

T. C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADEM DEMİR

HAZİRAN 2012
MUĞLA

T. C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADEM DEMİR

HAZİRAN 2012
MUĞLA

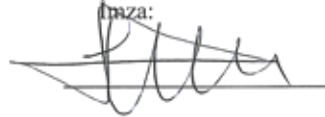
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

ADEM DEMİR tarafından hazırlanan **KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE** başlıklı tezinin, 12/06/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Doç. Dr. Mustafa GÜLSU (Jüri Başkanı)
Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:


Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ (Üye)
Matematik Anabilim Dalı,
Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

İmza:


Yrd. Doç. Dr. Bekir TANAY (Üye)
Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

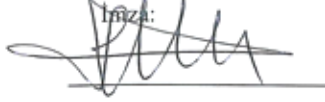
İmza:


ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mehmet SEZER
Matematik Anabilim Dalı Başkanı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:


Doç. Dr. Mustafa GÜLSU
Danışman, Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:


Savunma Tarihi: 12/06/2012

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Adem DEMİR

12/06/2012



ÖZET
KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Adem DEMİR

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa GÜLSU

Haziran 2012, 69 sayfa

Bu çalışmada bir boyutlu parabolik kısmi diferansiyel denklemlerde karşılaşılan problemlerin çözümünde nümerik yöntemler geliştirilmeye çalışılmıştır. Literatürde bilinen en basit parabolik kısmi diferansiyel denklem ele alınarak geliştirilen nümerik yöntem bu denklem üzerinde incelenmiştir. Yöntemin kararlılık ve yakınsaklık analizleri incelenmiştir. Sonlu fark yöntemlerine ilave olarak sonlu elemanlar yöntemi incelenmiştir. Geliştirilen yöntemlerin hassasiyetleri diğer yöntemlerle karşılaştırılarak bu yöntemin diğer yöntemlere aynı denklik sınıfında olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sonlu Farklar, Açık Yöntem, Kapalı Yöntem, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Crank-Nicolson, Kararlılık

ABSTRACT
**ON A STUDY OF NUMERICAL SOLUTIONS OF PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Adem DEMİR

Master of Science (M.Sc.)

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

June 2012, 69 pages

In this study numerical methods for solving one-dimensional parabolic partial differential equations were developed. Parabolic partial differential equation known in the literature by considering the simplest numerical method is investigated. Stability and convergent analysis of the method are investigated. In addition to the finite element method, finite difference methods were also investigated. Comparing the sensitivity of the methods by other methods was shown to be the same equivalence class.

Key Words : Finite Difference, Explicit Method, Implicit Method, Finite Element, Crank-Nicolson, Stability

ÖNSÖZ

Yüksek lisansa devam ederken büyük katkıları olan Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim kadrosuna Doç. Dr. Mustafa GÜLSU şahsında en içten saygılarımı sunarım. Bu süre boyunca bana desteğini esirgemeyen İzmit Cahit Elgin Anadolu Lisesi eğitim- öğretim kadrosuna şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
SEMBOLLER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Tarihi Gelişim.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	4
2.1. Kısmi Diferansiyel Denklemler.....	4
2.2. Eliptik Denklemler	5
2.3.Hiperbolik Denklemler	7
2.3.1. Titreşen yay problemi	8
2.4. Parabolik Denklemler	9
2.5. Başlangıç ve Sınır Şartları	11
3.MALZEME ve YÖNTEM.....	12
3.1. Sonlu Fark Yöntemleri	12
3.1.1. Çok değişkenli fonksiyonların notasyonu	15
3.1.2. Açık yöntem.....	16
3.1.3. FTSC yöntemi.....	21
3.1.4. BTSC yöntemi	22
3.1.5. Crank Nicolson yöntemi	23
3.1.6. Gauss eliminasyon yöntemi	27
3.1.7. Euler yöntemi.....	31
3.1.8. Dufort-Frankel yöntemi	32
3.1.9. Crandall yöntemi	35
3.1.10. Sınır koşullarının türetilmesi	36
3.1.11. Kesme hatası ve tutarlılık	41
3.2. Sonlu Elemanlar Yöntemleri	43
3.3. Yakınsaklığın Analitik Yorumu	48
3.4. Kararlılık Analizi	50

4. ARAŞTIRMA BULGULARI	53
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	61
KAYNAKLAR	62
EKLER	63
Ek A. Örnek 3.1.1 İçin Maple Programı Örneđi	63
Ek B. Örnek 3.1.2 için Maple Programı Örneđi.....	66
ÖZGEÇMİŞ	69

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Örnek 3.1.1 için, $h=0.1$ ve $k=0.01$ değerlerine karşılık gelen başlangıç ve sınır değerleri.....	18
Çizelge 3.2. Örnek 3.1.1 için, $h=0.1$ ve $k=0.01$ değerlerine karşılık gelen açık çözümün nümerik sonuçları.....	19
Çizelge 3.3. Örnek 3.1.1 için, $h=0.1$ ve $k=0.01$ seçildiğinde $x=0.3$ noktasında açık çözüm ile analitik çözümün karşılaştırılması	20
Çizelge 3.4. Örnek 3.1.1 için, $h=0.1$ ve $k=0.01$ seçildiğinde $x=0.3$ noktasında açık çözüm ile analitik çözümün karşılaştırılması	20
Çizelge 3.5. Örnek 3.1.1 için, $h=0.1$ ve $k=0.05$ değerlerine karşılık gelen açık çözümün nümerik sonuçları.....	21
Çizelge 3.6. Örnek 3.1.1 için, $h=0.1$ ve $k=0.01$ seçildiğinde $x=0.3$ noktasında açık çözüm ile analitik çözümün karşılaştırılması	21
Çizelge 3.7. Örnek 3.1.1 için, $h=0.1$ ve $k=0.01$ değerlerine karşılık gelen açık çözümün nümerik sonuçları.....	21
Çizelge 3.8. Örnek 3.1.1 için, $h=0.1$ ve $k=0.01$ değerlerine karşılık gelen C-N çözümün nümerik sonuçları.....	27
Çizelge 3.9. Örnek 3.1.1 için, $h=0.1$ ve $k=0.01$ seçildiğinde $x=0.3$ noktasında Crank-Nicolson ile analitik çözümün karşılaştırılması	28
Çizelge 3.10. Örnek 3.1.3 için, $h=0.1$ ve $k=0.01$ değerlerine karşılık gelen Euler çözümün nümerik sonuçları	34
Çizelge 3.11. Örnek 3.1.4 için, $h=0.1$ ve $k=0.01$ değerlerine karşılık gelen Dufort –Frankel çözümün nümerik sonuçları.....	37
Çizelge 3.12. Örnek 3.1.5. sınır koşulların ümerik sonuçları	43
Çizelge 3.13. Örnek 3.1.5. sınır koşullarının analitik çözümün nümerik sonuçları	43
Çizelge 3.14. Örnek 3.1.5. $x=0.1$ noktasında sınır koşullarının nümerik sonuçları	43
Çizelge 4.1. Örnek 4.1' in $t=0.5$ için BTSC, FTSC yaklaşımları ve analitik çözümlerinin nümerik sonuçları	56
Çizelge 4.2. Örnek 4.1' in $t=0.03$ için FTSC, Dufort -Frankel yaklaşımları ve çözümlerinin grafikleri	57
Çizelge 4.3. Örnek 4.1' in $t=0.03$ için FTSC, BTSC yaklaşımları ve analitik çözümlerinin nümerik sonuçları	58
Çizelge 4.4. Örnek 4.1' in $t=0.003$ için Crandall, BTSC yaklaşımları ve analitik çözümlerinin nümerik sonuçları	59

Çizelge 4.5. Örnek 4.1' in $t=0.03$ için Crandall, FTSC yaklaşımları ve analitik çözümlerinin nümerik sonuçları	60
Çizelge 4.6. Örnek 4.1' in $t=0.03$ için Crandall, Dufort Frankel yaklaşımları ve analitik çözümlerinin nümerik sonuçları	61
Çizelge 4.7. Örnek 4.1' in $t=0.03$ için Crandall, BTSC yaklaşımları ve analitik çözümlerinin nümerik sonuçları	62

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Levhanın kartezyen koordinatlarda gösterilmesi	6
Şekil 2.2. Yaya etkileyen gerilme kuvvetinin gösterilmesi	8
Şekil 2.3. L uzunluğundaki dx genişlikli çubuğun gösterilmesi	10
Şekil 3.1. Ağ noktalarının x-t düzleminde gösterilmesi.....	14
Şekil 3.2. Fark formüllerinin yaklaşık hesaplandığı teğetlerin gösterilmesi.....	15
Şekil 3.3. x-t düzleminde P temsili noktasının gösterilmesi	16
Şekil 3.4. Açık çözümün moleküler yapısının gösterilmesi.....	18
Şekil 3.5. Açık çözümün hesaplanmasının moleküler yapısının gösterilmesi	19
Şekil 3.6. Örnek 3.2.1' in h ve k nın çeşitli değerleri için açık çözüm ile analitik çözümlerinin grafikleri	22
Şekil 3.7. FTSC çözümün moleküler yapısının gösterilmesi.....	23
Şekil 3.8. Kapalı çözümün moleküler yapısının gösterilmesi.....	24
Şekil 3.9. Crank-Nicolson yönteminin moleküler yapısının gösterilmesi	25
Şekil 3.10. C-N yönteminin çözümünün molekül yapısı ile gösterilmesi	26
Şekil 3.11. C-N yönteminin çözümünün molekül ağ yapısı ile gösterilmesi.....	27
Şekil 3.12. Sonlu elemanlar yöntemine ait bölge.....	46
Şekil 3.13. Sonlu elemanlar yönteminin ağ yapısının gösterilmesi	47
Şekil 4.1. Örnek 4.1' in $t=0.5$ için BTSC, FTSC yaklaşımları ve analitik çözümlerinin grafikleri	56
Şekil 4.2. Örnek 4.1' in $t=0.03$ için FTSC, Dufort -Frankel yaklaşımları ve analitik çözümlerinin grafikleri	57
Şekil 4.3. Örnek 4.1' in $t=0.03$ için FTSC, BTSC yaklaşımları ve analitik çözümlerinin grafikleri	58
Şekil 4.4. Örnek 4.1' in $t=0.003$ için Crandall, BTSC yaklaşımları ve analitik çözümlerinin grafikleri	59
Şekil 4.5. Örnek 4.1' in $t=0.003$ için Crandall, FTSC yaklaşımları ve analitik çözümlerinin grafikleri	60
Şekil 4.6. Örnek 4.1' in $t=0.03$ için Crandall, Dufort Frankel yaklaşımları ve analitik çözümlerinin grafikleri	61
Şekil 4.7. Örnek 4.1' in $t=0.03$ için Crandall, BTSC yaklaşımları ve analitik çözümlerinin grafikleri	62

SEMBOLLER DİZİNİ

PDE	Kısmi Diferansiyel Denklem
C-N	Crank Nicolson Yöntemi
BTCS	Backward Time Centered Method
FTCS	Forward Time Centered Method
$\rho(A)$	Spektral Yarıçap

1. GİRİŞ

1.1. Tarihi Gelişim

Kısmi diferansiyel denklemler uygulamalı matematikte bir çok modelleme problemlerinde kullanılmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek her zaman kolay olmayabilir. Bu yüzden nümerik çözümlere ihtiyaç duyulmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemler ilk olarak, geometrideki yüzey çalışmaları ve mekanikteki değişik problemlerde ortaya çıkmıştır. Daha sonra yapılan çalışmalarla fiziksel, kimyasal ve biyolojik birçok olgunun, kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilebileceği ortaya konulmuş ve çoğu matematikçi bu denklemlerle ortaya çıkan problemlerle ilgilenmişlerdir. Örneğin, B. Taylor, D. Bernoulli, L. Euler ve J. D'Alambert gibi matematikçiler, titreşim teorisinde yer alan sınır değer problemleri üzerinde çalışmışlardır. A. L. Cauchy, S. Kowalewski, J. G. Darboux ve J. Hadamard, Cauchy probleminin varlığı ve tekliği üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle, kısmi diferansiyel denklemler üzerinde yapılan çalışmalar artmıştır. Bu çalışmalar birçok bilim dalında önemli bir yere sahiptir. Örneğin fizikte ısı akışı, dalga yayılımı olguları, akışkanlar dinamiği, kuantum mekaniği, plazma fizik, ekolojide yer alan popülasyon modelleri ve kimyada ortaya çıkan tepkisel maddelerin yayılım hareketleri, kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilir. 20. yüzyıla gelindiğinde kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri analiz edilmeye başlanmıştır. İlk olarak 1928 yılında Courant, Friedrichs ve Lewy matematiksel fizik problemlerinde sonlu fark formüllerini kullandı. Eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin fark formülleri için hata sınırları ilk defa 1930 yılında Gerschgorin tarafından gösterildi. Bu yaklaşım 1960'lı yıllara kadar Collotz, Motzkin, Wasom, Bramble, Hubbard gibi bilim adamları tarafından kullanıldı. Ayrıca, birçok eliptik denklem formülleri ve buna bağlı olarak sınır koşulları analiz edildi. II. Dünya Savaşı boyunca sonlu farklar yöntemi ile

zaman (t) koşullu problemler bilgisayar yardımıyla çözüldü. John Von Neumann'ın çalışmaları bu problemlerin çözülmesinde büyük katkı sağlamıştır. 1951'de ise bu çalışmalar O'Brien, Hyman ve Kaplan tarafından yazıldı. Parabolik denklemler için John Von Neumann 1951 yılında yeni bir teori geliştirdi. Bu arada 1947 yılında Crank ve Nicholson 1947 yılında başlangıç-sınır değer problemleri için yeni bir yöntem geliştirdi. Lax Denklik Teoremi'nin ve Kreris Matris Metodu'nun (kararlılık için) bulunmasıyla, genel başlangıç değer problemleri için sonlu farklar teorisinde ve parabolik denklemlerde 1950 ve 1960 yıllarında bir gelişme kaydedildi. (Camassa ve Holm, 1993; Degasperis ve Procesi, 1999; Eguiluz vd, 1999; Fuchssteiner, 1981; Fuchssteiner, 1996; Malfliet, 1992; Bülbül vd, 2011). Bu tip denklemlerin özellikle, değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümü, değişken katsayının varlığı sebebiyle oldukça zor bir problemdir. Bu nedenle yaklaşık çözüm yöntemlerine gerek duyulur ve bu tür yöntemlerle elde edilen çözümlerde hata ortaya çıkmaktadır. Bu hatanın derecesini bilmek bilimsel açıdan oldukça önemlidir. Dolayısıyla pratik ve kullanışlı olmanın yanında en iyi yaklaşımı veren çözüm yöntemleri aranır. Analitik çözümün kolaylıkla bulunamadığı denklemlerde yaklaşık çözüm için birçok yöntem denenmiştir.

1-) Sonlu farklar yöntemi: Sonlu farklar yöntemi, sayısal yöntemlerin temelini oluşturur. Matematik ve fizik problemleri çoğu zaman sürekli ve çok değişkenlidirler. Bu problemlerdeki fonksiyonlar bir formül yardımıyla verilebilir. Bazen bir fonksiyon farklı noktalarda tanımlanmış olabilir. Sonlu farklar yöntemi kullanılarak fonksiyonun değeri bulunabilir. Bu yöntemin dezavantajı, düzensiz bölgelerde oldukça karmaşık hale gelmesidir. Fakat yöntemin uygulanabildiği problemlerde çözüm için gerekli olan yakınsaklık ve kararlılık analizleri yapılabilmektedir.

2-) Sonlu elemanlar yöntemi: Karmaşık bölgelerde uygulanabilen, geniş teorisi olan popüler yöntemlerden birisidir. Gerek sonlu elemanlar gerekse sonlu farklar metodunda düğüm noktası sayısı arttıkça elde edilen çözümlerin hassasiyetinin arttığı bilinmektedir. Bununla birlikte, daha hassas sonuçlar elde etmek için düğüm noktası sayısının artırılması, gerekli olan bilgisayar kapasitesini ve hesap süresini de aynı oranda arttırmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminin, sonlu farklar yönteminden avantajı, problemin sınır koşullarıyla ilgili yapılan bir kolaylıktır. Çoğu fiziksel

problem türevler ve düzensiz sınırlar içeren sınır koşullarına sahiptir Son 40 yılda bilgisayarların hızlı gelişimine paralel olarak gelişen sayısal hesap yöntemler içinde çok önemli bir yer tutmaktadır.

3-) Sınır elemanları yöntemi: Sınır eleman yöntemi çeşitli mühendislik, bilim ve matematik problemlerinin çözülmesinde kullanılan nümerik bir tekniktir. Sınır elemanları yöntemi, integral denklemlerle formüle edilmiş lineer kısmi diferansiyel denklemler için kullanılan bir yöntemdir. Dolayısıyla problemi tanımlayan kısmi diferansiyel denklem, bir sınır integral denklemine dönüştürülerek çözüm yapılmaktadır. Sınır elemanları ile analiz edilen problemde, bölge sınırları keyfi olarak ayrıştırılır. Sınırlardaki her bir bölme sınır elemanı adı verilir. Dalga teorisinde sınır eleman yönteminin başarıyla uygulanabildiği başlıca iki tip problem mevcuttur. Bunlardan en genel olanı, birincisi, yüzey dalgalarının bir cisim ile olan etkileşiminin incelendiği yansıma ve yayılma problemleridir (Brebbia, 1982). İkincisi ise serbest yüzey oluşumlarının temel denklemlerden türetilmesi ile ilgili problemlerdir. Özellikle bu problemler lineer olmayan özelliğe sahipse sınır eleman yöntemi çok uygun bir nümerik çözüm olarak ortaya çıkmaktadır.

4-) Sonlu hacimler ve diğer yöntemler: Sonlu hacimler yönteminin esası çözüm alanının belli hacimlere ayrılması ve diferansiyel denklemin bu hacimler üzerinden integrasyonuna dayanır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Kısmi Diferansiyel Denklemler

Mühendislik alanında, fizik, kimya ve uygulamalı bilim dallarındaki ısı yayılımı, dalga yayılımı, titreşimler vb. problemlerde kısmi türevli diferansiyel denklemlerle karşılaşılır. Analitik çözümün karmaşık yapıda olduğu veya bulunmadığı bazı problemlerde nümerik metotlar kullanılmaktadır.

