

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ÜSTEL İNTEGRAL FONKSİYONLARIN  
DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI**

**Çağla CAN**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2012**

**Her hakkı saklıdır**

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## ÜSTEL İNTEGRAL FONKSİYONLARIN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

Çağla CAN

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezin içeriğinde incelenecek olan fonksiyonlar tanımlanmıştır. Temel teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, önce bir boyutlu, ardından da  $n$ -boyutlu uzayda parametreye bağlı genelleştirilmiş integrallerin düzgün yakınsaklık tanımı ve kriterleri verilmiştir. Önem arz eden çeşitli parametrelerdeki bir ve iki boyutlu integral fonksiyonların verilen bölgelerde düzgün yakınsaklıkları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, bahsi geçen üstel integral fonksiyonların düzgün yakınsaklıkları kullanılarak özellikleri ve asimptotik davranışları incelenmiştir.

Son bölümde ise iki boyutlu  $\varepsilon_n(\tau, \beta)$  üstel integral fonksiyonunun  $n = 1, 2, 3, 4$  olmak üzere  $\tau$  ve  $\beta$  parametrelerinin farklı değerleri için hesaplamalar yapılmıştır.

**Haziran 2012, 52 sayfa**

**Anahtar Kelimeler :** Üstel integraller, Düzgün yakınsaklık, Parametreye bağlı integraller

## ABSTRACT

Master Thesis

### UNIFORM CONVERGENCE OF THE EXPONENTIAL INTEGRAL FUNCTIONS

Çağla CAN

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is introduction.

In the second chapter, some exponential integral functions investigated in thesis have been defined. Moreover, fundamental theorems have been given.

In the third chapter, firstly on one dimensional and then on  $n$ -dimensional space definitions of uniform convergence and tests have been given for improper integrals depending on parameter.

In the fourth chapter, using the uniform convergence of these integral functions, the properties and asymptotic behaviour have been investigated.

In the last chapter, the computation has been performed for various values of  $\varepsilon_n(\tau, \beta)$  s parameters  $\tau$  and  $\beta$  for  $n = 1, 2, 3, 4$ .

**June 2012, 52 pages**

**Key Words:** Exponential functions, uniform convergence, integrals depending on a parameter

## TEŞEKKÜR

Bu konuda çalışmama imkan tanıyan ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI'ya (Ankara Üniversitesi), değerli bilgi ve önerileriyle beni yönlendiren hocam Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM'a (Ankara Üniversitesi), haftalık tez çalışmaları kapsamında birlikte olduğum ve desteklerini hiç esirgemeyen değerli hocalarım Araş. Gör. Yelda AYGAR, Yard. Doç. Dr. Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi), değerli arkadaşlarım Pembe İPEK, İbrahim ERDAL ve tez çalışmalarına başlarken bana yol gösteren arkadaşım Ekin UĞURLU'ya, bana her an destek olan çok sevgili arkadaşım Nilay ŞAHİN'e ve tezin hiçbir aşamasında yardımını esirgemeyen arkadaşım Sezgin SUCU'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatımın her aşamasında yanımda olup hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan, her an desteklerini hissettiğim çok kıymetli ailem ve S. Selen YAZGÜNOĞLU'na sonsuz minnetlerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Çağla CAN

Ankara, Haziran 2012.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
SİMGELER DİZİNİ .....	v
1. GİRİŞ .....	1
2. GENEL BİLGİLER .....	2
3. DÜZGÜN YAKINSAKLIK .....	6
3.1 $(a, w] \subset \mathbb{R}$ Aralığında Tanımlı Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerin Düzgün Yakınsaklığı .....	6
3.2 Çok Boyutlu Uzaylarda Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerin Düzgün Yakınsaklığı .....	25
4. ÜSTEL İNTEGRAL FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ	31
4.1 $G(x, y, z)$ ve $E(x, y)$ Fonksiyonlarının Özellikleri .....	31
4.2 $\varepsilon_n(\tau, \beta)$ Fonksiyonlarının Özellikleri	32
5. NÜMERİK TABLO .....	44
KAYNAKLAR .....	49
ÖZGEÇMİŞ .....	51

## SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	$n$ - boyutlu Öklid Uzayı
$U_{[a,w]}(w)$	$w$ nın $[a, w)$ aralığındaki komşuluğu
$\Rightarrow$	Düztüm yakınsaklık
$L(\mathbb{R})$	İntegrallenebilen fonksiyon uzayı
$o(1)$	Sıfıra yakınsama
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar
$\overline{D}$	$D$ nin kapanışı
$\Gamma(\alpha)$	Gama Fonksiyonu
$\hat{f}$	$f$ fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

## 1. GİRİŞ

Üstel integral fonksiyonlar teorik ve uygulamalı fiziğin çeşitli alanlarında, kuantum kimyasında ışınların taşınmasında, sıvıların yüksek akışkanlık teorisinde ve çok boyutlu ortamda ışımsal aktarımda çok önemli rollere sahiptir. Bu fonksiyonlar çok boyutlu anizotropik ortamlarda saçılım teorisinin incelenmesinde ve astrofizikte ışınların yayılma hızının hesaplanmasında da önem arz etmektedir.

Bu fonksiyonların kuvvet seri gösterimlerini Breig ve Crosbie tek boyutlu üstel integral fonksiyonların nümerik hesaplamaları için yararlı indirgeme bağıntıları vermişlerdir (1974). Amaç, genişleyen katsayılarla farklı bağıntılar kullanarak genelleştirilmiş integral fonksiyon ölçümü için doğru algoritmayı bulmaktır.

Anizotropik saçılmayla iki boyutlu düzlemsel ortamda ışımsal akıştaki temel integral bağıntı Crosbie ve Dougherty tarafından geliştirildi (1981). İki boyutlu üstel integral fonksiyon bu integralin çekirdeğini oluşturmaktadır.

Yukarıda adı geçen alanlarda yazılmış çok sayıda kitap ve makalede bu fonksiyonlar öğrenilmiştir. Ancak şimdiye kadarki çalışmalarda bu fonksiyonların matematiksel teorisi yeteri kadar öğrenilmemiştir. Bairamov ve Yardımcı çeşitli parametrelerde üstel integral fonksiyonların düzgün yakınsaklığını incelemiş ve bu fonksiyonların matematiksel özellikleri detaylı bir biçimde öğrenilmiştir (2010). Aynı zamanda üstel integral fonksiyonlara ait nümerik tablo da oluşturulmuştur (Özalp ve Bairamov 2011). Ayrıca Aygar ve Bairamov ışımsal akıştaki temel üstel integral fonksiyon olan  $\varepsilon_n$  fonksiyonunu  $n = 1, 2, 3$  için ayrıntılı bir biçimde incelemişlerdir ve bu fonksiyonların yaklaşık değerleri hesaplanarak kimya, fizik ve mühendislik alanlarında çalışanların kullanacağı hale getirilmiştir (2011).

Bu tezde, çeşitli parametrelerdeki bir ve iki boyutlu üstel integral fonksiyonların düzgün yakınsaklığı ve düzgün yakınsaklık kullanılarak da özellikleri ayrıntılı bir biçimde incelenecektir.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezin içeriğinde kullanılacak olan bazı önemli fonksiyonlar ve teoremler tanıtılacaktır.

ilk olarak kullanacağımız bazı önemli fonksiyonları tanıtalım.

### Tanım 2.1 (Gama Fonksiyonu)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx$$

integraline Gama Fonksiyonu ya da ikinci çeşit Euler integrali denir.  $x = \infty$  singüler noktasıdır ve  $0 < \alpha < 1$  için  $x = 0$  noktası da bir diğer singüler noktası olur.

### Tanım 2.2 Genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonu,

$$(x, y, z) \in \Phi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \in [0, \infty), y \in (-\infty, \infty), z \in [0, \infty)\}$$

olmak üzere;

$$G(x, y, z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_1^{\infty} \exp(-xu) u^{-y} (\ln u)^z du \quad (2.1)$$

ile tanımlanır.

### Tanım 2.3 (2.1) integralinde $z = 0$ alınırsa,

$$(x, y) \in \omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, \infty), y \in (-\infty, \infty)\}$$

olmak üzere aşağıdaki üstel integral fonksiyonu elde edilir.

$$E(x, y) = \int_1^{\infty} \exp(-xu) u^{-y} du. \quad (2.2)$$

**Tanım 2.4**

$$(\tau, \beta) \in \Omega := \{(\tau, \beta) \in \mathbb{R}^2, \tau \in [0, \infty), \beta \in (-\infty, \infty)\}$$

olmak üzere,

$$\varepsilon_1(\tau, \beta) = \int_1^{\infty} (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] dt, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_2(\tau, \beta) = \int_1^{\infty} t^{-2} \exp[-\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] dt, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_3(\tau, \beta) = \tau \int_1^{\infty} \varepsilon_2\left(\tau t, \frac{\beta}{t}\right) dt \quad (2.5)$$

fonksiyonlarını tanımlansın. Bu iki parametrelili fonksiyonların ışımmsal transfer çalışmalarında çok önemli rolleri vardır.

**Tanım 2.5**

$$(\tau, \beta) \in \Omega := \{(\tau, \beta) \in \mathbb{R}^2, \tau \in [0, \infty), \beta \in (-\infty, \infty)\}$$

ve

$$r^2 = x^2 + y^2 + \tau^2$$

olmak üzere

$$\varepsilon_n(\tau, \beta) = \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-r) / r^{n+1}] \exp(-i\beta x) dx dy \quad (2.6)$$

fonksiyonu iki boyutlu genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonudur. (2.3) – (2.4) integralleri bu fonksiyonun tek boyutlu analoglarıdır.

Şimdi, kullanacağımız teoremleri verelim.

**Teorem 2.1 (İntegraller İçin İkinci Ortalama Değer Teoremi)**  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları  $[a, b]$  aralığında integrallenebilir ve  $g(x)$  fonksiyonu aynı aralıkta monoton ise öyle bir  $\xi \in [a, b]$  vardır ki,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx$$

eşitliği gerçekleşir.

$G \subset \mathbb{R}^m$   $m$ -boyutlu bir uzayda ve  $D \subset \mathbb{R}^n$  de  $n$ -boyutlu bir uzayda ölçülebilir kümeler olsun.

$\xi \in G$  olmak üzere,

$$F(\xi) = \int_D f(\xi, \eta) d\eta \quad (2.7)$$

genelleştirilmiş integralini ele alıp aşağıdaki teoremleri verelim.

**Teorem 2.2**  $f(\xi, \eta)$  fonksiyonu,

$$G \times D := \{\xi \in G, \eta \in D\}$$

ile tanımlanan küme üzerinde sürekli ve (2.7) integrali  $\xi$  ye göre  $G$  üzerinde düzgün yakınsak ise

$$F(\xi) = \int_D f(\xi, \eta) d\eta$$

fonksiyonu  $\xi$  ye göre  $G$  üzerinde sürekli olur. Ayrıca her  $\xi_0 \in G$  için

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \int_D f(\xi, \eta) d\eta = \int_D \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} f(\xi, \eta) d\eta$$

sağlanır.

**Teorem 2.3** Teorem 2.2 nin şartları sağlanıyor ise (2.7) ile verilen  $F(\xi)$  fonksiyonu  $\xi$  ye göre  $G$  üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\int_G F(\xi) d\xi = \int_G d\xi \int_D f(\xi, \eta) d\eta = \int_D d\eta \int_G f(\xi, \eta) d\xi$$

gerçeklenir.

**Teorem 2.4**  $\xi \in [a, b]$  olmak üzere  $f(\xi, \eta)$  ve fonksiyonun kısmi türevi  $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ ,  $[a, b] \times \overline{D}$  üzerinde sürekli olsun. Ayrıca (2.7) integrali yakınsak ve

$$F_1(\xi) = \int_D \frac{\partial f}{\partial \xi} f(\xi, \eta) d\eta$$

integrali  $\xi$  ye göre düzgün yakınsak ise  $F'(\xi) = F_1(\xi)$  gerçekleşir. Yani,

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \int_D f(\xi, \eta) d\eta = \int_D \frac{\partial f}{\partial \xi} f(\xi, \eta) d\eta$$

sağlanır.

