğer

$$\dot{\beta}(s) = dL_{\alpha^{-1}(s)}\dot{\alpha}(s), \forall s \in I,$$

olur ise. Burada L sol ötelemedir.

Tanım 5.4 α ya bir küresel eğri denir, eğer β eğrisi, birim küre üzerinde ise, yani

$$\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1, \forall t \in I.$$

Teorem 5.2 G Lie grubu üzerinde α eğrisi için $\tau = c\kappa + \tau_G$ olsun. α nın bir genel küresel helis olmasının gerek ve yeterli şartı,

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2s^2}},$$

ve

$$\tau(s) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2s^2}} + \tau_G,$$

dır.

İspat (Çiftçi 2009).

G bi-invariant metriğe sahip olan bir Lie grubu olsun ve G nin üzerinde bir $\alpha: I \rightarrow G$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere,

$$\nabla_T T = \kappa N, \nabla_T N = -\kappa T + \tau B, \nabla_T B = -\tau N,$$

denklemleri vardır. Burada ∇ , G nin Levi- Civita koneksiyonu ve κ ile τ , sırasıyla, α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarıdır.

Şimdi Frenet hareketinde, α eğrisi üzerinde hareket eden bir noktayı ele alalım. Matris gösterimi kullanarak hareket,

$$m(t) = \begin{pmatrix} R(t) & \alpha(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

ile gösterilir. Burada $\alpha(t)$ bir eğri ve $R(t)$, T , N , B birim vektörlere sahip dönme matrisidir. Böylece

$$R(t) = (T, N, B),$$

dir. Dolayısıyla, $\omega = \tau T + \kappa B$, Darboux vektörü olmak üzere

$$\nabla_T T = \omega \times T, \nabla_T N = \omega \times N, \nabla_T B = \omega \times B,$$

denklemleri sağlanır (Marsh 2005).

Böylece

$$\dot{R} = \Omega R,$$

dir.

Burada Ω ; $\omega = \tau T + \kappa B$ vektörüne karşılık gelen 3×3 lük antisimetrik matristir ve ω ; Darboux vektörüdür. Buradan

$$V = \frac{d}{dt} G G^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\Omega} & T - \dot{\omega} \times \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dir. α eğrisi, birim hızlı olduğundan $\dot{\alpha} = T$ olur.

Böylece,

$$\dot{V} = \begin{pmatrix} \ddot{\Omega} & -\dot{\omega} \times \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dır. Böylece,

$$\dot{\omega} = \dot{\tau}T + \dot{\kappa}B,$$

eşitliğinden,

$$\ddot{V} = \begin{pmatrix} \ddot{\ddot{\Omega}} & -\ddot{\omega} \times \alpha - \dot{\kappa}N \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

olur. Burada,

$$N = B \times T,$$

ve

$$\ddot{\omega} = \ddot{\tau}T + (\dot{\tau}\kappa - \dot{\kappa}\tau)N + \ddot{\kappa}B,$$

dır.

Şimdi $\dot{V}$ hesaplandığında,

$$G^{-1}\dot{V}G = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\kappa} & \dot{\tau}\kappa - \dot{\kappa}\tau & 0 \\ \dot{\kappa} & 0 & -\ddot{\tau} & -\dot{\kappa} \\ \dot{\kappa}\tau - \dot{\tau}\kappa & \ddot{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

bulunur.

Şimdi α eğrisinin sabit ivmeli bir eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$G^{-1}\dot{V}G = C, \quad (5.9)$$

dır. Burada C , 4×4 'lük sabit bir matristir:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 & c_3 & 0 \\ c_1 & 0 & -c_2 & -c_4 \\ -c_3 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

dir. Burada, c_1, c_2, c_3, c_4 sabittirler (Selig 2007). Bu durumda (5.9) ve (5.10)'dan κ ve τ değişkenli aşağıdaki üç diferansiyel denklem elde edilir:

$$\dot{\kappa} = c_1, \quad \dot{\tau}\kappa - \dot{\kappa}\tau = c_2, \quad \ddot{\tau} = c_3.$$

Ayrıca biliyoruz ki α eğrisinin G Lie grubunda sabit ivmeli bir eğri olmasının gerek ve yeterli şartı $G^{-1}\dot{V}G = C$ matrisinin 4×4 'lük sabit bir matris olmasıdır.

Teorem 5.3 G bir bi-invaryant metriğe sahip olan Lie grubu olsun, G de bir küresel genel helis eğrisi yardımıyla elde edilen $m(t)$ eğrisinin, sabit ivmeli bir eğri olması için gerek ve yeterli şart $\kappa = 1$ ve τ birinci dereceden fonksiyon olmasıdır.