Bir kısmi diferansiyel denklem, iki veya daha çok bağımsız değişken ile veya daha çok bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini içeren bir denklemdir. n tane bağımsız ve bir tane bağımlı değişkenli, kısmi türevli denklemin genel şekli; $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bağımsız değişkenleri

$$u_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, u_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, u_{x_3} = \frac{\partial u}{\partial x_3}, \dots, u_{x_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n} \quad (2.1)$$

u bağımlı değişkeninin kısmi türevlerini göstermek üzere,

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

biçimindedir (İndsay, 2003). Bir veya birden fazla bağımlı değişkeni ve onların bir veya birden fazla bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren denklem sistemine diferansiyel denklem sistemi denir. Kısmi diferansiyel denklemler çeşitli tipte sınır şartlarıyla birlikte verilir. Sınır şartı u cinsinden verilmişse “Dirichlet tipi sınır şartı” olarak, u’ nun gradyanı cinsinden verilmişse “Neumann tipi sınır şartı” olarak adlandırılır. u ve gradyanı birlikte verildiği taktirde “karışık sınır şartı” söz konusu olur. Uygulamalı bilimler iki ya da daha çok değişkene göre değişim oranlarını içeren bir çok problem, matematiksel olarak kısmi diferansiyel denklemlerle formüle edilebilir. İkinci dereceden sabit katsayılı kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım;

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \quad (2.3)$$

denkleminde;

$b^2 - 4ac < 0$ ise eliptik

$b^2 - 4ac = 0$ ise parabolik

$b^2 - 4ac > 0$ ise hiperbolik denklem olarak adlandırılır.

2.2. Eliptik Denklemler

Eliptik denklemler ‘‘potansiyel’’ adı verilen bir büyüklüğün bölge içindeki değişimini temsil ederler. Potansiyel, bir büyüklüğün sıklığını ölçer. Örneğin sıcaklık ve konsantrasyon birer potansiyel büyüklüktür. Bağımlı u değişkeni potansiyelin herhangi bir noktada, sınırdaki değerlere bağlı olarak aldığı denge (equilibrium) veya daimi-durum (steady state) değerlerini belirtir.

Dolayısıyla eliptik denklemler aynı zamanda potansiyel denklemler olarak adlandırılır.

Eliptik denklemin iki boyutlu denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (2.4)$$

biçimindedir. Eliptik denklemlerin en çok bilinen denklemleri Poisson ve Laplace denklemleridir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5)$$

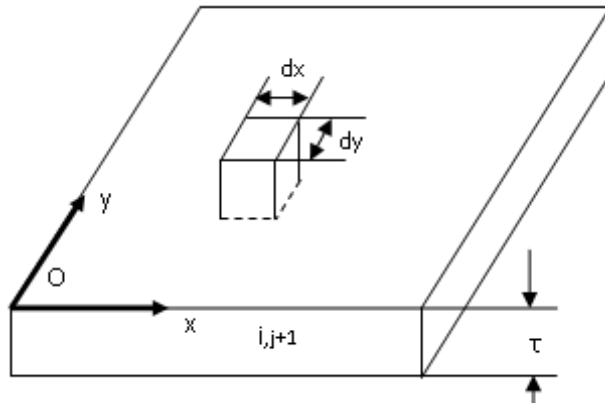
Laplace denklemi ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho = 0 \quad (2.6)$$

Poisson denklemi olarak tanımlanır (Gordon, 2010). Özel olarak

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

biçimindeki gösterilir (Wazwaz, 2009). ∇^2 sembolü Laplasiyen operatörü olarak adlandırılır τ kalınlığında düzgün dikdörtgensel bir levha göz önüne alınsın (Şekil 2.1.) Levhanın O ile belirtilen sol alt köşesi başlangıç noktası olmak üzere düzenlenen bir (x,y) Kartezyen koordinat sisteminde sol alt köşesi P(x,y) noktasında yer alan ve (dx, dy, τ) kenar uzunluklarına sahip bir hacim elemanını ele alalım. Hacim elemanına x doğrultusunda birim zamanda giren ısı



Şekil 2.1. Dikdörtgensel levhanın kartezyen koordinatlarda gösterilmesi

$$-kA \frac{\partial u}{\partial x} = -k(\sigma dy) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.7)$$

Şeklinde ifade edilir. x doğrultusunda birim zamanda çıkan ısı ise $x + dx$ kesitindeki gradyant hesaplanarak

$$-kA \frac{\partial}{\partial x} \left[u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] = -k(\sigma dy) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right] \quad (2.8)$$

şeklinde gösterilebilir. Benzer şekilde y doğrultusunda birim zamanda giren ve çıkan ısılar da sırasıyla

$$-k(\sigma dy) \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$-k(\sigma dx) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right] = -k(\sigma dx) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right] \quad (2.9)$$

olacaktır. Hacim elemanın alt ve üst yüzeylerinden ısı kaybı olduğu varsayılırsa, birim zamanda çıkan ısı

$$Q dx dy \quad (2.10)$$

şeklinde belirtilebilir. Burada Q büyüklüğü birim zamanda birim yüzey başına (alt ve üst yüzeyden) ısı kaybını belirten katsayıdır.

Denge–durumda sisteme giren ve çıkan ısılar toplamı eşit olacağından

$$\begin{aligned} -k(\sigma dx) \frac{\partial u}{\partial x} - k(\sigma dx) \frac{\partial u}{\partial y} &= k(\sigma dx) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right] - \\ k(\sigma dx) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right] &+ Q dx dy \end{aligned} \quad (2.11)$$

şeklinde bir denge denklemi yazılabilir. Bu denklem de sadeleştirme ve düzenlemeler sonucu aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{Q}{k\sigma} \quad (2.12)$$

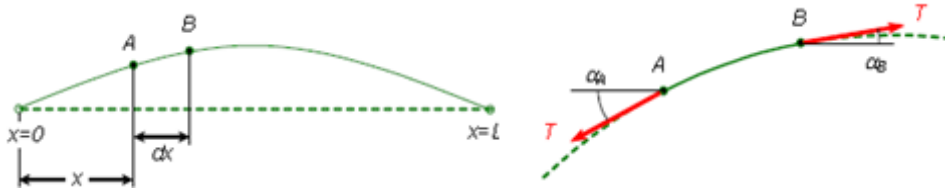
2.3. Hiperbolik Denklemler

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin bir sınıfı olan hiperbolik denklemler çoğu kez zamana bağlıdır. Bir ortam içerisindeki titreşimlerin ve özellikle dalgaların nasıl yayıldığı tanımlarlar. Bu nedenle de “dalga denklemleri” olarak adlandırılırlar. Dalga denklemlerinin en basit birisi bir-boyutlu haldeki salınım yapan yay problemine ait olanıdır. İki-boyutlu halde titreşen davul zarı örnek olarak düşünülebilir. Üçboyutlu halin hayal edilmesi biraz daha zor olsa da örnek olarak şeffaf bir jelatin içerisinde bir sıvı içerisinde süspansiyon halinde yer alan taneciklerin jelatin zarfa bir çarpma olduğundaki hareketi problemi alınabilir. Her üç

haldeki hareketlerin de sürtünme kuvvetlerinin etkisiyle zaman içerisinde sönümleneceęi söylenebilir.

2.3.1. Titreen yay problemi

Hiperbolik kısmi-diferansiyel denklemlere bir örnek olarak, sabit iki uç noktası arasında gerilmiş olan bir yayın salınım hareketlerini modelleyen bir-boyutlu dalga denklemi göz önüne alınabilir. Yay uç noktalarını birleştiren doğruya göre ötelemeleri çok abartılmı olarak gösterilmektedir. (ekil 2.2.) Yayın A ve B gibi yakın iki noktası arasında kalan dx uzunluğundaki bir elemanı şekilde ayrıca büyütülmüş olarak gösterilmiştir. A ve B noktalarında teğetlerin eğim açılarıyla α_A ve α_B ile belirtilmiş olup, yayın eğilmelerinin de abartılı olduğuna dikkat edilmelidir. Yayın telemeleri iki ucunu birleştiren doğruya dik olarak ölçülmekte olup u ile gösterilmiştir. Yaya etkiyen gerilme kuvveti A ve B noktalarında T ile belirtilmiştir.



Şekil 2.2. Yaya etkiyen gerilme kuvvetlerinin gösterilmesi

Yukarı doğru kuvvetler pozitif işaretli olmak üzere yay elemanının her iki ucuna etkiyen kuvvetlerin düşey bileşenleri sırasıyla $-T\sin\alpha_A$ ve $T\sin\alpha_B$ olacaktır. telemelerin ekil üzerinde aşırı abartılı gösterildiği tekrar hatırlatılarak aıların aslında çok küçük olduğu belirtilirse aıların tanjanları ile sinüsleri aynı kabul edilebilir. Buna göre

$$-T\sin\alpha_A = T\tan\alpha_A = -T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A \quad (2.13)$$

$$T\sin\alpha_B = T\tan\alpha_B = -T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_B = T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right]$$

ve böylece yay elemanına düşey yönde etkiyen net (bileşke) kuvvet de

$$T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx \quad (2.14)$$

olur. Şimdi düşey doğrultuda Newton kanunu uygulanarak bu kuvvet yayın kütlesi ile ivmenin çarpımına eşitlenirse, w yayın birim uzunluk başına ağırlığı olmak üzere

$$T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = \frac{w dx}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

veya düzenlenerek

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{Tg}{w} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

elde edilir. Bu denklem ikinci-dereceden kısmi diferansiyel denklemlerin standart biçimi için daha önce tanımlanan denklemle karşılaştırılırsa

$$A = 1, B = 0, C = -\frac{Tg}{w} \quad (2.17)$$

olduğu ve bu büyüklüklerle birlikte bu denklemin hiperbolik denklemler sınıfına girdiği görülür.

2.4. Parabolik Denklemler

Kısmi-diferansiyel denklemlerin parabolik karakterdeki sınıfı, tipik örnekleri madde yayını veya bölge içinde ısı akışı olduğundan genellikle yayınım denklemi veya ısı denklemi olarak adlandırılır. Buradaki incelemelerde de örnek olarak ısı problemleri ele alınacaktır. Bunların daha öncekilerden farkı artık daimi durum problemi olmayıp, zamana bağlı, yani sıcaklığın zamanla değiştiği problemler olmasıdır. İlk olarak bir çubuk boyunca bir-boyutlu ısı akışı problemi ele alınacaktır. Şayet zaman yeterince uzun tutulur ve sıcaklıklar denge-durum şartlarına erişirse bu problem de daha önceki eliptik problem örneğiyle özdeş olur. L uzunluğundaki bir çubuk üzerinde dx genişlikli (Şekil2.3.) bir çubuk elemanı işaretlensin. Çubuğun çevresinin

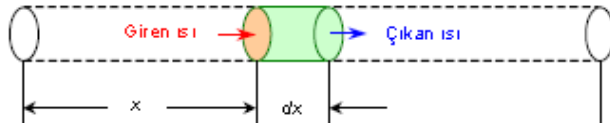
izole olduğu ve bu yüzden çevreyle ısı alışverişi olmadığı varsayılmaktadır. x eksenini çubuk boyunca soldan sağa doğru yönelmiş olup x eksenini boyunca

$$-kA \frac{dT}{dx} \quad (2.18)$$

formülü uyarınca akmakta olan ısı [cal/s] olarak ölçülmektedir. Buradaki eksi işaretinin ısının sıcaktan soğuğa doğru akmasıyla ilgili olduğu bilinmektedir. dx uzunluğundaki çubuk elemanın sağ tarafından çıkan ısı da

$$-kA \frac{dT}{dx} \left(T + \frac{dT}{dx} dx \right) \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edilebilir.



Şekil 2.3. L uzunluğunda dx genişlikli çubuk

Daimi-durumda bu çubuk elemanına giren ve çıkan ısılar eşit olur. Zamana bağlı olayda ise çubuk elemanına birim zamanda giren ısı ile çıkan ısı arasındaki fark bu süreçte çubuk elemanın bünyesinde depolanan ısıya eşit olacaktır. Depolanan bu ısı da çubuk elemanın sıcaklığını arttıracaktır. Çubuk elemanın sıcaklık değişimiyle ilgili olarak birim zamanda depolanan ısı miktarı elemanın hacmi ($A \cdot dx$), malzemenin yoğunluğu (ρ) ve malzemenin ısı kapasitesine (c – birim kütle ve birim sıcaklık başına depolayabildiği ısı - cal/gr°C) bağlıdır. Bu ise

$$c\rho(A dx) \frac{dT}{dt} \quad (2.20)$$

şeklinde ifade edilir. Bu üç ifade kullanılarak

$$-kA \frac{dT}{dx} - kA \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) = c\rho(A dx) \frac{dT}{dt} \quad (2.21)$$

veya bu eşitlik düzenlenerek

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} dx = c\rho \frac{dT}{dt} \quad (2.22)$$

denklemini elde edilir. İki-veya üç- boyutlu halde de bu denkleme eşdeğer

$$k\nabla^2 = c\rho \frac{dT}{dt} \quad (2.23)$$

denklemini elde edilir. Yukarıdaki bütün denklemlerde konum dışında ayrıca zamana bağlıdır. Yukarıdaki bütün denklemler de konum dışında ayrıca zamana bağlıdır. Bu denklemlerin belli bir başlangıç zamanında verilen başlangıç şartlarıyla başlatılması gereklidir. Ayrıca sınır değerlerinin bilinmesine de ihtiyaç vardır. Dolayısıyla bu tip problemler konuma göre sınır değer, zamana göre de başlangıç değer problemi olarak nitelendirilmelidir.

2.5. Başlangıç ve Sınır Şartları

İnce çubuktaki ısı iletiminde sıcaklık fonksiyonu $u(x, t)$ denklemini sağlamalıdır. Fiziksel yönden, sadece diferansiyel denklemin tek başına çubuktaki herhangi bir belirli zamandaki sıcaklık dağılımını belirleyemediği bilinmektedir. Bu sebeple çubuğun uç noktalarında sağlanması gereken şartlarla, çubuğun başlangıç sıcaklığı hakkında ilave bilgilere sahip olmalıyız. Yani bazı başlangıç zamanında ($t=0$ diyelim) $u(x, t)$ fonksiyonunu belirlemeliyiz ve çubuğun her iki ucuyla, bulunduğu ısı enerjisinin nasıl değiştiğini tanımlamalıyız (Smith, 1985).

1-) Hiç ısı kaynağı yoksa,

2-) $t=0$ da çubuğun sıcaklığı $0 \leq x \leq L$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu ile tanımlanıyorsa,

3-) İki uç nokta tüm zaman için sıfır sıcaklığında muhafaza ediliyorsa sonraki herhangi bir $t < 0$ zamanın da çubuktaki $u(x, t)$ sıcaklık dağılımı;

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t \geq 0$$

şartlarıyla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0$$

diferansiyel denklemini göz önüne alınabilir. Bu problem ısı denklemi için bir başlangıç-sınır değer problemi olarak adlandırılır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. Sonlu Fark Yöntemleri

Herhangi bir karmaşık problemi çözmek için kullanılan tüm nümerik yöntemlerin hesaplaması aşaması genellikle bir hayli aritmetik içerir. Bu yüzden çeşitli farklı problemlerin bir çözüme ulaşması bir düzenleme ile olağandır. Bu düzenleme, tüm denklemlerin ifade edilmesiyle yapılabilir. O zaman aynı matematik formülüyle birlikte tüm problemler belirli bir çözümle ilgilenebilirler.

Sonlu farklar yöntemi, sayısal yöntemlerin temelini oluşturur. Matematik ve fizik problemleri çoğu zaman sürekli ve çok değişkenlidirler. Bu problemlerdeki fonksiyonlar bir formül yardımıyla verilebilir. Bazen bir fonksiyon farklı noktalarda tanımlanmış olabilir. Sonlu farklar yöntemi kullanılarak fonksiyonun değeri bulunabilir. Örneğin, yapışkan ortamdaki sarkacın salınımı, bir direnç vasıtasıyla sığaçtan (kapasitörden) elektrik yükü boşaltma ve indükleme, farklı fizik problemleridir; fakat matematik olarak ifade edildiğinde özdeş oldukları görülür.

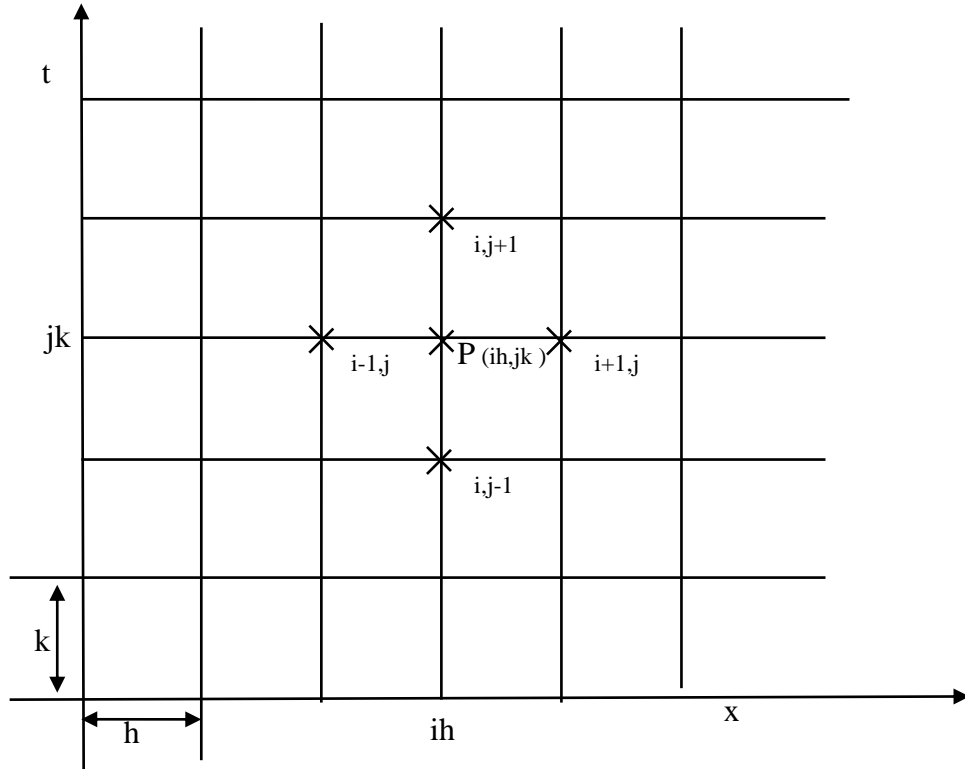
Günümüzün uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan problemler, teorik yöntemler ile çözülmeye başlanmış bulunmaktadır. Hatta bazı durumlarda analitik çözümler olsa bile sayısal yöntemlerin kullanılmasıyla çözüm, çok daha basit hale getirilebilmektedir.

Bir diferansiyel denklem şeklinde ifade edilebilen problemlerin yaklaşık çözümlerinde en çok kullanılan sayısal yöntem sonlu fark yaklaşımlarıdır. Problemlerin sonlu farklar ile çözülmesindeki temel amaç, türevlerin sonlu fark operatörleri ile yer değiştirmesidir. Bu yer değiştirme Taylor serisi açılımını kullanılarak gerçekleştirir.