### 3. DÜZGÜN YAKINSAKLIK

#### 3.1 $[a, w) \subset \mathbb{R}$ Aralığında Tanımlı Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerin Düzgün Yakınsaklığı

$$F(y) = \int_a^w f(x, y) dx \quad (3.1)$$

genelleştirilmiş integrali her  $y \in Y$  için yakınsak olsun. (3.1) integralinin yalnızca bir tek singülerliğinin olduğunu kabul edelim. Bu singülerlik, integralin üst limit noktasını içersin. Yani  $w = \infty$  ya da  $x$  in bir fonksiyonu olan  $f$ ,  $w$  nın bir komşuluğunda sınırsızdır.

**Tanım 3.1.1** Her  $\varepsilon > 0$  için  $[a, w)$  aralığında  $w$  nın öyle bir  $U_{[a,w)}(w)$  komşuluğu bulunabilir ki,

$$\left| \int_b^w f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (3.2)$$

eşitsizliği, her  $b \in U_{[a,w)}(w)$  ve her  $y \in E \subset Y$  için sağlanıyor ise (3.1) genelleştirilmiş integrali  $E$  kümesi üzerinde  $y$  ye göre düzgün yakınsaktır denir.

(3.1) genelleştirilmiş integraline yakınsayan klasik anlamdaki integral için,

$$F_b(y) := \int_a^b f(x, y) dx \quad (3.3)$$

notasyonunu tanımlarsak  $E \subset Y$  kümesi üzerinde (3.1) integralinin düzgün yakınsaklığını şu şekilde verebiliriz.

$b \in [a, w)$  olmak üzere  $b \rightarrow w$  iken  $F_b(y) \rightrightarrows F(y)$  olmasıdır.

Yani her  $b \in U_{[a,w]}(w)$  ve her  $y \in Y$  için

$$F(y) = \int_a^w f(x, y) dx := \lim_{\substack{b \rightarrow w \\ b \in [a,w]}} \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\substack{b \rightarrow w \\ b \in [a,w]}} F_b(y)$$

olduğunu görebiliriz.

Bu nedenle (3.1) integralinin (3.2) ile gösterilen düzgün yakınsak koşulunu her  $\varepsilon > 0$ , her  $b \in U_{[a,w]}(w)$  ve her  $y \in Y$  için

$$|F(y) - F_b(y)| < \varepsilon$$

ile ifade edebiliriz.

Şimdi, parametreye bağlı genelleştirilmiş integraller için düzgün yakınsaklık testlerini inceleyelim.

**Teorem 3.1.1 (Cauchy Kriteri)** (3.1) genelleştirilmiş integralinin bir  $E \subset Y$  kümesi üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, her  $\varepsilon > 0$  için  $w$  nın öyle bir  $U_{[a,w]}(w)$  komşuluğu vardır ki her  $b_1, b_2 \in U_{[a,w]}(w)$  ve her  $y \in Y$  için,

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

**İspat**

$$F(y) = \int_a^w f(x, y) dx$$

integrali  $E \subset Y$  kümesi üzerinde düzgün yakınsak olsun.

Bu durumda  $F_b(y)$ , (3.3) ile tanımlanmak üzere, her  $b \in U_{[a,w]}(w)$ , her  $y \in Y$  için,

$$F(y) = \lim_{\substack{b \rightarrow w \\ b \in [a,w]}} F_b(y)$$

ifadesini yazabiliriz. Bu durumda,  $F_b(y)$  fonksiyonlar ailesi için tanımlı Cauchy düzgün yakınsaklık kriterinden, her  $\varepsilon > 0$  için  $w$  nın öyle bir  $U_{[a,w]}(w)$  komşuluğu vardır ki her  $b_1, b_2 \in U_{[a,w]}(w)$  ve her  $y \in Y$  için

$$|F_{b_1}(y) - F_{b_2}(y)| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Buradan,

$$\left| \int_a^{b_1} f(x, y) dx - \int_a^{b_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece her  $b_1, b_2 \in U_{[a,w]}(w)$  olmak üzere,

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

gerçeklenmiş olur.

Diğer taraftan, her  $\varepsilon > 0$ , her  $b_1, b_2 \in U_{[a,w]}(w)$  ve her  $y \in Y$  için,

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

sağlansın. Bu durumda,

$$\left| \int_a^{b_1} f(x, y) dx - \int_a^{b_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

yazabiliriz. (3.3) ifadesinden,

$$|F_{b_1}(y) - F_{b_2}(y)| < \varepsilon$$

sağlanır.

Dolayısıyla  $F_b(y)$  fonksiyonlar ailesi için tanımlı Cauchy düzgün yakınsaklık kriterinden her  $\varepsilon > 0$  için, her  $b \in U_{[a,w]}(w)$  olmak üzere her  $y \in Y$  için

$$F(y) = \lim_{\substack{b \rightarrow w \\ b \in [a,w]}} F_b(y)$$

gerçeklenir. Bu da (3.1) genelleştirilmiş integralinin bir  $E \subset Y$  kümesi üzerinde düzgün yakınsak olduğunu ispatlar.

**Teorem 3.1.2 (Weierstrass Testi)**  $f(x, y)$  ve  $\varphi(x, y)$  fonksiyonları her bir  $y \in Y$  için  $[a, b] \subset [a, w)$  kapalı aralığında  $x$  e göre integrallenebilir olsun.

Eğer

$$|f(x, y)| \leq \varphi(x, y) \quad (3.4)$$

eşitsizliği her  $y \in Y$  ve her  $x \in [a, w)$  için sağlanır ve

$$\int_a^w \varphi(x, y) dx \quad (3.5)$$

integrali  $Y$  de düzgün yakınsak olur ise

$$\int_a^w f(x, y) dx$$

integrali  $Y$  de düzgün ve her bir  $y \in Y$  için mutlak yakınsak olur.

**İspat** (3.5) integrali  $Y$  de düzgün yakınsak olduğundan her  $\varepsilon > 0$ , her  $y \in Y$  ve her  $b \in U_{[a,w]}(w)$  için,

$$\int_b^w \varphi(x, y) dx < \varepsilon \quad (3.6)$$

yazabiliriz.

(3.4) ve (3.6) eşitsizliklerinden;

$$\left| \int_b^w f(x, y) dx \right| \leq \int_b^w |f(x, y)| dx \leq \int_b^w \varphi(x, y) dx < \varepsilon$$

gerçeklenir.

Şimdi de  $g(x, y)$  ve  $\psi(x, y)$  fonksiyonları  $[a, b] \subset [a, w]$  kapalı aralığında her bir  $y \in Y$  için  $x$  e göre integrallenebilir olmak üzere Abel ve Dirichlet Testlerini inceleyelim.

**Teorem 3.1.3 (Abel Testi)**

$$\int_a^w g(x, y) dx$$

integrali  $y \in Y$  ye göre düzgün yakınsak ve  $\psi(x, y)$  fonksiyonu da her  $y \in Y$  için  $[a, w]$  aralığında  $x$  e göre monoton ve düzgün sınırlı ise

$$\int_a^w g(x, y) \psi(x, y) dx$$

integrali  $y$  ye göre düzgün yakınsak olur.

**İspat**  $g(x, y)$  ve  $\psi(x, y)$  fonksiyonları  $[b_1, b_2] \subset [a, w]$  kapalı aralığında her bir  $y \in Y$  için  $x$  e göre integrallenebilirdir. Ayrıca  $\psi(x, y)$  fonksiyonu da her  $y \in Y$  için  $[a, w]$  aralığında  $x$  e göre monoton olduğundan öyle bir  $\xi \in [b_1, b_2]$  vardır ki,

$$\int_{b_1}^{b_2} g(x, y) \psi(x, y) dx = \psi(b_1, y) \int_{b_1}^{\xi} g(x, y) dx + \psi(b_2, y) \int_{\xi}^{b_2} g(x, y) dx \quad (3.7)$$

eşitliği Teorem 2.1 den gerçekleşir.

Diğer taraftan,

$$\int_a^w g(x, y) dx$$

integrali düzgün yakınsak olduğundan Teorem 3.1.1 den her  $\varepsilon > 0$  için her  $b_1, b_2 \in U_{[a, w]}(w)$  olmak üzere her  $y \in Y$  ve her  $M \in \mathbb{R}^+$  için,

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} \psi(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

sağlanır. Buradan

$b_1 \leq \xi \leq b_2$  için

$$\left| \int_{b_1}^{\xi} g(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ ve } \left| \int_{\xi}^{b_2} g(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (3.8)$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

Ayrıca  $\psi(x, y)$  fonksiyonunun düzgün sınırlılığından her  $x \in [a, w]$  ve her  $y \in Y$  için öyle bir  $M \in \mathbb{R}^+$  sabiti vardır ki,

$$|\psi(x, y)| < M \quad (3.9)$$

sağlanır.

Şimdi (3.7) eşitliğinin her iki yanının mutlak değerini alıp (3.8) ve (3.9) eşitsizliklerini burada dikkate alalım.

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} g(x, y) \psi(x, y) dx \right| = \left| \psi(b_1, y) \int_{b_1}^{\xi} g(x, y) dx + \psi(b_2, y) \int_{\xi}^{b_2} g(x, y) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\psi(b_1, y)| \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x, y) dx \right| + |\psi(b_2, y)| \left| \int_{\xi}^{b_2} g(x, y) dx \right| \\
&\leq M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece Teorem 3.1.1 den her  $y \in Y$  için,

$$\int_a^w g(x, y) \psi(x, y) dx$$

integrali düzgün yakınsak olur.

#### **Teorem 3.1.4 (Dirichlet Testi)**

$$\int_a^b g(x, y) dx \tag{3.10}$$

integrali  $b \in [a, w)$  olmak üzere her  $y \in Y$  için düzgün sınırlı ve  $\psi(x, y)$  fonksiyonu da  $[a, w)$  aralığında her  $y$  için  $x \rightarrow w$  iken sıfıra düzgün yakınsak ise

$$\int_a^w g(x, y) \psi(x, y) dx$$

integrali  $y$  ye göre düzgün yakınsak olur.

**İspat** (3.10) integralinin düzgün sınırlılığından her  $b \in [a, w)$ , her  $y \in Y$  için öyle bir  $M > 0$  sabiti vardır ki,

$$\left| \int_a^b g(x, y) dx \right| < M$$

eşitsizliği sağlanır.

Dolayısıyla her  $b_1, \xi \geq a$  için,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{b_1}^{\xi} g(x, y) dx \right| &= \left| \int_a^{\xi} g(x, y) dx - \int_a^{b_1} g(x, y) dx \right| \\
&\leq \left| \int_a^{\xi} g(x, y) dx \right| + \left| \int_a^{b_1} g(x, y) dx \right| \\
&\leq M + M \\
&= 2M
\end{aligned} \tag{3.11}$$

gerçeklenir.

Aynı şekilde her  $b_2, \xi \geq a$  için,

$$\left| \int_{\xi}^{b_2} g(x, y) dx \right| \leq 2M \tag{3.12}$$

yazabiliriz.

Her  $x \in [a, w)$  olmak üzere  $x \rightarrow w$  iken  $\psi(x, y)$  fonksiyonu sıfıra düzgün yakınsak olduğundan, her  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $x_0$  vardır ki  $x \geq x_0$  koşulunu sağlayan her  $x$  için ve her  $M \in \mathbb{R}^+$  için

$$|\psi(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

eşitsizliği sağlar.

Dolayısıyla  $b_1, b_2 > x_0$  için,

$$|\psi(b_1, y)| < \frac{\varepsilon}{4M} \text{ ve } |\psi(b_2, y)| < \frac{\varepsilon}{4M} \tag{3.13}$$

yazabiliriz.