İspat α eğrisi G Lie grubunda bir küresel genel helis olsun. O zaman

$$\tau = c\kappa + \tau_G,$$

dir. Eğer α , G de sabit ivmeli bir eğri ise

$$\dot{\kappa} = c_1,$$

dir ve buradan

$$\kappa = c_1 s + c_4,$$

elde edilir. Ayrıca

$$\dot{\tau}\kappa - \dot{\kappa}\tau = (c\dot{\kappa} + \dot{\tau}_G)\kappa - \dot{\kappa}(c\kappa + \tau_G)$$

$$= \dot{\tau}_G\kappa - \dot{\kappa}\tau_G$$

$$= \dot{\tau}_G\kappa - c_1\tau_G$$

$$= c_2,$$

dir ve dolayısıyla

$$\dot{\tau}_G - \frac{c_1}{c_1 s + c_4} \tau_G = \frac{c_2}{c_1 s + c_4},$$

denklemini elde ederiz. Buradan,

$$\tau_G = e^{\int \frac{c_1}{c_1 s + c_4} ds} \left(\int \frac{c_2}{c_1 s + c_4} e^{-\int \frac{c_1}{c_1 s + c_4} ds} ds + c_5 \right)$$

$$= c_1 c_5 s + c_4 c_5 - \frac{c_2}{c_1}$$

$$= ms + n,$$

dır. Burada $m = c_1 c_5$ ve $n = c_4 c_5 - \frac{c_2}{c_1}$ dır.

Ayrıca

$$\ddot{\tau} = \ddot{\tau}_G = 0,$$

koşulu sağlanmalıdır. Burada

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 s^2}},$$

ve

$$\kappa = c_1 s + c_4,$$

denklemlerinden $c = 0$ olur ve dolayısıyla $\kappa = 1$ elde edilir.

Böylece $\kappa = 1$ ve τ nın s parametresinin lineer fonksiyonu olduğunu ispat etmiş oluyoruz.

Eğer G bi-invariant metriğe sahip olan Lie grubunda, küresel genel helis olan α eğrisi için $\kappa = 1$ ve τ , s parametresinin lineer fonksiyonu ise, o zaman m eğrisinin bir sabit ivmeli eğri olduğu aşıkardır.

6. KOMPAKT RIEMANN MANİFOLDUNDA SABİT İVMELİ EĞRİLER

M, R^4 Riemann manifoldunun bir üç boyutlu kompakt ve irtibatlı alt manifoldu olsun. O halde M bi-invaryant olan bir Riemann metriğine sahiptir.

Ayrıca $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere, Frenet formülasyonuna göre

$$\nabla_T T = \kappa N, \quad \nabla_T N = -\kappa T + \tau B, \quad \nabla_T B = \tau N,$$

denklemleri elde edilir. Burada ∇ , M 'nin Levi- Civita koneksiyonu ve κ ile τ sırasıyla α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarıdır.

Şimdi, $M = S^3 \subset R^4$ birim yarıçaplı ve orijin merkezli bir küreyi ele alalım. S^3 üzerindeki bir $\alpha: I \subset R \rightarrow S^3$ eğrisi, R^4 üzerinde de bir eğri olarak incelenebilir. Şimdi α eğrisinin 4-boyutlu Öklid uzayındaki Frenet çatısı $\{E_1, E_2, E_3, k_1, k_2, k_3\}$ ve eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$, $T = E_1$ olmak üzere,

$$\kappa = \sqrt{k_1 - 1} \tag{6.11}$$

ve

$$\tau = \frac{k_1^2 k_2}{\kappa^2} \tag{6.12}$$

dır (Monterde 2004).

Teorem 6.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^3$ birim hızlı ve yay uzunluklu parametreye sahip olan bir uzay eğrisinin sabit ivmeli eğri olması için gerek ve yeter şart,

$$k_1 = \pm \sqrt{(as+b)^2 + 1}$$

ve

$$k_2 = \frac{(as+b)^2(ps+q)}{(as+b)^2 + 1},$$

dır. Burada a, b, p, q sabittirler ve $k_i, i=1,2$ için α eğrisinin, 4 boyutlu Öklid uzayındaki i-inci eğriligidir.

İspat $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^3$ birim hızlı eğrisi S^3 üzerinde olsun. Şimdi biliyoruz ki Frenet-Serret hareketinde (katı cisim hareketinde), bir nokta α eğrisi boyunca hareket eder. Hareketli cisimde koordinat çatısı, bu eğrinin teğeti T , normali N , ve binormali B den oluşur. Burada hareket, (5.7) formunda belirtilebilir. Bu hareketle ilgili dönme matrisi $R = (T, N, B)$ dır.

Biliyoruz ki α eğrisinin sabit ivmeli bir eğri olmasının gerek ve yeter şartı $G^{-1}\dot{V}G = C$ dır. Burada C , (6.10) formuna göre 4×4 'lük bir sabit matristir. $k_1 = x$, dersek (6.11)'den $\kappa = \sqrt{x^2 - 1}$ elde edilir ve $\dot{\kappa} = c_4$ dır. Buradan

$$\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 - 1}} = c_4, \quad (6.13)$$

dır. Şimdi $dx = \dot{x}ds$ olduğundan (6.13)'den

$$\frac{x dx}{c_4 \sqrt{x^2 - 1}} = ds, \quad (6.14)$$

dır. (6.14)'den bir kere integral alınırsa

$$\sqrt{x^2 - 1} = c_4 s + c_5, \quad (6.15)$$

elde edilir. Burada c_5 integral sabiti dir. (6.15)'den

$$x = \pm \sqrt{(c_4 s + c_5)^2 + 1},$$

dir. Ayrıca $k_1 = x$ ve $k_2 = y$ dersek, (6.12)'den,

$$\tau = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (6.16)$$

elde edilir. Şimdi (6.16)'dan s ye göre türev alınırsa

$$\dot{\tau} = \frac{x^2 \dot{y}}{x^2 - 1} + \frac{2yx\dot{x}}{x^2 - 1} - \frac{2yx^3 \dot{x}}{(x^2 - 1)^2}, \quad (6.17)$$

denklemini elde edilir.