Çözüme geçmeden önce problem bölgesi genellikle geometrik şekiller içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin kesim (grid) noktaları üzerinden hesaplanır.

Sonlu fark yaklaşımları; açık (explicit) ve kapalı (implicit) yöntemler olmak üzere iki grupta incelenir (Hasanoğlu, 2010).

U fonksiyonu bağımsız değişkenler x ve t nin bir fonksiyonu olsun. U fonksiyonu için sonlu fark yaklaşımlarını bulmak amacıyla $x - t$ düzlemi boyutları $\delta_x = h$ ve $\delta_t = k$ olan eşit dikdörtgenlere bölünmüş olsun. Ox ve Ot eksenlerine paralel doğrular üzerinde $x_i = ih$ ve $t_j = jk$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$) noktaları (Şekil 3.1.) alınsın. Bu halde inceleme yapılan noktada $U(ih, jk) = U_{i,j}$ olarak gösterelim.



Şekil 3.1. Ağ noktalarının $x-t$ düzleminde gösterilmesi

$$U(x + h) = U(x) + hU'(x) + \frac{1}{2}h^2U''(x) + \frac{1}{6}h^3U'''(x) + \dots \quad (3.1)$$

$$U(x - h) = U(x) - hU'(x) + \frac{1}{2}h^2U''(x) - \frac{1}{6}h^3U'''(x) + \dots \quad (3.2)$$

(3.1) ve (3.2) denklemleri taraf tarafa toplanarak

$$U(x + h) + U(x - h) = 2U(x) + 2h^2U''(x) + O(h^4)$$

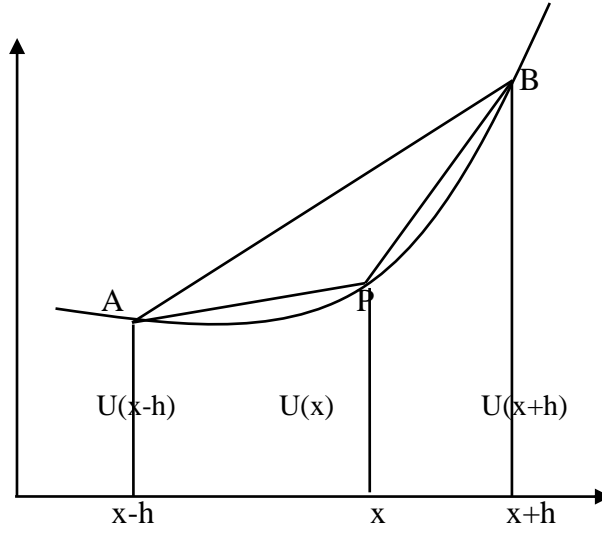
buradan

$$U''(x) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{x-x} = \frac{1}{h^2} \{U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)\} \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.1) ve (3.2) denklemleri farkından benzer şekilde

$$U'(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x-x} = \frac{1}{2h} \{U(x+h) - U(x-h)\} \quad (3.5)$$

eşitliği elde edilir.



Şekil 3.2. Fark formüllerinin yaklaşık hesaplandığı teğetlerin gösterilmesi

Denklem (3.5), AB kirişinin (Şekil 3.2.) eğimi ile P deki tanjant eğimi yaklaşık eğimini hesaplar ve buna merkezi fark yaklaşımı denir.

$$U'(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{1}{h} \{U(x+h) - U(x)\} \quad (3.6)$$

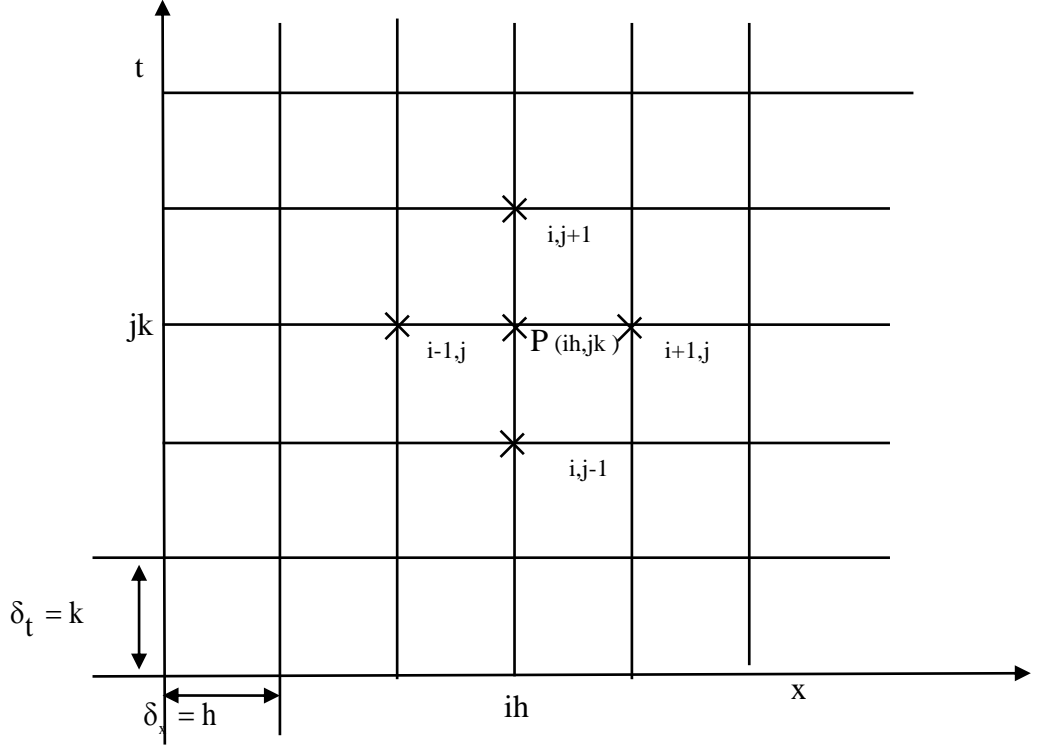
Denklem (3.6), PB kirişinin eğimi ile P deki tanjant eğimi yaklaşık eğimini hesaplar ve buna ileri fark yaklaşımı denir.

$$U'(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{1}{h} \{U(x) - U(x-h)\} \quad (3.7)$$

Denklem (3.7) PA kirişinin eğimi ile P deki tanjant eğimi yaklaşık eğimini hesaplar ve buna geri fark yaklaşımı denir.

3.1.1. Çok Değişkenli fonksiyonların notasyonu

U fonksiyonu bağımsız değişkenler x ve t nin bir fonksiyonu olsun. U fonksiyonu için sonlu fark yaklaşımlarını bulmak amacıyla $x - t$ düzlemi boyutları $\delta_x = h$ ve $\delta_t = k$ olan eşit dikdörtgenlere bölünmüş olan bölgede P temsili noktasında (Şekil 3.3) $U_p = U(ih, jk) = U_{i,j}$ olmak üzere, h^2 kesme hatası ile



Şekil 3.3. x-t düzleminde P temsili noktasının gösterilmesi

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_p = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$

ve k^2 kesme hatası ile

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)_p = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} \quad (3.10)$$

denklemleri elde edilir.

3.1.2. Açık yöntem

Bir bilinmeyen ve birden fazla bilinen barındıran yöntemlere açık yöntemler adı verilir.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad i, j \in Z \text{ ve } x_i = ih \text{ ve } t_j = jk$$

olmak üzere (3.8) ve (3.10) denklemlerinden

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

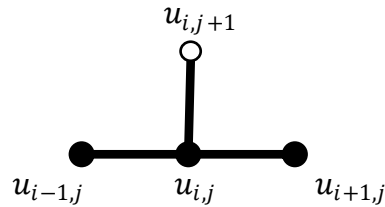
elde edilir.

$$r = \frac{k}{h^2} = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$$

elde edilen eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (3.11)$$

sonlu fark yaklaşımı elde edilir (Smith, 1985). Bu formül j . zaman satırı boyunca $(i, j + 1)$ inci grid noktasında bilinmeyen $U_{i,j+1}$ değerini hesaplamak için kullanılır. Dolayısıyla ilk satır $t=k$ boyunca U nun bilinmeyen grid , $t=0$ boyunca bilinen başlangıç ve sınır değerleriyle hesaplanabilir. Satırlar boyunca bilinen grid değerleri yardımıyla bilinmeyen (Şekil 3.4.) grid değerleri hesaplanır. Bu şekilde bilinmeyen grid değerlerin bilinen pivot değerler yardımıyla bulunmasına açık yöntem denir.



Şekil 3.4. Açık çözüme ait moleküler yapı

Örnek 3.1.1

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.12)$$

parabolik denklemini aşağıdaki koşullar ile

$$U = 0, \quad x = 0 \text{ ve } x = 1, \quad t > 0$$

$$U = 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad t = 0$$

$$U = 0, \quad 2(1-x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad t = 0$$

göz önüne alalım

1.Durum: İlk durum için $\delta_x = h = \frac{1}{10}$ ve $\delta_t = k = \frac{1}{100}$ olmak üzere

başlangıç ve sınır değerleri (Çizelge 3.1.) ile verilmiştir. Bu değerler için $r = \frac{1}{10}$ alınmıştır.

Çizelge 3.1. $h=0.1$ ve $k=0.01$ için başlangıç ve sınır değerleri

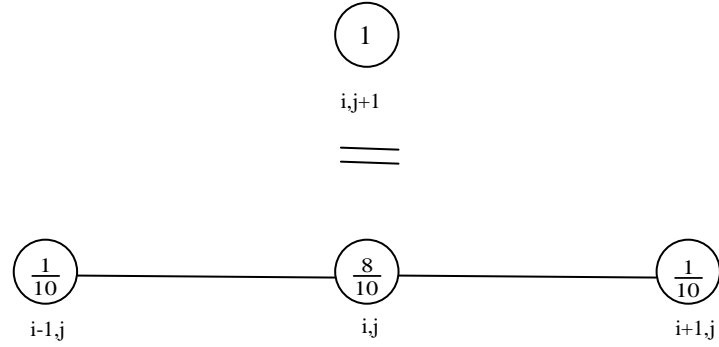
	x=0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
j=0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.1	0.8
j=1	0						
j=2	0						
j=3	0						
j=4	0						
j=5	0						

Dolayısıyla (3.11) yardımıyla denklemini düzenlenirse

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{10}(u_{i-1,j} + 8u_{i,j} + ru_{i+1,j}) \quad (3.13)$$

İfadesi edilir. Bu dört terim arasındaki ilişki ise (Şekil 3.5.) deki molekül yapısına benzer. Atomların içindeki numaralar grid noktalarına karşı gelen fonksiyon

değerlerinin çarpanlarıdır. Burada çizelge $x = \frac{1}{2}$ ye göre simetrik olup hesaplama $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ için yapılmıştır.



Şekil 3.5. Açık çözümün hesaplamasının moleküler yapı ile gösterilmesi

denklem (3.12) nin (Çizelge 3.1.) verilere uygulanması sonucunda (Çizelge 3.2.) ile verilen değerler elde edilir.

$$u_{5,1} = \frac{1}{10} \{0.8 + 8x1 + 0.8\} = 0.9600$$

$$u_{4,2} = \frac{1}{10} \{0.8 + (8x0.8) + 0.8\} = 0.7960$$

Çizelge 3.2. $h=0.1$ ve $k=0.01$ seçildiğinde açık çözümün nümerik sonuçları

		i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
		x=0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
j=0	t=0.000	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.000	0.8000
j=1	t=0.001	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.9600	0.8000
j=2	t=0.002	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.7960	0.9280	0.7960
j=3	t=0.003	0	0.2000	0.4000	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896
...								
...								
j=4	t=0.004	0	0.2000	0.4000	0.5986	0.7818	0.8792	0.7818
j=5	t=0.005	0	0.2000	0.3999	0.5971	0.7732	0.8597	0.7732

Bu şartları sağlayan kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü

$$U = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\sin n\pi)(\sin n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t} \quad (3.14)$$

şeklinde verilmiştir (Garabedian, 1963). Bu çözümün $x = 0.3$ noktasında sonlu fark çözüm ile karşılaştırılması (Çizelge 3.3.) ile gösterilmiştir. Bu çizelge sonlu fark çözümünün oldukça tutarlı olduğunu göstermektedir. Hata yüzdesi çözümlerin farkıdır ve kısmi diferansiyel denkleminin çözümlerinin bir yüzdesi olarak ifade edilmiştir.

Çizelge 3.3. $h=0.1$ ve $k=0.01$ seçildiğinde açık çözümün $x=0.3$ noktasında açık çözüm ile analitik çözümün karşılaştırılması

	Sonlu fark çözümü($x=0.3$)	Analitik çözüm($x=0.3$)	Fark	Hata
$t=0.005$	0.5971	0.5966	0.0005	0.08
$t=0.01$	0.5822	0.5799	0.0023	0.4
$t=0.02$	0.5373	0.5334	0.0039	0.7
$t=0.10$	0.2472	0.2444	0.0028	1.1

Çizelge 3.4. $h=0.1$ ve $k=0.01$ seçildiğinde açık çözümün $x=0.5$ noktasında açık çözüm ile analitik çözümün karşılaştırılması

	Sonlu fark çözümü($x=0.5$)	Analitik çözüm($x=0.5$)	Fark	Hata
$t=0.005$	0.8597	0.8404	0.0193	2.3
$t=0.01$	0.7867	0.7743	0.0124	1.6
$t=0.02$	0.6891	0.6809	0.0082	1.2
$t=0.10$	0.3506	0.3021	0.035	1.2

2.Durum: İkinci durum için $\delta_x = h = \frac{1}{10}$ ve $\delta_t = k = \frac{5}{100}$ olsun.

Bu halde başlangıç ve sınır değerleri (Çizelge 3.1.) ile aynıdır. Bu değerler için $r = \frac{5}{10}$ alınmıştır. Dolayısıyla (3.11) denkleminde

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \quad (3.15)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (3.11)'in (Çizelge 3.1.) ile verilen değerlere uygulanması sonucunda (Çizelge 3.5.) ile verilen değerler elde edilir.

Çizelge 3.5. h=0.1 ve k=0.05 seçildiğinde açık çözümün nümerik sonuçları

		i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
		x=0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
j=0	t=0.000	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.000	0.8000
j=1	t=0.005	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.8000	0.8000
j=2	t=0.010	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.7000	0.8000	0.7000
j=3	t=0.015	0	0.2000	0.4000	0.5500	0.7000	0.7000	0.7000
j=4	t=0.020	0	0.2000	0.3750	0.5500	0.6250	0.7000	0.6250

Çizelge 3.6. h=0.1 ve k=0.05 seçildiğinde açık çözümün x=0.3 noktasında açık çözüm ile analitik çözümün karşılaştırılması

	Sonlu fark çözümü(x=0.3)	Analitik çözüm(x=0.3)	Fark	Hata
t=0.005	0.6000	0.5966	0.0034	0.57
t=0.01	0.6000	0.5799	0.0201	3.5
t=0.02	0.5500	0.5334	0.0166	3.1
t=0.10	0.2484	0.2444	0.0040	1.6

3.Durum: İlk durum için $\delta_x = h = \frac{1}{10}$ ve $\delta_t = k = \frac{1}{100}$ olsun. Bu halde başlangıç ve sınır değerleri (Çizelge 3.1.) ile verilen değerlerdir. Bu değerler için $r = 1$ alınmıştır. Dolayısıyla (3.11) denklemi

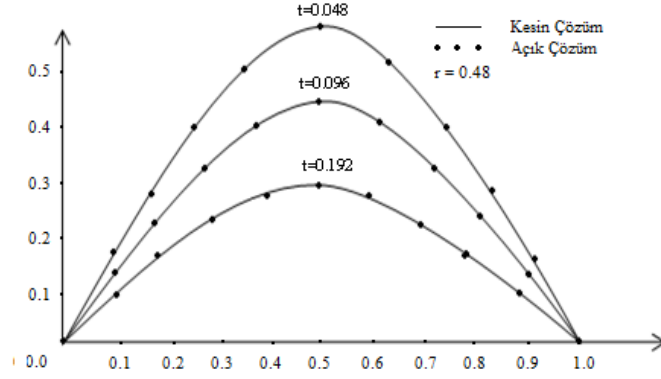
$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} - u_{i,j} + u_{i+1,j} \quad (3.16)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (3.13) in (Çizelge 3.1.) ile verilen değerlere uygulanması sonucunda (Çizelge 3.7.) ile verilen değerler elde edilir

Çizelge 3.7. h=0.1 ve k=0.01 seçildiğinde açık çözümün nümerik sonuçları

		i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
		x=0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
j=0	t=0.000	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.8
j=1	t=0.001	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.6	0.8
j=2	t=0.002	0	0.2	0.4	0.6	0.4	1.0	0.4
j=3	t=0.003	0	0.2	0.4	0.2	1.2	-0.2	1.2
...								
j=10	t=0.004	0	0.2	0.0	1.4	-1.2	2.6	-1.2

Elde edilen verilerde negatif değerler varsa anlamsızlık var demektir. Dolayısı ile son durum geçerli değildir. Burada r nin önemli olduğu açıkça bellidir. Böylece açık (explicit) metodun $0 < x \leq \frac{1}{2}$ aralığında geçerli olduğu gösterilmiştir.



Şekil 3.6. Açık çözüm ile kesin çözümün karşılaştırmalı grafiği

3.1.3. FTSC yöntemi

Forward Time Centered Space (FTSC) yöntemi açık yöntemin özel bir halidir. T zamanı boyunca ileri fark, ikinci dereceden türev yerine ise merkezi fark denklemleri yazılarak

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \quad (3.17)$$

ifadesi elde edilir. $r = \frac{k}{h^2} = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$ olmak üzere

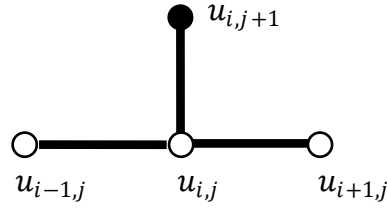
$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = r(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \quad (3.18)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$u_{i,j+1} = -ru_{i+1,j+1} + (1 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i-1,j+1} \quad (3.19)$$

ifadesi elde edilir. Değişkenlerden bir bilinmeyene karşılık üç bilinen olduğundan FTSC yöntemi olarak adlandırılır.

Moleküler olarak (Şekil 3.7.) deki gibi gösterebilir.



Şekil 3.7. FTSC yöntemine ait moleküler gösterimi

3.1.4. BTSC yöntemi

Explicit yöntem hesaplama yönünden çok kolay olmasına rağmen önemli bazı eksiklikleri vardır. Bu yöntemde t zaman adımı yukarıda görüldüğü gibi aralığı için kararlı olup diğer durumlarda problemlerle karşılaşılır. Bu eksiklikleri gidermek amacıyla t zaman doğrultusunda ileri fark, x doğrultusunda merkezi fark alınarak yeni bir yaklaşım elde edilir.