(3.7) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değerini alıp (3.11)-(3.13) eşitsizliklerini burada dikkate alalım.

Her  $b_1, b_2 > x_0$  için,

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} g(x, y) \psi(x, y) dx \right| = \left| \psi(b_1, y) \int_{b_1}^{\xi} g(x, y) dx + \psi(b_2, y) \int_{\xi}^{b_2} g(x, y) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\psi(b_1, y)| \left| \int_{b_1}^{\xi} g(x, y) dx \right| + |\psi(b_2, y)| \left| \int_{\xi}^{b_2} g(x, y) dx \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4M} 2M + \frac{\varepsilon}{4M} 2M \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

sağlanır.

Dolayısıyla Teorem 3.1.1 den her  $y \in Y$  için,

$$\int_a^w g(x, y) \psi(x, y) dx$$

integrali düzgün yakınsak olur. Bu da ispatı tamamlar.

2. bölümde tanıtılan fonksiyonların düzgün yakınsaklığını vermeden önce Teorem 3.1.2, Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4 ü  $[1, \infty)$  aralığında ve  $n$  parametreye genişleterek vermemiz yararlı olacaktır.

$x \in [1, \infty)$  ve  $y \in K \subset \mathbb{R}^n$  olmak üzere,

$$\int_1^{\infty} f(x, y) dx \tag{3.14}$$

genelleştirilmiş integralini tanımlayalım.

**Teorem 3.1.5**  $\varphi(x)$  fonksiyonu,  $[1, \infty)$  aralığında integrallenebilen, negatif olmayan bir fonksiyon ve her  $x \in [1, \infty)$ ,  $y \in K \subset \mathbb{R}^n$  için

$$|f(x, y)| \leq \varphi(x)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise (3.14) integrali  $y$  ye göre  $K$  da düzgün yakınsak olur.

**Teorem 3.1.6**

$$\int_1^{\infty} g(x, y) dx$$

integrali  $y \in K$  ye göre düzgün yakınsak ve  $\psi(x, y)$  fonksiyonu da her  $y \in K$  için  $[1, \infty)$  aralığında  $x$  e göre düzgün sınırlı ve negatif olmayan bir fonksiyon ise

$$\int_1^{\infty} g(x, y) \psi(x, y) dx$$

integrali  $y$  ye göre düzgün yakınsak olur.

**Teorem 3.1.7**  $t \in [1, \infty)$  olmak üzere,

$$\int_1^t g(x, y) dx$$

integrali her  $y \in K$  için düzgün sınırlı ve  $\psi(x, y)$  fonksiyonu da  $[1, \infty)$  aralığında her  $y$  için  $x \rightarrow \infty$  iken sıfıra düzgün yakınsak olsun. Aynı zamanda  $g, \psi, \partial\psi/\partial x$  fonksiyonları  $[1, \infty)$  aralığında  $x$  e göre sürekli ise

$$\int_1^{\infty} g(x, y) \psi(x, y) dx$$

integrali  $y$  ye göre düzgün yakınsak olur.

Şimdi de (2.1) ile verilen Genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonunun ve (2.2) ile verilen Üstel integral fonksiyonunun verilen bölgelerde düzgün yakınsaklıklarını inceleyelim.

Her  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  ve  $a > 0$  olmak üzere,

$$\Phi(\varepsilon, a) = \{(x, y, z) \in \Phi, x \in [\varepsilon, \infty), y \in (-\infty, \infty), z \in [0, a], y - z \geq 1\},$$

$$D(a, \delta) = \{(x, y, z) \in \Phi, x \in [0, \infty), y \in (-\infty, \infty), z \in [0, a], y - z \geq 1 + \delta\}$$

tanım kümelerini verelim.

**Teorem 3.1.8** (2.1) Genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonu  $\Phi(\varepsilon, a)$  ve  $D(a, \delta)$  bölgeleri üzerinde  $(x, y, z)$  ye göre düzgün yakınsaktır.

**İspat**

$$I(x, y, z) = \int_1^{\infty} e^{-xu} u^{-y} (\ln u)^z du \quad (3.15)$$

ile tanımlanmak üzere genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonunu,

$$G(x, y, z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} I(x, y, z)$$

ile gösterelim. Öncelikle,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \quad (3.16)$$

Gama Fonksiyonunun  $[0, a]$  üzerinde  $z$  ye göre düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. Fonksiyonu aşağıdaki gibi yazıp  $\varphi_1$  ve  $\varphi_2$  fonksiyonlarını tanımlayalım.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^1 t^z e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^z e^{-t} dt = \varphi_1(z+1) + \varphi_2(z+1).$$

$z_0$  sabitlenmiş keyfi negatif olmayan bir sayı olmak üzere her  $z+1 \geq z_0+1 > 0$  için,

$$t^z e^{-t} \leq t^{z_0} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

ve

$$\int_0^1 t^{z_0} dt < \infty$$

sağlandığından Weierstrass testinden ilk integral düzgün yakınsak olur.

$z_0$  keyfi bir sayı olmak üzere  $z \leq z_0$  için;

$$t^z e^{-t} \leq t^{z_0} e^{-t} \quad (1 \leq t \leq \infty)$$

ve

$$\int_1^{\infty} t^{z_0} e^{-t} dt < \infty$$

sağlanır.

Dolayısıyla her  $z \leq z_0$  için ikinci integral de düzgün yakınsak olur.

Şimdi de (3.15) ile verilen  $I(x, y, z)$  fonksiyonunun düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

$$\ln(1 + v) \leq v, \quad v \in [0, \infty)$$

eşitsizliğini kullanarak,

$$\ln u = \ln[1 + (u - 1)] \leq u - 1 < u, \quad u \in [1, \infty) \quad (3.17)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(3.15) ve (3.17) den,

$$I_0(x, y, z) = \int_1^{\infty} e^{-xu} u^{z-y} du \quad (3.18)$$

olmak üzere,

$$I(x, y, z) \leq I_0(x, y, z) \quad (3.19)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi (3.18) integralinin  $\Phi(\varepsilon, a)$  ve  $D(a, \delta)$  bölgeleri üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösterelim.

*i.*  $(x, y, z) \in \Phi(\varepsilon, a)$  olmak üzere,

$$f(u, x, y, z) = e^{-(x/2)u} u^{z-y} \quad \text{ve} \quad g(u, x, y, z) = e^{-(x/2)u}$$

fonksiyonlarını ele alalım.

$f, g, \partial g/\partial u$  fonksiyonları  $u$  ya göre  $[1, \infty)$  aralığında sürekli fonksiyonlardır.

Ayrıca  $(x, y, z) \in \Phi(\varepsilon, a)$  için,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} g(u, x, y, z) = \lim_{u \rightarrow \infty} e^{-(x/2)u} = 0$$

sağlanır.  $u \rightarrow \infty$  iken  $g(u, x, y, z)$  fonksiyonu düzgün olarak sıfıra gider.

$t \in [1, \infty)$ ,  $(x, y, z) \in \Phi(\varepsilon, a)$  olmak üzere,

$$F(t, x, y, z) := \int_1^t f(u, x, y, z) du = \int_1^t e^{-(x/2)u} u^{z-y} du$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\begin{aligned} F(t, x, y, z) &= \int_1^t e^{-(x/2)u} u^{z-y} du \leq \int_1^{\infty} e^{-(x/2)u} u^{z-y} du \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{y-z-1} \int_{x/2}^{\infty} w^{z-y} e^{-w} dw \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{y-z-1} \Gamma(z-y-1) < \infty \end{aligned}$$

sağlandığından  $F(t, x, y, z)$  her  $t \in [1, \infty)$ ,  $(x, y, z) \in \Phi(\varepsilon, a)$  için düzgün sınırlı olur.

O halde Teorem 3.1.7 den

$$I_0(x, y, z) = \int_1^{\infty} f(u, x, y, z) g(u, x, y, z) du = \int_1^{\infty} e^{-xu} u^{z-y} du$$

fonksiyonu  $(x, y, z)$  ye göre  $\Phi(\varepsilon, a)$  bölgesi üzerinde düzgün yakınsak olur.

ii.  $(x, y, z) \in D(a, \delta)$  olmak üzere,

$$e^{-xu} u^{z-y} \leq \frac{1}{u^{1+\delta}} \quad \text{ve} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{u^{1+\delta}} du < \infty$$

sağlanır. Teorem 3.1.5 Weierstrass Testinden (3.18) integrali  $D(a, \delta)$  üzerinde  $(x, y, z)$  ye göre düzgün yakınsak olur.

Böylece (3.16) ve (3.19) dan genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonu  $(x, y, z)$  ye göre  $\Phi(\varepsilon, a)$  ve  $D(a, \delta)$  bölgelerinde düzgün yakınsak olur. İspat tamamlanır.

Her  $a > 0$  olmak üzere  $\Phi$  üzerinde aşağıdaki bölgeyi tanımlayalım;

$$\Phi(a) = \{(x, y, z) \in \Phi, x \in [0, \infty), y \in (-\infty, 1), z \in [0, a]\}$$

**Teorem 3.1.9** (2.1) Genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonu  $(x, y, z)$  ye göre  $\Phi(a)$  bölgesinde düzgün yakınsak değildir.

**İspat**  $(x, y, z) \in \Phi(a)$  olmak üzere,

$$G_1(x, y, z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_1^e e^{-xu} u^{-y} (\ln u)^z du$$

$$G_2(x, y, z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_e^\infty e^{-xu} u^{-y} (\ln u)^z du$$

fonksiyonlarını tanımlarsak,

$$G(x, y, z) = G_1(x, y, z) + G_2(x, y, z)$$

eşitliği sağlanır.

$G_1(x, y, z)$ , Riemann integrali;  $G_2(x, y, z)$  ise genelleştirilmiş integralidir.

$G_2(x, y, z)$  integralinin düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

$$G_2(x, y, z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_e^\infty e^{-xu} u^{-y} (\ln u)^z du$$

$$\geq \frac{1}{\Gamma(z+1)} (\ln e)^z \int_e^\infty e^{-xu} u^{-y} du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_e^\infty e^{-xu} u^{-y} du \\
&= \frac{1}{x^{1-y} \Gamma(z+1)} \int_{ex}^\infty t^{-y} e^{-t} dt \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow 0
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla  $G_2(x, y, z)$  integrali ıraksak olduğundan (2.1) Genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonu,  $\Omega(a)$  bölgesi üzerinde  $(x, y, z)$  ye göre düzgün yakınsak değildir. Böylece ispat tamamlanır.

$\varepsilon > 0$  ve  $\delta > 0$  için aşağıdaki bölgeleri tanımlayalım;

$$\begin{aligned}
\omega(\varepsilon) &= \{(x, y) \in \omega, x \in [\varepsilon, \infty), y \in (-\infty, 1)\}, \\
d(\delta) &= \{(x, y) \in \omega, x \in [0, \infty), y \in [1 + \delta, \infty)\}.
\end{aligned}$$

**Teorem 3.1.10** (2.2) ile verilen üstel integral fonksiyonu  $\omega(\varepsilon)$  ve  $d(\delta)$  bölgeleri üzerinde  $(x, y)$  ye göre düzgün yakınsaktır.

**İspat**  $E(x, y)$  üstel integral fonksiyonunun öncelikle  $\omega(\varepsilon)$  bölgesinde düzgün yakınsaklığını araştıralım.

$$g(u, x, y) = \exp[-(x/2)u] u^{-y} \quad \text{ve} \quad \psi(u, x, y) = \exp[-(x/2)u]$$

fonksiyonlarını ele alırsak  $E(x, y)$  fonksiyonunu şu şekilde yazabiliriz:

$$E(x, y) = \int_1^\infty g(u, x, y) \psi(u, x, y) du.$$

$g, \psi, \partial\psi/\partial u$  fonksiyonlarının  $u$  ya göre sürekli olduğu açıktır. Ayrıca,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u, x, y) = \lim_{u \rightarrow \infty} \exp[-(x/2)u] = 0$$

gerçeklenir. Yani  $u \rightarrow \infty$  iken  $\psi(u, x, y)$  fonksiyonu düzgün olarak sifıra gider.