Şimdi (6.16), (6.17) ve $\dot{\tau}\kappa - \dot{\kappa}\tau = c_2$ denklemlerinden

$$\dot{y} - \frac{x^2 + 2}{x(x^2 - 1)} \dot{x}y = \frac{c_2 \sqrt{x^2 - 1}}{x^2},$$

yazabiliriz. Bu diferansiyel denklemden

$$y = \frac{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)}{x^2} \left(\int \frac{c_2}{x^2-1} ds + c_6 \right), \quad (6.18)$$

bulunur. Burada c_6 sabit bir sayıdır. Şimdi $x^2-1 = (c_4s+c_5)^2$ denklemini (6.18)'de kullanırsak

$$y = \frac{(c_4s+c_5)^3}{(c_4s+c_5)^2+1} \left(\frac{-c_2}{c_4(c_4s+c_5)} + c_7 \right),$$

olur. Burada c_7 bir sabit sayıdır.

Buradan ve $\dot{\kappa} = c_4$ den $\ddot{\kappa} = 0$ dır. O zaman (6.13) den aşağıdaki diferansiyel denklemi yazabiliriz

$$\frac{x\ddot{x}}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{(x^2-1)} \frac{\dot{x}^2}{\sqrt{x^2-1}} = 0,$$

burada

$$x(x^2-1)\ddot{x} = \dot{x}^2, \quad (6.19)$$

olur.

Şimdi (6.16)'dan iki kere, s ye göre türev alınırsa, aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$\ddot{\tau} = -\frac{2x^3y\ddot{x}}{(x^2-1)^2} + \frac{2xy\ddot{x}}{x^2-1} - \frac{4x^3\dot{x}\dot{y}}{(x^2-1)^2} + \frac{4x\dot{x}\dot{y}}{x^2-1} + \frac{8x^4y\dot{x}^2}{(x^2-1)^3} - \frac{10x^2y\dot{x}^2}{(x^2-1)^2} + \frac{2y\dot{x}^2}{x^2-1} + \frac{x^2\ddot{y}}{x^2-1}. \quad (6.20)$$

Ayrıca, $\ddot{t} = c_3$ olduğundan

$$\frac{x^2}{x^2-1} \ddot{y} - \frac{4x\dot{x}}{(x^2-1)^2} \dot{y} - \frac{2x\ddot{x}(x^2-1) + 2(3x^2+1)\dot{x}^2}{(x^2-1)^3} y = c_3,$$

dır. Eğer (6.19) denklemini (6.20)'de kullanılır ise

$$\frac{x^2}{x^2-1} \ddot{y} - \frac{4x\dot{x}}{(x^2-1)^2} \dot{y} - \frac{6x^2\dot{x}^2}{(x^2-1)^3} y = c_3, \quad (6.21)$$

olur.

Eğer $a = c_4$, $b = c_5$, $p = c_4 c_7$ ve $q = c_5 c_7 - \frac{c_2}{c_4}$ olur ise o zaman $\dot{x}$, y , $\dot{y}$ ve $\ddot{y}$ miktarları

için

$$\dot{x} = \frac{a(as+b)}{\sqrt{(as+b)^2+1}},$$

$$y = \frac{(as+b)^2(ps+q)}{(as+b)^2+1},$$

$$\dot{y} = \frac{2a(as+b)(ps+q)}{(as+b)^2+1} - \frac{2a(as+b)^3(ps+q)}{\left((as+b)^2+1\right)^2} + \frac{p(as+b)^2}{(as+b)^2+1},$$

$$\ddot{y} = (as+b)^2(ps+q) \left(\frac{8a^2(as+b)^2}{\left((as+b)^2+1\right)^3} - \frac{2a^2}{\left((as+b)^2+1\right)^2} \right) +$$

$$\frac{2a^2(ps+q) + 4ap(as+b)}{(as+b)^2+1} - \frac{4a(as+b)(p(as+b)^2 + 2a(as+b)(ps+q))}{\left((as+b)^2+1\right)^2},$$

olur. Şimdi x and $\dot{x}$ (6.21)'de yerlerine konulursa aşağıdaki ikinci mertebeden olan diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{(as+b)^2+1}{(as+b)^2} \ddot{y} - \frac{4a}{(as+b)^3} \dot{y} + \frac{6a^2}{(as+b)^4} y = c_3.$$

Son olarak eğer $y, \dot{y}$ ve $\ddot{y}$ nin değerlerini, yukarıdaki diferansiyel denklemde kullanırsak, o zaman $c_3 = 0$ olur.