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j}}{k} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \quad (3.22)$$

ifadeleri

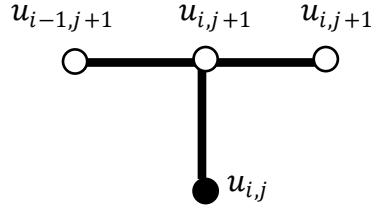
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.23)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \quad (3.24)$$

$$u_{i,j} = -ru_{i+1,j+1} + (1 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i-1,j+1} \quad (3.25)$$

biçimini alır. Burada eşitliğin sağında üç bilinmeyen ve sol tarafında ise tek bilinen vardır. U denkleminde ait moleküler gösterim (Şekil 3.12.) deki gibidir.



Şekil 3.8. Kapalı yönteme ait moleküler gösterilişi

3.1.5. Crank-Nicolson yöntemi

Açık yöntem basit bir hesaplama olmasına rağmen ciddi dezavantajlara sahiptir. Bu yöntemde zaman $\delta_t = k$ adımı çok küçüktür ve $0 < r \leq \frac{1}{2}$ olup $r \leq \frac{1}{2}$ için geçerlidir. Uygun doğruluğu bulmak için $\delta_x = h$ olarak çok küçük olmak zorundadır. Crank-Nicolson hesaplamasının işlem yükünü azaltan ve r nin tüm sonlu değerleri için geçerli olan bu metodu önermiştir. Bu yöntem için $(j+1)$ ve (j) Zaman seviyelerindeki sonlu fark yaklaşımları alınarak gösterilmiştir. Bu yöntemde ileri fark yaklaşımı uygulanmıştır.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

denkleminde

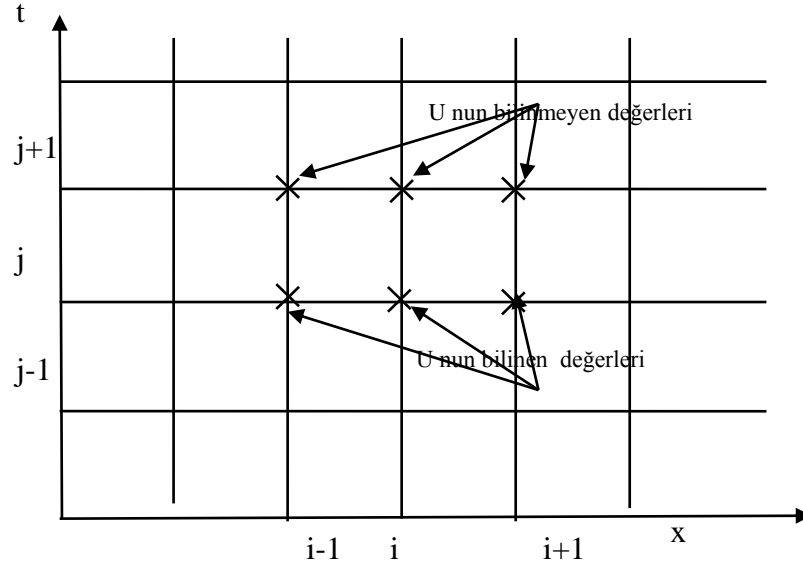
$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \right\} \quad (3.27)$$

sonlu fark formülleri ile yaklaşırsa

$$-ru_{i-1,j+1} + (2 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2 - 2r)u_{i,j} \quad (3.28)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem $\forall r > 0$ değerleri için koşulsuz geçerlidir. Genellikle, elde edilen bu denklemin sol tarafı üç bilinmeyen içerir. (Şekil3.9.) Burada sağ taraftaki u ' nun esas değerlerinin üçü bilinmektedir. Sistem $j=0$ ve $i=1,2,3,\dots,N$ başlangıç ve sınır değerlerinin terimlerdeki birinci zaman sırası

boyunca N adet esas değeri için N tane karmaşık denklem verir. Benzer şekilde $j=1$.sıtr boyunca hesaplanmış değerleri kullanan ikinci sıtr u nun bilinmeyen N değerini ifade eder.



Şekil 3.9. Crank-Nicolson yönteminin grid yapısı

Örnek 3.1.2

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.29)$$

denklemini

$$U = 0, \quad x = 0 \text{ ve } x = 1, \quad t > 0$$

$$U = 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad t = 0$$

$$U = 0, \quad 2(1-x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad t = 0$$

koşulları ile birlikte C-N yöntemini kullanarak çözelim (Smith, 1985). Bu metod

$r = \frac{k}{h^2} = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$ nin bütün sonlu değerleri için geçerli olmasına rağmen büyük değer

$\frac{\partial U}{\partial t}$ için geçerli bir yaklaşım olmayacaktır. Burada $\delta_x = h = \frac{1}{10}$ ve $\delta_t = k =$

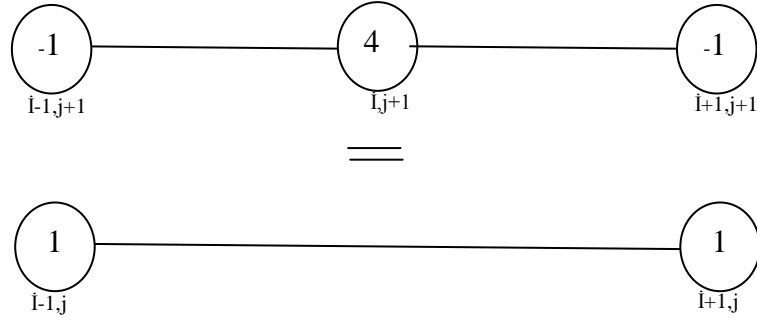
$\frac{1}{100}$ ise $r = \frac{k}{h^2} = 1$ olur. Sonlu fark denklemleri yardımı ile

$$-ru_{i-1,j+1} + (2 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2 - 2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}$$

denklemini elde edilir ve $r=1$ için denklem

$$-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j}$$

biçimini alır. Bu denklem için incelen hesaplama molekülü (Şekil 3.10) de gösterilmiştir. $u_{i,j+1}$, u_i ($i=1,2,\dots,9$) tarafından belirtilir. Simetriden dolayı bu problem için $u_6 = u_4$, $u_7 = u_3$ değerleri hesaplanabilir.



Şekil 3.10. Crank-Nicolson yönteminin molekül yapısı

Başlangıç zamanında u 'nun değerleri,

$$-0 + 4u_1 - u_2 = 0 + 0.4,$$

$$-u_1 + 4u_2 - u_3 = 0.2 + 0.6$$

$$-u_2 + 4u_3 - u_4 = 0.4 + 0.8,$$

$$-u_3 + 4u_4 - u_5 = 0.6 + 0.1$$

$$-2u_4 + 4u_5 = 0.8 + 0.8$$

denklem sisteminden çözülerek $u_1 = 0.1989$, $u_2 = 0.3956$, $u_3 = 0.5834$, $u_4 = 0.7381$, $u_5 = 0.7691$ değerleri bulunabilir. Böylece bir sonraki zaman satırı boyunca u 'nun grid değerleri için denklemler,

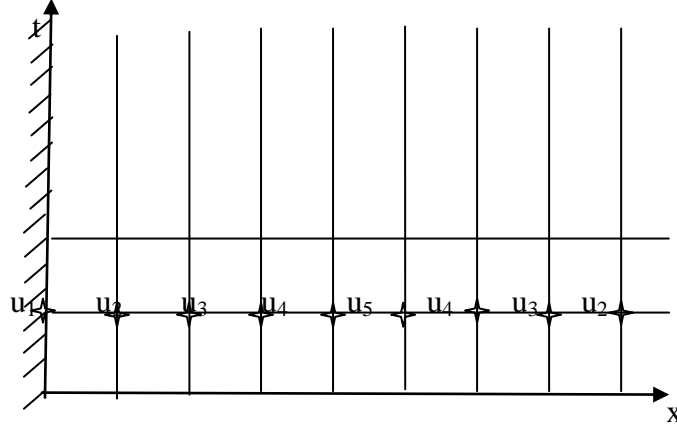
$$-0 + 4u_1 - u_2 = 0 + 0.3956,$$

$$-u_1 + 4u_2 - u_3 = 0.1989 + 0.5834$$

$$-u_2 + 4u_3 - u_4 = 0.3956 + 0.7381,$$

$$-u_3 + 4u_4 - u_5 = 0.5834 + 0.7691,$$

şeklinde yazılır ve bu şekilde devam edilirse tüm zaman satırlarında nümerik değerler hesaplanabilir.



Şekil 3.11. Crank-Nicolson yönteminin çözümünün grid yapısı

Çizelge 3.8. $h=0.1$ ve $k=0.01$ Crank-Nicolson çözümü için nümerik sonuçlar

	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
	x=0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
t=0.00	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
t=0.02	0	0.1989	0.3956	0.5834	0.7381	0.7691
t=0.02	0	0.1936	0.3789	0.5400	0.6461	0.6921
t=0.10	0	0.0948	0.1803	0.2482	0.2918	0.3069
Analitik çözüm	0	0.934	0.1776	0.2444	0.2873	0.3201

Bu denklemlerin çözümü, kısmi diferansiyel denklemin çözümü ile $t = 0.1$ de sonlu fark çözümünü karşılaştıran grafiklerle birlikte (Çizelge 3.8.) de verilmiştir. Burada nümerik çözümün iyi bir çözüm olduğu görülmektedir. (Çizelge3.9.) t nin çeşitli değerleri için $x=0.5$ te her iki çözümü göstermektedir.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.30)$$

denklemini için Crank-Nicolson yöntemi, r nin tüm değerleri için sabit olmasına rağmen, çözümün ve tüm hataların $j \rightarrow \infty$ için sifira yaklaştığı söylenebilir.

Çizelge 3.9. $x=0.5$ noktasında C-N yöntemi ile analitik çözümün karşılaştırılması

	Sonlu fark çözümü($x=0.5$)	Analitik çözüm($x=0.5$)	Fark	Hata
$t=0.01$	0.7691	0.7743	-0.0052	-0.7
$t=0.02$	0.6921	0.6809	+0.0112	+1.6
$t=0.10$	0.3069	0.3201	0.0048	1.6

3.1.6. Gaus eliminasyon yöntemi ile denklemin çözümü

Her bir zaman satırı boyunca ($N-1$) içindeki grid noktaları boyunca Crank –Nicolson denklemleri genel olarak

$$\begin{aligned}
 +b_1u_1 - c_1u_2 &= d_1 \\
 -a_2u_1 + b_2u_2 - c_2u_3 &= d_2 \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 -a_iu_{i-1} + b_iu_i - c_iu_{i+1} &= d_i \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 -a_{N-1}u_{N-2} + b_{N-1}u_{N-1} &= d_{N-1}
 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada a , b , c ve d ler bilinmektedirler. Birinci denklem, ikinci denklemden u_1 'i elimine etmek için kullanılabilir. Yeni ikinci denklem, üçüncü denklemden u_2 'yi elimine etmek için kullanılabilir ve sonuna kadar işlemler bu şekilde devam eder. Sondan bir önceki denklem, sadece u_{N-1} bilinmeyen denklemini veren son denklemden u_{N-2} 'yi elimine etmek için kullanılabilir. $u_{N-2}, u_{N-3}, u_{N-4}, \dots, u_2, u_1$ bilinmeyenleri sıra ile geri yerine yazılarak bulunabilir. Her bir yeni yöntemdeki c katsayısının hiçbirini incelenen önceki denkleminin aynı değildir (Matthews, 1992). Son adımda

$$\alpha_{i-1}u_{i-1} - c_{i-1}u_i = S_{i-1}$$

$$-a_i u_{i-1} + b_i u_i - c_i u_{i+1} = d_i$$

ye ulaştığı kabul edilir. Burada $\alpha_1 = b_1$, $S_1 = d_1$ dir. u_1 'in elimine edilmesi

$$\left(b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \right) u_i - c_i u_{i+1} = d_i + \frac{a_i S_{i-1}}{\alpha_{i-1}}$$

ifadesi elde edilir. Yani

$$\alpha_i u_i - c_i u_{i+1} = S_i \quad (3.31)$$

$$\alpha_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \quad (3.32)$$

ve

$$S_i = d_i + \frac{a_i S_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.33)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde

$$\alpha_{N-1} u_{N-2} - c_{N-2} u_{N-1} = S_{N-2}$$

ve

$$- \alpha_{N-1} u_{N-2} + b_{N-2} u_{N-1} = d_{N-2} \quad \text{ifadelerinden}$$

u_{N-2} ' yok edilmesi ile

$$\left(b_{N-1} - \frac{a_{N-1} c_{N-2}}{\alpha_{N-2}} \right) u_{N-1} = d_{N-1} + \frac{a_{N-1} S_{N-2}}{\alpha_{N-2}}$$

eşitliği elde edilir.

$$\alpha_{N-1} u_{N-1} = S_{N-1} \quad (3.34)$$

denklemini elde edilir. Buradan denklemin çözümü

$$U_{N-1} = \frac{S_{N-1}}{\alpha_{N-1}} \quad (3.35)$$

olup

$$u_i = \frac{1}{\alpha_i} (S_i + c_i u_{i+1}) \quad i = N-2, N-3, \dots, 2, 1 \quad (3.36)$$

değerleri hesaplanabilir. Burada α ve S değerleri,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= b_1; & \alpha_i &= b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \\ S_1 &= d_1; & S_i &= d_i + \frac{a_i S_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned}$$

şeklindedir. Uygulamalarda ;

$$\alpha_i \text{ ve } \frac{a_i}{\alpha_{i-1}}$$

zamandan bağımsız olup ve zaman bir kez hesaplanması yeterlidir. Bir örnek olarak yukarıdaki birinci zaman satırındaki denklemleri

$$4u_1 - u_2 = 0.4,$$

$$-u_1 + 4u_2 - u_3 = 0.8,$$

$$-u_2 + 4u_3 - u_4 = 1.2,$$

$$-u_3 + 4u_4 - u_5 = 1.6,$$

$$-2u_4 + 4u_5 = 1.6$$

göz önüne alalım. Burada

$$a_2 = a_3 = a_4 = 1, a_5 = 2, b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 4;$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1, \quad d_1 = 0.4, \quad d_2 = 0.8, \quad d_3 = 1.2, \quad d_4 = 1.6;$$

değerleri hesaplanır. Bu sebeple, her zaman adımı için ,değişken olmayan

$$\alpha_1 = b_1 = 4; \quad \alpha_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\alpha_{i-1}} = 4 - \frac{a_i}{\alpha_{i-1}} \quad (i = 2,3,4,5)$$

ifadeleri belirlenebilir. Gerçekten

$$a_1 = 4,$$

$$\frac{a_2}{\alpha_1} = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$\alpha_1 = 4 - \frac{a_2}{\alpha_1} = 3.75,$$

$$\frac{a_3}{\alpha_2} = \frac{1}{3.75} = 0.2667,$$

$$\alpha_2 = 4 - \frac{a_3}{\alpha_2} = 3.7333,$$

$$\frac{a_4}{\alpha_3} = \frac{1}{3.7333} = 0.2679,$$

$$\alpha_3 = 4 - \frac{a_4}{\alpha_3} = 3.7321,$$

$$\frac{a_5}{\alpha_4} = \frac{1}{3.7321} = 0.5359,$$

$$\alpha_4 = 4 - \frac{a_5}{\alpha_4} = 3.4641,$$

elde edilir. Ayrıca

$$S_1 = d_1 = 0.4; \quad \alpha_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\alpha_{i-1}} = 4 - \frac{a_i}{\alpha_{i-1}} \quad (i = 2,3,4,5)$$

iken

$$S_1 = 0.4$$

$$S_2 = 0.8 + \frac{a_2}{\alpha_1} S_1 = 0.8 + (0.25)(0.4) = 0.9,$$

$$S_3 = 1.2 + \frac{a_3}{\alpha_2} S_2 = 1.440,$$

$$S_4 = 1.6 + \frac{a_4}{\alpha_3} S_3 = 1.9858,$$

$$S_5 = 1.6 + \frac{a_5}{\alpha_4} S_4 = 2.6642$$

değerleri bulunur. Birinci zaman satırındaki çözümler ise

$$u_5 = \frac{S_5}{\alpha_5} = 0.7691,$$

$$u_4 = \frac{1}{\alpha_4} (S_4 + c_4 u_5) = 0.7381,$$

$$u_3 = \frac{1}{\alpha_3} (S_3 + c_3 u_4) = 0.5834,$$

$$u_2 = \frac{1}{\alpha_2} (S_2 + c_2 u_3) = 0.3956,$$

$$u_1 = \frac{1}{\alpha_1} (S_1 + c_1 u_2) = 0.1989$$

şeklinde bulunmuştur.

3.1.7. Euler yöntemi

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

denkleminin yaklaşık çözümünün bulunması için bu denklemin yerine geçen fark denklemini elde edilir. Bunun için denkleminde

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{k} \quad (3.38)$$

türevleri yerine bunlara karşı gelen sonlu fark yaklaşımları yazılır ve

$$u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 2r(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + ru_{i-1,j}) \quad (3.39)$$

ifadesi elde edilir (Türker, 1999).

Örnek 3.1.3

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad 0 < x < 1, 0 < t < 0.20$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad 0 \leq x \leq 0.20$$

$$u(x, 0) = 4x - x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

şeklinde başlangıç ve sınır koşulları ile verilen ısı denkleminin Euler yöntemi ile nümerik çözümünü bulmak isteyelim.

$\delta_x = h = \frac{2}{10}$ ve $\delta_t = k = \frac{2}{100}$ ise $r = \frac{k}{h^2} = 0.5$ olur. Bu sonuç Euler yöntemi olarak bilinen denkleminde yerine konulursa

$$u_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2}, \quad (i = 0,1, \dots, 5 \quad j = 0,1,2, \dots, 10) \quad (3.40)$$

elde edilir. Sınır koşulundan

$$u_{0,0} = u(0,0) = 0 \quad \text{ve} \quad u_{5,0} = 0$$

olduğundan ve başlangıç koşulu $u(x, 0) = 4x - x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$ olmak üzere,

$$u_{1,0} = u(0.2,0) = 4(0.2) - (0.2)^2 = 0.64$$

$$u_{2,0} = u(0.4,0) = 4(0.4) - (0.4)^2 = 0.96$$

$$u_{3,0} = u(0.6,0) = 4(0.6) - (0.6)^2 = 0.96$$

$$u_{4,0} = u(0.8,0) = 4(0.8) - (0.8)^2 = 0.64$$

değerleri bulunur. $j=0$ için $i=1, \dots, 4$ olmak üzere

$$u_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2},$$

$$u_{1,1} = \frac{u_{2,0} + u_{0,0}}{2} = \frac{0.96 + 0}{2} = 0.48$$

$$u_{2,1} = \frac{u_{3,0} + u_{1,0}}{2} = \frac{0.96 + 0.64}{2} = 0.80$$

$$u_{3,1} = \frac{u_{4,0} + u_{2,0}}{2} = \frac{0.64 + 0.96}{2} = 0.80$$

ifadeleri elde edilir. Diğer adımlar aynı yöntemle devam edilerek çözüldüğünde (Çizelge 3.10.) ile verilen sonuçlar elde edilir.