$t \in [1, \infty)$  ve  $(x, y) \in \omega(\varepsilon)$  olmak üzere,

$$G(u, x, y) := \int_1^t g(u, x, y) du = \int_1^t \exp[-(x/2)u] u^{-y} du$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\begin{aligned} G(u, x, y) &= \int_1^t \exp[-(x/2)u] u^{-y} du < \int_1^\infty \exp[-(x/2)u] u^{-y} du \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{y-1} \int_{x/2}^\infty w^{-y} \exp(-w) dw \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{y-1} \Gamma(1-y) < \infty \end{aligned}$$

gerçeklendiği görülür. Bu da  $G(u, x, y)$  fonksiyonunun  $t \in [1, \infty)$ ,  $(x, y) \in \omega(\varepsilon)$  için sınırlı olduğunu gösterir. Teorem 3.1.7 den  $E(x, y)$  fonksiyonu  $(x, y)$  ye göre  $\omega(\varepsilon)$  bölgesinde düzgün yakınsak olur.

Şimdi de  $E(x, y)$  fonksiyonunun  $(x, y)$  ye göre  $d(\delta)$  bölgesinde düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

$(x, y) \in d(\delta)$  ve  $u \in [1, \infty)$  için,

$$\exp(-xu) u^{-y} \leq u^{-(1+\delta)}$$

ve

$$\int_1^\infty u^{-(1+\delta)} du < \infty$$

gerçeklenir. Teorem 3.1.5 Weierstrass testinden  $E(x, y)$  fonksiyonunun  $(x, y)$  ye göre  $d(\delta)$  üzerinde düzgün yakınsak olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

$\Omega = \{(\tau, \beta) \in \mathbb{R}^2, \tau \in [0, \infty), \beta \in (-\infty, \infty)\}$  olmak üzere,

$\Omega(\varepsilon) = \{(\tau, \beta) \in \Omega, \tau \in [\varepsilon, \infty), \beta \in (-\infty, \infty)\}$

bölgelerini tanımlayalım.

**Teorem 3.1.11** *i)* (2.3) ile verilen iki parametrelü üstel integral fonksiyon  $\varepsilon_1(\tau, \beta)$ ,  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega(\varepsilon)$  bölgesi üzerinde düzgün yakınsaktır.  
*ii)*  $\varepsilon_1(\tau, \beta)$ ,  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega$  bölgesi üzerinde düzgün yakınsak değildir.

**İspat** *i)*

$$g(t, \tau, \beta) = \exp[-\tau(t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}], \quad \psi(t, \tau, \beta) = (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

fonksiyonlarını tanımlarsak,

$$\varepsilon_1(\tau, \beta) = \int_1^{\infty} g(t, \tau, \beta) \psi(\tau, \beta, t) dt \quad (3.20)$$

sağlanır.

$$g(t, \tau, \beta) \leq \exp(-\varepsilon t), \quad (\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon), \quad t \in [1, \infty)$$

ve her  $\varepsilon > 0$  için,

$$\int_1^{\infty} \exp(-\varepsilon t) dt = \varepsilon^{-1} \exp(-\varepsilon) < \infty$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$\int_1^{\infty} g(t, \tau, \beta) dt \quad (3.21)$$

integrali Teorem 3.1.5 den  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega(\varepsilon)$  üzerinde düzgün yakınsaktır.

Ayrıca  $(\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon)$ ,  $t \in [1, \infty)$  için,

$$|\psi(t, \tau, \beta)| = (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \leq 1 \quad (3.22)$$

sağlandığından  $\psi(t, \tau, \beta)$  fonksiyonu düzgün sınırlıdır. (3.21), (3.22) ifadeleri Teorem 3.1.6 da düşünülürse (3.20) integralinin  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega(\varepsilon)$  bölgesi üzerinde düzgün yakınsak olduğu görülür.

i) Her  $(\tau, \beta) \in \Omega$  için  $\varepsilon_1(\tau, \beta)$  integralinde  $\tau(t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} = u$  değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(\tau, \beta) &= \int_{\tau(1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} (u^2 - \tau^2\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \exp(-u) du \\ &\geq \int_{\tau(1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} u^{-1} \exp(-u) du \rightarrow \infty, \quad \tau \rightarrow 0\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\varepsilon_1(\tau, \beta)$  fonksiyonu,  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega$  üzerinde düzgün yakınsak değildir.

**Teorem 3.1.12** (2.4) ile verilen  $\varepsilon_2(\tau, \beta)$  fonksiyonu,  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega$  bölgesi üzerinde düzgün yakınsaktır.

**İspat**  $(\tau, \beta) \in \Omega$  olmak üzere açıkça görülebilir ki,

$$t^{-2} \exp[-\tau(t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] \leq t^{-2}$$

ve

$$\int_1^{\infty} t^{-2} dt = 1$$

sağlanır. Teorem 3.1.5 den  $\varepsilon_2(\tau, \beta)$  integralinin  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega$  bölgesi üzerinde düzgün yakınsak olduğu görülür.

**Teorem 3.1.13** i) (2.5) ile verilen  $\varepsilon_3(\tau, \beta)$  fonksiyonu,  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega(\varepsilon)$  bölgesi üzerinde düzgün yakınsaktır.

ii)  $\varepsilon_3(\tau, \beta)$ ,  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega$  bölgesi üzerinde düzgün yakınsak değildir.

**İspat** i)

$$J(\tau, \beta) = \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} s^{-2} \exp[-\tau(t^2 s^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] ds dt \quad (3.23)$$

ile tanımlanmak üzere,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3(\tau, \beta) &= \tau \int_1^{\infty} \varepsilon_2\left(\tau t, \frac{\beta}{t}\right) dt \\
&= \tau \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} s^{-2} \exp[-\tau (t^2 s^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] ds dt \\
&= \tau J(\tau, \beta)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

olduğu açıkça görülür. Ayrıca her  $(\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon)$  için,

$$s^{-2} \exp[-\tau (t^2 s^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] \leq s^{-2} \exp(-\varepsilon t s) \tag{3.25}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} s^{-2} \exp(-\varepsilon t s) ds dt &= \int_1^{\infty} s^{-2} \left\{ \int_1^{\infty} \exp(-\varepsilon t s) dt \right\} ds \\
&= \int_1^{\infty} s^{-3} \varepsilon^{-1} \exp(-\varepsilon s) ds \leq \varepsilon^{-1} \exp(-\varepsilon) \int_1^{\infty} s^{-3} ds \\
&= 2^{-1} \varepsilon^{-1} \exp(-\varepsilon)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.23)-(3.25) ve Weierstrass testinden  $\varepsilon_3(\tau, \beta)$  fonksiyonunun  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega(\varepsilon)$  üzerinde düzgün yakınsak olduğu görülür.

ii)  $(\tau, \beta) \in \Omega$  olmak üzere,

$$J(\tau, \beta) = \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} s^{-2} \exp[-\tau (t^2 s^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] ds dt$$

integralinde  $(t^2 s^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} = u$  değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$J(\tau, \beta) = \int_1^{\infty} s^{-2} \left\{ \int_{(s^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} s^{-1} (u^2 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} u \exp(-\tau u) du \right\} ds$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_1^{\infty} s^{-3} \left\{ \int_{(s^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} \exp(-\tau u) du \right\} ds \\
&= \int_1^{\infty} s^{-3} \tau^{-1} \exp[-\tau (s^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] ds \\
&= \tau^{-1} \int_1^{\infty} s^{-3} \exp[-\tau (s^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] ds \rightarrow \infty, \quad \tau \rightarrow 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

### 3.2 Çok Boyutlu Uzaylarda Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegral-lerin Düzgün Yakınsaklığı

Çok boyutlu uzaylarda düzgün yakınsaklığı incelemeden önce (2.7) ile verilen parametreye bağlı genelleştirilmiş integrali tanıyalım.

$G \subset \mathbb{R}^m$  m -boyutlu bir uzayda ve  $D \subset \mathbb{R}^n$  de n-boyutlu bir uzayda ölçülebilir kümeler olsun.

$\xi \in G$  olmak üzere,

$$F(\xi) = \int_D f(\xi, \eta) d\eta \quad (3.19)$$

genelleştirilmiş integralinin tek singülerliği  $\eta_0$  noktasında olsun.

$\omega_\delta$ , merkezi  $\eta_0 \in \overline{D}$  noktası ve yarıçapı  $\delta$  olan bir açık yuvar olarak tanımlanmak üzere,  $\eta$  nin bir fonksiyonu olan  $f(\xi, \eta)$   $D$  bölgesinde sınırsız;  $\delta > 0$  olmak üzere  $D - \omega_\delta$  bölgesinde de sınırlı ve integrallenebilirdir.

**Tanım 3.2.1** Eğer (2.7) integrali her  $\xi \in G$  için yakınsak ve eğer  $D_{\omega_\delta} = D \cap \omega_\delta$  olmak üzere her  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $\delta_0 > 0$  vardır ki  $0 < \delta < \delta_0$  koşulunu sağlayan her  $\delta$  için

$$\left| \int_{D_{\omega_\delta}} f(\xi, \eta) d\eta \right| < \varepsilon \quad (3.26)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, (2.7) integrali  $\xi$  ye göre düzgün yakınsaktır denir.

$\delta > 0$  olmak üzere singülerliği olmayan

$$F_\delta(\xi) = \int_{D-\omega_\delta} f(\xi, \eta) d\eta$$

integralini alalım.

Buradan (3.26) eşitsizliğini şu şekilde yazabiliriz:

$$|F(\xi) - F_\delta(\xi)| = \left| \int_{D\omega_\delta} f(\xi, \eta) d\eta \right| < \varepsilon$$

Böylece görüyoruz ki her  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $\delta_0$  vardır ki  $0 < \delta < \delta_0$  eşitsizliğini sağlayan her  $\delta$  ve her  $\xi \in G$  için

$$|F(\xi) - F_\delta(\xi)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlar.

Yani son eşitsizlikten  $F_\delta(\xi)$  fonksiyonunu  $G$  de  $F(\xi)$  fonksiyonuna düzgün bir şekilde yakınsamasını

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} F_\delta(\xi) = F(\xi) \quad (3.27)$$

ile gösterebiliriz.

O halde (3.27) ifadesi (3.26) yı içerdiğinden, (2.7) integralinin düzgün yakınsaklık tanımına karşılık verilebilir.

**Teorem 3.2.1 (Weierstrass Testi)** Her  $\xi \in G$  için (2.7) integralinin tek singülerliği  $\eta_0 \in \bar{D}$  noktasında olsun.  $\varphi(\eta)$  negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere  $(\xi, \eta) \in \bar{G} \times \bar{D}$  için,

$$|f(\xi, \eta)| \leq \varphi(\eta) \quad (3.28)$$

eşitsizliği sağlansın Ayrıca  $\eta_0$  da singülerliği olan

$$\int_D \varphi(\eta) d\eta \quad (3.29)$$

genelleştirilmiş integrali yakınsak olsun.

Bu durumda (2.7) genelleştirilmiş integrali  $\xi$  ye göre düzgün yakınsak olur.

**İspat** (3.29) integrali yakınsak olduğundan her  $\varepsilon > 0$  için  $0 < \delta < \delta_0$  eşitsizliğini sağlayan öyle bir  $\delta_0 > 0$  vardır ki,

$$\int_{D_{\omega_\delta}} \varphi(\eta) d\eta < \varepsilon \quad (3.30)$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylece (3.28) ve (3.30) ifadelerinden,

$$\left| \int_{D_{\omega_\delta}} f(\xi, \eta) d\eta \right| \leq \int_{D_{\omega_\delta}} |f(\xi, \eta)| dy \leq \int_{D_{\omega_\delta}} \varphi(\eta) d\eta < \varepsilon$$

sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi de çok boyutlu uzayda, sınırsız bölge üzerinde tanımlı parametreye bağlı genelleştirilmiş integraller için düzgün yakınsaklığı inceleyelim.