Burada, aşağıdaki denklemler

$$k_1 = \pm \sqrt{(as+b)^2 + 1} \quad (6.22)$$

ve

$$k_2 = \frac{(as+b)^2(ps+q)}{(as+b)^2+1} \quad (6.23)$$

ve $c_3 = 0$ yı kullanarak

$$G^{-1} \ddot{V} G = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_4 \\ -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

olur. Burada C , 4×4 'lük bir sabit matristir. Burada k_1, k_2 değerleri, α eğrisinin sabit ivmeli olma koşulunu sağlarlar.

Tersine, eğer k_1 ve k_2 , (6.22) ve (6.23)'deki gibi olursa, o zaman (6.11) ve (6.12)'den dolayı $\kappa = as + b$ ve $\tau = ps + q$ olur. Ayrıca, (5.8)'den $G^{-1}\ddot{V}G$, 4×4 'lük sabit bir matris olur. Burada α sabit ivmeli bir eğri olma koşulunu sağlar.

7. 3-BOYUTLU YARI-RIEMANN MANİFOLDUNDA KLASİK ELASTİK EĞRİLER

7.1 Frenet Denklemleri

M bir 3-boyutlu yarı -Riemann manifoldu ve onun yarı-Riemann metriği

$$g(X,Y)=\langle X,Y\rangle=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3,$$

olsun, burada $X=(x_1,x_2,x_3)$, $Y=(y_1,y_2,y_3)$ dır.

$\alpha:I\rightarrow M$, 3-boyutlu yarı-Riemann manifoldu M üzerinde bir eğri ve $v(t)=|\alpha'(t)|$, eğrilik k , burulma τ ve Frenet çatısı $\{T,N,B\}$ olsun. O zaman Frenet denklemleri

$$\nabla_T T = \varepsilon_2 \kappa N, \nabla_T N = -\varepsilon_1 \kappa T + \varepsilon_3 \tau B, \nabla_T B = -\varepsilon_2 \tau N,$$

dir. Burada $\varepsilon_1 = \langle T, T \rangle$, $\varepsilon_2 = \langle N, N \rangle$ ve $\varepsilon_3 = \langle B, B \rangle$ dır (Angel Fernandez 2006).

Tanım 7.1.1 V vektör alanına, $\langle V, V \rangle > 0$ veya $V \neq 0$ olması halinde spacelike, $\langle V, V \rangle < 0$ olması halinde timelike, $\langle V, V \rangle = 0$ ve $V \neq 0$ halinde ise lightlike denir.

7.2 Klasik Elastik Denklem

X ve Y vektör alanları için Bracket formülü,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] = XY - YX,$$

dir.

$\alpha(t)$, M de bir eğri olsun. O zaman hız vektörü $V = \nu T$ dır ve jeodezik eğriliğin karesi

$$\kappa^2 = \|\nabla_T T\|^2,$$

dır.

$\alpha_w(t) = g(w, t)$ eğriler ailesi için Frenet çatısını (T, N, B) ile gösteriyoruz. Böylece

$$W = W(w, t) = \frac{\partial \alpha}{\partial w}$$

ve

$$V(w, t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \nu(w, t)T(w, t),$$

dır. Burada V hız vektörü, $\nu = \frac{ds}{dt}$ ve s yay-uzunluğu parametresidir.

Euler denklemlerinden

$$0 = [W, V] = [W, \nu T] = W(\nu)T + \nu W, T],$$

elde edilir (Singer 2007).

Buradan

$$[W, T] = \frac{W(\nu)}{\nu}T = gT,$$

dır. Dolayısıyla

$$2\tau W(\nu) = W(\nu^2) = 2\langle \nabla_W V, V \rangle = 2\langle \nabla_\nu W, V \rangle = 2\nu^2 \langle \nabla_T W, T \rangle,$$

dır.

Ayrıca,

$$W(\nu) = -g\nu, \quad g = -\langle \nabla_T W, T \rangle,$$

dır ve dolayısıyla

$$W(\kappa^2) = 2\langle \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T \rangle + 4g\kappa^2 + 2\langle R(W, T)T, \nabla_T T \rangle,$$

elde edilir. Burada eğrilik tensörü R ,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

şeklindedir.

Şimdi, $\alpha : (0, 1) \rightarrow M$ bir eğri ve onun uzunluğu L olsun. Bu durumda keyfi bir sabit sayı λ için

$$\begin{aligned} F^\lambda(\alpha) &= \frac{1}{2} \int_0^L \kappa^2 + \lambda ds = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa^2 ds + \lambda L \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\|\nabla_T T\|^2 + \lambda) \nu(t) dt, \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada, W bir vektör alanı olmak üzere α_W için yukarıdaki formül hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dw} F^\lambda(\alpha_w) &= \frac{1}{2} \int_0^L W(\kappa^2) \nu + (\kappa^2 + \lambda) W(\nu) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 W(\kappa^2) - (\kappa^2 + \lambda) g ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T \rangle + 2g\kappa^2 \\
&\quad + \langle R(W, T)T, \nabla_T T \rangle - \frac{1}{2}(\kappa^2 + \lambda) g ds,
\end{aligned}$$

olur.