Çizelge 3.10. $h=0.1$ ve $k=0.01$ seçildiğinde Euler çözümünün nümerik sonuçları

	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
	x=0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
t=0.00	0.00000	0.640000	0.960000	0.960000	0.640000	0.00000
t=0.02	0.00000	0.480000	0.800000	0.800000	0.480000	0.00000
t=0.04	0.00000	0.400000	0.640000	0.640000	0.400000	0.00000
t=0.06	0.00000	0.320000	0.520000	0.520000	0.320000	0.00000
t=0.08	0.00000	0.260000	0.420000	0.420000	0.260000	0.00000
t=0.14	0.00000	0.137500	0.225000	0.225000	0.137500	0.00000
t=0.16	0.00000	0.111250	0.180000	0.180000	0.111250	0.00000

3.1.8. Dufort-Frankel yöntemi

Dufort-Frankel yöntemi, $u_{i,j}$ 'nin t zaman dilimi için ortalama değeri alınması esasına dayanır. Bu halde

$$u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{2} + O(k^2) \quad (3.41)$$

$$\frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{2k} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{x^2} \quad (3.42)$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = \frac{2}{h^2} \left(u_{i+1,j} - 2 \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{2} + u_{i-1,j} \right) \quad (3.43)$$

elde edilir. $r = \frac{k}{h^2}$ için (3.37) denklemi

$$ru_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 2ru_{i+1,j} - 2ru_{i,j+1} + 2u_{i,j-1} + 2ru_{i-1,j} \quad (3.44)$$

şeklinde yazılır. Düzenleme yapılırsa

$$(1 + 2r)u_{i,j+1} - (1 - 2r)u_{i,j-1} - 2ru_{i+1,j} - 2ru_{i-1,j} = 0 \quad (3.45)$$

elde edilir. (3.41) denklemi $1+2r$ ile bölünürse

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{1 - 2r}{1 + 2r} \right) u_{i,j-1} - \frac{2r}{1 + 2r} u_{i+1,j} + \frac{2r}{1 + 2r} u_{i-1,j} \quad (3.46)$$

ifadesi elde edilir.

Örnek 3.1.4

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad 0 < x < 1, 0 < t < 0.10$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 0.10$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

şeklinde başlangıç ve sınır koşulları verilen ısı denkleminin Dufort-Frankel yöntemi ile nümerik çözümü aşağıdaki gibi verilebilir (Gölgeleyen, 2003).

$$\delta_x = h = \frac{2}{10} \text{ ve } \delta_t = k = \frac{1}{100} \text{ ise } r = \frac{k}{h^2} = 0.25 \text{ olur.}$$

Sınır koşulundan

$$u_{0,0} = u(0,0) = 0 \text{ ve } u_{5,0} = 0$$

e başlangıç koşulu $u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1$ olmak üzere,

$$u_{1,0} = u(0.2,0) = \sin(\pi(0.2)) = 0.587785$$

$$u_{2,0} = u(0.4,0) = \sin(\pi(0.4)) = 0.951057$$

$$u_{3,0} = u(0.4,0) = \sin(\pi(0.6)) = 0.951057$$

$$u_{4,0} = u(0.8,0) = \sin(\pi(0.8)) = 0.587785$$

değerleri bulunur. İlk adımda $j=0$ için $i=1,2,3,4$ olmak üzere Euler yöntemi kullanılırsa, $r=0.25$ olduğundan

$$u_{i,j+1} = 0.25u_{i+1,j} + 0.5u_{i,j} + 0.25u_{i-1,j}$$

şeklindedir. Buradan diğer değerler,

$$u_{1,1} = 0.25(u_{2,0} + u_{0,0}) + 0.50u_{1,0}$$

$$= 0.25(0.951057 + 0) + 0.5(0.587785) = 0.531657$$

$$u_{2,1} = 0.25(u_{3,0} + u_{1,0}) + 0.50u_{2,0} = 0.25(0.951057 + 0.587785)$$

$$+0.5(0.951057) = 0.860239$$

$$u_{3,1} = 0.25(u_{4,0} + u_{2,0}) + 0.50u_{3,0} = 0.25(0.587785 + 0.951057)$$

$$+0.5(0.951057) = 0.860239$$

$$u_{4,1} = 0.25(u_{5,0} + u_{3,0}) + 0.50u_{4,0} = 0.25(0 + 0.951057)$$

$$+0.5(0.587785) = 0.531657$$

şeklinde bulunur. İkinci adımda $j=1$ için $i=1,2,3,4$ olmak üzere Dufort-Frankel yöntemi kullanılırsa,

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{1-2r}{1+2r}\right)u_{i,j-1} - \frac{2r}{1+2r}u_{i+1,j} + \frac{2r}{1+2r}u_{i-1,j}$$

bağıntısı uyarınca

$$u_{1,2} = \frac{1}{3}(u_{1,0} + u_{2,1} + u_{0,1}) = \frac{1}{3}(0.587785 + 0.860239 + 0) = 0.482675$$

$$u_{2,2} = \frac{1}{3}(u_{2,0} + u_{3,1} + u_{1,1}) = \frac{1}{3}(0.951057 + 0.860239 + 0.531657)$$

$$u_{3,2} = \frac{1}{3}(u_{3,0} + u_{4,1} + u_{2,1}) = \frac{1}{3}(0.951057 + 0.531657 + 0.860239)$$

değerleri elde edilir. İşlemlere benzer şekilde devam edilirse tüm zaman adımlarındaki değerler bulunur. Bulunan sonuçlar (Çizelge 3.11.) ile verilmiştir.

Çizelge 3.11. k=0.01 seçildiğinde Dufort-Frankel çözümü için nümerik sonuçlar

	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
x=0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
t=0.00	0.00000	0.587785	0.951057	0.960000	0.640000	0.00000
t=0.02	0.00000	0.531657	0.860937	0.800000	0.480000	0.00000
t=0.04	0.00000	0.482675	0.780984	0.640000	0.400000	0.00000
t=0.06	0.00000	0.437547	0.707966	0.520000	0.320000	0.00000
t=0.08	0.00000	0.396880	0.642166	0.420000	0.260000	0.00000
t=0.10	0.00000	0.359904	0.582337	0.340000	0.210000	0.00000
t=0.12	0.00000	0.326406	0.528136	0.275000	0.170000	0.00000
t=0.20	0.00000	0.220794	0.357524	0.117813	0.072820	0.00000

3.1.9. Crandall yöntemi

Bir fonksiyonun türevi genel halde merkezi fark formülleri cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left(\delta_x^2 U - \frac{1}{12} \delta_x^4 + \frac{1}{90} \delta_x^6 + \dots \right) \quad (3.47)$$

Burada x indisi x yönündeki türevi göstermek merkezi fark formülü şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$\delta_x U_{i,j} = U_{i+\frac{1}{2}j} - U_{i-\frac{1}{2}j} \quad (3.48)$$

$$\delta_x^2 U_{i,j} = \delta_x (\delta_x U_{i,j}) = U_{i+1,j} - U_{i-1,j} \quad (3.49)$$

Merkezi fark yaklaşımının kullanılmasında denklemin sağ tarafı birinci terimden sonra kesilmektedir. İki ve daha fazla teriminden sonra kesilmesi durumunda ise yaklaşım daha hassas hale gelir. Bu durumda da bilinmeyen sayısı artmaktadır. Isı denkleminde $(i, j + 1/2)$ noktasında belirtilen yaklaşım uygulanırsa,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j+1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \right\} \quad (3.50)$$

$$= \frac{1}{2h^2} \left(\delta_x^2 - \frac{1}{12} \delta_x^4 + \frac{1}{90} \delta_x^6 + \dots \right) (u_{i,j+1} + u_{i,j}) \quad (3.51)$$

ifadesi elde edilir (Karagöz, 2008). Bu ise üç bilinmeyene karşılık üç bilinen nokta olduğundan kapalı bir yöntemdir. Her bir zaman adımında meydana gelen matris sistemlerinin çözülmesiyle çözüm nümerik olarak hesaplanabilmektedir. Molekül şeması Crank-Nicolson yönteminin molekül şeması ile aynı şekildedir.

3.1.10. Sınır koşullarının türetilmesi

Türevler yardımı ile ifade edilen sınır koşullarına uygulamada sıkça rastlanır. Örnek olarak ısı iletilen bir materyal izole edildiğinde yüzeye ısı akışı yoktur. Buna karşılık gelen sınır şartı izole edilmiş yüzeyin her noktasında

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad (3.52)$$

olur (Everstine, 2006). Burada u sıcaklığının diferansiyeli yüzeye normal doğrultudadır. Buna benzer olarak radyasyondan kaynaklanan u sıcaklığındaki bir dış yüzeyden v sıcaklığındaki bir alana olan ısı transferindeki değişimi genellikle $(u-v)$ ile orantılı olduğu kabul edilir. Değişim

$$-K \frac{\partial U}{\partial n} \quad (3.53)$$

sıcaklık birimlerine eşittir. Yüzey saçılması için gelen sınır şartı ise

$$-K \frac{\partial U}{\partial n} = H(u - v) \quad (3.54)$$

biçiminde verilir. Burada K sabiti materyal, N ısı iletkenliği ve H sabiti de yüzey ısı transferi katsayısıdır. Eksi işareti, u cebirsel olarak arttığı için sıcaklığın ters doğrultuda yayıldığını gösterir. Bu denklem h pozitif bir sabit olmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -h(u - v) \quad (3.55)$$

şeklinde yazılır. Uzunluğu boyunca sıcaklıktan yalıtılmış ve $x=0$ uç noktasındaki ısın yayan ince bir çubuk kabul edelim. T anında bu uç noktadaki ısı bilinemez bunun hesaplanması için başka bir ilave denklem gerektirir. $\frac{\partial U}{\partial x}$ için ileri fark kullanıldığında bu denklem ısı şartının kendisi olabilir. $x=0$ da (sol uçta) sınır şartı

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -h(u - v) \quad (3.56)$$

ifadesi ve u_0^j sıcaklığı için fazladan bir denklem veren,

$$\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{\delta_x} = -h(u_{0,j} - v) \quad (3.57)$$

ifadesi ile gösterilecektir. x - ekseninin pozitif yönü sağa doğru olduğu zaman

$$-K \frac{\partial U}{\partial n} \quad (3.58)$$

ısı yayılma kuralı, her birim zaman için birim alandan sağdan sola geçen ısı büyüklüğünün

$$K \frac{\partial U}{\partial n} \quad (3.58)$$

olduğunu belirtir. Bu ise $x=0$ da sıcaklık ile orantılıdır. Eğer $\frac{\partial U}{\partial x}$, $x=0$ da bir merkezi fark formülü ile ifade edilmesi gerekirse $(-\delta_x, j\delta_t)$ ç noktasında $u_{-1,j}$

sıcaklığının verilmesi gerekir. Bu halde sınır şartı

$$\frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2\delta_x} = h(u_{0,j} - v) \quad (3.60)$$

ile ifade edilir. u_{-1}^j bilinmeyenini bulmak için başka bir denkleme ihtiyaç vardır. Bu denkleme, sıcaklık hareket denkleminin çubuğun ucunda sağlandığı varsayılarak elde edilir. Bu durumda bilinmeyen u_{-1}^j ifadesi denklemler arasında yok edilebilir. Benzer denkleme çubuğun diğer ucundaki yayılma içinde geçerlidir.

Örnek 3.1.5

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad x = 0, \quad \forall t \text{ için}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u, \quad x = 1, \quad \forall t \text{ için}$$

sınır şartlarını ve

$$t = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ için } u = 1$$

başlangıç şartını sağlayan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

denklemini açık çözümü merkezi fark formüllerini kullanarak çözelim. Denkleme karşı gelen sonlu fark denklemini

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta_t} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\delta_x)^2} \quad (3.61)$$

veya

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \quad (3.62)$$

$x = 0$ için sonlu fark denklemini

$$u_{0,j+1} = u_{0,j} + r(u_{1,j} - 2u_{0,j} + u_{-1,j}) \quad (3.63)$$

olarak ifade eddir. Bu noktadaki sınır şartları ise merkezi farklar kullanarak

$$\frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2\delta_x} = u_{0,j} \quad (3.64)$$

şeklinde yazılabilir. (2.3) ve (2,4) denklemlerinden $u_{-1,j}$ yok edilirse

$$u_{0,j+1} = u_{0,j} + 2r\{u_{1,j} - (1 + \delta_x)u_{0,j}\} \quad (3.65)$$

denklemini bulunur.

$\delta_x = 0.1$ olsun . O zaman $x=1$ de (3.62) denklemini.

$$u_{10,j+1} = u_{10,j} + r(u_{9,j} - 2u_{10,j} + u_{11,j}) \quad (3.66)$$

olarak elde edilir. $x=1$ de sınır şartı

$$\frac{u_{11,j} - u_{9,j}}{2\delta_x} = -u_{10,j} \quad (3.67)$$

dir. (3.66) ve (3.67) denklemlerinden $u_{11,j}$ yok edilirse

$$u_{10,j+1} = u_{10,j} + 2r\{u_{9,j} - (1 + \delta_x)u_{10,j}\}$$

Bulunur. Bu ifade $x = \frac{1}{2}$ noktasındaki simetriklikten dolayı, $x=0$ noktasında

denkleme karşı gelen ifadeden elde edilebilirdi. Şimdi $r = \frac{1}{4}$ alalım. (3.62) ve

(3.63) denklemlerinden,

$$u_{0,j+1} = \frac{1}{2}(0.9u_{9,j} + u_{1,j}),$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad (i = 1,2,3,4)$$

ve simetri özelliğini kullanarak

$$u_{5,j+1} = \frac{1}{4}(2u_{4,j} + 2u_{5,j})$$

eşitliğini yazarız. Başlangıç sıcaklığından dolayı $u = 1$ dir. $t = r(\delta_x)^2 = 1/400$ olduğu zaman birinci adım sonunda u ' nun değerleri

$$u_{0,1} = \frac{1}{2}(0.9 + 1) = 0.95,$$

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}(1 + 2 + 1) = 1 = u_{2,1} = u_{3,1} = u_{4,1} = u_{5,1}$$

ve ikinci adım sonunda u nu değerleri

$$u_{0,2} = \frac{1}{2}(0.9 \times 0.95 + 1) = 0.9275,$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{4}(0.95 + 2 + 1) = 0.9875,$$

$$u_{2,2} = \frac{1}{4}(1 + 2 + 1) = 1 = u_{3,2} = u_{4,2} = u_{5,2}$$

olarak bulunur. Diğer birkaç adım u ' nun değerleri (Çizelge 3.12.) ile verilmiştir. Bu başlangıç ve sınır şartlarını sağlayan kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü ise

$$U = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sec \alpha_n}{(3 + 4\alpha_n^2)} e^{-\alpha_n^2} \cos 2\alpha \left(x - \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (0 < x < 1) \quad (3.68)$$

dir (Dean, 1986). Burada α_n ,

$$\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

nin pozitif kökleridir. Bu çözümden hesaplanan u nun değerleri, (Çizelge 3.13.) ile verilmiştir.

Çizelge 3.12. Sınır koşullarını çözümü için nümerik sonuçlar

	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
	x=0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
t=0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
t=0.0025	0.9500	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
t=0.005	0.9275	0.9875	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
t=0.0075	0.9111	0.9756	0.9969	1.0000	1.0000	1.0000
t=0.0100	0.8978	0.9648	0.9923	0.9992	1.0000	1.0000
t=0.0150	0.8764	0.9459	0.9818	0.9956	0.9993	0.9999
t=0.0200	0.8590	0.9276	0.9708	0.9902	0.9974	0.9991
t=0.1000	0.7175	0.7829	0.8345	0.8718	0.8942	0.9107
t=1.0000	0.1534	0.1674	0.1786	0.1867	0.1917	0.1933

Çizelge 3.13. Sınır koşulları için analitik sonuçlar

	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
	x=0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
t=0.0025	0.9460	0.9951	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
t=0.005	0.9250	0.9841	0.9984	0.9999	1.0000	1.0000
t=0.0075	0.9093	0.9730	0.9950	0.9994	1.0000	1.0000
t=0.0100	0.8965	0.9627	0.9905	0.9984	0.9998	1.0000
t=0.0125	0.8854	0.9532	0.9855	0.9967	0.9994	0.9999
t=0.0150	0.8755	0.9444	0.9802	0.9945	0.9988	0.9996
t=0.0200	0.8666	0.9362	0.9748	0.9919	0.9979	0.9992
t=0.1000	0.7176	0.7828	0.8342	0.8713	0.8936	0.9010
t=1.0000	0.1542	0.1682	0.1794	0.1875	0.1925	0.1941

Çizelge 3.14. x=0.2 noktasında sınır koşullarının nümerik değerleri

	Sonlu fark çözümü(x=0.2)	Analitik çözüm(x=0.2)	Hata
t=0.005	1.000	0.9984	0.16
t=0.050	0.9126	0.9120	0.07
t=0.100	0.8345	0.8342	0.004
t=0.250	0.6452	0.6454	-0.03
t=0.500	0.4205	0.4212	-0.16
t=1.000	0.1786	0.1794	-0.45

3.1.11. Kesme hatası ve tutarlılık

$F_{i,j}(u) = 0$ kısmi diferansiyel denklemin, sonlu fark yaklaşımının (i, j) inci grid noktasında kesin çözüm u olsun. U nun kısmi diferansiyel denklemin kesin sonuç olduğu fark denkleminin grid noktasında U ile u yer değiştirirse; $F_{i,j}(U)$ nun değerine (i, j) noktasında $T_{i,j}$ kesme hatası denir.