Sınırsız  $D$  bölgesi üzerinde alınan genelleştirilmiş integrali

$$F(\xi) = \int_D f(\xi, \eta) d\eta \quad (3.31)$$

ile gösterelim. Her  $\xi \in G$  için (3.31) integralinin tek singülerliği sonsuzlukta olsun.

**Tanım 3.2.2**  $\omega_R$ , merkezi orijin; yarıçapı  $R$  olan yuvar olarak tanımlansın. (3.31) integrali her  $\xi \in G$  için yakınsak ise ve her  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $R_0$  sayısı vardır ki

$R > R_0$  eşitsizliğini sağlayan her  $R$  için,

$$\int_{D-\omega_R} f(\xi, \eta) d\eta < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (3.31) integrali  $\xi \in G$  ye göre düzgün yakınsaktır denir.

**Teorem 3.2.2 (Weierstrass Testi)**  $\varphi(\eta)$ , her  $(\xi, \eta) \in G \times D$  için

$$|f(\xi, \eta)| \leq \varphi(\eta) \quad (3.32)$$

eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$\int_D \varphi(\eta) d\eta < \varepsilon \quad (3.33)$$

genelleştirilmiş integrali yakınsak ise (3.31) integrali her  $\xi$  ye göre düzgün yakınsak olur.

**İspat**  $\omega_R$ , merkezi orijin, yarıçapı  $R$  olan yuvar olmak üzere (3.33) integralinin yakınsaklığından her  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $R_0$  sayısı vardır ki  $R > R_0$  eşitsizliğini sağlayan her  $R$  için,

$$\int_{D-\omega_R} \varphi(\eta) d\eta < \varepsilon \quad (3.34)$$

sağlanır. Böylece (3.32) ve (3.34) ifadelerinden,

$$\left| \int_{D-\omega_R} f(\xi, \eta) dy \right| < \int_{D-\omega_R} |f(\xi, \eta)| d\eta < \int_{D-\omega_R} \varphi(\eta) d\eta < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da (3.31) integralinin düzgün yakınsaklığını verir.

$$\Omega = \{(\tau, \beta) \in \mathbb{R}^2, \tau \in [0, \infty), \beta \in (-\infty, \infty)\},$$

olmak üzere,

$$\Omega(\varepsilon) = \{(\tau, \beta) \in \Omega, \tau \in [\varepsilon, \infty), \beta \in (-\infty, \infty)\}.$$

bölgelerini tekrar tanımlayalım.

**Teorem 3.2.3** *i)* (2.6) ile verilen  $\varepsilon_n(\tau, \beta)$  fonksiyonu  $\Omega(\varepsilon)$  bölgesi üzerinde düzgün yakınsaktır.

*ii)*  $\varepsilon_n(\tau, \beta)$  fonksiyonu  $\Omega$  bölgesi üzerinde düzgün yakınsak değildir.

**İspat** *i)*

$$g(x, y, \tau, \beta) = \left[ \exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2 + \tau^2}\right) / \left(\sqrt{x^2 + y^2 + \tau^2}\right)^{n+1} \right] \exp(-i\beta x)$$

fonksiyonunu tanımlarsak,

$$\varepsilon_n(\tau, \beta) = \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, \tau, \beta) dx dy$$

olduğunu görürüz. Her  $\varepsilon > 0$  için,

$$|g(x, y, \tau, \beta)| \leq \exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2}\right) / \varepsilon^n \sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2} \quad (3.35)$$

sağlanır.

$$\varepsilon^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2}\right) / \sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2} dx dy$$

integralinde  $x^2 + y^2 = r_*^2$  olarak kutupsal koordinatlara geçelim.

Böylece,

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\sqrt{r_*^2 + \varepsilon^2}\right) r_* / \sqrt{r_*^2 + \varepsilon^2} dr_* d\theta \\ &= 2\pi \varepsilon^{-n} \exp(-\varepsilon) < \infty \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir. (3.35) ve (3.36) yı Teorem 3.2.2 de düşünürsek  $\varepsilon_n(\tau, \beta)$  fonksiyonunun  $\Omega(\varepsilon)$  bölgesi üzerinde düzgün yakınsak olduğunu görürüz.

ii) Her  $(\tau, \beta) \in \Omega$  için,

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\tau, \beta) &= \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-r) / r^{n+1}] \exp(-i\beta x) dx dy \\ &> -\frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-r) / r^{n+1} dx dy \end{aligned}$$

sağlanır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-r) / r^{n+1} dx dy$$

integralini ele alalım.

$$\varphi(x, y, \tau) = \exp(-r), \quad (r^2 = x^2 + y^2 + \tau^2)$$

olmak üzere,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, \tau) / r^{n+1} dx dy$$

yazabiliriz.

Orijin etrafında  $|\varphi(x, y, \tau)| > \frac{|\varphi(0,0,\tau)|}{2} = \frac{\exp(-\tau)}{2} > 0$  eşitsizliğini sağlayan öyle küçük bir  $\omega$  diski vardır ki,

$$\begin{aligned}
\left| \iint_{\omega} \varphi(x, y, \tau) / r^{n+1} dx dy \right| &= \iint_{\omega} |\varphi(x, y, \tau)| / r^{n+1} dx dy \\
&> \frac{\exp(-\tau)}{2} \iint_{\omega} 1 / r^{n+1} dx dy \rightarrow \infty, \quad \tau \rightarrow 0
\end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla  $\varepsilon_n(\tau, \beta)$ ,  $\Omega$  üzerinde düzgün yakınsak değildir.

## 4. ÜSTEL İNTEGRAL FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

### 4.1 $G(x, y, z)$ ve $E(x, y)$ Fonksiyonlarının Özellikleri

Teorem 3.1.8, Teorem 3.1.10 ve Teorem 2.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.1.1** *i*)  $G(x, y, z)$  fonksiyonu  $(x, y, z)$  ye göre  $\Phi(\varepsilon, a)$  ve  $D(a, \delta)$  bölgelerinde süreklidir.

*ii*)  $E(x, y)$  fonksiyonu  $(x, y)$  ye göre  $\omega(\varepsilon)$  ve  $d(\delta)$  bölgeleri üzerinde süreklidir.

**Teorem 4.1.2**  $G(x, y, z)$  fonksiyonu aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

$$G(x, y, z) = o(1), \quad (x, y, z) \in \Phi(\varepsilon, a), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

$$G(x, y, z) = o(1), \quad (x, y, z) \in D(a, \delta), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

$$G(x, y, z) = o(1), \quad (x, y, z) \in D(a, \delta), \quad y \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

**İspat**  $(x, y, z) \in \Phi(\varepsilon, a)$  için,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x, y, z) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_1^{\infty} e^{-xu} u^{-y} (\ln u)^z du$$

yararlanarak, Teorem 3.1.8 ve Teorem 2.2 den,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x, y, z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_1^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-xu} u^{-y} (\ln u)^z du = 0$$

elde edilir. Böylece (4.1) gerçekleşmiş olur.

Buradan (4.2) ve (4.3) eşitlikleri de açıkça görülebilir.

**Teorem 4.1.3**  $E(x, y)$  fonksiyonu aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

$$E(x, y) = o(1), \quad (x, y) \in \omega(\varepsilon), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

$$E(x, y) = o(1), \quad (x, y) \in d(\delta), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

$$E(x, y) = o(1), \quad (x, y) \in d(\delta), \quad y \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

**İspat**  $(x, y) \in \omega(\varepsilon)$  için Teorem 3.1.10 ve Teorem 2.2 den yararlanarak,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} E(x, y) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} e^{-xu} u^{-y} du \\ &= \int_1^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-xu} u^{-y} du = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.  $(x, y) \in \omega(\varepsilon)$  için (4.4) gerçekleşir.

$(x, y) \in d(\delta)$  için (4.5) ve (4.6) eşitlikleri de benzer şekilde açıkça görülebilir.

## 4.2 $\varepsilon_n(\tau, \beta)$ Fonksiyonlarının Özellikleri

Teorem 3.1.11, Teorem 3.1.12, Teorem 3.1.13 ve Teorem 2.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.2.1** *i)*  $\varepsilon_1(\tau, \beta)$  ve  $\varepsilon_3(\tau, \beta)$  fonksiyonları  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega(\varepsilon)$  bölgesi üzerinde süreklidir.

*ii)*  $\varepsilon_2(\tau, \beta)$  fonksiyonu  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega$  bölgesi üzerinde süreklidir.

**Teorem 4.2.1**  $\varepsilon_1(\tau, \beta)$ ,  $\varepsilon_2(\tau, \beta)$  ve  $\varepsilon_3(\tau, \beta)$  fonksiyonları aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

$$\varepsilon_1(\tau, \beta) = o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (1)$$

$$\varepsilon_1(\tau, \beta) = o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon), \quad \beta \rightarrow \pm\infty. \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_1(\tau, \beta) = E_1(\tau) + o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon), \quad \beta \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2(\tau, \beta) &= o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega, \quad \tau \rightarrow \infty. \\
\varepsilon_2(\tau, \beta) &= o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega, \quad \beta \rightarrow \pm\infty. \\
\varepsilon_2(\tau, \beta) &= E_2(\tau) + o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega, \quad \beta \rightarrow 0. \\
\varepsilon_2(\tau, \beta) &= 1 + o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega, \quad \tau \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3(\tau, \beta) &= o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon), \quad \tau \rightarrow \infty. \\
\varepsilon_3(\tau, \beta) &= o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon), \quad \beta \rightarrow \pm\infty. \\
\varepsilon_3(\tau, \beta) &= E_3(\tau) + o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon), \quad \beta \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

**İspat** *i*) Teorem 3.1.11 ve Teorem 2.2 den yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varepsilon_1(\tau, \beta) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] dt \\
&= \int_1^{\infty} (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp[-\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] dt = 0
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla (4.7) gerçeklenir.

Benzer şekilde (4.8) eşitliğini de gerçekleyebiliriz. Teorem 3.1.11 ve Teorem 2.2 den yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow \pm\infty} \varepsilon_1(\tau, \beta) &= \lim_{\beta \rightarrow \pm\infty} \int_1^{\infty} (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] dt \\
&= \int_1^{\infty} \lim_{\beta \rightarrow \pm\infty} (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] dt = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi (4.9) eşitliğini ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(\tau, \beta) - E_1(\tau) &= \int_1^{\infty} (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}] dt \\
&\quad - \int_1^{\infty} t^{-1} \exp(-\tau t) dt \\
&= \int_1^{\infty} \left[ (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} - t^{-1} \right] \exp \left[ -\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \right] dt \\
&\quad + \int_1^{\infty} t^{-1} \left\{ \exp \left[ -\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \right] - \exp(-\tau t) \right\} dt \\
&= I_1(\tau, \beta) + I_2(\tau, \beta)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
I_1(\tau, \beta) &= \int_1^{\infty} \left[ (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} - t^{-1} \right] \exp \left[ -\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \right] dt \\
&= \int_1^{\infty} g_1(t, \tau, \beta) dt
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
I_2(\tau, \beta) &= \int_1^{\infty} t^{-1} \left\{ \exp \left[ -\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \right] - \exp(-\tau t) \right\} dt \\
&= \int_1^{\infty} g_2(t, \tau, \beta) dt
\end{aligned} \tag{4.12}$$

olmak üzere  $g_1(t, \tau, \beta)$  ve  $g_2(t, \tau, \beta)$  fonksiyonlarını tanımlayalım.