Burada, $\langle R(W, T)T, \nabla_T T \rangle$ yerine $\langle R(\nabla_T T, T)T, W \rangle$ ifadesi yazılmıştır. Şimdi, $g = -\langle \nabla_T W, T \rangle$ den kısmi integrasyon yöntemini kullanarak

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dw} F^\lambda(\alpha_w) &= \int_0^1 \langle \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T \rangle - \langle \nabla_T W, 2\kappa^2 T \rangle \\
&\quad + \langle R(\nabla_T T, T)T, W \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla_T W, (\kappa^2 + \lambda)T \rangle ds \\
&= \int_0^L \langle E, W \rangle ds + [\langle \nabla_T W, \nabla_T T \rangle + \langle W, -(\nabla_T)^2 T + \Lambda T \rangle]_0^L,
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$E = (\nabla_T)^3 T - \nabla_T(\Lambda T) + R(\nabla_T T, T)T,$$

dir ve $\Lambda = \frac{\lambda - 3\kappa^2}{2}$ dir (Singer 2007).

7.2.1 Timelike eğri

3-boyutlu yarı-Riemann manifoldu olan M nin içinde, $\alpha(t)$ bir timelike eğri olsun.

Eğrinin normal vektör alanı N ve binormal vektör alanı B spacelike olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(t) &= \nu T, \\
\nabla_T T &= \kappa N, \\
\nabla_T N &= \kappa T + \tau B, \\
\nabla_T B &= -\tau N,
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada κ ve τ , α eğrisinin, sırasıyla, eğrilik ve burulmasıdır.

Teorem 7.2.1.1 3-boyutlu, kesitsel eğriliği C olan yarı-Riemann manifoldu M üzerinde, $\alpha(t)$ bir timelike eğri olsun. O zaman $\alpha(t)$ nin bir elastik eğri olması için gerek ve yeter şart α nın κ eğriliği ve τ burulması için

$$\kappa = c_1, \tau = c_2, C = c,$$

Olacaktır. Burada c_1, c_2 sabittirler ve $c = \frac{2c_2^2 + \lambda - 5c_1^2}{2}$ dır.

İspat M manifoldun kesitsel eğriliği C olduğundan, E nin formülünü

$$\begin{aligned}
E &= (\nabla_T)^3 T - \nabla_T(\Lambda T) + C \nabla_T T \\
&= \nabla_T(\nabla_T \kappa N - \Lambda T + C T) - C_s T \\
&= \nabla_T(\kappa_s N + (\kappa^2 - \Lambda + C)T + \kappa \tau B) - C_s T \\
&= 6\kappa \kappa_s T + (\kappa_{ss} + \kappa^3 - \Lambda \kappa + C \kappa - \kappa \tau^2)N + (2\kappa_s \tau + \kappa \tau_s)B,
\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Böylece

$$E = 6\kappa \kappa_s T + \frac{2\kappa_{ss} + 5\kappa^3 - \lambda \kappa + 2C\kappa - 2\kappa \tau^2}{2} N + (2\kappa_s \tau + \kappa \tau_s) B, \quad (7.24)$$

dır.

$E = 0$ eşitliğinin sağlanması için,

$$\begin{aligned}
\kappa\kappa_s &= 0, \\
2\kappa_{ss} + 5\kappa^3 - \lambda\kappa + 2C\kappa - 2\kappa\tau^2 &= 0, \\
2\kappa_s\tau + \kappa\tau_s &= 0,
\end{aligned}$$

olmalıdır. Yukarıdaki sistemi çözersek,

$$\kappa = c_1, \quad \tau = c_2, \quad C = c,$$

elde edilir. Burada c_1, c_2 sabittirler ve $c = \frac{2c_2^2 + \lambda - 5c_1^2}{2}$ dir.

Tersine, κ, τ ve C (7.24)'de yerlerine konursa $E=0$ denklemini elde ederiz. Böylece α nın bir elastik eğri olduğunu göstermiş oluruz.

7.2.2 Spacelike eğri

3-boyutlu, kesitsel eğriliği C olan yarı-Riemann manifoldu M nin üzerinde, $\alpha(t)$ bir spacelike eğri olsun. Bu durumda $\nabla_T T$ ye bağlı üç farklı durum vardır:

Teorem 7.2.2.1 3-boyutlu, kesitsel eğriliği sabit olan yarı-Riemann manifoldu M nin üzerinde, α bir spacelike elastik eğri ve ∇, α nın kovaryant türevi olsun. Eğer $\nabla_T T$ vektör alanı spacelike ise, bu durumda α nın eğriliği $\kappa = \sqrt{m(1 - q^2 sn^2(rs, p))}$ ve burulması $\tau = \frac{c}{\kappa^2}$ dır. Burada c, m, p, q ve r sabittirler ve s de yay-uzunluğu parametresidir.