Örnek 3.1.6

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

denklemini için herhangi bir (i_h, j_k) noktasında açık fark yaklaşımının lokal kesme hatasını hesaplayalım. Bu amaçla

$$F_{i,j}(u) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (3.69)$$

$$T_{i,j} = F_{i,j}(U) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \quad (3.70)$$

ifadeleri oluşturalım. Taylor açılımından,

$$\begin{aligned} U_{i,j+1} &= U \{(i+1)h, jk\} = U(x_i + h, t_j) \\ &= U_{i,j} + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,i} + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,i} + \frac{1}{6} h^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{i,i} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{i-1,j} &= U \{(i-1)h, jk\} = U(x_i - h, t_j) \\ &= U_{i,j} - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,i} + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,i} - \frac{1}{6} h^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{i,i} + \dots \end{aligned}$$

$$U_{i,j+1} = U(x_i, t_j + k)$$

$$= U_{i,j} + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i,i} + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{i,i} - \frac{1}{6} h^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right)_{i,i} + \dots$$

ifadeleri elde edilir. $T_{i,j}$ için yer değiştirmeden

$$T_{i,j} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,i} + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{i,i} - \frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{i,i} \\ + \frac{1}{6} k^2 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right)_{i,i} - \frac{1}{360} h^4 \left(\frac{\partial^6 U}{\partial x^6} \right)_{i,i} + \dots$$

yazılabilir. Diferansiyel denklemin çözümü U olduğundan

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,i} = 0$$

dir ve lokal kesme hatası olarak

$$\left(\frac{1}{2} k \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{12} h^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{i,j}$$

olur. Buradan

$$T_{i,j} = O(k) + O(h^2), \quad k = rh^2, \quad 0 < r \leq \frac{1}{2}$$

olduğunda $T_{i,j} = O(k)$ dir. Azalan bir $r = k/h^2$ değeri için

$$T_{i,j} = \frac{1}{12} h^2 \left(6 \frac{k}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{i,j} + O(k^2) + O(h^4)$$

yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$$

$$T_{i,j} = O(k^2) + O(h^4) \quad (3.71)$$

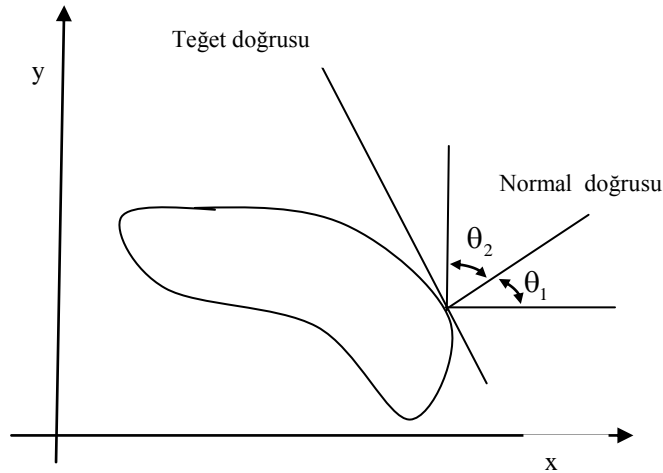
olur.

3.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi inşaat mühendisliğinde uygulama alanı çok fazla olan bir yöntemdir. Günümüzde matematiğin tüm alanlarında ortaya çıkan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerine yaklaşımda kullanılmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminin, sonlu farklar yönteminden avantajı problemin sınır koşullarıyla ilgili yapılan bir kolaylıktır. Türev içeren her bir sınır koşuluna grid noktalarında bir fark oranı ile yaklaşılması gerektiğinden ve sınır şeklinin düzensizliği grid yapısını zorlaştırmasından dolayı bu tür sınır koşullarını sonlu farklar yöntemini kullanarak halletmek zordur. Sonlu elemanlar yöntemi sınır koşullarını minimize edilecek bir fonksiyoneldeki integraller olarak ele alındığından, yapılandırma işlemi problemin özel sınır koşullarından bağımsızdır.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + r(x, y)u(x, y) = f(x, y) \quad (3.72)$$

kısmi diferansiyel denklemini ele alalım (Bayram, 2009). Burada D düzlem bölgesinin sınırı ϑ dir.



Şekil 3.12. Sonlu elemanlar yöntemi bölgesi

$$u(x, y) = g(x, y) \quad (3.73)$$

şeklindeki sınır koşulları, ϑ_1 kısmına uygulanır. Diğer ϑ_2 kısmında $u(x, y)$ fonksiyonunun,

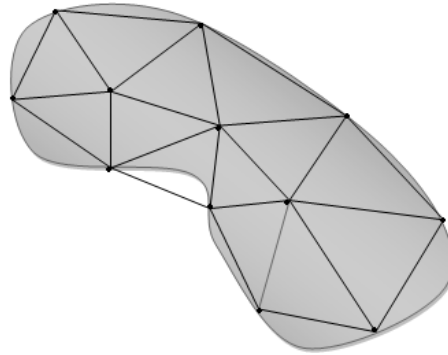
$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cos \theta_1 + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cos \theta_2 + g_1(x, y)u(x, y) = g_2(x, y) \quad (3.74)$$

denklemini sağlaması gerekir. Burada θ_1 ve θ_2 sınırın (x, y) noktasında normaliyile olan açılarıdır (Şekil 3.12.). p, q, r ve f nin $D \cup \vartheta$ de fonksiyonunun, sürekli olduğunu, p ve q nun birinci kısmi türevlerinin sürekli olduğunu kabul edelim.

$p(x, y) > 0, q(x, y) > 0, r(x, y) \leq 0$, ve $g_1(x, y) > 0$ olup (3.73) eşitliğini sağlayan ve ϑ de iki defa sürekli diferansiyellenebilen bütün w fonksiyonları için

$$I[w] = \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[p(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + q(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - r(x, y)w^2 \right] + f(x, y)w \right\} dx dy + \int \left\{ -g_2(x, y) + \frac{1}{2} g_1(x, y)w^2 \right\} dS \quad (3.75)$$

fonksiyoneli minimize eder. Sonlu elemanlar yöntemi, sınır değer problemleri için, çözüme I fonksiyoneli daha küçük bir fonksiyonel sınıfı üzerinden minimize ederek yaklaşır. İlk adım, bölgeyi üçgenler veya dörtgenler gibi düzgün şekilli sonlu sayıda bölümlere bölmektir (Şekil 3.13).



Şekil 3.13. Sonlu elemanlar yönteminin grid yapısı

Yaklaşım için kullanılan fonksiyonların kümesi genellikle x ve y 'nin sabit dereceli

düzgün polinomların kümesidir ve yaklaşım: polinomların sonuç fonksiyonu sürekli integrellenebilir veya birinci veya ikinci türevi tüm düzlemde sürekli olacak şekilde parçalanmasını gerektirir. x ve y göre lineer olan

$$\phi(x, y) = a + bx + cy \quad (3.76)$$

polinomları üçgensel elemanlarla, x ve y göre lineer olan

$$\phi(x, y) = a + bx + cy + dx \quad (3.77)$$

polinomları da dörtgensel elemanlarla kullanılır. Şimdi verilen problem için, D bölgesini üçgensel elemanlarla bölündüğünü kabul edelim. Bu üçgenlerin bileşimi D ile gösterilir ve üçgenlerin tepeleri düğümler olarak adlandırılır. Yöntem,

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \quad (3.78)$$

şeklinde bir yaklaşım bulmaya dayanır. Burada $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_m$ ler lineer bağımsız parçalı lineer polinomlar ve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_m$, ler sabitlerdir.

$\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_m$, gibi bu sabitlerin bazıları ϕ_1 de sağlanan

$$\phi(x, y) = g(x, y) \quad (3.79)$$

şartını garantiye almak için kullanılır. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_m$ gibi diğer sabitler ise

$$I \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right] \quad (3.80)$$

fonksiyoneli minimize etmek için kullanılır.

$$I[w] = \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[p(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + q(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - r(x, y) w^2 \right] + f(x, y) w \right\} dx dy$$

$$+ \int \left\{ -g_2(x, y) + \frac{1}{2} g_1(x, y) w^2 \right\} dS$$

denklemden

$$\begin{aligned}
I \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i \right] = & \iint_D \left(\frac{1}{2} \left\{ p(x,y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x,y) \right]^2 + q(x,y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x,y) \right]^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - r(x,y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x,y) \right]^2 + f(x,y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x,y) \right\} dx dy \right. \\
& \left. + \int_{\partial_2} \left\{ -g_2(x,y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x,y) + \frac{1}{2} g_1(x,y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x,y) \right]^2 \right\} dS \right)
\end{aligned}$$

I , $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_m$ lerin fonksiyonu olarak göz önüne alınırsa minimumu bulmak için, her bir $j = 1, 2, 3, \dots, n$ için;

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_j} = 0 \quad (3.81)$$

olmalıdır. Bunun için (3.81) ifadesinin diferansiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial \gamma_j} = & \iint_D \left\{ p(x,y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x,y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x,y) + q(x,y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x,y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x,y) \right. \\
& \left. - r(x,y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x,y) + f(x,y) \right\} dx dy \\
& + \int_{\partial_2} \left\{ -g_2(x,y) \phi_j(x,y) + g_1(x,y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x,y) \phi_j(x,y) \right\} dS
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her bir $j = 1, 2, 3, \dots, n$ için

$$\beta_i = - \iint_D f(x,y) \phi_i(x,y) dx dy + \int_{\partial_2} g_2(x,y) \phi_i(x,y) dS - \sum_{k=n+1}^m \alpha_{ij} \gamma_k$$

şekindedir. Uygun bir seçim A matrisini pozitif tanımlı yapacağından baz (taban) fonksiyonlarının özel seçimi önemlidir. İkinci mertebeden problem için D nin poligonal ve ∂_1 nin $D = D$ olacak şekilde doğruların bitişik bir kümesi olduğunu kabul edelim. İşleme başlamak için D bölgesini $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ üçgenlerine böleriz. Burada i . üçgen

$$V_i^{(j)} = (x_i^{(j)}, y_i^{(j)}); \quad j = 1, 2, 3$$

ile gösterilen düğümlere sahiptir. Sabit T_1 üçgeniyle çalışırken kolaylık olsun diye $V_i^{(j)}$ yerine $V_j(x_j, y_j)$ alırız. Her bir V_j tepe noktasına

$$N_j^{(i)} = N_j = a_j + b_j x + c_j y$$

lineer polinomu karşılık getirelim. Burada

$$N_j^{(i)}(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & j = k \text{ ise} \\ 0, & j \neq k \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde lineer sistem ortaya çıkar. E_1, E_2, \dots, E_2 ile $D \cup \vartheta$ da bulunan soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru uzanan düğümleri etiketleyelim. Her bir E_k düğümüne, her üçgende lineer olan ve E_k da 1 ve diğer düğümlerde 0 değerini alan bir ϕ_k fonksiyonu karşılık getirelim. E_k düğümü $V_i^{(j)}$ tepe noktası olduğunda ϕ_k yı T_1 üçgeninde $N_j^{(i)}$ ye özdeş yapar.

3.3. Yakınsaklığın Analitik Yorumu

$u = u(x, t)$ kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümü; sonlu fark çözümleriyle kesikli hale getirilen denklemin kesin çözümü ise U olsun $\partial x \rightarrow 0$ için $u \rightarrow U$ yakınsaklık koşulları ikinci basamaktan lineer eliptik ve hiperbolik denklemleri için biliniyor olmakla birlikte bazı özel haller için non lineer denklemler için tam olarak bilinmemektedir.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u + g = 0 \quad (3.82)$$

denkleminde a, b, c, d, e, f, g katsayıları sabit ya da yalnızca x ve t 'nin bir fonksiyonu ise denkleme ikinci dereceden lineer bir denklemdir denir. Aksi halde denklemin lineer

olmayan denklem adı verilir. İkinci dereceden katsayıları $x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ nin fonksiyonları fakat ikinci mertebeden türevlerin fonksiyonu değilse denklem non lineer denklem olmasına karşılık denklem quazi lineerdir. Lineer denklemlerin önemli bir özelliği, çözümlerin lineer toplamlarının da yine bir çözüm olduğudur.

Açık yöntem fark yaklaşımı için kesme hatasını inceleyelim. U kısmi türevli diferansiyel denkleminin tam çözümü ve u sonlu fark denkleminin tam çözümü olsun. O halde $e = U - u$ yazılabilir.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x, t) = a$$

$$u(0, t) = u(1, t) = ab$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklem için sonlu fark denklemini

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (3.83)$$

şeklinde yazılabilir. Grid noktalarındaki

$$u_{i,j} = u_{i,j} - e_{i,j} \quad u_{i,j} = u_{i,j+1} - e_{i,j+1} = \dots,$$

ifadeleri (3.83) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_{i,j+1} = ru_{i-1,j} + (1 - 2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}$$

$$u_{i,j+1} - e_{i,j+1} = r(u_{i-1,j} - e_{i,j+1}) + (1 - 2r)(u_{i,j} - e_{i,j}) + r(u_{i+1,j} - e_{i+1,j})$$

$$e_{i,j+1} = re_{i-1,j} + (1 - 2r)e_{i,j} + re_{i+1,j} - u_{i,j+1} + (2u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j})$$

ifadesi elde edilir. Burada $u_{i+1,j}$ ve $u_{i-1,j}$ yi Taylor serisi açılımından yararlanarak bulabiliriz.

$$u_{i+1,j} = u(x_i + h, t_j) = u_{i,j} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} +$$

$$\frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x_i + \theta_1 h, t_j) \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$\begin{aligned} u_{i-1,j} &= u(x_i - h, t_j) = u_{i,j} - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x_i - \theta_2 h, t_j) \quad u_{i,j+1} \\ &= u(x_i, t_j + k) = u_{i,j} + k \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} (x_i, t_j + \theta_3 k) \quad 0 < \theta_3 < 1 \end{aligned}$$

Bu ifadeler eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} e_{i,j+1} &= r e_{i-1,j} + (1 - 2r) e_{i,j} + r e_{i+1,j} \\ &\quad + k \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} (x_i, t_j + \theta_3 k) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (x_i - \theta_2 k, t_j) \right\} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$e_{i,j}$, $|E_{i,j}|$ hatalarının maksimum değerini gösterebilir. Bu halde $r \leq \frac{1}{2}$ ise katsayılar ya 0 ya da pozitiftir. Ancak $r = \frac{1}{2}$ olduğu zaman 0 olur. Bu halde

$$|e_{i,j}| \leq r |e_{i-1,j}| + (1 - 2r) |e_{i,j}| + r |e_{i+1,j}| + kM \leq rE_j + (1 - 2r)E_j +$$

$$rE_j + kM = E_j + kM$$

elde edilir (Smith, 1985). Bu ifadeler her i için sağlandığından. $\text{Max } |e_{i,j}|$ içinde gerçekleşir. Böylece

$$|E_{i,j}| \leq E_{i,j} + kM \leq (E_{j-1} + kM) + kM = E_{j-1} + 2kM \leq (E_{j-2} + kM) + 2kM$$

$$= E_{j-2} + 3kM$$

$$|E_{i,j}| \leq E_0 + jkM = tM \quad \text{koşulu sağlanır.}$$

3.3. Kararlılık Analizi

Sınır değer problemleri için kararlılık $k \rightarrow 0$ yani $j \rightarrow \infty$ için sabit zaman adımlarında sonlu fark denklemlerinin çözümlerinin sınırlılığı için kullanılmıştır.

$$u_{i,j+1} = (u_{1,j+1}, u_{1,j+1}, \dots, u_{N-1,j+1})^T \quad (3.84)$$

çözümü ile $u_{i,j+1} = Au_i + B_i$ ilişkilendirilsin. Burada B vektörü 0 ve bilinen sınır değerlerinden oluşan sütun vektör A ise bilinen elemanları içeren $(n-1) \times (n-1)$ tipinde bir matris olsun. Bu halde bu şekilde tanımlanan matris metod analizi A matrisinin öz vektörlerinin modüllerinin en büyüğü yani A'nın spektral yarıçapı $\delta(A)$ arttığında diferansiyel denkleminin çözümü artmıyorsa yani $\delta(A) \leq 1$ ise sistemin kararlı olduğunu gösterir

3.4.1. Kararlılık için Von-Neuman yöntemi

T sonlu olma üzere zaman aralığı $0 \leq t \leq T = jk$, $\delta x = h \rightarrow 0$, $\delta t = k \rightarrow 0$ ve $j \rightarrow \infty$ olmak üzere iki zamanlı doğrusal fark denklemi için $u(x, t)$ nin kararlılığını araştıralım. Kosinüs ve sinüslü terimlerle formülize edilen fourier serilerini işlem kolaylığı açısından kompleks üstel formundaki $\sum a_n \cos(n\pi x/l)$ veya $\sum b_n \sin(n\pi x)$ ifadeleri yerine eşdeğeri olan $\sum A_n e^{-in\pi x/l}$ ifadesi yazılabilir. $i = \sqrt{-1}$, l x aralığının uzunluğu olmak üzere $u(ph, qk) = u_{p,k}$ olarak gösterilsin. Bu halde

$$A_n e^{-in\pi x/l} = A_n e^{in\pi ph/Nh} = A_n e^{i\beta_n \pi ph} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{Nh} \quad \text{ve } Nh = l$$

şeklini alır (Çağlıyan, 2010). Başlangıç değerleri $t = 0$ boyunca $u(ph, 0) = u_{p,0}$, $p = 0(1)N$ şeklinde seçilirse

$$u_{p,0} = \sum_{n=0}^N A_n e^{i\beta_n \pi ph}$$

elde edilir. t değeri artarken değişimi araştırmak için

$$u_{p,q} = e^{i\beta x} e^{at} = e^{i\beta p h} e^{a q k} = e^{i\beta p h} \gamma^q$$

şeklinde yazılsın. Burada $\gamma^q = e^{ak}$, a kompleks sabit sayıdır. $|u_{p,q}|$, $\forall q \leq J$ için sınırlandırılırsa $\delta x = h \rightarrow 0$ ve $\delta t = k \rightarrow 0$ için başlangıç şartlarını sağlayan tüm β değerleri için sonlu fark denklemlerinin tam çözümü zamanla üstel artmıyorsa kararlılık için gerekli ve yeterli koşul;

$$|\gamma| \leq 1$$

olmasıdır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için önerilen yöntemi örnekler üzerinde görelim.