Her  $(\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon)$  için,

$$\begin{aligned}
|g_1(t, \tau, \beta)| &= \left| (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} - t^{-1} \right| \exp \left[ -\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\leq \left[ (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} - t^{-1} \right] \exp(-\varepsilon t) \\
&\leq 2 \exp(-\varepsilon t)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |g_2(t, \tau, \beta)| &= |t^{-1}| \left| \exp \left[ -\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \right] - \exp(-\tau t) \right| \\ &\leq \exp(-\varepsilon t) + \exp(-\varepsilon t) = 2 \exp(-\varepsilon t) \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece Teorem 3.1.5 den (4.11) ve (4.12) integralleri  $(\tau, \beta)$  ye göre  $\Omega(\varepsilon)$  üzerinde düzgün yakımsak olur. (4.10) ve Teorem 2.2 den,

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} [\varepsilon_1(\tau, \beta) - E_1(\tau)] &= \lim_{\beta \rightarrow 0} [I_1(\tau, \beta) + I_2(\tau, \beta)] \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_1^{\infty} \left[ (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} - t^{-1} \right] \exp \left[ -\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \right] dt \\ &\quad + \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_1^{\infty} t^{-1} \left\{ \exp \left[ -\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \right] - \exp(-\tau t) \right\} dt \\ &= \int_1^{\infty} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ (t^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} - t^{-1} \right] \exp \left[ -\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \right] dt \\ &\quad + \int_1^{\infty} t^{-1} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ \exp \left[ -\tau (t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \right] - \exp(-\tau t) \right\} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi (2.6) ile verilen  $\varepsilon_n(\tau, \beta)$  fonksiyonunun özelliklerini verelim.

**Teorem 4.2.2**  $\varepsilon_n(\tau, \beta)$  fonksiyonu  $(\tau, \beta)$  ya göre  $\Omega(\varepsilon)$  üzerinde süreklidir.

**İspat**  $\Omega(\varepsilon)$  bölgesinden keyfi  $(\tau_0, \beta_0)$  noktasını alalım. Teorem 3.2.3 ve Teorem 2.2 den,

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow \tau_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0}} \varepsilon_n(\tau, \beta) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \tau_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0}} \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-r) / r^{n+1}] \exp(-i\beta x) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tau_0^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\substack{\tau \rightarrow \tau_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0}} [\exp(-r)/r^{n+1}] \exp(-i\beta x) dx dy \\
&= \frac{\tau_0^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\sqrt{x^2+y^2+\tau_0^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+\tau_0^2}\right)^{n+1}} \exp(-i\beta_0 x) dx dy \\
&= \varepsilon_n(\tau_0, \beta_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 4.2.3**  $\varepsilon_n(\tau, \beta)$  fonksiyonu aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

$$\varepsilon_n(\tau, \beta) = o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_n(\tau, \beta) = o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon), \quad \beta \rightarrow \pm\infty. \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_n(\tau, \beta) = E_n(\tau) + o(1), \quad (\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon), \quad \beta \rightarrow 0. \quad (4.15)$$

**İspat** Her  $(\tau, \beta) \in \Omega(\varepsilon)$  için Teorem 3.2.3 ve Teorem 2.2 den yararlanırsak,

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varepsilon_n(\tau, \beta) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-r)/r^{n+1}] \exp(-i\beta x) dx dy \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\sqrt{x^2+y^2+\tau^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+\tau^2}\right)^{n+1}} \exp(-i\beta x) dx dy \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\sqrt{x^2+y^2+\tau^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+\tau^2}\right)^{n-1} (x^2+y^2+\tau^2)} \exp(-i\beta x) dx dy \\
&< \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau^{n-1}}{\tau^{n-1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left(-\sqrt{x^2+y^2+\tau^2}\right) / \tau^2 \right] \exp(-i\beta x) dx dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(-\sqrt{x^2+y^2+\tau^2}\right) / \tau^2 \right] \exp(-i\beta x) dx dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (4.13) ifadesinin gerçekleştiği görülür.

(4.14) eşitliğini ispatlamadan önce aşağıdaki tanım ve teoremi vermemiz yararlı olacaktır.

**Tanım 4.2.1**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

$$\hat{f}(\beta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-i\beta x) dx$$

ile tanımlanan fonksiyona  $f$  fonksiyonunun Fourier Dönüşümü denir.

**Teorem 4.2.4**  $f \in L = L(\mathbb{R})$  sağlanıyor ise

$$\lim_{|\beta| \rightarrow \infty} \hat{f}(\beta) = 0$$

gerçeklenir.

Şimdi (4.14) eşitliğini ispatlayalım.

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\tau, \beta) &= \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-r) / r^{n+1}] \exp(-i\beta x) dx dy \\ &< \frac{\tau^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \exp(-\sqrt{x^2 + \tau^2}) / (\sqrt{x^2 + \tau^2})^{n+1} \right] \exp(-i\beta x) dx \right\} dy \end{aligned}$$

ve buradan,

$$f(x, \tau) = \exp(-\sqrt{x^2 + \tau^2}) / (\sqrt{x^2 + \tau^2})^{n+1}$$

fonksiyonunu tanımlayıp Tanım 4.2.1 i kullanırsak,

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\tau, \beta) &= \frac{\tau^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \tau) \exp(-i\beta x) dx \right\} dy \\ &= \frac{\tau^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\tau, \beta) dy \end{aligned} \tag{4.16}$$

ifadesinin gerçeklendiğini götürürüz. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, \tau)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sqrt{x^2 + \tau^2}\right) / \left(\sqrt{x^2 + \tau^2}\right)^{n+1} dx \\ &< 2 \exp(-\tau) \int_{\tau}^{\infty} 1/u^n \sqrt{u^2 - \tau^2} du < \infty \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan  $f \in L(\mathbb{R})$  diyebiliriz ve Teorem 4.2.4 den,

$$\lim_{|\beta| \rightarrow \infty} \hat{f}(\tau, \beta) = 0 \quad (4.17)$$

sağlanır.

Teorem 3.2.3, Teorem 2.2 ve (4.16), (4.17) ifadelerinden,

$$\begin{aligned} \lim_{|\beta| \rightarrow \infty} \varepsilon_n(\tau, \beta) &= \frac{\tau^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{|\beta| \rightarrow \infty} \hat{f}(\tau, \beta) dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

(4.15) ifadesini ispatlayalım.

Teorem 3.2.3 ve Teorem 2.2 yi dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \varepsilon_n(\tau, \beta) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-r) / r^{n+1}] \exp(-i\beta x) dx dy \\ &= \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-r) / r^{n+1}] \lim_{\beta \rightarrow 0} \exp(-i\beta x) dx dy \\ &= \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-r) / r^{n+1} dx dy \\ &= \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^{\infty} \exp(-tr) / r^n dt dx dy \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde ederiz. Şimdi,

$$\phi(x, y, \tau) = \int_1^{\infty} \exp(-tr) / r^n dt$$

ile tanımlanan fonksiyonunun  $(x, y, \tau)$  ya göre  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \tau \in [\varepsilon, \infty)\}$  kümesi üzerinde düzgün yakımsak olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \phi(x, y, \tau) &= \int_1^{\infty} \frac{\exp\left(-t\sqrt{x^2 + y^2 + \tau^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + \tau^2}\right)^n} dt_0 \\ &= \frac{\exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2 + \tau^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + \tau^2}\right)^n} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\phi(x, y, \tau) < \frac{\exp(-\varepsilon)}{\varepsilon^n}$$

gerçeklenir. Weierstrass testinden  $\phi(x, y, \tau)$  fonksiyonu  $(x, y, \tau)$  ya göre  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \tau \in [\varepsilon, \infty)\}$  kümesi üzerinde düzgün yakımsak olur.

Dolayısıyla Teorem 2.3 ü (4.18) ifadesinde uygulayabiliriz.

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \varepsilon_n(\tau, \beta) = \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tr) / r^n dx dy dt. \quad (4.19)$$

(4.19) integralinde kısmi integrasyon uygulayalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tr) / r^n dx dy = u, \quad (t-1)^{n-n} dt = dv$$

alalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tr) / r^n dx dy \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t_0} \exp(-tr) / r^n dx dy \\ &= \left( - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tr) / r^{n-1} dx dy \right) dt \\ &= du \end{aligned} \quad (4.20)$$

ve

$$(t-1)^{n-(n-1)} = v$$

olur. Şimdi (4.20) nin nasıl gerçekleştiğini görelim.

$H(\varepsilon) = \{(t, \tau), t \in [1, \infty), \tau \in [\varepsilon, \infty)\}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} H_1(t, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tr) / r^n dx dy \\ H_2(t, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t_0} \exp(-tr) / r^n dx dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tr) / r^{n-1} dx dy \end{aligned}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

$H_2(t, \tau)$  fonksiyonunun  $(t, \tau)$  ya göre  $H(\varepsilon)$  üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösterelim.

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ve  $(t, \tau) \in H(\varepsilon)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \exp(-tr) / r^n &= \frac{\exp\left(-t\sqrt{x^2 + y^2 + \tau^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + \tau^2}\right)^n} \\ &< \frac{\exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2}\right)}{\varepsilon^{n-1}\sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir.

$$K(x, y) = \frac{\exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2}\right)}{\varepsilon^{n-1}\sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2}}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) dx dy = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2}} dx dy$$

integralinde  $x^2 + y^2 = r_1^2$  olarak kutupsal koordinatlara geçelim. Her  $\varepsilon > 0$  için,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) dx dy &= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\sqrt{r_1^2 + \varepsilon^2}\right)}{\sqrt{r_1^2 + \varepsilon^2}} r dr d\theta \\
&= \frac{\exp(-\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}} 2\pi < \infty
\end{aligned} \tag{4.22}$$

sağlanır.(4.21), (4.22) ve Weierstrass testinden,  $H_2(t, \tau)$  fonksiyonu  $(t, \tau)$  ya göre  $H(\varepsilon)$  üzerinde düzgün yakınsak olur.  $H_1(t, \tau)$  fonksiyonunun da  $(t, \tau)$  ya göre  $H(\varepsilon)$  üzerinde yakınsak olduğu benzer şekilde kolayca görülebilir. Dolayısıyla Teorem 2.4 den (4.20) ifadesinin gerçekleştiğini götürürüz.

Şimdi (4.19) integraline kısmi integrasyon uygulayabiliriz.

$$\frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tr) / r^n dx dy dt = \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \int_1^{\infty} (t-1)^{n-(n-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tr) / r^{n-1} dx dy dt$$

elde ederiz.

Elde edilen integralde art arda  $(n-1)$  kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \varepsilon_n(\tau, \beta) = \frac{\tau^{n-1}}{2\pi} \frac{1}{(n-1)!} \int_1^{\infty} (t-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tr) / r dx dy dt$$

elde edilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tr) / r dx dy = 2\pi \exp(-\tau t)$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \varepsilon_n(\tau, \beta) = \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \int_1^{\infty} (t-1)^{n-1} \exp(-\tau t) / t dt \tag{4.23}$$

gerçeklenir. (4.23) integralini aşağıdaki gibi ifade edelim.

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} (t-1)^{n-1} \exp(-\tau t) / t dt &= \int_1^{\infty} (t-1)^{n-2} \exp(-\tau t) dt - \int_1^{\infty} (t-1)^{n-3} \exp(-\tau t) dt \\
&+ \int_1^{\infty} (t-1)^{n-4} \exp(-\tau t) dt \\
&- \dots + (-1)^{n+1} \int_1^{\infty} (t-1) \exp(-\tau t) dt \\
&+ (-1)^n \int_1^{\infty} (t-1) \exp(-\tau t) / t dt. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki ilk integrali alalım ve

$$\begin{aligned}
(t-1)^{n-2} &= u & \exp(-\tau t) dt &= dv \\
(n-2)(t-1)^{n-3} &= du & -\frac{1}{\tau} \exp(-\tau t) &= v
\end{aligned}$$

olmak üzere kısmi integrasyon uygulayalım.

$$\int_1^{\infty} (t-1)^{n-2} \exp(-\tau t) dt = \frac{n-2}{\tau} \int_1^{\infty} (t-1)^{n-3} \exp(-\tau t) dt$$

elde ederiz. İntegrale art arda  $(n-2)$  kez kısmi integrasyon uyguladıktan sonra,

$$\int_1^{\infty} (t-1)^{n-2} \exp(-\tau t) dt = \frac{(n-2)!}{\tau^{n-1}} \exp(-\tau)$$

elde edilir. Bu şekilde (4.24) ifadesinde her integrale kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} (t-1)^{n-1} \exp(-\tau t) / t dt &= \left[ \frac{(n-2)!}{\tau^{n-1}} - \frac{(n-3)!}{\tau^{n-2}} + \frac{(n-4)!}{\tau^{n-3}} \right. \\
&- \dots + (-1)^n \frac{2!}{\tau^3} + (-1)^{n-1} \frac{1!}{\tau^2} + (-1)^n \frac{0!}{\tau} \left. \right] \exp(-\tau) \\
&+ (-1)^{n-1} \int_1^{\infty} \exp(-\tau t) / t dt \tag{4.25}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.25) ifadesinde son integrale kısmi integrasyon uygulayalım.

$$\begin{aligned}
(-1)^{n-1} \int_1^{\infty} \exp(-t\tau) / t dt &= (-1)^{n-1} \left[ \frac{0!}{\tau} - \frac{1!}{\tau^2} + \frac{2!}{\tau^3} - \dots + (-1)^n \frac{(n-4)!}{\tau^{n-3}} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{n-1} \frac{(n-3)!}{\tau^{n-2}} + (-1)^n \frac{(n-2)!}{\tau^{n-1}} \right] \exp(-\tau) \\
&\quad + \frac{(n-1)!}{\tau^{n-1}} \int_1^{\infty} \exp(-t\tau) / t^n dt \tag{4.26}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.26) ü (4.25) de düşünürsek,

$$\int_1^{\infty} (t-1)^{n-1} \exp(-\tau t) / t dt = \frac{(n-1)!}{\tau^{n-1}} \int_1^{\infty} \exp(-t\tau) / t^n dt \tag{4.27}$$

bulunur.

(4.27) yi (4.23) de düşünürsek,

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow 0} \varepsilon_n(\tau, \beta) &= \int_1^{\infty} \exp(-t\tau) / t^n dt \\
&= E_n(\tau)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece (4.15) de ispatlanmış olur.

## 5. NÜMERİK TABLO

Bu bölümde iki boyutlu üstel fonksiyonların düzgün yakınsaklık bölgesinde bulunan  $\tau$  ve  $\beta$  değerleri için nümerik hesaplama yapılmıştır. Tablodan görüldüğü gibi  $n = 1, 2, 3, 4$  alınmak üzere  $\varepsilon_n(\tau, \beta)$  fonksiyonunun değerleri  $\tau$  ve  $\beta$  nın çok geniş bölgedeki değerleri için bulunmuştur. Nümerik hesaplamalarda Pentium 4.0 uyumlu MATHEMATICA programı kullanılmıştır. Ayrıca tablolardaki A değerleri bizim tarafımızdan, B değerleri ise Breig ve Crosbie tarafından hesaplanmıştır.

Çizelge 5.1  $\varepsilon_1(\tau, \beta)$  fonksiyonunun değerleri

$\tau$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 10$	$\beta = 20$
0.0001	$A = 6.143314628912719$ $+iE - 1$ $B = 6.1433$	$A = 5.850334088713723$ $-i9.375391894121577E - 10$ $B = 5.8503$	$A = 5.216596350515581$ $-i6.184411880623505E - 17$ $B = 5.2166$	$A = 4.622405662773734$ $+i4.417437057588218E - 18$ $B = 4.6224$	$A = 3.979468204969179$ $+i9.718361526694078E - 17$ $B = 3.9795$
0.005	$A = 4.537901067889449$ $+i1.766974823035287E - 17$ $B = 4.5379$	$A = 4.245006981521351$ $+iE - 1$ $B = 4.2450$	$A = 3.6118092517793587$ $-i1.018351544013959E - 10$ $B = 3.6118$	$A = 3.0192768074691063$ $+i9.055745968055847E - 17$ $B = 3.0193$	$A = 2.381847868201705$ $+i1.987846675914698E - 17$ $B = 2.3818$
0.01	$A = 3.849813982491566$ $-i3.837162415267503E - 11$ $B = 3.8498$	$A = 3.557142202395409$ $-i4.966478929026777E - 13$ $B = 3.5571$	$A = 2.925296434868837$ $-i2.298302965135789E - 11$ $B = 2.9253$	$A = 2.3367504277586297$ $-i1.558030050211364E - 12$ $B = 2.3368$	$A = 1.7117877639753523$ $-i3.533949646070574E - 17$ $B = 1.7118$
0.025	$A = 2.9488329356872187$ $+i1.553338671316446E - 10$ $B = 2.9488$	$A = 2.657383190971331$ $+i1.993293375806704E - 12$ $B = 2.6574$	$A = 2.0326700716719333$ $-9.81770526868218E - 12$ $B = 2.0327$	$A = 1.4637881869087266$ $-i1.071335664531752E - 11$ $B = 1.4638$	$A = 8.9411144707500399E - 1$ $-i5.300924469105861E - 17$ $B = 8.9411E - 1$
0.05	$A = 2.281453068639485$ $-i5.300924469105861E - 17$ $B = 2.2815$	$A = 1.9933445935560798$ $+i1.046233699931526E - 10$ $B = 1.9933$	$A = 1.3870213973918706$ $-i1.026298209581762E - 11$ $B = 1.3870$	$A = 8.639169226626785E - 1$ $-i4.310311171953727E - 12$ $B = 8.6392E - 1$	$A = 4.026457744554906E - 1$ $-i2.6961896103444371E - 22$ $B = 4.0265E - 1$
0.1	$A = 1.64017231138455$ $+iE - 1$ $B = 1.6402$	$A = 1.3617758308830468$ $+i7.0578181485961E - 12$ $B = 1.3618$	$A = 8.043034952598128E - 1$ $-i1.985758332545723E - 12$ $B = 8.0430E - 1$	$A = 3.8435848086903923E - 1$ $+i8.28269448297791E - 17$ $B = 3.8436E - 1$	$A = 1.0713555332477835E - 1$ $+i6.092564529322131E - 12$ $B = 1.0714E - 1$
0.5	$A = 4.2370709749072205E - 1$ $+iE - 1$ $B = 4.2371E - 1$	$A = 2.5067102641438316E - 1$ $+iE - 1$ $B = 2.5067E - 1$	$A = 4.630293776083369E - 2$ $+iE - 1$ $B = 4.6303E - 2$	$A = 3.0239699124587406E - 3$ $+i1.224674029569061E - 16$ $B = 3.0240E - 3$	$A = 1.552042299070299E - 5$ $+iE - 1$ $B = 1.5520E - 5$
1	$A = 1.3554692860259693E - 1$ $+iE - 1$ $B = 1.3555E - 1$	$A = 5.351461855900747E - 2$ $+iE - 1$ $B = 5.3515E - 2$	$A = 2.3951848541335623E - 3$ $+iE - 1$ $B = 2.3952E - 3$	$A = 1.3321816513904781E - 5$ $+i7.07480153754363E - 18$ $B = 1.3322E - 5$	$A = 4.719616145834231E - 10$ $-i9.101430204813521E - 16$ $B = 4.7196E - 10$

Çizelge 5.2  $\varepsilon_2(\tau, \beta)$  fonksiyonunun değerleri

$\tau$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 10$	$\beta = 20$
0.001	$A = 9.924434723782973E - 1$ $+i1.413579858428229E - 19$ $B = 9.9244E - 1$	$A = 9.919160966891798E - 1$ $+iE - 1$ $B = 9.9192E - 1$	$A = 9.896973641980313E - 1$ $-i4.915307297290383E - 10$ $B = 9.8970E - 1$	$A = 9.853780518462402E - 1$ $+i1.413579858428229E - 19$ $B = 9.8538E - 1$	$A = 9.761947163307825E - 1$ $+i6.069070914791562E - 11$ $B = 9.7619E - 1$
0.005	$A = 9.702643422545342E - 1$ $+i2.208718528794109E - 20$ $B = 9.7026E - 1$	$A = 9.676568670129494E - 1$ $+i1.413579858428229E - 18$ $B = 9.6766E - 1$	$A = 9.567681149630682E - 1$ $+i7.112741170587211E - 11$ $B = 9.5677E - 1$	$A = 9.35895855570027E - 1$ $-7.619368247065852E - 11$ $B = 9.3590E - 1$	$A = 8.928151526927118E - 1$ $-3.180554681463517E - 18$ $B = 8.9282E - 1$
0.01	$A = 9.474592559549745E - 1$ $-i4.586072717261649E - 15$ $B = 9.4746E - 1$	$A = 9.423160462390637E - 1$ $+i3.533949646070575E - 18$ $B = 9.4232E - 1$	$A = 9.210350252606401E - 1$ $+i3.577803230650029E - 12$ $B = 9.2104E - 1$	$A = 8.810187337876387E - 1$ $+i2.827159716856459E - 18$ $B = 8.8102E - 1$	$A = 8.014083467390319E - 1$ $-i1.464519149540784E - 11$ $B = 8.0141E - 1$
0.025	$A = 8.915415485850164E - 1$ $+i4.417437057588218E - 19$ $B = 8.9154E - 1$	$A = 8.791975192541199E - 1$ $+i3.639194635321662E - 13$ $B = 8.7920E - 1$	$A = 8.294982431226492E - 1$ $+i1.435944127455608E - 12$ $B = 8.2950E - 1$	$A = 7.412356049804204E - 1$ $-i2.8175139356756E - 13$ $B = 7.4124E - 1$	$A = 5.837991466302784E - 1$ $+i1.250068888192043E - 12$ $B = 5.8380E - 1$
0.05	$A = 8.176587748648632E - 1$ $+i2.255574835843579E - 13$ $B = 8.1766E - 1$	$A = 7.945528161372075E - 1$ $+i1.766974823035287E - 18$ $B = 7.9455E - 1$	$A = 7.056034194084425E - 1$ $-i8.834874115176437E - 18$ $B = 7.0560E - 1$	$A = 5.618241448033833E - 1$ $+i4.594134539891746E - 17$ $B = 5.6182E - 1$	$A = 3.472878771358602E - 1$ $-i1.943672305338816E - 17$ $B = 3.4729E - 1$
0.1	$A = 7.041062167438795E - 1$ $-i7.496678717427851E - 13$ $B = 7.0411E - 1$	$A = 6.634519064258186E - 1$ $-i3.909705677063143E - 12$ $B = 6.6345E - 1$	$A = 5.201241100703188E - 1$ $+i1.855323564187051E - 17$ $B = 5.2012E - 1$	$A = 3.27613339905977E - 1$ $+i1.060184893821172E - 17$ $B = 3.2761E - 1$	$A = 1.2428402294804283E - 1$ $+iE - 1$ $B = 1.2428E - 1$
0.5	$A = 2.812151426498713E - 1$ $+iE - 1$ $B = 2.8122E - 1$	$A = 2.015863821445704E - 1$ $+iE - 1$ $B = 2.0159E - 1$	$A = 5.496848551136895E - 2$ $+iE - 1$ $B = 5.4968E - 2$	$A = 5.0600102554520555E - 3$ $-i3.224667578916283E - 15$ $B = 5.0600E - 3$	$A = 3.7076101127100064E - 5$ $+iE - 1$ $B = 3.7076E - 5$
1	$A = 1.0756980583160117E - 1$ $+iE - 1$ $B = 1.0757E - 1$	$A = 5.336330710138579E - 2$ $+iE - 1$ $B = 5.3363E - 2$	$A = 3.7075424200455013E - 3$ $+iE - 1$ $B = 3.7075E - 3$	$A = 2.9869304279352523E - 5$ $-i5.866908592109352E - 19$ $B = 2.9869E - 5$	$A = 1.538834495203213E - 9$ $-i2.63033517911171E - 18$ $B = 1.5383E - 9$

Çizelge 5.3  $\varepsilon_3(\tau, \beta)$  fonksiyonunun değerleri

$\tau$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 10$	$\beta = 20$
0.001	$A = 4.990024511109741E - 1$ $-i2.261727773485167E - 21$ $B = 4.9900E - 1$	$A = 4.989982320156957E - 1$ $-i1.776096495894175E - 12$ $B = 4.9900E - 1$	$A = 4.989706876695545E - 1$ $-i2.714073328182201E - 19$ $B = 4.9897E - 1$	$A = 4.9888175736258644E - 1$ $-i1.442151075825898E - 9$ $B = 4.9888E - 1$	$A = 4.9856897323705635E - 1$ $+i5.790023100122029E - 19$ $B = 4.9857E - 1$
0.005	$A = 4.950516902549029E - 1$ $-i2.544443745170813E - 19$ $B = 4.9505E - 1$	$A = 4.949762046326981E - 1$ $-i1.90159059838555E - 13$ $B = 4.9498E - 1$	$A = 4.9449751991327523E - 1$ $+i2.261727773485167E - 19$ $B = 4.9450E - 1$	$A = 4.930242429216283E - 1$ $-i1.133479574912619E - 13$ $B = 4.9302E - 1$	$A = 4.8819820352499177E - 1$ $-i7.237528875152536E - 18$ $B = 4.8820E - 1$
0.01	$A = 4.9018922746454213E - 1$ $+i4.229134084646993E - 15$ $B = 4.9019E - 1$	$A = 4.899385430768269E - 1$ $+i8.469661622952918E - 15$ $B = 4.8994E - 1$	$A = 4.883821102053627E - 1$ $+i1.809382218788134E - 18$ $B = 4.8838E - 1$	$A = 4.837637107484798E - 1$ $+iE - 1$ $B = 4.8376E - 1$	$A = 4.69496901043039E - 1$ $-i1.970457721187423E - 12$ $B = 4.6950E - 1$
0.025	$A = 4.760365743919093E - 1$ $+i8.834874115176437E - 20$ $B = 4.7604E - 1$	$A = 4.748853995162321E - 1$ $-i6.62615586382327E - 19$ $B = 4.7489E - 1$	$A = 4.6805408708589463E - 1$ $+i2.827159716856459E - 18$ $B = 4.6805E - 1$	$A = 4.4938184179542284E - 1$ $-i3.180554681463517E - 18$ $B = 4.4938E - 1$	$A = 3.9923273619928473E - 1$ $+2.216955693995738E - 12$ $B = 3.9923E - 1$
0.05	$A = 4.536942695174573^{**}E - 1$ $+i4.28843815505793E - 12$ $B = 4.5369E - 1$	$A = 4.5029816049684535E - 1$ $-i8.607344654558792E - 12$ $B = 4.5030E - 1$	$A = 4.313003524176357E - 1$ $+i6.523616104772877E - 13$ $B = 4.3130E - 1$	$A = 3.8491401855306733E - 1$ $+i1.711286844512507E - 13$ $B = 3.8491E - 1$	$A = 2.8307826133448905E - 1$ $+i1.753696007240177E - 12$ $B = 2.8308E - 1$
0.1	$A = 4.129052504262309E - 1$ $+i2.260774994155964E - 11$ $B = 4.1291E - 1$	$A = 4.0381514638243077E - 1$ $-i1.210519571178468E - 11$ $B = 4.0382E - 1$	$A = 3.57877372208315E - 1$ $+iE - 1$ $B = 3.5788E - 1$	$A = 2.662095412797268E - 1$ $+iE - 1$ $B = 2.6621E - 1$	$A = 1.2689054916664513E - 1$ $+iE - 1$ $B = 1.2689E - 1$
0.5	$A = 2.0269794527722496E - 1$ $+iE - 1$ $B = 2.0270E - 1$	$A = 1.6215841061428077E - 1$ $+iE - 1$ $B = 1.6216E - 1$	$A = 5.843514756064822E - 2$ $+iE - 1$ $B = 5.8435E - 2$	$A = 7.175956423511752E - 3$ $-i5.978291420340211E - 15$ $B = 7.1760E - 3$	$A = 7.267195676212158E - 5$ $+iE - 1$ $B = 7.2672E - 5$
1	$A = 8.726359085360859E - 2$ $+iE - 1$ $B = 8.7264E - 2$	$A = 5.059279476996788E - 2$ $+iE - 1$ $B = 5.0593E - 2$	$A = 4.997178810918784E - 3$ $+i1.104359264397054E - 18$ $B = 4.9972E - 3$	$A = 5.598142938903135E - 5$ $-i3.337882737606331E - 19$ $B = 5.5981E - 5$	$A = 4.09183571344698E - 9$ $+iE - 1$ $B = 4.0918E - 9$

Çizelge 5.4  $\varepsilon_4(\tau, \beta)$  fonksiyonunun değerleri

$\tau$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 10$	$\beta = 20$
0.001	3.3283365604269766E - 1 +4.632018480097623E - 21	3.328331613610311E - 1 -i1.852807392039049E - 20	3.3282970307744514E - 1 +i3.705614784078098E - 20	3.328173992319921E - 1 -i5.123697977723025E - 14	3.327684851036903E - 1 +i1.02120053559172E - 9
0.005	3.3084168843793876E - 1 -i6.33283776575847E - 20	3.308297036009815E - 1 +i6.436868196427692E - 14	3.3074636124698376E - 1 +iE - 1	3.3045341230211234E - 1 +i3.047532523055772E - 10	3.2932152187417696E - 1 +i6.712438193978458E - 13
0.01	3.283668166582222E - 1 +i2.334533695204764E - 14	3.2832041450482136E - 1 -i4.668935305507558E - 14	3.279999313606849E - 1 +i7.237528875152537E - 19	3.26889163817018646E - 1 -i7.437146200877148E - 11	3.2275697847261525E - 1 -i5.587372291617758E - 17
0.025	3.2104319438498374E - 1 +i1.467757187226319E - 12	3.207762091456098E - 1 -i1.130863886742583E - 18	3.18970362083023E - 1 -i2.26172773485167E - 18	3.130302814359257E - 1 -i2.705897472175359E - 12	2.9309972611874663E - 1 +i4.099130355815903E - 11
0.05	3.0917216818702864E - 1 +i2.915508458008224E - 19	3.0822192734798826E - 1 +i3.220960448136829E - 13	3.02023610866854E - 1 +i2.26172773485167E - 18	2.832990350153646E - 1 +i6.43233237426568E - 13	2.3065645383776914E - 1 -i9.830608248932432E - 13
0.1	2.866066684383088E - 1 +i3.486063214786459E - 13	2.835510053837311E - 1 +i7.067899292141149E - 20	2.6473792976651495E - 1 -i1.953758586363162E - 12	2.1692835774847108E - 1 -i5.654319433712919E - 18	1.2200667108444715E - 1 +iE - 1
0.5	1.5579006769776246E - 1 +iE - 1	1.3293249152133196E - 1 +iE - 1	5.86308991984218" E - 2 +iE - 1	9.188975045090655E - 3 -i1.104359264397054E - 18	1.2516086082822907E - 4 +iE - 1
1	7.252504637283796E - 2 +iE - 1	4.690751377329581E - 2 +iE - 1	6.173857960619937E - 3 -i5.521796321985272E - 19	9.31476402535588E - 5 +i9.518492990879253E - 18	9.484194215269618E - 9 -i2.229293299158516E - 21

## KAYNAKLAR

- Breig, W.F. and Crosbie, A.L. 1973. Two-dimensional radiative equilibrium semi-infinite medium subjected to cosine varying radiation. *J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*. Vol. 13, ;pp. 1395-1419.
- Breig, W.F. and Crosbie, A.L. 1974. Numerical computation of a generalized exponential integral function, *Math. Comput.* Vol. 28; pp. 575–579.
- Busbridge, I.W. 1960. *The mathematics of radiative transfer*, University Press, 143 p., Cambridge.
- Chandrasekhar, S. 1960. *Radiative Transfer*. Dover Publications, 393 p., New York.
- Chapman, S. 1931. The absorption and dissociative or ionizing effect of monochromatic radiation in an atmosphere on a rotating earts. *Proc. Phys. Soc.* Vol. 43; pp. 483–501.
- Crosbie, A.L. and Dougherty, R.L. 1981. Two-dimensional in a cylindrical geometry with anisotropic scattering. *J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*. Vol. 25; pp. 551–569.
- Crosbie, A.L. and , Koewing, J.W. 1977. Two-dimensional isotropic scattering. *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 57; pp. 91–109.
- Crosbie, A.L. and Lee, L.C. 1987. Relation between multidimensional radiative transfer in cylindrical and rectangular coordinates with anisotropic scattering. *J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*. Vol. 38; pp. 231–241.
- Crosbie, A.L. and Lee, L.C. 1989. Multidimensional radiative transfer: a single integral representantation of anisotropic scattering kernels. *J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*. Vol. 42; pp. 239–246.
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. 2007. *Table of integrals, series and products*. Academic Press, 1171 p., NewYork.
- Guseinov, I.I. and Mamedov, B.A. 2002. Evaluation of overlap integrals with integer

- and noninteger  $n$  Slater type orbitals using auxiliary functions. *J. Mol. Model.* Vol. 8; pp. 272–276.
- Guseinov, I.I. and Mamedov, B.A. 2005. Use of analytical relations in evaluation of exponential integral functions. *J. Math. Chem.* Vol. 38; pp. 311–314.
- Guseinov, I.I. and Mamedov, B.A. 2006. On the evaluation of generalized exponential integral functions. *J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer.* Vol. 102; pp. 251–256.
- Kourganoff, V. 1963. *Basic Methods in Transfer Problems.* Dover Publications, 281 p., New York.
- Mamedov, B.A., Merdan, Z. and Askerov, I.M. 2005. Evaluation of exponential integrals using multinomial expansion theorems. *J. Math. Chem.* Vol. 38; pp. 695–700.
- Nikolsky, S.M. 1977. *Course of Mathematical Analysis.* Vol. 2, Mir Publishers, 423 p., Moscow.
- Prabha, R.H. and Yadav, R.D.S. 1996. Polynomial expressions for Bickley and exponential integral functions. *Ann. Nucl. Energy.* Vol. 23; pp. 1021–1025
- Prudnikov, A.P., Brychkov, Y.A. and Marichev, O.I. 1990. *Integrals and Series.* Vol. 3, Gordon and Breach, New York.
- Sobolev, V.V. 1963. *A Treatise on Radiative Transfer.* Princeton, 319 p., New York.
- Zorich, V.A. 2004. *Mathematical Analysis.* Vol. 2, Springer, 681 p., New York.
- Aygar, Y. and Bairamov, E. 2011. Properties of the two-dimensional exponential integral functions. *Journal of Mathematical Chemistry.* Vol. 49; pp. 1014–1025.
- Bairamov, E. and Yardimci, S. 2010. Uniform convergence and the properties of the exponential and generalized exponential integral functions. *J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer.* Vol. 111; pp. 2471–2473.
- Ergun, E. and Bairamov, E. 2011. On the eigenvalues of a 3 by 3 non-Hermitian Hamiltonian. *Journal of Mathematical Chemistry.* Vol. 49; pp. 609–617.
- Ozalp, N. and Bairamov, E. 2011. Uniform convergence and computation of the generalized exponential integrals. *Journal of Mathematical Chemistry.* Vol. 49; pp. 520–530.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Çağla CAN

**Doğum Yeri** : Mersin

**Doğum Tarihi** : 12.01.1987

**Medeni Hali** : Bekar

**Yabancı Dili** : İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

**Lise** : Abdulkerim Bengi Anadolu Lisesi (2004)

**Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2009)

**Yüksek Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik  
Anabilimdalı (Şubat 2010-Haziran 2012)