İspat $\nabla_T T$ spacelike ise,

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(t) &= vT, \\
\nabla_T T &= \kappa N, \\
\nabla_T N &= -\kappa T - \tau B, \\
\nabla_T B &= -\tau N,
\end{aligned}$$

dir. Burada κ ve τ , sırasıyla, α nın eğrilik ve burulmasıdır. Bu durumda E nin formülü kolaylıkla hesaplanabilir:

$$E = \frac{2\kappa_{ss} + \kappa^3 - \lambda\kappa + 2C\kappa + 2\kappa\tau^2}{2} N - (2\kappa_s\tau + \kappa\tau_s) B.$$

Burada s yay-uzunluğu parametresidir.

Elastik denklemi $E = 0$ dan

$$\begin{aligned}
2\kappa_{ss} + \kappa^3 - \lambda\kappa + 2C\kappa + 2\kappa\tau^2 &= 0, \\
2\kappa_s\tau + \kappa\tau_s &= 0,
\end{aligned}$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Burada ikinci denklemden integral alınırsa,

$$\kappa^2\tau = c,$$

olur. Burada c sabittir. Eğer birinci denklemi $2\kappa_s$ ile çarptıktan sonra integral alırsak o zaman

$$k_s^2 + \frac{1}{4}\kappa^4 + (C - \lambda/2)\kappa^2 - c^2/\kappa^2 = A,$$

elde edilir. Burada A sabittir. Ayrıca, eğer $u = \kappa^2$ olursa, o zaman

$$u_s^2 + u^3 + 4\left(C - \frac{\lambda}{2}\right)u^2 - 4Au - 4c^2 = 0, \quad (7.25)$$

olur. Bu denklem $u_s^2 = p(u)$ şeklinde olduğundan, standart teknikleri kullanarak, eliptik fonksiyonlar biçiminde olan çözümü elde edebiliriz. Burada P üçüncü dereceden bir polinomdur. $P(u)$ polinomunda $P(0) = 4c^2 \geq 0$ ve $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} P(u) = \mp\infty$ dır. Böylece, eğer $u = \kappa^2$ olursa o zaman (7.25) denkleminin sabit olmayan bir çözümü vardır. Burada $P(u) > 0$ olması gerekir. Böylece $P(u)$ nun üç reel kökü vardır. Bundan dolayı, iki durum vardır:

$$1. \text{ hal: } -\alpha_1 \leq -\alpha_2 \leq 0 \leq \alpha_3,$$

$$2. \text{ hal: } 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3.$$

(7.25) denklemini

$$u_s^2 + (u + \alpha_1)(u \mp \alpha_2)(u - \alpha_3) = 0, \quad (7.26)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece (7.26) denkleminin çözümü

$$u = u(s) = \alpha_3(1 - q^2 \operatorname{sn}^2(rs, p)),$$

dır. Burada,

$$p^2 = \frac{\alpha_3 \pm \alpha_2}{\alpha_3 \pm \alpha_1}, \quad q^2 = \frac{\alpha_3 \pm \alpha_2}{\alpha_3}, \quad r = \sqrt{\frac{\alpha_3 q^2}{4p^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_3 \pm \alpha_1},$$

dır.

Ayrıca, α_1, α_2 ve α_3 ile $P(u)$ nun katsayıları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\begin{aligned} 4C - 2\lambda &= \mp \alpha_1 \mp \alpha_2 + \alpha_3, \\ 4c^2 &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \\ 4A &= \pm \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3. \end{aligned}$$

Burada alt ve üst semboller, sırasıyla, 1. ve 2. halleri göstermektedir.

Teorem 7.2.2.2 3-boyutlu, kesitsel eğriliği C olan yarı-Riemann manifoldu M nin üzerinde, α bir spacelike eğri ve ∇ , α nin kovaryant türevi olsun. Eğer $\nabla_T T$ timelike ise, o zaman $\alpha(t)$ nin bir elastik eğri olması için gerek ve yeter şart, α nin eğriliği κ , burulması τ ve kesitsel eğriliği C olmak üzere

$$\kappa = c_1, \tau = c_2, C = c,$$

olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabittirler ve $c = \frac{-5c_1^2 + \lambda - 2c_2^2}{2}$ dır.

İspat $\nabla_T T$ timelike ise,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= vT, \\ \nabla_T T &= -\kappa N, \\ \nabla_T N &= -\kappa T + \tau B, \\ \nabla_T B &= \tau N, \end{aligned}$$

dir. Burada κ ve τ , sırasıyla α nin eğriliği ve burulmasıdır. Bu durumda E nin formülü kolaylıkla hesaplanabilir:

$$E = 6\kappa\kappa_s T - \frac{2\kappa_{ss} + 5\kappa^3 - \lambda\kappa + 2C\kappa + 2\kappa\tau^2}{2} N - (2\kappa_s\tau + \kappa\tau_s) B. \quad (7.27)$$

Burada s yay-uzunluğu parametresidir. Elastik denklemi $E = 0$ dan

$$\begin{aligned}\kappa\kappa_s &= 0, \\ 2\kappa_{ss} + 5\kappa^3 - \lambda\kappa + 2C\kappa + 2\kappa\tau^2 &= 0, \\ 2\kappa_s\tau + \kappa\tau_s &= 0,\end{aligned}$$

olur. Birinci ve üçüncü denklemlerden integral alırsak

$$\kappa = c_1, \tau = c_2,$$

dir. Burada $c = \frac{-5c_1^2 + \lambda - 2c_2^2}{2}$ olmak üzere $C = c$ dir. Tersine, eğer κ, τ ve C yi (7.27)'de yerlerine koyarsak, $E = 0$ denklemini elde ederiz, Bu da, α nın bir elastik eğri olması demektir.

Teorem 7.2.2.3 3-boyutlu, kesitsel eğriliği sabit C olan yarı-Riemann manifoldu M nin üzerinde, α bir spacelike elastik eğri ve ∇ , α nın kovaryant türevi olsun. Eğer $\nabla_T T$ lightlike ise, o zaman eğrilik $\kappa = 1$ ve burulma

$$\begin{cases} \tau = \frac{e^s + 1}{e^s - 1} \sqrt{d}, & d > 0, \\ \tau = \frac{1}{s - c}, & d = 0, \\ \tau = \sqrt{d} \tan(c - s), & d < 0, \end{cases}$$

dir. Burada $d = \frac{\lambda - 2C - 3}{2}$ ve c integral sabitidir.

İspat $\nabla_T T$ lightlike olduğundan, α nın Frenet denklemleri

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(t) &= \nu T, \\
\nabla_T T &= N, \\
\nabla_T N &= \tau N, \\
\nabla_T B &= -T - \tau B,
\end{aligned}$$

dir. Burada $\kappa = 1$ ve τ , α nin burulmasıdır. Burada E nin formülü hesaplanırsa;

$$E = \frac{2\tau_s + 2\tau^2 + 2C - \lambda + 3}{2} N,$$

olur. Şimdi $E = 0$ denkleminde

$$2\tau_s + 2\tau^2 + 2C - \lambda + 3 = 0,$$

veya

$$\tau_s + \tau^2 = d, \quad (7.28)$$

dir. Burada $d = \frac{\lambda - 2C - 3}{2}$ dir. d sabit olduğundan (7.28) denkleminin genel çözümü

$$\begin{cases} \tau = \frac{e^s + 1}{e^s - 1} \sqrt{d}, & d > 0, \\ \tau = \frac{1}{s - c}, & d = 0, \\ \tau = \sqrt{d} \tan(c - s), & d < 0, \end{cases}$$

dir. Burada c integral sabitidir.

8. SONUÇLAR

Bu tezde, diferansiyel geometrinin eğriler teorisi, hareket geometrisinde uygulanmıştır. Bu çalışmada, hareket geometrisinde sabit ivmeli eğriler ele alınmıştır. Bu amaçla verilen temel tanımların yanı sıra, $SE(3)$ grubu üzerinde ele alınan bir eğrinin sabit ivmeli olma durumu incelenmiştir. Bir sonraki aşamada ise, bu eğrinin bir yüzey üzerinde ele alınması halinde sabit ivmeli olma koşulları araştırılmıştır. Bir eğrinin sabit ivmeli olması, Selig (2007) tarafından hareket grupları için incelenmiştir. Burada incelenen eğri uzayda düşünülmüştür. Ancak eğrinin yüzey üzerinde veya genel olarak herhangi bir manifold üzerinde ele alınması eksik kalmıştır. Bu tez çalışmasında yukarıda bahsedilen eksikliğin giderilmesi hedeflenmiştir. Bu açıdan bakıldığında, burada elde edilen sonuçlar kinematik için önemli bir uygulamaya sahip olacaktır. Bir diğer sonuç olarak, bi-invariant metriğe sahip Lie grupları üzerinde alınan bir eğrinin sabit ivmeli olma hipotezleri verilmiştir. Bunlara ek olarak, bir eğrinin kompakt Riemann manifoldlarında sabit ivmeli olması için gerekli koşullar incelenmiştir. Ayrıca, Lorentz uzayında ele alınan bir eğrinin elastik olması için hipotezler ortaya konulmuştur. Benzer çalışmaların diğer uzaylarda da yapılması önerilebilir.

KAYNAKLAR

- Barros, M. Garay, O. J. and Singer, D. A. 1999. Elasticae with constant slant in the complex projective plane and new examples of willmore tori in five spheres, Tohoku Math. J, Vol. 51, pp. 177-192.
- Bottema, O. and Roth, B. 1990. Theoretical Kinematics. New York: Dover Publications.
- Çiftçi, Ü. 2009. A generalization of Lancert's theorem. Journal of Geometry and Physics, Vol. 59, pp. 1597-1603.
- Davis, H. T. 1962. Introdoaction to nonlinear differential and integral equations, Dover, New York.
- Fernandez, A., Guerreo, J., Javaloyes, M. A., and lucas, P. 2006. Particles with curvature and burulma in 3-dimensional psedo-Riemannian space forms, J. Geom. Phys Vol. 56, pp. 1666-1687.
- Gray, A, 1939. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. Library of Congress, United State of America.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 2000. Diferansiyel Geometri Cilt I, IV. Baskı. Özel Yayın.
- Hicks, Noel J. 1974. Nots on Differential Geometry, Van Nostrand Reinhold Company, London, pp. 1-60.
- Karger, A. and Novak, J. 1978. Space Kinematics and Lie Groups, Gordon and Breach Science Publishers.
- Koiso, N. 1996. On the motion of the curve towards elastica, Actes de la table ronde de geometrie differentielle en I honneur de Marcel Berger (Collection SMF Seminaires, Congres no 1, ed. A. L. Besse), pp. 403-436.
- Koiso, N. 1992. Elasticae in a riemannian submanifold, Osaka J. Math, Vol. 29, pp. 539-543.
- Langer, J., Singer, D. A. 1984. Knotted elastic curves in R^3 , J. London Math, Vol. 30, pp. 512-520.
- Lopez, R. 2008. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, University of Granada.
- Love, A. E. H. 1927. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Marsh, D. 2005. Time derivatives of screws with applications to dynamics and stiffness. Mech. Mach. Theory, Vol. 40, pp. 259-273.

- Matsushima, Y. 1972. Differentiable Manifold, Marcel Dekker, Inc. New York. (Translated by E. T. Kobayashi), pp. 25-80.
- Monterde, J. 2004. Curves with constant curvature ratios. arXiv:math/0412323v1 [math.DG].
- Noakes, L. 2003. Nullcubics and Lie quadratics. J. Math. Physics, Vol. 44, pp. 1436-1448.
- Noakes, L., Heizinger, G. and Paden, B. 1989. Cubic splines on curved space. IMA J. Math. Control Inf., Vol. 6, pp. 465-473.
- O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian geometry, Academic Press.
- Sager, I., Abazari, N., Ekmekci, N. and Yayli, Y. 2011. The Classical Elastic Curves in Lorentz-Minkowski Space, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, No. 7, pp. 309 – 320.
- Selig, J. M. 2005. Geometric Fundamental of Robotics, 2nd. New York: Springer.
- Selig, J. M. 2007. Curves of stationary acceleration in SE(3). IMA J.Math. Control Inf., Vol. 24, pp. 95-113.
- Singer, D. A. 2007. Lectures on Elastic Curves and Rods, Case Western Reserve University, Cleveland, OH 44106-7058, 30. P.
- Stenberg, S. 1995. Group Theory and Physics, Cambridge University Press.
- Zefran, M. and Kumar, V. 1998. Two methods for interpolating rigid body motions. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics Automation, Vol. 4, Leuven, Belgium, pp. 2922-2927.
- Zefran, M., Kumar, V. and Croke, C. 1995. On the generation of smooth three-dimensional rigid body motions, IEEE Transactions on Robotics and Automation.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nemat ABAZARI

Doğum Yeri : Parsabad, İran.

Doğum Tarihi : 1972

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise: Andarzgoo Lisesi (1990).

Lisans: Tabriz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (1994).

Yüksek Lisans: Vali Asr Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2000).

Doktora: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
(Şubat 2007 – Ocak 2012).

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:

Ardabil İslami Azad Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 2004 – ...

Yayınlar:

- **Abazari, N.**, Yayli, Y. 2011. Stationary Acceleration Curves of Geodesic Frame in $SE(3)$, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, Vol. 5, No. 9, pp. 1071-1076.
- **Abazari, N.** 2011. An Optimal Control Problem for Rigid Body Motions in Minkowski Space, Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011, No. 52, pp. 2559 – 2569.

- **Abazari, N.** 2011. The Frenet Frame and Darboux Vector of The Dual Curve on The One-parameter Dual Spherical Motion, Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, No. 24, 1171-1176.
- Sager, I., **Abazari, N.**, Ekmekci, N., Yayli, Y. 2011. The Classical Elastic Curves in Lorentz-Minkowski Space, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, No. 7, 309 – 320.
- **Abazari, N.**, Bahmanpour, K. 2011. A note on Bass numbers of Artinian local cohomology modules, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, Vol. 5, No. 12, pp. 2632-2636.
- **Abazari, N.**, Bahmanpour, K. 2011. On the finiteness of Bass numbers of local cohomology modules, Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 10, No. 4, pp. 783–791.
- **Abazari, N.**, Yayli, Y. 2011. Stationary acceleration curves in a Lie group with a bi-invariant metric, (Değerlendirme aşamasında).
- **Abazari, N.**, Yayli, Y. 2011. The Classical Elastic Curves in an 3-Dimensional Indefinite-Riemannian Manifold, (Değerlendirme aşamasında).
- **Abazari, N.**, Hacisalihoglu, H. H. 2010. The Pitch, The Angle of Pitch and The Distribution Parameter of a Closed Ruled Surface, (Değerlendirme aşamasında).