Örnek 4.1

Başlangıç ve sınır koşulları ile bir boyutlu ısı denklemini ele alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T$$

başlangıç koşulları ,

$$u(0, t) = \int_0^1 \phi(x, t)u(x, t) + g_1(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(1, t) = \int_0^1 \varphi(x, t)u(x, t) + g_2(t), \quad 0 < t \leq T,$$

biçiminde verilsin. Burada

$$f(x) = x^2 \quad 0 < t \leq T$$

$$g_1(t) = \frac{-1}{4(t+1)^2}, \quad 0 < t < 1$$

$$g_2(t) = \frac{3}{4(t+1)^2}, \quad 0 < t < 1$$

$$\varphi(x, t) = x, \quad 0 < x < 1$$

$$q(x, t) = \frac{-2(x^2 + t + 1)}{(t+1)^3}, \quad 0 < t \leq 1, 0 < x < 1$$

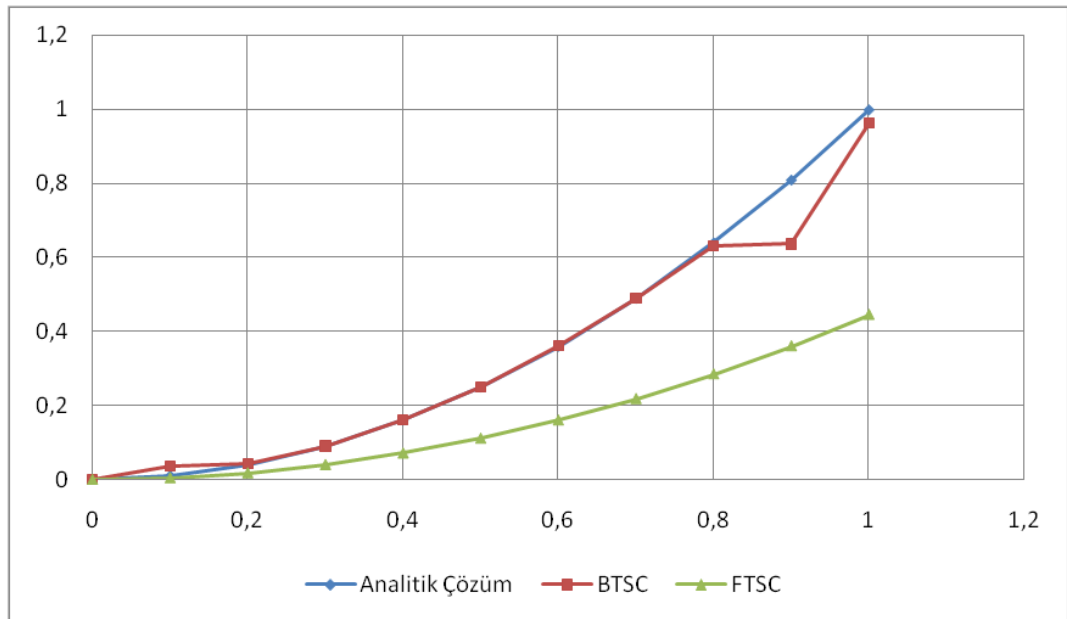
dir. Bu denklemin koşullarını sağlayan denklemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \left(\frac{x}{t+1} \right)^2$$

dir. Burada verilen denklemin çözümü diğer yöntemler ve burada geliştirilen yöntem ile çizelge ve grafikler şeklinde verilmiştir.

Çizelge 4.1. t=0.5 için BTCS ve FTCS yaklaşımlarına ait sonuçlar

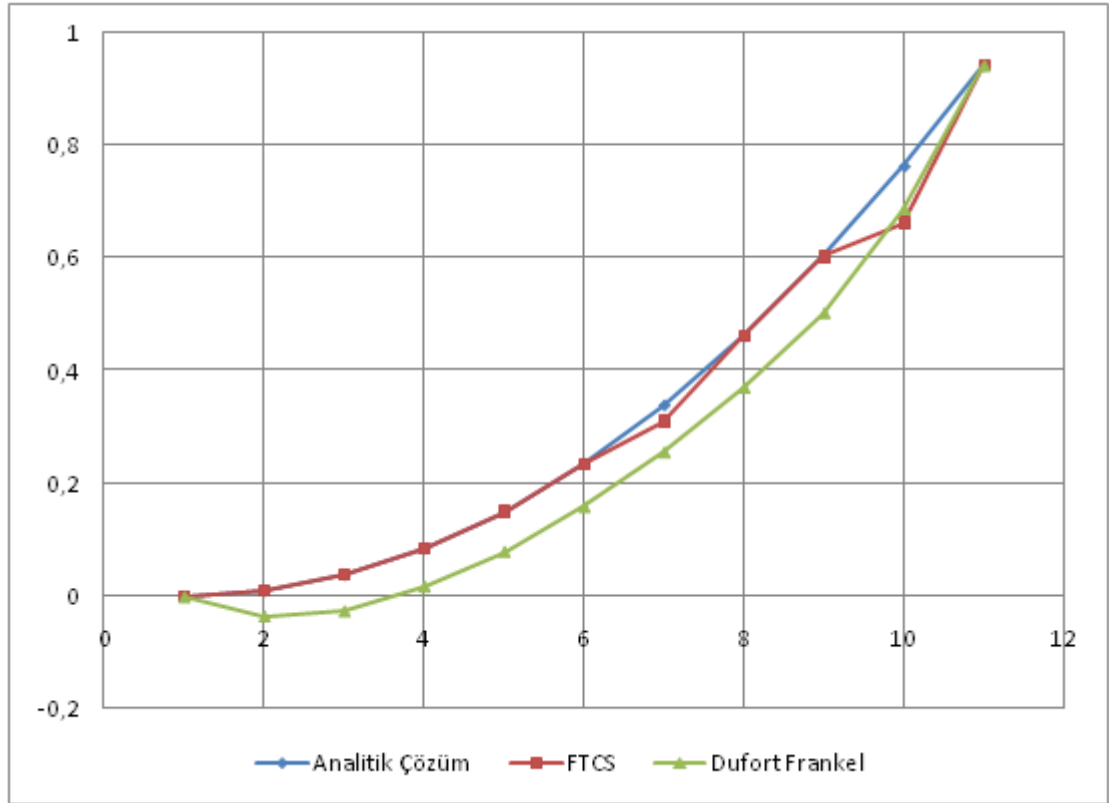
X	Analitik Çözüm	BTSC	BTSC Hata	FTSC	FTSC Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.00990029	0.03459313	0.02461310	0.00443708	0.00554294
0.2	0.03992011	0.04135164	0.00143152	0.01776333	0.02215678
0.3	0.088982026	0.09007428	0.00025401	0.03997908	0.04984118
0.4	0.15968047	0.16000400	0.00032352	0.07108483	0.08859564
0.5	0.24950074	0.24999863	0.00049788	0.11108112	0.13841962
0.6	0.35928107	0.35997096	0.00068988	0.15996858	0.19931249
0.7	0.48902146	0.48947120	0.00044973	0.21774791	0.27127355
0.8	0.63872191	0.63037816	0.000834375	0.28441983	0.35430207
0.9	0.80838242	0.63492997	0.17345245	0.35998509	0.444839732
1	0.99800299	0.96116878	0.03683421	0.44444444	0.55355855



Şekil 4.1. t=0.5 için FTCS ve BTCS Yaklaşımları ve analitik çözümün grafiği

Çizelge 4.2. $t=0.03$ için FTCS ve Dufort Frankel yaklaşımlarına ait sonuçlar

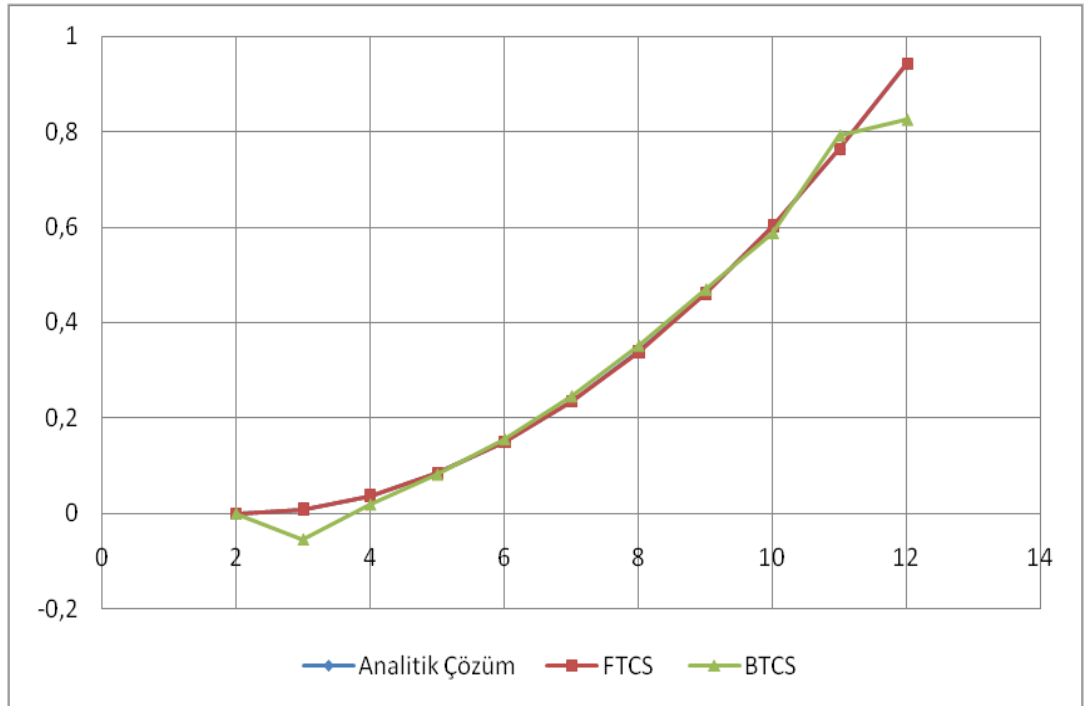
X	Analitik Çözüm	FTCS	FTCS Hata	Dufort Frankel	Dufort Frankel Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.00942595	0.00940508	0.00002015	-0.03460020	0.04402616
0.2	0.03770383	0.03765213	0.00005169	-0.02558071	0.06328455
0.3	0.08483363	0.08473922	0.00009404	0.01850195	0.06633168
0.4	0.15081534	0.15066114	0.00015419	0.08021769	0.07059765
0.5	0.23564897	0.23541790	0.00023107	0.15956649	0.07608248
0.6	0.33933452	0.33900949	0.00032509	0.25654837	0.08278615
0.7	0.46187199	0.46143592	0.00043607	0.37116331	0.09070868
0.8	0.60326138	0.60299323	0.00026814	0.50354290	0.09971847
0.9	0.76350268	0.76308374	0.00041894	0.68849522	0.07500746
1	0.94259590	0.94259590	0	0.94259590	0



Şekil 4.2. $t = 0.03$ için FTCS ve Dufort Frankel yaklaşımları ve analitik çözümün grafiği

Çizelge 4.3. $t=0.03$ için FTCS ve BTCS yaklaşımlarına ait sonuçları

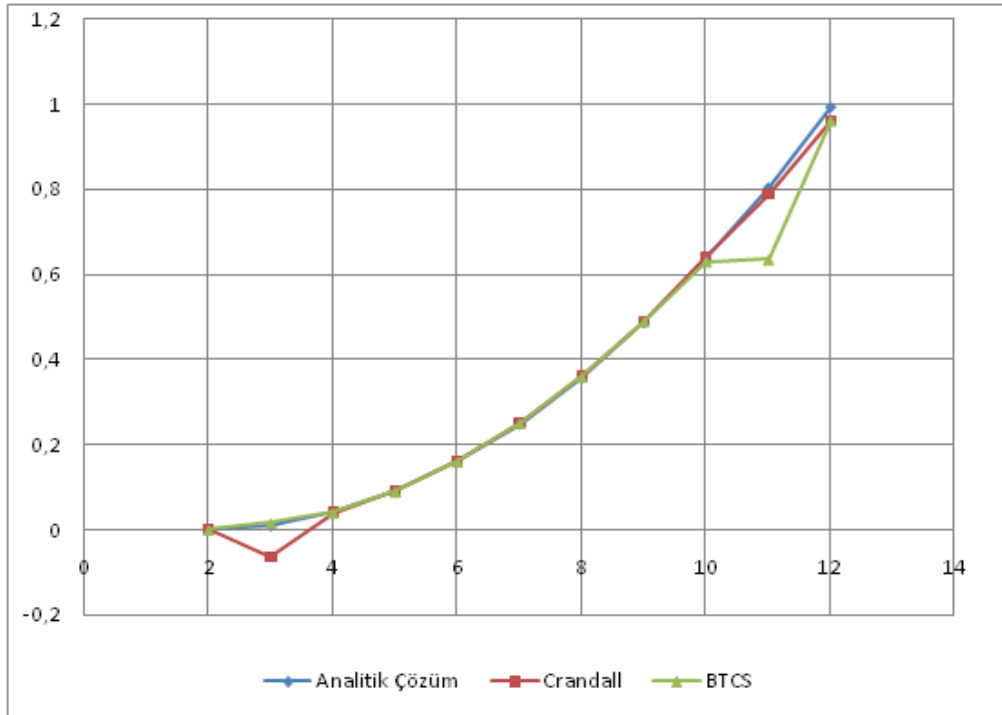
X	Analitik Çözüm	FTCS	FTCS Hata	BTCS	BTCS Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.00942595	0.00940508	0.00002015	-0.05461565	0.05461561
0.2	0.03770383	0.03765213	0.00005169	0.01878366	0.01892017
0.3	0.08483363	0.08473922	0.00009404	0.08154063	0.00329299
0.4	0.15081534	0.15066114	0.00015419	0.15583824	0.00502289
0.5	0.23564897	0.23541790	0.00023107	0.24597409	0.01032511
0.6	0.33933452	0.33900949	0.00032509	0.35208404	0.01274951
0.7	0.46187199	0.46143592	0.00043607	0.47027803	0.00840604
0.8	0.60326138	0.60299323	0.00026814	0.58875006	0.01451131
0.9	0.76350268	0.76308374	0.00041894	0.79319229	0.02968961
1	0.94259590	0.94259590	0	0.82644628	0.11614962



Şekil 4.3. $t=0.03$ için FTCS ve BTCS yaklaşımları ve analitik çözümün grafiği

Çizelge 4.4. $t=0.003$ için Crandall ve BTCS yaklaşımlarına ait sonuçlar

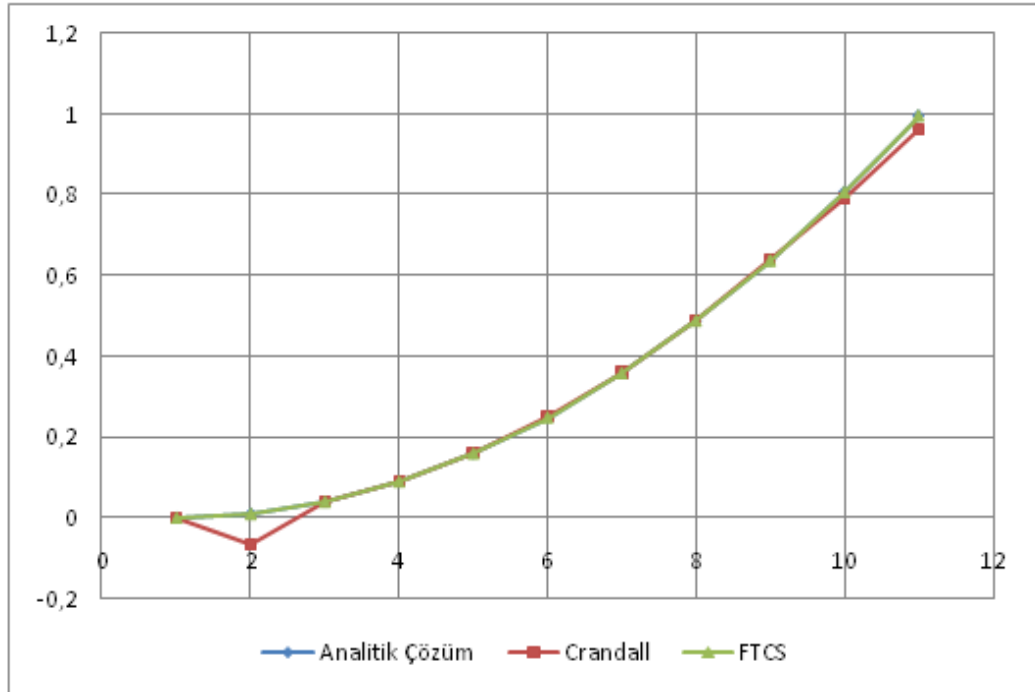
X	Analitik Çözüm	Crandall	Crandall Hata	BTCS	BTCS Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.00994026	-0.06494215	0.07488242	0.01615140	0.00621114
0.2	0.03976107	0.03931713	0.00044394	0.04033808	0.00057700
0.3	0.08946242	0.08999377	0.00053135	0.09001857	0.00055615
0.4	0.15904430	0.15999994	0.00095564	0.16000093	0.00095663
0.5	0.24850572	0.24999999	0.00149327	0.24999845	0.00149173
0.6	0.35784968	0.35999998	0.00215030	0.35997089	0.00212121
0.7	0.48707317	0.48999835	0.00292518	0.48947039	0.00239722
0.8	0.63617721	0.63981975	0.00364254	0.63036390	0.00581331
0.9	0.80516178	0.79021854	0.01494324	0.63467078	0.17049099
1	0.99402689	0.96116878	0.03285811	0.96116878	0.03285811



Şekil 4.4. $t=0.003$ için BTCS ve Crandall yaklaşımları ve analitik çözümün grafiği

Çizelge 4.5. $t=0.03$ için Crandall ve FTCS yaklaşımlarına ait sonuçlar($h=0.1$)

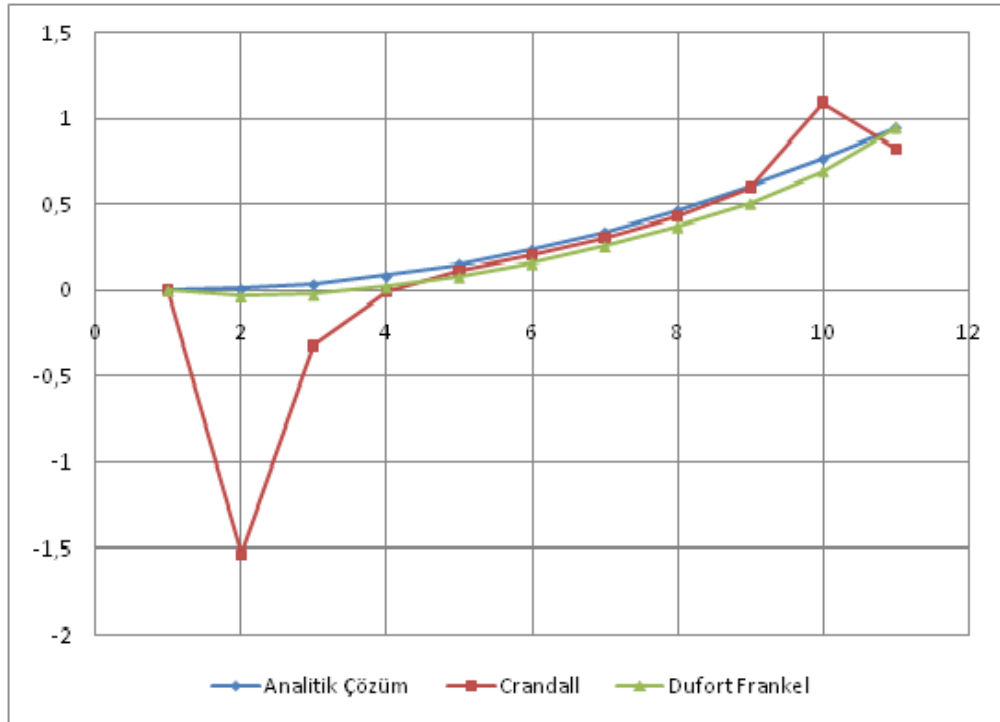
X	Analitik Çözüm	Crandall	Crandall Hata	FTCS	FTCS Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.00994026	-0.06494215	0.07488242	0.00994016	0.00000010
0.2	0.03976107	0.03931713	0.00044394	0.03976069	0.00000037
0.3	0.08946242	0.08999377	0.00053135	0.08946159	0.00000082
0.4	0.15904430	0.15999994	0.00095564	0.15904285	0.00000145
0.5	0.24850572	0.24999999	0.00149327	0.24854446	0.00000225
0.6	0.35784968	0.35999998	0.00215030	0.35784644	0.00000324
0.7	0.48707317	0.48999835	0.00292518	0.48706877	0.00000440
0.8	0.63617721	0.63981975	0.00364254	0.63617146	0.00000574
0.9	0.80516178	0.79021854	0.01494324	0.80515499	0.00000678
1	0.99402689	0.96116878	0.03285811	0.99402689	0



Şekil 4.5. $t=0.03$ için FTCS ve Crandall yaklaşımları ve analitik çözümün grafiği

Çizelge 4.6. $t=0.03$ için Crandall ve Dufort Frankel yaklaşımlarına ait sonuçlar($h=0.05$)

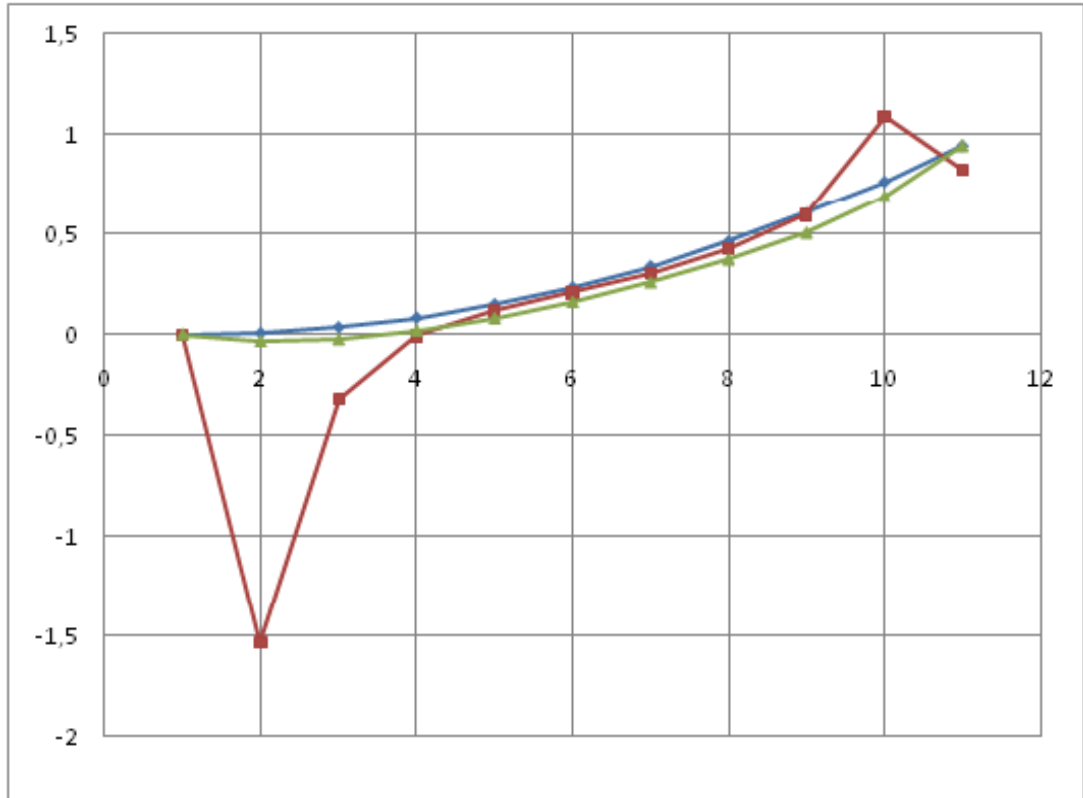
X	Analitik Çözüm	Crandall	Crandall Hata	Dufort Frankel	Dufort Frankel Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.00942595	-1.53332455	1.154275051	-0.03460020	0.04402616
0.2	0.03770383	-0.32125896	0.35896280	-0.02558071	0.06328455
0.3	0.08483363	-0.00582570	0.09065933	0.01850195	0.06633168
0.4	0.15081534	0.11664742	0.03416791	0.08021769	0.07059765
0.5	0.23564897	0.20822172	0.02742725	0.15956649	0.07608248
0.6	0.33933452	0.30734794	0.03198658	0.25654837	0.08278615
0.7	0.46187199	0.42816790	0.03370408	0.37116331	0.09070868
0.8	0.60326138	0.59755885	0.00570252	0.50354290	0.09971847
0.9	0.76350268	1.09079061	1.09079061	0.68849522	0.07500746
1	0.94259590	0.82644628	0.82644628	0.94259590	0



Şekil 4.6. $t=0.03$ için Crandall ve Dufort Frankel yaklaşımlar ve analitik çözümün grafiği

Çizelge 4.7. $t=0.03$ içine Crandall ve BTSC Yaklaşımlarına ait sonuçlar($h=0.01$)

X	Analitik Çözüm	Crandall	Crandall Hata	BTCS	BTCS Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.00942595	-1.53332455	1.154275051	-0.05461565	0.05461561
0.2	0.03770383	-0.32125896	0.35896280	0.01878366	0.01892017
0.3	0.08483363	-0.00582570	0.09065933	0.08154063	0.00329299
0.4	0.15081534	0.11664742	0.03416791	0.15583824	0.00502289
0.5	0.23564897	0.20822172	0.02742725	0.24597409	0.01032511
0.6	0.33933452	0.30734794	0.03198658	0.35208404	0.01274951
0.7	0.46187199	0.42816790	0.03370408	0.47027803	0.00840604
0.8	0.60326138	0.59755885	0.00570252	0.58875006	0.01451131
0.9	0.76350268	1.09079061	1.09079061	0.79319229	0.02968961
1	0.94259590	0.82644628	0.82644628	0.82644628	0.11614962



Şekil 4.7. $t=0.03$ için Crandall ve BTSC Yaklaşımları ve analitik çözümün grafiği

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Fizik ve mühendislik alanlarında birçok problemin kısmi diferansiyel denklem ile ifade edilmesi ve bu denklemlerin analitik çözümlerinin karmaşık olması ya da analitik çözümlerinin olmaması durumunda, sayısal yöntemler tercih edilmektedir. Bu tip denklemlerin özellikle, değişken katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü bulmak önemlidir. Bu çalışmada parabolik kısmi diferansiyel denklemlerden ısı denklemi için farklı nümerik çözüm yöntemleri sunuldu. Bu yöntemlerin tutarlılık ve kararlılıkları incelendi. Yöntemlerden, Euler Yöntemi'nin tutarlı ve $r \leq \frac{1}{2}$ için kararlı diğer durumlarda ise kararsız olduğu görüldü. Dufort-Frankel Yöntemi ise tutarsız fakat kararlı olduğu görüldü. Yöntemlerden, Crank-Nicolson Yöntemi'nin tutarlı ve her durumda da kararlı olduğu görüldü. Yöntem açısından bakıldığında geliştirilen yöntemlerin hata oranı diğer klasik yöntemlerle karşılaştırıldığında benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bilgisayar programlarının geliştirildiği teknoloji çağında Crank-Nicolson metodunun problemlerin çözümünde kolaylık sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Ames, W.F. (1992) *Nümerical Methods For Partial Differential Equations*, Academic Press, Atlanta, 452s
- Bayram, M. (2009) *Nümerik Analiz*, Birsen Yayınları, 495s
- Bülbül, B. (2011) *İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin Taylor polinom çözümleri*, Doktora Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla, 102s
- Çağlıyan, Ç. (2010) *Kısmi Diferansiyel Denklemler*, Dora Basım Yayın Dağıtım, Bursa, 264s
- Everstine, G.L. (2006) *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, George Washington University, Maryland, 432s
- Garabedian, R.P. (1963) *Partial Differential Equations*, Chelsea, 668s
- Gordon, C.E. (2010) *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Gaither Gaithersburg, Maryland, 109s
- Hasanoğlu, A. (2010) *Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler*, Literatür yayıncılık, İstanbul, 429s
- İndsay, K.A. (2003) *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, University of Glas of Glasgow, Glasgow, 473s
- Karagöz, İ. (2008) *Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*, Nobel Yayın Dağıtım, 486s
- Mattiewes, J.H. (1992) *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*, Englewood Cliffs, New Jersey, 251s
- Smith, G.D. (1985) *Numerical Solution of Partial Differential Equations Finite Methods Difference Methods*, Clarendon Press, Oxford, 335s
- Türker, S.E. (1999) *Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri*, Değişim Yayınları, Adapazarı, 477s
- Tuncer, T. (1992) *Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler*, Mimar Sinan Üniversitesi, İstanbul, 279s
- Wazwaz, A. (2009) *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*, Higher Education Press, Beijing, 731s

Ek A. Maple Programı

Örnek 3.2.1 durum 1

```
diff(u(x, t), t) = diff(u(x, t), x, x);
u(x, 0) := piecewise(0 <= x and x <= 1/2, 2*x, 1/2 < x and x <= 1, 2-2*x);
u(0, t) := 0; u(1, t) := 0;
restart;
Digits := 4;
h := .1;
k := 0.1e-2;
r := k/h^2;
u(x,t):=((1)/(Pi^(2)))*((&sum;)(1)/(n^(2))*(sin((1)/(2)*n*Pi)*sin((1)/(2)*n*Pi*x)*exp(-n^(2)*Pi^(2)*t)));
Digits := 4;
u := array(0 .. 10, 0 .. 20);
bas := array(0 .. 10);
bas1 := array(0 .. 10);
f := proc (x) options operator, arrow; 2*x end proc;
for i from 0 to 5 do bas[i] := evalf(f(i.h)) end do;
for i from 0 to 5 do u[i, 0] := bas[i] end do; u[6, 0] := .8;
for j from 0 to 19 do u[0, j] := 0 end do;
for j from 0 to 19 do for i to 5 do u[i, j+1] := r*u[i-1, j]+(1-2*r)*u[i, j]+r*u[i+1, j]
end do end do;
u[4, 2];
for j from 0 to 20 do u[6, j] := u[4, j] end do;
for j from 0 to 20 do u[5, j] := u[5, j] end do;
for j from 0 to 20 do u[7, j] := u[3, j] end do;
for j from 0 to 20 do u[8, j] := u[2, j] end do;
for j from 0 to 20 do u[9, j] := u[1, j] end do;
for j from 0 to 20 do u[10, j] := u[0, j] end do;
for j from 0 to 10 do print(u[0, j], u[1, j], u[2, j], u[3, j], u[4, j], u[5, j], u[6, j], u[7, j],
u[8, j], u[9, j], u[10, j]) end do;
with(plots);
```

t=0.1 anında

```
B := plot([[0, u[0, 1]], [evalf(1/10), u[1, 1]], [evalf(2*(1/10)), u[2, 1]], [evalf(3/10),  
u[3, 1]], [evalf(4*(1/10)), u[4, 1]], [evalf(5*(1/10)), u[5, 1]], [evalf(6*(1/10)), u[6,  
1]], [evalf(7/10), u[7, 1]], [evalf(8*(1/10)), u[8, 1]], [evalf(9/10), u[9, 1]],  
[evalf(10*(1/10)), u[10, 1]]], style = point, color = red);  
display({B});
```

t=0.5 anında

```
C := plot([[0, u[0, 5]], [evalf(1/10), u[1, 5]], [evalf(2*(1/10)), u[2, 5]], [evalf(3/10),  
u[3, 5]], [evalf(4*(1/10)), u[4, 5]], [evalf(5*(1/10)), u[5, 5]], [evalf(6*(1/10)), u[6,  
5]], [evalf(7/10), u[7, 5]], [evalf(8*(1/10)), u[8, 5]], [evalf(9/10), u[9, 5]],  
[evalf(10*(1/10)), u[10, 5]]], style = point, color = blue);  
display({C});
```

Analitik Çözüm

```
x := array(0 .. 10);
```

```
h := .1;
```

```
x[0] := 0;
```

```
for i from 0 to 9 do x[i+1] := x[i]+h end do;
```

```
t[0] := 0;
```

```
for i from 0 to 19 do t[i+1] := t[i]+k end do;
```

```
tam := array(0 .. 10, 0 .. 20);
```

```
ua := proc (x, t) options operator, arrow; 8*(sum(sin((1/2)*n*Pi)*sin(n*Pi*x)*exp(-  
n^2*Pi^2*t)/n^2, n = 1 .. 100))/Pi^2 end proc;
```

```
for j from 0 to 20 do for i from 0 to 10 do tam[i, j] := evalf(ua(x[i], t[j])) end do end  
do;
```

```
tam[3, 5]; tam[3, 10]; tam[3, 20];
```

```
u[3, 5]; u[3, 10]; u[3, 20];
```

```
or j from 0 to 6 do print(k*j, tam[0, j], tam[1, j], tam[2, j], tam[3, j], tam[4, j], tam[5,  
j], tam[6, j], tam[7, j], tam[8, j], tam[9, j], tam[10, j]) end do;
```

```
AN := plot([[0, tam[0, 5]], [evalf(1/10), tam[1, 5]], [evalf(2*(1/10)), tam[2, 5]],  
[evalf(3/10), tam[3, 5]], [evalf(4*(1/10)), tam[4, 5]], [evalf(5*(1/10)), tam[5, 5]],  
[evalf(6*(1/10)), tam[6, 5]], [evalf(7/10), tam[7, 5]], [evalf(8*(1/10)), tam[8, 5]],  
[evalf(9/10), tam[9, 5]], [evalf(10*(1/10)), tam[10, 5]]], style = line, color = yellow);  
display({AN});
```

Ek B. Maple Programı

Örnek 3.1.1 durum 2

```
diff(u(x, t), t) = diff(u(x, t), x, x);
u(x, 0) := piecewise(0 <= x and x <= 1/2, 2*x, 1/2 < x and x <= 1, 2-2*x);
u(0, t) := 0; u(1, t) := 0;
restart;
Digits := 4;
h := .1;
k := 0.1e-2;
r := k/h^2;
u(x,t):=((1)/(Pi^(2)))*((&sum;)(1)/(n^(2))*(sin((1)/(2)*n*Pi)*sin((1)/(2)*n*Pi*x)*exp(-n^(2)*Pi^(2)*t)));
Digits := 4;
u := array(0 .. 10, 0 .. 20);
bas := array(0 .. 10);
bas1 := array(0 .. 10);
f := proc (x) options operator, arrow; 2*x end proc;
for i from 0 to 5 do bas[i] := evalf(f(i.h)) end do;
for i from 0 to 5 do u[i, 0] := bas[i] end do;
for j from 0 to 19 do u[0, j] := 0 end do;
for j from 0 to 19 do for i to 5 do u[i, j+1] := r*u[i-1, j]+(1-2*r)*u[i, j]+r*u[i+1, j]
end do end do;
for j from 0 to 20 do u[6, j] := u[4, j] end do;
for j from 0 to 20 do u[5, j] := u[5, j] end do;
for j from 0 to 20 do u[7, j] := u[3, j] end do;
for j from 0 to 20 do u[8, j] := u[2, j] end do;
for j from 0 to 20 do u[9, j] := u[1, j] end do;
for j from 0 to 20 do u[10, j] := u[0, j] end do;
with(plots);
t=0.1 anında
B := plot([[0, u[0, 1]], [evalf(1/10), u[1, 1]], [evalf(2*(1/10)), u[2, 1]], [evalf(3/10),
u[3, 1]], [evalf(4*(1/10)), u[4, 1]], [evalf(5*(1/10)), u[5, 1]], [evalf(6*(1/10)), u[6,
```

```

1]], [evalf(7/10), u[7, 1]], [evalf(8*(1/10)), u[8, 1]], [evalf(9/10), u[9, 1]],
[evalf(10*(1/10)), u[10, 1]], style = point, color = red);
display({B});
t=0.5 anında
> C := plot([[0, u[0, 5]], [evalf(1/10), u[1, 5]], [evalf(2*(1/10)), u[2, 5]], [evalf(3/10),
u[3, 5]], [evalf(4*(1/10)), u[4, 5]], [evalf(5*(1/10)), u[5, 5]], [evalf(6*(1/10)), u[6,
5]], [evalf(7/10), u[7, 5]], [evalf(8*(1/10)), u[8, 5]], [evalf(9/10), u[9, 5]],
[evalf(10*(1/10)), u[10, 5]], style = point, color = blue);
display({C});
display({B, C});
x := array(0 .. 10);
x[0] := 0;
for i from 0 to 9 do x[i+1] := x[i]+h end do;
t[0] := 0;
for i from 0 to 19 do t[i+1] := t[i]+k end do;
tam := array(0 .. 10, 0 .. 20);
ua := proc (x, t) options operator, arrow; 8*(sum(sin((1/2)*n*Pi)*sin(n*Pi*x)*exp(-
n^2*Pi^2*t)/n^2, n = 1 .. 100))/Pi^2 end proc;
for j from 0 to 20 do for i from 0 to 10 do tam[i, j] := evalf(ua(x[i], t[j])) end do end
tam[3, 5]; tam[3, 10]; tam[3, 20];
u[3, 5]; u[3, 10]; u[3, 20];
AN := plot([[0, tam[0, 5]], [evalf(1/10), tam[1, 5]], [evalf(2*(1/10)), tam[2, 5]],
[evalf(3/10), tam[3, 5]], [evalf(4*(1/10)), tam[4, 5]], [evalf(5*(1/10)), tam[5, 5]],
[evalf(6*(1/10)), tam[6, 5]], [evalf(7/10), tam[7, 5]], [evalf(8*(1/10)), tam[8, 5]],
[evalf(9/10), tam[9, 5]], [evalf(10*(1/10)), tam[10, 5]], style = line, color = yellow);
display({AN});
display({AN, B})

```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad : Adem Demir
Uyruk : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi: Gümüşhane, 01/04/1974
Medeni Hali : Evli
Telefon : 0505 258 4036
E-posta : ademdemir2477@hotmail.com.tr

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Derince Lisesi	1992
Lisans	Muğla Üniversitesi	1997
Yüksek Lisans	Muğla Üniversitesi	2012

İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/görev
1998-2002	Çankırı Çardaklı Y.İ.B.O	Matematik Öğretmeni
2002-2003	İzmit Anadolu Ticaret Meslek Lisesi	Matematik Öğretmeni
2003-2006	Kocaeli Merkez Bankası Derince Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2006-	İzmit Cahit Elginkan Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni