SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT
(08121204)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12.06.2012

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ
Murat ŞAT
(08121204)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12.06.2012
Tezin Savunulduğu Tarih: 03.07.2012

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (A.Ü.)
Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK (F.Ü.)
Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü.)
Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü.)

TEMMUZ-2012

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında ve yürütülmesinde, engin bilgi birikimini tam olarak bir eğitimci üslubu ve sıfatıyla, yüksek makamın alçak gönüllülüğü içerisinde, aktarmasına ve böyle bir çalışmanın planlanması, düzenli bir şekilde yürütülmesi sürecinde her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum yakın ilgi ve desteklerinden dolayı anneme ve aileme teşekkür eder saygı ve sevgilerimi sunarım.

Murat ŞAT
ELAZIĞ–2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu çalışma yedi bölümden oluşmuştur.

İlk bölümde; regüler Sturm-Liouville ve Dirac operatörlerinin, spektral teorisinin (düz ve ters problemler) tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümde; diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; bir boyutlu stasyoner Dirac operatörünün genel görüntüsü ve kanonik formları, özdeğerler için asimptotik formül, kanonik Dirac operatörü için matris dönüşüm operatörü, normlaştırıcı sayıların iki spektrum türünden ifadesi, normlaştırıcı sayılar için asimptotik formül ve iki spektruma göre ters problem incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; singüler Dirac operatörü, iki spektruma göre ters problem, normlaştırıcı sayılar için asimptotik ifadeler elde edilmiştir.

Beşinci bölümde; yarı eksende Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem incelenmiştir.

Altıncı ve yedinci bölümler çalışmanın orijinal kısmı olup bu bölümlerde sırasıyla singüler Dirac operatörü için dönüşüm operatörünün genel dejenereliği ve kararlılık problemi incelenmiştir

Anahtar Kelimeler: Spektrum, Ters problem, Dirac operatörü, Özdeğer, Özvektör fonksiyon, Genel dejenere, Kararlılık.

SUMMARY

Spectral Theory of the Singular Dirac Operator

This thesis consists of seven chapters.

In the first chapter; the history of spectral theory (well and ill-posed problem) Sturm-Liouville and Dirac operators were given.

In the second chapter; some fundemantal definitions often used in the spectral theory differential operators were given.

In the third chapter; one dimensional stationary and canonic forms of Dirac operator, asymptotic formula for eigenvalues, matrix transformation operator for canonic Dirac operators, the statement of norming constants in terms of two spectrums, asymptotic formula for norming constants and inverse problem according to two spectrums were studied.

In the fourth chapter; singular Dirac operator, inverse problem according to two spectrum and asymptotic statements for norming constants were obtained.

In the fifth chapter; in semi-axis inverse problem according to two spectrums for Dirac operator was examined.

In the sixth and the seventh chapters that constitute the original part of our study, the general degenerate of transformation operator for singular Dirac operator and well-posedness problem were studied, respectively.

Key Words: Spectrum, Inverse problem, Dirac operator, Eigenvalue, Eigenvector function, General degenerate, Well-posedness.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

SİMGELER LİSTESİ

$L_2[a,b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
H	: Hilbert uzayı
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyon
λ_n	: $n.$ özdeğer
φ_n	: $n.$ özfonksiyon
$K(x,y)$	: Çekirdek fonksiyonu
α_n	: $n.$ normlaştırıcı sayı
$\rho(\lambda)$	: Spektral fonksiyon
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir (telin titreşimi, zar titreşimi, vb.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Matematikte l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H da lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX.–XX. asırlarda birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sınırlı ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler; tanım bölgesi sınırsız veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak şekilde) diferansiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Rietsz, J. Von Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapıldığı bilinmektedir.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşım 1946 yılında E. C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre sık sık bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Lineer diferansiyel operatörler teorisinde spektral analizin ters problemleri önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel operatörler için ters problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak (veya yapısını kurmak) mümkündür.
2. Spektral verilere göre operatör birebir olarak mı tanımlanır.
3. Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması (kurulması) yöntemlerinin bulunmasıdır.

Ters problemlerle ilgili ilk sonuç, V. A. Ambartsumyan' a [1] aittir. 1929 yılında V. A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.1. $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_n, \cdots$'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (0 \le x \le \pi) \tag{1.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{1.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0,1,\cdots)$ ise $q(x) = 0$ dır.

V. A. Ambartsumyan'ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir.

Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G. Borg'a aittir [2].

Teorem 1.2. $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (1.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0\,, \tag{1.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\,, \tag{1.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$'ler ise (1.1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad (h \neq h_1) \tag{1.5}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\,,$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir. (h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılardır).

G. Borg'un bu çalışmasında $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilmiştir ve operatör bu dizilerin yardımıyla belirtilmiştir. Yani, bu tip operatörün varlığı önceden belli olduğu kabul edilmiştir. G. Borg, aynı çalışmada bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, V. A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığı N. Levinson [3], [4] tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca N. Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte, J. Lions [5], [6] ve B. M. Levitan [7] tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner [8] kendi çalışmalarında göstermiştir.

Daha sonra ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde teklik problemiyle ilgili en önemli çalışmalar A. N. Tichkonov (Tikhonov) [9] ve V. A. Marchenko [10] tarafından yapılmıştır. Marchenko bu çalışmasında teklik problemlerinin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=1, \quad \varphi'(0,\lambda)=h \tag{1.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda)=\varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n=\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{1.7}$$

sayıları verilen operatörün normlaştırıcı sayıları,

$$\rho(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}\frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V. A. Marchenko yukarıda bahsedilen çalışmada G. Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımı ile vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun, Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. V. A. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M. G. Krein [11], [12] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V. A. Marchenko'nun çalışması yayınlanmadan önce A. N. Tikhonov [9] tarafından V. A. Marchenko'nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A. N. Tichkonov'un çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir.

Teorem 1.3. $\lambda<0$ olduğunda

$$U''+\lambda\rho^2(x)U=0, \qquad x>0,\ U(\infty)=0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x)\geq\rho_0>0$ dır. $R(\lambda)=\dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda<0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I. M. Gelfand ve B. M. Levitan [13], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları verdiler. Ayrıca bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir

yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre bulunması için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen klasik asimptotik formüllerinin sağlanmasıdır:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \ldots + \frac{a_{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \ldots + \frac{b_{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}},$$

burada $a_0 = \frac{1}{\pi}\left[h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\frac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek sayı ise $\sum \left(\frac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dur.

Fakat bu çalışmalarda ters problemin iki spektruma göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B. M. Levitan ve M. G. Gasimov'un [14] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{1.8}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n.$ çarpanın bulunmadığını gösterir. (1.8) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (1.8) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [14] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1. $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri çaprazlaşır (sıralıdır), yani

   $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$

2. λ_n ve μ_n'ler

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3. $a_0 \neq a_0'$.

Sturm-Liouville operatörünü inceleme sürecinde özellikle XX. asrın ikinci yarısında kullanılan yöntemlerin sayısı sürekli bir şekilde çoğalmıştır. Buna kanıt olarak 1967 yılında bir grup Amerikan fizikçileri ve matematikçileri G. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura [15] ve P. Lax [16] tarafından bulunan bazı kısmi türevli nonlineer evalusyon denklemleri ile Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki bağıntıyı gösterebiliriz. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulamaları olan singüler Sturm-Liouville operatörleri için kuantum teorisinin ters saçılma problemleri halen yoğun bir şekilde fizikçiler ve matematikçiler tarafından araştırılmaktadır. Kuantum saçılma teorisinin ters problemleri ile ilgili tarihçe detaylı bir şekilde L. D. Faddeev'in [17] çalışmasında verilmiştir.

Şimdi ise Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları hatırlatalım. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar doğal olarak fizikçiler F. Prats, J. Toll [18], H. E. Moses [19] ve diğerleri tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0,\infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasimov ve B. M. Levitan [20] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B\frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y, \qquad 0 < x < \infty \tag{1.9}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \tag{1.10}$$

$$(y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0, \; H_1 \neq H) \tag{1.11}$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$, (1.9) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=0,\quad \varphi_2(0,\lambda)=-1$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan $\rho(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ fonksiyonu (1.9), (1.10) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x)\in L^2(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda)=\int_0^n f^T(x)\,\varphi(x,\lambda)dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(\lambda)-F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda)=0$$

olmak üzere

$$\int_0^\infty f^T(x)\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F^2(\lambda)d\rho(\lambda) \tag{1.12}$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Ayrıca, bu çalışmada aşağıdaki önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 1.4.

$$\sigma(\lambda)=\rho(\lambda)-\frac{\lambda}{\pi}$$

ve

$$F(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}(1-\cos\lambda x)/\lambda\\ -\sin\lambda x/\lambda\end{pmatrix}\left(\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda}\;\;\frac{\sin\lambda y}{\lambda}\right)d\sigma(\lambda)$$

olmak üzere $y\le x$ için $K(x,y)$ matris fonksiyonu

$$F(x,y)+K(x,y)+\int_0^x K(x,s)F(s,y)ds=0 \tag{1.13}$$

integral denklemini sağlar.

Teorem 1.5. $\rho(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

1. $g(x)\in L^2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyonu ve

$$G(\lambda)=\int_0^\infty g^T(x)\,s(x,\lambda)dx,\quad s(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\lambda x\\ -\cos\lambda x\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}, \quad c(x,\lambda) = \begin{pmatrix} (1-\cos\lambda x)/\lambda \\ -\sin\lambda x/\lambda \end{pmatrix}$$

olacak biçimde

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda) c^T(y,\lambda) d\sigma(\lambda)$$

matris fonksiyonu ikinci merteben sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

Bu takdirde her sabit $x \geq 0$ için (1.13) integral denklemi her iki değişkene göre sürekli olan tek $K(x,y)$ çözümüne sahiptir.

Teorem 1.6. $Q(x)$ sürekli matris fonksiyonu olmak üzere monoton artan $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun (1.9), (1.10) sınır değer probleminin spektral fonksiyonu olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerek ve yeterdir:

1. Eğer $g(x) \in L^2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} g^T(x) s(x,\lambda) dx$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda) c^T(y,\lambda) d\{\rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}\}$$

matris fonksiyonu $F_{11}(x,0) = F_{21}(x,0) = 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi M. G. Gasimov ve T. T. Dzhabiev [21] tarafından yapılan çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki önemli teoremler ispatlanmıştır:

Teorem 1.7. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri sırası ile (1.9), (1.10) ve (1.9), (1.11) problemlerinin özdeğerleri ise

$$\alpha_n = \frac{H_1 - H}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \mu_n}, \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots) \tag{1.14}$$

dir. Burada, ' simgesi sonsuz çarpımda $k = n$ teriminin mevcut olmadığını gösterir.

Teorem 1.8. $p(x)$ ve $q(x)$ $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve *k.* mertebeden türevleri $L^2(0,\pi)$ de olmak üzere $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizilerinin sırası ile (1.9), (1.10) ve (1.9), (1.11) problemlerinin spektrumları olması için

1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarının çaprazlaşması, yani

   $$\cdots < \lambda_{-n} < \mu_{-n} < \lambda_{-n+1} < \cdots < \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \cdots < \lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1} < \cdots$$

2. $\alpha \neq \beta,\ 0 \leq \beta, \alpha \leq \pi$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_{n,k}|^2$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_{n,k}|^2$ serileri yakınsak olmak üzere

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \cdots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

asimptotik formüllerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

Dirac operatörü için özvektör fonksiyonlarının tamlığı, Cauchy probleminin çözümü, self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülarize izin hesaplanması, periodik ve antiperiodik problemler, açılım teoremleri, özvektör fonksiyonlarının asimptotiği, 2n mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi, kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem sırası ile [22-40] çalışmalarında incelenmiştir.

Diğer taraftan $W_2^{-1}(0,1)$ uzayında singüler reel değerli potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem R.O. Hryniv ve Ya.V. Mykytyuk [41] tarafından yapılan çalışmada incelenmiştir.

Bu çalışmada $q \in W_2^{-1}(0,1)$ reel değerli dağılım fonksiyonu olmak üzere $H := L_2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$l := -\frac{d^2}{dx^2} + q \tag{1.15}$$

diferansiyel ifadesine karşılık gelen T Sturm-Liouville operatörü tanımlanmış ve A. M.

Savchuk ve A. A. Shkalikov [42]’ deki çalışmasına göre, regularizasyon yöntemi ile Dirichlet sınır koşularından bahsedilmiştir.

Dağılım anlamında $\sigma' = q$ olacak şekilde reel değerli $\sigma \in H$ alınmış ve

$$D(T_\sigma) = \left\{ u \in W_1^1(0,1) \middle| u' - \sigma u \in W_1^1(0,1), l_\sigma(u) \in H, u(0) = u(1) = 0 \right\} \tag{1.16}$$

tanım kümesinde

$$Tu = T_\sigma u = l_\sigma(u) := -(u' - \sigma u)' - \sigma u' \tag{1.17}$$

ifadesi yazılmıştır.

Burada, dağılım anlamında bütün $u \in D(T_\sigma)$ için $l_\sigma(u) = -u'' + qu$ ifadesi incelendiğinde özellikle T_σ operatörü, regüler potansiyeller için ilkel σ nın özel seçimine bağlı değildir ve (1.15)’e karşılık gelen standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörü ile çakışır. Ayrıca T_σ ilkel $\sigma \in H$ ’ye düzgün resolvent anlamında sürekli olarak bağlıdır ve böylece T_σ, herhangi bir $\sigma' = q \in W_2^{-1}(0,1)$ için (1.15) ‘e ait standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörüdür. Ele alınan potansiyeller sınıfı Dirac δ -tipli ve $\frac{1}{x}$ -Coulomb tipli potansiyelleri içerir ve matematiksel fizik ve kuantum mekaniğinde geniş olarak kullanılır [43,44].

[42] den iyi bilinir ki, her reel değerli $\sigma \in H$ için yukarıda tanımlanan T_σ operatörü, diskret basit (λ_k^2), $k \in \mathbb{N}$ spektrumlu self-adjoint operatörüdür

ve $\lambda_k, \lambda_k = \pi k + \mu_k$ ($\mu_k \in l_2$ olan dizi) şeklinde asimptotiğe sahiptir [42,45,46]. Regüler

q potansiyelleri için yukarıdaki asimptotikler $\mu_k = O(\frac{1}{k})$ olacak şekilde yazılır.

Bu çalışmada, reel ikişerli farklı sayılardan oluşan ve yukarıda ifade edilen asimptotiklere sahip hangi (λ_k^2) dizileri $W_2^{-1}(0,1)$ den olan singüler potansiyelli Sturm-Liouville operatörlerinin spektrumu dur? Sorusunun cevabı araştırılmıştır. Bu soru, ele alınan potansiyeller için ters spektral probleme götürür. Yani; bu durum, karşılık gelen spektral parametreye dayanan q potansiyelinin kurulmasıdır.

Regüler durumda, yukarıda bahsedilen problemin çözümü için sadece (λ_k^2) spektrumunun yetersiz olduğu bilinmektedir. Aynı Dirichlet spektrumlu Sturm-Liouville operatörlerinin ürettiği birçok farklı q potansiyelleri (izospektral) vardır. J. Pöschel ve E.

Trubowitz [47]; verilen (λ_k^2) spektrumlu (reel, basit ve $\lambda_k = \pi k + O(\frac{1}{k})$ asimptotiğine ait) H Hilbert uzayındaki bütün potansiyellerinin kümesinin, analitik olarak $w_n = n$ ağırlıkları ile $l_2(w_n)$ ağırlıklı uzaya difeomorfik olduğunu göstermişlerdir.

q potansiyelini yeniden tek olarak elde etmek için spektrumun yanında bazı ek bilgiler verilmelidir. Bu bilgiler, $(0,1)$ aralığının yarısı üzerindeki potansiyelin bilinmesi veya farklı sınır koşulları olan aynı diferansiyel ifade ile verilen Sturm-Liouville operatörünün spektrumu veya biri bütün aralık için ve diğerleri aralığın eşit iki yarısı için olan üç spektrum olabilir.

Hryniv ve Mykytyuk çalışmasında; I. M. Gelfand, B. M. Levitan ve V. A. Marchenko'ya göre klasik yaklaşım genelleştirilmiş ve $W_2^{-1}(0,1)$den singüler potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem tam olarak çözülmüştür. Şöyle ki, spektral veriler kümesinin açık bir şekli verilmiş ve bu kümenin keyfi bir elamanından q' nun yeniden nasıl elde edildiği açıklanmıştır [41].

Diğer singülerite tiplerine (örneğin Sturm-Liouville operatörler sınıfı için a süreksizlik noktası, $\frac{1}{x^\gamma}$ ya benzer potansiyeller, vs.), [48]'de O. Hald, [49]' da L. Andersson, [50]'de R. Carlson, [51]'de O. Hald ve J. R. McLaughlin, [52]'de V. A. Yurko, [53]'de V. A. Yurko ve R. Kh. Amirov bakmışlardır. $q(x) = q_1(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}$ potansiyeline sahip (1.1) denklemi için iki spektruma göre ters problem M. G. Gasimov [54] tarafından çözülmüştür. Daha sonraki yıllarda Bessel tipi tekilliğe sahip potansiyller için ters problemler farklı yöntemlerle H. Koyunbakan [55], Hidrojen atomu denklemleri için E. S. Panakhov ve R. Yılmazer [56], Dirac denklemler sistemi için Ü. İç [57] ve tekile sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörü için kuantum saçılma teorisinin ters problemleri E. Baş [58] ve tekile sahip Sturm-Liouville operatörü için ters problem Mehmet Kayalar [59] tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında singüler Dirac operatörünün spektral analizi (düz ve ters problemleri) incelenmiştir. Ayrıca Levitan'ın çalışmasından faydalanılarak [60]; $K(x,s)$ matris fonksiyonunun genel dejenereliği gösterilmiştir. Son bölümde A. Mizutani'nin [61] çalışmasından faydalanılarak özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar için belirli şartlar sağlamak üzere potansiyel farkı ile ilgili teorem ispatlanmıştır.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, sunulan tezde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Metrik Uzay): X bir cümle olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. Bu özellikler $\forall x, y, z \in X$ için

M1) $d(x,y) \geq 0$

M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3) $d(x,y) = d(y,x)$

M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şeklindedir. (X,d) ikilisine ise bir metrik uzay denir. Bir uzay üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir [62].

Örnek 2.1.1. $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $l_\infty = \left\{ x = (x_n) \in K^\infty \,\middle|\, (x_n) \text{ } sınırlı \right\}$ uzayı $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in l_\infty$ olmak üzere

$$d_\infty(x,y) = \sup\left\{ |x_k - y_k| : k \in \mathbb{N} \right\}$$

metriğine göre bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.2. (Tam Uzay): Bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir. l_∞, c, $C[a,b]$, $\mathbb{R}^n$ gibi uzaylar tam uzaylardır. Fakat $\mathbb{Q}$ uzayı tam değildir [63].

Tanım 2.1.3. (Normlu Uzay): X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x \in X$ noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir normlu uzay denir. Bu şartlar $\forall x, y \in X$ için

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3) $\|kx\| = |k| \|x\|$ (k skaler)

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şeklindedir [63].

Örnek 2.1.2. $L_p[0,1]$ uzayı, $f(x) \in L_p[0,1]$ olmak üzere

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır.

Tanım 2.1.4. (Hilbert Uzayı): Herhangi $x, y, z, \ldots$ elamanlar cümlesini H ile gösterelim.

1) H lineer kompleks (reel) uzaydır.
2) H da bulunan her x, y eleman çiftine bu elemanların iç çarpımı denilen ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen karmaşık (reel) bir sayı karşılık gelir. Bu iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar.
   a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
   b) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
   c) $\forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ için $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
   d) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $g(x, y) = \|x - y\|$ olacak şekilde norm anlamında yakınsaklığa göre H uzayı tamdır.
4) Keyfi doğal n sayısı için H uzayında lineer bağımsız n tane eleman mevcuttur. Yani H sonsuz boyutludur.

(1), (2) ve (3) aksiyomları sağlanıyorsa H uzayına üniter Hilbert uzayı denir. (1), (2), (3) ve (4) özellikleri sağlanıyor ise H uzayına soyut Hilbert uzayı veya kısaca Hilbert uzayı denir. Başka bir ifade ile tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [64].

Tanım 2.1.5. $a \leq t \leq b$ olmak üzere $(L_2[a,b])$ uzayı,

$$(L_2[a,b]) = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 \, dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$ dir).

Tanım 2.1.6. (Operatör): Tanım ve değer cümlesi bir vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [65].

Örnek 2.1.3 $C[a,b]$ den kendi içine olan ve

$$Tx(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau,\ \ t\in[a,b]$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir operatördür. Bu operatöre integral operatörü denir.

Tanım 2.1.7. (Lineer Operatör) : E_x ve E_y iki reel lineer topolojik uzay olsun. Değer bölgesi E_y de bulunan ve E_x de tanımlı $y=Ax$ operatörünü göz önüne alalım. A operatörü için

1) $x_1,x_2\in E_x$ olmak üzere $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$

2) λ bir skaler olmak üzere $\forall x\in E_x$ için $A(\lambda x)=\lambda A(x)$

şartları sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir [65].

Örnek 2.1.4. $K(t,s),\ 0\le t,\ s\le 1$ sürekli bir fonksiyon, $x(s)\in C[0,1]$ olmak üzere

$$y(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

eşitliği ile tanımlı $y=Ax$ operatörü bir lineer operatördür.

Tanım 2.1.8. (Sınırlı Operatör): X ve Y birer normlu uzay ve $D(L)\subset X$ olmak üzere $L:D(L)\to Y$ bir operatör olsun.

$$\|Lx\|\le c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c>0$ reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise L operatörünün normu denir [65].

Tanım 2.1.9. (Sürekli Operatör): X ve Y normlu uzaylar $L:X\to Y$ bir operatör ve $x_0\in X$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\|x-x_0\|<\delta$ olduğunda $\|Lx-Lx_0\|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı varsa L operatörü $x_0\in X$ noktasında süreklidir denir [65].

Tanım 2.1.10. (Adjoint Operatör): H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L:H_1\to H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer $L^*:H_1\to H_2$ operatörü

$$\langle Lx,y\rangle=\langle x,L^*y\rangle$$

şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L'nin adjointi denir. Eğer $L^*=L$ ise L'ye self-adjoint operatör denir [65].

Tanım 2.1.11. (Dönüşüm Operatörü): E lineer topolojik uzay, A ve B de $A:E\to E$, $B:E\to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının

kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer tersi olan X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir [66].

Tanım 2.1.12. $L-\lambda I$ operatörünün sınırlı $(L-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir [67].

Tanım 2.1.13. Herhangi λ için $L-\lambda I$ operatörü tersi mevcut olacak şekilde $R_\lambda = (L-\lambda I)^{-1}$ operatörüne

$$Lx - \lambda x = y \text{ veya } (L-\lambda I)x = y$$

denkleminin rezolvent operatörü denir.

Tanım 2.1.14. $D(L)$ tanım bölgesi, L sınırlı lineer bir operatör ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Ly \equiv By' + Q(x)y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x,\lambda) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise, λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise λ sayısına karşılık gelen özvektör fonksiyonu denir [66].

Tanım 2.1.15. $\{\lambda_n\}$ ler L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b \left\{ y_1^2(x,\lambda_n) + y_2^2(x,\lambda_n) \right\} dx$$

sayılarına L operatörünün normlaştırıcı sayıları denir [66].

Tanım 2.1.16. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının herhangi bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 2.1.17. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye tam fonksiyon denir. e^z, $\sin z$, z^2 gibi fonksiyonlar tam fonksiyonlardır.

Tanım 2.1.18. $f(z)$, kompleks düzlemin bir W alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\forall z \in W$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $f(z)$'ye W'de sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.1.19. (Liouville Teoremi): Kompleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

Tanım 2.1.20. $f(z)$ kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon, z_0 ise $f(z)$ 'nin tanımlı olduğu herhangi bir nokta olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir. Eğer $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0, \ldots f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n-katlı sıfırı diye adlandırılır.

Tanım 2.1.21. $f(z)$, z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ama z_0'da diferansiyellenemeyen bir fonksiyon ise z_0'a $f(z)$ 'nin ayrık singüler (aykırı) noktası denir.

Tanım 2.1.22. z_0 bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun.

i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kaldırılabilir aykırı noktası denir.

ii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kutup noktası denir (kutup yeri) denir.

iii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut değilse z_0 noktasına $f(z)$ 'nin esas aykırı noktası denir.

Tanım 2.1.23. (Rouche Teoremi): f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar ve γ, B bölgesinde bulunan f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. Eğer γ üzerinde $|f(z) - g(z)| \leq |f(z)|$ eşitsizliği gerçekleniyorsa, $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ eşitliği geçerlidir. Burada Z_f ve Z_g, $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki sıfırlarının sayısını; P_f ve P_g ise $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki kutuplarının sayısını göstermektedir. Eğer f ve g, B içindeki analitik fonksiyonlarsa $Z_f = Z_g$ [68].

Tanım 2.1.24. $f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(r^{\mu}) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$'nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir [68].

Tanım 2.1.25. $f(z)$ sonlu mertebeli bir tam fonksiyon olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(ar^{\rho})$$

eşitsizliğini sağlayan $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir. (2.1.1) eşitsizliğini sağlayan a sayılarının infimumuna $f(z)$ fonksiyonunun tipi adı verilir ve σ ile gösterilir [68].

Tanım 2.1.26. (Hadamard Teoremi): Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n})$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada m, $f(z)$ 'nin orjindeki sıfırının katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$ 'nin 0'dan farklı tüm sıfırlarının kümesidir.

Teorem 2.1.1. (Cauchy İntegral Teoremi): $f(z)$ tek irtibatlı G bölgesinde birebir analitik fonksiyon, γ ise G de kapsanan keyfi düzeltilebilir kapalı eğri olsun. $f(z)$ 'nin γ egrisi üzerinde integrali sıfıra eşittir:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Teorem 2.1.2. (Rezidü Teoremi): D bölgesinde ($f(z)$' nin sonlu sayıda ayrık tekil $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ noktaları hariç) ve D'nin Γ sınırında analitik $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun k katlı kutup noktası ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[f(z)(z-z_0)^k \right],$$

z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left[f(z)(z-z_0) \right] \quad \text{dir.}$$

Tanım 2.1.27. (Mittag-Leffler Açılımı): Bir $f(z)$ fonksiyonunun sonlu düzlemdeki aykırılıkları mutlak değer büyüklüğüne göre sıralanmış, basit $a_1, a_2, \ldots$ kutup yerleri ve bu noktalardaki rezüdileri sırasıyla $b_1, b_2, \ldots$ olsun. Eğer C_N hiçbir kutup yerinden geçmeyen, üzerinde $|f(z)| < M$ eşitsizliğinin gerçeklendiği R_N yarıçaplı çember ise ve $N \to \infty$ iken $R_N \to \infty$ oluyorsa

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right]$$

yazılır [68].

Tanım 2.1.28. (O ve o sembolleri): [69,70] $x \in X$ olduğunda, verilen x ler için $|f(x)| \leq C|g(x)|$ olacak şekilde bir C sabiti varsa $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.1.5. $\frac{1}{x^3} = o(\frac{1}{x^2})$ dir. Çünkü $x \to \infty$ iken $\left(\frac{1}{x^3}\right)/(\frac{1}{x^2}) \to 0$ olur.

Örnek 2.1.6. $\cosh x = O(e^x)$ dir. Çünkü $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ olduğundan her iki taraf e^x ile bölünürse

$$\frac{\cosh x}{e^x} = \frac{e^x}{2e^x} + \frac{e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}}$$

olur. Buradan da $x \to \infty$ iken $\frac{\cosh x}{e^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}} \to \frac{1}{2}$ olur. Yani $\left|\frac{\cosh x}{e^x}\right|$ sınırlıdır. Bu nedenle $\cosh x = O(e^x)$ olur.

Tanım 2.1.29. (Noktasal Yakınsaklık): (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada herbir $x \in A$ için bir n_0 bulunacağından n_0 sayısı hem ε a hem de x noktasına bağlıdır [71].

Tanım 2.1.30. (Düzgün Yakınsaklık): (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada sözü edilen n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlı olup, x noktasına bağlı değildir. Buna göre düzgün yakınsak her dizi noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersi

her zaman doğru değildir. Eğer A cümlesi sonlu ise düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık birbirine denktir [71].

Tanım 2.1.31. $[a,b]$, $\mathbb{R}$'nin kapalı sınırlı bir aralığı ve $(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$'ler $[a,b]$ de açık aralıklar olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ için

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$$

iken

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(b_i)-f(a_i)\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ varsa $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir denir.

Tanım 2.1.32. (Parseval Eşitliği): $f(x),g(x)\in L_2(a,b)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(u)\,g(u)\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho_n}\left(\int_a^b f(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du\right)\left(\int_a^b g(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du\right)$$

dir.

Tanım 2.1.33. Eğer

$$K(x,s)=\sum_{n=0}^{N}f_n(x)\,g_n(x),\qquad s\le x$$

ise $K(x,s)$ çekirdeği genel dejeneredir denir.

Tanım 2.1.34. $\{\lambda_n\}_0^\infty$ ve $\{\lambda_n'\}_0^\infty$ spektrumları çakışsın. $\{\tilde{\lambda}_n\}_0^\infty$ ve $\{\tilde{\lambda}_n'\}_0^\infty$ spektrumları ise sonlu $n=0,1,\cdots,N$ için $\tilde{\lambda}_n\neq\tilde{\lambda}_n'$ ve $n>N$ için $\tilde{\lambda}_n=\tilde{\lambda}_n'$ olsun. Bu takdirde ters problemin

$$K(x,s)+F(x,s)+\int_0^x K(x,t)\,F(t,s)ds=0,\ (0\le x\le\pi)$$

temel integral denklemi genel dejeneredir [60].

Tanım 2.1.35. (a,b) aralığında tanımlı, $(k-1)$. mertebeden türevleri mutlak sürekli olan ve $f,f'',f''',\cdots,f^{(k)}\in L_2(a,b)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W_2^k(a,b)$ ile gösterilir [72].

Tanım 2.1.36. (Dirac-Delta Fonksiyonu):

$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}0, & 0\le t<t_0-a\\ \dfrac{1}{2a}, & t_0-a\le t<t_0+a_0\\ 0, & t\ge t_0+a\end{cases}$$

olmak üzere

$$\delta(t-t_0)=\lim_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)$$

fonksiyonuna Dirac-Delta fonksiyonu denir. Bu fonksiyon

1) $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases}$

2) $\int_0^\infty \delta(t-t_0)\,dt=1$

3) Herhangi sürekli bir $G(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty \delta(t-a)\,G(t)\,dt=G(a)$$

özellikleri ile karakterize edilir [73].

3. DIRAC OPERATÖRÜ

3.1. Bir Boyutlu Dirac Sistemi

$p_{ik}(x), (i,k=1,2), [0,\pi]$ aralığında tanımlı ve sürekli reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$L=\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \; p_{12}(x)=p_{21}(x) \tag{3.1.1}$$

bir matris operatörü olsun. $y(x)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \; ve \; B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(B\frac{d}{dx}+L(x)-\lambda I\right)y=0 \tag{3.1.2}$$

denklemi, iki tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemden oluşan

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx}+p_{11}(x)y_1+p_{12}(x)y_2=\lambda y_1 \\ -\frac{dy_1}{dx}+p_{21}(x)y_1+p_{22}(x)y_2=\lambda y_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

denklem sistemine denktir.

Bu durumda $V(x)-$potansiyel fonksiyon, $m-$parçacığın kütlesi olacak biçimde $p_{12}(x)=p_{21}(x)\equiv 0$ ve $p_{11}(x)=V(x)+m,\; p_{22}(x)=V(x)-m$ olurken relativistik kuantum teorisinde (3.1.2) sistemi 1-boyutlu stasyoner Dirac sistemi olarak bilinmektedir.

2-boyutlu uzayın her düzgün ortogonal dönüşümü

$$H(x)=\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile tanımlanır [66]. Ayrıca,

$$BH=HB$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

$y=Hz$ olacak şekilde (3.1.2) denkleminin her iki tarafı soldan H^{-1} ile çarpılırsa,

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz)+H^{-1}LHz=\lambda H^{-1}Hz$$

veya

$$B\frac{dz}{dx}+\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}LH\right)z=\lambda z \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

$$Q = H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH$$

olacak şekilde, Q matrisi hesaplansın. Bu takdirde

$$H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

ve

$$\frac{d}{dx}H = \begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} H^{-1}B\frac{d}{dx}H &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \\ -\cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{-1}LH &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Son iki eşitlikten,

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) + p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & \varphi'(x) + p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. $\varphi(x)$ fonksiyonu $q_{12}(x) = 0$ olmak üzere seçilsin. Bu takdirde

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x) + \frac{1}{2}\{p_{22}(x) - p_{11}(x)\}\sin 2\varphi(x) = 0$$

şeklindedir. Buradan,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\arctan\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x)-p_{22}(x)}$$

elde edilir. $Q(x)$ matrisinin görüntüsü

$$Q(x)=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x)\end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buna göre (3.1.4) denklemi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.1.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **I. kanonik formu** denir.

Şimdi $izQ(x)=q_{11}(x)+q_{22}(x)=0$ olmak üzere bir $\varphi(x)$ fonksiyonu seçilsin, dolayısıyla $2\varphi'(x)+p_{11}(x)+p_{22}(x)=0$

halini alır. Buradan

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\{p_{11}(z)+p_{22}(z)\}dz$$

elde edilir. Buna göre (3.1.4) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.1.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **II. kanonik formu** denir. (3.1.5) ve (3.1.6) denklemlerine (3.1.2) sisteminin kanonik formları da denir. (3.1.2) denklem sistemlerinin spektral teorisinin çeşitli sorunlarını incelerken bu veya diğer kanonik formlardan faydalanmak bize kolaylık sağlar. Örneğin, özdeğerlerin ve özvektör fonksiyonlarının asimptotik davranışı araştırılırken ve keyfi vektör fonksiyonunun (0 ve π noktalarında homojen sınır şartları sağlandığında) (3.1.2) denklem sisteminin özvektör fonksiyonlarına göre açılımı incelenirken, (3.1.5) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar. Sonsuz aralıkta verilmiş (3.1.2) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve ters problem incelenirken de (3.1.6) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar.

(3.1.5) kanonik denklem sistemi için $p(x)$ ve $r(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y_2'+\{p(x)-\lambda\}y_1=0,\quad y_1'-\{r(x)-\lambda\}y_2=0 \tag{3.1.7}$$

$$y_2(0)\cos\alpha+y_1(0)\sin\alpha=0 \tag{3.1.8}$$

$$y_2(\pi)\cos\beta + y_1(\pi)\sin\beta = 0 \qquad (3.1.9)$$

sınır problemi göz önüne alınsın. Herhangi bir λ_1 değeri için bu problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x,\lambda_1) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_1) \\ y_2(x,\lambda_1) \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda λ_1'e özdeğer, buna karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$'e de özvektör fonksiyon denir.

Lemma 3.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonaldir, yani,

$$\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

dir.

İspat: $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları (3.1.7) sisteminin çözümleri olduğundan,

$$\begin{aligned}
&y_2'(x,\lambda_1) + \{p(x) - \lambda_1\}y_1(x,\lambda_1) = 0 \\
&y_1'(x,\lambda_1) - \{r(x) - \lambda_1\}y_2(x,\lambda_1) = 0 \\
&z_2'(x,\lambda_2) + \{p(x) - \lambda_2\}z_1(x,\lambda_2) = 0 \\
&z_1'(x,\lambda_2) - \{r(x) - \lambda_2\}z_2(x,\lambda_2) = 0
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemler sırası ile $z_1(x,\lambda_2)$, $-z_2(x,\lambda_2)$, $-y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ ile çarpılıp ve daha sonra sonuçlar toplanırsa,

$$\frac{d}{dx}\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\} = (\lambda_1 - \lambda_2)\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}$$

elde edilir. Bu son eşitlik x' e göre 0 dan π ye integrallenirse

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = \{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\}\Big|_0^\pi$$

bulunur. Buradan

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

veya

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi y^T(x,\lambda_1)z(x,\lambda_2)dx = 0$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan, $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonal olurlar. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.2. (3.1.7)-(3.1.9) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: Aksini varsayalım yani, $\lambda_1 = u + iv$ kompleks özdeğer olsun. $p(x)$ ve $r(x)$ reel fonksiyonlar ve α, β sayıları reel olduğu için Dirac operatörünün genel denkleminde eşleniği alınırsa, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısı da bir özdeğerdir. λ_2 ye karşılık gelen $\overline{y}(x, \lambda_1)$ özvektör fonksiyonudur. Bu takdirde Lemma 3.1.1 den dolayı

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^{\pi} \{y_1(x,\lambda_1)\overline{y_1}(x,\lambda_1) + y_2(x,\lambda_1)\overline{y_2}(x,\lambda_1)\} dx = 0$$

ve

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^{\pi} \left\{ |y_1(x,\lambda_1)|^2 + |y_2(x,\lambda_1)|^2 \right\} dx = 0$$

olur. $\lambda \neq \overline{\lambda}$ olduğundan, $y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ sıfır olur ki, bu da özvektör fonksiyonlarının sıfır olmaması gerçeği ile çelişir. O halde özdeğerler kompleks olamaz. Bu da ispatı tamamlar.

3.2. Özdeğerler için asimptotik formüller

$$By' + Q(x)y = \lambda y, 0 \leq x \leq \pi \tag{3.2.1}$$

denklemi göz önüne alınsın. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

$p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli $[0, \pi]$ de toplanabilir (integrallenebilir) fonksiyonlardır. (3.2.1) diferansiyel denklemi

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \tag{3.2.2}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.2.3}$$

sınır koşullarıyla ele alınsın. (3.2.1)-(3.2.3) sınır değer probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}$ normalleştirici sayıları $\{\alpha_n\}$ ile gösterilsin.

Teorem 3.2.1. $p(x)$ ve $q(x)$ k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olacak şekilde verilsin. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları için

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k} \tag{3.2.4}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{\pi} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{3.2.5}$$

asimptotik formülleri söz konusudur. Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{n,k}\right|^2 < \infty$ ve $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_{n,k}\right|^2 < \infty$ serileri yakınsaktır. Bu teoremi $k=1$ ve $p(x)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$ durumunda ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde gösterilebilir.

(3.2.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.2.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ ile gösterilsin.

Bu takdirde (3.2.1)-(3.2.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.2.7}$$

denkleminin kökleri ile çakıştığı aşikardır.

Bilindiği gibi [21]

$$\begin{aligned} &K(x,x)B - BK(x,x) = 0 \\ &K_{11}(x,0)\cos\alpha + K_{12}(x,0)\sin\alpha = 0 \\ &K_{21}(x,0)\cos\alpha + K_{22}(x,0)\sin\alpha = 0 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

koşullarını sağlayan bir $K(x,t)$ matrisi vardır.

Ayrıca $[0,\pi]$ aralığında bulunan her sabit x için $K(x,t)$ nin birinci türevleri $L_2(0,x)$ e aittir ve

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt = 0 \tag{3.2.9}$$

dönüşüm operatörü vardır. Burada $\varphi_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$ fonksiyonu $Q(x) = 0$ durumuna karşılık gelen çözüm fonksiyonudur ve $K(x,t) = \begin{pmatrix} K_{11}(x,t) & K_{12}(x,t) \\ K_{21}(x,t) & K_{22}(x,t) \end{pmatrix}$ şeklindedir. (3.2.9) integral denklemi düzenlenip (3.2.3) koşulunda yerine yazılırsa

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = \sin(\lambda\pi + \alpha) + \int_0^\pi \left\{K_{11}(\pi,t)\sin(\lambda t + \alpha) - K_{12}(\pi,t)\cos(\lambda t + \alpha)\right\} dt = 0 \tag{3.2.10}$$

elde edilir. (3.2.10) eşitliğinde kısmi integrasyon uygulanırsa ve (3.2.8) deki ikinci koşuldan faydalanılırsa;

$$
\begin{aligned}
&\sin(\lambda\pi+\alpha)-\frac{1}{\lambda}K_{11}(\pi,\pi)\cos(\lambda\pi+\alpha)-\frac{1}{\lambda}K_{12}(\pi,\pi)\sin(\lambda\pi+\alpha)\\
&+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi}\left\{\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos(\lambda t+\alpha)+\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin(\lambda t+\alpha)\right\}dt=0
\end{aligned}
\tag{3.2.11}
$$

elde edilir.

λ_n $\left(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$ (3.2.11) denkleminin kökleri olsun. Bu takdirde $n\to\infty$ iken $\lambda_n\to\infty$ dur. Bu sebeple büyük n ler için birinci yaklaşımda

$$\sin(\lambda_n\pi+\alpha)+O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)=0$$

ifadesi bulunur. Buradan

$$\lambda_n\pi+\alpha=n\pi+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

yazılabilir. $n\to\infty$ iken $\varepsilon_n\to0$ olmak üzere

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n \tag{3.2.12}$$

eşitliği verilsin. Bu takdirde (3.2.11) den

$$
\begin{aligned}
&\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]-\frac{1}{\lambda_n}\left\{\left[K_{11}(\pi,\pi)\cos\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]\right.\\
&\left.+K_{12}(\pi,\pi)\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]\right\}+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\int_0^{\pi}\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right.\\
&\left.+\int_0^{\pi}\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right\}dt=0
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

elde edilir.

$$b_n=\int_0^{\pi}\left\{\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]+\int_0^{\pi}\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right\}dt \tag{3.2.14}$$

olsun.

$\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}$ ve $\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}$ fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ ye ait olduğu için $\sum_{-\infty}^{\infty}b_n^2$ yakınsaktır.

Bu takdirde (3.2.13) den

$$(-1)^n \varepsilon_n \pi - \frac{(-1)^n}{\lambda_n}\left\{K_{11}(\pi,\pi)\cos\left(\varepsilon_n \pi\right) + K_{12}(\pi,\pi)\sin\left(\varepsilon_n \pi\right)\right\} + \frac{b_n}{\lambda_n} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\varepsilon_n = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{b_n}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.2.15}$$

olur. Burada

$$\alpha_1 = \frac{K_1(\pi,\pi)}{\pi}$$

dir. $K_{11}(\pi,\pi)$ fonksiyonunu $p(x)$, $q(x)$ ile ifade ederek hesaplayalım. (3.2.15) formülünden λ_n için aranan formül bulunur.

(3.2.15) ten faydalanarak benzer işlemler yapılırsa

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \frac{c_{1,k}}{n} \text{ ve } \sum_{-\infty}^{\infty} {c_{1,k}}^2 < \infty \tag{3.2.16}$$

şeklinde normlaştırıcı sayılar için asimptotik formül elde edilir. Burada

$$c_1 = \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\left\{K_{12}(x,x) - K_{21}(x,x)\right\}dx$$
$$= \frac{1}{2n}\left\{\int_0^{\pi}\left[\frac{3}{2}p(x) - \frac{1}{9}(q(x) + p(x)ctgx)\right]dx - \frac{p(0) + \sin^2\alpha(1 - ctg\alpha)\left[q(0) + p(0)ctg\alpha\right]}{2(1 + ctg\alpha)}\right\}$$

dir.

3.3. Kanonik Dirac Operatörü İçin Matris Dönüşüm Operatörü

A_1 ve A_2 iki lineer diferansiyel operatör, E_1 ve E_2 ise iki lineer fonksiyonel uzay olsun.

Tanım 3.3.1. $X: E_1 \to E_2$ lineer sürekli operatör olmak üzere

1. $A_1 X = X A_2$ (3.3.1)
2. X^{-1} mevcut ve sürekli

şartlarının sağlanması halinde X' e A_1 ve A_2 operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir.

Lemma 3.3.1. λ özdeğerine karşılık gelen A_2 operatörünün özfonksiyonu $\varphi_\lambda \in E_1$, yani

$$A_2\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$$

olmak üzere aynı λ özdeğerine karşılık gelen $\psi_\lambda = X\varphi_\lambda$, A_1 operatörünün özfonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$A_1\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

şeklindedir.

İspat. $A_1X = XA_2$ olduğundan

$$A_1\psi_\lambda = A_1X\varphi_\lambda = XA_2\varphi_\lambda = X\lambda\varphi_\lambda = \lambda X\varphi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.3.2. Lineer topolojik E uzayında A_1, A_2 ve A_3 lineer operatörleri ve E_1, E_2, E_3 kapalı alt uzayları verilmiş olsun. A_1 ve A_2 operatör çifti için X_{A_1,A_2} dönüşüm operatörü

$$X_{A_1,A_2} : E_1 \to E_2$$

şeklinde, A_2 ve A_3 operatörler çifti için X_{A_2,A_3} dönüşüm operatörü ise

$$X_{A_2,A_3} : E_2 \to E_3$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, A_1 ve A_3 operatör çifti için X_{A_1,A_3} dönüşüm operatörü,

$$X_{A_1,A_3} : E_1 \to E_3$$

şeklinde olmak üzere

$$X_{A_1,A_3} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}$$

formülü ile ifade edilir.

İspat. Dönüşüm operatörünün tanımından dolayı

$$A_1X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2}A_2$$
$$A_2X_{A_2,A_3} = X_{A_2,A_3}A_3$$

şeklinde olup, ikinci denklemden $A_2 = X_{A_2,A_3}A_3X^{-1}_{A_2,A_3}$ elde edilir. Bu eşitlik birinci denklemde yerine yazılırsa

$$A_1X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}A_3X^{-1}_{A_2,A_3}$$

veya

$$A_1X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}A_3$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$p_i(x)$ ve $r_i(x)$, $(i = 1,2)$, her sonlu aralıkta $(0 \le x \le b < \infty)$ integrallenebilir reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$A_1=\begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x)\end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_1(x) \tag{3.3.2}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_2(x) & 0 \\ 0 & r_2(x)\end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_2(x) \tag{3.3.3}$$

operatörlerini göz önüne alalım. Keyfi sonlu reel h_1 sayısı için

$$f_2(0)-h_1f_1(0)=0 \tag{3.3.4}$$

sınır şartını sağlayan, $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x)\end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_1 olsun. Keyfi sonlu reel h_2 sayısı için

$$g_2(0)-h_2g_1(0)=0 \tag{3.3.5}$$

sınır şartını sağlayan $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x)\end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_2 olsun. X operatör matrisi $f(x)\in E_1$ için

$$X\{f(x)\}=R(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)f(s)ds \tag{3.3.6}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $R(x)$ ve $K(x,s)$ iki boyutlu veya 2x2 boyutlu kare matrislerdir.

(3.3.2) ve (3.3.6) den,

$$\begin{aligned} A_1X\{f(x)\} &= BR'(x)f(x)+BR(x)f'(x)+Q_1(x)R(x)f(x)+BK(x,x)f(x) \\ &\quad+\int_0^x\{BK'_x(x,s)+Q_1(x)K(x,s)\}f(s)ds \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

dir. Diğer taraftan (3.3.3) ve (3.3.6) dan dolayı

$$XA_2\{f(x)\}= R(x)Bf'(x)+R(x)Q_2(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)\{Bf'(s)+Q_2(s)f(s)\}ds$$

dir. Son integralde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$XA_2\left\{f(x)\right\} = R(x)Bf'(x) + R(x)Q_2(x)f(x) + K(x,x)Bf(x) - K(x,0)Bf(0)$$
$$+\int_0^x \left\{K\left(x,s\right)Q_2(s) - K_s'(x,s)B\right\} f(s)ds \tag{3.3.8}$$

elde edilir. $f(x)$, E_1 uzayında keyfi vektör fonksiyonu olduğu için (3.3.1) eşitliğinden dolayı $f(x)$ ve $f'(x)$ in katsayıları ve (3.3.7), (3.3.8) in integral altındaki ifadelerinin eşit olması gerekir. Bu sebeple $f'(x)$ lerin katsayıları için

$$BR(x) = R(x)B \tag{3.3.9}$$

elde edilir. Eğer

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde alınırsa (3.3.9) eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\delta(x) = \alpha(x),\ \gamma(x) = -\beta(x)$$

bulunur, yani $R(x)$ matrisinin görüntüsü

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix} \tag{3.3.10}$$

olur.

Şimdi $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları hesaplansın. Bunun için (3.3.7) ve (3.3.8) de, $f(x)$ in katsayıları eşitlenirse $R(x)$ matrisinin tanımlanması için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$BR'(x) + Q_1(x)R(x) - R(x)Q_2(x) = K(x,x)B - BK(x,x) \tag{3.3.11}$$

$$K(x,s) = \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

olmak üzere $Q_1(x), Q_2(x), R(x)$ ve B matrislerinin görüntülerinden faydalanarak (3.3.11) denklemi

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x) & p_1(x)\beta(x) \\ -r_1(x)\beta(x) & r_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x) & r_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & r_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s) \\ K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \\ -K_{11}(x,s) & -K_{12}(x,s) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x)+\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x) & \alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x) \\ -\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x) & -\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\left[K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x)\right] & K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \end{pmatrix} \tag{3.3.12}$$

şeklinde yazılabilir. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple (3.3.12) denklemlerinden

$$\alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x)=-\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x)$$

$$\beta'(x)-\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x)=-\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x)$$

bulunur, yani

$$\begin{aligned} &2\alpha'(x)+q(x)\beta(x)=0 \\ &-2\beta'(x)+q(x)\alpha(x)=0 \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

olur. Burada

$$q(x)=p_1(x)-p_2(x)+r_1(x)-r_2(x) \tag{3.3.14}$$

şeklindedir. (3.3.13) sistemi de, bulunan birinci eşitliği $\alpha(x)$ ile ikinci eşitliği de $\beta(x)$ ile çarpıp, birinciden ikinci çıkarılırsa

$$2\alpha(x)\alpha'(x)+2\beta(x)\beta'(x)=0$$

yani

$$\left(\alpha^2(x)+\beta^2(x)\right)'=0$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha^2(x)+\beta^2(x)=\alpha^2(0)+\beta^2(0) \tag{3.3.15}$$

bulunur.

$$f_1(0)=1, \quad f_2(0)=h_1 \tag{3.3.16}$$

şartları sağlanmak üzere $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu sürekli, diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde $f(x)$ in (3.3.4) sınır koşulunu sağladığı açıktır ve bu sebeple $f(x)\in E_1$

dir. Yine kabul edilsin ki, $g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu, E_2 uzayının elemanı, dolayısıyla (3.3.5) sınır şartı sağlanacak şekilde

$$X\{f(x)\}=g(x) \tag{3.3.17}$$

olsun. Bu takdirde x=0 için (3.3.17) eşitliğinden ve X matris operatörünün tanımından dolayı, yani (3.3.6) ve (3.3.10) bağıntılarına göre

$$X\{f(0)\}=g(0)=R(0)f(0)$$

veya

$$g_1(0)=\alpha(0)f_1(0)+\beta(0)f_2(0)$$
$$g_2(0)=-\beta(0)f_1(0)+\alpha(0)f_2(0)$$

elde edilir. Bu denklemlerden (3.3.5) sınır şartını ve (3.3.16) şartlarını göz önüne almak üzere son eşitliklerin birincisini h_2 sayısı ile çarpıp, daha sonra ikinciden çıkarıldığında,

$$\beta(0)=\frac{h_1-h_2}{1+h_1h_2}\alpha(0)$$

elde edilir.

$$\alpha(0)=1 \tag{3.3.18}$$

alınırsa,

$$\beta(0)=\frac{h_1-h_2}{1+h_1h_2} \tag{3.3.19}$$

olur. Buna göre,

$$\alpha^2(0)+\beta^2(0)=\frac{(1+h_1^2)(1+h_2^2)}{(1+h_1h_2)^2}=X^2 \tag{3.3.20}$$

olur. Şimdi (3.3.15), (3.3.18)-(3.3.20) eşitliklerinden faydalanarak (3.3.13) sistemini çözelim. Eğer,

$$\alpha(x)=\chi\sin k(x) \quad \text{ve} \quad \beta(x)=\chi\cos k(x) \tag{3.3.20'}$$

olarak alınırsa,

$$\alpha'(x)=k'(x)\chi\cos k(x) \quad \text{ve} \quad \beta'(x)=-k'(x)\chi\sin k(x)$$

bulunur. Bu değerler (3.3.13) de yerine yazılıp elde edilen denklemlerden birincisi $\cos k(x)$ ile ikincisi de $\sin k(x)$ ile çarpılıp, elde edilen denklemler toplanırsa

$$k(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz + \arcsin\frac{1}{\chi}$$

eşitliği elde edilir. Bu değerler (3.3.20') de yerine yazılırsa, $q(x)$ fonksiyonu (3.3.14) formülü, χ sayısı ise (3.3.20) formülü ile tanımlanacak şekilde $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları için

$$\alpha(x) = \chi \sin\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz + \arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{3.3.21}$$

$$\beta(x) = \chi \cos\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz + \arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{3.3.22}$$

ifadeleri bulunur. Şimdi (3.3.7) ve (3.3.8) de verilen integral altındaki ifadeler eşitlenirse, $K(x,s)$ matris çekirdeği için,

$$K_s'(x,s)B + BK_x'(x,s) = K(x,s)Q_2(s) - Q_1(x)K(x,s) \tag{3.3.23}$$

matris denklemi veya

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial s} & \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} & \frac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2(s) & 0 \\ 0 & r_2(s) \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_2(s) - p_1(x))K_{11}(x,s) & (r_2(s) - p_1(x))K_{12}(x,s) \\ (p_2(s) - r_1(x))K_{21}(x,s) & (r_2(s) - r_1(x))K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= (p_2(s) - p_1(x))K_{11}(x,s) \\ \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= (r_2(s) - p_1(x))K_{12}(x,s) \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= (p_2(s) - r_1(x))K_{21}(x,s) \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= (r_2(s) - r_1(x))K_{22}(x,s) \end{aligned}\right\} \tag{3.3.23'}$$

denklem sistemi elde edilir. Sonuç olarak (3.3.8) ifadesinde $f(0)$'ı içeren terim (3.3.7) de

benzer terim olmadığı için) sıfıra eşit olur. Böylece,

$$K(x,0)Bf(0)=0$$

yani,

$$\begin{pmatrix} -K_{12}(x,0) & K_{11}(x,0) \\ -K_{22}(x,0) & K_{21}(x,0) \end{pmatrix} f(0)=0,$$

bu ise

$$K_{12}(x,0)f_1(0)=K_{11}(x,0)f_2(0)$$
$$K_{22}(x,0)f_1(0)=K_{21}(x,0)f_2(0)$$

denklemler sistemine eşdeğerdir. (3.3.4) sınır koşulundan dolayı

$$K_{12}(x,0)=h_1K_{11}(x,0)\ , \quad K_{22}(x,0)=h_1K_{21}(x,0) \tag{3.3.24}$$

elde edilir. $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ keyfi diferansiyellenebilir sürekli fonksiyonlar olacak biçimde,

$$K_{11}(x,0)=\varphi(x)\ , \quad K_{21}(x,0)=\psi(x) \tag{3.3.25}$$

ele alınırsa (3.3.24) ve (3.3.25) şartları, $K(x,s)$ matris çekirdeği için

$$K(x,s)|_{s=0}=\begin{pmatrix} \varphi(x) & h_1\varphi(x) \\ \psi(x) & h_1\psi(x) \end{pmatrix} \tag{3.3.26}$$

şartını tanımlar. Burada (3.3.26) şartı (3.3.23) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir [23].

Benzer şekilde Dirac operatörünün II. Kanonik formu için

$$A_1=\begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx}+q_1(x) \\ -\dfrac{d}{dx}+q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_1(x)$$

$$A_2=\begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx}+q_2(x) \\ -\dfrac{d}{dx}+q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_2(x)$$

olmak üzere (3.3.11) denklemi

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x)-q_1(x)\beta(x) & p_1(x)\beta(x)+q_1(x)\alpha(x) \\ q_1(x)\alpha(x)+p_1(x)\beta(x) & q_1(x)\beta(x)+p_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x)+q_2(x)\beta(x) & q_2(x)\alpha(x)-p_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & -q_2(x)\beta(x)-p_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s) \\ -K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \\ -K_{11}(x,s) & -K_{11}(x,s) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x)+[p_1(x)-p_2(x)]\alpha(x)-[q_1(x)+q_2(x)]\beta(x) & \alpha'(x)+[q_1(x)-q_2(x)]\alpha(x)+[p_1(x)+p_2(x)]\beta(x) \\ -\alpha'(x)+[q_1(x)-q_2(x)]\alpha(x)+[p_1(x)+p_2(x)]\beta(x) & -\beta'(x)+[p_2(x)-p_1(x)]\alpha(x)+[q_1(x)+q_2(x)]\beta(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -[K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x)] & K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple

$$\alpha'(x)+[q_1(x)-q_2(x)]\alpha(x)+[p_1(x)+p_2(x)]\beta(x)$$
$$=-\alpha'(x)+[q_1(x)-q_2(x)]\alpha(x)+[p_1(x)+p_2(x)]\beta(x)$$

$$\beta'(x)-[p_1(x)-p_2(x)]\alpha(x)+[q_1(x)+q_2(x)]\beta(x)$$
$$=-\beta'(x)+[p_2(x)-p_1(x)]\alpha(x)+[q_1(x)+q_2(x)]\beta(x)$$

bulunur, yani

$$2\alpha'(x)=0, \quad 2\beta'(x)=0$$

dır. Burada c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere

$$\alpha(x)=c_1, \ \ \beta(x)=c_2$$

bulunur. Ayrıca (3.3.23) denklemi

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(s) & q_2(s) \\ q_2(s) & -p_2(s) \end{pmatrix}
$$

$$
- \begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}
$$

veya

$$
\begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \left(p_2(s) - p_1(x)\right) K_{11}(x,s) + q_2(s) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) & q_2(s) K_{11}(x,s) - \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) \\ -q_1(x) K_{11}(x,s) + p_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{22}(x,s) & -q_1(x) K_{12}(x,s) + q_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s) K_{22}(x,s)\right) \end{pmatrix}
$$

şeklindedir. Bu durumda

$$
\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= \left(p_2(s) - p_1(x)\right) K_{11}(x,s) + q_2(s) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) \\
\frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= q_2(s) K_{11}(x,s) - \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) \\
-\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= -q_1(x) K_{11}(x,s) + p_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{22}(x,s) \\
\frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= -q_1(x) K_{12}(x,s) + q_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{22}(x,s)
\end{aligned}\right\} \quad (3.3.27)
$$

denklemler sistemi elde edilir. Burada (3.3.26) şartı (3.3.27) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir.

3.4. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektrum Türünden İfadesi

$$
By' + Q(x)y = \lambda y, 0 \le x \le \pi \tag{3.4.1}
$$

denklemini ve

$$
y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ y_1(\pi) = 0 \tag{3.4.2}
$$

$$
y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0,\ y_1(\pi) = 0 \tag{3.4.3}
$$

sınır koşullarını göz önüne alalım.

Burada

$$0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le \beta \le \pi\ ,\ \alpha \ne \beta\ ,\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

ve $p(x),\ q(x) \in L_2(0,\pi)$ dir. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ $n \in \overline{(-\infty,\infty)}$, (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \alpha_n,\ \ \mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \beta_n \tag{3.4.5}$$

asimptotik formülleri vardır. Burada

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\beta_n|^2 < \infty,\ \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \tag{3.4.6}$$

serileri yakınsaktır. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (3.4.1) denkleminin sırasıyla

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.4.7}$$

$$\psi_1(0,\lambda) = \sin\beta,\ \ \psi_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{3.4.8}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. λ_n ve μ_n lerin sırasıyla

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.9}$$

$$\psi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.10}$$

kökleri ile çakıştığı aşikardır.

Böylece $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

Teorem 4.1.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde (3.4.1), (3.4.2) probleminin α_n normlaştırıcı sayıları λ_n ve μ_n ler kullanılarak

$$\alpha_n = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{3.4.11}$$

formülü ile tanımlanır.

Burada, ' simgesi sonsuz çarpımda $k = n$ teriminin mevcut olmadığını gösterir.

İspat.

$$f(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{3.4.12}$$

fonksiyonu verilsin ve

$$f_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.13}$$

koşulu sağlansın. Bu takdirde

$$m(\lambda) = -\frac{\psi_1(\pi,\lambda)}{\varphi_1(\pi,\lambda)} \tag{3.4.14}$$

elde ederiz. Burada $m(\lambda)$ fonksiyonunun kutuplarının ve sıfırlarının sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakıştıkları ve meromorf fonksiyon olduğu görülür.

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \left(f(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx &= \int_0^\pi \Big\{\left(Bf'(x,\lambda_1)+Qf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right) \\
&\quad -\left(Bf'(x,\lambda_2)+Qf(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)\Big\}dx \\
&= \int_0^\pi \left(Bf'(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx + \int_0^\pi \left(Qf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx \\
&\quad -\int_0^\pi \left(Bf'(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)dx - \int_0^\pi \left(Qf(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)dx \\
&= \int_0^\pi \Big\{\left(Bf'(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right) + \left(Bf(x,\lambda_1), f'(x,\lambda_2)\right)dx\Big\} \\
&= \left[Bf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right]_0^\pi \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(x,\lambda_1) \\ f_2(x,\lambda_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1(x,\lambda_2) \\ f_2(x,\lambda_2) \end{pmatrix}\right]_0^\pi \\
&= \left[f_2(x,\lambda_1)f_1(x,\lambda_2) - f_1(x,\lambda_1)f_2(x,\lambda_2)\right]_0^\pi \\
&= f_2(0,\lambda_2)f_1(0,\lambda_1) - f_1(0,\lambda_2)f_2(0,\lambda_1) \\
&= \left[\psi_1(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\varphi_1(0,\lambda_1)\right]\times\left[\psi_2(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\varphi_2(0,\lambda_2)\right] \\
&\quad -\left[\psi_2(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\varphi_2(0,\lambda_1)\right]\times\left[\psi_1(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\varphi_1(0,\lambda_2)\right] \\
&= \left[\sin\beta + m(\lambda_1)\sin\alpha\right]\left[-\cos\beta - m(\lambda_2)\cos\alpha\right] \\
&\quad -\left[-\cos\beta - m(\lambda_1)\cos\alpha\right]\left[\sin\beta + m(\lambda_2)\sin\alpha\right] \\
&= \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\left[\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\right] \\
&= \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \left(f(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx = \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)$$

$\lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = \overline{\lambda}$ olarak alınırsa, özdeğerler reel olduğundan ve $z - \overline{z} = 2\operatorname{Im} z$ eşitliğinden

$$\int_0^\pi \left(f(x,\lambda), f(x,\lambda)\right)dx = \sin(\beta-\alpha)\frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \tag{3.4.15}$$

elde edilir. Bu formülde $\beta > \alpha (\beta < \alpha)$ olduğu durumda bu meromorf fonksiyon üst yarı düzlemi kendine dönüştürür.

Bu takdirde $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çaprazlaşırlar.

$n \neq m$ ise $\lambda_n \neq \lambda_m$ olur ve $m(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan

$$m(\lambda) = A \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{-1} \tag{3.4.16}$$

görüntüsü söz konusudur, burada A reel sayıdır. Yukarıdaki hesaplamaların benzeri yapılırsa

$$(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(f(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \sin(\alpha - \beta)$$

eşitliği kolayca elde edilebilir. (3.4.12) ifadesi yerine yazılırsa, buradan

$$(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(\psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx + m(\lambda)(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \sin(\alpha - \beta)$$

olur. Burada $\lambda \to \lambda_n$ için limit alınırsa

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda_n), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) m(\lambda)} \tag{3.4.17}$$

eşitliği elde edilir.

Bu formülden faydalanılarak α_n lerin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ ler yardımıyla görüntüsü elde edilebilir.

Öncelikle

$$m(\lambda) = A_1 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda}\right) \tag{3.4.18}$$

eşitliği ele alınsın. Burada

$$A_1 = A \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \tag{3.4.19}$$

şeklindedir. (3.4.18) deki

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda}\right) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda}\right) \tag{3.4.20}$$

çarpımını göz önüne alalım. (3.4.20) eşitliğinde logaritma alınıp $\{\lambda_k\}$ ve $\{\mu_k\}$ lar için asimptotik formüllerden yararlanılırsa;

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}+\frac{\mu_{-k}-\lambda_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi}+\beta_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}+\frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi}+\beta_{-k}-\alpha_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda} \tag{3.4.21}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}+\frac{1}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k-\alpha_k}{\lambda_k-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{-k}-\alpha_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda}$$

elde edilir.

(3.4.6) serilerinin yakınsaklığından (3.4.5) asimptotik formüllerinden ve Cauchy-Banjokowski eşitsizliğinden (3.4.21) deki son iki serinin yakınsaklığı elde edilir. (3.4.5) asimptotik formüllerinden

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}+\frac{1}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{-k}-\lambda+\lambda_k-\lambda}{(\lambda_k-\lambda)(\lambda_{-k}-\lambda)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2\frac{\alpha}{\pi}-2\lambda+\alpha_k+\alpha_{-k}}{(\lambda_k-\lambda)(\lambda_{-k}-\lambda)}$$

olur ve bu son seri yakınsaktır.

Bu sonuçlardan (3.4.20) sonsuz çarpımının yakınsaklığı elde edilir. (3.4.19) sonsuz çarpımının yakınsaklığından ve (3.4.20) formülünden (3.4.18) elde edilir. Bu takdirde

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)=\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)A_1\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda}\right)=-A_1\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\mu_n-\lambda)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda}$$

$$=-A_1(\mu_n-\lambda_n)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-\lambda_n}{\lambda_k-\lambda_n}$$

olur. Buradan

$$\alpha_n=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{A_1(\mu_n-\lambda_n)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n}\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

elde edilir. İleride $A_1=-1$ olduğu ispatlanacaktır. Bununla teorem ispatlanır.

3.5. Normlaştırıcı Sayılar İçin Asimptotik Formül

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\pm\infty \tag{3.5.1}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\pm\infty \tag{3.5.2}$$

asimptotik formülleri verilsin.

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{(\mu_n - \lambda_n)}{-A_1 \sin(\beta - \alpha)} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}; \; k \neq n \tag{3.5.3}$$

eşitliği ele alınsın. Bu bölümde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları için bilinen asimptotik formüllerden faydalanarak α_n ler için asimptotik formülü bulmaya çalışalım.

$$\phi(\lambda_n) = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \quad k \neq n \tag{3.5.4}$$

çarpımı göz önüne alınsın.

$$\phi(\lambda_n) = B_1 B_2 B_3 \tag{3.5.5}$$

olsun. Burada

$$B_1 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}{k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.6}$$

$$B_2 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.7}$$

$$B_3 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.8}$$

şeklindedir. Önce B_1 göz önüne alınsın. B_1 eşitliğinde λ_n ler için asimptotik formüllerden faydalanılırsa

$$B_1 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\pi(k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n)} \right), \; k \neq n \tag{3.5.9}$$

eşitliği bulunur. Bu formülde (3.5.1) asimptotik formülü kullanılırsa ve $k - n = p$ alınırsa

$$B_1 = \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\pi\left(p - \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \right) \tag{3.5.10}$$

olur.

$$\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\lambda}{p} \right) = \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda\pi} \tag{3.5.11}$$

olduğu için

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left\{\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\pi p}\right)\right\}^{-1}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\pi\left(p-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n\right)}\right)\\
&= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\alpha_1}{np}\right)\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)\\
&= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\frac{\sin\frac{\alpha_1}{n}\pi}{\frac{\alpha_1}{n}\pi}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)\\
&= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)
\end{aligned}
\tag{3.5.12}
$$

eşitliği elde edilir.

$$
I_1=\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)
$$

sonsuz çarpımı göz önüne alınsın. Bu takdirde yukarıdaki son eşitlikte logaritma alınıp daha sonra $\cot x$ in seri açılımından faydalanılırsa;

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 1-\frac{\pi\alpha_1}{n}\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\pi p+\alpha-\beta}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{\pi\alpha_1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{-2(\alpha-\beta)}{(\pi p)^2-(\alpha-\beta)^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= 1+\frac{\alpha_1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2\frac{\alpha-\beta}{\pi}}{p^2-(\frac{\alpha-\beta}{\pi})^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{\pi\alpha_1}{n}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}-ctg(\alpha-\beta)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
\tag{3.5.13}
$$

eşitliği elde edilir.

Bu takdirde

$$
B_1=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left\{1+\frac{\pi\alpha_1}{n}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}-ctg(\alpha-\beta)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}
\tag{3.5.14}
$$

bulunur.

Büyük n ler için B_2 sonsuz çarpımının asimptotik formülünü bulmaya çalışalım. Yukarıda yapılan işlemler tekrarlanırsa ve $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ için asimptotik formüllerden yararlanılırsa

$$B_2=\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda_n}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}=\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}\right)=1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{\lambda_n\left(k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n\right)_n}-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(3.5.15)$$

$$=1-\frac{s_1}{n}+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{\lambda_n\left(k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda\right)_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$s_1=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}$$

şeklindedir.

Benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$B_3=\frac{1}{\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}}=\frac{1}{1-\frac{s_2}{n}+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=1+\frac{s_2}{n}-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(3.5.16)$$

elde edilir. Burada

$$s_2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}$$

şeklindedir. (3.5.15) ve (3.5.16) çarpılıp ve daha sonra n nin kuvvetlerine göre düzenlenirse;

$$B_2B_3=1-\frac{s_1-s_2}{n}$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(3.5.17)$$

elde edilir.

(3.5.17) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk seri ele alınsın. (3.5.2) den $\mu_k - k + \frac{\beta}{\pi} = \frac{\beta_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ yazılabilir. Bu eşitlik (3.5.17) de yerine yazılırsa

$$J_2 = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\mu_k - k + \frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''\frac{\beta_1}{k}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n} +$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''O(\frac{1}{k^2})\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}(\mu_0 + \frac{\beta}{\pi})\frac{-\frac{\beta}{\pi}}{-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n} = E_1 + E_2 + O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.5.18}$$

eşitliği bulunur. Burada

$$E_1 = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''\frac{\beta_1}{k}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n} \tag{3.5.19}$$

$$E_2 = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''O\left(\frac{1}{k^2}\right)\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n} \tag{3.5.20}$$

şeklindedir. $\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''$ sembolü seride $k = n$ ve $k = 0$ terimleri'nin bulunmadığını ifade eder.

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''\frac{1}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}$$

olsun. $\lambda_n + \frac{\beta}{\pi} = \lambda$ olsun. Bu takdirde

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''\frac{1}{k-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\lambda}{k^2-\lambda^2} - \frac{1}{n-\lambda} \tag{3.5.21}$$

olur. [66] dan bilindiği gibi

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\lambda}{k^2-\lambda^2} = -\pi ctg\pi\lambda + \frac{1}{\lambda}$$

şeklindeydi. Bu takdirde $\lambda_n + \frac{\beta}{\pi} = \lambda$ eşitliğinden

$$F_1 = -\pi ctg\pi\lambda + \frac{1}{\lambda} = -\pi ctg\pi\left(\lambda_n + \frac{\beta}{n}\right) + \frac{1}{\lambda_n + \frac{\beta}{n}}$$

$$= -\pi ctg\pi\left[n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.5.22}$$

$$= -\pi ctg\left[\beta - \alpha + \frac{\pi\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \pi ctg(\alpha - \beta) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ve

$$F_2 = \frac{1}{n-\lambda} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha_1}{n} - \frac{\beta}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.5.23}$$

olur. (3.5.22) ve (3.5.23) formüllerinden

$$F = \pi ctg(\alpha - \beta) + \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Bu takdirde (3.5.19) dan

$$E_1 = \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha - \beta) - \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{3.5.24}$$

elde edilir.

Şimdi E_2 nin davranışı incelensin.

(3.5.20) formülünün sağ tarafındaki toplamın mertebesi aşağıdaki integraller toplamının mertebesi ile aynı olduğunu gösterilebilir.

$$c\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx + c\int_{1}^{n-1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx + c\int_{n+1}^{\infty} \frac{x}{x^2(x-n)}dx$$

integrallerini hesaplayalım. O halde

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx = \frac{1}{n}\int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+x}\right)dx = \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n+x}\Bigg|_{1}^{\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\int_{1}^{n-1} \frac{dx}{x(n-x)} = \int_{1}^{\frac{n}{2}} \frac{dx}{x(n-x)} + \int_{\frac{n}{2}}^{n-1} \frac{dx}{x(n-x)} = \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n-x}\Bigg|_{1}^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n-x}\Bigg|_{\frac{n}{2}}^{n-1} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x(x-n)} = \frac{1}{n}\ln\frac{x-n}{x}\Bigg|_{n+1}^{\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

bağıntıları bulunur.

Bu takdirde bu integrallerin değerlerinden ve (3.5.20) den

$$E_2 = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.25}$$

elde edilir. (3.5.24) ve (3.5.25) formüllerinden faydalanılarak (3.5.18) den

$$J_2 = \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{\alpha-\beta}\right] O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.26}$$

bulunur. Benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$J_3 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left\{\lambda_k - k + \frac{\alpha}{\pi}\right\} \frac{k - \frac{\alpha}{\pi}}{k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.27}$$

eşitliği elde edilir. (3.5.26), (3.5.27) ve (3.5.17) formüllerinden

$$B_2 B_3 = 1 - \frac{s_1 - s_2}{n} + \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{\alpha-\beta}\right] + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.28}$$

eşitliği bulunur.

$\dfrac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha-\beta)}$ çarpımı göz önüne alınsın. (3.5.1) ve (3.5.2) asimptotik formüllerinden $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ için

$$\frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi} + \frac{\beta_1-\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha-\beta}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{1}{n}\frac{\beta_1-\alpha_1}{\sin(\alpha-\beta)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

yazılır. Son eşitlik, (3.5.14) ve (3.5.28) ifadeleri (3.5.3) te yerine yazılırsa α_n sayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \left\{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s_2 - s_1}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha-\beta)\right] + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\} \frac{1}{(-A_1)}$$

asimptotik formülü veya

$$\frac{1}{\alpha_n} = \left\{\frac{1}{\pi} + \frac{c}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\} \frac{1}{(-A_1)} \tag{3.5.29}$$

formülü elde edilir.

Burada

$$c = \frac{s}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha-\beta) \tag{3.5.30}$$

ve

$$s = s_2 - s_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\lambda_k - \mu_k\} + \frac{\beta-\alpha}{\pi} \tag{3.5.31}$$

şeklindedir. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 3.5.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları sırasıyla (3.5.1) ve (3.5.2) asimptotik formülleri sağlandığında (3.5.3) ile tanımlı α_n normlaştırıcı sayıları (3.5.29) asimptotik formülünü sağlar.

Not 3.5.1. Daha önceki bölümde α_n lerin (3.2.5) bağıntısını sağladığı ispatlanmıştır. Bu teoremde α_n lerin (3.5.29) bağıntısını sağladığı elde edilir. (3.2.5) ve (3.5.29) formülleri karşılaştırılırsa $A=-1$ elde edilir.

3.6. İki Spektruma Göre Regüler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

Bu bölümde iki spektruma göre Kanonik Dirac operatörü için ters problemin çözümü detaylı bir şekilde incelenecektir. Sturm-Liouville için benzer problem [14] çalışmasında tamamıyla çözülmüş ve bu problemin çözümüyle ilgili literatürde geniş kaynaklar verilmiştir.

$$By'+Q(x)y=\lambda y,\ 0\le x\le \pi \tag{3.6.1}$$

ve

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

olsun. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının $[0,\pi]$ de tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve onların $k.$ mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olsun. (3.6.1) denklemi ve

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \tag{3.6.2}$$

$$y_1(\pi)=0 \tag{3.6.3}$$

sınır koşullarıyla oluşan sınır değer problemi göz önüne alınsın.

Teoremi ispat etmeden önce aşağıdaki Lemma'yı verelim.

Lemma 3.6.1. Eğer $n\neq m$ için $\lambda_n\neq\lambda_m$ ve $n\to\infty$ için

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\alpha_n \tag{3.6.4}$$

asimptotik formülü sağlanıyorsa ve $\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$ ise bu takdirde elemanların görüntüsü (f_1,f_2) ve bu elemanlar $L_2(0,\pi)$ de lineer bağımsız olmak üzere $\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar

sistemi tamdır. Burada $\varphi_0^T(x,\lambda_n)=\left(\sin(\lambda_n x+\alpha),-\cos(\lambda_n x+\alpha)\right)$ şeklindedir.

İspat. $L_2(0,\pi)$ de $\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ sisteminin tam olmadığı kabul edilsin. Bu takdirde

$\int\limits_0^\pi \left(f_1\sin(\lambda_n x+\alpha)-f_2\cos(\lambda_n x+\alpha)\right)dx=0$ olmak üzere $L_2(0,\pi)$ de $\exists f(x)=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}\neq 0$

vardır.

$$F(\lambda)=\int\limits_0^\pi \left(f_1\sin(\lambda x+\alpha)-f_2\cos(\lambda x+\alpha)\right)dx$$

olsun. Eğer $\lambda=\lambda_n$ ise $F(\lambda_n)=0$ dır. $F(\lambda)$ fonksiyonu mertebesi 1, tipi π olan ve

$$\left|F(\lambda)\right|=O(e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\pi}) \tag{3.6.5}$$

olacak şekilde bir tam fonksiyondur.

$$G(\lambda)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=-N}^{N}(1-\frac{\lambda}{\lambda_n})$$

fonksiyonu verilsin. Bu sonsuz çarpımın yakınsaklığı $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=-N}^{N}(1-\frac{\lambda}{\lambda_n})$ limitinin yakınsak oluşundan elde edilir.

$$G(\lambda)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)}\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)$$

Burada λ_n^0, $Q(x)=0$ olduğu duruma karşılık gelen sınır değer probleminin özdeğerleridir. Bu özdeğerlerin aşağıdaki formülü sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

$$\lambda_n^0=n-\frac{\alpha}{\pi} \tag{3.6.6}$$

$\sin(\lambda\pi+\alpha)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan aşağıdaki formül doğrudur.

$$G_0(\lambda)=\sin(\lambda\pi+\alpha)=\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)$$

Bu takdirde

$$G(\lambda)=A(\lambda)G_0(\lambda) \tag{3.6.7}$$

olur. Burada

$$A(\lambda)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)} \tag{3.6.8}$$

şeklindedir. (3.6.8) formülünden faydalanarak $A(\lambda)$ için asimptotik formülü bulalım. $A(\lambda)$ fonksiyonunda düzenleme yapılırsa;

$$A(\lambda)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)}=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{\lambda_n\lambda_{-n}}}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)}{\lambda_n^0\lambda_{-n}^0}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^0\lambda_{-n}^0}{\lambda_n\lambda_{-n}}\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)}$$

formülü bulunur. (3.6.6) formülünden $\lambda_n^0\lambda_{-n}^0=-n^2+\frac{\alpha^2}{\pi^2}$ elde edilir. Bu takdirde

$$A(\lambda)\sim c\,\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)} \tag{3.6.9}$$

ve (3.6.4) ve (3.6.6) formüllerinden $\lambda_n-\lambda_n^0=O\left(\frac{1}{n}\right)$ elde edilir. Şimdi

$$J(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda_n^0-\lambda}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)$$

sonsuz çarpım göz önüne alınsın. Bu son formülde logaritma alınıp daha sonra seri açılımı yapılırsa;

$$\ln J(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)^2+\cdots \tag{3.6.10}$$

bulunur. Burada; $n\to\infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)^2\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}{\left(n-\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)^2}\to 0$$

elde edilir.

$\lambda=a+ib$ olsun. Buradan $\left|\lambda_n^0-\lambda\right|=\sqrt{(\lambda_n^0-a^2)+b^2}$ olur. O halde (3.6.10) deki ilk toplam

serisi için aşağıdaki eşitsizlik bulunur.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right|\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\alpha_1}{n}+O(\frac{1}{n^2})}{\sqrt{(\lambda_n^0-a^2)+b^2}}\le\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$$

Son durumdaki has olmayan integral a ve b nin durumlarına göre incelensin.

1. $a=b$ ve $a\to\infty$ iken $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}a}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\frac{1}{4a^2}}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a}\to 0$

2. $a=-b$ ve $a\to\infty$ iken $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+a^2}}\to 0$

olur.

Bu sonuçlar (3.6.10) de yerine yazılırsa,

$$J(\lambda)=1+o(1)$$

elde edilir. Buradan (3.6.9) ve (3.6.7) formüllerinden

$$G(\lambda)=G_0(\lambda)[c+o(1)] \qquad (3.6.11)$$

elde edilir.

$$\phi(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)} \qquad (3.6.12)$$

fonksiyonu verilsin. Bu takdirde $G(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları da $F(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırı olduğu için $\phi(\lambda)$ tam fonksiyondur yani $\phi(\lambda)$ fonksiyonu bir meromorf fonksiyondur. (3.6.5) ve (3.6.11) asimptotik formüllerinden $F(\lambda)$ fonksiyonunun $\arg\lambda=\pm\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{2}$ ışınları üzerinde sınırlı olduğu elde edilir. Bu sebeble $\phi(\lambda)$ sabit bir sayıdır. Buradan

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}\phi(\lambda)=\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}=\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}O(e^{-i\lambda\pi})\frac{1}{\sin(\lambda\pi+\alpha)}=0$$

olur. Dolayısıyla $\phi(\lambda)=0$, bu sebeple $F(\lambda)=0$ olur. Buradan $f(x)=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}=0$ olur.

Bu ise varsayım ile çelişir. Bu sebeple $L_2(0,\pi)$ de $\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ fonksiyonlar sistemi tamdır.

$\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ sisteminin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$$G_n(\lambda)=\frac{G(\lambda)}{\lambda-\lambda_n},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{3.6.13}$$

fonksiyonu verilsin.

$$\int_0^{\pi}\left(f_n(x),\varphi_0(x,\lambda_k)\right)dx=G_n(\lambda) \tag{3.6.14}$$

sağlanacak şekilde $f_n(x)=\begin{pmatrix} f_{1,n}(x)\\ f_{2,n}(x)\end{pmatrix}$ fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de olsun.

$$\int_0^{\pi}\left(f_n(x),\varphi_0(x,\lambda_k)\right)dx=\begin{cases}0 & k\neq n\\ G_n(\lambda) & k=n\end{cases} \tag{3.6.15}$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. $\{f_n(x)\}$ ve $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ vektör fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de olmak üzere bir ortogonal sistem oluştururlar.

$\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin lineer bağımsız yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_0(x,\lambda_n)=0 \tag{3.6.16}$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım. (3.6.16) eşitliğinin $f_k(x)$ ile skaler çarpılıp ve daha sonra 0 dan π ye kadar x e göre integrallenirse ve sonuç olarak (3.6.15) ifadesi kullanılarak $\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$ yani $\alpha_k=0$ bulunur.

Gerçekten de

$$f_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_0(x,\lambda_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}f_k(x)\alpha_k\varphi_0(x,\lambda_k)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$$

olur. Burada $\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$ yani $\alpha_k=0$ bulunur. Bu ise çelişkidir. Bununla Lemma 3.6.1. ispatlanır.

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.6.1. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının k.mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$de olmak üzere $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$matris fonksiyonlu (3.6.1)-(3.6.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve normlaştırıcı sayılarının $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ olabilmesi için, $n \neq m$ için $\lambda_n \neq \lambda_m$, tüm n ler için $\alpha_n > 0$ olacak biçimde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ lerin

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k,n}}{n^k} \tag{3.6.17}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{k,n}}{n^k} \tag{3.6.18}$$

asimptotik formüllerini sağlaması ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$$

şeklinde olmak üzere

$$F(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n) - \frac{1}{\pi} \varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0) \right\} \tag{3.6.19}$$

fonksiyonunun k. mertebeden türevlerinin $L_2(0,\pi)$ den olması gerek ve yeterdir.

İspat: Önce gereklilik kısmını hesaplayalım. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ (3.6.1)-(3.6.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları olsun. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları için (3.6.17) ve (3.6.18) asimptotik formülleri daha önceden verilmişti ve ayrıca tanımdan dolayı tüm α_n ler 0 dan büyüktür.

$\lambda_n \neq \lambda_m$ olması ise ileride gösterilecektir. Bu sebeple $F(x,t)$ lerin k. mertebeden türevlerinin $L_2(0,\pi)$ de olduğunu ispatlamak gerekir.

$t < x$ olsun. (3.6.17) ve (3.6.18) asimptotik formüllerini kullanarak $\forall x \neq t$ için $L_2(0,\pi)$ deki tanımlı metrik anlamda (3.6.19) serisinin yakınsaklığını ve

$$\int_0^x \int_0^t F(u,v)\,du\,dv = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x \int_0^t \varphi_0(u,\lambda_n)\varphi_0^T(v,\lambda_n)\,du\,dv - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^x \int_0^t \varphi_0(u,\lambda_n^0)\varphi_0^T(v,\lambda_n^0)\,du\,dv \tag{3.6.20}$$

nin sağlandığını ispat etmek mümkündür. [21] den bilindiği gibi

$$\varphi_0(x,\lambda_n) = \varphi(x,\lambda_n) + \int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt \tag{3.6.21}$$

integral denklemi vardır. Her iki tarafın transpozu alınırsa

$$\varphi_0^T(x,\lambda_n)=\varphi^T(x,\lambda_n)+\int_0^x \varphi^T(t,\lambda_n)H^T(x,t)dt,\quad n=(-\infty,\infty) \tag{3.6.22}$$

elde edilir. Bu dönüşüm operatörleri (3.6.20) de yerine yazılırsa ve düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^t F(u,v)dudv =& \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)dudv+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds\\ &+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x dv\int_0^t du\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)ds\\ &+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x du\int_0^t dv\left\{\int_0^u\int_0^v H(u,s_1)\varphi(s_1,\lambda_n)\varphi^T(s_2,\lambda_n)H^T(x,s_2)ds_1ds_2\right.\\ &-\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^x\int_0^t\left\{\varphi(u,\lambda_n^0)+\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n^0)ds\right\}\left\{\varphi^T(v,\lambda_n^0)+\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n^0)H^T(v,s)ds\right\}dudv\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.6.23}$$

formülü bulunur. (3.6.23) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamları ayrı ayrı hesaplayalım.

$$I_1=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds \tag{3.6.24}$$

toplamını göz önüne alalım.

$$f_t(u)=\begin{cases}1, & u\le t\\ 0, & u>t\end{cases}$$

fonksiyonu verilsin.

Bu takdirde

$$\begin{aligned}I_1&=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds\\ &=\int_0^x dv\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t f_1(u)\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)f_2^T(v)ds\\ &=\int_0^x dv\int_s^t H^T(v,s)dv=\int_0^x du\int_u^t H^T(s,u)ds\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x dv\int_0^t du\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)ds=\int_0^t du\int_u^v H(s,u)ds \tag{3.6.25}$$

ve

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x du\int_0^t dv\left\{\int_0^u\int_0^v H(u,s_1)\varphi(s_1,\lambda_n)\varphi^T(s_2,\lambda_n)H^T(v,s_2)ds_1ds_2=\int_0^t ds\int_s^x H(u,s)du\int_0^t H^T(v,s)dv\right. \tag{3.6.26}$$

olduğunu ispat etmek mümkündür.

$$I_2=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x\int_0^t\varphi(u,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)dudv$$

toplamı ve

$$\varphi_t(u)=\begin{cases}1, & u\le t\\ 0, & u>t\end{cases},\quad \psi_x(u)=\begin{cases}1, & u\le x\\ 0, & u>x\end{cases}$$

fonksiyonları verilsin. Bu takdirde

$$I_2=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x\psi_x(u)\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^t\psi_t(u)\varphi^T(v,\lambda_n)dv=\int_0^t\psi_x(u)\psi_t(u)du \tag{3.6.27}$$

ve

$$\begin{aligned}I_3&=\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^x\int_0^t\left\{\left\{\varphi(u,\lambda_n^0)+\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n^0)ds\right\}\left\{\varphi^T(v,\lambda_n^0)+\int_0^v\varphi^T(s,\lambda_n^0)H^T(v,s)ds\right\}dudv\right\}\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^x\int_0^t\varphi_0(u,\lambda_n)\varphi_0^T(v,\lambda_n^0)dudv=\int_0^t\psi_x(u)\psi_t(u)du\end{aligned} \tag{3.6.28}$$

elde edilir.

(3.6.24)-(3.6.27) ve (3.6.28) fonksiyonları (3.6.23) te yerine yazılırsa

$$\int_0^x\int_0^t F(u,v)dudv=\int_0^x du\int_u^t H^T(s,u)ds+\int_0^t du\int_u^x H(s,u)ds+\int_0^t ds\int_s^x H(u,s)du\int_s^t H(v,s)dv$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına $\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}$ operatörü uygulanırsa

$$F(x,t)=H(x,t)+H^T(t,x)+\int_0^t H(x,s)H^T(t,s)ds$$

integral denklemi bulunur. $t<x$ için $H(t,x)=0$ olduğu için buradan;

$$F(x,t)=H(x,t)+\int_0^t H(x,s)H^T(t,s)ds \tag{3.6.29}$$

elde edilir. $H(x,t)$ $L_2(0,\pi)$ de bulunacak şekilde k. mertebeden türevlere sahip olduğundan (3.6.29) eşitliğinden $F(x,t)$ nin de aynı özelliklere sahip olduğu elde edilir. Bununla gereklilik ispatlanır.

Şimdi de yeterlilik kısmını hesaplayalım. (3.6.17) ve (3.6.18) ile tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları verilsin. Ayrıca $n\neq m$ için $\lambda_n\neq\lambda_m$ ve tüm $\alpha_n>0$ ler için (3.6.19) formülü

ile tanımlı $F(x,t)$ fonksiyonunun k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olsun. $K(x,t)$ çekirdeğinin

$$F(x,t)+K(x,t)+\int_0^t K(x,s)F(s,t)ds=0,\quad 0\le t\le x\le \pi \tag{3.6.30}$$

integral denklemini sağladığı ispatlanmıştır.

$t>x$ için $K(x,t)$ (1.28) tek çözüme sahiptir. Bunun için

$$g(t)+\int_0^x F(s,t)g(s)ds=0,\quad 0\le x\le \pi \tag{3.6.31}$$

homojen denkleminin $L_2(0,\pi)$ de bulunan aşikar çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Aksini varsayalım. (3.6.31) integral denklemi $L_2(0,\pi)$ de aşikar olmayan $g(t)\ne 0$ çözümüne sahip olsun. (3.6.31) denkleminin her iki tarafı $g(t)$ ile skaler çarpılırsa ve t ye göre 0 dan x e kadar integrallenirse

$$\int_0^x \left|g^2(t)\right|dt+\int_0^x\int_0^x \left(F(s,t)g(s)g(t)\right)dsdt=0$$

elde edilir.

Bu son formülde $F(x,t)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\int_0^x g^2(t)dt+\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(s)g(t)dsdt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)g(s)g(t)dsdt=0$$

elde edilir. Burada Parseval eşitliğinden faydalanılırsa

$$\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(s)g(t)dsdt=0$$

yani

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^x\left(\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(t)dt\right)\right)^2=0$$

sonsuz toplamı elde edilir. $\alpha_n>0$ olduğu için buradan

$$\int_0^x \varphi_0^T(t,\lambda_n)g(t)dt=0$$

elde edilir. Bu takdirde $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tamlığından $g(t)=0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla (3.6.31) denklemi çözülebilirdir ve bir tek $K(x,t)$

çözümüne sahiptir. Bu takdirde

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt \tag{3.6.32}$$

integral denklemi,

$$B\varphi'+Q(x)\varphi=\lambda\varphi, \quad Q(x)=K(x,x)B-BK(x,x) \tag{3.6.33}$$

denklemini ve

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{3.6.34}$$

başlangıç koşullarını sağlar.

Şimdi $\varphi(x,\lambda_n)$ $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlarının ortogonalliğini ispatlayalım ve π noktasındaki sınır koşullarını tanımlayalım. $f(x)\in L_2(0,\pi)$ ve $g(x)\in L_2(0,\pi)$ olmak üzere Parseval eşitliğinden

$$\int_0^\pi \big(f(x),g(x)\big)dx=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \big(f(x),\varphi(x,\lambda_n)\big)dx\int_0^\pi \big(g(t),\varphi(t,\lambda_n)\big)dt \tag{3.6.35}$$

yazılır. (3.6.35) eşitliğini kullanarak

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \big(f(t),\varphi(t,\lambda_n)\big)dt\right)\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.36}$$

serisi de düzgün yakınsak olacak biçimde

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.37}$$

$$c_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \big(f(t),\varphi(t,\lambda_n)\big)dt \tag{3.6.38}$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlamak mümkündür. Gerçekten de

$$g(t)=\begin{cases}1, & x\le t\le x+\Delta x\\ 0, & 0\le t<x \ \ ve\, x+\Delta x\le t\le\pi\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu verilsin. Bu takdirde (3.6.37) eşitliğine göre aşağıdaki eşitlik

$$\int_0^{x+\Delta x} f(t)dt=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \big(f(t),\varphi(t,\lambda_n)\big)dt\int_x^{x+\Delta x}\varphi(t,\lambda_n)dt$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafı Δx 'e bölünürse ve $\Delta x\to 0$ için limit alınırsa sonuçta (3.6.37) fonksiyonu elde edilir. Özel olarak Green formülünden $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ için

asimptotik formüllerden $f(x)=\varphi(x,\lambda_k),\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ olacak şekilde (3.6.37) serisinin düzgün ve mutlak yakınsaklığı elde edilir.
Bu sebeple

$$\varphi(x,\lambda_k)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}\left(\varphi(t,\lambda_k),\varphi(t,\lambda_n)\right)dt\right)\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.39}$$

eşitliği bulunur. $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sistemi lineer bağımsız olduğu için (3.6.32) dönüşüm formülünden dolayı $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sistemi de $L_2(0,\pi)$ de lineer bağımsızdır. Bu sebeple (3.6.39) eşitliğinden

$$\int_0^{\pi}\left(\varphi(t,\lambda_k),\varphi(t,\lambda_n)\right)dt=\begin{cases}0, & n\neq k\\ \alpha_n, & n=k\end{cases} \tag{3.6.40}$$

eşitliği elde edilir. (3.6.40) ve Parseval eşitliğinden $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam ortogonal sistem oluşturduğu elde edilir.

π noktasındaki sınır koşulunu tanımlayalım. $\varphi(x,\lambda)$ (3.6.33) denklemini sağladığı için

$$B\varphi'(x,\lambda_n)+Q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n\varphi(x,\lambda_n)$$

$$B\varphi'(x,\lambda_m)+Q(x)\varphi(x,\lambda_m)=\lambda_m\varphi(x,\lambda_m)$$

olur. I. soldan $\varphi^T(x,\lambda_m)$, II. soldan $\varphi^T(x,\lambda_n)$ çarpılıp ve daha sonra I. ifade II. 'den çıkarılırsa

$$\varphi^T(x,\lambda_m)B\varphi'(x,\lambda_n)-\varphi^T(x,\lambda_n)B\varphi'(x,\lambda_m)=(\lambda_n-\lambda_m)\varphi^T(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)$$

elde edilir.

Sonuncu denklem 0 dan π ye kadar integrallenirse, $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ nin ortogonolliği ve (3.6.34) koşulu kullanılırsa;

$$\int_0^{\pi}\left[\left(\varphi_{1m},\varphi_{2m}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1n}'\\ \varphi_{2n}'\end{pmatrix}-\left(\varphi_{1n},\varphi_{2n}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1m}'\\ \varphi_{2m}'\end{pmatrix}\right]dx=\left(\lambda_n-\lambda_m\right)\int_0^{\pi}\left[\left(\varphi_{1n},\varphi_{2n}\right)\begin{pmatrix}\varphi_{1n}\\ \varphi_{2n}\end{pmatrix}\right]dx$$

veya

$$\int_0^{\pi}\left[-\varphi_{1n}'\varphi_{2m}+\varphi_{1m}\varphi_{2n}'+\varphi_{1m}'\varphi_{2n}-\varphi_{1n}\varphi_{2m}'\right]dx=0$$

veya

$$\int_0^{\pi}\left(\varphi_{1m}\varphi_{2n}-\varphi_{1n}\varphi_{2m}\right)'dx=0$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_{1m}(\pi)\varphi_{2n}(\pi)-\varphi_{1n}(\pi)\varphi_{2m}(\pi)=0$$

ve böylece

$$\frac{\varphi_{1m}(\pi)}{\varphi_{2m}(\pi)}=\frac{\varphi_{1n}(\pi)}{\varphi_{2n}(\pi)}=sabit$$

olur.

Diğer taraftan (3.6.32) dönüşüm formülünden

$$\frac{\varphi_1(\pi,\lambda_k)}{\varphi_2(\pi,\lambda_k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_1(\pi,\lambda_n)}{\varphi_2(\pi,\lambda_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\lambda_n\pi+\alpha)+o(1)}{-\cos(\lambda_n\pi+\alpha)+o(1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n\pi-\alpha+\alpha)+o(1)}{-\cos(n\pi-\alpha+\alpha)+o(1)}=0$$

elde edilir. Bu sebeple $\varphi_1(\pi,\lambda_k)=0$ dır. Bununla teorem ispatlanır.

3.6.1. İki Spektruma Göre Ters Problem

Bu bölümde regüler Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem çözümü tam şekilde verilmiştir.

Teorem 3.6.1.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. λ_n ve μ_n dizileri çaprazlaşırlar.
2. $\alpha,\ \alpha_1,\ \beta,\ \beta_1$ sabit sayılar olmak üzere $n\to\pm\infty$ iken λ_n ve μ_n sayıları için

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.6.1.1}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.6.1.2}$$

asimptotik formülleri sağlanır.

3. $0\le\alpha\le\pi,\ 0\le\beta\le\pi,\ \alpha\ne\beta$ dır.

Bu takdirde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonlu (3.4.2) ve (3.4.3) sınır koşullarını sağlayan aynı bir kanonik Dirac operatörünün iki farklı spektrumlarıdır.

İspat. (3.6.1.1) ve (3.6.1.2) asimptotik formülleriyle tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizileri verilsin.

$$\alpha_n=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\mu_n-\lambda_n}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n} \tag{3.6.1.3}$$

formülü ele alınsın.

Önceki bölümde verilen sonuçlardan α_n normlaştırıcı sayıları için (3.5.29) asimptotik

formülünün sağlandığı elde edilmişti.

Tüm α_n lerin 0 dan büyük olduğunu gösterelim.

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda} \tag{3.6.1.4}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın.

$m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları ile çakışırlar. Bu takdirde teoremin koşulundan dolayı $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları sıralıdırlar.

$\lambda = it$ ve $t \to \infty$ için

$$m_1(\lambda) \to -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \tag{3.6.1.5}$$

elde edilir ve Weyl fonksiyonunun tanımından

$$\frac{1}{\alpha_n} = \operatorname{Re} s\, m_1(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n} \tag{3.6.1.6}$$

eşitliği yazılır. Bu sebeple

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda-\lambda_n)} \tag{3.6.1.7}$$

dir. Burada α_k ların hepsi aynı işarete sahiptirler.

(3.5.29) formülünde büyük k lar için $\alpha_k > 0$ olduğu görülüyor. Bu sebeple $\forall\alpha_k > 0$ için sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonuna sahip (3.4.1) denkleminin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre birebir olarak tanımlanması elde edilir. $\{\lambda_n\}$ dizisi

$$By' + Q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le \pi \tag{3.6.1.8}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\quad 0 \le \alpha \le \pi \tag{3.6.1.9}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.6.1.10}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Burada α sayısı (3.6.1.1) ile tanımlanır. $\{\gamma_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre tanımlanmış

$$By' + Q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le \pi \tag{3.6.1.8}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0 \tag{3.6.1.11}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.6.1.12}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Burada β, (3.6.1.2) ile tanımlanır. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$,

(3.6.1.8) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix},\ \psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\beta\\ -\cos\beta\end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarıyla tanımlı çözümleri olsun. Bu takdirde

$$m(\lambda)=\frac{\psi_1(\pi,\lambda)}{\varphi_1(\pi,\lambda)}$$

fonksiyonunun kutupları ve sıfırları sırasıyla $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ sayıları ile çakışır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n}$$

formülü bulunur. Bu takdirde

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda-\lambda_k)} \qquad (3.6.1.13)$$

eşitliği elde edilir. (3.6.1.7) ve (3.6.1.13) formüllerinden

$$m_1(\lambda)=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)$$

elde edilir. Bu sebeple $m(\lambda)$ ve $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları çakışırlar. Dolayısıyla $\gamma_n=\mu_n,\ 0,\pm1,\pm2,\cdots$ olur. Bununla teorem ispatlanır.

Teorem 3.6.1.2. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ (3.6.1.8) denkleminin (3.6.1.9) ve (3.6.1.10) sınır koşullarını sağlayan iki farklı spektrumları olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerek ve yeterdir.

$p(x)$ ve $q(x)$ k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ uzayında olacak şekilde

$$Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$$

matris fonksiyonu verilsin.

1. λ_n ve μ_n dizileri çaprazlaşır.
2. Aşağıdaki asimptotik formüller söz konusudur.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

burada $\alpha \neq \beta, 0 \leq \beta, \alpha \leq \pi$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{k,n}\right|^2 < \infty, \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\beta_{k,n}\right|^2 < \infty$ dir.

İspat. λ_n ve μ_n sayıları çaprazlaştığı için bu teoremin gerekliliği Bölüm 3.2 de verildi. Yeterliliğin ispatı ise Teorem 3.6.1.1 in ispatına benzerdir.

4. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ

Bu bölümde sonlu kapalı aralıkta tanımlı ve l pozitif veya negatif tam sayı olmak üzere, π noktasında $\frac{l}{\pi - x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tekile sahip Dirac operatörü için ters problem incelenecektir. Özel olarak farklı sınır koşullarına karşılık gelen $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ sayılar dizisine göre potansiyel matris fonksiyonunun bulunması ispatlanacaktır. Benzer problemler [21], [54] ve diğer çalışmalarda ele alınmıştır.

4.1. Singuler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y, 0 \le x < \pi \tag{4.1.1}$$

denklemi ile birlikte

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ 0 \le \alpha < \pi \tag{4.1.2}$$

$$y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.1.3}$$

sınır şartları göz önüne alınsın. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{l}{\pi - x} \\ \frac{l}{\pi - x} & 0 \end{pmatrix},\ y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $Q(x)$, $[0,\pi]$ de sürekli bir matris fonksiyonu, λ ise kompleks parametredir. Basitlik için biz l yi tek negatif tam sayı olarak ele alacağız.

(4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerlerini $\{\lambda_n\}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$ ve buna karşılık gelen özfonksiyonları ise $\varphi_n(x)$ olsun.

$$\alpha_n = \int_0^\pi (\varphi_n(x), \varphi_n(x))dx = \int_0^\pi \left\{\varphi_1^2(x,\lambda_n) + \varphi_2^2(x,\lambda_n)\right\}dx \tag{4.1.4}$$

sayılarına (4.1.1)-(4.1.3) probleminin normlaştırıcı sayıları denir. $\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.1.5}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun.

Teorem 4.1.1. $Q_1(x)=\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}$ için $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tekilsiz problemin sırasıyla özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları ise $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\cdots$ (4.1.1)-(4.1.3) probleminin $l=-(2k+1)$ için özdeğerleri ve normlaştırıcı sayılarıdır ve tersine $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\cdots$ (4.1.1)-(4.1.3) probleminin $l=-(2k+1)$ için özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları ise

$$By'+Q_1(x)y=\lambda y, 0\le x\le \pi \tag{4.1.6}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{4.1.7}$$

$$y_1(\pi)=0 \tag{4.1.8}$$

probleminin sırasıyla özdegerleri ve normlaştırıcı sayılarıdır.

İspat. Önce gereklilik kısmı yapılsın. $\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda)\\ \psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.6) denkleminin

$$\psi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \psi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{4.1.9}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\psi(x,\lambda)$ nın (4.1.7) sınır koşullarını sağladığı açıktır. Bu sebeple $\psi(x,\lambda_n)$ (4.1.6)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonlarıdır ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\big(\psi(t,\lambda_n),\psi(t,\lambda_n)\big)dt=\int_0^{\pi}\left\{\psi_1^2(x,\lambda_n)+\psi_2^2(x,\lambda_n)\right\}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{4.1.10}$$

şeklindedir.

Bu teoremi tümevarım metodu ile ispatlayalım. $k=0$ olsun. Bu takdirde $\cdots,\lambda_{-1},\lambda_1,\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{-1},\alpha_1,\cdots$ sırasıyla (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları olduğu ispatlayalım. (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özfonksiyonları ile (4.1.6)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonları arasında

$$\varphi(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^{x}\big(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda)\big)dy}{\alpha_0-\int_0^{x}\big(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\big)dt} \tag{4.1.11}$$

bağıntısı vardır. Buna Crum dönüşümü denir.

(4.1.1)-(4.1.3) ve (4.1.6)-(4.1.8) problemlerinin çözüm fonksiyonlarında $x=0$ yazılırsa

$$\varphi(0,\lambda)=\psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix}$$

elde edilir.

$\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu, (4.1.6) denkleminin çözümü olduğundan

$$K(x,y)=\frac{\psi(x,\lambda_0)\psi^T(y,\lambda_0)}{\alpha_0-\int\limits_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.12}$$

fonksiyonu

$$BK_x^{'}(x,y)+Q_1(x)K(x,y)+\left[K(x,x)B-BK(x,x)\right]K(x,y)=-K_y^{'}(x,y)B+K(x,y)Q_1(y) \tag{4.1.13}$$

denkleminin çözümü olduğu aşikardır.

Bu takdirde (4.1.11) ile tanımlı $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$B\varphi'(x,y)+Q_1(x)\varphi(x,\lambda)+\left[K(x,x)B-BK(x,x)\right]\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda) \tag{4.1.14}$$

denklemini sağlar.

$$\Delta Q_1(x)=K(x,x)B-BK(x,x)$$

fonksiyonu göz önüne alalım.

$x\to\pi$ iken $\Delta Q_1(x)$ fonksiyonunun davranışını bulalım. $\Delta Q_1(x)$ eşitliğinde düzenleme yapılırsa

$$\Delta Q_1(x)=K(x,x)B-BK(x,x)=\frac{1}{\alpha_0-\int\limits_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. $x\to\pi$ iken $\psi_1(\pi)=0,\ \lim\limits_{x\to\pi}\psi_2(x)=c\neq 0$ olduğu bilinmektedir. ($c=0$ için $\psi(t,\lambda_0)=0$ olduğundan bu mümkün değildir).

Bu sebeple $x\to\pi$ iken limit alınırsa

$$\Delta Q_1(x)\to\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}0 & -c^2\\ -c^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix},\ l=-1$$

sonucu bulunur. Gerçekten de

$$\Delta Q_1(x)=\frac{1}{\alpha_0-\int\limits_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\int\limits_0^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt+\int\limits_x^0\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\int\limits_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. Son eşitlikte $x\to\pi$ için limit alınırsa

$$\Delta Q_1(x)\to\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}0 & -c^2\\ -c^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix},\ l=-1$$

olduğu bulunur.

$$Q(x)=Q_1(x)+\Delta Q_1(x)-\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix}\qquad(4.1.15)$$

fonksiyonun $[0,\pi]$de düzgünlük mertebesi $Q_1(x)$ fonksiyonunun düzgünlük mertebesi ile aynıdır. Böylece $l=-1$ için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (4.1.1) denklemini sağladığı ispatlanmıştır. Burada $Q(x)$ fonksiyonu (4.1.15) ile tanımlıdır.

Şimdi $\varphi_1^2(\pi,\lambda_n)+\varphi_2^2(\pi,\lambda_n)<\infty$ olduğunu ve $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$de tam ortogonal sistem oluşturduğu ispatlayalım. $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin ortogonal sistem olduğu bellidir. Bu sebeple farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonalliğinden

$$\int\limits_0^\pi\left(\psi(x,\lambda_0),\psi(x,\lambda_n)\right)dx=0,\ n\neq 0$$

bulunur. Bu takdirde (4.1.11) eşitliğinde $x\to\pi$ iken limit alınırsa özfonksiyonların ortogonalligi ve L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{x\to\pi}\varphi(x,\lambda_n)=\psi(\pi,\lambda_n)+\lim_{x\to\pi}\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{\int_0^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}$$

$$=\psi(\pi,\lambda_n)+\lim_{x\to\pi}\frac{\psi(x,\lambda_0)\left\{\int_0^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy-\int_x^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy\right\}}{\int_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}$$

$$=\psi(\pi,\lambda_n)-\psi(\pi,\lambda_0)\lim_{x\to\pi}\frac{\int_x^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{\int_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}=0$$

eşitliği elde edilir. Yani $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu yakınsaktır. Bu sebeple $\varphi_1^2(\pi,\lambda_n)+\varphi_2^2(\pi,\lambda_n)<\infty$ olduğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$ fonksiyonları (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özfonksiyonları olur. Bu sebeple $[0,\pi]$ üzerinde ikişerli ortogonaldirler.

Şimdi $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğunu ve

$$\alpha_n=\int_0^\pi\left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dt$$

olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned}A(x)&=\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_0^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi-\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_0^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi+\int_x^0\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_x^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\end{aligned}$$

fonksiyonu verilsin. Dirac-Delta fonksiyonunun tanımından

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan, $t > x$ için

$$\varphi(x,\lambda_n) = \psi(x,\lambda_n) + \frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{A(x)}$$

eşitliği ve bu eşitliğin transpozu alınırsa

$$\varphi^T(t,\lambda_n) = \psi^T(t,\lambda_n) + \frac{\psi^T(t,\lambda_0)\int_0^t \left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{A(t)}$$

elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa çarparsak ve daha sonra her iki taraftan sonsuz toplam alırsak;

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n) \frac{\psi^T(t,\lambda_0)\int_0^t \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(t)} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_0) \frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(x)} \varphi^T(t,\lambda_n) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \frac{\psi(x,\lambda_0)\psi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)} \int_0^x \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi \int_0^t \left(\psi(s,\lambda_0),\psi(s,\lambda_n)\right)ds \\
&= \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\psi^T(t,\lambda_0)}{A(t)} \int_0^t \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n),\psi^T(\xi,\lambda_n) \right\} \psi(\xi,\lambda_0)d\xi \\
&+ \frac{\psi(x,\lambda_0)}{A(x)} \int_0^x \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi(t,\lambda_n),\psi^T(\xi,\lambda_n) \right\} \psi(\xi,\lambda_0)d\xi \\
&+ \frac{\psi(x,\lambda_0)\psi(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)} \int_0^x \left\{ \left[\frac{1}{\alpha_n} \psi(\xi,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n) \right] \psi(\xi,\lambda_0) \right\} \psi(s,\lambda_0)d\xi ds \\
&= \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha_0\psi(x,\lambda_0)}{A(x)} \frac{\psi(t,\lambda_0)}{A(\xi)} \\
&= \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha_0} \varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)
\end{aligned}$$

buradan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1.16}$$

elde edilir. Burada ' sembolü $n=0$ teriminin bulunmadığını ifade eder.

(4.1.16) eşitliği $\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpılıp 0 dan π ye kadar x'e göre integrallenirse ve Dirac-Delta fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$\int_0^\pi \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) \right] \varphi(x,\lambda_n)dx = \int_0^\pi \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\varphi(x,\lambda_n)dx$$

yani

$$\frac{1}{\alpha_n}\varphi(t,\lambda_n)\int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx = \varphi(t,\lambda_n)$$

$$\alpha_n = \int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx \tag{4.1.17}$$

bağıntısı bulunur. (4.1.16) ve (4.1.17) formülleri $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ $n=\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ de tam ortogonal sistem oluşturduğunu gösterir.

Böylece $l=-1$ durumunda teoremin gerekliliği ispatlandı. Tümevarım uygulayarak teoremi genel durumda da ispatlamak mümkündür.

Şimdi yeterlilik kısmını ispatlayalım. $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{4.1.18}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1.2) sınır koşullarını sağladığı açıktır. $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots,$ $l=-(2k+1)$ için (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda_n)$, $n\in\pm\overline{(k+1,\infty)}$ bu problemin özfonksiyonları olur ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n = \int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx,\ n\in\pm\overline{(k+1,\infty)} \tag{4.1.19}$$

şeklindedir. Teoremde gösterilen şekilde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayı dizilerini oluşturalım. Bunların (4.1.6)-(4.1.8) sınır değer probleminin spektral karakteristikleri olduğunu ispatlayalım. Teoremi $k=0$ durumu için ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde ispatlanabilir.

$$\psi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda)\right)dt}{\alpha_0+\int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.20}$$

eşitliği verilsin. Burada $\lambda_0, \lambda_n, n \neq 0$ lerden farklıdır ve α_0 sabit pozitif sayıdır. Burada $x = 0$ için $\psi(0,\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(0,\lambda) \\ \psi_2(0,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$ olur.

$\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin çözümü olduğundan

$$K(x,y) = -\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(y,\lambda_0)}{\alpha_0 + \int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0), \varphi(t,\lambda_0)\right) dt} \tag{4.1.21}$$

matris fonksiyonunun

$$\begin{aligned} &BK_x^{'}(x,y) + Q(x)K(x,y) + \left[K(x,x)B - BK(x,x)\right]K(x,y) + LK(x,y) \\ &= -K_y^{'}(x,y)B + K(x,y)Q(y) + K(x,y)L \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

denkleminin çözümü olduğu aşikardır. Bu takdirde (4.1.20) ile tanımlı $\psi\left(x,\lambda\right)$ fonksiyonu

$$B\psi^{'}(x,y) + Q_1(x)\psi(x,\lambda) + \left[K(x,x)B - BK(x,x)\right]\psi(x,\lambda) + L\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda) \tag{4.1.23}$$

denklemini sağlar.

Şimdi

$$\Delta Q(x) = K(x,x)B - BK(x,x)$$

fonksiyonu detaylı bir şekilde inceleyelim.

$x \to \pi$ iken $\Delta Q(x)$ fonksiyonunun davranışını bulalım. $\Delta Q(x)$ fonksiyonunda matris fonksiyonları yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \Delta Q(x) &= K(x,x)B - BK(x,x) \\ &= \frac{1}{\alpha_0 + \int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0), \varphi(t,\lambda_0)\right) dt} \begin{pmatrix} -2\varphi_1(x,\lambda_0)\varphi_2(x,\lambda_0) & \varphi_1^2(x,\lambda_0) - \varphi_2^2(x,\lambda_0) \\ \varphi_1^2(x,\lambda_0) - \varphi_2^2(x,\lambda_0) & 2\varphi_1(x,\lambda_0)\varphi_2(x,\lambda_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu sebeple $x \to \pi$ iken

$$\varphi(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{\pi - x} \end{pmatrix}$$

bilinmektedir [21]. Bu sebeple $x \to \pi$ iken limit alınırsa,

$$\Delta Q(x) = -\frac{1}{\alpha_0 + \int\limits_0^x \frac{c_2^2}{(\pi - t)^2}dt + c_1 x}\begin{pmatrix} -2c_1\frac{c_2}{(\pi - x)} & c_1^2 - \frac{c_2^2}{(\pi - x)^2} \\ c_1^2 - \frac{c_2^2}{(\pi - x)^2} & 2c_1\frac{c_2}{(\pi - x)} \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} -2c & c^2(\pi - x) - \frac{1}{(\pi - x)} \\ c^2(\pi - x) - \frac{1}{(\pi - x)} & 2c \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{(\pi - x)} \\ -\frac{1}{(\pi - x)} & 0 \end{pmatrix} + \Delta Q_2 = -L + \Delta Q_2$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$Q_1(x) = Q(x) + \Delta Q(x) + L = Q(x) + \Delta Q_2(x)$$

fonksiyonun $[0,\pi]$de $Q(x)$ ile aynı düzgünlük derecesine sahip olduğu bulunur.

Şimdi de $n = (-\infty,\infty)$, için $\psi_1(\pi,\lambda_n) = 0$ ve $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$de tam ortogonal sistem oluşturduğunu ispatlayalım. Önce $\psi_1(\pi,\lambda_0) = 0$ olduğunu ispatlayalım. (4.1.20) eşitliğinde $\lambda = \lambda_0$ yazılırsa

$$\psi(x,\lambda_0) = \varphi(x,\lambda_0) - \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \int\limits_0^x \big(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\big)dt}.$$

formüllü bulunur. Bu sebeple $x \to \pi$ iken

$$\varphi(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{\pi - x} \end{pmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$\lim_{x\to\pi}\psi(x,\lambda_0) = \lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{(\pi - x)} \end{pmatrix}\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + c_1^2 x + \frac{c_2^2}{(\pi - x)} - \frac{c_2^2}{\pi}}$$

$$= \lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{(\pi - x)} \end{pmatrix}\frac{\alpha_0\pi(\pi - x)}{(\pi - x)\left(\alpha_0\pi + c_1^2\pi x - c_2^2\right) + c_2^2\pi}$$

$$= \lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1\alpha_0\pi(\pi - x) \\ c_2\alpha_0\pi \end{pmatrix}\frac{1}{(\pi - x)\left(\alpha_0\pi + c_1^2\pi x - c_2^2\right) + c_2^2\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2\alpha_0\pi \end{pmatrix}\frac{1}{c_2^2\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0 c_2^{-1} \end{pmatrix}$$

olur. $\lambda=\lambda_n$ olsun.

$$\beta_n=\int_0^{\pi}\left(\varphi(x,\lambda_0),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx$$

fonksiyonu verilsin. Buradan;

$$\lim_{x\to\pi}\psi(x,\lambda_n)=-\lim_{x\to\pi}\frac{\begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{(\pi-x)} \end{pmatrix}}{\dfrac{c_2^2}{(\pi-x)}}\beta_n=\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_n c_2^{-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\psi_1(\pi,\lambda_0)=0$ olur. Bu sebeple $\{\psi(x,\lambda_n)\}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ fonksiyonları (4.1.5)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonları olur. Bu sebeple $[0,\pi]$ üzerinde ikişerli ortogonaldirler.

Şimdi $L_2(0,\pi)$ de $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğunu ispatlayalım. Önceden $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğu gösterilmişti.

$$A(x)=\alpha_0+\int_0^{t}\left(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi$$

fonksiyonu verilsin.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n)=\delta(x-t)E$$

burada $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t>x$ için yukarıdaki yapılan benzer işlemler tekrarlanırsa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n)$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\frac{\varphi^T(t,\lambda_0)\int_0^{t}\left(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(t)}$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi^T(t,\lambda_n)\frac{\varphi(x,\lambda_0)\int_0^{x}\left(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(x)}$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\left(\varphi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi\int_0^t\left(\varphi(s,\lambda_0),\varphi(s,\lambda_n)\right)ds$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(t,\lambda_0)}{A(t)}\int_0^t\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n),\varphi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\varphi(\xi,\lambda_0)d\xi$$

$$-\frac{\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}\int_0^x\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(t,\lambda_n),\varphi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\varphi(\xi,\lambda_0)d\xi$$

$$+\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\int_0^t\left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(\xi,\lambda_n)\varphi(s,\lambda_n)\right]\varphi(\xi,\lambda_0)\right\}\varphi(s,\lambda_0)d\xi ds$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}+\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\left(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\left[A(x)-\int_0^x\left(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\right]$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\alpha_0$$

olur. Buradan da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)+\frac{\alpha_0\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}\frac{\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}=\delta(x-t)E \qquad (4.1.24)$$

formülü elde edilir.

(4.1.20) formülünde $\lambda=\lambda_0$ için

$$\psi(x,\lambda_0)=\frac{\alpha_0\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}$$

olduğu elde edilir. Son eşitlik (4.1.24) formülünde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)+\frac{1}{\alpha_0}\psi(x,\lambda_0)\psi^T(t,\lambda_0)=\delta(x-t)E\\&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)=\delta(x-t)E\end{aligned} \qquad (4.1.25)$$

bulunur. Teoremin gerekliliğinin ispatının benzerinin yorumları yapılırsa

$$\alpha_n=\int_0^\pi\left(\psi(x,\lambda_n),\psi(x,\lambda_n)\right)dx \qquad (4.1.26)$$

olur. (4.1.25) ve (4.1.26) fonksiyonlarından $\{\psi(x,\lambda_n)\}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlarının $L_2(0,\pi)$ de tam ortogonal sistem olduğu elde edilir.

Sonuç 4.1.1. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları ve $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ matris fonksiyonun

$k.$ mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ olacak şekilde (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğer ve normlaştırıcı sayıları

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k} \tag{4.1.27}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{\pi} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{4.1.28}$$

şeklinde asimptotik formüllere sahiptir. Burada $l=-(2k+1)$, $n \in \pm\overline{(s+1,\infty)}$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_{n,k}|^2 < \infty$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_{n,k}|^2 < \infty$ serileri yakınsaktır

Not 4.1.1. Eğer $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ ler l için (4.1.1)-(4.1.3) tipindeki problemin sırasıyla özdeğer ve normlaştırıcı sayıları ise, bu takdirde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ ler, $-l$ için de (4.1.1)-(4.1.3) problemin özdeğer ve normlaştırıcı sayılarıdır.

4.2. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektrum Türünden İfadesi

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y \tag{4.2.1}$$

diferansiyel denklemini ve

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.2.2}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0, y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.2.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım. Burada

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{l}{\pi-x} \\ \dfrac{l}{\pi-x} & 0 \end{pmatrix},\ y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

$0 \le \alpha \le \pi$, $0 \le \beta \le \pi$ öyleki $\alpha \ne \beta$, $Q(x)$ matris fonksiyonu $[0,\pi]$ de tanımlı ve sürekli ve $l=-(2k+1)$ olsun. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$ sırasıyla (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.1), (4.2.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri olsun. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (4.2.1) denkleminin sırasıyla

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.2.4}$$

$$\psi_1(0,\lambda) = \sin\beta,\ \ \psi_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{4.2.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu takdirde (4.2.1), (4.2.2) sınır değer probleminin özfonksiyonları $\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)$ ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n=\int_0^\pi\left(\varphi_n(x),\varphi_n(x)\right)dx,\ n\in\pm\overline{(k+1,\infty)} \tag{4.2.6}$$

şeklindedir.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ spektrumuna göre $\{\alpha_n\}$ için formül bulalım.

$$f(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{4.2.7}$$

fonksiyonu verilsin. Burada $f(x,\lambda)\in L_2(0,\pi)$ dir. Bu takdirde $x\to\pi$ iken limit alınırsa

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\left|f_1^2(x,\lambda)\right|+\left|f_2^2(x,\lambda)\right|\right\}=0$$

bulunur. Burada

$$c_1+m(\lambda)c_2=0 \tag{4.2.8}$$

$$c_1=\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\psi_1^2(x,\lambda)+\psi_2^2(x,\lambda)\right\},\ c_2=\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\varphi_1^2(x,\lambda)+\varphi_2^2(x,\lambda)\right\}$$

şeklindedir. (4.2.8) formülünden $m(\lambda)$ nın bir meromorf fonksiyon olduğu gözükmektedir. Dolayısıyla kutupları ve sıfırları (4.2.1), (2.2.2) ve (4.2.1), (2.2.3) probleminin sırasıyla özdeğerleri ile çakışır. Bölüm 3.4'te yapılan işlemler tekrarlanırsa

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi\left(f(x,\lambda_1),f(x,\lambda_2)\right)dx=\left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)$$

formülü bulunur. $\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\overline{\lambda}$ olduğu durumda

$$\int_0^\pi\left|f(x,\lambda)\right|^2dx=\sin(\beta-\alpha)\frac{\operatorname{Im}m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \tag{4.2.9}$$

formülü elde edilir. Bu takdirde $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları yani (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.1), (4.2.3) sınır probleminin özdeğerleri çarprazlaşırlar. $m(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan

$$m(\lambda)=A\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda}{\mu_p}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{-1} \tag{4.2.10}$$

elde edilir.

Burada $'$sembolü sonsuz çarpımda $p=-k,\ldots,k$ çarpanlarının bulunmadığını ifade eder ve A sabit sayıdır. Bölüm 3 teki işlemler tekrarlanırsa

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\pi}\left(f(x,\lambda),\varphi_n(x)\right)dx=\int_0^{\pi}\left\{\left(Bf'(x,\lambda),\varphi_n(x)\right)+\left(Bf(x,\lambda),\varphi_n^{'}(x)\right)\right\}dx=\sin(\alpha-\beta)$$

olur. Burada $\lambda\to\lambda_n$ için limit alınırsa

$$\alpha_n=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)} \tag{4.2.11}$$

eşitliği elde edilir. (4.2.10) formülü düzenlenirse daha sonra her iki taraftan logaritma alınırsa

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_p-\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}\right)=\sum_{p=k+1}^{\infty}\left(\frac{\mu_p-\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}+\frac{\mu_{-p}-\lambda_{-p}}{\lambda_{-p}-\lambda}\right)$$

serisi elde edilir. Bu serinin yakınsaklığı Bölüm 3 te yapılan işlemler tekrarlanırsa elde edilir. (4.2.10) formülünde cebirsel işlemler yapılırsa

$$m(\lambda)=A_1\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{\mu_p-\lambda}{\lambda_p-\lambda}\right)$$

fonksiyonu bulunur. Burada

$$A_1=A\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_p}{\mu_p}$$

şeklindedir. Bu takdirde (4.2.11) den

$$\alpha_n=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{A_1(\mu_n-\lambda_n)}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_p-\lambda_n}{\mu_p-\lambda_n} \tag{4.2.12}$$

elde edilir. İleride $A_1=-1$ olduğu ispatlanacaktır.

4.3. İki Spektruma Göre Singüler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

Bu bölümde tekile sahip Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem çözümü verilmiştir.

Teorem 4.3.1. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $n\in\pm\overline{(k+1,\infty)}$ dizileri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. λ_n ve μ_n dizileri sıralıdırlar (çaprazlaşırlar).
2. $\alpha,\ \alpha_1,\ \beta,\ \beta_1$ sabit sayılar olmak üzere $n\to\pm\infty$ iken $\lambda_{n+k},\lambda_{n-k}$ ve μ_{n+k},μ_{n-k} sayıları için

$$\lambda_{n+k} = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n > 0$$
$$\lambda_{n-k} = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n < 0 \qquad (4.3.1)$$

ve

$$\mu_{n+k} = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n > 0$$
$$\mu_{n-k} = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n < 0 \qquad (4.3.2)$$

asimptotik formülleri sağlanır.

3. $0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le \beta \le \pi,\ \alpha \ne \beta$ dır.

Bu takdirde $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y \qquad (4.3.3)$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \qquad (4.3.4)$$

$$y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \qquad (4.3.5)$$

probleminin iki farklı spektrumlarıdır.

Burada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{l}{\pi - x} \\ \dfrac{l}{\pi - x} & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

İspat. Teoremi $l = -1$ için ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde ispatlanır. Sırasıyla (4.3.1) ve (4.3.2) asimptotik formülleriyle tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizileri verilsin. Normlaştırıcı sayıların iki spektrum türünden ifadesi olan

$$\alpha_n = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_p - \lambda_n}{\mu_p - \lambda_n} \qquad (4.3.6)$$

formülü yazılsın. Burada 'sembolü sonsuz çarpımda $p = 0, p = n$ çarpanlarının bulunmadığını ifade eder.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları için asimptotik formüllerden faydalanarak $\{\alpha_n\}$ sayıları için asimptotik formül bulalım. $\lambda_0 \ne \lambda_n, \mu_0 \ne \mu_n, n = \pm 1, \pm 2, \cdots$ olmak üzere λ_0, μ_0 sayıları ele alınsın. Bu durumda (4.3.6) formülünün $-1.$ kuvveti alınırsa

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha - \beta)} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_p - \lambda_n}{\lambda_p - \lambda_n} \frac{\lambda_0 - \lambda_n}{\mu_0 - \lambda_n}$$

olduğu elde edilir. Burada $'$sembolü sonsuz çarpımda $p = n$ sayılı terimin olmadığını ifade eder.

$$\frac{1}{b_n} = \frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha - \beta)} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_p - \lambda_n}{\lambda_p - \lambda_n}$$

olacak şekilde yukarıdaki sonsuz çarpım

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n} \frac{\lambda_0 - \lambda_n}{\mu_0 - \lambda_n}$$

Şeklinde yazılır. Bölüm 3.4 de verilen

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha - \beta)\right] + O(\frac{\ln n}{n^2}) \tag{4.3.7}$$

asimptotik formülünü ele alalım. Burada $s = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\lambda_k - \mu_k + \frac{\beta - \alpha}{\pi} \right)$şeklindedir ve

$\sum{}'$ sembolü toplamda $k = n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder. Bu takdirde

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n}\left(1 + \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n - \mu_0}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Özdeğerler için asimptotik formüllerden faydalanılırsa

$$\frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n - \mu_0} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n} \frac{1}{1 - \frac{\mu_0}{\lambda_n}} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n}\left(1 + \frac{\mu_0 - \lambda_0}{n}\right) + O(\frac{1}{n^2})$$

şeklinde yazılabilir. Son formül ve (4.3.7) den normlaştırıcı saylar için asimptotik formül

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s'}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha - \beta) + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right] + O(\frac{\ln n}{n^2}) \tag{4.3.8}$$

bulunur. Burada $s' = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\lambda_k - \mu_k + \frac{\beta - \alpha}{\pi} \right)$ve $'$sembolü toplamda $k = n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder. Böylece (4.3.8) formülü

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{c}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \tag{4.3.9}$$

elde edilir. Burada

$$c=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''\left(\lambda_k-\mu_k+\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)+(\beta_1-\alpha_1)ctg(\alpha-\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\pi^2}$$

şeklindedir. Tüm α_n lerin 0 dan büyük olduğunu gösterelim.

$$m_1(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_p-\lambda}{\lambda_p-\lambda} \tag{4.3.10}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Teoremin koşulundan dolayı $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları çaprazlaşırlar. $\lambda\to i\infty$ iken limit alınırsa

$$m_1(\lambda)\to-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \tag{4.3.11}$$

sonucu alınır. Weyl fonksiyonu tanımından

$$\frac{1}{\alpha_n}=\operatorname{Re}sm_1(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n} \tag{4.3.12}$$

eşitliği yazılır. Bu sebeple

$$m_1(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_1(\lambda-\lambda_p)} \tag{4.3.13}$$

olur, öyleki α_n lerin hepsi aynı işarete sahiptir.

(4.3.9) formülünde büyük p ler için $a_p>0$ olduğu elde edilir. Bu takdirde [21] den $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonunu birebir olarak tanımlamak mümkündür. Öyleki $\{\lambda_n\}$ (4.3.3)-(4.3.5) probleminin özdeğerleridir.

$$By'+Q(x)y+Ly=\lambda y \tag{4.3.14}$$

denklemi ve

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \tag{4.3.15}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{4.3.16}$$

sınır koşullarıyla tanımlı problemin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ özdeğer ve normlaştırıcı saylarına göre tanımlanan $\{\gamma_n\}$, $n\in\pm\overline{(1,\infty)}$ özdeğerleri olsun. Burada β sayısı (4.3.2) ile tanımlanır.

$\gamma_n=\mu_n$, $n\in\pm\overline{(1,\infty)}$ olduğunu ispatlayalım.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix},\ \psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\beta\\-\cos\beta\end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını sağlayan (4.3.14) denkleminin çözümleri olsun. Bu takdirde

$$m(\lambda)=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-\lambda_n}{\lambda-\gamma_n} \qquad (4.3.17)$$

eşitliği ile tanımlı meromorf fonksiyon mevcuttur. Öyleki $m(\lambda)$ fonksiyonunun kutupları ve sıfırları sırasıyla $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ sayıları ile çakışır. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_n}=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n}$$

formülü bulunur. $\lambda\to i\infty$ iken (4.3.17) de limit alınırsa $m(\lambda)\to 1$ elde edilir. Bu sebeple

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_p(\lambda_p-\lambda)} \qquad (4.3.18)$$

eşitliği elde edilir. (4.3.13) ve (4.3.18) formüllerinden

$$m_1(\lambda)=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda) \qquad (4.3.19)$$

olur ve dolayısıyla $\gamma_n=\mu_n$, $n=\pm\overline{(1,\infty)}$ elde edilir. Bununla teorem ispatlanır.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarını aynı bir denklemin farklı iki özdeğeri olabilmesi için yeterlilik koşullarını göstermiş olduk. Benzer yorumları yaparak genel durumda iki spektruma göre ters problemi tam olarak çözmek mümkündür.

Teorem 4.3.2. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizilerinin (4.3.14) denkleminin (4.3.15) ve (4.3.16) sınır koşullarını sağlayan iki farklı spektrumları olması için $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ nin elamanı ve $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$ olacak biçimde aşağıdaki koşulların sağlanması gerek ve yeterdir..

1. λ_n ve μ_n dizileri sıralıdırlar(çarprazlaşır).
2. Aşağıdaki asimptotik formüller söz konusudur.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+\frac{\beta_2}{n^2}+\cdots+\frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

burada $\alpha\neq\beta,\ 0\le\beta,\ \alpha\le\pi, l=-(2k+1)$ ve her bir n için

$\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\alpha_{k,n}\right|^2<\infty,\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\beta_{k,n}\right|^2<\infty, n=\pm\overline{(k+1,\infty)}$ dir.

İspat. Gerekliliğin ispatı Bölüm 3.2 den elde edilir. Yeterlilik ise Teorem 4.3.1.'in ispatı gibidir.

Not 4.3.1. Bölüm 3.2. de $\{\alpha_n\}$ lerin (4.1.28) bağıntısını sağladığı ispatlanmıştır. Bu Teoremden ise $\{\alpha_n\}$ lerin (4.3.9) bağıntısını sağladığı elde edilir. (4.1.28) ve (4.3.9) formülleri karşılaştırılırsa $A_1 = -1$ olduğu elde edilir.

5. YARI EKSENDE DIRAC SİSTEMİ İÇİN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

5.1. Problemin Tanımı

$$By'+Q(x)y=\lambda y, 0\le x<\infty \tag{5.1.1}$$

denklemini ve

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \tag{5.1.2}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0 \tag{5.1.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım.

Burada $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ ayrıca $Q(x)$ normalleştirilmiş matris fonksiyonunu $0\le x<\infty$ yarı ekseninde diferansiyellenebilen fonksiyondur. Öyleki $\forall \alpha\, ve\, \beta$ $(\alpha\ne\beta)$ için (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin spektrumları ayrık tır. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sırasıyla (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerler dizisi olsun. Bu bölümde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ özdeğerlerine göre (5.1.1), (5.1.2) sınır değer probleminin spektral fonksiyonunun birebir olarak tanımlandığı gösterilecektir.

Spektral fonksiyona göre (5.1.1) Kanonik Dirac sistemi birebir tanımlandığından dolayı [3], iki farklı spektruma göre Kanonik Dirac sisteminin birebir tanımlandığı elde edilir.

5.2. $\rho(\lambda)$ -spektral fonksiyonun spektrumlar cinsinden ifadesi

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ (5.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\quad \varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{5.2.1}$$

$$\theta_1(0,\lambda)=\sin\beta,\quad \theta_2(0,\lambda)=-\cos\beta \tag{5.2.2}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ nın sırasıyla (5.1.2) ve (5.1.3) sınır koşullarını sağladığı aşikardır. Bu sebeple $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\theta(x,\lambda_n)$ sırasıyla $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ özdeğerlerine karşılık gelen (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

Teorem 5.2.1. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ sırasıyla (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerler dizisi olsun. Bu takdirde (5.1.1), (5.1.2) sınır değer probleminin $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ ler cinsinden

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{0\le\lambda_n<\lambda}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda\ge 0\\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n<0}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda<0\end{cases} \tag{5.2.3}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha_n}=-c\frac{\lambda_n}{\mu_n}(\mu_n-\lambda_n)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{-1} \tag{5.2.4}$$

formülleri ile tanımlanır.

Burada c herhangi sabit, ' sembolü çarpımda $k=n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder.

İspat. $f(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$ fonksiyonu, (5.1.1) denkleminin çözümü olsun. Burada $\operatorname{Im}\lambda\ne 0$ dır.

$$f(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{5.2.5}$$

olacak şekilde $f(x,\lambda)$ fonksiyonunu seçilsin. Bölüm 4.2. de yapılan işlemler tekrarlanırsa ve $x\to\infty$ için $\overline{f^*(x,\lambda)Bf(x,\lambda)}\to 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(\lambda-\overline{\lambda})\int_0^{\infty}\left(f(x,\lambda),f(x,\lambda)\right)dx=\left[m(\overline{\lambda})-m(\lambda)\right]\sin(\alpha-\beta)$$

olur. Buradan

$$\int_0^{\infty}\left(f(x,\lambda),f(x,\lambda)\right)dx=-\frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}\sin(\alpha-\beta)$$

formülü elde edilir. (5.2.5) den (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri sırasıyla $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları olduğu elde edilir. Dolayısıyla $m(\lambda)$ meromorf fonksiyondur. Bu sebeple $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ çaprazlaşırlar, dolayısıyla

$$m(\lambda)=c\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^{-1} \tag{5.2.6}$$

olur . Burada c sabit sayıdır.

Titchmarch çalışmasında (5.1.1), (5.1.2) probleminin $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu $m(\lambda)$ cinsinden

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{0\le\lambda_n<\lambda}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda\ge 0\\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n<0}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda<0\end{cases}$$

bağıntısıyla tanımlanır, burada

$$\frac{1}{\alpha_n}=\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n}$$

şeklindedir. Sonuncu formülden, (5.2.6) eşitliğinden aranan (5.2.3) formülü kolaylıkla elde edilir.

Not 5.2.1 Teorem 5.2.1, (5.1.1), (5.1.2) probleminin spektral fonksiyonu c sabit farkıyla iki spektruma göre hesaplandığını mümkün kılar.

Teorem 5.2.2. $\rho_1(\lambda)$ ve $\rho_2(\lambda)$ spektral fonksiyonları birbirinden sabit c çarpanı kadar farklı olduğunda yani $\rho_1(\lambda)=c\rho_2(\lambda)$ ise ve bunlar Dirac sistemiyle oluşan sınır problemlerinin spektral fonksiyonları olduğunda $c=1$ dir.

İspat.

$$\rho_1(\lambda)-\rho_1(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)$$

$$\rho_2(\lambda)-\rho_2(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)$$

buradan

$$\rho_1(\lambda)-\rho_1(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)=c\left[\rho_2(\lambda)-\rho_2(-\lambda)\right]=c\left[\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)\right]$$

elde eldir. Dolayısıyla $c=1$ olur.

Bu teoremden görüldüğü gibi $\rho(\lambda)$ nın tanımındaki sabit sayısı belirli durumlarda $\rho(\lambda)$ için asimptotik formüllerden hesaplanabilir. Not etmek gerekir ki c sabitinin kesin ifadesi bize gerekmez.

5.3. Spektrumun Ayrıklığı İçin Yeterlilik Şartları

Bu bölümde Dirac sisteminin spektrumunun diskret olacağı durumlar incelenecektir. Bununla ilgili birçok çalışma ithaf edilmiştir. Fakat bu çalışmalarda sistem kanonik şekilde ele alındığı için elde edilen sonuçlar daha az kullanılmaktadır.

Teorem 5.3.1 $Q(x)$ matris fonksiyonu sürekli türeve sahip olsun. Bu takdirde (5.1.1), (5.1.2) probleminin ayrık spektrum'a sahip olması için

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+k} \left\{ p^2 + q^2 - (p'^2 - q'^2)^{\frac{1}{2}} \right\} dt = \infty \tag{5.3.1}$$

bağıntısının sağlanması yeterlidir.

İspat. (5.1.1) denklemi (5.1.2) sınır koşullarıyla oluşan operatörü L ile gösterelim. Bu takdirde L^2 operatörü

$$-y'' + (Q^2 + BQ^1)y = \lambda^2 y \tag{5.3.2}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0$$

$$\left\{ y_2'(0) + p(0)y_1(0) + q(0)y_2(0) \right\}\cos\alpha + \left\{ -y_1'(0) + q(0)y_1(0) - p(0)y_2(0) \right\}\sin\alpha = 0$$

sınır koşullarıyla oluşur. L^2 operatörünün diskretliği L operatörünün spektrumunun diskretliğin den elde edilir. $Q^2 + BQ^1$ matrisine karşılık gelen en küçük özdeger $\mu(x)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+k} \mu(x)dx = \infty \tag{5.3.3}$$

şeklindedir.

Basit hesaplamalardan sonra $\mu(x) = p^2 + q^2 - (p'^2 - q'^2)^{\frac{1}{2}}$ elde edilir. Bu sebeple (5.3.3) koşulundan (5.3.1) elde edilir. Dolayısıyla L^2 operatörü ve doğal olarak L operatörünün diskret spektruma sahiptir.

Sonuç 5.3.1. $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlar olduğunda (5.1.1), (5.1.2) problemi ayrık spektrumuna sahiptir.

6. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN KISMEN ÇAKIŞMAYAN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

6.1. $K(x,s)$ Matris Fonksiyonunun Genel Dejenereliği

$$By'+Q(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}y=\lambda y, 0<x\leq\pi \tag{6.1.1}$$

denklemini ve

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.2}$$

$$y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{6.1.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım. Burada

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\ y(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

ve H reel sayıdır.

Bu problemin $y_1(0)=0,\ y_2(0)=-1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$y_1(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x\left[-p(s)y_1(s)-q(s)y_2(s)+\frac{y_2(s)}{s}\right]\sin\lambda(s-x)ds$$

$$+\int_0^x\left[q(s)y_1(s)-p(s)y_2(s)-\frac{y_1(s)}{s}\right]\cos\lambda(s-x)ds$$

$$y_2(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x\left[-p(s)y_1(s)-q(s)y_2(s)+\frac{y_2(s)}{s}\right]\cos\lambda(s-x)ds$$

$$+\int_0^x\left[q(s)y_1(s)-p(s)y_2(s)-\frac{y_1(s)}{s}\right]\sin\lambda(s-x)ds$$

şeklindedir. Burada $\frac{y_1(s)}{s}\in C[0,\pi],\ \frac{y_2(s)}{s}\in C[0,\pi]$ dır.

Bu özfonksiyonlar (6.1.3) te yerine yazılırsa ve Bölüm 3.2 de yapılan işlemler tekrarlanırsa özdeğerler için asimptotik formül

$$\lambda_n=n+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{H}+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{6.1.4}$$

şeklinde elde edilir.

(6.1.1) denkleminin $Q(x)=0$ olduğu durumda, $y_{01}(0)=0,\ y_{02}(0)=-1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$y_{01}(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x \frac{y_2(s)}{s}\sin\lambda(s-x)ds-\int_0^x \frac{y_1(s)}{s}\cos\lambda(s-x)ds \qquad (6.1.5)$$

$$y_{02}(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x \frac{y_2(s)}{s}\cos\lambda(s-x)ds-\int_0^x \frac{y_1(s)}{s}\sin\lambda(s-x)ds \qquad (6.1.6)$$

şeklindedir. O halde bu özfonksiyonlar büyük λ lar için

$$y_{01}(x,\lambda)=\sin\lambda x+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.7)$$

$$y_{02}(x,\lambda)=-\cos\lambda x+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.8)$$

şeklinde yazılır. Burada $\tau=\left|\operatorname{Im}\lambda\right|$ dır.

Perturbe olmuş (6.1.1) denklemi ile perturbe olmamış yani $Q(x)=0$ olduğu durumda olan denklem arasında

$$y(x,\lambda)=y_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,s)y_0(s,\lambda)dt \qquad (6.1.9)$$

bağıntısı vardır. Burada $y_0(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_{01}(x,\lambda) \\ y_{02}(x,\lambda)\end{pmatrix}$ fonksiyonu $Q(x)=0$ olduğu durumdaki çözüm fonksiyonudur ve $K(x,s)=\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}$ çekirdek fonksiyonudur.

(6.1.9) eşitliğinde $y(x,\lambda)$, $y_0(x,\lambda)$, $K(x,s)$ ifadeleri yerine yazılıp düzenlenirse

$$y_1(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x\left[K_{11}(x,s)\sin\lambda t-K_{12}(x,s)\cos\lambda s\right]ds+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.10)$$

$$y_2(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x\left[K_{21}(x,s)\sin\lambda s-K_{22}(x,s)\cos\lambda s\right]ds+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.11)$$

formülleri elde edilir.

$y(x,\lambda)$ vektör fonksiyon, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$, $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $\left[0,\pi\right]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar ve H reel sayı olmak üzere, (I)problemini

$$By'+Q(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}y=\lambda y,\ 0<x\le\pi \tag{6.1.12}$$

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.13}$$

$$y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{6.1.14}$$

şeklinde ele alalım. (I) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. (6.1.12), (6.1.13) ve

$$y_2(\pi)+H_1y_1(\pi)=0 \tag{6.1.15}$$

koşulu ile birlikte tanımlı olan (II) probleminin özdeğerleri $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun.

Benzer şekilde $\widetilde{Q}(x)=\begin{pmatrix}\widetilde{p}(x) & \widetilde{q}(x)\\ \widetilde{q}(x) & -\widetilde{p}(x)\end{pmatrix}$, $\widetilde{p}(x)$ ve $\widetilde{q}(x)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, $\widetilde{H}$, H dan farklı reel sayı olmak üzere, (III) problemi

$$By'+\widetilde{Q}(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}y=\lambda y, 0<x\le\pi \tag{6.1.16}$$

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.17}$$

$$y_2(\pi)+\widetilde{H}y_1(\pi)=0 \tag{6.1.18}$$

şeklinde ele alınsın. (III) probleminin özdeğerleri $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. (6.1.16), (6.1.17) ve

$$y_2(\pi)+\widetilde{H}_1y_1(\pi)=0 \tag{6.1.19}$$

koşulu ile birlikte tanımlı olan (IV) probleminin özdeğerleri $\{\widetilde{\mu}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun.

Aşağıdaki teorem söz konusudur.

Teorem 6.1.1. (I), (II), (III) ve (IV) problemlerinin özdeğerleri sırası ile $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\widetilde{\mu}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ $\left(n\in\overline{-\infty,\infty}\right)$ olsun. Bu takdirde;

1. $\lambda_n\equiv\widetilde{\lambda}_n$ tüm n ler için çakışır.
2. $\mu_n\ne\widetilde{\mu}_n$, $n=0,1,2,\ldots,\mathbb{N}$ ve $\mu_n\equiv\widetilde{\mu}_n$, $\{n\in\mathbb{Z}-\{0,\mathbb{N}\}\}$.
3. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\widetilde{\mu}_n\}$ özdeğerleri çaprazlaşırlar.

koşulları sağlanacak biçimde

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+\int_0^x K(x,s)\varphi(t,\lambda)dt \tag{6.1.20}$$

bağıntısında bulunan $K(x,s)$ çekirdek fonksiyonu genel dejeneredir.

İspat. (6.1.20) dönüşüm operatörü

$$\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\\ \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s)\\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(s,\lambda)\\ \varphi_2(s,\lambda)\end{pmatrix}ds$$

veya

$$\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)=\varphi_1(x,\lambda)+\int_0^x\left\{K_{11}(x,s)\varphi_1(s,\lambda)+K_{12}(x,s)\varphi_2(s,\lambda)\right\}ds \tag{6.1.21}$$

$$\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)=\varphi_2(x,\lambda)+\int_0^x\left\{K_{21}(x,s)\varphi_1(s,\lambda)+K_{22}(x,s)\varphi_2(s,\lambda)\right\}ds \tag{6.1.22}$$

şeklinde yazılabilir. (6.1.21) bağıntısı $\tilde{H}$ ile çarpılıp daha sonra (6.1.22) eşitliği ile toplanırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)+\tilde{H}\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)&=\varphi_2(x,\lambda)+H\varphi_1(x,\lambda)\\&+\int_0^x\Big[\left\{K_{21}(x,s)+\tilde{H}K_{11}(x,s)\right\}\varphi_1(s,\lambda)+\left\{K_{22}(x,s)+\tilde{H}K_{12}(x,s)\right\}\varphi_2(s,\lambda)\Big]ds\end{aligned} \tag{6.1.23}$$

formülü elde edilir.

Son ifadede $x=\pi$, $\lambda=\lambda_n$ alıp (I) ve (II) problemlerinin spektrumları için verilen (6.1.14) ve (6.1.15) koşullarından faydalanılırsa ve $\lambda_n \equiv \tilde{\lambda}_n$ olduğundan

$$\begin{aligned}0=\left(\tilde{H}-H\right)\varphi_1(\pi,\lambda_n)+\int_0^\pi\Big[&\left\{K_{21}(\pi,s)+\tilde{H}K_{11}(\pi,s)\right\}\varphi_1(s,\lambda_n)\\&+\left\{K_{22}(\pi,s)+\tilde{H}K_{12}(\pi,s)\right\}\varphi_2(s,\lambda_n)\Big]ds\end{aligned}$$

bulunur. (6.1.10) formülünde $n\to\infty$ için limit alınırsa $\varphi_1(\pi,\lambda_n)\to(-1)^n\sin(\arctan\frac{1}{H})$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0' a gider. Dolayısıyla

$$\left(\tilde{H}-H\right)=0 \tag{6.1.24}$$

ve

$$\int_0^\pi\Big[\left\{K_{21}(\pi,s)+\tilde{H}K_{11}(\pi,s)\right\}\varphi_1(s,\lambda_n)+\left\{K_{22}(\pi,s)+\tilde{H}K_{12}(\pi,s)\right\}\varphi_2(s,\lambda_n)\Big]ds=0,\ n\in\mathbb{N} \tag{6.1.25}$$

formülleri bulunur. $\varphi(x,\lambda_n)$ özvektör fonksiyonlarının tamlığından

$$K_{21}(\pi,s)+\tilde{H}K_{11}(\pi,s)=0 \tag{6.1.26}$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{12}(\pi,s)=0 \tag{6.1.27}$$

elde edilir.

Şimdi ikinci spektrum için benzer işlemler yapalım. (6.1.21) eşitliği $\widetilde{H}_1$ ile çarpılıp daha sonra (6.1.22) eşitliği ile toplanırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_2(x,\lambda)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(x,\lambda)&=\varphi_2(x,\lambda)+H_1\varphi_1(x,\lambda)\\&+\int_0^x\Big[\Big\{K_{21}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\lambda)+\Big\{K_{22}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\lambda)\Big]ds\end{aligned} \tag{6.1.28}$$

formülü bulunur.

Son ifadede $x=\pi,\ \lambda=\mu_n,\ n>\mathbb{N}$ alıp (III) ve (IV) problemlerinin spektrumları için verilen (6.1.18) ve (6.1.19) koşullarından faydalanılırsa ve $\mu_n\equiv\widetilde{\mu}_n,\ \{n\in\mathbb{Z}-\{0,\mathbb{N}\}\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}0=\Big(\widetilde{H}_1-H_1\Big)\varphi_1(\pi,\mu_n)&+\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)\\&+\Big\{K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds\end{aligned}$$

yazılır. (6.1.10) formülünden $n\to\infty$ için limit alınırsa $\varphi_1(\pi,\mu_n)\to(-1)^n\sin(\arctan\frac{1}{H})$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0 a gider. Dolayısıyla

$$\Big(\widetilde{H}_1-H_1\Big)=0 \tag{6.1.29}$$

ve

$$\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)+\Big\{K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds=0,\ n\in\mathbb{N} \tag{6.1.30}$$

formülleri elde edilir.

Şimdi ise benzer işlemleri $\mu_n\neq\widetilde{\mu}_n,\ n=0,1,2,\ldots,\mathbb{N}$ olduğu durumda yapılsın. $x=\pi,\ \lambda=\mu_n,\ n=0,1,\cdots,N$ alınırsa (6.1.28) ve (6.1.29) formüllerinden

$$\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)=\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)+\Big\{K_{22}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds \tag{6.1.31}$$

elde edilir. (6.1.30) ve (6.1.31) formüllerinden

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}\varphi_1(s,\mu_n) \tag{6.1.32}$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}\varphi_2(s,\mu_n) \tag{6.1.33}$$

bağıntıları elde edilir.

Burada

$$\|\varphi(s,\mu_n)\|^2=\alpha_n=\int_0^{\pi}\left\{\varphi_1^2(s,\mu_n)+\varphi_2^2(s,\mu_n)\right\}ds$$

olacak şekilde

$$\tau_n=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}$$

eşitliği verilsin. Böylece $K_{ij}(\pi,s),\ i,j=1,2$ fonksiyonlarını tanımlamak için

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{11}(\pi,s)=0$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{12}(\pi,s)=0$$

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

denklemler sistemi elde edilir. Yukarıdaki denklem sistemini $K_{ij}(\pi,s),(i,j=1,2)$ e göre çözülürse

$$K_{11}(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{12}(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

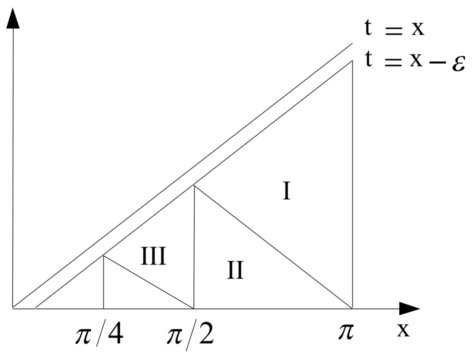
$$K_{21}(\pi,s)=-\frac{\widetilde{H}}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{22}(\pi,s)=-\frac{\widetilde{H}}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$K(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\begin{pmatrix}\varphi_1(s,\mu_n) & \varphi_2(s,\mu_n)\\ -\widetilde{H}_1\varphi_1(s,\mu_n) & -\widetilde{H}\varphi_2(s,\mu_n)\end{pmatrix} \tag{6.1.34}$$

şeklindedir. $K(x,s)$ fonksiyonu birinci mertebeden hiperbolik denklemler sistemini sağladığı için (6.1.34) koşulu birlikte OAB üçgeninin tamamında birebir olarak tanımlanır.



Şekil 6.1.1 OAB üçgeninin tamamında $K(x,s)$ fonksiyonunun görüntüsü

Bu sebeple OAB üçgeninin tamamında $K(x,s)$ fonksiyonunun görüntüsü

$$K(x,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\left\|\varphi(s,\mu_n)\right\|^2}\times\left[\theta(x,\mu_n)-\widetilde{H}\chi(x,\mu_n)\right]\varphi^T(s,\mu_n) \qquad (6.1.35)$$

şeklindedir. Burada

$$\theta(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\theta_1(x,\lambda)\\ \theta_2(x,\lambda)\end{pmatrix},\quad \chi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\chi_1(x,\lambda)\\ \chi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

denklemin

$$\theta_1(\pi,\lambda)=\chi_2(\pi,\lambda)=1,\quad \theta_2(\pi,\lambda)=\chi_1(\pi,\lambda)=0$$

koşullarını sağlayan çözümleridir. $\varphi^T(s,\lambda)$ ise transpozu alınmış vektör fonksiyonudur.

7. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

7.1. Farklı potansiyellere sahip singüler Dirac operatörü için kararlılık problemi

$p_i(x)$ ve $q_i(x)$ $(i=1,2)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ve

$$Q_1(x)=\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix},\quad Q_2(x)=\begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\pi-x} \\ -\dfrac{1}{\pi-x} & 0 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$By'+Q_1(x)y+L(x)y=\lambda y, 0\le x<\pi \tag{7.1.1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{7.1.2}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{7.1.3}$$

sınır değer problemi ele alınsın. (7.1.1) probleminin $\psi_1(0,\lambda)=\sin\alpha$, $\psi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda)\\ \psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ile gösterilsin. Bu problemin spektral karakteristikleri $\{\lambda_n,\rho_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. Bu karakteristikler (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar) sırasıyla aşağıdaki asimptotik formülleri sağlarlar.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{k,n}}{n^k} \tag{7.1.4}$$

$$\rho_n=\pi+\frac{c_1}{n}+\cdots+\frac{c_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{7.1.5}$$

Benzer şekilde (7.1.1) in pertürbesi olan aşağıdaki sınır değer problemi

$$By'+Q_2(x)y+Ly=\mu y, 0\le x<\pi \tag{7.1.6}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{7.1.7}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{7.1.8}$$

ele alınsın. (7.1.6) probleminin $\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha$, $\varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ile gösterilsin. Bu problemin spektral karakteristikleri $\{\mu_n,\sigma_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. Bu karakteristikler (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar) sırasıyla aşağıdaki asimptotik formülleri sağlarlar.

$$\mu_n = n - \frac{\alpha'}{\pi} + \frac{\alpha_1'}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}'}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k,n}'}{n^k} \tag{7.1.9}$$

$$\sigma_n = \pi + \frac{c_1'}{n} + \cdots + \frac{c_{k-1}'}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}'}{n^k} \tag{7.1.10}$$

Ayrıca

$$F(x,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sigma_n} \psi(x,\mu_n) \psi^T(s,\mu_n) - \frac{1}{\rho_n} \psi(x,\lambda_n) \psi^T(s,\lambda_n) \right\}$$

olmak üzere;

$$K(x,s) + F(x,s) + \int_0^x K(x,t) F(t,s) dt = 0 \quad (0 \le s \le x \le \pi)$$

esas integral denklemini sağlayan bir tek $K(x,s)$ matris fonksiyonu vardır. Burada $K(x,s)$ matris fonksiyonu

$$BK(x,x) - K(x,x)B = Q_1(x) - Q_2(x) \tag{7.1.11}$$

koşulunu sağlar.

Teorem 7.1. Eğer $A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right]$ yeterince küçük ise

$$\max_{0 \le x < \pi} |p_1(x) - p_2(x)| \le C'A$$
$$\max_{0 \le x < \pi} |q_1(x) - q_2(x)| \le C''A$$

dır. Burada $C' > 0$ ve $C'' > 0$ sabit sayılardır.

İspat.

$$K(x,s) + F(x,s) + \int_0^x K(x,t) F(t,s) dt = 0 \quad (0 \le s \le x \le \pi)$$

integral denklemi göz önüne alınsın. Burada $F(x,s)$ bilinen fonksiyondur. Bu integral denklemini çözelim.

$$F^{(1)}(x,s) = F(x,s)$$

olmak üzere

$$F^{(n+1)}(s,t;x) = \int_0^x F(s,u) F^{(n)}(u,t;x) du, \quad n \ge 1 \tag{7.1.12}$$

itere fonksiyonları yazılabilir. Burada $K(x,s)$ matris fonksiyonu

$$K(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.13}$$

dir. $F(x,s)$ fonksiyonun da düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
F(x,s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\psi(x,\mu_n)\psi^T(s,\mu_n)-\frac{1}{\rho_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n)\right\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_n}\begin{pmatrix}\psi_1(x,\mu_n)\\ \psi_2(x,\mu_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(s,\mu_n) & \psi_1(s,\mu_n)\end{pmatrix}-\frac{1}{\rho_n}\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda_n)\\ \psi_2(x,\lambda_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(s,\lambda_n) & \psi_1(s,\lambda_n)\end{pmatrix} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\begin{Bmatrix}\dfrac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n} & \dfrac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n} \\ \dfrac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n} & \dfrac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.1.14}$$

olur. Burada $F(x,s)$ fonksiyonunun matris gösterimi

$$F(x,s)=\begin{pmatrix}F_{11}(x,s) & F_{12}(x,s)\\ F_{21}(x,s) & F_{22}(x,s)\end{pmatrix} \tag{7.1.15}$$

şeklindedir. O halde (7.1.14) den

$$F_{11}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.16}$$

$$F_{12}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.17}$$

$$F_{21}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.18}$$

$$F_{22}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.19}$$

yazılır.

Önce $F_{11}(x,s)$ formülü hesaplansın. (7.1.16) nin sağ tarafına $\dfrac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa

$$F_{11}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}+\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)+\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\left(\psi_1(x,\mu)\psi_1(s,\mu)\right)'d\lambda\right]$$

elde edilir. Burada $'=\frac{d}{d\lambda}$. $-1\le\cos x\le 1,\ -1\le\sin x\le 1,\ 0\le x<\pi$ olduğu göz önüne

alınırsa

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)c_1\right|+\left|\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_2\,d\lambda\right|\right]$$

$$\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\rho_n-\sigma_n\right)c_3\right|+\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_4\,d\lambda\right|\right]$$

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le C_1\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$$

elde edilir. $A\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$ olduğundan

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le C_1A \tag{7.1.20}$$

bulunur. (7.1.12) den

$$F_{11}^{(n+1)}(s,t;x)=\int_0^x F_{11}(s,u)F_{11}^{(n)}(u,t;x)\,du,\ \ n\ge 1 \tag{7.1.21}$$

olur buradan

$$F_{11}^{(2)}(s,t;x)=\int_0^x F_{11}(s,u)F_{11}(u,t;x)\,du$$

elde edilir. $0\le x<\pi$ olduğundan

$$\left|F_{11}^{(2)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^2}{\pi}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\left|F_{11}^{(3)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^3}{\pi}$$

$$\vdots\qquad = \qquad\vdots$$

$$\left|F_{11}^{(n)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}$$

elde edilir. (7.1.13) eşitliğinden

$$K_{11}(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F_{11}^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.22}$$

yazılabilir. (7.1.22) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\left|K_{11}(x,x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}\right|$$

olur. $C_1A\pi\le\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left|K_{11}(x,x)\right|&\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}=C_1A+\pi(C_1A)^2+\pi^2(C_1A)^3+\ldots\\&\le C_1A\left(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots\right)\\&\le 2C_1A\end{aligned} \tag{7.1.23}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}F_{12}(x,s)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}+\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\sigma_n}\right]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)+\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\left(\psi_1(x,\mu)\psi_2(s,\mu)\right)'d\lambda\right]\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\left|F_{12}(x,s)\right|&\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)c_5\right|+\left|\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_6d\lambda\right|\right]\\&\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\rho_n-\sigma_n\right)c_7\right|+\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_8d\lambda\right|\right]\end{aligned}$$

$$\left|F_{12}(x,s)\right|\le C_2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$$

elde edilir. $A\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$ olduğundan yukarıdaki işlemlerin benzerleri yapılırsa

$$\left|F_{12}(x,s)\right|\le C_2A \tag{7.1.24}$$

elde edilir. (7.1.12) den

$$F_{12}^{(n+1)}(s,t;x)=\int_0^x F_{12}(s,u)F_{12}^{(n)}(u,t;x)du,\ \ n\geq 1 \tag{7.1.25}$$

olup buradan

$$F_{12}^{(2)}(s,t;x)=\int_0^x F_{12}(s,u)F_{12}(u,t;x)du$$

elde edilir. $0\leq x<\pi$ olduğundan

$$\left|F_{12}^{(2)}(s,t;x)\right|\leq\left(C_2A\right)^2\pi$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\begin{aligned}F_{12}^{(3)}(s,t;x)&\leq\frac{\left(C_2A\pi\right)^3}{\pi}\\ \vdots\quad &=\quad\vdots\\ F_{12}^{(n)}(s,t;x)&\leq\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\end{aligned}$$

elde edilir. (7.1.13) eşitliğinden

$$K_{12}(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F_{12}^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.26}$$

yazılabilir. (7.1.22) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\left|K_{12}(x,x)\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\right|$$

olur. Burada $C_2A\pi\leq\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left|K_{12}(x,x)\right|&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}=C_2A+\pi(C_2A)^2+\pi^2(C_2A)^3+\ldots\\ &\leq C_2A\left(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots\right)\\ &\leq 2C_2A\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\left|K_{21}(x,x)\right|\leq 2C_3A \tag{7.1.27}$$

$$\left|K_{22}(x,x)\right|\leq 2C_4A \tag{7.1.28}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Diğer taraftan

$$BK(x,x)-K(x,x)B=Q_1(x)-Q_2(x)$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{11}(x,x) & K_{12}(x,x)\\ K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}K_{11}(x,x) & K_{12}(x,x)\\ K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x)\\ K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x)-K_{21}(x,x)\end{pmatrix}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{pmatrix}K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x)\\ K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x)-K_{21}(x,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1(x)-p_2(x) & q_1(x)-q_2(x)\\ q_1(x)-q_2(x) & p_2(x)-p_1(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan da

$$q_1(x)-q_2(x)=K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) \tag{7.1.29}$$

$$p_1(x)-p_2(x)=K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \tag{7.1.30}$$

bulunur. (7.1.29) ve (7.1.30) denklemleri ve (7.1.23), (7.1.26), (7.1.27) ve (7.1.28) eşitsizliklerinden

$$\left|p_1(x)-p_2(x)\right|\le C'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C'A$$

$$\left|q_1(x)-q_2(x)\right|\le C''\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C''A$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler $[0,\pi)$ aralığında bulunan tüm x değerleri için sağlandığından

$$\max_{0\le x<\pi}\left|p_1(x)-p_2(x)\right|\le C'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C'A$$

$$\max_{0\le x<\pi}\left|q_1(x)-q_2(x)\right|\le C''\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C''A$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] **Ambartsumyan, V.A.,** 1929, *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Z. Physik, 53, 690-695.

[2] **Borg, G.,** 1945, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta Math., 78, 1-96.

[3] **Levinson, N.,** 1949, *The Inverse Sturm- Liouville Problem,* Mat. Tidsskr. B., pp.25-30.

[4] **Levinson, N.,** 1949, *Criteria fort he Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators*, Casopis. Pest. Mat. Fys., 74, 17-20.

[5] **Delsarte, J.,** 1938, *Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Linearies Aux Derivees Partielles du Second Ordre*, C. R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182.

[6] **Delsarte, J. and Lions, J.,** 1957, *Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe*, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128.

[7] **Levitan, B.M.,** 1964, *Generalized Translation Operators and some of its Applications,* Jerusalem.

[8] **Povzner, A.V.,** 1948, *On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis*, *Mat. Sb.,* 23.

[9] **Tichkonov, A.N.,** 1949, *Uniqueness Theorem for Jeophysics Problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 69, No:4, 797-800.

[10] **Marchenko, V.A.,** 1950, *Some Problems in the Theory of Second–Order Differantial Operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 72, 457-560.

[11] **Krein, M.G.,** 1951, *Solution of the Inverse Sturm-Liouville problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR,76, 21-24.

[12] **Krein, M.G.,** 1954, *On a Method of the Effective Solution of an Inverse BoundaryValue Problem,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 95, 767-770.

[13] **Gelfand, I.M. and Levitan, B.M.,** 1951, *On the Determination of a DifferentialEquations by its Spectral Function,* Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math., 15, 309-360.

[14] **Levitan, B.M. and Gasymov, M.G.,** 1964, *Determination of a Differential Equations by two its Spectra*, Russian Math Surveys, 19, 1-63.

[15] **Cardner, G., Green, J., Kruskal, M. and Miura, M.,** 1967, *A Method for Solvingthe Korteweg-De Vries Equation*, Phys. Rev. Lett., v. 19, 1095-1098.

[16] **Lax, P.,** 1968. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, *Comm. Pure and Appl. Math.*, v .21,467-490.

[17] **Faddeev, L.D.,** 1964, *Properties of the S-Matrix of the One-Dimensional Schrödinger Equation trudy* Mat. Inst. Steklow, 73, 314-336.

[18] **Prats, F. and Toll, J.,** 1959, *Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States*, Phys. Rew., 113, (1), 363-370.

[19] **Moses, H.E.,** 1957, *Calculation of the Scattering Potential for One-DimensionalDirac Equation from Reflection Coefficient and Point Eigenvalues*, Bull. Amer. Phys. Soc., 4, 240.

[20] **Gasymov, M.G. and Levitan, B.M.,** 1966, *The Inverse Problem for the Dirac System*, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.

[21] **Gasymov, M.G. and Dzhabiev T.T.,** 1955, *On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator,* Baku- ELM., *46-71.*

[22] **Sargsjan, I.S.,** 1966a, *A Theorem of the Completeness of the Eigenfunctions of the Generalized Dirac System,* Dokl., Akad. Nauk. Arm. SSR, 42, (2), 77-82.

[23] **Sargsjan, I.S.,** 1966b, *Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional DiracSystem,* Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat., 1, (6), 392-436.

[24] **Quigg, C., Rosner, J.L. and Thacker, H.B.,** 1978, Inverse Scattering Problem for Quarkonium Systems, I and II Phys. Rev., D 18, No: 1, 274-295.

[25] **Grosse, H. and Martin, A.,** 1979, *Theory of the Inverse Problem for ConfiningPotentials*, Nuclear Phys., B 14 B, 413-432.

[26] **Abdukadyrov, E.,** 1967, *Computation of the Regularizad Trace for a Dirac System,* Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh., 22, (4), 17-24.

[27] **Khasanov, A.B.,** 1994, *On Eigenvalues of the Dirac Operator Located on the Continuous Spectrum*, Theory and Math. Phys. V.99, No: 1, 20-26.

[28] **Gasymov, M.G.,** 1967, *The Inserve Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order 2n*, Soviet Physics Dokl. 11, 676-678.

[29] **Veliev, S.G.,** 1972, *Inverse Problem for the Dirac systems a the Whole Axis*, DEP. VINITI, 4917-4972.

[30] **Maksudov, F.G. and Veliev, S.G.,** 1975, *The Inverse Scattering Problem for the Nonself-Adjoint Dirac Operator on the Whole Axis*, Soviet Math. Dokl. V. 16, No: 6, 1629-1633.

[31] **Roos, B.W. and Sangren, W.C.,** 1961, *Spectra for a Pair Singular First OrderDifferential Equations*, Proc. Amer. Math. Soc., V. 12, 468-476.

[32] **Harris, B.J.,** 1983, *Bounds for the Eigenvalues of Separated Dirac Operators*, Proc. of Royal Society of Edinburgh, 95 A, 341-366.

[33] **Evans, W.D. and Harris, B.J.,** 1980, *Bounds for the Point Spectra of Separated Dirac Operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect., A 88, 1-15.

[34] **Otelbayev, M.O.,** 1973, *Distribution of the Eigenvalues of the Dirac Operator*, Mat. Zametki, 14, 843-852.

[35] **Martynov, V.V.,** 1965, *Conditions of Discreteness and Countinuity of the Spectrumin the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Differential Equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165, 996-999.

[34] **Nabiev, I.M.,** 2003, *On reconstruction of Dirac operator on the segment*, Proceedingof IMM of Nas of Azerbaijan, 18, 97-102.

[35] **Kerimov N.B.,** 2002, *A boundary value problem for the Dirac system with a spectralparameter in the boundary conditions*, Differ. Equ. 38 (2), 164-174.

[36] **Agranovich M.S.,** 2001, *Spectral problems for the Dirac system with spectralparameter in local boundary conditions,* Funct. Anal. Appl. 35, 161-175.

[37] **Arutyunyan, T.N.,** 2008, *Transformation operators for the canonical Dirac system*, Differ. Uravn. 44, 1011-1021.

[38] **Amirov R. Kh. Keskin B. and Ozkan A. S.,** 2009, *Direct and inverse problems for the Dirac operator with a spectral parameter linear contained in a boundarycondition*, Ukrainian Math. J. 61, 1365-1379.

[39] **Yang C.F.,** 2011, *Hochstadt-Lieberman theorem for Dirac operator with igenparameter dependent boundary conditions*, Nonlinear Anal., 74, 2475-2484.

[40] **Panakhov, E.S.,** 1981, *Inverse problem for Dirac system in two partially settled spectrum*, VINITY 3304, 1-29.

[41] **Hryniv R.O. and Mykytyuk Ya.V.,** 2003, *Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Inverse problems, 19, 665-684.

[42] **Savchuk A.M. and Shkalikov A.A.,** 1999, *Sturm-Liouville operators with singularpotentials*, Mat. Zametki, 66, 897-912.

[43] **Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R. and Holden H.,** 1988, *Solvable Modelsin Quantum Mechanics*, New York.

[44] **Albeverio S. and Kurasov P.,** 2000, *Singular Perturbations of Differential Operators, Solvable Schrödinger Type Operators.*

[45] **Savchuk A.M.,** 2001, *On eigenvalues and eigenfunctions of Sturm-Liouvilleoperators with singular potentials*, Mat. Zametki, 69, 277-285.

[46] **Hryniv R.O. and Mykytyuk Ya.V.,** 2003, *Transformation operators for Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Math. Phys. Anal. Geom.

[47] **Pöschel J. and Trubowitz E.,** 1987, *Inverse spectral theory*, Pure Appl. Math., 130.

[48] **Hald O.,** 1984, *Discontinuous Inverse Eigenvalue Problem*, Commun. Pure Appl. Math., 37, 539-577.

[49] **Andersson L.,** 1988, *Inverse Eigenvalue problems for a Sturm-Liouville equation in impedance form*, Inverse problems, 4, 929-971.

[50] **Carlson R.,** 1994, *Inverse Sturm-Liouville problems with singularity at zero,* Inverse problems, 10, 851-864.

[51] **Hald O. and McLaughlin J.R.,** 1998, *Recovery of BV Coefficients from nodes*, Inverse problems, 14, 245-273.

[52] **Yurko V.A.,** 2000, *Inverse problems for differential equations with singularities lying inside the interval,* J. Inverse Ill.-Posed Probl., 8, 89-103.

[53] **Amirov, R.Kh. and Yurko V.A., ** 2001**,** *On differential operators with singularity and Discontinuous Conditions Inside the Interval*. Ukr. Math. Jour., 53, 1443-1458.

[54] **Gasymov M.G.,** 1965, *Determination of the Sturm-Liouville equation having singularity from two spectra*, DAN SSSR, 161, 274-276.

[55] **Koyunbakan H.,** 2002, *Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Teorisi*, Doktora Tezi, Elazığ.

[56] **Panakhov E.S. and Yilmazer R.,** 2006, *On inverse problem for Singular Sturm-Liouville operator from two spectra*, Ukrainian Mathematical Journal, 147-154.

[57] **İç Ü.,** 2003, *Kanonik Dirac Operatörü İçin Kısmen Çakışmayan İki Spektruma göre Ters problem*, Doktora Tezi, Elazığ.

[58] **Baş E.,** 2006, *Spektral ve Potansiyel Teorinin Ters problemleri*, Doktora Tezi, Elazığ.

[59] **Kayalar M.,** 2003, *Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Singüler Sturm-Liouville Operatörü için Ters problem*, Doktora Tezi, Erzurum.

[60] **Levitan, B.M.,** 1978, *On the Determination of the Sturm-Liouville operator from One and Two Spectra*, Math. Ussr, Izvestija, vol. 12, no.1, 179-193.

[61] **Mizutani, A.,** 1984, *On the inverse Sturm-Liouville problem,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math., 31, 319-350.

[62] **Kreyszig, E.,** 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications,* New York.

[63] **Bayraktar, M.,** 1994, *Fonksiyonel Analiz, Atatürk üniversitesi yayınları*, Erzurum, s.314.

[64] **Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V.,** 1972, *Elementary of Functional Analysis and Theory of Functions*, Moscow, Russia*,* p. 327.

[65] **Musayev, B., Alp, M.,** 2000, *Fonksiyonel Analiz,* Balcı yayınları, Kütahya, s. 470.

[66] **Levitan, B.M., and Sargsyan, I.S.,** 1990, *Sturm-Liouville and Dirac Operators*, Netherlands.

[67] **Naimark, M. A.,** 1968, *Linear Differential Operators*, Frederik Ungar Publishing Co. Inc., London.

[68] **İdemen, M.,** 1999, *Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi*, Işık ün., İstanbul.

[69] **Hacısalihoğlu, H.H., Haciyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown L.M., İbikli, E., Brown, S.,** 2000, *Matematik Terimleri Sözlüğü*, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, s.678.

[70] **Olver, F.W.J.,** 1974, *Introduction to asymptotics and special functions*, Akademic pres, New York and London, p. 375.

[71] **Balcı, M.,** 1997, *Analiz II*, Balcı yayınları, Ankara, s.420.

[72] **Adams, R.A.,** 1978, *Sobolev Space,* Academic Press, New York.

[73] **Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S.,** 2010, *Adi Diferansiyel Denklemler*, Dora Yayınları, Bursa.

ÖZGEÇMİŞ

10.09.1979 yılında Erzincan'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzincan' da tamamladı. 1999 yılında Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen–Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2003 yılında mezun oldu. 2005 yılında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2006 yılında Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2008 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansını bitirdi. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına başladı.

Evli ve bir çocuk babasıdır.

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT
(08121204)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12.06.2012

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT
(08121204)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12.06.2012
Tezin Savunulduğu Tarih: 03.07.2012

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (A.Ü.)
Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK (F.Ü.)
Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü.)
Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü.)

TEMMUZ-2012

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında ve yürütülmesinde, engin bilgi birikimini tam olarak bir eğitimci üslubu ve sıfatıyla, yüksek makamın alçak gönüllülüğü içerisinde, aktarmasına ve böyle bir çalışmanın planlanması, düzenli bir şekilde yürütülmesi sürecinde her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum yakın ilgi ve desteklerinden dolayı anneme ve aileme teşekkür eder saygı ve sevgilerimi sunarım.

Murat ŞAT

ELAZIĞ–2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu çalışma yedi bölümden oluşmuştur.

İlk bölümde; regüler Sturm-Liouville ve Dirac operatörlerinin, spektral teorisinin (düz ve ters problemler) tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümde; diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; bir boyutlu stasyoner Dirac operatörünün genel görüntüsü ve kanonik formları, özdeğerler için asimptotik formül, kanonik Dirac operatörü için matris dönüşüm operatörü, normlaştırıcı sayıların iki spektrum türünden ifadesi, normlaştırıcı sayılar için asimptotik formül ve iki spektruma göre ters problem incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; singüler Dirac operatörü, iki spektruma göre ters problem, normlaştırıcı sayılar için asimptotik ifadeler elde edilmiştir.

Beşinci bölümde; yarı eksende Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem incelenmiştir.

Altıncı ve yedinci bölümler çalışmanın orijinal kısmı olup bu bölümlerde sırasıyla singüler Dirac operatörü için dönüşüm operatörünün genel dejenereliği ve kararlılık problemi incelenmiştir

Anahtar Kelimeler: Spektrum, Ters problem, Dirac operatörü, Özdeğer, Özvektör fonksiyon, Genel dejenere, Kararlılık.

SUMMARY

Spectral Theory of the Singular Dirac Operator

This thesis consists of seven chapters.

In the first chapter; the history of spectral theory (well and ill-posed problem) Sturm-Liouville and Dirac operators were given.

In the second chapter; some fundemantal definitions often used in the spectral theory differential operators were given.

In the third chapter; one dimensional stationary and canonic forms of Dirac operator, asymptotic formula for eigenvalues, matrix transformation operator for canonic Dirac operators, the statement of norming constants in terms of two spectrums, asymptotic formula for norming constants and inverse problem according to two spectrums were studied.

In the fourth chapter; singular Dirac operator, inverse problem according to two spectrum and asymptotic statements for norming constants were obtained.

In the fifth chapter; in semi-axis inverse problem according to two spectrums for Dirac operator was examined.

In the sixth and the seventh chapters that constitute the original part of our study, the general degenerate of transformation operator for singular Dirac operator and well-posedness problem were studied, respectively.

Key Words: Spectrum, Inverse problem, Dirac operator, Eigenvalue, Eigenvector function, General degenerate, Well-posedness.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

SİMGELER LİSTESİ

$L_2[a,b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
H	: Hilbert uzayı
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyon
λ_n	: $n.$ özdeğer
φ_n	: $n.$ özfonksiyon
$K(x,y)$	: Çekirdek fonksiyonu
α_n	: $n.$ normlaştırıcı sayı
$\rho(\lambda)$	: Spektral fonksiyon
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir (telin titreşimi, zar titreşimi, vb.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Matematikte l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H da lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX.–XX. asırlarda birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sınırlı ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler; tanım bölgesi sınırsız veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak şekilde) diferansiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Rietsz, J. Von Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapıldığı bilinmektedir.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşım 1946 yılında E. C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre sık sık bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Lineer diferansiyel operatörler teorisinde spektral analizin ters problemleri önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel operatörler için ters problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak (veya yapısını kurmak) mümkündür.
2. Spektral verilere göre operatör birebir olarak mı tanımlanır.
3. Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması (kurulması) yöntemlerinin bulunmasıdır.

Ters problemlerle ilgili ilk sonuç, V. A. Ambartsumyan' a [1] aittir. 1929 yılında V. A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.1. $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_n, \cdots$'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (0 \le x \le \pi) \tag{1.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{1.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2 \ (n = 0, 1, \cdots)$ ise $q(x) = 0$ dır.

V. A. Ambartsumyan'ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir.

Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G. Borg'a aittir [2].

Teorem 1.2. $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (1.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0\,, \tag{1.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\,, \tag{1.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$'ler ise (1.1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad (h \neq h_1) \tag{1.5}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\,,$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve $h,\ h_1$ ve H sayılarını tek olarak belirtir. ($h,\ h_1$ ve H sonlu gerçel sayılardır).

G. Borg'un bu çalışmasında $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilmiştir ve operatör bu dizilerin yardımıyla belirtilmiştir. Yani, bu tip operatörün varlığı önceden belli olduğu kabul edilmiştir. G. Borg, aynı çalışmada bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, V. A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığı N. Levinson [3], [4] tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca N. Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte, J. Lions [5], [6] ve B. M. Levitan [7] tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner [8] kendi çalışmalarında göstermiştir.

Daha sonra ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde teklik problemiyle ilgili en önemli çalışmalar A. N. Tichkonov (Tikhonov) [9] ve V. A. Marchenko [10] tarafından yapılmıştır. Marchenko bu çalışmasında teklik problemlerinin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=1, \quad \varphi'(0,\lambda)=h \tag{1.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda)=\varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{1.7}$$

sayıları verilen operatörün normlaştırıcı sayıları,

$$\rho(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}\frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V. A. Marchenko yukarıda bahsedilen çalışmada G. Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımı ile vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun, Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. V. A. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M. G. Krein [11], [12] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V. A. Marchenko'nun çalışması yayınlanmadan önce A. N. Tikhonov [9] tarafından V. A. Marchenko'nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A. N. Tichkonov'un çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir.

Teorem 1.3. $\lambda<0$ olduğunda

$$U''+\lambda\rho^2(x)U=0, \qquad x>0,\ U(\infty)=0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x)\geq\rho_0>0$ dır. $R(\lambda)=\dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda<0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I. M. Gelfand ve B. M. Levitan [13], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları verdiler. Ayrıca bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir

yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre bulunması için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen klasik asimptotik formüllerinin sağlanmasıdır:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \ldots + \frac{a_{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \ldots + \frac{b_{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}},$$

burada $a_0 = \frac{1}{\pi}\left[h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\frac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek sayı ise $\sum \left(\frac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dur.

Fakat bu çalışmalarda ters problemin iki spektruma göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B. M. Levitan ve M. G. Gasimov'un [14] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{1.8}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n.$ çarpanın bulunmadığını gösterir. (1.8) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (1.8) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [14] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1. $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri çaprazlaşır (sıralıdır), yani

   $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$

2. λ_n ve μ_n'ler

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a'_0}{n} + \frac{a'_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3. $a_0 \neq a'_0$.

Sturm-Liouville operatörünü inceleme sürecinde özellikle XX. asrın ikinci yarısında kullanılan yöntemlerin sayısı sürekli bir şekilde çoğalmıştır. Buna kanıt olarak 1967 yılında bir grup Amerikan fizikçileri ve matematikçileri G. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura [15] ve P. Lax [16] tarafından bulunan bazı kısmi türevli nonlineer evalusyon denklemleri ile Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki bağıntıyı gösterebiliriz. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulamaları olan singüler Sturm-Liouville operatörleri için kuantum teorisinin ters saçılma problemleri halen yoğun bir şekilde fizikçiler ve matematikçiler tarafından araştırılmaktadır. Kuantum saçılma teorisinin ters problemleri ile ilgili tarihçe detaylı bir şekilde L. D. Faddeev'in [17] çalışmasında verilmiştir.

Şimdi ise Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları hatırlatalım. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar doğal olarak fizikçiler F. Prats, J. Toll [18], H. E. Moses [19] ve diğerleri tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0,\infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasimov ve B. M. Levitan [20] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B\frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y, \qquad 0 < x < \infty \tag{1.9}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \tag{1.10}$$

$$(y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0, \; H_1 \neq H) \tag{1.11}$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$, (1.9) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=0,\quad \varphi_2(0,\lambda)=-1$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan $\rho(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ fonksiyonu (1.9), (1.10) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x)\in L^2(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda)=\int_0^n f^T(x)\,\varphi(x,\lambda)dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(\lambda)-F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda)=0$$

olmak üzere

$$\int_0^{\infty} f^T(x)\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F^2(\lambda)d\rho(\lambda) \tag{1.12}$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Ayrıca, bu çalışmada aşağıdaki önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 1.4.

$$\sigma(\lambda)=\rho(\lambda)-\frac{\lambda}{\pi}$$

ve

$$F(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}(1-\cos\lambda x)/\lambda\\ -\sin\lambda x/\lambda\end{pmatrix}\left(\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda}\;\;\frac{\sin\lambda y}{\lambda}\right)d\sigma(\lambda)$$

olmak üzere $y\le x$ için $K(x,y)$ matris fonksiyonu

$$F(x,y)+K(x,y)+\int_0^x K(x,s)F(s,y)ds=0 \tag{1.13}$$

integral denklemini sağlar.

Teorem 1.5. $\rho(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

1. $g(x)\in L^2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyonu ve

$$G(\lambda)=\int_0^{\infty} g^T(x)\,s(x,\lambda)dx,\quad s(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\lambda x\\ -\cos\lambda x\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda)d\rho(\lambda)=0$$

ise $g(x)\equiv 0$ dır.

2.

$$\sigma(\lambda)=\rho(\lambda)-\frac{\lambda}{\pi},\quad c(x,\lambda)=\begin{pmatrix}(1-\cos\lambda x)/\lambda \\ -\sin\lambda x/\lambda\end{pmatrix}$$

olacak biçimde

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda)c^T(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda)$$

matris fonksiyonu ikinci merteben sürekli $f''(x,y)\equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

Bu takdirde her sabit $x\geq 0$ için (1.13) integral denklemi her iki değişkene göre sürekli olan tek $K(x,y)$ çözümüne sahiptir.

Teorem 1.6. $Q(x)$ sürekli matris fonksiyonu olmak üzere monoton artan $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun (1.9), (1.10) sınır değer probleminin spektral fonksiyonu olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerek ve yeterdir:

1. Eğer $g(x)\in L^2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda)=\int_0^{\infty} g^T(x)s(x,\lambda)dx$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda)d\rho(\lambda)=0$$

ise $g(x)\equiv 0$ dır.

2.

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda)c^T(y,\lambda)\,d\{\rho(\lambda)-\frac{\lambda}{\pi}\}$$

matris fonksiyonu $F_{11}(x,0)=F_{21}(x,0)=0$ olmak üzere ikinci mertebeden sürekli $f''(x,y)\equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi M. G. Gasimov ve T. T. Dzhabiev [21] tarafından yapılan çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki önemli teoremler ispatlanmıştır:

Teorem 1.7. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri sırası ile (1.9), (1.10) ve (1.9), (1.11) problemlerinin özdeğerleri ise

$$\alpha_n = \frac{H_1 - H}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \mu_n}, \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots) \tag{1.14}$$

dir. Burada, ' simgesi sonsuz çarpımda $k = n$ teriminin mevcut olmadığını gösterir.

Teorem 1.8. $p(x)$ ve $q(x)$ $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve *k*. mertebeden türevleri $L^2(0,\pi)$ de olmak üzere $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizilerinin sırası ile (1.9), (1.10) ve (1.9), (1.11) problemlerinin spektrumları olması için

1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarının çaprazlaşması, yani

$$\cdots < \lambda_{-n} < \mu_{-n} < \lambda_{-n+1} < \cdots < \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \cdots < \lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1} < \cdots$$

2. $\alpha \neq \beta,\ 0 \leq \beta, \alpha \leq \pi$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{n,k}\right|^2$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\beta_{n,k}\right|^2$ serileri yakınsak olmak üzere

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \cdots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

asimptotik formüllerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

Dirac operatörü için özvektör fonksiyonlarının tamlığı, Cauchy probleminin çözümü, self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülarize izin hesaplanması, periodik ve antiperiodik problemler, açılım teoremleri, özvektör fonksiyonlarının asimptotiği, 2n mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi, kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem sırası ile [22-40] çalışmalarında incelenmiştir.

Diğer taraftan $W_2^{-1}(0,1)$ uzayında singüler reel değerli potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem R.O. Hryniv ve Ya.V. Mykytyuk [41] tarafından yapılan çalışmada incelenmiştir.

Bu çalışmada $q \in W_2^{-1}(0,1)$ reel değerli dağılım fonksiyonu olmak üzere $H := L_2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$l := -\frac{d^2}{dx^2} + q \tag{1.15}$$

diferansiyel ifadesine karşılık gelen T Sturm-Liouville operatörü tanımlanmış ve A. M.

Savchuk ve A. A. Shkalikov [42]' deki çalışmasına göre, regularizasyon yöntemi ile Dirichlet sınır koşularından bahsedilmiştir.

Dağılım anlamında $\sigma' = q$ olacak şekilde reel değerli $\sigma \in H$ alınmış ve

$$D(T_\sigma) = \left\{ u \in W_1^1(0,1) \middle| u' - \sigma u \in W_1^1(0,1), l_\sigma(u) \in H, u(0) = u(1) = 0 \right\} \quad (1.16)$$

tanım kümesinde

$$Tu = T_\sigma u = l_\sigma(u) := -(u' - \sigma u)' - \sigma u' \quad (1.17)$$

ifadesi yazılmıştır.

Burada, dağılım anlamında bütün $u \in D(T_\sigma)$ için $l_\sigma(u) = -u'' + qu$ ifadesi incelendiğinde özellikle T_σ operatörü, regüler potansiyeller için ilkel σ nın özel seçimine bağlı değildir ve (1.15)'e karşılık gelen standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörü ile çakışır. Ayrıca T_σ ilkel $\sigma \in H$ 'ye düzgün resolvent anlamında sürekli olarak bağlıdır ve böylece T_σ, herhangi bir $\sigma' = q \in W_2^{-1}(0,1)$ için (1.15) 'e ait standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörüdür. Ele alınan potansiyeller sınıfı Dirac δ -tipli ve $\frac{1}{x}$ -Coulomb tipli potansiyelleri içerir ve matematiksel fizik ve kuantum mekaniğinde geniş olarak kullanılır [43,44].

[42] den iyi bilinir ki, her reel değerli $\sigma \in H$ için yukarıda tanımlanan T_σ operatörü, diskret basit (λ_k^2), $k \in \mathbb{N}$ spektrumlu self-adjoint operatörüdür

ve $\lambda_k, \lambda_k = \pi k + \mu_k$ ($\mu_k \in l_2$ olan dizi) şeklinde asimptotiğe sahiptir [42,45,46]. Regüler

q potansiyelleri için yukarıdaki asimptotikler $\mu_k = O(\frac{1}{k})$ olacak şekilde yazılır.

Bu çalışmada, reel ikişerli farklı sayılardan oluşan ve yukarıda ifade edilen asimptotiklere sahip hangi (λ_k^2) dizileri $W_2^{-1}(0,1)$ den olan singüler potansiyelli Sturm-Liouville operatörlerinin spektrumu dur? Sorusunun cevabı araştırılmıştır. Bu soru, ele alınan potansiyeller için ters spektral probleme götürür. Yani; bu durum, karşılık gelen spektral parametreye dayanan q potansiyelinin kurulmasıdır.

Regüler durumda, yukarıda bahsedilen problemin çözümü için sadece (λ_k^2) spektrumunun yetersiz olduğu bilinmektedir. Aynı Dirichlet spektrumlu Sturm-Liouville operatörlerinin ürettiği birçok farklı q potansiyelleri (izospektral) vardır. J. Pöschel ve E.

Trubowitz [47]; verilen (λ_k^2) spektrumlu (reel, basit ve $\lambda_k = \pi k + O(\frac{1}{k})$ asimptotiğine ait) H Hilbert uzayındaki bütün potansiyellerinin kümesinin, analitik olarak $w_n = n$ ağırlıkları ile $l_2(w_n)$ ağırlıklı uzaya difeomorfik olduğunu göstermişlerdir.

q potansiyelini yeniden tek olarak elde etmek için spektrumun yanında bazı ek bilgiler verilmelidir. Bu bilgiler, $(0,1)$ aralığının yarısı üzerindeki potansiyelin bilinmesi veya farklı sınır koşulları olan aynı diferansiyel ifade ile verilen Sturm-Liouville operatörünün spektrumu veya biri bütün aralık için ve diğerleri aralığın eşit iki yarısı için olan üç spektrum olabilir.

Hryniv ve Mykytyuk çalışmasında; I. M. Gelfand, B. M. Levitan ve V. A. Marchenko'ya göre klasik yaklaşım genelleştirilmiş ve $W_2^{-1}(0,1)$den singüler potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem tam olarak çözülmüştür. Şöyle ki, spektral veriler kümesinin açık bir şekli verilmiş ve bu kümenin keyfi bir elamanından q' nun yeniden nasıl elde edildiği açıklanmıştır [41].

Diğer singülerite tiplerine (örneğin Sturm-Liouville operatörler sınıfı için a süreksizlik noktası, $\frac{1}{x^\gamma}$ ya benzer potansiyeller, vs.), [48]'de O. Hald, [49]' da L. Andersson, [50]'de R. Carlson, [51]'de O. Hald ve J. R. McLaughlin, [52]'de V. A. Yurko, [53]'de V. A. Yurko ve R. Kh. Amirov bakmışlardır. $q(x) = q_1(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}$ potansiyeline sahip (1.1) denklemi için iki spektruma göre ters problem M. G. Gasimov [54] tarafından çözülmüştür. Daha sonraki yıllarda Bessel tipi tekilliğe sahip potansiyller için ters problemler farklı yöntemlerle H. Koyunbakan [55], Hidrojen atomu denklemleri için E. S. Panakhov ve R. Yılmazer [56], Dirac denklemler sistemi için Ü. İç [57] ve tekile sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörü için kuantum saçılma teorisinin ters problemleri E. Baş [58] ve tekile sahip Sturm-Liouville operatörü için ters problem Mehmet Kayalar [59] tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında singüler Dirac operatörünün spektral analizi (düz ve ters problemleri) incelenmiştir. Ayrıca Levitan'ın çalışmasından faydalanılarak [60]; $K(x,s)$ matris fonksiyonunun genel dejenereliği gösterilmiştir. Son bölümde A. Mizutani'nin [61] çalışmasından faydalanılarak özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar için belirli şartlar sağlamak üzere potansiyel farkı ile ilgili teorem ispatlanmıştır.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, sunulan tezde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Metrik Uzay): X bir cümle olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan, $d: X\times X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. Bu özellikler $\forall x, y, z \in X$ için

M1) $d(x,y)\geq 0$

M2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

M3) $d(x,y)=d(y,x)$

M4) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

şeklindedir. (X,d) ikilisine ise bir metrik uzay denir. Bir uzay üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir [62].

Örnek 2.1.1. $K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $l_\infty=\left\{x=(x_n)\in K^\infty \,\middle|\, (x_n)\ \textit{sınırlı}\right\}$ uzayı $x=(x_n)$, $y=(y_n)\in l_\infty$ olmak üzere

$$d_\infty(x,y)=\sup\left\{|x_k-y_k| : k\in\mathbb{N}\right\}$$

metriğine göre bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.2. (Tam Uzay): Bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir. l_∞, c, $C[a,b]$, $\mathbb{R}^n$ gibi uzaylar tam uzaylardır. Fakat $\mathbb{Q}$ uzayı tam değildir [63].

Tanım 2.1.3. (Normlu Uzay): X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $x\in X$ noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine ise bir normlu uzay denir. Bu şartlar $\forall x, y\in X$ için

N1) $\|x\|\geq 0$

N2) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

N3) $\|kx\|=|k|\|x\|$ (k skaler)

N4) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

şeklindedir [63].

Örnek 2.1.2. $L_p[0,1]$ uzayı, $f(x) \in L_p[0,1]$ olmak üzere

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır.

Tanım 2.1.4. (Hilbert Uzayı): Herhangi $x, y, z, \ldots$ elamanlar cümlesini H ile gösterelim.

1) H lineer kompleks (reel) uzaydır.
2) H da bulunan her x, y eleman çiftine bu elemanların iç çarpımı denilen ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen karmaşık (reel) bir sayı karşılık gelir. Bu iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar.
   a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
   b) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
   c) $\forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ için $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
   d) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $g(x, y) = \|x - y\|$ olacak şekilde norm anlamında yakınsaklığa göre H uzayı tamdır.
4) Keyfi doğal n sayısı için H uzayında lineer bağımsız n tane eleman mevcuttur. Yani H sonsuz boyutludur.

(1), (2) ve (3) aksiyomları sağlanıyorsa H uzayına üniter Hilbert uzayı denir. (1), (2), (3) ve (4) özellikleri sağlanıyor ise H uzayına soyut Hilbert uzayı veya kısaca Hilbert uzayı denir. Başka bir ifade ile tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [64].

Tanım 2.1.5. $a \leq t \leq b$ olmak üzere $(L_2[a,b])$ uzayı,

$$(L_2[a,b]) = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 \, dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$ dir).

Tanım 2.1.6. (Operatör): Tanım ve değer cümlesi bir vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [65].

Örnek 2.1.3 $C[a,b]$ den kendi içine olan ve

$$Tx(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau,\ \ t\in[a,b]$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir operatördür. Bu operatöre integral operatörü denir.

Tanım 2.1.7. (Lineer Operatör) : E_x ve E_y iki reel lineer topolojik uzay olsun. Değer bölgesi E_y de bulunan ve E_x de tanımlı $y=Ax$ operatörünü göz önüne alalım. A operatörü için

1) $x_1,x_2\in E_x$ olmak üzere $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$

2) λ bir skaler olmak üzere $\forall x\in E_x$ için $A(\lambda x)=\lambda A(x)$

şartları sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir [65].

Örnek 2.1.4. $K(t,s),\ 0\le t,\ s\le 1$ sürekli bir fonksiyon, $x(s)\in C[0,1]$ olmak üzere

$$y(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

eşitliği ile tanımlı $y=Ax$ operatörü bir lineer operatördür.

Tanım 2.1.8. (Sınırlı Operatör): X ve Y birer normlu uzay ve $D(L)\subset X$ olmak üzere $L:D(L)\to Y$ bir operatör olsun.

$$\|Lx\|\le c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c>0$ reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise L operatörünün normu denir [65].

Tanım 2.1.9. (Sürekli Operatör): X ve Y normlu uzaylar $L:X\to Y$ bir operatör ve $x_0\in X$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\|x-x_0\|<\delta$ olduğunda $\|Lx-Lx_0\|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı varsa L operatörü $x_0\in X$ noktasında süreklidir denir [65].

Tanım 2.1.10. (Adjoint Operatör): H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L:H_1\to H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer $L^*:H_1\to H_2$ operatörü

$$\langle Lx,y\rangle=\langle x,L^*y\rangle$$

şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L'nin adjointi denir. Eğer $L^*=L$ ise L'ye self-adjoint operatör denir [65].

Tanım 2.1.11. (Dönüşüm Operatörü): E lineer topolojik uzay, A ve B de $A:E\to E$, $B:E\to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının

kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer tersi olan X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir [66].

Tanım 2.1.12. $L-\lambda I$ operatörünün sınırlı $(L-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir [67].

Tanım 2.1.13. Herhangi λ için $L-\lambda I$ operatörü tersi mevcut olacak şekilde $R_\lambda = (L-\lambda I)^{-1}$ operatörüne

$$Lx - \lambda x = y \text{ veya } (L-\lambda I)x = y$$

denkleminin rezolvent operatörü denir.

Tanım 2.1.14. $D(L)$ tanım bölgesi, L sınırlı lineer bir operatör ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Ly \equiv By' + Q(x)y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x,\lambda) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise, λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise λ sayısına karşılık gelen özvektör fonksiyonu denir [66].

Tanım 2.1.15. $\{\lambda_n\}$ ler L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b \left\{ y_1^2(x,\lambda_n) + y_2^2(x,\lambda_n) \right\} dx$$

sayılarına L operatörünün normlaştırıcı sayıları denir [66].

Tanım 2.1.16. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının herhangi bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 2.1.17. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye tam fonksiyon denir. e^z, $\sin z$, z^2 gibi fonksiyonlar tam fonksiyonlardır.

Tanım 2.1.18. $f(z)$, kompleks düzlemin bir W alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\forall z \in W$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $f(z)$'ye W'de sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.1.19. (Liouville Teoremi): Kompleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

Tanım 2.1.20. $f(z)$ kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon, z_0 ise $f(z)$ 'nin tanımlı olduğu herhangi bir nokta olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir. Eğer $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0, \ldots f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n-katlı sıfırı diye adlandırılır.

Tanım 2.1.21. $f(z)$, z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ama z_0'da diferansiyellenemeyen bir fonksiyon ise z_0'a $f(z)$ 'nin ayrık singüler (aykırı) noktası denir.

Tanım 2.1.22. z_0 bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun.

i) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kaldırılabilir aykırı noktası denir.

ii) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kutup noktası denir (kutup yeri) denir.

iii) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut değilse z_0 noktasına $f(z)$ 'nin esas aykırı noktası denir.

Tanım 2.1.23. (Rouche Teoremi): f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar ve γ, B bölgesinde bulunan f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. Eğer γ üzerinde $|f(z) - g(z)| \leq |f(z)|$ eşitsizliği gerçekleniyorsa, $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ eşitliği geçerlidir. Burada Z_f ve Z_g, $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki sıfırlarının sayısını; P_f ve P_g ise $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki kutuplarının sayısını göstermektedir. Eğer f ve g, B içindeki analitik fonksiyonlarsa $Z_f = Z_g$ [68].

Tanım 2.1.24. $f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(r^{\mu}) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$'nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir [68].

Tanım 2.1.25. $f(z)$ sonlu mertebeli bir tam fonksiyon olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(ar^{\rho})$$

eşitsizliğini sağlayan $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir. (2.1.1) eşitsizliğini sağlayan a sayılarının infimumuna $f(z)$ fonksiyonunun tipi adı verilir ve σ ile gösterilir [68].

Tanım 2.1.26. (Hadamard Teoremi): Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n})$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada m, $f(z)$ 'nin orjindeki sıfırının katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$ 'nin 0'dan farklı tüm sıfırlarının kümesidir.

Teorem 2.1.1. (Cauchy İntegral Teoremi): $f(z)$ tek irtibatlı G bölgesinde birebir analitik fonksiyon, γ ise G de kapsanan keyfi düzeltilebilir kapalı eğri olsun. $f(z)$ 'nin γ egrisi üzerinde integrali sıfıra eşittir:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Teorem 2.1.2. (Rezidü Teoremi): D bölgesinde ($f(z)$' nin sonlu sayıda ayrık tekil $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ noktaları hariç) ve D'nin Γ sınırında analitik $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun k katlı kutup noktası ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[f(z)(z-z_0)^k \right],$$

z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left[f(z)(z-z_0) \right] \quad \text{dir.}$$

Tanım 2.1.27. (Mittag-Leffler Açılımı): Bir $f(z)$ fonksiyonunun sonlu düzlemdeki aykırılıkları mutlak değer büyüklüğüne göre sıralanmış, basit $a_1, a_2, \ldots$ kutup yerleri ve bu noktalardaki rezüdileri sırasıyla $b_1, b_2, \ldots$ olsun. Eğer C_N hiçbir kutup yerinden geçmeyen, üzerinde $|f(z)| < M$ eşitsizliğinin gerçeklendiği R_N yarıçaplı çember ise ve $N \to \infty$ iken $R_N \to \infty$ oluyorsa

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right]$$

yazılır [68].

Tanım 2.1.28. (O ve o sembolleri): [69,70] $x \in X$ olduğunda, verilen x ler için $|f(x)| \le C|g(x)|$ olacak şekilde bir C sabiti varsa $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.1.5. $\dfrac{1}{x^3} = o(\dfrac{1}{x^2})$ dir. Çünkü $x \to \infty$ iken $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)/(\dfrac{1}{x^2}) \to 0$ olur.

Örnek 2.1.6. $\cosh x = O(e^x)$ dir. Çünkü $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ olduğundan her iki taraf e^x ile bölünürse

$$\frac{\cosh x}{e^x} = \frac{e^x}{2e^x} + \frac{e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}}$$

olur. Buradan da $x \to \infty$ iken $\dfrac{\cosh x}{e^x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2e^{2x}} \to \dfrac{1}{2}$ olur. Yani $\left|\dfrac{\cosh x}{e^x}\right|$ sınırlıdır. Bu nedenle $\cosh x = O(e^x)$ olur.

Tanım 2.1.29. (Noktasal Yakınsaklık): (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \ge n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada herbir $x \in A$ için bir n_0 bulunacağından n_0 sayısı hem ε a hem de x noktasına bağlıdır [71].

Tanım 2.1.30. (Düzgün Yakınsaklık): (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \ge n_0$ için ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada sözü edilen n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlı olup, x noktasına bağlı değildir. Buna göre düzgün yakınsak her dizi noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersi

her zaman doğru değildir. Eğer A cümlesi sonlu ise düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık birbirine denktir [71].

Tanım 2.1.31. $[a,b]$, $\mathbb{R}$'nin kapalı sınırlı bir aralığı ve $(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$'ler $[a,b]$ de açık aralıklar olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ için

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$$

iken

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(b_i)-f(a_i)\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ varsa $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir denir.

Tanım 2.1.32. (Parseval Eşitliği): $f(x),g(x)\in L_2(a,b)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(u)\,g(u)\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho_n}\left(\int_a^b f(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du\right)\left(\int_a^b g(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du\right)$$

dir.

Tanım 2.1.33. Eğer

$$K(x,s)=\sum_{n=0}^{N}f_n(x)\,g_n(x),\qquad s\le x$$

ise $K(x,s)$ çekirdeği genel dejeneredir denir.

Tanım 2.1.34. $\{\lambda_n\}_0^\infty$ ve $\{\lambda_n'\}_0^\infty$ spektrumları çakışsın. $\{\tilde{\lambda}_n\}_0^\infty$ ve $\{\tilde{\lambda}_n'\}_0^\infty$ spektrumları ise sonlu $n=0,1,\cdots,N$ için $\tilde{\lambda}_n\neq\tilde{\lambda}_n'$ ve $n>N$ için $\tilde{\lambda}_n=\tilde{\lambda}_n'$ olsun. Bu takdirde ters problemin

$$K(x,s)+F(x,s)+\int_0^x K(x,t)\,F(t,s)ds=0,\ (0\le x\le\pi)$$

temel integral denklemi genel dejeneredir [60].

Tanım 2.1.35. (a,b) aralığında tanımlı, $(k-1)$. mertebeden türevleri mutlak sürekli olan ve $f,f'',f''',\cdots,f^{(k)}\in L_2(a,b)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W_2^k(a,b)$ ile gösterilir [72].

Tanım 2.1.36. (Dirac-Delta Fonksiyonu):

$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}0, & 0\le t<t_0-a\\ \dfrac{1}{2a}, & t_0-a\le t<t_0+a_0\\ 0, & t\ge t_0+a\end{cases}$$

olmak üzere

$$\delta(t-t_0)=\lim_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)$$

fonksiyonuna Dirac-Delta fonksiyonu denir. Bu fonksiyon

1) $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases}$

2) $\int_0^\infty \delta(t-t_0)\,dt=1$

3) Herhangi sürekli bir $G(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty \delta(t-a)\,G(t)\,dt=G(a)$$

özellikleri ile karakterize edilir [73].

3. DIRAC OPERATÖRÜ

3.1. Bir Boyutlu Dirac Sistemi

$p_{ik}(x), (i,k=1,2)$, $[0,\pi]$ aralığında tanımlı ve sürekli reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$L=\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{12}(x)=p_{21}(x) \tag{3.1.1}$$

bir matris operatörü olsun. $y(x)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \; ve \; B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(B\frac{d}{dx}+L(x)-\lambda I\right)y=0 \tag{3.1.2}$$

denklemi, iki tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemden oluşan

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx}+p_{11}(x)y_1+p_{12}(x)y_2=\lambda y_1 \\ -\frac{dy_1}{dx}+p_{21}(x)y_1+p_{22}(x)y_2=\lambda y_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

denklem sistemine denktir.

Bu durumda $V(x)-$potansiyel fonksiyon, $m-$parçacığın kütlesi olacak biçimde $p_{12}(x)=p_{21}(x)\equiv 0$ ve $p_{11}(x)=V(x)+m,\; p_{22}(x)=V(x)-m$ olurken relativistik kuantum teorisinde (3.1.2) sistemi 1-boyutlu stasyoner Dirac sistemi olarak bilinmektedir.

2-boyutlu uzayın her düzgün ortogonal dönüşümü

$$H(x)=\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile tanımlanır [66]. Ayrıca,

$$BH=HB$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

$y=Hz$ olacak şekilde (3.1.2) denkleminin her iki tarafı soldan H^{-1} ile çarpılırsa,

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz)+H^{-1}LHz=\lambda H^{-1}Hz$$

veya

$$B\frac{dz}{dx}+\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}LH\right)z=\lambda z \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

$$Q = H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH$$

olacak şekilde, Q matrisi hesaplansın. Bu takdirde

$$H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

ve

$$\frac{d}{dx}H = \begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} H^{-1}B\frac{d}{dx}H &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \\ -\cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{-1}LH &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Son iki eşitlikten,

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) + p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & \varphi'(x) + p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. $\varphi(x)$ fonksiyonu $q_{12}(x) = 0$ olmak üzere seçilsin. Bu takdirde

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x) + \frac{1}{2}\{p_{22}(x) - p_{11}(x)\}\sin 2\varphi(x) = 0$$

şeklindedir. Buradan,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x) - p_{22}(x)}$$

elde edilir. $Q(x)$ matrisinin görüntüsü

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buna göre (3.1.4) denklemi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{3.1.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **I. kanonik formu** denir.

Şimdi $izQ(x) = q_{11}(x) + q_{22}(x) = 0$ olmak üzere bir $\varphi(x)$ fonksiyonu seçilsin, dolayısıyla $2\varphi'(x) + p_{11}(x) + p_{22}(x) = 0$

halini alır. Buradan

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \{p_{11}(z) + p_{22}(z)\}dz$$

elde edilir. Buna göre (3.1.4) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{3.1.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **II. kanonik formu** denir. (3.1.5) ve (3.1.6) denklemlerine (3.1.2) sisteminin kanonik formları da denir. (3.1.2) denklem sistemlerinin spektral teorisinin çeşitli sorunlarını incelerken bu veya diğer kanonik formlardan faydalanmak bize kolaylık sağlar. Örneğin, özdeğerlerin ve özvektör fonksiyonlarının asimptotik davranışı araştırılırken ve keyfi vektör fonksiyonunun (0 ve π noktalarında homojen sınır şartları sağlandığında) (3.1.2) denklem sisteminin özvektör fonksiyonlarına göre açılımı incelenirken, (3.1.5) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar. Sonsuz aralıkta verilmiş (3.1.2) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve ters problem incelenirken de (3.1.6) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar.

(3.1.5) kanonik denklem sistemi için $p(x)$ ve $r(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y_2' + \{p(x) - \lambda\}y_1 = 0, \quad y_1' - \{r(x) - \lambda\}y_2 = 0 \tag{3.1.7}$$

$$y_2(0)\cos\alpha + y_1(0)\sin\alpha = 0 \tag{3.1.8}$$

$$y_2(\pi)\cos\beta + y_1(\pi)\sin\beta = 0 \tag{3.1.9}$$

sınır problemi göz önüne alınsın. Herhangi bir λ_1 değeri için bu problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x,\lambda_1)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_1) \\ y_2(x,\lambda_1)\end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda λ_1'e özdeğer, buna karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$'e de özvektör fonksiyon denir.

Lemma 3.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonaldir, yani,

$$\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

dir.

İspat: $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları (3.1.7) sisteminin çözümleri olduğundan,

$$\begin{aligned}
&y_2'(x,\lambda_1) + \{p(x)-\lambda_1\}y_1(x,\lambda_1) = 0\\
&y_1'(x,\lambda_1) - \{r(x)-\lambda_1\}y_2(x,\lambda_1) = 0\\
&z_2'(x,\lambda_2) + \{p(x)-\lambda_2\}z_1(x,\lambda_2) = 0\\
&z_1'(x,\lambda_2) - \{r(x)-\lambda_2\}z_2(x,\lambda_2) = 0
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemler sırası ile $z_1(x,\lambda_2)$, $-z_2(x,\lambda_2)$, $-y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ ile çarpılıp ve daha sonra sonuçlar toplanırsa,

$$\frac{d}{dx}\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\} = (\lambda_1-\lambda_2)\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}$$

elde edilir. Bu son eşitlik x' e göre 0 dan π ye integrallenirse

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = \{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\}\Big|_0^\pi$$

bulunur. Buradan

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

veya

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi y^T(x,\lambda_1)z(x,\lambda_2)dx = 0$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan, $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonal olurlar. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.2. (3.1.7)-(3.1.9) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: Aksini varsayalım yani, $\lambda_1 = u + iv$ kompleks özdeğer olsun. $p(x)$ ve $r(x)$ reel fonksiyonlar ve α, β sayıları reel olduğu için Dirac operatörünün genel denkleminde eşleniği alınırsa, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısı da bir özdeğerdir. λ_2 ye karşılık gelen $\overline{y}(x, \lambda_1)$ özvektör fonksiyonudur. Bu takdirde Lemma 3.1.1 den dolayı

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^\pi \{ y_1(x, \lambda_1) \overline{y_1}(x, \lambda_1) + y_2(x, \lambda_1) \overline{y_2}(x, \lambda_1) \} dx = 0$$

ve

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^\pi \left\{ \left| y_1(x, \lambda_1) \right|^2 + \left| y_2(x, \lambda_1) \right|^2 \right\} dx = 0$$

olur. $\lambda \neq \overline{\lambda}$ olduğundan, $y_1(x, \lambda_1)$ ve $y_2(x, \lambda_1)$ sıfır olur ki, bu da özvektör fonksiyonlarının sıfır olmaması gerçeği ile çelişir. O halde özdeğerler kompleks olamaz. Bu da ispatı tamamlar.

3.2. Özdeğerler için asimptotik formüller

$$By' + Q(x)y = \lambda y, 0 \leq x \leq \pi \tag{3.2.1}$$

denklemi göz önüne alınsın. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

$p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli $[0, \pi]$ de toplanabilir (integrallenebilir) fonksiyonlardır. (3.2.1) diferansiyel denklemi

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \tag{3.2.2}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.2.3}$$

sınır koşullarıyla ele alınsın. (3.2.1)-(3.2.3) sınır değer probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}$ normalleştirici sayıları $\{\alpha_n\}$ ile gösterilsin.

Teorem 3.2.1. $p(x)$ ve $q(x)$ k. mertebeden türevleri $L_2(0, \pi)$ de olacak şekilde verilsin. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları için

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k} \tag{3.2.4}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{\pi} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{3.2.5}$$

asimptotik formülleri söz konusudur. Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{n,k}\right|^2 < \infty$ ve $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_{n,k}\right|^2 < \infty$ serileri yakınsaktır. Bu teoremi $k=1$ ve $p(x)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$ durumunda ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde gösterilebilir.

(3.2.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha, \ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.2.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ ile gösterilsin.

Bu takdirde (3.2.1)-(3.2.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.2.7}$$

denkleminin kökleri ile çakıştığı aşikardır.

Bilindiği gibi [21]

$$\begin{aligned} &K(x,x)B - BK(x,x) = 0 \\ &K_{11}(x,0)\cos\alpha + K_{12}(x,0)\sin\alpha = 0 \\ &K_{21}(x,0)\cos\alpha + K_{22}(x,0)\sin\alpha = 0 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

koşullarını sağlayan bir $K(x,t)$ matrisi vardır.

Ayrıca $\left[0,\pi\right]$ aralığında bulunan her sabit x için $K(x,t)$ nin birinci türevleri $L_2(0,x)$ e aittir ve

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt = 0 \tag{3.2.9}$$

dönüşüm operatörü vardır. Burada $\varphi_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$ fonksiyonu $Q(x) = 0$ durumuna karşılık gelen çözüm fonksiyonudur ve $K(x,t) = \begin{pmatrix} K_{11}(x,t) & K_{12}(x,t) \\ K_{21}(x,t) & K_{22}(x,t) \end{pmatrix}$ şeklindedir. (3.2.9) integral denklemi düzenlenip (3.2.3) koşulunda yerine yazılırsa

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = \sin(\lambda\pi + \alpha) + \int_0^\pi \left\{K_{11}(\pi,t)\sin(\lambda t + \alpha) - K_{12}(\pi,t)\cos(\lambda t + \alpha)\right\} dt = 0 \tag{3.2.10}$$

elde edilir. (3.2.10) eşitliğinde kısmi integrasyon uygulanırsa ve (3.2.8) deki ikinci koşuldan faydalanılırsa;

$$\sin(\lambda\pi+\alpha)-\frac{1}{\lambda}K_{11}(\pi,\pi)\cos(\lambda\pi+\alpha)-\frac{1}{\lambda}K_{12}(\pi,\pi)\sin(\lambda\pi+\alpha)$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi}\left\{\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos(\lambda t+\alpha)+\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin(\lambda t+\alpha)\right\}dt=0 \tag{3.2.11}$$

elde edilir.

λ_n $\left(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$ (3.2.11) denkleminin kökleri olsun. Bu takdirde $n\to\infty$ iken $\lambda_n\to\infty$ dur. Bu sebeple büyük n ler için birinci yaklaşımda

$$\sin(\lambda_n\pi+\alpha)+O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)=0$$

ifadesi bulunur. Buradan

$$\lambda_n\pi+\alpha=n\pi+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

yazılabilir. $n\to\infty$ iken $\varepsilon_n\to 0$ olmak üzere

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n \tag{3.2.12}$$

eşitliği verilsin. Bu takdirde (3.2.11) den

$$\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]-\frac{1}{\lambda_n}\left\{\left[K_{11}(\pi,\pi)\cos\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]\right.$$
$$\left.+K_{12}(\pi,\pi)\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]\right\}+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\int_0^{\pi}\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right. \tag{3.2.13}$$
$$\left.+\int_0^{\pi}\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right\}dt=0$$

elde edilir.

$$b_n=\int_0^{\pi}\left\{\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]+\int_0^{\pi}\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right\}dt \tag{3.2.14}$$

olsun.

$\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}$ ve $\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}$ fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ ye ait olduğu için $\sum_{-\infty}^{\infty}b_n^2$ yakınsaktır.

Bu takdirde (3.2.13) den

$$(-1)^n \varepsilon_n \pi - \frac{(-1)^n}{\lambda_n}\left\{K_{11}(\pi,\pi)\cos\left(\varepsilon_n \pi\right) + K_{12}(\pi,\pi)\sin\left(\varepsilon_n \pi\right)\right\} + \frac{b_n}{\lambda_n} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\varepsilon_n = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{b_n}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.2.15}$$

olur. Burada

$$\alpha_1 = \frac{K_1(\pi,\pi)}{\pi}$$

dir. $K_{11}(\pi,\pi)$ fonksiyonunu $p(x)$, $q(x)$ ile ifade ederek hesaplayalım. (3.2.15) formülünden λ_n için aranan formül bulunur.

(3.2.15) ten faydalanarak benzer işlemler yapılırsa

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \frac{c_{1,k}}{n} \text{ ve } \sum_{-\infty}^{\infty} c_{1,k}{}^2 < \infty \tag{3.2.16}$$

şeklinde normlaştırıcı sayılar için asimptotik formül elde edilir. Burada

$$c_1 = \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\left\{K_{12}(x,x) - K_{21}(x,x)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2n}\left\{\int_0^{\pi}\left[\frac{3}{2}p(x) - \frac{1}{9}(q(x) + p(x)ctgx)\right]dx - \frac{p(0) + \sin^2\alpha(1 - ctg\alpha)\left[q(0) + p(0)ctg\alpha\right]}{2(1 + ctg\alpha)}\right\}$$

dir.

3.3. Kanonik Dirac Operatörü İçin Matris Dönüşüm Operatörü

A_1 ve A_2 iki lineer diferansiyel operatör, E_1 ve E_2 ise iki lineer fonksiyonel uzay olsun.

Tanım 3.3.1. $X : E_1 \to E_2$ lineer sürekli operatör olmak üzere

1. $A_1 X = X A_2$ (3.3.1)
2. X^{-1} mevcut ve sürekli

şartlarının sağlanması halinde X' e A_1 ve A_2 operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir.

Lemma 3.3.1. λ özdeğerine karşılık gelen A_2 operatörünün özfonksiyonu $\varphi_\lambda \in E_1$, yani

$$A_2 \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$$

olmak üzere aynı λ özdeğerine karşılık gelen $\psi_\lambda = X\varphi_\lambda$, A_1 operatörünün özfonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$A_1\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

şeklindedir.

İspat. $A_1X = XA_2$ olduğundan

$$A_1\psi_\lambda = A_1X\varphi_\lambda = XA_2\varphi_\lambda = X\lambda\varphi_\lambda = \lambda X\varphi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.3.2. Lineer topolojik E uzayında A_1, A_2 ve A_3 lineer operatörleri ve E_1, E_2, E_3 kapalı alt uzayları verilmiş olsun. A_1 ve A_2 operatör çifti için X_{A_1,A_2} dönüşüm operatörü

$$X_{A_1,A_2} : E_1 \to E_2$$

şeklinde, A_2 ve A_3 operatörler çifti için X_{A_2,A_3} dönüşüm operatörü ise

$$X_{A_2,A_3} : E_2 \to E_3$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, A_1 ve A_3 operatör çifti için X_{A_1,A_3} dönüşüm operatörü,

$$X_{A_1,A_3} : E_1 \to E_3$$

şeklinde olmak üzere

$$X_{A_1,A_3} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}$$

formülü ile ifade edilir.

İspat. Dönüşüm operatörünün tanımından dolayı

$$A_1X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2}A_2$$
$$A_2X_{A_2,A_3} = X_{A_2,A_3}A_3$$

şeklinde olup, ikinci denklemden $A_2 = X_{A_2,A_3}A_3X^{-1}_{A_2,A_3}$ elde edilir. Bu eşitlik birinci denklemde yerine yazılırsa

$$A_1X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}A_3X^{-1}_{A_2,A_3}$$

veya

$$A_1X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}A_3$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$p_i(x)$ ve $r_i(x)$, $(i=1,2)$, her sonlu aralıkta $(0 \le x \le b < \infty)$ integrallenebilir reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$A_1=\begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_1(x) \tag{3.3.2}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_2(x) & 0 \\ 0 & r_2(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_2(x) \tag{3.3.3}$$

operatörlerini göz önüne alalım. Keyfi sonlu reel h_1 sayısı için

$$f_2(0)-h_1f_1(0)=0 \tag{3.3.4}$$

sınır şartını sağlayan, $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_1 olsun. Keyfi sonlu reel h_2 sayısı için

$$g_2(0)-h_2g_1(0)=0 \tag{3.3.5}$$

sınır şartını sağlayan $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_2 olsun. X operatör matrisi $f(x)\in E_1$ için

$$X\{f(x)\}=R(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)f(s)ds \tag{3.3.6}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $R(x)$ ve $K(x,s)$ iki boyutlu veya 2x2 boyutlu kare matrislerdir.

(3.3.2) ve (3.3.6) den,

$$\begin{aligned} A_1X\{f(x)\}&=BR'(x)f(x)+BR(x)f'(x)+Q_1(x)R(x)f(x)+BK(x,x)f(x) \\ &\quad+\int_0^x \{BK'_x(x,s)+Q_1(x)K(x,s)\}f(s)ds \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

dir. Diğer taraftan (3.3.3) ve (3.3.6) dan dolayı

$$XA_2\{f(x)\}=R(x)Bf'(x)+R(x)Q_2(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)\{Bf'(s)+Q_2(s)f(s)\}ds$$

dir. Son integralde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$XA_2\left\{f(x)\right\}= R(x)Bf'(x)+R(x)Q_2(x)f(x)+K(x,x)Bf(x)-K(x,0)Bf(0)$$
$$+\int_0^x\left\{K(x,s)Q_2(s)-K_s'(x,s)B\right\}f(s)ds \qquad (3.3.8)$$

elde edilir. $f(x)$, E_1 uzayında keyfi vektör fonksiyonu olduğu için (3.3.1) eşitliğinden dolayı $f(x)$ ve $f'(x)$ in katsayıları ve (3.3.7), (3.3.8) in integral altındaki ifadelerinin eşit olması gerekir. Bu sebeple $f'(x)$ lerin katsayıları için

$$BR(x)=R(x)B \qquad (3.3.9)$$

elde edilir. Eğer

$$R(x)=\begin{pmatrix}\alpha(x) & \beta(x)\\ \gamma(x) & \delta(x)\end{pmatrix}$$

şeklinde alınırsa (3.3.9) eşitliğinden

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(x) & \beta(x)\\ \gamma(x) & \delta(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(x) & \beta(x)\\ \gamma(x) & \delta(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\delta(x)=\alpha(x),\ \gamma(x)=-\beta(x)$$

bulunur, yani $R(x)$ matrisinin görüntüsü

$$R(x)=\begin{pmatrix}\alpha(x) & \beta(x)\\ -\beta(x) & \alpha(x)\end{pmatrix} \qquad (3.3.10)$$

olur.

Şimdi $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları hesaplansın. Bunun için (3.3.7) ve (3.3.8) de, $f(x)$ in katsayıları eşitlenirse $R(x)$ matrisinin tanımlanması için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$BR'(x)+Q_1(x)R(x)-R(x)Q_2(x)=K(x,x)B-BK(x,x) \qquad (3.3.11)$$

$$K(x,s)=\begin{pmatrix}K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s)\\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}$$

olmak üzere $Q_1(x), Q_2(x), R(x)$ ve B matrislerinin görüntülerinden faydalanarak (3.3.11) denklemi

$$\begin{pmatrix}-\beta'(x) & \alpha'(x)\\ -\alpha'(x) & -\beta'(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p_1(x)\alpha(x) & p_1(x)\beta(x)\\ -r_1(x)\beta(x) & r_1(x)\alpha(x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p_2(x)\alpha(x) & r_2(x)\beta(x)\\ -p_2(x)\beta(x) & r_2(x)\alpha(x)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s)\\ K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\\ -K_{11}(x,s) & -K_{12}(x,s)\end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x)+\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x) & \alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x) \\ -\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x) & -\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\left[K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x)\right] & K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \end{pmatrix} \tag{3.3.12}$$

şeklinde yazılabilir. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple (3.3.12) denklemlerinden

$$\alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x)=-\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x)$$

$$\beta'(x)-\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x)=-\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x)$$

bulunur, yani

$$\begin{aligned} &2\alpha'(x)+q(x)\beta(x)=0 \\ &-2\beta'(x)+q(x)\alpha(x)=0 \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

olur. Burada

$$q(x)=p_1(x)-p_2(x)+r_1(x)-r_2(x) \tag{3.3.14}$$

şeklindedir. (3.3.13) sistemi de, bulunan birinci eşitliği $\alpha(x)$ ile ikinci eşitliği de $\beta(x)$ ile çarpıp, birinciden ikinci çıkarılırsa

$$2\alpha(x)\alpha'(x)+2\beta(x)\beta'(x)=0$$

yani

$$\left(\alpha^2(x)+\beta^2(x)\right)'=0$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha^2(x)+\beta^2(x)=\alpha^2(0)+\beta^2(0) \tag{3.3.15}$$

bulunur.

$$f_1(0)=1, \quad f_2(0)=h_1 \tag{3.3.16}$$

şartları sağlanmak üzere $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu sürekli, diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde $f(x)$ in (3.3.4) sınır koşulunu sağladığı açıktır ve bu sebeple $f(x)\in E_1$

dir. Yine kabul edilsin ki, $g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu, E_2 uzayının elemanı, dolayısıyla (3.3.5) sınır şartı sağlanacak şekilde

$$X\{f(x)\}=g(x) \tag{3.3.17}$$

olsun. Bu takdirde x=0 için (3.3.17) eşitliğinden ve X matris operatörünün tanımından dolayı, yani (3.3.6) ve (3.3.10) bağıntılarına göre

$$X\{f(0)\}=g(0)=R(0)f(0)$$

veya

$$g_1(0)=\alpha(0)f_1(0)+\beta(0)f_2(0)$$
$$g_2(0)=-\beta(0)f_1(0)+\alpha(0)f_2(0)$$

elde edilir. Bu denklemlerden (3.3.5) sınır şartını ve (3.3.16) şartlarını göz önüne almak üzere son eşitliklerin birincisini h_2 sayısı ile çarpıp, daha sonra ikinciden çıkarıldığında,

$$\beta(0)=\frac{h_1-h_2}{1+h_1h_2}\alpha(0)$$

elde edilir.

$$\alpha(0)=1 \tag{3.3.18}$$

alınırsa,

$$\beta(0)=\frac{h_1-h_2}{1+h_1h_2} \tag{3.3.19}$$

olur. Buna göre,

$$\alpha^2(0)+\beta^2(0)=\frac{(1+h_1^2)(1+h_2^2)}{(1+h_1h_2)^2}=X^2 \tag{3.3.20}$$

olur. Şimdi (3.3.15), (3.3.18)-(3.3.20) eşitliklerinden faydalanarak (3.3.13) sistemini çözelim. Eğer,

$$\alpha(x)=\chi\sin k(x) \text{ ve } \beta(x)=\chi\cos k(x) \tag{3.3.20'}$$

olarak alınırsa,

$$\alpha'(x)=k'(x)\chi\cos k(x) \text{ ve } \beta'(x)=-k'(x)\chi\sin k(x)$$

bulunur. Bu değerler (3.3.13) de yerine yazılıp elde edilen denklemlerden birincisi $\cos k(x)$ ile ikincisi de $\sin k(x)$ ile çarpılıp, elde edilen denklemler toplanırsa

$$k(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz + \arcsin\frac{1}{\chi}$$

eşitliği elde edilir. Bu değerler (3.3.20') de yerine yazılırsa, $q(x)$ fonksiyonu (3.3.14) formülü, χ sayısı ise (3.3.20) formülü ile tanımlanacak şekilde $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları için

$$\alpha\left(x\right) = \chi \sin\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz + \arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{3.3.21}$$

$$\beta\left(x\right) = \chi \cos\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz + \arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{3.3.22}$$

ifadeleri bulunur. Şimdi (3.3.7) ve (3.3.8) de verilen integral altındaki ifadeler eşitlenirse, $K(x,s)$ matris çekirdeği için,

$$K_s'\left(x,s\right)B + BK_x'\left(x,s\right) = K\left(x,s\right)Q_2\left(s\right) - Q_1\left(x\right)K\left(x,s\right) \tag{3.3.23}$$

matris denklemi veya

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial s} & \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} & \frac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_{11}\left(x,s\right) & K_{12}\left(x,s\right) \\ K_{21}\left(x,s\right) & K_{22}\left(x,s\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2\left(s\right) & 0 \\ 0 & r_2\left(s\right) \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} p_1\left(x\right) & 0 \\ 0 & r_1\left(x\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{11}\left(x,s\right) & K_{12}\left(x,s\right) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_2(s) - p_1(x))K_{11}(x,s) & (r_2\left(s\right) - p_1(x))K_{12}(x,s) \\ (p_2(s) - r_1(x))K_{21}(x,s) & (r_2(s) - r_1(x))K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= \left(p_2\left(s\right) - p_1\left(x\right)\right)K_{11}\left(x,s\right) \\ \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= \left(r_2\left(s\right) - p_1\left(x\right)\right)K_{12}\left(x,s\right) \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= \left(p_2\left(s\right) - r_1\left(x\right)\right)K_{21}\left(x,s\right) \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= \left(r_2\left(s\right) - r_1\left(x\right)\right)K_{22}\left(x,s\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.3.23'}$$

denklem sistemi elde edilir. Sonuç olarak (3.3.8) ifadesinde $f(0)$'ı içeren terim (3.3.7) de

benzer terim olmadığı için) sıfıra eşit olur. Böylece,

$$K(x,0)Bf(0)=0$$

yani,

$$\begin{pmatrix} -K_{12}(x,0) & K_{11}(x,0) \\ -K_{22}(x,0) & K_{21}(x,0) \end{pmatrix} f(0)=0,$$

bu ise

$$\begin{aligned} K_{12}(x,0)f_1(0) &= K_{11}(x,0)f_2(0) \\ K_{22}(x,0)f_1(0) &= K_{21}(x,0)f_2(0) \end{aligned}$$

denklemler sistemine eşdeğerdir. (3.3.4) sınır koşulundan dolayı

$$K_{12}(x,0)=h_1K_{11}(x,0)\ , \quad K_{22}(x,0)=h_1K_{21}(x,0) \tag{3.3.24}$$

elde edilir. $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ keyfi diferansiyellenebilir sürekli fonksiyonlar olacak biçimde,

$$K_{11}(x,0)=\varphi(x)\ , \quad K_{21}(x,0)=\psi(x) \tag{3.3.25}$$

ele alınırsa (3.3.24) ve (3.3.25) şartları, $K(x,s)$ matris çekirdeği için

$$K(x,s)|_{s=0}=\begin{pmatrix} \varphi(x) & h_1\varphi(x) \\ \psi(x) & h_1\psi(x) \end{pmatrix} \tag{3.3.26}$$

şartını tanımlar. Burada (3.3.26) şartı (3.3.23) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir [23].

Benzer şekilde Dirac operatörünün II. Kanonik formu için

$$A_1=\begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx}+q_1(x) \\ -\dfrac{d}{dx}+q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_1(x)$$

$$A_2=\begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx}+q_2(x) \\ -\dfrac{d}{dx}+q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_2(x)$$

olmak üzere (3.3.11) denklemi

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x) - q_1(x)\beta(x) & p_1(x)\beta(x) + q_1(x)\alpha(x) \\ q_1(x)\alpha(x) + p_1(x)\beta(x) & q_1(x)\beta(x) + p_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x) + q_2(x)\beta(x) & q_2(x)\alpha(x) - p_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & -q_2(x)\beta(x) - p_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s) \\ -K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \\ -K_{11}(x,s) & -K_{11}(x,s) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) + [p_1(x) - p_2(x)]\alpha(x) - [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x) & \alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x) \\ -\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x) & -\beta'(x) + [p_2(x) - p_1(x)]\alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -[K_{12}(x,x) + K_{21}(x,x)] & K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x) + K_{21}(x,x) \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple

$$\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x)$$
$$= -\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x)$$

$$\beta'(x) - [p_1(x) - p_2(x)]\alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x)$$
$$= -\beta'(x) + [p_2(x) - p_1(x)]\alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x)$$

bulunur, yani

$$2\alpha'(x) = 0, \quad 2\beta'(x) = 0$$

dır. Burada c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere

$$\alpha(x) = c_1, \quad \beta(x) = c_2$$

bulunur. Ayrıca (3.3.23) denklemi

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2(s) & q_2(s) \\ q_2(s) & -p_2(s) \end{pmatrix}
$$

$$
-\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}
$$

veya

$$
\begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial s} \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \left(p_2(s)-p_1(x)\right)K_{11}(x,s)+q_2(s)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) & q_2(s)K_{11}(x,s)-\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) \\ -q_1(x)K_{11}(x,s)+p_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{22}(x,s) & -q_1(x)K_{12}(x,s)+q_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)K_{22}(x,s)\right) \end{pmatrix}
$$

şeklindedir. Bu durumda

$$
\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= \left(p_2(s)-p_1(x)\right)K_{11}(x,s)+q_2(s)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) \\
\frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= q_2(s)K_{11}(x,s)-\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) \\
-\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= -q_1(x)K_{11}(x,s)+p_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{22}(x,s) \\
\frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= -q_1(x)K_{12}(x,s)+q_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{22}(x,s)
\end{aligned}\right\} \quad (3.3.27)
$$

denklemler sistemi elde edilir. Burada (3.3.26) şartı (3.3.27) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir.

3.4. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektrum Türünden İfadesi

$$
By'+Q(x)y=\lambda y, 0\le x\le \pi \tag{3.4.1}
$$

denklemini ve

$$
y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0,\ y_1(\pi)=0 \tag{3.4.2}
$$

$$
y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0,\ y_1(\pi)=0 \tag{3.4.3}
$$

sınır koşullarını göz önüne alalım.

Burada

$$0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le \beta \le \pi\ ,\ \alpha \ne \beta\ ,\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

ve $p(x),\ q(x) \in L_2(0,\pi)$ dir. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ $n \in \overline{(-\infty,\infty)}$, (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \alpha_n,\ \ \mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \beta_n \tag{3.4.5}$$

asimptotik formülleri vardır. Burada

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\beta_n|^2 < \infty,\ \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \tag{3.4.6}$$

serileri yakınsaktır. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (3.4.1) denkleminin sırasıyla

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.4.7}$$

$$\psi_1(0,\lambda) = \sin\beta,\ \ \psi_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{3.4.8}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. λ_n ve μ_n lerin sırasıyla

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.9}$$

$$\psi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.10}$$

kökleri ile çakıştığı aşikardır.

Böylece $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

Teorem 4.1.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde (3.4.1), (3.4.2) probleminin α_n normlaştırıcı sayıları λ_n ve μ_n ler kullanılarak

$$\alpha_n = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{3.4.11}$$

formülü ile tanımlanır.

Burada, ' simgesi sonsuz çarpımda $k = n$ teriminin mevcut olmadığını gösterir.

İspat.

$$f(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{3.4.12}$$

fonksiyonu verilsin ve

$$f_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.13}$$

koşulu sağlansın. Bu takdirde

$$m(\lambda) = -\frac{\psi_1(\pi,\lambda)}{\varphi_1(\pi,\lambda)} \tag{3.4.14}$$

elde ederiz. Burada $m(\lambda)$ fonksiyonunun kutuplarının ve sıfırlarının sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakıştıkları ve meromorf fonksiyon olduğu görülür.

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \left(f(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx &= \int_0^\pi \big\{\left(Bf'(x,\lambda_1)+Qf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right) \\
&\quad -\left(Bf'(x,\lambda_2)+Qf(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)\big\}dx \\
&= \int_0^\pi \left(Bf'(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx + \int_0^\pi \left(Qf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx \\
&\quad -\int_0^\pi \left(Bf'(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)dx - \int_0^\pi \left(Qf(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)dx \\
&= \int_0^\pi \big\{\left(Bf'(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)+\left(Bf(x,\lambda_1), f'(x,\lambda_2)\right)dx\big\} \\
&= \left[Bf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right]_0^\pi \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(x,\lambda_1) \\ f_2(x,\lambda_1)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1(x,\lambda_2) \\ f_2(x,\lambda_2)\end{pmatrix}\right]_0^\pi \\
&= \left[f_2(x,\lambda_1)f_1(x,\lambda_2) - f_1(x,\lambda_1)f_2(x,\lambda_2)\right]_0^\pi \\
&= f_2(0,\lambda_2)f_1(0,\lambda_1) - f_1(0,\lambda_2)f_2(0,\lambda_1) \\
&= \left[\psi_1(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\varphi_1(0,\lambda_1)\right]\times\left[\psi_2(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\varphi_2(0,\lambda_2)\right] \\
&\quad -\left[\psi_2(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\varphi_2(0,\lambda_1)\right]\times\left[\psi_1(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\varphi_1(0,\lambda_2)\right] \\
&= \left[\sin\beta + m(\lambda_1)\sin\alpha\right]\left[-\cos\beta - m(\lambda_2)\cos\alpha\right] \\
&\quad -\left[-\cos\beta - m(\lambda_1)\cos\alpha\right]\left[\sin\beta + m(\lambda_2)\sin\alpha\right] \\
&= \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\left[\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\right] \\
&= \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \left(f(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx = \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)$$

$\lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = \overline{\lambda}$ olarak alınırsa, özdeğerler reel olduğundan ve $z - \overline{z} = 2\operatorname{Im} z$ eşitliğinden

$$\int_0^\pi \left(f(x,\lambda), f(x,\lambda)\right)dx = \sin(\beta-\alpha)\frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \tag{3.4.15}$$

elde edilir. Bu formülde $\beta > \alpha (\beta < \alpha)$ olduğu durumda bu meromorf fonksiyon üst yarı düzlemi kendine dönüştürür.

Bu takdirde $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çaprazlaşırlar.

$n \neq m$ ise $\lambda_n \neq \lambda_m$ olur ve $m(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan

$$m(\lambda) = A \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{-1} \tag{3.4.16}$$

görüntüsü söz konusudur, burada A reel sayıdır. Yukarıdaki hesaplamaların benzeri yapılırsa

$$(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(f(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \sin(\alpha - \beta)$$

eşitliği kolayca elde edilebilir. (3.4.12) ifadesi yerine yazılırsa, buradan

$$(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(\psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx + m(\lambda)(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \sin(\alpha - \beta)$$

olur. Burada $\lambda \to \lambda_n$ için limit alınırsa

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda_n), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) m(\lambda)} \tag{3.4.17}$$

eşitliği elde edilir.

Bu formülden faydalanılarak α_n lerin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ ler yardımıyla görüntüsü elde edilebilir.

Öncelikle

$$m(\lambda) = A_1 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda}\right) \tag{3.4.18}$$

eşitliği ele alınsın. Burada

$$A_1 = A \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \tag{3.4.19}$$

şeklindedir. (3.4.18) deki

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda}\right) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda}\right) \tag{3.4.20}$$

çarpımını göz önüne alalım. (3.4.20) eşitliğinde logaritma alınıp $\{\lambda_k\}$ ve $\{\mu_k\}$ lar için asimptotik formüllerden yararlanılırsa;

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}+\frac{\mu_{-k}-\lambda_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi}+\beta_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}+\frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi}+\beta_{-k}-\alpha_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda} \tag{3.4.21}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}+\frac{1}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k-\alpha_k}{\lambda_k-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{-k}-\alpha_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda}$$

elde edilir.

(3.4.6) serilerinin yakınsaklığından (3.4.5) asimptotik formüllerinden ve Cauchy-Banjokowski eşitsizliğinden (3.4.21) deki son iki serinin yakınsaklığı elde edilir. (3.4.5) asimptotik formüllerinden

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}+\frac{1}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{-k}-\lambda+\lambda_k-\lambda}{(\lambda_k-\lambda)(\lambda_{-k}-\lambda)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2\frac{\alpha}{\pi}-2\lambda+\alpha_k+\alpha_{-k}}{(\lambda_k-\lambda)(\lambda_{-k}-\lambda)}$$

olur ve bu son seri yakınsaktır.

Bu sonuçlardan (3.4.20) sonsuz çarpımının yakınsaklığı elde edilir. (3.4.19) sonsuz çarpımının yakınsaklığından ve (3.4.20) formülünden (3.4.18) elde edilir. Bu takdirde

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)=\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)A_1\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda}\right)=-A_1\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\mu_n-\lambda)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda}$$

$$=-A_1(\mu_n-\lambda_n)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-\lambda_n}{\lambda_k-\lambda_n}$$

olur. Buradan

$$\alpha_n=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{A_1(\mu_n-\lambda_n)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n}\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

elde edilir. İleride $A_1=-1$ olduğu ispatlanacaktır. Bununla teorem ispatlanır.

3.5. Normlaştırıcı Sayılar İçin Asimptotik Formül

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\pm\infty \tag{3.5.1}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\pm\infty \tag{3.5.2}$$

asimptotik formülleri verilsin.

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{(\mu_n - \lambda_n)}{-A_1 \sin(\beta - \alpha)} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}; \; k \neq n \tag{3.5.3}$$

eşitliği ele alınsın. Bu bölümde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları için bilinen asimptotik formüllerden faydalanarak α_n ler için asimptotik formülü bulmaya çalışalım.

$$\phi(\lambda_n) = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \quad k \neq n \tag{3.5.4}$$

çarpımı göz önüne alınsın.

$$\phi(\lambda_n) = B_1 B_2 B_3 \tag{3.5.5}$$

olsun. Burada

$$B_1 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}{k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.6}$$

$$B_2 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.7}$$

$$B_3 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.8}$$

şeklindedir. Önce B_1 göz önüne alınsın. B_1 eşitliğinde λ_n ler için asimptotik formüllerden faydalanılırsa

$$B_1 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\pi (k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n)} \right), \; k \neq n \tag{3.5.9}$$

eşitliği bulunur. Bu formülde (3.5.1) asimptotik formülü kullanılırsa ve $k - n = p$ alınırsa

$$B_1 = \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\pi \left(p - \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right)} \right) \tag{3.5.10}$$

olur.

$$\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\lambda}{p} \right) = \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda\pi} \tag{3.5.11}$$

olduğu için

$$B_1=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left\{\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\pi p}\right)\right\}^{-1}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\pi\left(p-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n\right)}\right)$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\alpha_1}{np}\right)\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right) \tag{3.5.12}$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\frac{\sin\frac{\alpha_1}{n}\pi}{\frac{\alpha_1}{n}\pi}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

eşitliği elde edilir.

$$I_1=\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

sonsuz çarpımı göz önüne alınsın. Bu takdirde yukarıdaki son eşitlikte logaritma alınıp daha sonra $\cot x$ in seri açılımından faydalanılırsa;

$$I_2=1-\frac{\pi\alpha_1}{n}\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\pi p+\alpha-\beta}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{\pi\alpha_1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{-2(\alpha-\beta)}{(\pi p)^2-(\alpha-\beta)^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\frac{\alpha_1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2\frac{\alpha-\beta}{\pi}}{p^2-(\frac{\alpha-\beta}{\pi})^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{\pi\alpha_1}{n}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}-ctg(\alpha-\beta)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.5.13}$$

eşitliği elde edilir.

Bu takdirde

$$B_1=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left\{1+\frac{\pi\alpha_1}{n}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}-ctg(\alpha-\beta)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \tag{3.5.14}$$

bulunur.

Büyük n ler için B_2 sonsuz çarpımının asimptotik formülünü bulmaya çalışalım. Yukarıda yapılan işlemler tekrarlanırsa ve $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ için asimptotik formüllerden yararlanılırsa

$$B_2=\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda_n}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}=\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}\right)=1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{\lambda_n\left(k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n\right)_n}-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(3.5.15)$$

$$=1-\frac{s_1}{n}+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{\lambda_n\left(k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda\right)_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$s_1=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}$$

şeklindedir.

Benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$B_3=\frac{1}{\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}}=\frac{1}{1-\frac{s_2}{n}+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=1+\frac{s_2}{n}-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(3.5.16)$$

elde edilir. Burada

$$s_2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}$$

şeklindedir. (3.5.15) ve (3.5.16) çarpılıp ve daha sonra n nin kuvvetlerine göre düzenlenirse;

$$B_2B_3=1-\frac{s_1-s_2}{n}$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(3.5.17)$$

elde edilir.

(3.5.17) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk seri ele alınsın. (3.5.2) den $\mu_k - k + \frac{\beta}{\pi} = \frac{\beta_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ yazılabilir. Bu eşitlik (3.5.17) de yerine yazılırsa

$$J_2 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{\mu_k - k + \frac{\beta}{\pi}\right\} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{\beta_1}{k} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' O\left(\frac{1}{k^2}\right) \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\left(\mu_0 + \frac{\beta}{\pi}\right) \frac{-\frac{\beta}{\pi}}{-\frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} = E_1 + E_2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.5.18}$$

eşitliği bulunur. Burada

$$E_1 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{\beta_1}{k} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} \tag{3.5.19}$$

$$E_2 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' O\left(\frac{1}{k^2}\right) \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} \tag{3.5.20}$$

şeklindedir. $\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''$ sembolü seride $k = n$ ve $k = 0$ terimleri'nin bulunmadığını ifade eder.

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{1}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}$$

olsun. $\lambda_n + \frac{\beta}{\pi} = \lambda$ olsun. Bu takdirde

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{1}{k - \lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{k^2 - \lambda^2} - \frac{1}{n - \lambda} \tag{3.5.21}$$

olur. [66] dan bilindiği gibi

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{k^2 - \lambda^2} = -\pi ctg \pi\lambda + \frac{1}{\lambda}$$

şeklindeydi. Bu takdirde $\lambda_n + \frac{\beta}{\pi} = \lambda$ eşitliğinden

$$F_1 = -\pi ctg \pi\lambda + \frac{1}{\lambda} = -\pi ctg \pi \left(\lambda_n + \frac{\beta}{n} \right) + \frac{1}{\lambda_n + \frac{\beta}{n}}$$

$$= -\pi ctg \pi \left[n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{n} \right)$$

$$= -\pi ctg \left[\beta - \alpha + \frac{\pi\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{n} \right) \tag{3.5.22}$$

$$= \pi ctg(\alpha - \beta) + O\left(\frac{1}{n} \right)$$

ve

$$F_2 = \frac{1}{n - \lambda} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha_1}{n} - \frac{\beta}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2} \right)} = \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n} \right) \tag{3.5.23}$$

olur. (3.5.22) ve (3.5.23) formüllerinden

$$F = \pi ctg(\alpha - \beta) + \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n} \right)$$

olur. Bu takdirde (3.5.19) dan

$$E_1 = \frac{\beta_1}{n} \left[\pi ctg(\alpha - \beta) - \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n} \right) \right] \tag{3.5.24}$$

elde edilir.

Şimdi E_2 nin davranışı incelensin.

(3.5.20) formülünün sağ tarafındaki toplamın mertebesi aşağıdaki integraller toplamının mertebesi ile aynı olduğunu gösterilebilir.

$$c\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2(n-x)} dx + c\int_{1}^{n-1} \frac{x}{x^2(n-x)} dx + c\int_{n+1}^{\infty} \frac{x}{x^2(x-n)} dx$$

integrallerini hesaplayalım. O halde

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2(n-x)} dx = \frac{1}{n}\int_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+x} \right) dx = \frac{1}{n} \ln \frac{x}{n+x} \Big|_{1}^{\infty} = O(\frac{\ln n}{n})$$

$$\int_{1}^{n-1} \frac{dx}{x(n-x)} = \int_{1}^{\frac{n}{2}} \frac{dx}{x(n-x)} + \int_{\frac{n}{2}}^{n-1} \frac{dx}{x(n-x)} = \frac{1}{n} \ln \frac{x}{n-x} \Big|_{1}^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} \ln \frac{x}{n-x} \Big|_{\frac{n}{2}}^{n-1} = O(\frac{\ln n}{n})$$

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x(x-n)} = \frac{1}{n} \ln \frac{x-n}{x} \Big|_{n+1}^{\infty} = O(\frac{\ln n}{n})$$

bağıntıları bulunur.

Bu takdirde bu integrallerin değerlerinden ve (3.5.20) den

$$E_2 = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.25}$$

elde edilir. (3.5.24) ve (3.5.25) formüllerinden faydalanılarak (3.5.18) den

$$J_2 = \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{\alpha-\beta}\right] O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.26}$$

bulunur. Benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$J_3 = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k - k + \frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.27}$$

eşitliği elde edilir. (3.5.26), (3.5.27) ve (3.5.17) formüllerinden

$$B_2 B_3 = 1 - \frac{s_1 - s_2}{n} + \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{\alpha-\beta}\right] + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.28}$$

eşitliği bulunur.

$\dfrac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha-\beta)}$ çarpımı göz önüne alınsın. (3.5.1) ve (3.5.2) asimptotik formüllerinden $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ için

$$\frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi} + \frac{\beta_1-\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha-\beta}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{1}{n}\frac{\beta_1-\alpha_1}{\sin(\alpha-\beta)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

yazılır. Son eşitlik, (3.5.14) ve (3.5.28) ifadeleri (3.5.3) te yerine yazılırsa α_n sayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \left\{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s_2 - s_1}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1) ctg(\alpha-\beta)\right] + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\}\frac{1}{(-A_1)}$$

asimptotik formülü veya

$$\frac{1}{\alpha_n} = \left\{\frac{1}{\pi} + \frac{c}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\}\frac{1}{(-A_1)} \tag{3.5.29}$$

formülü elde edilir.

Burada

$$c = \frac{s}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1) ctg(\alpha-\beta) \tag{3.5.30}$$

ve

$$s = s_2 - s_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\lambda_k - \mu_k\} + \frac{\beta-\alpha}{\pi} \tag{3.5.31}$$

şeklindedir. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 3.5.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları sırasıyla (3.5.1) ve (3.5.2) asimptotik formülleri sağlandığında (3.5.3) ile tanımlı α_n normlaştırıcı sayıları (3.5.29) asimptotik formülünü sağlar.

Not 3.5.1. Daha önceki bölümde α_n lerin (3.2.5) bağıntısını sağladığı ispatlanmıştır. Bu teoremde α_n lerin (3.5.29) bağıntısını sağladığı elde edilir. (3.2.5) ve (3.5.29) formülleri karşılaştırılırsa $A=-1$ elde edilir.

3.6. İki Spektruma Göre Regüler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

Bu bölümde iki spektruma göre Kanonik Dirac operatörü için ters problemin çözümü detaylı bir şekilde incelenecektir. Sturm-Liouville için benzer problem [14] çalışmasında tamamıyla çözülmüş ve bu problemin çözümüyle ilgili literatürde geniş kaynaklar verilmiştir.

$$By'+Q(x)y=\lambda y,\ 0\le x\le \pi \tag{3.6.1}$$

ve

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

olsun. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının $[0,\pi]$ de tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve onların k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olsun. (3.6.1) denklemi ve

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \tag{3.6.2}$$

$$y_1(\pi)=0 \tag{3.6.3}$$

sınır koşullarıyla oluşan sınır değer problemi göz önüne alınsın.

Teoremi ispat etmeden önce aşağıdaki Lemma'yı verelim.

Lemma 3.6.1. Eğer $n\ne m$ için $\lambda_n\ne\lambda_m$ ve $n\to\infty$ için

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\alpha_n \tag{3.6.4}$$

asimptotik formülü sağlanıyorsa ve $\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$ ise bu takdirde elemanların görüntüsü (f_1,f_2) ve bu elemanlar $L_2(0,\pi)$ de lineer bağımsız olmak üzere $\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar

sistemi tamdır. Burada $\varphi_0^T(x,\lambda_n) = \left(\sin(\lambda_n x+\alpha), -\cos(\lambda_n x+\alpha)\right)$ şeklindedir.

İspat. $L_2(0,\pi)$ de $\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ sisteminin tam olmadığı kabul edilsin. Bu takdirde

$\int_0^\pi \left(f_1\sin(\lambda_n x+\alpha) - f_2\cos(\lambda_n x+\alpha)\right)dx = 0$ olmak üzere $L_2(0,\pi)$ de $\exists f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \neq 0$

vardır.

$$F(\lambda) = \int_0^\pi \left(f_1\sin(\lambda x+\alpha) - f_2\cos(\lambda x+\alpha)\right)dx$$

olsun. Eğer $\lambda = \lambda_n$ ise $F(\lambda_n) = 0$ dır. $F(\lambda)$ fonksiyonu mertebesi 1, tipi π olan ve

$$\left|F(\lambda)\right| = O(e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\pi}) \tag{3.6.5}$$

olacak şekilde bir tam fonksiyondur.

$$G(\lambda) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=-N}^{N}(1-\frac{\lambda}{\lambda_n})$$

fonksiyonu verilsin. Bu sonsuz çarpımın yakınsaklığı $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}(1-\frac{\lambda}{\lambda_n})$ limitinin yakınsak oluşundan elde edilir.

$$G(\lambda) = \frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)}\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)$$

Burada λ_n^0, $Q(x)=0$ olduğu duruma karşılık gelen sınır değer probleminin özdeğerleridir. Bu özdeğerlerin aşağıdaki formülü sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

$$\lambda_n^0 = n - \frac{\alpha}{\pi} \tag{3.6.6}$$

$\sin(\lambda\pi+\alpha)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan aşağıdaki formül doğrudur.

$$G_0(\lambda) = \sin(\lambda\pi+\alpha) = \left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)$$

Bu takdirde

$$G(\lambda) = A(\lambda)G_0(\lambda) \tag{3.6.7}$$

olur. Burada

$$A(\lambda)=\frac{\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)} \tag{3.6.8}$$

şeklindedir. (3.6.8) formülünden faydalanarak $A(\lambda)$ için asimptotik formülü bulalım. $A(\lambda)$ fonksiyonunda düzenleme yapılırsa;

$$A(\lambda)=\frac{\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)}=\frac{\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{\lambda_n\lambda_{-n}}}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)}{\lambda_n^0\lambda_{-n}^0}}$$

$$=\frac{\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\pi}\lambda\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^0\lambda_{-n}^0}{\lambda_n\lambda_{-n}}\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)}$$

formülü bulunur. (3.6.6) formülünden $\lambda_n^0\lambda_{-n}^0=-n^2+\dfrac{\alpha^2}{\pi^2}$ elde edilir. Bu takdirde

$$A(\lambda)\sim c\,\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)} \tag{3.6.9}$$

ve (3.6.4) ve (3.6.6) formüllerinden $\lambda_n-\lambda_n^0=O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ elde edilir. Şimdi

$$J(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda_n^0-\lambda}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)$$

sonsuz çarpım göz önüne alınsın. Bu son formülde logaritma alınıp daha sonra seri açılımı yapılırsa;

$$\ln J(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)^2+\cdots \tag{3.6.10}$$

bulunur. Burada; $n\to\infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)^2\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^2}{\left(n-\dfrac{\alpha}{\pi}\lambda\right)^2}\to 0$$

elde edilir.

$\lambda=a+ib$ olsun. Buradan $\left|\lambda_n^0-\lambda\right|=\sqrt{(\lambda_n^0-a^2)+b^2}$ olur. O halde (3.6.10) deki ilk toplam

serisi için aşağıdaki eşitsizlik bulunur.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right|\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\alpha_1}{n}+O(\frac{1}{n^2})}{\sqrt{(\lambda_n^0-a^2)+b^2}}\le\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$$

Son durumdaki has olmayan integral a ve b nin durumlarına göre incelensin.

1. $a=b$ ve $a\to\infty$ iken $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}a}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\frac{1}{4a^2}}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a}\to 0$

2. $a=-b$ ve $a\to\infty$ iken $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+a^2}}\to 0$

olur.

Bu sonuçlar (3.6.10) de yerine yazılırsa,

$$J(\lambda)=1+o(1)$$

elde edilir. Buradan (3.6.9) ve (3.6.7) formüllerinden

$$G(\lambda)=G_0(\lambda)[c+o(1)] \tag{3.6.11}$$

elde edilir.

$$\phi(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)} \tag{3.6.12}$$

fonksiyonu verilsin. Bu takdirde $G(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları da $F(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırı olduğu için $\phi(\lambda)$ tam fonksiyondur yani $\phi(\lambda)$ fonksiyonu bir meromorf fonksiyondur. (3.6.5) ve (3.6.11) asimptotik formüllerinden $F(\lambda)$ fonksiyonunun $\arg\lambda=\pm\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{2}$ ışınları üzerinde sınırlı olduğu elde edilir. Bu sebeble $\phi(\lambda)$ sabit bir sayıdır. Buradan

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}\phi(\lambda)=\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}=\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}O(e^{-i\lambda\pi})\frac{1}{\sin(\lambda\pi+\alpha)}=0$$

olur. Dolayısıyla $\phi(\lambda)=0$, bu sebeple $F(\lambda)=0$ olur. Buradan $f(x)=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}=0$ olur.

Bu ise varsayım ile çelişir. Bu sebeple $L_2(0,\pi)$ de $\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ fonksiyonlar sistemi tamdır.

$\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ sisteminin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$$G_n(\lambda)=\frac{G(\lambda)}{\lambda-\lambda_n},\quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{3.6.13}$$

fonksiyonu verilsin.

$$\int_0^\pi \left(f_n(x),\varphi_0(x,\lambda_k)\right)dx=G_n(\lambda) \tag{3.6.14}$$

sağlanacak şekilde $f_n(x)=\begin{pmatrix} f_{1,n}(x)\\ f_{2,n}(x)\end{pmatrix}$ fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de olsun.

$$\int_0^\pi \left(f_n(x),\varphi_0(x,\lambda_k)\right)dx=\begin{cases}0 & k\neq n\\ G_n(\lambda) & k=n\end{cases} \tag{3.6.15}$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. $\{f_n(x)\}$ ve $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ vektör fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de olmak üzere bir ortogonal sistem oluştururlar.

$\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin lineer bağımsız yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_0(x,\lambda_n)=0 \tag{3.6.16}$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım. (3.6.16) eşitliğinin $f_k(x)$ ile skaler çarpılıp ve daha sonra 0 dan π ye kadar x e göre integrallenirse ve sonuç olarak (3.6.15) ifadesi kullanılarak $\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$ yani $\alpha_k=0$ bulunur.

Gerçekten de

$$f_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_0(x,\lambda_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi f_k(x)\alpha_k\varphi_0(x,\lambda_k)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$$

olur. Burada $\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$ yani $\alpha_k=0$ bulunur. Bu ise çelişkidir. Bununla Lemma 3.6.1. ispatlanır.

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.6.1. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının k.mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$de olmak üzere $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$matris fonksiyonlu (3.6.1)-(3.6.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve normlaştırıcı sayılarının $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ olabilmesi için, $n \neq m$ için $\lambda_n \neq \lambda_m$, tüm n ler için $\alpha_n > 0$ olacak biçimde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ lerin

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k,n}}{n^k} \tag{3.6.17}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{k,n}}{n^k} \tag{3.6.18}$$

asimptotik formüllerini sağlaması ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$$

şeklinde olmak üzere

$$F(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n) - \frac{1}{\pi}\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0) \right\} \tag{3.6.19}$$

fonksiyonunun k. mertebeden türevlerinin $L_2(0,\pi)$ den olması gerek ve yeterdir.

İspat: Önce gereklilik kısmını hesaplayalım. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ (3.6.1)-(3.6.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları olsun. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları için (3.6.17) ve (3.6.18) asimptotik formülleri daha önceden verilmişti ve ayrıca tanımdan dolayı tüm α_n ler 0 dan büyüktür.

$\lambda_n \neq \lambda_m$ olması ise ileride gösterilecektir. Bu sebeple $F(x,t)$ lerin k. mertebeden türevlerinin $L_2(0,\pi)$ de olduğunu ispatlamak gerekir.

$t < x$ olsun. (3.6.17) ve (3.6.18) asimptotik formüllerini kullanarak $\forall x \neq t$ için $L_2(0,\pi)$ deki tanımlı metrik anlamda (3.6.19) serisinin yakınsaklığını ve

$$\int_0^x\int_0^t F(u,v)\,du\,dv = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x\int_0^t \varphi_0(u,\lambda_n)\varphi_0^T(v,\lambda_n)\,du\,dv - \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^x\int_0^t \varphi_0(u,\lambda_n^0)\varphi_0^T(v,\lambda_n^0)\,du\,dv \tag{3.6.20}$$

nin sağlandığını ispat etmek mümkündür. [21] den bilindiği gibi

$$\varphi_0(x,\lambda_n) = \varphi(x,\lambda_n) + \int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt \tag{3.6.21}$$

integral denklemi vardır. Her iki tarafın transpozu alınırsa

$$\varphi_0^T(x,\lambda_n)=\varphi^T(x,\lambda_n)+\int_0^x \varphi^T(t,\lambda_n)H^T(x,t)dt, \quad n=(-\infty,\infty) \tag{3.6.22}$$

elde edilir. Bu dönüşüm operatörleri (3.6.20) de yerine yazılırsa ve düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^x\int_0^t F(u,v)dudv &= \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)dudv+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds \\
&+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x dv\int_0^t du\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)ds \\
&+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x du\int_0^t dv\left\{\int_0^u\int_0^v H(u,s_1)\varphi(s_1,\lambda_n)\varphi^T(s_2,\lambda_n)H^T(x,s_2)ds_1ds_2\right. \\
&-\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^x\int_0^t\left\{\varphi(u,\lambda_n^0)+\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n^0)ds\right\}\left\{\varphi^T(v,\lambda_n^0)+\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n^0)H^T(v,s)ds\right\}dudv\Bigg\}
\end{aligned} \tag{3.6.23}$$

formülü bulunur. (3.6.23) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamları ayrı ayrı hesaplayalım.

$$I_1=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds \tag{3.6.24}$$

toplamını göz önüne alalım.

$$f_t(u)=\begin{cases}1, & u\le t\\ 0, & u>t\end{cases}$$

fonksiyonu verilsin.

Bu takdirde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds \\
&= \int_0^x dv\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t f_1(u)\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)f_2^T(v)ds \\
&= \int_0^x dv\int_s^t H^T(v,s)dv=\int_0^x du\int_u^t H^T(s,u)ds
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x dv\int_0^t du\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)ds=\int_0^t du\int_u^v H(s,u)ds \tag{3.6.25}$$

ve

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x du\int_0^t dv\left\{\int_0^u\int_0^v H(u,s_1)\varphi(s_1,\lambda_n)\varphi^T(s_2,\lambda_n)H^T(v,s_2)ds_1ds_2=\int_0^t ds\int_s^x H(u,s)du\int_0^t H^T(v,s)dv\right. \tag{3.6.26}$$

olduğunu ispat etmek mümkündür.

$$I_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x \int_0^t \varphi(u,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)dudv$$

toplamı ve

$$\varphi_t(u) = \begin{cases} 1, & u \le t \\ 0, & u > t \end{cases}, \quad \psi_x(u) = \begin{cases} 1, & u \le x \\ 0, & u > x \end{cases}$$

fonksiyonları verilsin. Bu takdirde

$$I_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x \psi_x(u)\varphi(u,\lambda_n)du \int_0^t \psi_t(u)\varphi^T(v,\lambda_n)dv = \int_0^t \psi_x(u)\psi_t(u)du \tag{3.6.27}$$

ve

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^x \int_0^t \left\{ \left\{ \varphi(u,\lambda_n^0) + \int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n^0)ds \right\} \left\{ \varphi^T(v,\lambda_n^0) + \int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n^0)H^T(v,s)ds \right\} dudv \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^x \int_0^t \varphi_0(u,\lambda_n)\varphi_0^T(v,\lambda_n^0)dudv = \int_0^t \psi_x(u)\psi_t(u)du \end{aligned} \tag{3.6.28}$$

elde edilir.

(3.6.24)-(3.6.27) ve (3.6.28) fonksiyonları (3.6.23) te yerine yazılırsa

$$\int_0^x \int_0^t F(u,v)dudv = \int_0^x du \int_u^t H^T(s,u)ds + \int_0^t du \int_u^x H(s,u)ds + \int_0^t ds \int_s^x H(u,s)du \int_s^t H(v,s)dv$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$ operatörü uygulanırsa

$$F(x,t) = H(x,t) + H^T(t,x) + \int_0^t H(x,s)H^T(t,s)ds$$

integral denklemi bulunur. $t < x$ için $H(t,x) = 0$ olduğu için buradan;

$$F(x,t) = H(x,t) + \int_0^t H(x,s)H^T(t,s)ds \tag{3.6.29}$$

elde edilir. $H(x,t)$ $L_2(0,\pi)$ de bulunacak şekilde k. mertebeden türevlere sahip olduğundan (3.6.29) eşitliğinden $F(x,t)$ nin de aynı özelliklere sahip olduğu elde edilir. Bununla gereklilik ispatlanır.

Şimdi de yeterlilik kısmını hesaplayalım. (3.6.17) ve (3.6.18) ile tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları verilsin. Ayrıca $n \ne m$ için $\lambda_n \ne \lambda_m$ ve tüm $\alpha_n > 0$ ler için (3.6.19) formülü

ile tanımlı $F(x,t)$ fonksiyonunun k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olsun. $K(x,t)$ çekirdeğinin

$$F(x,t)+K(x,t)+\int_0^t K(x,s)F(s,t)ds=0,\quad 0\le t\le x\le \pi \tag{3.6.30}$$

integral denklemini sağladığı ispatlanmıştır.

$t>x$ için $K(x,t)$ (1.28) tek çözüme sahiptir. Bunun için

$$g(t)+\int_0^x F(s,t)g(s)ds=0,\quad 0\le x\le \pi \tag{3.6.31}$$

homojen denkleminin $L_2(0,\pi)$de bulunan aşikar çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Aksini varsayalım. (3.6.31) integral denklemi $L_2(0,\pi)$ de aşikar olmayan $g(t)\neq 0$ çözümüne sahip olsun. (3.6.31) denkleminin her iki tarafı $g(t)$ ile skaler çarpılırsa ve t ye göre 0 dan x e kadar integrallenirse

$$\int_0^x \left|g^2(t)\right|dt+\int_0^x\int_0^x \left(F(s,t)g(s)g(t)\right)dsdt=0$$

elde edilir.

Bu son formülde $F(x,t)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\int_0^x g^2(t)dt+\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(s)g(t)dsdt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)g(s)g(t)dsdt=0$$

elde edilir. Burada Parseval eşitliğinden faydalanılırsa

$$\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(s)g(t)dsdt=0$$

yani

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^x\left(\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(t)dt\right)\right)^2=0$$

sonsuz toplamı elde edilir. $\alpha_n>0$ olduğu için buradan

$$\int_0^x \varphi_0^T(t,\lambda_n)g(t)dt=0$$

elde edilir. Bu takdirde $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tamlığından $g(t)=0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla (3.6.31) denklemi çözülebilirdir ve bir tek $K(x,t)$

çözümüne sahiptir. Bu takdirde

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt \tag{3.6.32}$$

integral denklemi,

$$B\varphi'+Q(x)\varphi=\lambda\varphi, \quad Q(x)=K(x,x)B-BK(x,x) \tag{3.6.33}$$

denklemini ve

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{3.6.34}$$

başlangıç koşullarını sağlar.

Şimdi $\varphi(x,\lambda_n)$ $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlarının ortogonalliğini ispatlayalım ve π noktasındaki sınır koşullarını tanımlayalım. $f(x)\in L_2(0,\pi)$ ve $g(x)\in L_2(0,\pi)$ olmak üzere Parseval eşitliğinden

$$\int_0^\pi (f(x),g(x))dx=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(x),\varphi(x,\lambda_n))dx\int_0^\pi (g(t),\varphi(t,\lambda_n))dt \tag{3.6.35}$$

yazılır. (3.6.35) eşitliğini kullanarak

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(t),\varphi(t,\lambda_n))dt\right)\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.36}$$

serisi de düzgün yakınsak olacak biçimde

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.37}$$

$$c_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(t),\varphi(t,\lambda_n))dt \tag{3.6.38}$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlamak mümkündür. Gerçekten de

$$g(t)=\begin{cases}1, & x\le t\le x+\Delta x\\ 0, & 0\le t<x \ \ ve\, x+\Delta x\le t\le\pi\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu verilsin. Bu takdirde (3.6.37) eşitliğine göre aşağıdaki eşitlik

$$\int_0^{x+\Delta x} f(t)dt=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(t),\varphi(t,\lambda_n))dt\int_x^{x+\Delta x}\varphi(t,\lambda_n)dt$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafı Δx 'e bölünürse ve $\Delta x\to 0$ için limit alınırsa sonuçta (3.6.37) fonksiyonu elde edilir. Özel olarak Green formülünden $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ için

asimptotik formüllerden $f(x)=\varphi(x,\lambda_k),\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ olacak şekilde (3.6.37) serisinin düzgün ve mutlak yakınsaklığı elde edilir.
Bu sebeple

$$\varphi(x,\lambda_k)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}\left(\varphi(t,\lambda_k),\varphi(t,\lambda_n)\right)dt\right)\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.39}$$

eşitliği bulunur. $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sistemi lineer bağımsız olduğu için (3.6.32) dönüşüm formülünden dolayı $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sistemi de $L_2(0,\pi)$ de lineer bağımsızdır. Bu sebeple (3.6.39) eşitliğinden

$$\int_0^{\pi}\left(\varphi(t,\lambda_k),\varphi(t,\lambda_n)\right)dt=\begin{cases}0, & n\neq k\\ \alpha_n, & n=k\end{cases} \tag{3.6.40}$$

eşitliği elde edilir. (3.6.40) ve Parseval eşitliğinden $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam ortogonal sistem oluşturduğu elde edilir.

π noktasındaki sınır koşulunu tanımlayalım. $\varphi(x,\lambda)$ (3.6.33) denklemini sağladığı için

$$B\varphi'(x,\lambda_n)+Q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n\varphi(x,\lambda_n)$$

$$B\varphi'(x,\lambda_m)+Q(x)\varphi(x,\lambda_m)=\lambda_m\varphi(x,\lambda_m)$$

olur. I. soldan $\varphi^T(x,\lambda_m)$, II. soldan $\varphi^T(x,\lambda_n)$ çarpılıp ve daha sonra I. ifade II. 'den çıkarılırsa

$$\varphi^T(x,\lambda_m)B\varphi'(x,\lambda_n)-\varphi^T(x,\lambda_n)B\varphi'(x,\lambda_m)=(\lambda_n-\lambda_m)\varphi^T(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)$$

elde edilir.

Sonuncu denklem 0 dan π ye kadar integrallenirse, $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ nin ortogonolliği ve (3.6.34) koşulu kullanılırsa;

$$\int_0^{\pi}\left[\left(\varphi_{1m},\varphi_{2m}\right)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1n}'\\ \varphi_{2n}'\end{pmatrix}-\left(\varphi_{1n},\varphi_{2n}\right)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1m}'\\ \varphi_{2m}'\end{pmatrix}\right]dx=\left(\lambda_n-\lambda_m\right)\int_0^{\pi}\left[\left(\varphi_{1n},\varphi_{2n}\right)\begin{pmatrix}\varphi_{1n}\\ \varphi_{2n}\end{pmatrix}\right]dx$$

veya

$$\int_0^{\pi}\left[-\varphi_{1n}'\varphi_{2m}+\varphi_{1m}\varphi_{2n}'+\varphi_{1m}'\varphi_{2n}-\varphi_{1n}\varphi_{2m}'\right]dx=0$$

veya

$$\int_0^{\pi}\left(\varphi_{1m}\varphi_{2n}-\varphi_{1n}\varphi_{2m}\right)'dx=0$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_{1m}(\pi)\varphi_{2n}(\pi)-\varphi_{1n}(\pi)\varphi_{2m}(\pi)=0$$

ve böylece

$$\frac{\varphi_{1m}(\pi)}{\varphi_{2m}(\pi)}=\frac{\varphi_{1n}(\pi)}{\varphi_{2n}(\pi)}=sabit$$

olur.

Diğer taraftan (3.6.32) dönüşüm formülünden

$$\frac{\varphi_1(\pi,\lambda_k)}{\varphi_2(\pi,\lambda_k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_1(\pi,\lambda_n)}{\varphi_2(\pi,\lambda_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\lambda_n\pi+\alpha)+o(1)}{-\cos(\lambda_n\pi+\alpha)+o(1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n\pi-\alpha+\alpha)+o(1)}{-\cos(n\pi-\alpha+\alpha)+o(1)}=0$$

elde edilir. Bu sebeple $\varphi_1(\pi,\lambda_k)=0$ dır. Bununla teorem ispatlanır.

3.6.1. İki Spektruma Göre Ters Problem

Bu bölümde regüler Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem çözümü tam şekilde verilmiştir.

Teorem 3.6.1.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. λ_n ve μ_n dizileri çaprazlaşırlar.
2. $\alpha,\ \alpha_1,\ \beta,\ \beta_1$ sabit sayılar olmak üzere $n\to\pm\infty$ iken λ_n ve μ_n sayıları için

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \qquad (3.6.1.1)$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \qquad (3.6.1.2)$$

asimptotik formülleri sağlanır.

3. $0\le\alpha\le\pi,\ 0\le\beta\le\pi,\ \alpha\neq\beta$ dır.

Bu takdirde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonlu (3.4.2) ve (3.4.3) sınır koşullarını sağlayan aynı bir kanonik Dirac operatörünün iki farklı spektrumlarıdır.

İspat. (3.6.1.1) ve (3.6.1.2) asimptotik formülleriyle tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizileri verilsin.

$$\alpha_n=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\mu_n-\lambda_n}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n} \qquad (3.6.1.3)$$

formülü ele alınsın.

Önceki bölümde verilen sonuçlardan α_n normlaştırıcı sayıları için (3.5.29) asimptotik

formülünün sağlandığı elde edilmişti.

Tüm α_n lerin 0 dan büyük olduğunu gösterelim.

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda} \tag{3.6.1.4}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın.

$m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları ile çakışırlar. Bu takdirde teoremin koşulundan dolayı $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları sıralıdırlar.

$\lambda = it$ ve $t \to \infty$ için

$$m_1(\lambda) \to -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \tag{3.6.1.5}$$

elde edilir ve Weyl fonksiyonunun tanımından

$$\frac{1}{\alpha_n} = \operatorname{Re}s\, m_1(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n} \tag{3.6.1.6}$$

eşitliği yazılır. Bu sebeple

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda-\lambda_n)} \tag{3.6.1.7}$$

dir. Burada α_k ların hepsi aynı işarete sahiptirler.

(3.5.29) formülünde büyük k lar için $\alpha_k > 0$ olduğu görülüyor. Bu sebeple $\forall \alpha_k > 0$ için sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonuna sahip (3.4.1) denkleminin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre birebir olarak tanımlanması elde edilir. $\{\lambda_n\}$ dizisi

$$By' + Q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le \pi \tag{3.6.1.8}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \quad 0 \le \alpha \le \pi \tag{3.6.1.9}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.6.1.10}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Burada α sayısı (3.6.1.1) ile tanımlanır. $\{\gamma_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre tanımlanmış

$$By' + Q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le \pi \tag{3.6.1.8}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0 \tag{3.6.1.11}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.6.1.12}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Burada β, (3.6.1.2) ile tanımlanır. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$,

(3.6.1.8) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix},\ \psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\beta\\-\cos\beta\end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarıyla tanımlı çözümleri olsun. Bu takdirde

$$m(\lambda)=\frac{\psi_1(\pi,\lambda)}{\varphi_1(\pi,\lambda)}$$

fonksiyonunun kutupları ve sıfırları sırasıyla $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ sayıları ile çakışır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n}$$

formülü bulunur. Bu takdirde

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda-\lambda_k)} \tag{3.6.1.13}$$

eşitliği elde edilir. (3.6.1.7) ve (3.6.1.13) formüllerinden

$$m_1(\lambda)=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)$$

elde edilir. Bu sebeple $m(\lambda)$ ve $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları çakışırlar. Dolayısıyla $\gamma_n=\mu_n,\ 0,\pm1,\pm2,\cdots$ olur. Bununla teorem ispatlanır.

Teorem 3.6.1.2. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ (3.6.1.8) denkleminin (3.6.1.9) ve (3.6.1.10) sınır koşullarını sağlayan iki farklı spektrumları olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerek ve yeterdir.

$p(x)$ ve $q(x)$ k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ uzayında olacak şekilde

$$Q(x)=\begin{pmatrix}p(x)&q(x)\\q(x)&-p(x)\end{pmatrix}$$

matris fonksiyonu verilsin.

1. λ_n ve μ_n dizileri çaprazlaşır.
2. Aşağıdaki asimptotik formüller söz konusudur.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

burada $\alpha \neq \beta, 0 \leq \beta, \alpha \leq \pi$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{k,n}\right|^2 < \infty, \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\beta_{k,n}\right|^2 < \infty$ dir.

İspat. λ_n ve μ_n sayıları çaprazlaştığı için bu teoremin gerekliliği Bölüm 3.2 de verildi. Yeterliliğin ispatı ise Teorem 3.6.1.1 in ispatına benzerdir.

4. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ

Bu bölümde sonlu kapalı aralıkta tanımlı ve l pozitif veya negatif tam sayı olmak üzere, π noktasında $\frac{l}{\pi - x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tekile sahip Dirac operatörü için ters problem incelenecektir. Özel olarak farklı sınır koşullarına karşılık gelen $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ sayılar dizisine göre potansiyel matris fonksiyonunun bulunması ispatlanacaktır. Benzer problemler [21], [54] ve diğer çalışmalarda ele alınmıştır.

4.1. Singuler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y, 0 \le x < \pi \tag{4.1.1}$$

denklemi ile birlikte

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ 0 \le \alpha < \pi \tag{4.1.2}$$

$$y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.1.3}$$

sınır şartları göz önüne alınsın. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{l}{\pi - x} \\ \frac{l}{\pi - x} & 0 \end{pmatrix},\ y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $Q(x)$, $[0,\pi]$ de sürekli bir matris fonksiyonu, λ ise kompleks parametredir. Basitlik için biz l yi tek negatif tam sayı olarak ele alacağız.

(4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerlerini $\{\lambda_n\}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$ ve buna karşılık gelen özfonksiyonları ise $\varphi_n(x)$ olsun.

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} (\varphi_n(x), \varphi_n(x))dx = \int_0^{\pi} \left\{ \varphi_1^2(x,\lambda_n) + \varphi_2^2(x,\lambda_n) \right\} dx \tag{4.1.4}$$

sayılarına (4.1.1)-(4.1.3) probleminin normlaştırıcı sayıları denir. $\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.1.5}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun.

Teorem 4.1.1. $Q_1(x)=\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}$ için $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tekilsiz problemin sırasıyla özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları ise $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\cdots$ (4.1.1)-(4.1.3) probleminin $l=-(2k+1)$ için özdeğerleri ve normlaştırıcı sayılarıdır ve tersine $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\cdots$ (4.1.1)-(4.1.3) probleminin $l=-(2k+1)$ için özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları ise

$$By'+Q_1(x)y=\lambda y, 0\le x\le \pi \tag{4.1.6}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{4.1.7}$$

$$y_1(\pi)=0 \tag{4.1.8}$$

probleminin sırasıyla özdegerleri ve normlaştırıcı sayılarıdır.

İspat. Önce gereklilik kısmı yapılsın. $\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \psi_1(x,\lambda) \\ \psi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.6) denkleminin

$$\psi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \psi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{4.1.9}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\psi(x,\lambda)$ nın (4.1.7) sınır koşullarını sağladığı açıktır. Bu sebeple $\psi(x,\lambda_n)$ (4.1.6)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonlarıdır ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\left(\psi(t,\lambda_n),\psi(t,\lambda_n)\right)dt=\int_0^{\pi}\left\{\psi_1^2(x,\lambda_n)+\psi_2^2(x,\lambda_n)\right\}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{4.1.10}$$

şeklindedir.

Bu teoremi tümevarım metodu ile ispatlayalım. $k=0$ olsun. Bu takdirde $\cdots,\lambda_{-1},\lambda_1,\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{-1},\alpha_1,\cdots$ sırasıyla (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları olduğu ispatlayalım. (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özfonksiyonları ile (4.1.6)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonları arasında

$$\varphi(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda)\right)dy}{\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.11}$$

bağıntısı vardır. Buna Crum dönüşümü denir.

(4.1.1)-(4.1.3) ve (4.1.6)-(4.1.8) problemlerinin çözüm fonksiyonlarında $x=0$ yazılırsa

$$\varphi(0,\lambda)=\psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix}$$

elde edilir.

$\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu, (4.1.6) denkleminin çözümü olduğundan

$$K(x,y)=\frac{\psi(x,\lambda_0)\psi^T(y,\lambda_0)}{\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.12}$$

fonksiyonu

$$BK_x^{'}(x,y)+Q_1(x)K(x,y)+\left[K(x,x)B-BK(x,x)\right]K(x,y)=-K_y^{'}(x,y)B+K(x,y)Q_1(y) \tag{4.1.13}$$

denkleminin çözümü olduğu aşikardır.

Bu takdirde (4.1.11) ile tanımlı $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$B\varphi'(x,y)+Q_1(x)\varphi(x,\lambda)+\left[K(x,x)B-BK(x,x)\right]\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda) \tag{4.1.14}$$

denklemini sağlar.

$$\Delta Q_1(x)=K(x,x)B-BK(x,x)$$

fonksiyonu göz önüne alalım.

$x\to\pi$ iken $\Delta Q_1(x)$ fonksiyonunun davranışını bulalım. $\Delta Q_1(x)$ eşitliğinde düzenleme yapılırsa

$$\Delta Q_1(x)=K(x,x)B-BK(x,x)=\frac{1}{\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. $x\to\pi$ iken $\psi_1(\pi)=0,\ \lim\limits_{x\to\pi}\psi_2(x)=c\neq 0$ olduğu bilinmektedir. ($c=0$ için $\psi(t,\lambda_0)=0$ olduğundan bu mümkün değildir).

Bu sebeple $x\to\pi$ iken limit alınırsa

$$\Delta Q_1(x)\to\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}0 & -c^2\\ -c^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix},\ l=-1$$

sonucu bulunur. Gerçekten de

$$\Delta Q_1(x)=\frac{1}{\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\int_0^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt+\int_x^0\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\int_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. Son eşitlikte $x\to\pi$ için limit alınırsa

$$\Delta Q_1(x)\to\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}0 & -c^2\\ -c^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix},\ l=-1$$

olduğu bulunur.

$$Q(x)=Q_1(x)+\Delta Q_1(x)-\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix}\qquad(4.1.15)$$

fonksiyonun $\left[0,\pi\right]$de düzgünlük mertebesi $Q_1(x)$ fonksiyonunun düzgünlük mertebesi ile aynıdır. Böylece $l=-1$ için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (4.1.1) denklemini sağladığı ispatlanmıştır. Burada $Q(x)$ fonksiyonu (4.1.15) ile tanımlıdır.

Şimdi $\varphi_1^2(\pi,\lambda_n)+\varphi_2^2(\pi,\lambda_n)<\infty$ olduğunu ve $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$de tam ortogonal sistem oluşturduğu ispatlayalım. $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin ortogonal sistem olduğu bellidir. Bu sebeple farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonalliğinden

$$\int_0^\pi\left(\psi(x,\lambda_0),\psi(x,\lambda_n)\right)dx=0,\ n\neq 0$$

bulunur. Bu takdirde (4.1.11) eşitliğinde $x\to\pi$ iken limit alınırsa özfonksiyonların ortogonalligi ve L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{x\to\pi}\varphi(x,\lambda_n)=\psi(\pi,\lambda_n)+\lim_{x\to\pi}\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{\int_0^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}$$

$$=\psi(\pi,\lambda_n)+\lim_{x\to\pi}\frac{\psi(x,\lambda_0)\left\{\int_0^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy-\int_x^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy\right\}}{\int_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}$$

$$=\psi(\pi,\lambda_n)-\psi(\pi,\lambda_0)\lim_{x\to\pi}\frac{\int_x^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{\int_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}=0$$

eşitliği elde edilir. Yani $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu yakınsaktır. Bu sebeple $\varphi_1^2(\pi,\lambda_n)+\varphi_2^2(\pi,\lambda_n)<\infty$ olduğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$ fonksiyonları (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özfonksiyonları olur. Bu sebeple $[0,\pi]$ üzerinde ikişerli ortogonaldirler.

Şimdi $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğunu ve

$$\alpha_n=\int_0^\pi\left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dt$$

olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned}A(x)&=\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_0^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi-\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_0^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi+\int_x^0\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_x^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\end{aligned}$$

fonksiyonu verilsin. Dirac-Delta fonksiyonunun tanımından

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan, $t > x$ için

$$\varphi(x,\lambda_n) = \psi(x,\lambda_n) + \frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{A(x)}$$

eşitliği ve bu eşitliğin transpozu alınırsa

$$\varphi^T(t,\lambda_n) = \psi^T(t,\lambda_n) + \frac{\psi^T(t,\lambda_0)\int_0^t \left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{A(t)}$$

elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa çarparsak ve daha sonra her iki taraftan sonsuz toplam alırsak;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\frac{\psi^T(t,\lambda_0)\int_0^t \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(t)}$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_0)\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(x)}\varphi^T(t,\lambda_n)$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\frac{\psi(x,\lambda_0)\psi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi\int_0^t \left(\psi(s,\lambda_0),\psi(s,\lambda_n)\right)ds$$

$$=\delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\psi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}\int_0^t \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n),\psi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\psi(\xi,\lambda_0)d\xi$$

$$+\frac{\psi(x,\lambda_0)}{A(x)}\int_0^x \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(t,\lambda_n),\psi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\psi(\xi,\lambda_0)d\xi$$

$$+\frac{\psi(x,\lambda_0)\psi(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x \left\{\left[\frac{1}{\alpha_n}\psi(\xi,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n)\right]\psi(\xi,\lambda_0)\right\}\psi(s,\lambda_0)d\xi ds$$

$$=\delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha_0\psi(x,\lambda_0)}{A(x)}\frac{\psi(t,\lambda_0)}{A(\xi)}$$

$$=\delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha_0}\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)$$

buradan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1.16}$$

elde edilir. Burada ' sembolü $n=0$ teriminin bulunmadığını ifade eder.

(4.1.16) eşitliği $\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpılıp 0 dan π ye kadar x'e göre integrallenirse ve Dirac-Delta fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$\int_0^\pi \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) \right] \varphi(x,\lambda_n)dx = \int_0^\pi \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi(x,\lambda_n)dx$$

yani

$$\frac{1}{\alpha_n}\varphi(t,\lambda_n)\int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx = \varphi(t,\lambda_n)$$

$$\alpha_n = \int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx \tag{4.1.17}$$

bağıntısı bulunur. (4.1.16) ve (4.1.17) formülleri $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ $n=\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ de tam ortogonal sistem oluşturduğunu gösterir.

Böylece $l=-1$ durumunda teoremin gerekliliği ispatlandı. Tümevarım uygulayarak teoremi genel durumda da ispatlamak mümkündür.

Şimdi yeterlilik kısmını ispatlayalım. $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{4.1.18}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1.2) sınır koşullarını sağladığı açıktır. $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots$, $l=-(2k+1)$ için (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda_n)$, $n\in\pm\overline{(k+1,\infty)}$ bu problemin özfonksiyonları olur ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n = \int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx,\ n\in\pm\overline{(k+1,\infty)} \tag{4.1.19}$$

şeklindedir. Teoremde gösterilen şekilde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayı dizilerini oluşturalım. Bunların (4.1.6)-(4.1.8) sınır değer probleminin spektral karakteristikleri olduğunu ispatlayalım. Teoremi $k=0$ durumu için ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde ispatlanabilir.

$$\psi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda)\right)dt}{\alpha_0+\int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.20}$$

eşitliği verilsin. Burada $\lambda_0, \lambda_n, n \neq 0$ lerden farklıdır ve α_0 sabit pozitif sayıdır. Burada $x = 0$ için $\psi(0,\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(0,\lambda) \\ \psi_2(0,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$ olur.

$\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin çözümü olduğundan

$$K(x,y) = -\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(y,\lambda_0)}{\alpha_0 + \int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0), \varphi(t,\lambda_0)\right) dt} \tag{4.1.21}$$

matris fonksiyonunun

$$\begin{aligned} &BK_x'(x,y) + Q(x)K(x,y) + \left[K(x,x)B - BK(x,x)\right]K(x,y) + LK(x,y) \\ &= -K_y'(x,y)B + K(x,y)Q(y) + K(x,y)L \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

denkleminin çözümü olduğu aşikardır. Bu takdirde (4.1.20) ile tanımlı $\psi\left(x,\lambda\right)$ fonksiyonu

$$B\psi'(x,y) + Q_1(x)\psi(x,\lambda) + \left[K(x,x)B - BK(x,x)\right]\psi(x,\lambda) + L\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda) \tag{4.1.23}$$

denklemini sağlar.

Şimdi

$$\Delta Q(x) = K(x,x)B - BK(x,x)$$

fonksiyonu detaylı bir şekilde inceleyelim.

$x \to \pi$ iken $\Delta Q(x)$ fonksiyonunun davranışını bulalım. $\Delta Q(x)$ fonksiyonunda matris fonksiyonları yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \Delta Q(x) &= K(x,x)B - BK(x,x) \\ &= \frac{1}{\alpha_0 + \int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0), \varphi(t,\lambda_0)\right) dt} \begin{pmatrix} -2\varphi_1(x,\lambda_0)\varphi_2(x,\lambda_0) & \varphi_1^2(x,\lambda_0) - \varphi_2^2(x,\lambda_0) \\ \varphi_1^2(x,\lambda_0) - \varphi_2^2(x,\lambda_0) & 2\varphi_1(x,\lambda_0)\varphi_2(x,\lambda_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu sebeple $x \to \pi$ iken

$$\varphi(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{\pi - x} \end{pmatrix}$$

bilinmektedir [21]. Bu sebeple $x \to \pi$ iken limit alınırsa,

$$\Delta Q(x)=-\frac{1}{\alpha_0+\int_0^x \frac{c_2^2}{(\pi-t)^2}dt+c_1x}\begin{pmatrix} -2c_1\frac{c_2}{(\pi-x)} & c_1^2-\frac{c_2^2}{(\pi-x)^2} \\ c_1^2-\frac{c_2^2}{(\pi-x)^2} & 2c_1\frac{c_2}{(\pi-x)} \end{pmatrix}$$

$$\simeq\begin{pmatrix} -2c & c^2(\pi-x)-\frac{1}{(\pi-x)} \\ c^2(\pi-x)-\frac{1}{(\pi-x)} & 2c \end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{(\pi-x)} \\ -\frac{1}{(\pi-x)} & 0 \end{pmatrix}+\Delta Q_2=-L+\Delta Q_2$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$Q_1(x)=Q(x)+\Delta Q(x)+L=Q(x)+\Delta Q_2(x)$$

fonksiyonun $[0,\pi]$de $Q(x)$ ile aynı düzgünlük derecesine sahip olduğu bulunur.

Şimdi de $n=(-\infty,\infty)$, için $\psi_1(\pi,\lambda_n)=0$ ve $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$de tam ortogonal sistem oluşturduğunu ispatlayalım. Önce $\psi_1(\pi,\lambda_0)=0$ olduğunu ispatlayalım. (4.1.20) eşitliğinde $\lambda=\lambda_0$ yazılırsa

$$\psi(x,\lambda_0)=\varphi(x,\lambda_0)-\frac{\alpha_0}{\alpha_0+\int_0^x\big(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\big)dt}.$$

formüllü bulunur. Bu sebeple $x\to\pi$ iken

$$\varphi(x,\lambda)\to\begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{\pi-x}\end{pmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$\lim_{x\to\pi}\psi(x,\lambda_0)=\lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{(\pi-x)}\end{pmatrix}\frac{\alpha_0}{\alpha_0+c_1^2x+\frac{c_2^2}{(\pi-x)}-\frac{c_2^2}{\pi}}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{(\pi-x)}\end{pmatrix}\frac{\alpha_0\pi(\pi-x)}{(\pi-x)\left(\alpha_0\pi+c_1^2\pi x-c_2^2\right)+c_2^2\pi}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1\alpha_0\pi(\pi-x) \\ c_2\alpha_0\pi\end{pmatrix}\frac{1}{(\pi-x)\left(\alpha_0\pi+c_1^2\pi x-c_2^2\right)+c_2^2\pi}=\begin{pmatrix} 0 \\ c_2\alpha_0\pi\end{pmatrix}\frac{1}{c_2^2\pi}=\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0c_2^{-1}\end{pmatrix}$$

olur. $\lambda = \lambda_n$ olsun.

$$\beta_n = \int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda_n) \right) dx$$

fonksiyonu verilsin. Buradan;

$$\lim_{x\to\pi} \psi(x,\lambda_n) = -\lim_{x\to\pi} \frac{\begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{(\pi - x)} \end{pmatrix}}{\dfrac{c_2^2}{(\pi - x)}} \beta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_n c_2^{-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\psi_1(\pi,\lambda_0) = 0$ olur. Bu sebeple $\{\psi(x,\lambda_n)\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ fonksiyonları (4.1.5)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonları olur. Bu sebeple $[0,\pi]$ üzerinde ikişerli ortogonaldirler.

Şimdi $L_2(0,\pi)$ de $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğunu ispatlayalım. Önceden $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğu gösterilmişti.

$$A(x) = \alpha_0 + \int_0^{t} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_0) \right) d\xi$$

fonksiyonu verilsin.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \varphi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t) E$$

burada $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t > x$ için yukarıdaki yapılan benzer işlemler tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n) \psi^T(t,\lambda_n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \varphi^T(t,\lambda_n) \\ &\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \frac{\varphi^T(t,\lambda_0) \int_0^{t} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_n) \right) d\xi}{A(t)} \\ &\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi^T(t,\lambda_n) \frac{\varphi(x,\lambda_0) \int_0^{x} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_n) \right) d\xi}{A(x)} \end{aligned}$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n}\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x \big(\varphi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\big)d\xi\int_0^t \big(\varphi(s,\lambda_0),\varphi(s,\lambda_n)\big)ds$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(t,\lambda_0)}{A(t)}\int_0^t\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n),\varphi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\varphi(\xi,\lambda_0)d\xi$$

$$-\frac{\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}\int_0^x\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(t,\lambda_n),\varphi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\varphi(\xi,\lambda_0)d\xi$$

$$+\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\int_0^t\left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(\xi,\lambda_n)\varphi(s,\lambda_n)\right]\varphi(\xi,\lambda_0)\right\}\varphi(s,\lambda_0)d\xi ds$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}+\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\big(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_0)\big)d\xi$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\left[A(x)-\int_0^x\big(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_0)\big)d\xi\right]$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\alpha_0$$

olur. Buradan da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)+\frac{\alpha_0\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}\frac{\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}=\delta(x-t)E \tag{4.1.24}$$

formülü elde edilir.

(4.1.20) formülünde $\lambda=\lambda_0$ için

$$\psi(x,\lambda_0)=\frac{\alpha_0\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}$$

olduğu elde edilir. Son eşitlik (4.1.24) formülünde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)+\frac{1}{\alpha_0}\psi(x,\lambda_0)\psi^T(t,\lambda_0)=\delta(x-t)E\\&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)=\delta(x-t)E\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

bulunur. Teoremin gerekliliğinin ispatının benzerinin yorumları yapılırsa

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\big(\psi(x,\lambda_n),\psi(x,\lambda_n)\big)dx \tag{4.1.26}$$

olur. (4.1.25) ve (4.1.26) fonksiyonlarından $\{\psi(x,\lambda_n)\}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlarının $L_2(0,\pi)$ de tam ortogonal sistem olduğu elde edilir.

Sonuç 4.1.1. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları ve $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ matris fonksiyonun

k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ olacak şekilde (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğer ve normlaştırıcı sayıları

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k} \tag{4.1.27}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{\pi} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{4.1.28}$$

şeklinde asimptotik formüllere sahiptir. Burada $l=-(2k+1)$, $n \in \pm\overline{(s+1,\infty)}$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\alpha_{n,k}\right|^2 < \infty$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_{n,k}\right|^2 < \infty$ serileri yakınsaktır

Not 4.1.1. Eğer $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ ler l için (4.1.1)-(4.1.3) tipindeki problemin sırasıyla özdeğer ve normlaştırıcı sayıları ise, bu takdirde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ ler, $-l$ için de (4.1.1)-(4.1.3) problemin özdeğer ve normlaştırıcı sayılarıdır.

4.2. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektrum Türünden İfadesi

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y \tag{4.2.1}$$

diferansiyel denklemini ve

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.2.2}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0, y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.2.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım. Burada

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{l}{\pi-x} \\ \dfrac{l}{\pi-x} & 0 \end{pmatrix},\ y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

$0 \le \alpha \le \pi$, $0 \le \beta \le \pi$ öyleki $\alpha \ne \beta$, $Q(x)$ matris fonksiyonu $[0,\pi]$ de tanımlı ve sürekli ve $l=-(2k+1)$ olsun. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$ sırasıyla (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.1), (4.2.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri olsun. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (4.2.1) denkleminin sırasıyla

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\quad \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.2.4}$$

$$\psi_1(0,\lambda) = \sin\beta,\quad \psi_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{4.2.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu takdirde (4.2.1), (4.2.2) sınır değer probleminin özfonksiyonları $\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)$ ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\left(\varphi_n(x),\varphi_n(x)\right)dx,\ n\in\pm\overline{(k+1,\infty)} \tag{4.2.6}$$

şeklindedir.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ spektrumuna göre $\{\alpha_n\}$ için formül bulalım.

$$f(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{4.2.7}$$

fonksiyonu verilsin. Burada $f(x,\lambda)\in L_2(0,\pi)$ dir. Bu takdirde $x\to\pi$ iken limit alınırsa

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\left|f_1^2(x,\lambda)\right|+\left|f_2^2(x,\lambda)\right|\right\}=0$$

bulunur. Burada

$$c_1+m(\lambda)c_2=0 \tag{4.2.8}$$

$$c_1=\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\psi_1^2(x,\lambda)+\psi_2^2(x,\lambda)\right\},\ c_2=\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\varphi_1^2(x,\lambda)+\varphi_2^2(x,\lambda)\right\}$$

şeklindedir. (4.2.8) formülünden $m(\lambda)$ nın bir meromorf fonksiyon olduğu gözükmektedir. Dolayısıyla kutupları ve sıfırları (4.2.1), (2.2.2) ve (4.2.1), (2.2.3) probleminin sırasıyla özdeğerleri ile çakışır. Bölüm 3.4'te yapılan işlemler tekrarlanırsa

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}\left(f(x,\lambda_1),f(x,\lambda_2)\right)dx=\left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)$$

formülü bulunur. $\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\overline{\lambda}$ olduğu durumda

$$\int_0^{\pi}\left|f(x,\lambda)\right|^2dx=\sin(\beta-\alpha)\frac{\operatorname{Im}m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \tag{4.2.9}$$

formülü elde edilir. Bu takdirde $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları yani (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.1), (4.2.3) sınır probleminin özdeğerleri çarprazlaşırlar. $m(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan

$$m(\lambda)=A\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda}{\mu_p}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{-1} \tag{4.2.10}$$

elde edilir.

Burada $'$sembolü sonsuz çarpımda $p=-k,\dots,k$ çarpanlarının bulunmadığını ifade eder ve A sabit sayıdır. Bölüm 3 teki işlemler tekrarlanırsa

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^\pi \left(f(x,\lambda),\varphi_n(x)\right)dx=\int_0^\pi\left\{\left(Bf'(x,\lambda),\varphi_n(x)\right)+\left(Bf(x,\lambda),\varphi_n'(x)\right)\right\}dx=\sin(\alpha-\beta)$$

olur. Burada $\lambda\to\lambda_n$ için limit alınırsa

$$\alpha_n=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)} \tag{4.2.11}$$

eşitliği elde edilir. (4.2.10) formülü düzenlenirse daha sonra her iki taraftan logaritma alınırsa

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_p-\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}\right)=\sum_{p=k+1}^{\infty}\left(\frac{\mu_p-\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}+\frac{\mu_{-p}-\lambda_{-p}}{\lambda_{-p}-\lambda}\right)$$

serisi elde edilir. Bu serinin yakınsaklığı Bölüm 3 te yapılan işlemler tekrarlanırsa elde edilir. (4.2.10) formülünde cebirsel işlemler yapılırsa

$$m(\lambda)=A_1\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{\mu_p-\lambda}{\lambda_p-\lambda}\right)$$

fonksiyonu bulunur. Burada

$$A_1=A\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_p}{\mu_p}$$

şeklindedir. Bu takdirde (4.2.11) den

$$\alpha_n=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{A_1(\mu_n-\lambda_n)}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_p-\lambda_n}{\mu_p-\lambda_n} \tag{4.2.12}$$

elde edilir. İleride $A_1=-1$ olduğu ispatlanacaktır.

4.3. İki Spektruma Göre Singüler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

Bu bölümde tekile sahip Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem çözümü verilmiştir.

Teorem 4.3.1. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $n\in\pm\overline{(k+1,\infty)}$ dizileri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. λ_n ve μ_n dizileri sıralıdırlar (çaprazlaşırlar).
2. α, α_1, β, β_1 sabit sayılar olmak üzere $n\to\pm\infty$ iken $\lambda_{n+k},\lambda_{n-k}$ ve μ_{n+k},μ_{n-k} sayıları için

$$\lambda_{n+k} = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n > 0$$
$$\lambda_{n-k} = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n < 0 \tag{4.3.1}$$

ve

$$\mu_{n+k} = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n > 0$$
$$\mu_{n-k} = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n < 0 \tag{4.3.2}$$

asimptotik formülleri sağlanır.

3. $0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le \beta \le \pi,\ \alpha \ne \beta$ dır.

Bu takdirde $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y \tag{4.3.3}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \tag{4.3.4}$$

$$y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.3.5}$$

probleminin iki farklı spektrumlarıdır.

Burada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{l}{\pi - x} \\ \dfrac{l}{\pi - x} & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

İspat. Teoremi $l = -1$ için ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde ispatlanır. Sırasıyla (4.3.1) ve (4.3.2) asimptotik formülleriyle tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizileri verilsin. Normlaştırıcı sayıların iki spektrum türünden ifadesi olan

$$\alpha_n = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_p - \lambda_n}{\mu_p - \lambda_n} \tag{4.3.6}$$

formülü yazılsın. Burada ' sembolü sonsuz çarpımda $p = 0, p = n$ çarpanlarının bulunmadığını ifade eder.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları için asimptotik formüllerden faydalanarak $\{\alpha_n\}$ sayıları için asimptotik formül bulalım. $\lambda_0 \ne \lambda_n, \mu_0 \ne \mu_n, n = \pm 1, \pm 2, \cdots$ olmak üzere λ_0, μ_0 sayıları ele alınsın. Bu durumda (4.3.6) formülünün -1. kuvveti alınırsa

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha - \beta)} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_p - \lambda_n}{\lambda_p - \lambda_n} \frac{\lambda_0 - \lambda_n}{\mu_0 - \lambda_n}$$

olduğu elde edilir. Burada ' sembolü sonsuz çarpımda $p = n$ sayılı terimin olmadığını ifade eder.

$$\frac{1}{b_n} = \frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha - \beta)} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_p - \lambda_n}{\lambda_p - \lambda_n}$$

olacak şekilde yukarıdaki sonsuz çarpım

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n} \frac{\lambda_0 - \lambda_n}{\mu_0 - \lambda_n}$$

Şeklinde yazılır. Bölüm 3.4 de verilen

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha - \beta)\right] + O(\frac{\ln n}{n^2}) \tag{4.3.7}$$

asimptotik formülünü ele alalım. Burada $s = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\lambda_k - \mu_k + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right)$ şeklindedir ve $\sum{}'$ sembolü toplamda $k = n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder. Bu takdirde

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n}\left(1 + \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n - \mu_0}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Özdeğerler için asimptotik formüllerden faydalanılırsa

$$\frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n - \mu_0} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n} \frac{1}{1 - \frac{\mu_0}{\lambda_n}} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n}\left(1 + \frac{\mu_0 - \lambda_0}{n}\right) + O(\frac{1}{n^2})$$

şeklinde yazılabilir. Son formül ve (4.3.7) den normlaştırıcı saylar için asimptotik formül

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s'}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha - \beta) + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right] + O(\frac{\ln n}{n^2}) \tag{4.3.8}$$

bulunur. Burada $s' = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\lambda_k - \mu_k + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right)$ ve ' sembolü toplamda $k = n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder. Böylece (4.3.8) formülü

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{c}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \tag{4.3.9}$$

elde edilir. Burada

$$c=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''\left(\lambda_k-\mu_k+\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)+(\beta_1-\alpha_1)ctg(\alpha-\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\pi^2}$$

şeklindedir. Tüm α_n lerin 0 dan büyük olduğunu gösterelim.

$$m_1(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_p-\lambda}{\lambda_p-\lambda} \tag{4.3.10}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Teoremin koşulundan dolayı $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları çaprazlaşırlar. $\lambda\to i\infty$ iken limit alınırsa

$$m_1(\lambda)\to-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \tag{4.3.11}$$

sonucu alınır. Weyl fonksiyonu tanımından

$$\frac{1}{\alpha_n}=\operatorname{Re}sm_1(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n} \tag{4.3.12}$$

eşitliği yazılır. Bu sebeple

$$m_1(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_1(\lambda-\lambda_p)} \tag{4.3.13}$$

olur, öyleki α_n lerin hepsi aynı işarete sahiptir.

(4.3.9) formülünde büyük p ler için $a_p>0$ olduğu elde edilir. Bu takdirde [21] den $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonunu birebir olarak tanımlamak mümkündür. Öyleki $\{\lambda_n\}$ (4.3.3)-(4.3.5) probleminin özdeğerleridir.

$$By'+Q(x)y+Ly=\lambda y \tag{4.3.14}$$

denklemi ve

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \tag{4.3.15}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{4.3.16}$$

sınır koşullarıyla tanımlı problemin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ özdeğer ve normlaştırıcı saylarına göre tanımlanan $\{\gamma_n\}$, $n\in\pm\overline{(1,\infty)}$ özdeğerleri olsun. Burada β sayısı (4.3.2) ile tanımlanır.

$\gamma_n=\mu_n$, $n\in\pm\overline{(1,\infty)}$ olduğunu ispatlayalım.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix},\ \psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\beta\\-\cos\beta\end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını sağlayan (4.3.14) denkleminin çözümleri olsun. Bu takdirde

$$m(\lambda)=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-\lambda_n}{\lambda-\gamma_n} \tag{4.3.17}$$

eşitliği ile tanımlı meromorf fonksiyon mevcuttur. Öyleki $m(\lambda)$ fonksiyonunun kutupları ve sıfırları sırasıyla $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ sayıları ile çakışır. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_n}=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n}$$

formülü bulunur. $\lambda\to i\infty$ iken (4.3.17) de limit alınırsa $m(\lambda)\to 1$ elde edilir. Bu sebeple

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_p(\lambda_p-\lambda)} \tag{4.3.18}$$

eşitliği elde edilir. (4.3.13) ve (4.3.18) formüllerinden

$$m_1(\lambda)=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda) \tag{4.3.19}$$

olur ve dolayısıyla $\gamma_n=\mu_n$, $n=\pm\overline{(1,\infty)}$ elde edilir. Bununla teorem ispatlanır.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarını aynı bir denklemin farklı iki özdeğeri olabilmesi için yeterlilik koşullarını göstermiş olduk. Benzer yorumları yaparak genel durumda iki spektruma göre ters problemi tam olarak çözmek mümkündür.

Teorem 4.3.2. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizilerinin (4.3.14) denkleminin (4.3.15) ve (4.3.16) sınır koşullarını sağlayan iki farklı spektrumları olması için $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ nin elamanı ve $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$ olacak biçimde aşağıdaki koşulların sağlanması gerek ve yeterdir..

1. λ_n ve μ_n dizileri sıralıdırlar(çarprazlaşır).
2. Aşağıdaki asimptotik formüller söz konusudur.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+\frac{\beta_2}{n^2}+\cdots+\frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

burada $\alpha\neq\beta,\ 0\le\beta,\ \alpha\le\pi, l=-(2k+1)$ ve her bir n için

$\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_{k,n}|^2<\infty,\sum_{-\infty}^{\infty}|\beta_{k,n}|^2<\infty, n=\pm\overline{(k+1,\infty)}$ dir.

İspat. Gerekliliğin ispatı Bölüm 3.2 den elde edilir. Yeterlilik ise Teorem 4.3.1.'in ispatı gibidir.

Not 4.3.1. Bölüm 3.2. de $\{\alpha_n\}$ lerin (4.1.28) bağıntısını sağladığı ispatlanmıştır. Bu Teoremden ise $\{\alpha_n\}$ lerin (4.3.9) bağıntısını sağladığı elde edilir. (4.1.28) ve (4.3.9) formülleri karşılaştırılırsa $A_1 = -1$ olduğu elde edilir.

5. YARI EKSENDE DIRAC SİSTEMİ İÇİN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

5.1. Problemin Tanımı

$$By'+Q(x)y=\lambda y, 0\le x<\infty \tag{5.1.1}$$

denklemini ve

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{5.1.2}$$

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \tag{5.1.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım.

Burada $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$, $y(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ayrıca $Q(x)$ normalleştirilmiş matris fonksiyonunu $0\le x<\infty$ yarı ekseninde diferansiyellenebilen fonksiyondur. Öyleki $\forall\alpha\, ve\, \beta$ $(\alpha\ne\beta)$ için (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin spektrumları ayrık tır. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sırasıyla (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerler dizisi olsun. Bu bölümde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ özdeğerlerine göre (5.1.1), (5.1.2) sınır değer probleminin spektral fonksiyonunun birebir olarak tanımlandığı gösterilecektir.

Spektral fonksiyona göre (5.1.1) Kanonik Dirac sistemi birebir tanımlandığından dolayı [3], iki farklı spektruma göre Kanonik Dirac sisteminin birebir tanımlandığı elde edilir.

5.2. $\rho(\lambda)$ -spektral fonksiyonun spektrumlar cinsinden ifadesi

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ (5.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\quad \varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{5.2.1}$$

$$\theta_1(0,\lambda)=\sin\beta,\quad \theta_2(0,\lambda)=-\cos\beta \tag{5.2.2}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ nın sırasıyla (5.1.2) ve (5.1.3) sınır koşullarını sağladığı aşikardır. Bu sebeple $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\theta(x,\lambda_n)$ sırasıyla $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ özdeğerlerine karşılık gelen (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

Teorem 5.2.1. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ sırasıyla (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerler dizisi olsun. Bu takdirde (5.1.1), (5.1.2) sınır değer probleminin $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ ler cinsinden

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{0\le\lambda_n<\lambda}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda\ge 0\\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n<0}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda<0\end{cases} \tag{5.2.3}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha_n}=-c\frac{\lambda_n}{\mu_n}(\mu_n-\lambda_n)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{-1} \tag{5.2.4}$$

formülleri ile tanımlanır.

Burada c herhangi sabit, ' sembolü çarpımda $k=n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder.

İspat. $f(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$ fonksiyonu, (5.1.1) denkleminin çözümü olsun. Burada $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ dır.

$$f(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{5.2.5}$$

olacak şekilde $f(x,\lambda)$ fonksiyonunu seçilsin. Bölüm 4.2. de yapılan işlemler tekrarlanırsa ve $x\to\infty$ için $\overline{f^*(x,\lambda)Bf(x,\lambda)}\to 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(\lambda-\overline{\lambda})\int_0^{\infty}\big(f(x,\lambda),f(x,\lambda)\big)dx=\left[m(\overline{\lambda})-m(\lambda)\right]\sin(\alpha-\beta)$$

olur. Buradan

$$\int_0^{\infty}\big(f(x,\lambda),f(x,\lambda)\big)dx=-\frac{\operatorname{Im}m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}\sin(\alpha-\beta)$$

formülü elde edilir. (5.2.5) den (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri sırasıyla $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları olduğu elde edilir. Dolayısıyla $m(\lambda)$ meromorf fonksiyondur. Bu sebeple $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ çaprazlaşırlar, dolayısıyla

$$m(\lambda)=c\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^{-1} \tag{5.2.6}$$

olur . Burada c sabit sayıdır.

Titchmarch çalışmasında (5.1.1), (5.1.2) probleminin $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu $m(\lambda)$ cinsinden

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{0\le\lambda_n<\lambda}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda\ge 0\\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n<0}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda<0\end{cases}$$

bağıntısıyla tanımlanır, burada

$$\frac{1}{\alpha_n}=\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n}$$

şeklindedir. Sonuncu formülden, (5.2.6) eşitliğinden aranan (5.2.3) formülü kolaylıkla elde edilir.

Not 5.2.1 Teorem 5.2.1, (5.1.1), (5.1.2) probleminin spektral fonksiyonu c sabit farkıyla iki spektruma göre hesaplandığını mümkün kılar.

Teorem 5.2.2. $\rho_1(\lambda)$ ve $\rho_2(\lambda)$ spektral fonksiyonları birbirinden sabit c çarpanı kadar farklı olduğunda yani $\rho_1(\lambda)=c\rho_2(\lambda)$ ise ve bunlar Dirac sistemiyle oluşan sınır problemlerinin spektral fonksiyonları olduğunda $c=1$ dir.

İspat.

$$\rho_1(\lambda)-\rho_1(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)$$

$$\rho_2(\lambda)-\rho_2(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)$$

buradan

$$\rho_1(\lambda)-\rho_1(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)=c\left[\rho_2(\lambda)-\rho_2(-\lambda)\right]=c\left[\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)\right]$$

elde eldir. Dolayısıyla $c=1$ olur.

Bu teoremden görüldüğü gibi $\rho(\lambda)$ nın tanımındaki sabit sayısı belirli durumlarda $\rho(\lambda)$ için asimptotik formüllerden hesaplanabilir. Not etmek gerekir ki c sabitinin kesin ifadesi bize gerekmez.

5.3. Spektrumun Ayrıklığı İçin Yeterlilik Şartları

Bu bölümde Dirac sisteminin spektrumunun diskret olacağı durumlar incelenecektir. Bununla ilgili birçok çalışma ithaf edilmiştir. Fakat bu çalışmalarda sistem kanonik şekilde ele alındığı için elde edilen sonuçlar daha az kullanılmaktadır.

Teorem 5.3.1 $Q(x)$ matris fonksiyonu sürekli türeve sahip olsun. Bu takdirde (5.1.1), (5.1.2) probleminin ayrık spektrum'a sahip olması için

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+k} \left\{ p^2 + q^2 - (p'^2 - q'^2)^{\frac{1}{2}} \right\} dt = \infty \tag{5.3.1}$$

bağıntısının sağlanması yeterlidir.

İspat. (5.1.1) denklemi (5.1.2) sınır koşullarıyla oluşan operatörü L ile gösterelim. Bu takdirde L^2 operatörü

$$-y'' + (Q^2 + BQ^1)y = \lambda^2 y \tag{5.3.2}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0$$

$$\left\{ y_2'(0) + p(0)y_1(0) + q(0)y_2(0) \right\}\cos\alpha + \left\{ -y_1'(0) + q(0)y_1(0) - p(0)y_2(0) \right\}\sin\alpha = 0$$

sınır koşullarıyla oluşur. L^2 operatörünün diskretliği L operatörünün spektrumunun diskretliğin den elde edilir. $Q^2 + BQ^1$ matrisine karşılık gelen en küçük özdeger $\mu(x)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+k} \mu(x)dx = \infty \tag{5.3.3}$$

şeklindedir.

Basit hesaplamalardan sonra $\mu(x) = p^2 + q^2 - (p'^2 - q'^2)^{\frac{1}{2}}$ elde edilir. Bu sebeple (5.3.3) koşulundan (5.3.1) elde edilir. Dolayısıyla L^2 operatörü ve doğal olarak L operatörünün diskret spektruma sahiptir.

Sonuç 5.3.1. $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlar olduğunda (5.1.1), (5.1.2) problemi ayrık spektrumuna sahiptir.

6. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN KISMEN ÇAKIŞMAYAN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

6.1. $K(x,s)$ Matris Fonksiyonunun Genel Dejenereliği

$$By'+Q(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}y=\lambda y, 0<x\leq\pi \tag{6.1.1}$$

denklemini ve

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.2}$$

$$y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{6.1.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım. Burada

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\ y(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

ve H reel sayıdır.

Bu problemin $y_1(0)=0,\ y_2(0)=-1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$y_1(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x\left[-p(s)y_1(s)-q(s)y_2(s)+\frac{y_2(s)}{s}\right]\sin\lambda(s-x)ds$$

$$+\int_0^x\left[q(s)y_1(s)-p(s)y_2(s)-\frac{y_1(s)}{s}\right]\cos\lambda(s-x)ds$$

$$y_2(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x\left[-p(s)y_1(s)-q(s)y_2(s)+\frac{y_2(s)}{s}\right]\cos\lambda(s-x)ds$$

$$+\int_0^x\left[q(s)y_1(s)-p(s)y_2(s)-\frac{y_1(s)}{s}\right]\sin\lambda(s-x)ds$$

şeklindedir. Burada $\frac{y_1(s)}{s}\in C[0,\pi],\ \frac{y_2(s)}{s}\in C[0,\pi]$ dır.

Bu özfonksiyonlar (6.1.3) te yerine yazılırsa ve Bölüm 3.2 de yapılan işlemler tekrarlanırsa özdeğerler için asimptotik formül

$$\lambda_n=n+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{H}+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{6.1.4}$$

şeklinde elde edilir.

(6.1.1) denkleminin $Q(x)=0$ olduğu durumda, $y_{01}(0)=0,\ y_{02}(0)=-1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$y_{01}(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x \frac{y_2(s)}{s}\sin\lambda(s-x)ds-\int_0^x \frac{y_1(s)}{s}\cos\lambda(s-x)ds \tag{6.1.5}$$

$$y_{02}(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x \frac{y_2(s)}{s}\cos\lambda(s-x)ds-\int_0^x \frac{y_1(s)}{s}\sin\lambda(s-x)ds \tag{6.1.6}$$

şeklindedir. O halde bu özfonksiyonlar büyük λ lar için

$$y_{01}(x,\lambda)=\sin\lambda x+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \tag{6.1.7}$$

$$y_{02}(x,\lambda)=-\cos\lambda x+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \tag{6.1.8}$$

şeklinde yazılır. Burada $\tau=|\mathrm{Im}\lambda|$ dır.

Perturbe olmuş (6.1.1) denklemi ile perturbe olmamış yani $Q(x)=0$ olduğu durumda olan denklem arasında

$$y(x,\lambda)=y_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,s)y_0(s,\lambda)dt \tag{6.1.9}$$

bağıntısı vardır. Burada $y_0(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_{01}(x,\lambda) \\ y_{02}(x,\lambda)\end{pmatrix}$ fonksiyonu $Q(x)=0$ olduğu durumdaki çözüm fonksiyonudur ve $K(x,s)=\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}$ çekirdek fonksiyonudur.

(6.1.9) eşitliğinde $y(x,\lambda)$, $y_0(x,\lambda)$, $K(x,s)$ ifadeleri yerine yazılıp düzenlenirse

$$y_1(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x\left[K_{11}(x,s)\sin\lambda t-K_{12}(x,s)\cos\lambda s\right]ds+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \tag{6.1.10}$$

$$y_2(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x\left[K_{21}(x,s)\sin\lambda s-K_{22}(x,s)\cos\lambda s\right]ds+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \tag{6.1.11}$$

formülleri elde edilir.

$y(x,\lambda)$ vektör fonksiyon, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$, $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar ve H reel sayı olmak üzere, (I)problemini

$$By'+Q(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}y=\lambda y,\ 0<x\le\pi \tag{6.1.12}$$

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.13}$$

$$y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{6.1.14}$$

şeklinde ele alalım. (I) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. (6.1.12), (6.1.13) ve

$$y_2(\pi)+H_1y_1(\pi)=0 \tag{6.1.15}$$

koşulu ile birlikte tanımlı olan (II) probleminin özdeğerleri $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun.

Benzer şekilde $\widetilde{Q}(x)=\begin{pmatrix}\widetilde{p}(x)&\widetilde{q}(x)\\\widetilde{q}(x)&-\widetilde{p}(x)\end{pmatrix}$, $\widetilde{p}(x)$ ve $\widetilde{q}(x)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, $\widetilde{H}$, H dan farklı reel sayı olmak üzere, (III) problemi

$$By'+\widetilde{Q}(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}y=\lambda y,0<x\le\pi \tag{6.1.16}$$

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.17}$$

$$y_2(\pi)+\widetilde{H}y_1(\pi)=0 \tag{6.1.18}$$

şeklinde ele alınsın. (III) probleminin özdeğerleri $\left\{\widetilde{\lambda}_n\right\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. (6.1.16), (6.1.17) ve

$$y_2(\pi)+\widetilde{H}_1y_1(\pi)=0 \tag{6.1.19}$$

koşulu ile birlikte tanımlı olan (IV) probleminin özdeğerleri $\left\{\widetilde{\mu}_n\right\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun.

Aşağıdaki teorem söz konusudur.

Teorem 6.1.1. (I), (II), (III) ve (IV) problemlerinin özdeğerleri sırası ile $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\left\{\widetilde{\lambda}_n\right\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\left\{\widetilde{\mu}_n\right\}_{-\infty}^{\infty}$ $\left(n\in\overline{-\infty,\infty}\right)$ olsun. Bu takdirde;

1. $\lambda_n\equiv\widetilde{\lambda}_n$ tüm n ler için çakışır.
2. $\mu_n\neq\widetilde{\mu}_n$, $n=0,1,2,\ldots,\mathbb{N}$ ve $\mu_n\equiv\widetilde{\mu}_n$, $\{n\in\mathbb{Z}-\{0,\mathbb{N}\}\}$.
3. $\{\lambda_n\}$ ve $\left\{\widetilde{\mu}_n\right\}$ özdeğerleri çaprazlaşırlar.

koşulları sağlanacak biçimde

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+\int_0^x K(x,s)\varphi(t,\lambda)dt \tag{6.1.20}$$

bağıntısında bulunan $K(x,s)$ çekirdek fonksiyonu genel dejeneredir.

İspat. (6.1.20) dönüşüm operatörü

$$\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\\ \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s)\\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(s,\lambda)\\ \varphi_2(s,\lambda)\end{pmatrix}ds$$

veya

$$\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)=\varphi_1(x,\lambda)+\int_0^x\left\{K_{11}(x,s)\varphi_1(s,\lambda)+K_{12}(x,s)\varphi_2(s,\lambda)\right\}ds \qquad (6.1.21)$$

$$\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)=\varphi_2(x,\lambda)+\int_0^x\left\{K_{21}(x,s)\varphi_1(s,\lambda)+K_{22}(x,s)\varphi_2(s,\lambda)\right\}ds \qquad (6.1.22)$$

şeklinde yazılabilir. (6.1.21) bağıntısı $\tilde{H}$ ile çarpılıp daha sonra (6.1.22) eşitliği ile toplanırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)+\tilde{H}\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)&=\varphi_2(x,\lambda)+H\varphi_1(x,\lambda)\\ &+\int_0^x\left[\left\{K_{21}(x,s)+\tilde{H}K_{11}(x,s)\right\}\varphi_1(s,\lambda)+\left\{K_{22}(x,s)+\tilde{H}K_{12}(x,s)\right\}\varphi_2(s,\lambda)\right]ds\end{aligned} \qquad (6.1.23)$$

formülü elde edilir.

Son ifadede $x=\pi$, $\lambda=\lambda_n$ alıp (I) ve (II) problemlerinin spektrumları için verilen (6.1.14) ve (6.1.15) koşullarından faydalanılırsa ve $\lambda_n\equiv\tilde{\lambda}_n$ olduğundan

$$\begin{aligned}0=\left(\tilde{H}-H\right)\varphi_1(\pi,\lambda_n)+\int_0^\pi\Big[&\left\{K_{21}(\pi,s)+\tilde{H}K_{11}(\pi,s)\right\}\varphi_1(s,\lambda_n)\\ &+\left\{K_{22}(\pi,s)+\tilde{H}K_{12}(\pi,s)\right\}\varphi_2(s,\lambda_n)\Big]ds\end{aligned}$$

bulunur. (6.1.10) formülünde $n\to\infty$ için limit alınırsa $\varphi_1(\pi,\lambda_n)\to(-1)^n\sin(\arctan\frac{1}{H})$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0' a gider. Dolayısıyla

$$\left(\tilde{H}-H\right)=0 \qquad (6.1.24)$$

ve

$$\int_0^\pi\left[\left\{K_{21}(\pi,s)+\tilde{H}K_{11}(\pi,s)\right\}\varphi_1(s,\lambda_n)+\left\{K_{22}(\pi,s)+\tilde{H}K_{12}(\pi,s)\right\}\varphi_2(s,\lambda_n)\right]ds=0,\ n\in\mathbb{N} \qquad (6.1.25)$$

formülleri bulunur. $\varphi(x,\lambda_n)$ özvektör fonksiyonlarının tamlığından

$$K_{21}(\pi,s)+\tilde{H}K_{11}(\pi,s)=0 \qquad (6.1.26)$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{12}(\pi,s)=0 \tag{6.1.27}$$

elde edilir.

Şimdi ikinci spektrum için benzer işlemler yapalım. (6.1.21) eşitliği $\widetilde{H}_1$ ile çarpılıp daha sonra (6.1.22) eşitliği ile toplanırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_2(x,\lambda)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(x,\lambda)&=\varphi_2(x,\lambda)+H_1\varphi_1(x,\lambda)\\&+\int_0^x\Big[\Big\{K_{21}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\lambda)+\Big\{K_{22}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\lambda)\Big]ds\end{aligned} \tag{6.1.28}$$

formülü bulunur.

Son ifadede $x=\pi,\ \lambda=\mu_n,\ n>\mathbb{N}$ alıp (III) ve (IV) problemlerinin spektrumları için verilen (6.1.18) ve (6.1.19) koşullarından faydalanılırsa ve $\mu_n\equiv\widetilde{\mu}_n,\ \{n\in\mathbb{Z}-\{0,\mathbb{N}\}\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}0=\Big(\widetilde{H}_1-H_1\Big)\varphi_1(\pi,\mu_n)+\int_0^\pi\Big[&\Big\{K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)\\&+\Big\{K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds\end{aligned}$$

yazılır. (6.1.10) formülünden $n\to\infty$ için limit alınırsa $\varphi_1(\pi,\mu_n)\to(-1)^n\sin(\arctan\frac{1}{H})$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0 a gider. Dolayısıyla

$$\Big(\widetilde{H}_1-H_1\Big)=0 \tag{6.1.29}$$

ve

$$\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)+\Big\{K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds=0,\ n\in\mathbb{N} \tag{6.1.30}$$

formülleri elde edilir.

Şimdi ise benzer işlemleri $\mu_n\neq\widetilde{\mu}_n,\ n=0,1,2,\ldots,\mathbb{N}$ olduğu durumda yapılsın. $x=\pi,\ \lambda=\mu_n,\ n=0,1,\cdots,N$ alınırsa (6.1.28) ve (6.1.29) formüllerinden

$$\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)=\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)+\Big\{K_{22}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds \tag{6.1.31}$$

elde edilir. (6.1.30) ve (6.1.31) formüllerinden

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}\varphi_1(s,\mu_n) \tag{6.1.32}$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}\varphi_2(s,\mu_n) \qquad (6.1.33)$$

bağıntıları elde edilir.

Burada

$$\|\varphi(s,\mu_n)\|^2=\alpha_n=\int_0^{\pi}\left\{\varphi_1^2(s,\mu_n)+\varphi_2^2(s,\mu_n)\right\}ds$$

olacak şekilde

$$\tau_n=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}$$

eşitliği verilsin. Böylece $K_{ij}(\pi,s),\ i,j=1,2$ fonksiyonlarını tanımlamak için

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{11}(\pi,s)=0$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{12}(\pi,s)=0$$

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

denklemler sistemi elde edilir. Yukarıdaki denklem sistemini $K_{ij}(\pi,s),(i,j=1,2)$ e göre çözülürse

$$K_{11}(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{12}(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

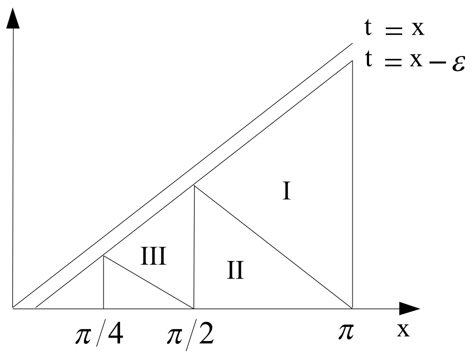
$$K_{21}(\pi,s)=-\frac{\widetilde{H}}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{22}(\pi,s)=-\frac{\widetilde{H}}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$K(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\begin{pmatrix}\varphi_1(s,\mu_n) & \varphi_2(s,\mu_n)\\ -\widetilde{H}_1\varphi_1(s,\mu_n) & -\widetilde{H}\varphi_2(s,\mu_n)\end{pmatrix} \qquad (6.1.34)$$

şeklindedir. $K(x,s)$ fonksiyonu birinci mertebeden hiperbolik denklemler sistemini sağladığı için (6.1.34) koşulu birlikte OAB üçgeninin tamamında birebir olarak tanımlanır.



Şekil 6.1.1 OAB üçgeninin tamamında $K(x,s)$ fonksiyonunun görüntüsü

Bu sebeple OAB üçgeninin tamamında $K(x,s)$ fonksiyonunun görüntüsü

$$K(x,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\left\|\varphi(s,\mu_n)\right\|^2}\times\left[\theta(x,\mu_n)-\widetilde{H}\chi(x,\mu_n)\right]\varphi^T(s,\mu_n) \qquad (6.1.35)$$

şeklindedir. Burada

$$\theta(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\theta_1(x,\lambda)\\ \theta_2(x,\lambda)\end{pmatrix},\quad \chi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\chi_1(x,\lambda)\\ \chi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

denklemin

$$\theta_1(\pi,\lambda)=\chi_2(\pi,\lambda)=1,\quad \theta_2(\pi,\lambda)=\chi_1(\pi,\lambda)=0$$

koşullarını sağlayan çözümleridir. $\varphi^T(s,\lambda)$ ise transpozu alınmış vektör fonksiyonudur.

7. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

7.1. Farklı potansiyellere sahip singüler Dirac operatörü için kararlılık problemi

$p_i(x)$ ve $q_i(x)$ $(i=1,2)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ve

$$Q_1(x)=\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix},\quad Q_2(x)=\begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\pi-x} \\ -\dfrac{1}{\pi-x} & 0 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$By'+Q_1(x)y+L(x)y=\lambda y, 0\le x<\pi \tag{7.1.1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{7.1.2}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{7.1.3}$$

sınır değer problemi ele alınsın. (7.1.1) probleminin $\psi_1(0,\lambda)=\sin\alpha$, $\psi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda)\\ \psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ile gösterilsin. Bu problemin

spektral karakteristikleri $\{\lambda_n,\rho_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. Bu karakteristikler (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar) sırasıyla aşağıdaki asimptotik formülleri sağlarlar.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{k,n}}{n^k} \tag{7.1.4}$$

$$\rho_n=\pi+\frac{c_1}{n}+\cdots+\frac{c_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{7.1.5}$$

Benzer şekilde (7.1.1) in pertürbesi olan aşağıdaki sınır değer problemi

$$By'+Q_2(x)y+Ly=\mu y, 0\le x<\pi \tag{7.1.6}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{7.1.7}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{7.1.8}$$

ele alınsın. (7.1.6) probleminin $\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha$, $\varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ile gösterilsin. Bu problemin

spektral karakteristikleri $\{\mu_n,\sigma_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. Bu karakteristikler (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar) sırasıyla aşağıdaki asimptotik formülleri sağlarlar.

$$\mu_n = n - \frac{\alpha'}{\pi} + \frac{\alpha'_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha'_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha'_{k,n}}{n^k} \tag{7.1.9}$$

$$\sigma_n = \pi + \frac{c'_1}{n} + \cdots + \frac{c'_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c'_{n,k}}{n^k} \tag{7.1.10}$$

Ayrıca

$$F(x,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sigma_n} \psi(x,\mu_n)\psi^T(s,\mu_n) - \frac{1}{\rho_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n) \right\}$$

olmak üzere;

$$K(x,s) + F(x,s) + \int_0^x K(x,t)F(t,s)dt = 0 \quad (0 \le s \le x \le \pi)$$

esas integral denklemini sağlayan bir tek $K(x,s)$ matris fonksiyonu vardır. Burada $K(x,s)$ matris fonksiyonu

$$BK(x,x) - K(x,x)B = Q_1(x) - Q_2(x) \tag{7.1.11}$$

koşulunu sağlar.

Teorem 7.1. Eğer $A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right]$ yeterince küçük ise

$$\max_{0 \le x < \pi} |p_1(x) - p_2(x)| \le C'A$$
$$\max_{0 \le x < \pi} |q_1(x) - q_2(x)| \le C''A$$

dır. Burada $C' > 0$ ve $C'' > 0$ sabit sayılardır.

İspat.

$$K(x,s) + F(x,s) + \int_0^x K(x,t)F(t,s)dt = 0 \quad (0 \le s \le x \le \pi)$$

integral denklemi göz önüne alınsın. Burada $F(x,s)$ bilinen fonksiyondur. Bu integral denklemini çözelim.

$$F^{(1)}(x,s) = F(x,s)$$

olmak üzere

$$F^{(n+1)}(s,t;x) = \int_0^x F(s,u)F^{(n)}(u,t;x)du, \quad n \ge 1 \tag{7.1.12}$$

itere fonksiyonları yazılabilir. Burada $K(x,s)$ matris fonksiyonu

$$K(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.13}$$

dir. $F(x,s)$ fonksiyonun da düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
F(x,s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\psi(x,\mu_n)\psi^T(s,\mu_n)-\frac{1}{\rho_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n)\right\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_n}\begin{pmatrix}\psi_1(x,\mu_n)\\ \psi_2(x,\mu_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(s,\mu_n) & \psi_1(s,\mu_n)\end{pmatrix}-\frac{1}{\rho_n}\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda_n)\\ \psi_2(x,\lambda_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(s,\lambda_n) & \psi_1(s,\lambda_n)\end{pmatrix} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\begin{Bmatrix}\dfrac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n} & \dfrac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n} \\ \dfrac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n} & \dfrac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.1.14}$$

olur. Burada $F(x,s)$ fonksiyonunun matris gösterimi

$$F(x,s)=\begin{pmatrix}F_{11}(x,s) & F_{12}(x,s)\\ F_{21}(x,s) & F_{22}(x,s)\end{pmatrix} \tag{7.1.15}$$

şeklindedir. O halde (7.1.14) den

$$F_{11}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.16}$$

$$F_{12}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.17}$$

$$F_{21}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.18}$$

$$F_{22}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.19}$$

yazılır.

Önce $F_{11}(x,s)$ formülü hesaplansın. (7.1.16) nin sağ tarafına $\dfrac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa

$$F_{11}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}+\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)+\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\left(\psi_1(x,\mu)\psi_1(s,\mu)\right)'d\lambda\right]$$

elde edilir. Burada $'=\dfrac{d}{d\lambda}$. $-1\le\cos x\le 1,\ -1\le\sin x\le 1,\ 0\le x<\pi$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)c_1\right|+\left|\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_2\,d\lambda\right|\right]$$

$$\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\rho_n-\sigma_n\right)c_3\right|+\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_4\,d\lambda\right|\right]$$

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le C_1\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$$

elde edilir. $A\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$ olduğundan

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le C_1A \tag{7.1.20}$$

bulunur. (7.1.12) den

$$F_{11}^{(n+1)}(s,t;x)=\int_0^x F_{11}(s,u)F_{11}^{(n)}(u,t;x)\,du,\ \ n\ge 1 \tag{7.1.21}$$

olur buradan

$$F_{11}^{(2)}(s,t;x)=\int_0^x F_{11}(s,u)F_{11}(u,t;x)\,du$$

elde edilir. $0\le x<\pi$ olduğundan

$$\left|F_{11}^{(2)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^2}{\pi}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\left|F_{11}^{(3)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^3}{\pi}$$

$$\vdots\qquad=\qquad\vdots$$

$$\left|F_{11}^{(n)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}$$

elde edilir. (7.1.13) eşitliğinden

$$K_{11}(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F_{11}^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.22}$$

yazılabilir. (7.1.22) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\left|K_{11}(x,x)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{\left(C_1 A\pi\right)^n}{\pi}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(C_1 A\pi\right)^n}{\pi}\right|$$

olur. $C_1 A\pi \leq \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left|K_{11}(x,x)\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(C_1 A\pi\right)^n}{\pi} = C_1 A+\pi(C_1 A)^2+\pi^2(C_1 A)^3+\dots\\ &\leq C_1 A\left(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\dots\right)\\ &\leq 2C_1 A \end{aligned} \tag{7.1.23}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}F_{12}(x,s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}+\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\sigma_n}\right]\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)+\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\left(\psi_1(x,\mu)\psi_2(s,\mu)\right)'d\lambda\right]\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\left|F_{12}(x,s)\right| &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)c_5\right|+\left|\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_6 d\lambda\right|\right]\\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\rho_n-\sigma_n\right)c_7\right|+\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_8 d\lambda\right|\right]\end{aligned}$$

$$\left|F_{12}(x,s)\right| \leq C_2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$$

elde edilir. $A \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$ olduğundan yukarıdaki işlemlerin benzerleri yapılırsa

$$\left|F_{12}(x,s)\right| \leq C_2 A \tag{7.1.24}$$

elde edilir. (7.1.12) den

$$F_{12}^{(n+1)}(s,t;x)=\int_0^x F_{12}(s,u)F_{12}^{(n)}(u,t;x)du,\ \ n\geq 1 \tag{7.1.25}$$

olup buradan

$$F_{12}^{(2)}(s,t;x)=\int_0^x F_{12}(s,u)F_{12}(u,t;x)du$$

elde edilir. $0\leq x<\pi$ olduğundan

$$\left|F_{12}^{(2)}(s,t;x)\right|\leq \left(C_2A\right)^2\pi$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\begin{aligned}F_{12}^{(3)}(s,t;x) &\leq \frac{\left(C_2A\pi\right)^3}{\pi}\\ \vdots \quad &= \quad \vdots\\ F_{12}^{(n)}(s,t;x) &\leq \frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\end{aligned}$$

elde edilir. (7.1.13) eşitliğinden

$$K_{12}(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nF_{12}^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.26}$$

yazılabilir. (7.1.22) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\left|K_{12}(x,x)\right|\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\right|$$

olur. Burada $C_2A\pi\leq\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left|K_{12}(x,x)\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}=C_2A+\pi(C_2A)^2+\pi^2(C_2A)^3+\ldots\\ &\leq C_2A\left(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots\right)\\ &\leq 2C_2A\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\left|K_{21}(x,x)\right|\leq 2C_3A \tag{7.1.27}$$

$$\left|K_{22}(x,x)\right|\leq 2C_4A \tag{7.1.28}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
BK(x,x)-K(x,x)B &= Q_1(x)-Q_2(x)\\
&=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{11}(x,x) & K_{12}(x,x)\\ K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} K_{11}(x,x) & K_{12}(x,x)\\ K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x)\\ K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x)-K_{21}(x,x)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla

$$
\begin{pmatrix} K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x)\\ K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x)-K_{21}(x,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1(x)-p_2(x) & q_1(x)-q_2(x)\\ q_1(x)-q_2(x) & p_2(x)-p_1(x)\end{pmatrix}
$$

elde edilir. Buradan da

$$
q_1(x)-q_2(x)=K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) \tag{7.1.29}
$$

$$
p_1(x)-p_2(x)=K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \tag{7.1.30}
$$

bulunur. (7.1.29) ve (7.1.30) denklemleri ve (7.1.23), (7.1.26), (7.1.27) ve (7.1.28) eşitsizliklerinden

$$
\left|p_1(x)-p_2(x)\right|\le C'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C'A
$$

$$
\left|q_1(x)-q_2(x)\right|\le C''\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C''A
$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler $\left[0,\pi\right)$ aralığında bulunan tüm x değerleri için sağlandığından

$$
\max_{0\le x<\pi}\left|p_1(x)-p_2(x)\right|\le C'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C'A
$$

$$
\max_{0\le x<\pi}\left|q_1(x)-q_2(x)\right|\le C''\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C''A
$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] **Ambartsumyan, V.A.,** 1929, *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Z. Physik, 53, 690-695.

[2] **Borg, G.,** 1945, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta Math., 78, 1-96.

[3] **Levinson, N.,** 1949, *The Inverse Sturm- Liouville Problem,* Mat. Tidsskr. B., pp.25-30.

[4] **Levinson, N.,** 1949, *Criteria fort he Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators*, Casopis. Pest. Mat. Fys., 74, 17-20.

[5] **Delsarte, J.,** 1938, *Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Linearies Aux Derivees Partielles du Second Ordre*, C. R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182.

[6] **Delsarte, J. and Lions, J.,** 1957, *Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe*, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128.

[7] **Levitan, B.M.,** 1964, *Generalized Translation Operators and some of its Applications,* Jerusalem.

[8] **Povzner, A.V.,** 1948, *On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis*, *Mat. Sb.,* 23.

[9] **Tichkonov, A.N.,** 1949, *Uniqueness Theorem for Jeophysics Problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 69, No:4, 797-800.

[10] **Marchenko, V.A.,** 1950, *Some Problems in the Theory of Second–Order Differantial Operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 72, 457-560.

[11] **Krein, M.G.,** 1951, *Solution of the Inverse Sturm-Liouville problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR,76, 21-24.

[12] **Krein, M.G.,** 1954, *On a Method of the Effective Solution of an Inverse BoundaryValue Problem,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 95, 767-770.

[13] **Gelfand, I.M. and Levitan, B.M.,** 1951, *On the Determination of a DifferentialEquations by its Spectral Function,* Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math., 15, 309-360.

[14] **Levitan, B.M. and Gasymov, M.G.,** 1964, *Determination of a Differential Equations by two its Spectra*, Russian Math Surveys, 19, 1-63.

[15] **Cardner, G., Green, J., Kruskal, M. and Miura, M.,** 1967, *A Method for Solvingthe Korteweg-De Vries Equation*, Phys. Rev. Lett., v. 19, 1095-1098.

[16] **Lax, P.,** 1968. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, *Comm. Pure and Appl. Math.*, v .21,467-490.

[17] **Faddeev, L.D.,** 1964, *Properties of the S-Matrix of the One-Dimensional Schrödinger Equation trudy* Mat. Inst. Steklow, 73, 314-336.

[18] **Prats, F. and Toll, J.,** 1959, *Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States*, Phys. Rew., 113, (1), 363-370.

[19] **Moses, H.E.,** 1957, *Calculation of the Scattering Potential for One-DimensionalDirac Equation from Reflection Coefficient and Point Eigenvalues*, Bull. Amer. Phys. Soc., 4, 240.

[20] **Gasymov, M.G. and Levitan, B.M.,** 1966, *The Inverse Problem for the Dirac System*, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.

[21] **Gasymov, M.G. and Dzhabiev T.T.,** 1955, *On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator,* Baku- ELM., *46-71.*

[22] **Sargsjan, I.S.,** 1966a, *A Theorem of the Completeness of the Eigenfunctions of the Generalized Dirac System,* Dokl., Akad. Nauk. Arm. SSR, 42, (2), 77-82.

[23] **Sargsjan, I.S.,** 1966b, *Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional DiracSystem,* Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat., 1, (6), 392-436.

[24] **Quigg, C., Rosner, J.L. and Thacker, H.B.,** 1978, Inverse Scattering Problem for Quarkonium Systems, I and II Phys. Rev., D 18, No: 1, 274-295.

[25] **Grosse, H. and Martin, A.,** 1979, *Theory of the Inverse Problem for ConfiningPotentials*, Nuclear Phys., B 14 B, 413-432.

[26] **Abdukadyrov, E.,** 1967, *Computation of the Regularizad Trace for a Dirac System,* Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh., 22, (4), 17-24.

[27] **Khasanov, A.B.,** 1994, *On Eigenvalues of the Dirac Operator Located on the Continuous Spectrum*, Theory and Math. Phys. V.99, No: 1, 20-26.

[28] **Gasymov, M.G.,** 1967, *The Inserve Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order 2n*, Soviet Physics Dokl. 11, 676-678.

[29] **Veliev, S.G.,** 1972, *Inverse Problem for the Dirac systems a the Whole Axis*, DEP. VINITI, 4917-4972.

[30] **Maksudov, F.G. and Veliev, S.G.,** 1975, *The Inverse Scattering Problem for the Nonself-Adjoint Dirac Operator on the Whole Axis*, Soviet Math. Dokl. V. 16, No: 6, 1629-1633.

[31] **Roos, B.W. and Sangren, W.C.,** 1961, *Spectra for a Pair Singular First OrderDifferential Equations*, Proc. Amer. Math. Soc., V. 12, 468-476.

[32] **Harris, B.J.,** 1983, *Bounds for the Eigenvalues of Separated Dirac Operators*, Proc. of Royal Society of Edinburgh, 95 A, 341-366.

[33] **Evans, W.D. and Harris, B.J.,** 1980, *Bounds for the Point Spectra of Separated Dirac Operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect., A 88, 1-15.

[34] **Otelbayev, M.O.,** 1973, *Distribution of the Eigenvalues of the Dirac Operator*, Mat. Zametki, 14, 843-852.

[35] **Martynov, V.V.,** 1965, *Conditions of Discreteness and Countinuity of the Spectrumin the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Differential Equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165, 996-999.

[34] **Nabiev, I.M.,** 2003, *On reconstruction of Dirac operator on the segment*, Proceedingof IMM of Nas of Azerbaijan, 18, 97-102.

[35] **Kerimov N.B.,** 2002, *A boundary value problem for the Dirac system with a spectralparameter in the boundary conditions*, Differ. Equ. 38 (2), 164-174.

[36] **Agranovich M.S.,** 2001, *Spectral problems for the Dirac system with spectralparameter in local boundary conditions,* Funct. Anal. Appl. 35, 161-175.

[37] **Arutyunyan, T.N.,** 2008, *Transformation operators for the canonical Dirac system*, Differ. Uravn. 44, 1011-1021.

[38] **Amirov R. Kh. Keskin B. and Ozkan A. S.,** 2009, *Direct and inverse problems for the Dirac operator with a spectral parameter linear contained in a boundarycondition*, Ukrainian Math. J. 61, 1365-1379.

[39] **Yang C.F.,** 2011, *Hochstadt-Lieberman theorem for Dirac operator with igenparameter dependent boundary conditions*, Nonlinear Anal., 74, 2475-2484.

[40] **Panakhov, E.S.,** 1981, *Inverse problem for Dirac system in two partially settled spectrum*, VINITY 3304, 1-29.

[41] **Hryniv R.O. and Mykytyuk Ya.V.,** 2003, *Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Inverse problems, 19, 665-684.

[42] **Savchuk A.M. and Shkalikov A.A.,** 1999, *Sturm-Liouville operators with singularpotentials*, Mat. Zametki, 66, 897-912.

[43] **Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R. and Holden H.,** 1988, *Solvable Modelsin Quantum Mechanics*, New York.

[44] **Albeverio S. and Kurasov P.,** 2000, *Singular Perturbations of Differential Operators, Solvable Schrödinger Type Operators*.

[45] **Savchuk A.M.,** 2001, *On eigenvalues and eigenfunctions of Sturm-Liouvilleoperators with singular potentials*, Mat. Zametki, 69, 277-285.

[46] **Hryniv R.O. and Mykytyuk Ya.V.,** 2003, *Transformation operators for Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Math. Phys. Anal. Geom.

[47] **Pöschel J. and Trubowitz E.,** 1987, *Inverse spectral theory*, Pure Appl. Math., 130.

[48] **Hald O.,** 1984, *Discontinuous Inverse Eigenvalue Problem*, Commun. Pure Appl. Math., 37, 539-577.

[49] **Andersson L.,** 1988, *Inverse Eigenvalue problems for a Sturm-Liouville equation in impedance form*, Inverse problems, 4, 929-971.

[50] **Carlson R.,** 1994, *Inverse Sturm-Liouville problems with singularity at zero,* Inverse problems, 10, 851-864.

[51] **Hald O. and McLaughlin J.R.,** 1998, *Recovery of BV Coefficients from nodes*, Inverse problems, 14, 245-273.

[52] **Yurko V.A.,** 2000, *Inverse problems for differential equations with singularities lying inside the interval,* J. Inverse Ill.-Posed Probl., 8, 89-103.

[53] **Amirov, R.Kh. and Yurko V.A., ** 2001**,** *On differential operators with singularity and Discontinuous Conditions Inside the Interval*. Ukr. Math. Jour., 53, 1443-1458.

[54] **Gasymov M.G.,** 1965, *Determination of the Sturm-Liouville equation having singularity from two spectra*, DAN SSSR, 161, 274-276.

[55] **Koyunbakan H.,** 2002, *Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Teorisi*, Doktora Tezi, Elazığ.

[56] **Panakhov E.S. and Yilmazer R.,** 2006, *On inverse problem for Singular Sturm-Liouville operator from two spectra*, Ukrainian Mathematical Journal, 147-154.

[57] **İç Ü.,** 2003, *Kanonik Dirac Operatörü İçin Kısmen Çakışmayan İki Spektruma göre Ters problem*, Doktora Tezi, Elazığ.

[58] **Baş E.,** 2006, *Spektral ve Potansiyel Teorinin Ters problemleri*, Doktora Tezi, Elazığ.

[59] **Kayalar M.,** 2003, *Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Singüler Sturm-Liouville Operatörü için Ters problem*, Doktora Tezi, Erzurum.

[60] **Levitan, B.M.,** 1978, *On the Determination of the Sturm-Liouville operator from One and Two Spectra*, Math. Ussr, Izvestija, vol. 12, no.1, 179-193.

[61] **Mizutani, A.,** 1984, *On the inverse Sturm-Liouville problem,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math., 31, 319-350.

[62] **Kreyszig, E.,** 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications,* New York.

[63] **Bayraktar, M.,** 1994, *Fonksiyonel Analiz, Atatürk üniversitesi yayınları*, Erzurum, s.314.

[64] **Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V.,** 1972, *Elementary of Functional Analysis and Theory of Functions*, Moscow, Russia, p. 327.

[65] **Musayev, B., Alp, M.,** 2000, *Fonksiyonel Analiz,* Balcı yayınları, Kütahya, s. 470.

[66] **Levitan, B.M., and Sargsyan, I.S.,** 1990, *Sturm-Liouville and Dirac Operators*, Netherlands.

[67] **Naimark, M. A.,** 1968, *Linear Differential Operators*, Frederik Ungar Publishing Co. Inc., London.

[68] **İdemen, M.,** 1999, *Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi*, Işık ün., İstanbul.

[69] **Hacısalihoğlu, H.H., Haciyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown L.M., İbikli, E., Brown, S.,** 2000, *Matematik Terimleri Sözlüğü*, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, s.678.

[70] **Olver, F.W.J.,** 1974, *Introduction to asymptotics and special functions*, Akademic pres, New York and London, p. 375.

[71] **Balcı, M.,** 1997, *Analiz II*, Balcı yayınları, Ankara, s.420.

[72] **Adams, R.A.,** 1978, *Sobolev Space,* Academic Press, New York.

[73] **Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S.,** 2010, *Adi Diferansiyel Denklemler*, Dora Yayınları, Bursa.

ÖZGEÇMİŞ

10.09.1979 yılında Erzincan'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzincan' da tamamladı. 1999 yılında Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen–Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2003 yılında mezun oldu. 2005 yılında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2006 yılında Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2008 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansını bitirdi. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına başladı.

Evli ve bir çocuk babasıdır.

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT
(08121204)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12.06.2012

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ
Murat ŞAT
(08121204)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12.06.2012
Tezin Savunulduğu Tarih: 03.07.2012

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (A.Ü.)
Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK (F.Ü.)
Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü.)
Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü.)

TEMMUZ-2012

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında ve yürütülmesinde, engin bilgi birikimini tam olarak bir eğitimci üslubu ve sıfatıyla, yüksek makamın alçak gönüllülüğü içerisinde, aktarmasına ve böyle bir çalışmanın planlanması, düzenli bir şekilde yürütülmesi sürecinde her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum yakın ilgi ve desteklerinden dolayı anneme ve aileme teşekkür eder saygı ve sevgilerimi sunarım.

Murat ŞAT

ELAZIĞ–2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışma yedi bölümden oluşmuştur.

İlk bölümde; regüler Sturm-Liouville ve Dirac operatörlerinin, spektral teorisinin (düz ve ters problemler) tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümde; diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; bir boyutlu stasyoner Dirac operatörünün genel görüntüsü ve kanonik formları, özdeğerler için asimptotik formül, kanonik Dirac operatörü için matris dönüşüm operatörü, normlaştırıcı sayıların iki spektrum türünden ifadesi, normlaştırıcı sayılar için asimptotik formül ve iki spektruma göre ters problem incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; singüler Dirac operatörü, iki spektruma göre ters problem, normlaştırıcı sayılar için asimptotik ifadeler elde edilmiştir.

Beşinci bölümde; yarı eksende Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem incelenmiştir.

Altıncı ve yedinci bölümler çalışmanın orijinal kısmı olup bu bölümlerde sırasıyla singüler Dirac operatörü için dönüşüm operatörünün genel dejenereliği ve kararlılık problemi incelenmiştir

Anahtar Kelimeler: Spektrum, Ters problem, Dirac operatörü, Özdeğer, Özvektör fonksiyon, Genel dejenere, Kararlılık.

SUMMARY

Spectral Theory of the Singular Dirac Operator

This thesis consists of seven chapters.

In the first chapter; the history of spectral theory (well and ill-posed problem) Sturm-Liouville and Dirac operators were given.

In the second chapter; some fundemantal definitions often used in the spectral theory differential operators were given.

In the third chapter; one dimensional stationary and canonic forms of Dirac operator, asymptotic formula for eigenvalues, matrix transformation operator for canonic Dirac operators, the statement of norming constants in terms of two spectrums, asymptotic formula for norming constants and inverse problem according to two spectrums were studied.

In the fourth chapter; singular Dirac operator, inverse problem according to two spectrum and asymptotic statements for norming constants were obtained.

In the fifth chapter; in semi-axis inverse problem according to two spectrums for Dirac operator was examined.

In the sixth and the seventh chapters that constitute the original part of our study, the general degenerate of transformation operator for singular Dirac operator and well-posedness problem were studied, respectively.

Key Words: Spectrum, Inverse problem, Dirac operator, Eigenvalue, Eigenvector function, General degenerate, Well-posedness.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

SİMGELER LİSTESİ

$L_2[a,b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
H	: Hilbert uzayı
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyon
λ_n	: $n.$ özdeğer
φ_n	: $n.$ özfonksiyon
$K(x,y)$	: Çekirdek fonksiyonu
α_n	: $n.$ normlaştırıcı sayı
$\rho(\lambda)$	: Spektral fonksiyon
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir (telin titreşimi, zar titreşimi, vb.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Matematikte l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H da lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX.–XX. asırlarda birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sınırlı ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler; tanım bölgesi sınırsız veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak şekilde) diferansiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Rietsz, J. Von Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapıldığı bilinmektedir.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşım 1946 yılında E. C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre sık sık bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Lineer diferansiyel operatörler teorisinde spektral analizin ters problemleri önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel operatörler için ters problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak (veya yapısını kurmak) mümkündür.
2. Spektral verilere göre operatör birebir olarak mı tanımlanır.
3. Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması (kurulması) yöntemlerinin bulunmasıdır.

Ters problemlerle ilgili ilk sonuç, V. A. Ambartsumyan' a [1] aittir. 1929 yılında V. A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.1. $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_n, \cdots$'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (0 \le x \le \pi) \tag{1.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{1.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, \cdots)$ ise $q(x) = 0$ dır.

V. A. Ambartsumyan'ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir.

Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G. Borg'a aittir [2].

Teorem 1.2. $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (1.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0\,, \tag{1.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\,, \tag{1.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$'ler ise (1.1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad (h \neq h_1) \tag{1.5}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\,,$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir. (h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılardır).

G. Borg'un bu çalışmasında $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilmiştir ve operatör bu dizilerin yardımıyla belirtilmiştir. Yani, bu tip operatörün varlığı önceden belli olduğu kabul edilmiştir. G. Borg, aynı çalışmada bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, V. A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığı N. Levinson [3], [4] tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca N. Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte, J. Lions [5], [6] ve B. M. Levitan [7] tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner [8] kendi çalışmalarında göstermiştir.

Daha sonra ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde teklik problemiyle ilgili en önemli çalışmalar A. N. Tichkonov (Tikhonov) [9] ve V. A. Marchenko [10] tarafından yapılmıştır. Marchenko bu çalışmasında teklik problemlerinin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=1, \quad \varphi'(0,\lambda)=h \tag{1.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda)=\varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n=\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{1.7}$$

sayıları verilen operatörün normlaştırıcı sayıları,

$$\rho(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}\frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V. A. Marchenko yukarıda bahsedilen çalışmada G. Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımı ile vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun, Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. V. A. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M. G. Krein [11], [12] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V. A. Marchenko'nun çalışması yayınlanmadan önce A. N. Tikhonov [9] tarafından V. A. Marchenko'nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A. N. Tichkonov'un çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir.

Teorem 1.3. $\lambda<0$ olduğunda

$$U''+\lambda\rho^2(x)U=0, \qquad x>0,\ U(\infty)=0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x)\geq\rho_0>0$ dır. $R(\lambda)=\dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda<0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I. M. Gelfand ve B. M. Levitan [13], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları verdiler. Ayrıca bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir

yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre bulunması için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen klasik asimptotik formüllerinin sağlanmasıdır:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \ldots + \frac{a_{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \ldots + \frac{b_{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}},$$

burada $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[h + H + \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum\left(\dfrac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek sayı ise $\sum\left(\dfrac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dur.

Fakat bu çalışmalarda ters problemin iki spektruma göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B. M. Levitan ve M. G. Gasimov'un [14] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{1.8}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n.$ çarpanın bulunmadığını gösterir. (1.8) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (1.8) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [14] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1. $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri çaprazlaşır (sıralıdır), yani

   $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$

2. λ_n ve μ_n'ler

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3. $a_0 \neq a_0'$.

Sturm-Liouville operatörünü inceleme sürecinde özellikle XX. asrın ikinci yarısında kullanılan yöntemlerin sayısı sürekli bir şekilde çoğalmıştır. Buna kanıt olarak 1967 yılında bir grup Amerikan fizikçileri ve matematikçileri G. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura [15] ve P. Lax [16] tarafından bulunan bazı kısmi türevli nonlineer evalusyon denklemleri ile Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki bağıntıyı gösterebiliriz. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulamaları olan singüler Sturm-Liouville operatörleri için kuantum teorisinin ters saçılma problemleri halen yoğun bir şekilde fizikçiler ve matematikçiler tarafından araştırılmaktadır. Kuantum saçılma teorisinin ters problemleri ile ilgili tarihçe detaylı bir şekilde L. D. Faddeev'in [17] çalışmasında verilmiştir.

Şimdi ise Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları hatırlatalım. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar doğal olarak fizikçiler F. Prats, J. Toll [18], H. E. Moses [19] ve diğerleri tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0,\infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasimov ve B. M. Levitan [20] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B\frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y, \qquad 0 < x < \infty \tag{1.9}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \tag{1.10}$$

$$(y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0, \ H_1 \neq H) \tag{1.11}$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$, (1.9) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=0,\quad \varphi_2(0,\lambda)=-1$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan $\rho(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ fonksiyonu (1.9), (1.10) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x)\in L^2(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda)=\int_0^n f^T(x)\,\varphi(x,\lambda)dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(\lambda)-F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda)=0$$

olmak üzere

$$\int_0^\infty f^T(x)\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F^2(\lambda)d\rho(\lambda) \tag{1.12}$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Ayrıca, bu çalışmada aşağıdaki önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 1.4.

$$\sigma(\lambda)=\rho(\lambda)-\frac{\lambda}{\pi}$$

ve

$$F(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}(1-\cos\lambda x)\big/\lambda\\ -\sin\lambda x\big/\lambda\end{pmatrix}\left(\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda}-\frac{\sin\lambda y}{\lambda}\right)d\sigma(\lambda)$$

olmak üzere $y\le x$ için $K(x,y)$ matris fonksiyonu

$$F(x,y)+K(x,y)+\int_0^x K(x,s)F(s,y)ds=0 \tag{1.13}$$

integral denklemini sağlar.

Teorem 1.5. $\rho(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

1. $g(x)\in L^2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyonu ve

$$G(\lambda)=\int_0^\infty g^T(x)\,s(x,\lambda)dx,\quad s(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\lambda x\\ -\cos\lambda x\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}, \quad c(x,\lambda) = \begin{pmatrix} (1-\cos\lambda x)/\lambda \\ -\sin\lambda x/\lambda \end{pmatrix}$$

olacak biçimde

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda) c^T(y,\lambda) d\sigma(\lambda)$$

matris fonksiyonu ikinci merteben sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

Bu takdirde her sabit $x \geq 0$ için (1.13) integral denklemi her iki değişkene göre sürekli olan tek $K(x,y)$ çözümüne sahiptir.

Teorem 1.6. $Q(x)$ sürekli matris fonksiyonu olmak üzere monoton artan $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun (1.9), (1.10) sınır değer probleminin spektral fonksiyonu olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerek ve yeterdir:

1. Eğer $g(x) \in L^2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} g^T(x) s(x,\lambda) dx$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda) c^T(y,\lambda) d\{\rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}\}$$

matris fonksiyonu $F_{11}(x,0) = F_{21}(x,0) = 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi M. G. Gasimov ve T. T. Dzhabiev [21] tarafından yapılan çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki önemli teoremler ispatlanmıştır:

Teorem 1.7. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri sırası ile (1.9), (1.10) ve (1.9), (1.11) problemlerinin özdeğerleri ise

$$\alpha_n = \frac{H_1 - H}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \mu_n}, \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots) \tag{1.14}$$

dir. Burada, ' simgesi sonsuz çarpımda $k = n$ teriminin mevcut olmadığını gösterir.

Teorem 1.8. $p(x)$ ve $q(x)$ $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve *k.* mertebeden türevleri $L^2(0,\pi)$ de olmak üzere $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizilerinin sırası ile (1.9), (1.10) ve (1.9), (1.11) problemlerinin spektrumları olması için

1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarının çaprazlaşması, yani

$$\cdots < \lambda_{-n} < \mu_{-n} < \lambda_{-n+1} < \cdots < \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \cdots < \lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1} < \cdots$$

2. $\alpha \neq \beta,\ 0 \leq \beta, \alpha \leq \pi$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{n,k}\right|^2$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\beta_{n,k}\right|^2$ serileri yakınsak olmak üzere

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \cdots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

asimptotik formüllerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

Dirac operatörü için özvektör fonksiyonlarının tamlığı, Cauchy probleminin çözümü, self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülarize izin hesaplanması, periodik ve antiperiodik problemler, açılım teoremleri, özvektör fonksiyonlarının asimptotiği, 2n mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi, kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem sırası ile [22-40] çalışmalarında incelenmiştir.

Diğer taraftan $W_2^{-1}(0,1)$ uzayında singüler reel değerli potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem R.O. Hryniv ve Ya.V. Mykytyuk [41] tarafından yapılan çalışmada incelenmiştir.

Bu çalışmada $q \in W_2^{-1}(0,1)$ reel değerli dağılım fonksiyonu olmak üzere $H := L_2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$l := -\frac{d^2}{dx^2} + q \tag{1.15}$$

diferansiyel ifadesine karşılık gelen T Sturm-Liouville operatörü tanımlanmış ve A. M.

Savchuk ve A. A. Shkalikov [42]' deki çalışmasına göre, regularizasyon yöntemi ile Dirichlet sınır koşularından bahsedilmiştir.

Dağılım anlamında $\sigma' = q$ olacak şekilde reel değerli $\sigma \in H$ alınmış ve

$$D(T_\sigma) = \left\{ u \in W_1^1(0,1) \middle| u' - \sigma u \in W_1^1(0,1), l_\sigma(u) \in H, u(0) = u(1) = 0 \right\} \quad (1.16)$$

tanım kümesinde

$$Tu = T_\sigma u = l_\sigma(u) := -(u' - \sigma u)' - \sigma u' \quad (1.17)$$

ifadesi yazılmıştır.

Burada, dağılım anlamında bütün $u \in D(T_\sigma)$ için $l_\sigma(u) = -u'' + qu$ ifadesi incelendiğinde özellikle T_σ operatörü, regüler potansiyeller için ilkel σ nın özel seçimine bağlı değildir ve (1.15)'e karşılık gelen standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörü ile çakışır. Ayrıca T_σ ilkel $\sigma \in H$ 'ye düzgün resolvent anlamında sürekli olarak bağlıdır ve böylece T_σ, herhangi bir $\sigma' = q \in W_2^{-1}(0,1)$ için (1.15) 'e ait standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörüdür. Ele alınan potansiyeller sınıfı Dirac δ -tipli ve $\frac{1}{x}$ -Coulomb tipli potansiyelleri içerir ve matematiksel fizik ve kuantum mekaniğinde geniş olarak kullanılır [43,44].

[42] den iyi bilinir ki, her reel değerli $\sigma \in H$ için yukarıda tanımlanan T_σ operatörü, diskret basit $(\lambda_k^2),\ k \in \mathbb{N}$ spektrumlu self-adjoint operatörüdür

ve $\lambda_k, \lambda_k = \pi k + \mu_k$ ($\mu_k \in l_2$ olan dizi) şeklinde asimptotiğe sahiptir [42,45,46]. Regüler

q potansiyelleri için yukarıdaki asimptotikler $\mu_k = O(\frac{1}{k})$ olacak şekilde yazılır.

Bu çalışmada, reel ikişerli farklı sayılardan oluşan ve yukarıda ifade edilen asimptotiklere sahip hangi (λ_k^2) dizileri $W_2^{-1}(0,1)$ den olan singüler potansiyelli Sturm-Liouville operatörlerinin spektrumu dur? Sorusunun cevabı araştırılmıştır. Bu soru, ele alınan potansiyeller için ters spektral probleme götürür. Yani; bu durum, karşılık gelen spektral parametreye dayanan q potansiyelinin kurulmasıdır.

Regüler durumda, yukarıda bahsedilen problemin çözümü için sadece (λ_k^2) spektrumunun yetersiz olduğu bilinmektedir. Aynı Dirichlet spektrumlu Sturm-Liouville operatörlerinin ürettiği birçok farklı q potansiyelleri (izospektral) vardır. J. Pöschel ve E.

Trubowitz [47]; verilen (λ_k^2) spektrumlu (reel, basit ve $\lambda_k = \pi k + O(\frac{1}{k})$ asimptotiğine ait) H Hilbert uzayındaki bütün potansiyellerinin kümesinin, analitik olarak $w_n = n$ ağırlıkları ile $l_2(w_n)$ ağırlıklı uzaya difeomorfik olduğunu göstermişlerdir.

q potansiyelini yeniden tek olarak elde etmek için spektrumun yanında bazı ek bilgiler verilmelidir. Bu bilgiler, $(0,1)$ aralığının yarısı üzerindeki potansiyelin bilinmesi veya farklı sınır koşulları olan aynı diferansiyel ifade ile verilen Sturm-Liouville operatörünün spektrumu veya biri bütün aralık için ve diğerleri aralığın eşit iki yarısı için olan üç spektrum olabilir.

Hryniv ve Mykytyuk çalışmasında; I. M. Gelfand, B. M. Levitan ve V. A. Marchenko'ya göre klasik yaklaşım genelleştirilmiş ve $W_2^{-1}(0,1)$den singüler potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem tam olarak çözülmüştür. Şöyle ki, spektral veriler kümesinin açık bir şekli verilmiş ve bu kümenin keyfi bir elamanından q ' nun yeniden nasıl elde edildiği açıklanmıştır [41].

Diğer singülerite tiplerine (örneğin Sturm-Liouville operatörler sınıfı için a süreksizlik noktası, $\frac{1}{x^\gamma}$ ya benzer potansiyeller, vs.), [48]'de O. Hald, [49]' da L. Andersson, [50]'de R. Carlson, [51]'de O. Hald ve J. R. McLaughlin, [52]'de V. A. Yurko, [53]'de V. A. Yurko ve R. Kh. Amirov bakmışlardır. $q(x) = q_1(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}$ potansiyeline sahip (1.1) denklemi için iki spektruma göre ters problem M. G. Gasimov [54] tarafından çözülmüştür. Daha sonraki yıllarda Bessel tipi tekilliğe sahip potansiyller için ters problemler farklı yöntemlerle H. Koyunbakan [55], Hidrojen atomu denklemleri için E. S. Panakhov ve R. Yılmazer [56], Dirac denklemler sistemi için Ü. İç [57] ve tekile sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörü için kuantum saçılma teorisinin ters problemleri E. Baş [58] ve tekile sahip Sturm-Liouville operatörü için ters problem Mehmet Kayalar [59] tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında singüler Dirac operatörünün spektral analizi (düz ve ters problemleri) incelenmiştir. Ayrıca Levitan'ın çalışmasından faydalanılarak [60]; $K(x,s)$ matris fonksiyonunun genel dejenereliği gösterilmiştir. Son bölümde A. Mizutani'nin [61] çalışmasından faydalanılarak özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar için belirli şartlar sağlamak üzere potansiyel farkı ile ilgili teorem ispatlanmıştır.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, sunulan tezde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Metrik Uzay): X bir cümle olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan, $d: X\times X\to\mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. Bu özellikler $\forall x,y,z\in X$ için

M1) $d(x,y)\geq 0$

M2) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

M3) $d(x,y)=d(y,x)$

M4) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

şeklindedir. (X,d) ikilisine ise bir metrik uzay denir. Bir uzay üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir [62].

Örnek 2.1.1. $K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $l_\infty=\left\{x=(x_n)\in K^\infty \,\middle|\, (x_n)\ sınırlı\right\}$ uzayı $x=(x_n)$, $y=(y_n)\in l_\infty$ olmak üzere

$$d_\infty(x,y)=\sup\left\{|x_k-y_k| : k\in\mathbb{N}\right\}$$

metriğine göre bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.2. (Tam Uzay): Bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir. l_∞, c, $C[a,b]$, $\mathbb{R}^n$ gibi uzaylar tam uzaylardır. Fakat $\mathbb{Q}$ uzayı tam değildir [63].

Tanım 2.1.3. (Normlu Uzay): X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $x\in X$ noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine ise bir normlu uzay denir. Bu şartlar $\forall x,y\in X$ için

N1) $\|x\|\geq 0$

N2) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

N3) $\|kx\|=|k|\|x\|$ (k skaler)

N4) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

şeklindedir [63].

Örnek 2.1.2. $L_p[0,1]$ uzayı, $f(x) \in L_p[0,1]$ olmak üzere

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır.

Tanım 2.1.4. (Hilbert Uzayı): Herhangi $x, y, z, \ldots$ elamanlar cümlesini H ile gösterelim.

1) H lineer kompleks (reel) uzaydır.
2) H da bulunan her x, y eleman çiftine bu elemanların iç çarpımı denilen ve $\langle x, y\rangle$ ile gösterilen karmaşık (reel) bir sayı karşılık gelir. Bu iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar.
   a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
   b) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$
   c) $\forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ için $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$
   d) $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $g(x, y) = \|x - y\|$ olacak şekilde norm anlamında yakınsaklığa göre H uzayı tamdır.
4) Keyfi doğal n sayısı için H uzayında lineer bağımsız n tane eleman mevcuttur. Yani H sonsuz boyutludur.

(1), (2) ve (3) aksiyomları sağlanıyorsa H uzayına üniter Hilbert uzayı denir. (1), (2), (3) ve (4) özellikleri sağlanıyor ise H uzayına soyut Hilbert uzayı veya kısaca Hilbert uzayı denir. Başka bir ifade ile tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [64].

Tanım 2.1.5. $a \leq t \leq b$ olmak üzere $(L_2[a,b])$ uzayı,

$$(L_2[a,b]) = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 \, dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$ dir).

Tanım 2.1.6. (Operatör): Tanım ve değer cümlesi bir vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [65].

Örnek 2.1.3 $C[a,b]$ den kendi içine olan ve

$$Tx(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau,\ t\in[a,b]$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir operatördür. Bu operatöre integral operatörü denir.

Tanım 2.1.7. (Lineer Operatör) : E_x ve E_y iki reel lineer topolojik uzay olsun. Değer bölgesi E_y de bulunan ve E_x de tanımlı $y=Ax$ operatörünü göz önüne alalım. A operatörü için

1) $x_1,x_2\in E_x$ olmak üzere $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$

2) λ bir skaler olmak üzere $\forall x\in E_x$ için $A(\lambda x)=\lambda A(x)$

şartları sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir [65].

Örnek 2.1.4. $K(t,s),\ 0\le t,\ s\le 1$ sürekli bir fonksiyon, $x(s)\in C[0,1]$ olmak üzere

$$y(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

eşitliği ile tanımlı $y=Ax$ operatörü bir lineer operatördür.

Tanım 2.1.8. (Sınırlı Operatör): X ve Y birer normlu uzay ve $D(L)\subset X$ olmak üzere $L:D(L)\to Y$ bir operatör olsun.

$$\|Lx\|\le c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c>0$ reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise L operatörünün normu denir [65].

Tanım 2.1.9. (Sürekli Operatör): X ve Y normlu uzaylar $L:X\to Y$ bir operatör ve $x_0\in X$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\|x-x_0\|<\delta$ olduğunda $\|Lx-Lx_0\|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı varsa L operatörü $x_0\in X$ noktasında süreklidir denir [65].

Tanım 2.1.10. (Adjoint Operatör): H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L:H_1\to H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer $L^*:H_1\to H_2$ operatörü

$$\langle Lx,y\rangle=\langle x,L^*y\rangle$$

şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L'nin adjointi denir. Eğer $L^*=L$ ise L'ye self-adjoint operatör denir [65].

Tanım 2.1.11. (Dönüşüm Operatörü): E lineer topolojik uzay, A ve B de $A:E\to E$, $B:E\to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının

kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer tersi olan X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir [66].

Tanım 2.1.12. $L-\lambda I$ operatörünün sınırlı $(L-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir [67].

Tanım 2.1.13. Herhangi λ için $L-\lambda I$ operatörü tersi mevcut olacak şekilde $R_\lambda = (L-\lambda I)^{-1}$ operatörüne

$$Lx - \lambda x = y \text{ veya } (L-\lambda I)x = y$$

denkleminin rezolvent operatörü denir.

Tanım 2.1.14. $D(L)$ tanım bölgesi, L sınırlı lineer bir operatör ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Ly \equiv By' + Q(x)y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x,\lambda) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise, λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise λ sayısına karşılık gelen özvektör fonksiyonu denir [66].

Tanım 2.1.15. $\{\lambda_n\}$ ler L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b \left\{ y_1^2(x,\lambda_n) + y_2^2(x,\lambda_n) \right\} dx$$

sayılarına L operatörünün normlaştırıcı sayıları denir [66].

Tanım 2.1.16. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının herhangi bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 2.1.17. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye tam fonksiyon denir. e^z, $\sin z$, z^2 gibi fonksiyonlar tam fonksiyonlardır.

Tanım 2.1.18. $f(z)$, kompleks düzlemin bir W alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\forall z \in W$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $f(z)$'ye W'de sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.1.19. (Liouville Teoremi): Kompleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

Tanım 2.1.20. $f(z)$ kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon, z_0 ise $f(z)$ 'nin tanımlı olduğu herhangi bir nokta olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir. Eğer $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0, \ldots f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n-katlı sıfırı diye adlandırılır.

Tanım 2.1.21. $f(z)$, z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ama z_0'da diferansiyellenemeyen bir fonksiyon ise z_0'a $f(z)$ 'nin ayrık singüler (aykırı) noktası denir.

Tanım 2.1.22. z_0 bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun.

i) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kaldırılabilir aykırı noktası denir.

ii) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kutup noktası denir (kutup yeri) denir.

iii) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut değilse z_0 noktasına $f(z)$ 'nin esas aykırı noktası denir.

Tanım 2.1.23. (Rouche Teoremi): f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar ve γ, B bölgesinde bulunan f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. Eğer γ üzerinde $|f(z) - g(z)| \leq |f(z)|$ eşitsizliği gerçekleniyorsa, $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ eşitliği geçerlidir. Burada Z_f ve Z_g, $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki sıfırlarının sayısını; P_f ve P_g ise $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki kutuplarının sayısını göstermektedir. Eğer f ve g, B içindeki analitik fonksiyonlarsa $Z_f = Z_g$ [68].

Tanım 2.1.24. $f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(r^{\mu}) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$'nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir [68].

Tanım 2.1.25. $f(z)$ sonlu mertebeli bir tam fonksiyon olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(ar^{\rho})$$

eşitsizliğini sağlayan $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir. (2.1.1) eşitsizliğini sağlayan a sayılarının infimumuna $f(z)$ fonksiyonunun tipi adı verilir ve σ ile gösterilir [68].

Tanım 2.1.26. (Hadamard Teoremi): Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = Cz^{m}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{z_n})$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada m, $f(z)$ 'nin orjindeki sıfırının katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$ 'nin 0'dan farklı tüm sıfırlarının kümesidir.

Teorem 2.1.1. (Cauchy İntegral Teoremi): $f(z)$ tek irtibatlı G bölgesinde birebir analitik fonksiyon, γ ise G de kapsanan keyfi düzeltilebilir kapalı eğri olsun. $f(z)$ 'nin γ egrisi üzerinde integrali sıfıra eşittir:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Teorem 2.1.2. (Rezidü Teoremi): D bölgesinde ($f(z)$' nin sonlu sayıda ayrık tekil $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ noktaları hariç) ve D'nin Γ sınırında analitik $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun k katlı kutup noktası ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)(z-z_0)^k\right],$$

z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right] \quad \text{dir.}$$

Tanım 2.1.27. (Mittag-Leffler Açılımı): Bir $f(z)$ fonksiyonunun sonlu düzlemdeki aykırılıkları mutlak değer büyüklüğüne göre sıralanmış, basit $a_1, a_2, \ldots$ kutup yerleri ve bu noktalardaki rezüdileri sırasıyla $b_1, b_2, \ldots$ olsun. Eğer C_N hiçbir kutup yerinden geçmeyen, üzerinde $|f(z)| < M$ eşitsizliğinin gerçeklendiği R_N yarıçaplı çember ise ve $N \to \infty$ iken $R_N \to \infty$ oluyorsa

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right]$$

yazılır [68].

Tanım 2.1.28. (O ve o sembolleri): [69,70] $x \in X$ olduğunda, verilen x ler için $|f(x)| \le C|g(x)|$ olacak şekilde bir C sabiti varsa $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.1.5. $\dfrac{1}{x^3} = o(\dfrac{1}{x^2})$ dir. Çünkü $x \to \infty$ iken $\left(\dfrac{1}{x^3}\right) / (\dfrac{1}{x^2}) \to 0$ olur.

Örnek 2.1.6. $\cosh x = O(e^x)$ dir. Çünkü $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ olduğundan her iki taraf e^x ile bölünürse

$$\frac{\cosh x}{e^x} = \frac{e^x}{2e^x} + \frac{e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}}$$

olur. Buradan da $x \to \infty$ iken $\dfrac{\cosh x}{e^x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2e^{2x}} \to \dfrac{1}{2}$ olur. Yani $\left|\dfrac{\cosh x}{e^x}\right|$ sınırlıdır. Bu nedenle $\cosh x = O(e^x)$ olur.

Tanım 2.1.29. (Noktasal Yakınsaklık): (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \ge n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada herbir $x \in A$ için bir n_0 bulunacağından n_0 sayısı hem ε a hem de x noktasına bağlıdır [71].

Tanım 2.1.30. (Düzgün Yakınsaklık): (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \ge n_0$ için ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada sözü edilen n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlı olup, x noktasına bağlı değildir. Buna göre düzgün yakınsak her dizi noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersi

her zaman doğru değildir. Eğer A cümlesi sonlu ise düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık birbirine denktir [71].

Tanım 2.1.31. $[a,b]$, $\mathbb{R}$'nin kapalı sınırlı bir aralığı ve $(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$'ler $[a,b]$ de açık aralıklar olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ için

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$$

iken

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(b_i)-f(a_i)\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ varsa $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir denir.

Tanım 2.1.32. (Parseval Eşitliği): $f(x),g(x)\in L_2(a,b)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(u)\,g(u)\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho_n}\left(\int_a^b f(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du\right)\left(\int_a^b g(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du\right)$$

dir.

Tanım 2.1.33. Eğer

$$K(x,s)=\sum_{n=0}^{N}f_n(x)\,g_n(x),\qquad s\le x$$

ise $K(x,s)$ çekirdeği genel dejeneredir denir.

Tanım 2.1.34. $\{\lambda_n\}_0^{\infty}$ ve $\{\lambda_n^{'}\}_0^{\infty}$ spektrumları çakışsın. $\{\tilde{\lambda}_n\}_0^{\infty}$ ve $\{\tilde{\lambda}_n^{'}\}_0^{\infty}$ spektrumları ise sonlu $n=0,1,\cdots,N$ için $\tilde{\lambda}_n\neq\tilde{\lambda}_n^{'}$ ve $n>N$ için $\tilde{\lambda}_n=\tilde{\lambda}_n^{'}$ olsun. Bu takdirde ters problemin

$$K(x,s)+F(x,s)+\int_0^x K(x,t)\,F(t,s)ds=0,\ (0\le x\le\pi)$$

temel integral denklemi genel dejeneredir [60].

Tanım 2.1.35. (a,b) aralığında tanımlı, $(k-1)$. mertebeden türevleri mutlak sürekli olan ve $f,f'',f''',\cdots,f^{(k)}\in L_2(a,b)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W_2^k(a,b)$ ile gösterilir [72].

Tanım 2.1.36. (Dirac-Delta Fonksiyonu):

$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}0, & 0\le t<t_0-a\\ \dfrac{1}{2a}, & t_0-a\le t<t_0+a_0\\ 0, & t\ge t_0+a\end{cases}$$

olmak üzere

$$\delta(t-t_0)=\lim_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)$$

fonksiyonuna Dirac-Delta fonksiyonu denir. Bu fonksiyon

1) $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases}$

2) $\int_0^\infty \delta(t-t_0)\,dt=1$

3) Herhangi sürekli bir $G(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty \delta(t-a)\,G(t)\,dt=G(a)$$

özellikleri ile karakterize edilir [73].

3. DIRAC OPERATÖRÜ

3.1. Bir Boyutlu Dirac Sistemi

$p_{ik}(x),(i,k=1,2),\ [0,\pi]$ aralığında tanımlı ve sürekli reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$L=\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix},\quad p_{12}(x)=p_{21}(x) \tag{3.1.1}$$

bir matris operatörü olsun. $y(x)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \ ve\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(B\frac{d}{dx}+L(x)-\lambda I\right)y=0 \tag{3.1.2}$$

denklemi, iki tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemden oluşan

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx}+p_{11}(x)y_1+p_{12}(x)y_2&=\lambda y_1 \\ -\frac{dy_1}{dx}+p_{21}(x)y_1+p_{22}(x)y_2&=\lambda y_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

denklem sistemine denktir.

Bu durumda $V(x)-$potansiyel fonksiyon, $m-$parçacığın kütlesi olacak biçimde $p_{12}(x)=p_{21}(x)\equiv 0$ ve $p_{11}(x)=V(x)+m,\ p_{22}(x)=V(x)-m$ olurken relativistik kuantum teorisinde (3.1.2) sistemi 1-boyutlu stasyoner Dirac sistemi olarak bilinmektedir.

2-boyutlu uzayın her düzgün ortogonal dönüşümü

$$H(x)=\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile tanımlanır [66]. Ayrıca,

$$BH=HB$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

$y=Hz$ olacak şekilde (3.1.2) denkleminin her iki tarafı soldan H^{-1} ile çarpılırsa,

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz)+H^{-1}LHz=\lambda H^{-1}Hz$$

veya

$$B\frac{dz}{dx}+\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}LH\right)z=\lambda z \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

$$Q = H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH$$

olacak şekilde, Q matrisi hesaplansın. Bu takdirde

$$H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

ve

$$\frac{d}{dx}H = \begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} H^{-1}B\frac{d}{dx}H &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \\ -\cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{-1}LH &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Son iki eşitlikten,

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) + p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & \varphi'(x) + p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. $\varphi(x)$ fonksiyonu $q_{12}(x) = 0$ olmak üzere seçilsin. Bu takdirde

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x) + \frac{1}{2}\{p_{22}(x) - p_{11}(x)\}\sin 2\varphi(x) = 0$$

şeklindedir. Buradan,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\arctan\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x)-p_{22}(x)}$$

elde edilir. $Q(x)$ matrisinin görüntüsü

$$Q(x)=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x)\end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buna göre (3.1.4) denklemi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.1.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **I. kanonik formu** denir.

Şimdi $izQ(x)=q_{11}(x)+q_{22}(x)=0$ olmak üzere bir $\varphi(x)$ fonksiyonu seçilsin, dolayısıyla $2\varphi'(x)+p_{11}(x)+p_{22}(x)=0$

halini alır. Buradan

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\{p_{11}(z)+p_{22}(z)\}dz$$

elde edilir. Buna göre (3.1.4) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.1.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **II. kanonik formu** denir. (3.1.5) ve (3.1.6) denklemlerine (3.1.2) sisteminin kanonik formları da denir. (3.1.2) denklem sistemlerinin spektral teorisinin çeşitli sorunlarını incelerken bu veya diğer kanonik formlardan faydalanmak bize kolaylık sağlar. Örneğin, özdeğerlerin ve özvektör fonksiyonlarının asimptotik davranışı araştırılırken ve keyfi vektör fonksiyonunun (0 ve π noktalarında homojen sınır şartları sağlandığında) (3.1.2) denklem sisteminin özvektör fonksiyonlarına göre açılımı incelenirken, (3.1.5) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar. Sonsuz aralıkta verilmiş (3.1.2) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve ters problem incelenirken de (3.1.6) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar.

(3.1.5) kanonik denklem sistemi için $p(x)$ ve $r(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y_2'+\{p(x)-\lambda\}y_1=0,\quad y_1'-\{r(x)-\lambda\}y_2=0 \tag{3.1.7}$$

$$y_2(0)\cos\alpha+y_1(0)\sin\alpha=0 \tag{3.1.8}$$

$$y_2(\pi)\cos\beta + y_1(\pi)\sin\beta = 0 \qquad (3.1.9)$$

sınır problemi göz önüne alınsın. Herhangi bir λ_1 değeri için bu problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x,\lambda_1)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_1) \\ y_2(x,\lambda_1)\end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda λ_1'e özdeğer, buna karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$'e de özvektör fonksiyon denir.

Lemma 3.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonaldir, yani,

$$\int_0^{\pi} \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

dir.

İspat: $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları (3.1.7) sisteminin çözümleri olduğundan,

$$\begin{aligned}
&y_2'(x,\lambda_1) + \{p(x)-\lambda_1\}y_1(x,\lambda_1) = 0\\
&y_1'(x,\lambda_1) - \{r(x)-\lambda_1\}y_2(x,\lambda_1) = 0\\
&z_2'(x,\lambda_2) + \{p(x)-\lambda_2\}z_1(x,\lambda_2) = 0\\
&z_1'(x,\lambda_2) - \{r(x)-\lambda_2\}z_2(x,\lambda_2) = 0
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemler sırası ile $z_1(x,\lambda_2)$, $-z_2(x,\lambda_2)$, $-y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ ile çarpılıp ve daha sonra sonuçlar toplanırsa,

$$\frac{d}{dx}\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\} = (\lambda_1-\lambda_2)\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}$$

elde edilir. Bu son eşitlik x' e göre 0 dan π ye integrallenirse

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = \{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\}\Big|_0^{\pi}$$

bulunur. Buradan

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

veya

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi} y^T(x,\lambda_1)z(x,\lambda_2)dx = 0$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan, $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonal olurlar. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.2. (3.1.7)-(3.1.9) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: Aksini varsayalım yani, $\lambda_1 = u + iv$ kompleks özdeğer olsun. $p(x)$ ve $r(x)$ reel fonksiyonlar ve α, β sayıları reel olduğu için Dirac operatörünün genel denkleminde eşleniği alınırsa, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısı da bir özdeğerdir. λ_2 ye karşılık gelen $\overline{y}(x,\lambda_1)$ özvektör fonksiyonudur. Bu takdirde Lemma 3.1.1 den dolayı

$$(\lambda - \overline{\lambda})\int_0^{\pi} \{y_1(x,\lambda_1)\overline{y_1}(x,\lambda_1) + y_2(x,\lambda_1)\overline{y_2}(x,\lambda_1)\}dx = 0$$

ve

$$(\lambda - \overline{\lambda})\int_0^{\pi} \left\{|y_1(x,\lambda_1)|^2 + |y_2(x,\lambda_1)|^2\right\} dx = 0$$

olur. $\lambda \neq \overline{\lambda}$ olduğundan, $y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ sıfır olur ki, bu da özvektör fonksiyonlarının sıfır olmaması gerçeği ile çelişir. O halde özdeğerler kompleks olamaz. Bu da ispatı tamamlar.

3.2. Özdeğerler için asimptotik formüller

$$By' + Q(x)y = \lambda y, 0 \le x \le \pi \tag{3.2.1}$$

denklemi göz önüne alınsın. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

$p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli $[0,\pi]$ de toplanabilir (integrallenebilir) fonksiyonlardır. (3.2.1) diferansiyel denklemi

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \tag{3.2.2}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.2.3}$$

sınır koşullarıyla ele alınsın. (3.2.1)-(3.2.3) sınır değer probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}$ normalleştirici sayıları $\{\alpha_n\}$ ile gösterilsin.

Teorem 3.2.1. $p(x)$ ve $q(x)$ k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olacak şekilde verilsin. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları için

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k} \tag{3.2.4}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{\pi} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{3.2.5}$$

asimptotik formülleri söz konusudur. Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{n,k}\right|^2 < \infty$ ve $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_{n,k}\right|^2 < \infty$ serileri yakınsaktır. Bu teoremi $k=1$ ve $p(x)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$ durumunda ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde gösterilebilir.

(3.2.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha, \; \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.2.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ ile gösterilsin.

Bu takdirde (3.2.1)-(3.2.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.2.7}$$

denkleminin kökleri ile çakıştığı aşikardır.

Bilindiği gibi [21]

$$\begin{aligned} &K(x,x)B - BK(x,x) = 0 \\ &K_{11}(x,0)\cos\alpha + K_{12}(x,0)\sin\alpha = 0 \\ &K_{21}(x,0)\cos\alpha + K_{22}(x,0)\sin\alpha = 0 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

koşullarını sağlayan bir $K(x,t)$ matrisi vardır.

Ayrıca $[0,\pi]$ aralığında bulunan her sabit x için $K(x,t)$ nin birinci türevleri $L_2(0,x)$ e aittir ve

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt = 0 \tag{3.2.9}$$

dönüşüm operatörü vardır. Burada $\varphi_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$ fonksiyonu $Q(x) = 0$ durumuna karşılık gelen çözüm fonksiyonudur ve $K(x,t) = \begin{pmatrix} K_{11}(x,t) & K_{12}(x,t) \\ K_{21}(x,t) & K_{22}(x,t) \end{pmatrix}$ şeklindedir. (3.2.9) integral denklemi düzenlenip (3.2.3) koşulunda yerine yazılırsa

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = \sin(\lambda\pi + \alpha) + \int_0^\pi \left\{K_{11}(\pi,t)\sin(\lambda t + \alpha) - K_{12}(\pi,t)\cos(\lambda t + \alpha)\right\}dt = 0 \tag{3.2.10}$$

elde edilir. (3.2.10) eşitliğinde kısmi integrasyon uygulanırsa ve (3.2.8) deki ikinci koşuldan faydalanılırsa;

$$\sin(\lambda\pi+\alpha)-\frac{1}{\lambda}K_{11}(\pi,\pi)\cos(\lambda\pi+\alpha)-\frac{1}{\lambda}K_{12}(\pi,\pi)\sin(\lambda\pi+\alpha)$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi}\left\{\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos(\lambda t+\alpha)+\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin(\lambda t+\alpha)\right\}dt=0 \tag{3.2.11}$$

elde edilir.

λ_n $\left(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$ (3.2.11) denkleminin kökleri olsun. Bu takdirde $n\to\infty$ iken $\lambda_n\to\infty$ dur. Bu sebeple büyük n ler için birinci yaklaşımda

$$\sin(\lambda_n\pi+\alpha)+O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)=0$$

ifadesi bulunur. Buradan

$$\lambda_n\pi+\alpha=n\pi+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

yazılabilir. $n\to\infty$ iken $\varepsilon_n\to0$ olmak üzere

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n \tag{3.2.12}$$

eşitliği verilsin. Bu takdirde (3.2.11) den

$$\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]-\frac{1}{\lambda_n}\left\{\left[K_{11}(\pi,\pi)\cos\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]\right.$$
$$\left.+K_{12}(\pi,\pi)\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]\right\}+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\int_0^{\pi}\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right. \tag{3.2.13}$$
$$\left.+\int_0^{\pi}\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right\}dt=0$$

elde edilir.

$$b_n=\int_0^{\pi}\left\{\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]+\int_0^{\pi}\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right\}dt \tag{3.2.14}$$

olsun.

$\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}$ ve $\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}$ fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ ye ait olduğu için $\sum_{-\infty}^{\infty}b_n^2$ yakınsaktır.

Bu takdirde (3.2.13) den

$$(-1)^n \varepsilon_n \pi - \frac{(-1)^n}{\lambda_n}\left\{K_{11}(\pi,\pi)\cos\left(\varepsilon_n \pi\right) + K_{12}(\pi,\pi)\sin\left(\varepsilon_n \pi\right)\right\} + \frac{b_n}{\lambda_n} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\varepsilon_n = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{b_n}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \qquad (3.2.15)$$

olur. Burada

$$\alpha_1 = \frac{K_1(\pi,\pi)}{\pi}$$

dir. $K_{11}(\pi,\pi)$ fonksiyonunu $p(x)$, $q(x)$ ile ifade ederek hesaplayalım. (3.2.15) formülünden λ_n için aranan formül bulunur.

(3.2.15) ten faydalanarak benzer işlemler yapılırsa

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \frac{c_{1,k}}{n} \text{ ve } \sum_{-\infty}^{\infty} {c_{1,k}}^2 < \infty \qquad (3.2.16)$$

şeklinde normlaştırıcı sayılar için asimptotik formül elde edilir. Burada

$$c_1 = \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\{K_{12}(x,x) - K_{21}(x,x)\}dx$$

$$= \frac{1}{2n}\left\{\int_0^{\pi}\left[\frac{3}{2}p(x) - \frac{1}{9}(q(x) + p(x)ctgx)\right]dx - \frac{p(0) + \sin^2\alpha(1 - ctg\alpha)\left[q(0) + p(0)ctg\alpha\right]}{2(1 + ctg\alpha)}\right\}$$

dir.

3.3. Kanonik Dirac Operatörü İçin Matris Dönüşüm Operatörü

A_1 ve A_2 iki lineer diferansiyel operatör, E_1 ve E_2 ise iki lineer fonksiyonel uzay olsun.

Tanım 3.3.1. $X : E_1 \to E_2$ lineer sürekli operatör olmak üzere

1. $A_1 X = X A_2$ (3.3.1)
2. X^{-1} mevcut ve sürekli

şartlarının sağlanması halinde X' e A_1 ve A_2 operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir.

Lemma 3.3.1. λ özdeğerine karşılık gelen A_2 operatörünün özfonksiyonu $\varphi_\lambda \in E_1$, yani

$$A_2\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$$

olmak üzere aynı λ özdeğerine karşılık gelen $\psi_\lambda = X\varphi_\lambda$, A_1 operatörünün özfonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$A_1\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

şeklindedir.

İspat. $A_1X = XA_2$ olduğundan

$$A_1\psi_\lambda = A_1X\varphi_\lambda = XA_2\varphi_\lambda = X\lambda\varphi_\lambda = \lambda X\varphi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.3.2. Lineer topolojik E uzayında A_1, A_2 ve A_3 lineer operatörleri ve E_1, E_2, E_3 kapalı alt uzayları verilmiş olsun. A_1 ve A_2 operatör çifti için X_{A_1,A_2} dönüşüm operatörü

$$X_{A_1,A_2} : E_1 \to E_2$$

şeklinde, A_2 ve A_3 operatörler çifti için X_{A_2,A_3} dönüşüm operatörü ise

$$X_{A_2,A_3} : E_2 \to E_3$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, A_1 ve A_3 operatör çifti için X_{A_1,A_3} dönüşüm operatörü,

$$X_{A_1,A_3} : E_1 \to E_3$$

şeklinde olmak üzere

$$X_{A_1,A_3} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}$$

formülü ile ifade edilir.

İspat. Dönüşüm operatörünün tanımından dolayı

$$A_1X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2}A_2$$
$$A_2X_{A_2,A_3} = X_{A_2,A_3}A_3$$

şeklinde olup, ikinci denklemden $A_2 = X_{A_2,A_3}A_3X^{-1}_{A_2,A_3}$ elde edilir. Bu eşitlik birinci denklemde yerine yazılırsa

$$A_1X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}A_3X^{-1}_{A_2,A_3}$$

veya

$$A_1X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}A_3$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$p_i(x)$ ve $r_i(x)$, $(i=1,2)$, her sonlu aralıkta $(0 \le x \le b < \infty)$ integrallenebilir reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$A_1=\begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_1(x) \tag{3.3.2}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_2(x) & 0 \\ 0 & r_2(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_2(x) \tag{3.3.3}$$

operatörlerini göz önüne alalım. Keyfi sonlu reel h_1 sayısı için

$$f_2(0)-h_1 f_1(0)=0 \tag{3.3.4}$$

sınır şartını sağlayan, $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_1 olsun. Keyfi sonlu reel h_2 sayısı için

$$g_2(0)-h_2 g_1(0)=0 \tag{3.3.5}$$

sınır şartını sağlayan $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_2 olsun. X operatör matrisi $f(x)\in E_1$ için

$$X\{f(x)\}=R(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)f(s)ds \tag{3.3.6}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $R(x)$ ve $K(x,s)$ iki boyutlu veya 2x2 boyutlu kare matrislerdir.

(3.3.2) ve (3.3.6) den,

$$\begin{aligned} A_1X\{f(x)\} &= BR'(x)f(x)+BR(x)f'(x)+Q_1(x)R(x)f(x)+BK(x,x)f(x) \\ &\quad +\int_0^x \{BK'_x(x,s)+Q_1(x)K(x,s)\}f(s)ds \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

dir. Diğer taraftan (3.3.3) ve (3.3.6) dan dolayı

$$XA_2\{f(x)\}= R(x)Bf'(x)+R(x)Q_2(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)\{Bf'(s)+Q_2(s)f(s)\}ds$$

dir. Son integralde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$XA_2\left\{f(x)\right\} = R(x)Bf'(x) + R(x)Q_2(x)f(x) + K(x,x)Bf(x) - K(x,0)Bf(0)$$
$$+\int_0^x \left\{K(x,s)Q_2(s) - K'_s(x,s)B\right\}f(s)ds \tag{3.3.8}$$

elde edilir. $f(x)$, E_1 uzayında keyfi vektör fonksiyonu olduğu için (3.3.1) eşitliğinden dolayı $f(x)$ ve $f'(x)$ in katsayıları ve (3.3.7), (3.3.8) in integral altındaki ifadelerinin eşit olması gerekir. Bu sebeple $f'(x)$ lerin katsayıları için

$$BR(x) = R(x)B \tag{3.3.9}$$

elde edilir. Eğer

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde alınırsa (3.3.9) eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\delta(x) = \alpha(x),\ \gamma(x) = -\beta(x)$$

bulunur, yani $R(x)$ matrisinin görüntüsü

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix} \tag{3.3.10}$$

olur.

Şimdi $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları hesaplansın. Bunun için (3.3.7) ve (3.3.8) de, $f(x)$ in katsayıları eşitlenirse $R(x)$ matrisinin tanımlanması için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$BR'(x) + Q_1(x)R(x) - R(x)Q_2(x) = K(x,x)B - BK(x,x) \tag{3.3.11}$$

$$K(x,s) = \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

olmak üzere $Q_1(x), Q_2(x), R(x)$ ve B matrislerinin görüntülerinden faydalanarak (3.3.11) denklemi

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x) & p_1(x)\beta(x) \\ -r_1(x)\beta(x) & r_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x) & r_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & r_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s) \\ K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \\ -K_{11}(x,s) & -K_{12}(x,s) \end{pmatrix}$$

veya

$$
\begin{pmatrix} -\beta'(x)+\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x) & \alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x) \\ -\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x) & -\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x) \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} -\left[K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x)\right] & K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \end{pmatrix} \tag{3.3.12}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple (3.3.12) denklemlerinden

$$
\alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x)=-\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x)
$$

$$
\beta'(x)-\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x)=-\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x)
$$

bulunur, yani

$$
\begin{aligned} &2\alpha'(x)+q(x)\beta(x)=0 \\ &-2\beta'(x)+q(x)\alpha(x)=0 \end{aligned} \tag{3.3.13}
$$

olur. Burada

$$
q(x)=p_1(x)-p_2(x)+r_1(x)-r_2(x) \tag{3.3.14}
$$

şeklindedir. (3.3.13) sistemi de, bulunan birinci eşitliği $\alpha(x)$ ile ikinci eşitliği de $\beta(x)$ ile çarpıp, birinciden ikinci çıkarılırsa

$$
2\alpha(x)\alpha'(x)+2\beta(x)\beta'(x)=0
$$

yani

$$
\left(\alpha^2(x)+\beta^2(x)\right)'=0
$$

elde edilir. Buradan

$$
\alpha^2(x)+\beta^2(x)=\alpha^2(0)+\beta^2(0) \tag{3.3.15}
$$

bulunur.

$$
f_1(0)=1, \quad f_2(0)=h_1 \tag{3.3.16}
$$

şartları sağlanmak üzere $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu sürekli, diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde $f(x)$ in (3.3.4) sınır koşulunu sağladığı açıktır ve bu sebeple $f(x)\in E_1$

dir. Yine kabul edilsin ki, $g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu, E_2 uzayının elemanı, dolayısıyla (3.3.5) sınır şartı sağlanacak şekilde

$$X\{f(x)\}=g(x) \tag{3.3.17}$$

olsun. Bu takdirde x=0 için (3.3.17) eşitliğinden ve X matris operatörünün tanımından dolayı, yani (3.3.6) ve (3.3.10) bağıntılarına göre

$$X\{f(0)\}=g(0)=R(0)f(0)$$

veya

$$g_1(0)=\alpha(0)f_1(0)+\beta(0)f_2(0)$$
$$g_2(0)=-\beta(0)f_1(0)+\alpha(0)f_2(0)$$

elde edilir. Bu denklemlerden (3.3.5) sınır şartını ve (3.3.16) şartlarını göz önüne almak üzere son eşitliklerin birincisini h_2 sayısı ile çarpıp, daha sonra ikinciden çıkarıldığında,

$$\beta(0)=\frac{h_1-h_2}{1+h_1h_2}\alpha(0)$$

elde edilir.

$$\alpha(0)=1 \tag{3.3.18}$$

alınırsa,

$$\beta(0)=\frac{h_1-h_2}{1+h_1h_2} \tag{3.3.19}$$

olur. Buna göre,

$$\alpha^2(0)+\beta^2(0)=\frac{(1+h_1^2)(1+h_2^2)}{(1+h_1h_2)^2}=X^2 \tag{3.3.20}$$

olur. Şimdi (3.3.15), (3.3.18)-(3.3.20) eşitliklerinden faydalanarak (3.3.13) sistemini çözelim. Eğer,

$$\alpha(x)=\chi\sin k(x) \text{ ve } \beta(x)=\chi\cos k(x) \tag{3.3.20'}$$

olarak alınırsa,

$$\alpha'(x)=k'(x)\chi\cos k(x) \text{ ve } \beta'(x)=-k'(x)\chi\sin k(x)$$

bulunur. Bu değerler (3.3.13) de yerine yazılıp elde edilen denklemlerden birincisi $\cos k(x)$ ile ikincisi de $\sin k(x)$ ile çarpılıp, elde edilen denklemler toplanırsa

$$k(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz+\arcsin\frac{1}{\chi}$$

eşitliği elde edilir. Bu değerler (3.3.20’) de yerine yazılırsa, $q(x)$ fonksiyonu (3.3.14) formülü, χ sayısı ise (3.3.20) formülü ile tanımlanacak şekilde $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları için

$$\alpha(x)=\chi\sin\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz+\arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{3.3.21}$$

$$\beta(x)=\chi\cos\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz+\arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{3.3.22}$$

ifadeleri bulunur. Şimdi (3.3.7) ve (3.3.8) de verilen integral altındaki ifadeler eşitlenirse, $K(x,s)$ matris çekirdeği için,

$$K_s'(x,s)B+BK_x'(x,s)=K(x,s)Q_2(s)-Q_1(x)K(x,s) \tag{3.3.23}$$

matris denklemi veya

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial K_{11}}{\partial s} & \frac{\partial K_{12}}{\partial s}\\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} & \frac{\partial K_{22}}{\partial s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{12}}{\partial x}\\ \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{22}}{\partial x}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s)\\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_2(s) & 0\\ 0 & r_2(s)\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}p_1(x) & 0\\ 0 & r_1(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s)\\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x}\\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(p_2(s)-p_1(x))K_{11}(x,s) & (r_2(s)-p_1(x))K_{12}(x,s)\\ (p_2(s)-r_1(x))K_{21}(x,s) & (r_2(s)-r_1(x))K_{22}(x,s)\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x}&=(p_2(s)-p_1(x))K_{11}(x,s)\\ \frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x}&=(r_2(s)-p_1(x))K_{12}(x,s)\\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x}&=(p_2(s)-r_1(x))K_{21}(x,s)\\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial x}&=(r_2(s)-r_1(x))K_{22}(x,s)\end{aligned}\right\} \tag{3.3.23’}$$

denklem sistemi elde edilir. Sonuç olarak (3.3.8) ifadesinde $f(0)$’ı içeren terim (3.3.7) de

benzer terim olmadığı için) sıfıra eşit olur. Böylece,

$$K(x,0)Bf(0)=0$$

yani,

$$\begin{pmatrix} -K_{12}(x,0) & K_{11}(x,0) \\ -K_{22}(x,0) & K_{21}(x,0) \end{pmatrix} f(0)=0,$$

bu ise

$$K_{12}(x,0)f_1(0)=K_{11}(x,0)f_2(0)$$
$$K_{22}(x,0)f_1(0)=K_{21}(x,0)f_2(0)$$

denklemler sistemine eşdeğerdir. (3.3.4) sınır koşulundan dolayı

$$K_{12}(x,0)=h_1K_{11}(x,0)\ ,\quad K_{22}(x,0)=h_1K_{21}(x,0) \tag{3.3.24}$$

elde edilir. $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ keyfi diferansiyellenebilir sürekli fonksiyonlar olacak biçimde,

$$K_{11}(x,0)=\varphi(x)\ ,\quad K_{21}(x,0)=\psi(x) \tag{3.3.25}$$

ele alınırsa (3.3.24) ve (3.3.25) şartları, $K(x,s)$ matris çekirdeği için

$$K(x,s)|_{s=0}=\begin{pmatrix} \varphi(x) & h_1\varphi(x) \\ \psi(x) & h_1\psi(x) \end{pmatrix} \tag{3.3.26}$$

şartını tanımlar. Burada (3.3.26) şartı (3.3.23) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir [23].

Benzer şekilde Dirac operatörünün II. Kanonik formu için

$$A_1=\begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx}+q_1(x) \\ -\dfrac{d}{dx}+q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_1(x)$$

$$A_2=\begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx}+q_2(x) \\ -\dfrac{d}{dx}+q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_2(x)$$

olmak üzere (3.3.11) denklemi

$$
\begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x) - q_1(x)\beta(x) & p_1(x)\beta(x) + q_1(x)\alpha(x) \\ q_1(x)\alpha(x) + p_1(x)\beta(x) & q_1(x)\beta(x) + p_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix}
$$

$$
-\begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x) + q_2(x)\beta(x) & q_2(x)\alpha(x) - p_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & -q_2(x)\beta(x) - p_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s) \\ -K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \\ -K_{11}(x,s) & -K_{11}(x,s) \end{pmatrix}
$$

veya

$$
\begin{pmatrix} -\beta'(x) + [p_1(x) - p_2(x)]\alpha(x) - [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x) & \alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x) \\ -\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x) & -\beta'(x) + [p_2(x) - p_1(x)]\alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -[K_{12}(x,x) + K_{21}(x,x)] & K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x) + K_{21}(x,x) \end{pmatrix}
$$

şeklinde yazılır. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple

$$
\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x)
$$
$$
= -\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x)
$$

$$
\beta'(x) - [p_1(x) - p_2(x)]\alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x)
$$
$$
= -\beta'(x) + [p_2(x) - p_1(x)]\alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x)
$$

bulunur, yani

$$
2\alpha'(x) = 0, \quad 2\beta'(x) = 0
$$

dır. Burada c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere

$$
\alpha(x) = c_1, \quad \beta(x) = c_2
$$

bulunur. Ayrıca (3.3.23) denklemi

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(s) & q_2(s) \\ q_2(s) & -p_2(s) \end{pmatrix}
$$

$$
- \begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}
$$

veya

$$
\begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \left(p_2(s) - p_1(x)\right) K_{11}(x,s) + q_2(s) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) & q_2(s) K_{11}(x,s) - \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) \\ -q_1(x) K_{11}(x,s) + p_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{22}(x,s) & -q_1(x) K_{12}(x,s) + q_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s) K_{22}(x,s)\right) \end{pmatrix}
$$

şeklindedir. Bu durumda

$$
\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= \left(p_2(s) - p_1(x)\right) K_{11}(x,s) + q_2(s) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) \\
\frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= q_2(s) K_{11}(x,s) - \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) \\
-\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= -q_1(x) K_{11}(x,s) + p_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{22}(x,s) \\
\frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= -q_1(x) K_{12}(x,s) + q_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{22}(x,s)
\end{aligned}\right\} \quad (3.3.27)
$$

denklemler sistemi elde edilir. Burada (3.3.26) şartı (3.3.27) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir.

3.4. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektrum Türünden İfadesi

$$
By' + Q(x)y = \lambda y, 0 \le x \le \pi \tag{3.4.1}
$$

denklemini ve

$$
y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ y_1(\pi) = 0 \tag{3.4.2}
$$

$$
y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0,\ y_1(\pi) = 0 \tag{3.4.3}
$$

sınır koşullarını göz önüne alalım.

Burada

$$0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le \beta \le \pi\ ,\ \alpha \ne \beta\ ,\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

ve $p(x),\ q(x) \in L_2(0,\pi)$ dir. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ $n \in \overline{(-\infty,\infty)}$, (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \alpha_n,\ \ \mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \beta_n \tag{3.4.5}$$

asimptotik formülleri vardır. Burada

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\beta_n|^2 < \infty,\ \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \tag{3.4.6}$$

serileri yakınsaktır. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (3.4.1) denkleminin sırasıyla

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.4.7}$$

$$\psi_1(0,\lambda) = \sin\beta,\ \ \psi_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{3.4.8}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. λ_n ve μ_n lerin sırasıyla

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.9}$$

$$\psi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.10}$$

kökleri ile çakıştığı aşikardır.

Böylece $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

Teorem 4.1.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde (3.4.1), (3.4.2) probleminin α_n normlaştırıcı sayıları λ_n ve μ_n ler kullanılarak

$$\alpha_n = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{3.4.11}$$

formülü ile tanımlanır.

Burada, ' simgesi sonsuz çarpımda $k = n$ teriminin mevcut olmadığını gösterir.

İspat.

$$f(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{3.4.12}$$

fonksiyonu verilsin ve

$$f_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.13}$$

koşulu sağlansın. Bu takdirde

$$m(\lambda) = -\frac{\psi_1(\pi,\lambda)}{\varphi_1(\pi,\lambda)} \tag{3.4.14}$$

elde ederiz. Burada $m(\lambda)$ fonksiyonunun kutuplarının ve sıfırlarının sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakıştıkları ve meromorf fonksiyon olduğu görülür.

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \left(f(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx &= \int_0^\pi \left\{\left(Bf'(x,\lambda_1)+Qf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)\right. \\
&\quad \left.-\left(Bf'(x,\lambda_2)+Qf(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)\right\}dx \\
&= \int_0^\pi \left(Bf'(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx + \int_0^\pi \left(Qf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx \\
&\quad -\int_0^\pi \left(Bf'(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)dx - \int_0^\pi \left(Qf(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)dx \\
&= \int_0^\pi \left\{\left(Bf'(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)+\left(Bf(x,\lambda_1), f'(x,\lambda_2)\right)dx\right\} \\
&= \left[Bf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right]_0^\pi \\
&= \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(x,\lambda_1)\\ f_2(x,\lambda_1)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}f_1(x,\lambda_2)\\ f_2(x,\lambda_2)\end{pmatrix}\right]_0^\pi \\
&= \left[f_2(x,\lambda_1)f_1(x,\lambda_2) - f_1(x,\lambda_1)f_2(x,\lambda_2)\right]_0^\pi \\
&= f_2(0,\lambda_2)f_1(0,\lambda_1) - f_1(0,\lambda_2)f_2(0,\lambda_1) \\
&= \left[\psi_1(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\varphi_1(0,\lambda_1)\right]\times\left[\psi_2(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\varphi_2(0,\lambda_2)\right] \\
&\quad -\left[\psi_2(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\varphi_2(0,\lambda_1)\right]\times\left[\psi_1(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\varphi_1(0,\lambda_2)\right] \\
&= \left[\sin\beta + m(\lambda_1)\sin\alpha\right]\left[-\cos\beta - m(\lambda_2)\cos\alpha\right] \\
&\quad -\left[-\cos\beta - m(\lambda_1)\cos\alpha\right]\left[\sin\beta + m(\lambda_2)\sin\alpha\right] \\
&= \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\left[\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\right] \\
&= \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \left(f(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx = \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)$$

$\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\overline{\lambda}$ olarak alınırsa, özdeğerler reel olduğundan ve $z-\overline{z}=2\operatorname{Im} z$ eşitliğinden

$$\int_0^\pi \left(f(x,\lambda), f(x,\lambda)\right)dx = \sin(\beta-\alpha)\frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \tag{3.4.15}$$

elde edilir. Bu formülde $\beta > \alpha (\beta < \alpha)$ olduğu durumda bu meromorf fonksiyon üst yarı düzlemi kendine dönüştürür.

Bu takdirde $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çaprazlaşırlar.

$n \neq m$ ise $\lambda_n \neq \lambda_m$ olur ve $m(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan

$$m(\lambda) = A \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{-1} \tag{3.4.16}$$

görüntüsü söz konusudur, burada A reel sayıdır. Yukarıdaki hesaplamaların benzeri yapılırsa

$$(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(f(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \sin(\alpha - \beta)$$

eşitliği kolayca elde edilebilir. (3.4.12) ifadesi yerine yazılırsa, buradan

$$(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(\psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx + m(\lambda)(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \sin(\alpha - \beta)$$

olur. Burada $\lambda \to \lambda_n$ için limit alınırsa

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda_n), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) m(\lambda)} \tag{3.4.17}$$

eşitliği elde edilir.

Bu formülden faydalanılarak α_n lerin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ ler yardımıyla görüntüsü elde edilebilir.

Öncelikle

$$m(\lambda) = A_1 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda}\right) \tag{3.4.18}$$

eşitliği ele alınsın. Burada

$$A_1 = A \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \tag{3.4.19}$$

şeklindedir. (3.4.18) deki

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda}\right) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda}\right) \tag{3.4.20}$$

çarpımını göz önüne alalım. (3.4.20) eşitliğinde logaritma alınıp $\{\lambda_k\}$ ve $\{\mu_k\}$ lar için asimptotik formüllerden yararlanılırsa;

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}+\frac{\mu_{-k}-\lambda_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi}+\beta_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}+\frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi}+\beta_{-k}-\alpha_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda} \tag{3.4.21}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}+\frac{1}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k-\alpha_k}{\lambda_k-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{-k}-\alpha_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda}$$

elde edilir.

(3.4.6) serilerinin yakınsaklığından (3.4.5) asimptotik formüllerinden ve Cauchy-Banjokowski eşitsizliğinden (3.4.21) deki son iki serinin yakınsaklığı elde edilir. (3.4.5) asimptotik formüllerinden

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}+\frac{1}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{-k}-\lambda+\lambda_k-\lambda}{(\lambda_k-\lambda)(\lambda_{-k}-\lambda)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2\frac{\alpha}{\pi}-2\lambda+\alpha_k+\alpha_{-k}}{(\lambda_k-\lambda)(\lambda_{-k}-\lambda)}$$

olur ve bu son seri yakınsaktır.

Bu sonuçlardan (3.4.20) sonsuz çarpımının yakınsaklığı elde edilir. (3.4.19) sonsuz çarpımının yakınsaklığından ve (3.4.20) formülünden (3.4.18) elde edilir. Bu takdirde

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)=\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)A_1\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda}\right)=-A_1\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\mu_n-\lambda)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda}$$

$$=-A_1(\mu_n-\lambda_n)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-\lambda_n}{\lambda_k-\lambda_n}$$

olur. Buradan

$$\alpha_n=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{A_1(\mu_n-\lambda_n)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n}\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

elde edilir. İleride $A_1=-1$ olduğu ispatlanacaktır. Bununla teorem ispatlanır.

3.5. Normlaştırıcı Sayılar İçin Asimptotik Formül

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\pm\infty \tag{3.5.1}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\pm\infty \tag{3.5.2}$$

asimptotik formülleri verilsin.

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{(\mu_n - \lambda_n)}{-A_1 \sin(\beta - \alpha)} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}; \; k \neq n \tag{3.5.3}$$

eşitliği ele alınsın. Bu bölümde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları için bilinen asimptotik formüllerden faydalanarak α_n ler için asimptotik formülü bulmaya çalışalım.

$$\phi(\lambda_n) = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \quad k \neq n \tag{3.5.4}$$

çarpımı göz önüne alınsın.

$$\phi(\lambda_n) = B_1 B_2 B_3 \tag{3.5.5}$$

olsun. Burada

$$B_1 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}{k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.6}$$

$$B_2 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.7}$$

$$B_3 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.8}$$

şeklindedir. Önce B_1 göz önüne alınsın. B_1 eşitliğinde λ_n ler için asimptotik formüllerden faydalanılırsa

$$B_1 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\pi (k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n)} \right), \; k \neq n \tag{3.5.9}$$

eşitliği bulunur. Bu formülde (3.5.1) asimptotik formülü kullanılırsa ve $k - n = p$ alınırsa

$$B_1 = \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\pi \left(p - \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right)} \right) \tag{3.5.10}$$

olur.

$$\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\lambda}{p} \right) = \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda \pi} \tag{3.5.11}$$

olduğu için

$$B_1 = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left\{\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\pi p}\right)\right\}^{-1}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\pi\left(p-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n\right)}\right)$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\alpha_1}{np}\right)\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right) \tag{3.5.12}$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\frac{\sin\frac{\alpha_1}{n}\pi}{\frac{\alpha_1}{n}\pi}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

eşitliği elde edilir.

$$I_1 = \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

sonsuz çarpımı göz önüne alınsın. Bu takdirde yukarıdaki son eşitlikte logaritma alınıp daha sonra $\cot x$ in seri açılımından faydalanılırsa;

$$I_2 = 1-\frac{\pi\alpha_1}{n}\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\pi p+\alpha-\beta}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{\pi\alpha_1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{-2(\alpha-\beta)}{(\pi p)^2-(\alpha-\beta)^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1+\frac{\alpha_1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2\frac{\alpha-\beta}{\pi}}{p^2-(\frac{\alpha-\beta}{\pi})^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1+\frac{\pi\alpha_1}{n}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}-ctg(\alpha-\beta)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.5.13}$$

eşitliği elde edilir.

Bu takdirde

$$B_1 = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left\{1+\frac{\pi\alpha_1}{n}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}-ctg(\alpha-\beta)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \tag{3.5.14}$$

bulunur.

Büyük n ler için B_2 sonsuz çarpımının asimptotik formülünü bulmaya çalışalım. Yukarıda yapılan işlemler tekrarlanırsa ve $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ için asimptotik formüllerden yararlanılırsa

$$B_2=\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda_n}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}=\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}\right)=1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{\lambda_n\left(k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n\right)_n}-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(3.5.15)$$

$$=1-\frac{s_1}{n}+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{\lambda_n\left(k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda\right)_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$s_1=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}$$

şeklindedir.

Benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$B_3=\frac{1}{\prod\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}}=\frac{1}{1-\frac{s_2}{n}+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=1+\frac{s_2}{n}-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(3.5.16)$$

elde edilir. Burada

$$s_2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}$$

şeklindedir. (3.5.15) ve (3.5.16) çarpılıp ve daha sonra n nin kuvvetlerine göre düzenlenirse;

$$B_2B_3=1-\frac{s_1-s_2}{n}$$
$$+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(3.5.17)$$

elde edilir.

(3.5.17) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk seri ele alınsın. (3.5.2) den $\mu_k - k + \frac{\beta}{\pi} = \frac{\beta_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ yazılabilir. Bu eşitlik (3.5.17) de yerine yazılırsa

$$J_2 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \mu_k - k + \frac{\beta}{\pi} \right\} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{\beta_1}{k} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' O(\frac{1}{k^2}) \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n} (\mu_0 + \frac{\beta}{\pi}) \frac{-\frac{\beta}{\pi}}{-\frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} = E_1 + E_2 + O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.5.18}$$

eşitliği bulunur. Burada

$$E_1 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{\beta_1}{k} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} \tag{3.5.19}$$

$$E_2 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' O\left(\frac{1}{k^2}\right) \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} \tag{3.5.20}$$

şeklindedir. $\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''$ sembolü seride $k = n$ ve $k = 0$ terimleri'nin bulunmadığını ifade eder.

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{1}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}$$

olsun. $\lambda_n + \frac{\beta}{\pi} = \lambda$ olsun. Bu takdirde

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{1}{k - \lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{k^2 - \lambda^2} - \frac{1}{n - \lambda} \tag{3.5.21}$$

olur. [66] dan bilindiği gibi

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{k^2 - \lambda^2} = -\pi ctg \pi\lambda + \frac{1}{\lambda}$$

şeklindeydi. Bu takdirde $\lambda_n + \frac{\beta}{\pi} = \lambda$ eşitliğinden

$$F_1 = -\pi ctg\pi\lambda + \frac{1}{\lambda} = -\pi ctg\pi\left(\lambda_n + \frac{\beta}{n}\right) + \frac{1}{\lambda_n + \frac{\beta}{n}}$$

$$= -\pi ctg\pi\left[n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (3.5.22)$$

$$= -\pi ctg\left[\beta - \alpha + \frac{\pi\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \pi ctg(\alpha - \beta) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ve

$$F_2 = \frac{1}{n-\lambda} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha_1}{n} - \frac{\beta}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (3.5.23)$$

olur. (3.5.22) ve (3.5.23) formüllerinden

$$F = \pi ctg(\alpha - \beta) + \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Bu takdirde (3.5.19) dan

$$E_1 = \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha - \beta) - \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (3.5.24)$$

elde edilir.

Şimdi E_2 nin davranışı incelensin.

(3.5.20) formülünün sağ tarafındaki toplamın mertebesi aşağıdaki integraller toplamının mertebesi ile aynı olduğunu gösterilebilir.

$$c\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx + c\int_{1}^{n-1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx + c\int_{n+1}^{\infty} \frac{x}{x^2(x-n)}dx$$

integrallerini hesaplayalım. O halde

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx = \frac{1}{n}\int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+x}\right)dx = \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n+x}\Bigg|_{1}^{\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\int_{1}^{n-1} \frac{dx}{x(n-x)} = \int_{1}^{\frac{n}{2}} \frac{dx}{x(n-x)} + \int_{\frac{n}{2}}^{n-1} \frac{dx}{x(n-x)} = \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n-x}\Bigg|_{1}^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n-x}\Bigg|_{\frac{n}{2}}^{n-1} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x(x-n)} = \frac{1}{n}\ln\frac{x-n}{x}\Bigg|_{n+1}^{\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

bağıntıları bulunur.

Bu takdirde bu integrallerin değerlerinden ve (3.5.20) den

$$E_2 = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.25}$$

elde edilir. (3.5.24) ve (3.5.25) formüllerinden faydalanılarak (3.5.18) den

$$J_2 = \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{\alpha-\beta}\right] O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.26}$$

bulunur. Benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$J_3 = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k - k + \frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.27}$$

eşitliği elde edilir. (3.5.26), (3.5.27) ve (3.5.17) formüllerinden

$$B_2B_3 = 1 - \frac{s_1-s_2}{n} + \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{\alpha-\beta}\right] + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.28}$$

eşitliği bulunur.

$\dfrac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha-\beta)}$ çarpımı göz önüne alınsın. (3.5.1) ve (3.5.2) asimptotik formüllerinden $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ için

$$\frac{\mu_n-\lambda_n}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi} + \frac{\beta_1-\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha-\beta}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{1}{n}\frac{\beta_1-\alpha_1}{\sin(\alpha-\beta)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

yazılır. Son eşitlik, (3.5.14) ve (3.5.28) ifadeleri (3.5.3) te yerine yazılırsa α_n sayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \left\{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s_2-s_1}{\pi} + (\beta_1-\alpha_1)ctg(\alpha-\beta)\right] + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\}\frac{1}{(-A_1)}$$

asimptotik formülü veya

$$\frac{1}{\alpha_n} = \left\{\frac{1}{\pi} + \frac{c}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\}\frac{1}{(-A_1)} \tag{3.5.29}$$

formülü elde edilir.

Burada

$$c = \frac{s}{\pi} + (\beta_1-\alpha_1)ctg(\alpha-\beta) \tag{3.5.30}$$

ve

$$s = s_2 - s_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\lambda_k - \mu_k\} + \frac{\beta-\alpha}{\pi} \tag{3.5.31}$$

şeklindedir. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 3.5.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları sırasıyla (3.5.1) ve (3.5.2) asimptotik formülleri sağlandığında (3.5.3) ile tanımlı α_n normlaştırıcı sayıları (3.5.29) asimptotik formülünü sağlar.

Not 3.5.1. Daha önceki bölümde α_n lerin (3.2.5) bağıntısını sağladığı ispatlanmıştır. Bu teoremde α_n lerin (3.5.29) bağıntısını sağladığı elde edilir. (3.2.5) ve (3.5.29) formülleri karşılaştırılırsa $A=-1$ elde edilir.

3.6. İki Spektruma Göre Regüler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

Bu bölümde iki spektruma göre Kanonik Dirac operatörü için ters problemin çözümü detaylı bir şekilde incelenecektir. Sturm-Liouville için benzer problem [14] çalışmasında tamamıyla çözülmüş ve bu problemin çözümüyle ilgili literatürde geniş kaynaklar verilmiştir.

$$By'+Q(x)y=\lambda y,\ 0\le x\le \pi \tag{3.6.1}$$

ve

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

olsun. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının $[0,\pi]$ de tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve onların k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olsun. (3.6.1) denklemi ve

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \tag{3.6.2}$$

$$y_1(\pi)=0 \tag{3.6.3}$$

sınır koşullarıyla oluşan sınır değer problemi göz önüne alınsın.
Teoremi ispat etmeden önce aşağıdaki Lemma'yı verelim.

Lemma 3.6.1. Eğer $n\ne m$ için $\lambda_n\ne\lambda_m$ ve $n\to\infty$ için

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\alpha_n \tag{3.6.4}$$

asimptotik formülü sağlanıyorsa ve $\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$ ise bu takdirde elemanların görüntüsü (f_1,f_2) ve bu elemanlar $L_2(0,\pi)$ de lineer bağımsız olmak üzere $\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar

sistemi tamdır. Burada $\varphi_0^T(x,\lambda_n)=\left(\sin(\lambda_n x+\alpha),-\cos(\lambda_n x+\alpha)\right)$ şeklindedir.

İspat. $L_2(0,\pi)$ de $\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ sisteminin tam olmadığı kabul edilsin. Bu takdirde

$\int_0^\pi \left(f_1\sin(\lambda_n x+\alpha)-f_2\cos(\lambda_n x+\alpha)\right)dx=0$ olmak üzere $L_2(0,\pi)$ de $\exists f(x)=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}\neq 0$ vardır.

$$F(\lambda)=\int_0^\pi \left(f_1\sin(\lambda x+\alpha)-f_2\cos(\lambda x+\alpha)\right)dx$$

olsun. Eğer $\lambda=\lambda_n$ ise $F(\lambda_n)=0$ dır. $F(\lambda)$ fonksiyonu mertebesi 1, tipi π olan ve

$$\left|F(\lambda)\right|=O(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\pi}) \tag{3.6.5}$$

olacak şekilde bir tam fonksiyondur.

$$G(\lambda)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=-N}^{N}(1-\frac{\lambda}{\lambda_n})$$

fonksiyonu verilsin. Bu sonsuz çarpımın yakınsaklığı $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}(1-\frac{\lambda}{\lambda_n})$ limitinin yakınsak oluşundan elde edilir.

$$G(\lambda)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)}\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)$$

Burada λ_n^0, $Q(x)=0$ olduğu duruma karşılık gelen sınır değer probleminin özdeğerleridir. Bu özdeğerlerin aşağıdaki formülü sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

$$\lambda_n^0=n-\frac{\alpha}{\pi} \tag{3.6.6}$$

$\sin(\lambda\pi+\alpha)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan aşağıdaki formül doğrudur.

$$G_0(\lambda)=\sin(\lambda\pi+\alpha)=\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)$$

Bu takdirde

$$G(\lambda)=A(\lambda)G_0(\lambda) \tag{3.6.7}$$

olur. Burada

$$A(\lambda)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)} \tag{3.6.8}$$

şeklindedir. (3.6.8) formülünden faydalanarak $A(\lambda)$ için asimptotik formülü bulalım. $A(\lambda)$ fonksiyonunda düzenleme yapılırsa;

$$A(\lambda)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)}=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{\lambda_n\lambda_{-n}}}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)}{\lambda_n^0\lambda_{-n}^0}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^0\lambda_{-n}^0}{\lambda_n\lambda_{-n}}\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)}$$

formülü bulunur. (3.6.6) formülünden $\lambda_n^0\lambda_{-n}^0=-n^2+\frac{\alpha^2}{\pi^2}$ elde edilir. Bu takdirde

$$A(\lambda)\sim c\,\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)} \tag{3.6.9}$$

ve (3.6.4) ve (3.6.6) formüllerinden $\lambda_n-\lambda_n^0=O\left(\frac{1}{n}\right)$ elde edilir. Şimdi

$$J(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda_n^0-\lambda}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)$$

sonsuz çarpım göz önüne alınsın. Bu son formülde logaritma alınıp daha sonra seri açılımı yapılırsa;

$$\ln J(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)^2+\cdots \tag{3.6.10}$$

bulunur. Burada; $n\to\infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)^2\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}{\left(n-\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)^2}\to 0$$

elde edilir.

$\lambda=a+ib$ olsun. Buradan $\left|\lambda_n^0-\lambda\right|=\sqrt{(\lambda_n^0-a^2)+b^2}$ olur. O halde (3.6.10) deki ilk toplam

serisi için aşağıdaki eşitsizlik bulunur.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right|\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\alpha_1}{n}+O(\frac{1}{n^2})}{\sqrt{(\lambda_n^0-a^2)+b^2}}\leq\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$$

Son durumdaki has olmayan integral a ve b nin durumlarına göre incelensin.

1. $a=b$ ve $a\to\infty$ iken $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}a}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\frac{1}{4a^2}}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a}\to 0$

2. $a=-b$ ve $a\to\infty$ iken $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+a^2}}\to 0$

olur.

Bu sonuçlar (3.6.10) de yerine yazılırsa,

$$J(\lambda)=1+o(1)$$

elde edilir. Buradan (3.6.9) ve (3.6.7) formüllerinden

$$G(\lambda)=G_0(\lambda)[c+o(1)] \tag{3.6.11}$$

elde edilir.

$$\phi(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)} \tag{3.6.12}$$

fonksiyonu verilsin. Bu takdirde $G(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları da $F(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırı olduğu için $\phi(\lambda)$ tam fonksiyondur yani $\phi(\lambda)$ fonksiyonu bir meromorf fonksiyondur. (3.6.5) ve (3.6.11) asimptotik formüllerinden $F(\lambda)$ fonksiyonunun $\arg\lambda=\pm\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{2}$ ışınları üzerinde sınırlı olduğu elde edilir. Bu sebeble $\phi(\lambda)$ sabit bir sayıdır. Buradan

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}\phi(\lambda)=\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}=\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}O(e^{-i\lambda\pi})\frac{1}{\sin(\lambda\pi+\alpha)}=0$$

olur. Dolayısıyla $\phi(\lambda)=0$, bu sebeple $F(\lambda)=0$ olur. Buradan $f(x)=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}=0$ olur.

Bu ise varsayım ile çelişir. Bu sebeple $L_2(0,\pi)$ de $\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ fonksiyonlar sistemi tamdır.

$\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ sisteminin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$$G_n(\lambda)=\frac{G(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}, \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{3.6.13}$$

fonksiyonu verilsin.

$$\int_0^\pi \left(f_n(x),\varphi_0(x,\lambda_k)\right)dx=G_n(\lambda) \tag{3.6.14}$$

sağlanacak şekilde $f_n(x)=\begin{pmatrix} f_{1,n}(x) \\ f_{2,n}(x)\end{pmatrix}$ fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de olsun.

$$\int_0^\pi \left(f_n(x),\varphi_0(x,\lambda_k)\right)dx=\begin{cases} 0 & k\neq n \\ G_n(\lambda) & k=n\end{cases} \tag{3.6.15}$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. $\{f_n(x)\}$ ve $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ vektör fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de olmak üzere bir ortogonal sistem oluştururlar.

$\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin lineer bağımsız yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_0(x,\lambda_n)=0 \tag{3.6.16}$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım. (3.6.16) eşitliğinin $f_k(x)$ ile skaler çarpılıp ve daha sonra 0 dan π ye kadar x e göre integrallenirse ve sonuç olarak (3.6.15) ifadesi kullanılarak $\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$ yani $\alpha_k=0$ bulunur.

Gerçekten de

$$f_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_0(x,\lambda_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi f_k(x)\alpha_k\varphi_0(x,\lambda_k)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$$

olur. Burada $\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$ yani $\alpha_k=0$ bulunur. Bu ise çelişkidir. Bununla Lemma 3.6.1. ispatlanır.

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.6.1. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının $k.$mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$de olmak üzere $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$matris fonksiyonlu (3.6.1)-(3.6.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve normlaştırıcı sayılarının $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ olabilmesi için, $n \neq m$ için $\lambda_n \neq \lambda_m$, tüm n ler için $\alpha_n > 0$ olacak biçimde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ lerin

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k,n}}{n^k} \tag{3.6.17}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{k,n}}{n^k} \tag{3.6.18}$$

asimptotik formüllerini sağlaması ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \sin(\lambda x+\alpha) \\ -\cos(\lambda x+\alpha) \end{pmatrix}$$

şeklinde olmak üzere

$$F(x,t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)-\frac{1}{\pi}\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)\right\} \tag{3.6.19}$$

fonksiyonunun $k.$ mertebeden türevlerinin $L_2(0,\pi)$ den olması gerek ve yeterdir.

İspat: Önce gereklilik kısmını hesaplayalım. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ (3.6.1)-(3.6.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları olsun. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları için (3.6.17) ve (3.6.18) asimptotik formülleri daha önceden verilmişti ve ayrıca tanımdan dolayı tüm α_n ler 0 dan büyüktür.

$\lambda_n \neq \lambda_m$ olması ise ileride gösterilecektir. Bu sebeple $F(x,t)$ lerin $k.$ mertebeden türevlerinin $L_2(0,\pi)$ de olduğunu ispatlamak gerekir.

$t < x$ olsun. (3.6.17) ve (3.6.18) asimptotik formüllerini kullanarak $\forall x \neq t$ için $L_2(0,\pi)$ deki tanımlı metrik anlamda (3.6.19) serisinin yakınsaklığını ve

$$\int_0^x\int_0^t F(u,v)dudv=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x\int_0^t\varphi_0(u,\lambda_n)\varphi_0^T(v,\lambda_n)dudv-\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^x\int_0^t\varphi_0(u,\lambda_n^0)\varphi_0^T(v,\lambda_n^0)dudv \tag{3.6.20}$$

nin sağlandığını ispat etmek mümkündür. [21] den bilindiği gibi

$$\varphi_0(x,\lambda_n)=\varphi(x,\lambda_n)+\int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda_n)dt \tag{3.6.21}$$

integral denklemi vardır. Her iki tarafın transpozu alınırsa

$$\varphi_0^T(x,\lambda_n)=\varphi^T(x,\lambda_n)+\int_0^x \varphi^T(t,\lambda_n)H^T(x,t)dt,\quad n=(-\infty,\infty) \tag{3.6.22}$$

elde edilir. Bu dönüşüm operatörleri (3.6.20) de yerine yazılırsa ve düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^t F(u,v)dudv =&\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)dudv+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v\varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds\\ &+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x dv\int_0^t du\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)ds\\ &+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x du\int_0^t dv\left\{\int_0^u\int_0^v H(u,s_1)\varphi(s_1,\lambda_n)\varphi^T(s_2,\lambda_n)H^T(x,s_2)ds_1ds_2\right.\\ &-\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^x\int_0^t\left\{\varphi(u,\lambda_n^0)+\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n^0)ds\right\}\left\{\varphi^T(v,\lambda_n^0)+\int_0^v\varphi^T(s,\lambda_n^0)H^T(v,s)ds\right\}dudv\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.6.23}$$

formülü bulunur. (3.6.23) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamları ayrı ayrı hesaplayalım.

$$I_1=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v\varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds \tag{3.6.24}$$

toplamını göz önüne alalım.

$$f_t(u)=\begin{cases}1, & u\le t\\ 0, & u>t\end{cases}$$

fonksiyonu verilsin.

Bu takdirde

$$\begin{aligned}I_1&=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v\varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds\\ &=\int_0^x dv\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t f_1(u)\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^v\varphi^T(s,\lambda_n)f_2^T(v)ds\\ &=\int_0^x dv\int_s^t H^T(v,s)dv=\int_0^x du\int_u^t H^T(s,u)ds\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x dv\int_0^t du\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)ds=\int_0^t du\int_u^v H(s,u)ds \tag{3.6.25}$$

ve

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x du\int_0^t dv\left\{\int_0^u\int_0^v H(u,s_1)\varphi(s_1,\lambda_n)\varphi^T(s_2,\lambda_n)H^T(v,s_2)ds_1ds_2=\int_0^t ds\int_s^x H(u,s)du\int_0^t H^T(v,s)dv\right. \tag{3.6.26}$$

olduğunu ispat etmek mümkündür.

$$I_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x \int_0^t \varphi(u,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)dudv$$

toplamı ve

$$\varphi_t(u) = \begin{cases} 1, & u \le t \\ 0, & u > t \end{cases}, \quad \psi_x(u) = \begin{cases} 1, & u \le x \\ 0, & u > x \end{cases}$$

fonksiyonları verilsin. Bu takdirde

$$I_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x \psi_x(u)\varphi(u,\lambda_n)du \int_0^t \psi_t(u)\varphi^T(v,\lambda_n)dv = \int_0^t \psi_x(u)\psi_t(u)du \tag{3.6.27}$$

ve

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^x \int_0^t \left\{ \left\{ \varphi(u,\lambda_n^0) + \int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n^0)ds \right\} \left\{ \varphi^T(v,\lambda_n^0) + \int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n^0)H^T(v,s)ds \right\} dudv \right\}$$
$$= \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^x \int_0^t \varphi_0(u,\lambda_n)\varphi_0^T(v,\lambda_n^0)dudv = \int_0^t \psi_x(u)\psi_t(u)du$$

(3.6.28)

elde edilir.

(3.6.24)-(3.6.27) ve (3.6.28) fonksiyonları (3.6.23) te yerine yazılırsa

$$\int_0^x \int_0^t F(u,v)dudv = \int_0^x du \int_u^t H^T(s,u)ds + \int_0^t du \int_u^x H(s,u)ds + \int_0^t ds \int_s^x H(u,s)du \int_s^t H(v,s)dv$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$ operatörü uygulanırsa

$$F(x,t) = H(x,t) + H^T(t,x) + \int_0^t H(x,s)H^T(t,s)ds$$

integral denklemi bulunur. $t < x$ için $H(t,x) = 0$ olduğu için buradan;

$$F(x,t) = H(x,t) + \int_0^t H(x,s)H^T(t,s)ds \tag{3.6.29}$$

elde edilir. $H(x,t)$ $L_2(0,\pi)$ de bulunacak şekilde k. mertebeden türevlere sahip olduğundan (3.6.29) eşitliğinden $F(x,t)$ nin de aynı özelliklere sahip olduğu elde edilir. Bununla gereklilik ispatlanır.

Şimdi de yeterlilik kısmını hesaplayalım. (3.6.17) ve (3.6.18) ile tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları verilsin. Ayrıca $n \ne m$ için $\lambda_n \ne \lambda_m$ ve tüm $\alpha_n > 0$ ler için (3.6.19) formülü

ile tanımlı $F(x,t)$ fonksiyonunun k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olsun. $K(x,t)$ çekirdeğinin

$$F(x,t)+K(x,t)+\int_0^t K(x,s)F(s,t)ds=0,\quad 0\le t\le x\le \pi \tag{3.6.30}$$

integral denklemini sağladığı ispatlanmıştır.

$t>x$ için $K(x,t)$ (1.28) tek çözüme sahiptir. Bunun için

$$g(t)+\int_0^x F(s,t)g(s)ds=0,\quad 0\le x\le \pi \tag{3.6.31}$$

homojen denkleminin $L_2(0,\pi)$ de bulunan aşikar çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Aksini varsayalım. (3.6.31) integral denklemi $L_2(0,\pi)$ de aşikar olmayan $g(t)\neq 0$ çözümüne sahip olsun. (3.6.31) denkleminin her iki tarafı $g(t)$ ile skaler çarpılırsa ve t ye göre 0 dan x e kadar integrallenirse

$$\int_0^x \left|g^2(t)\right|dt+\int_0^x\int_0^x \left(F(s,t)g(s)g(t)\right)dsdt=0$$

elde edilir.

Bu son formülde $F(x,t)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\int_0^x g^2(t)dt+\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(s)g(t)dsdt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)g(s)g(t)dsdt=0$$

elde edilir. Burada Parseval eşitliğinden faydalanılırsa

$$\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(s)g(t)dsdt=0$$

yani

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^x\left(\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(t)dt\right)\right)^2=0$$

sonsuz toplamı elde edilir. $\alpha_n>0$ olduğu için buradan

$$\int_0^x \varphi_0^T(t,\lambda_n)g(t)dt=0$$

elde edilir. Bu takdirde $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tamlığından $g(t)=0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla (3.6.31) denklemi çözülebilirdir ve bir tek $K(x,t)$

çözümüne sahiptir. Bu takdirde

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt \tag{3.6.32}$$

integral denklemi,

$$B\varphi'+Q(x)\varphi=\lambda\varphi, \quad Q(x)=K(x,x)B-BK(x,x) \tag{3.6.33}$$

denklemini ve

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{3.6.34}$$

başlangıç koşullarını sağlar.

Şimdi $\varphi(x,\lambda_n)$ $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlarının ortogonalliğini ispatlayalım ve π noktasındaki sınır koşullarını tanımlayalım. $f(x)\in L_2(0,\pi)$ ve $g(x)\in L_2(0,\pi)$ olmak üzere Parseval eşitliğinden

$$\int_0^\pi \big(f(x),g(x)\big)dx=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \big(f(x),\varphi(x,\lambda_n)\big)dx\int_0^\pi \big(g(t),\varphi(t,\lambda_n)\big)dt \tag{3.6.35}$$

yazılır. (3.6.35) eşitliğini kullanarak

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \big(f(t),\varphi(t,\lambda_n)\big)dt\right)\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.36}$$

serisi de düzgün yakınsak olacak biçimde

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.37}$$

$$c_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \big(f(t),\varphi(t,\lambda_n)\big)dt \tag{3.6.38}$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlamak mümkündür. Gerçekten de

$$g(t)=\begin{cases}1, & x\le t\le x+\Delta x\\ 0, & 0\le t<x \;\; ve\, x+\Delta x\le t\le\pi\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu verilsin. Bu takdirde (3.6.37) eşitliğine göre aşağıdaki eşitlik

$$\int_0^{x+\Delta x} f(t)dt=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \big(f(t),\varphi(t,\lambda_n)\big)dt\int_x^{x+\Delta x}\varphi(t,\lambda_n)dt$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafı Δx 'e bölünürse ve $\Delta x\to 0$ için limit alınırsa sonuçta (3.6.37) fonksiyonu elde edilir. Özel olarak Green formülünden $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ için

asimptotik formüllerden $f(x)=\varphi(x,\lambda_k),\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ olacak şekilde (3.6.37) serisinin düzgün ve mutlak yakınsaklığı elde edilir.

Bu sebeple

$$\varphi(x,\lambda_k)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}\left(\varphi(t,\lambda_k),\varphi(t,\lambda_n)\right)dt\right)\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.39}$$

eşitliği bulunur. $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sistemi lineer bağımsız olduğu için (3.6.32) dönüşüm formülünden dolayı $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sistemi de $L_2(0,\pi)$ de lineer bağımsızdır. Bu sebeple (3.6.39) eşitliğinden

$$\int_0^{\pi}\left(\varphi(t,\lambda_k),\varphi(t,\lambda_n)\right)dt=\begin{cases}0, & n\neq k\\ \alpha_n, & n=k\end{cases} \tag{3.6.40}$$

eşitliği elde edilir. (3.6.40) ve Parseval eşitliğinden $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam ortogonal sistem oluşturduğu elde edilir.

π noktasındaki sınır koşulunu tanımlayalım. $\varphi(x,\lambda)$ (3.6.33) denklemini sağladığı için

$$B\varphi'(x,\lambda_n)+Q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n\varphi(x,\lambda_n)$$

$$B\varphi'(x,\lambda_m)+Q(x)\varphi(x,\lambda_m)=\lambda_m\varphi(x,\lambda_m)$$

olur. I. soldan $\varphi^T(x,\lambda_m)$, II. soldan $\varphi^T(x,\lambda_n)$ çarpılıp ve daha sonra I. ifade II. 'den çıkarılırsa

$$\varphi^T(x,\lambda_m)B\varphi'(x,\lambda_n)-\varphi^T(x,\lambda_n)B\varphi'(x,\lambda_m)=(\lambda_n-\lambda_m)\varphi^T(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)$$

elde edilir.

Sonuncu denklem 0 dan π ye kadar integrallenirse, $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ nin ortogonolliği ve (3.6.34) koşulu kullanılırsa;

$$\int_0^{\pi}\left[\left(\varphi_{1m},\varphi_{2m}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1n}'\\ \varphi_{2n}'\end{pmatrix}-\left(\varphi_{1n},\varphi_{2n}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1m}'\\ \varphi_{2m}'\end{pmatrix}\right]dx=\left(\lambda_n-\lambda_m\right)\int_0^{\pi}\left[\left(\varphi_{1n},\varphi_{2n}\right)\begin{pmatrix}\varphi_{1n}\\ \varphi_{2n}\end{pmatrix}\right]dx$$

veya

$$\int_0^{\pi}\left[-\varphi_{1n}'\varphi_{2m}+\varphi_{1m}\varphi_{2n}'+\varphi_{1m}'\varphi_{2n}-\varphi_{1n}\varphi_{2m}'\right]dx=0$$

veya

$$\int_0^{\pi}\left(\varphi_{1m}\varphi_{2n}-\varphi_{1n}\varphi_{2m}\right)'dx=0$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_{1m}(\pi)\varphi_{2n}(\pi)-\varphi_{1n}(\pi)\varphi_{2m}(\pi)=0$$

ve böylece

$$\frac{\varphi_{1m}(\pi)}{\varphi_{2m}(\pi)}=\frac{\varphi_{1n}(\pi)}{\varphi_{2n}(\pi)}=sabit$$

olur.

Diğer taraftan (3.6.32) dönüşüm formülünden

$$\frac{\varphi_1(\pi,\lambda_k)}{\varphi_2(\pi,\lambda_k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_1(\pi,\lambda_n)}{\varphi_2(\pi,\lambda_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\lambda_n\pi+\alpha)+o(1)}{-\cos(\lambda_n\pi+\alpha)+o(1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n\pi-\alpha+\alpha)+o(1)}{-\cos(n\pi-\alpha+\alpha)+o(1)}=0$$

elde edilir. Bu sebeple $\varphi_1(\pi,\lambda_k)=0$ dır. Bununla teorem ispatlanır.

3.6.1. İki Spektruma Göre Ters Problem

Bu bölümde regüler Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem çözümü tam şekilde verilmiştir.

Teorem 3.6.1.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. λ_n ve μ_n dizileri çaprazlaşırlar.
2. $\alpha,\ \alpha_1,\ \beta,\ \beta_1$ sabit sayılar olmak üzere $n\to\pm\infty$ iken λ_n ve μ_n sayıları için

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \qquad (3.6.1.1)$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \qquad (3.6.1.2)$$

asimptotik formülleri sağlanır.

3. $0\le\alpha\le\pi,\ 0\le\beta\le\pi,\ \alpha\ne\beta$ dır.

Bu takdirde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonlu (3.4.2) ve (3.4.3) sınır koşullarını sağlayan aynı bir kanonik Dirac operatörünün iki farklı spektrumlarıdır.

İspat. (3.6.1.1) ve (3.6.1.2) asimptotik formülleriyle tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizileri verilsin.

$$\alpha_n=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\mu_n-\lambda_n}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n} \qquad (3.6.1.3)$$

formülü ele alınsın.

Önceki bölümde verilen sonuçlardan α_n normlaştırıcı sayıları için (3.5.29) asimptotik

formülünün sağlandığı elde edilmişti.

Tüm α_n lerin 0 dan büyük olduğunu gösterelim.

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda} \tag{3.6.1.4}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın.

$m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları ile çakışırlar. Bu takdirde teoremin koşulundan dolayı $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları sıralıdırlar.

$\lambda = it$ ve $t \to \infty$ için

$$m_1(\lambda) \to -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \tag{3.6.1.5}$$

elde edilir ve Weyl fonksiyonunun tanımından

$$\frac{1}{\alpha_n} = \operatorname{Re} s m_1(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n} \tag{3.6.1.6}$$

eşitliği yazılır. Bu sebeple

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda-\lambda_n)} \tag{3.6.1.7}$$

dir. Burada α_k ların hepsi aynı işarete sahiptirler.

(3.5.29) formülünde büyük k lar için $\alpha_k > 0$ olduğu görülüyor. Bu sebeple $\forall \alpha_k > 0$ için sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonuna sahip (3.4.1) denkleminin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre birebir olarak tanımlanması elde edilir. $\{\lambda_n\}$ dizisi

$$By' + Q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le \pi \tag{3.6.1.8}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\quad 0 \le \alpha \le \pi \tag{3.6.1.9}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.6.1.10}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Burada α sayısı (3.6.1.1) ile tanımlanır. $\{\gamma_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre tanımlanmış

$$By' + Q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le \pi \tag{3.6.1.8}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0 \tag{3.6.1.11}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.6.1.12}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Burada β, (3.6.1.2) ile tanımlanır. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$,

(3.6.1.8) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix},\ \psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\beta\\ -\cos\beta\end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarıyla tanımlı çözümleri olsun. Bu takdirde

$$m(\lambda)=\frac{\psi_1(\pi,\lambda)}{\varphi_1(\pi,\lambda)}$$

fonksiyonunun kutupları ve sıfırları sırasıyla $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ sayıları ile çakışır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n}$$

formülü bulunur. Bu takdirde

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda-\lambda_k)} \tag{3.6.1.13}$$

eşitliği elde edilir. (3.6.1.7) ve (3.6.1.13) formüllerinden

$$m_1(\lambda)=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)$$

elde edilir. Bu sebeple $m(\lambda)$ ve $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları çakışırlar. Dolayısıyla $\gamma_n=\mu_n,\ 0,\pm1,\pm2,\cdots$ olur. Bununla teorem ispatlanır.

Teorem 3.6.1.2. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ (3.6.1.8) denkleminin (3.6.1.9) ve (3.6.1.10) sınır koşullarını sağlayan iki farklı spektrumları olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerek ve yeterdir.

$p(x)$ ve $q(x)$ k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ uzayında olacak şekilde

$$Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$$

matris fonksiyonu verilsin.

1. λ_n ve μ_n dizileri çaprazlaşır.
2. Aşağıdaki asimptotik formüller söz konusudur.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

burada $\alpha \neq \beta, 0 \leq \beta, \alpha \leq \pi$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{k,n}\right|^2 < \infty, \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\beta_{k,n}\right|^2 < \infty$ dir.

İspat. λ_n ve μ_n sayıları çaprazlaştığı için bu teoremin gerekliliği Bölüm 3.2 de verildi. Yeterliliğin ispatı ise Teorem 3.6.1.1 in ispatına benzerdir.

4. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ

Bu bölümde sonlu kapalı aralıkta tanımlı ve l pozitif veya negatif tam sayı olmak üzere, π noktasında $\frac{l}{\pi - x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tekile sahip Dirac operatörü için ters problem incelenecektir. Özel olarak farklı sınır koşullarına karşılık gelen $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ sayılar dizisine göre potansiyel matris fonksiyonunun bulunması ispatlanacaktır. Benzer problemler [21], [54] ve diğer çalışmalarda ele alınmıştır.

4.1. Singuler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y, 0 \le x < \pi \tag{4.1.1}$$

denklemi ile birlikte

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ 0 \le \alpha < \pi \tag{4.1.2}$$

$$y_1^{\,2}(\pi) + y_2^{\,2}(\pi) < \infty \tag{4.1.3}$$

sınır şartları göz önüne alınsın. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{l}{\pi - x} \\ \dfrac{l}{\pi - x} & 0 \end{pmatrix},\ y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $Q(x)$, $\left[0,\pi\right]$ de sürekli bir matris fonksiyonu, λ ise kompleks parametredir. Basitlik için biz l yi tek negatif tam sayı olarak ele alacağız.

(4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerlerini $\left\{\lambda_n\right\}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$ ve buna karşılık gelen özfonksiyonları ise $\varphi_n(x)$ olsun.

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \left(\varphi_n(x), \varphi_n(x)\right) dx = \int_0^{\pi} \left\{\varphi_1^2(x,\lambda_n) + \varphi_2^2(x,\lambda_n)\right\} dx \tag{4.1.4}$$

sayılarına (4.1.1)-(4.1.3) probleminin normlaştırıcı sayıları denir. $\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.1.5}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun.

Teorem 4.1.1. $Q_1(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}$ için $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tekilsiz problemin sırasıyla özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları ise $\cdots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \cdots$ ve $\cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \cdots$ (4.1.1)-(4.1.3) probleminin $l = -(2k+1)$ için özdeğerleri ve normlaştırıcı sayılarıdır ve tersine $\cdots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \cdots$ ve $\cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \cdots$ (4.1.1)-(4.1.3) probleminin $l = -(2k+1)$ için özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları ise

$$By' + Q_1(x)y = \lambda y, 0 \le x \le \pi \tag{4.1.6}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \tag{4.1.7}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{4.1.8}$$

probleminin sırasıyla özdegerleri ve normlaştırıcı sayılarıdır.

İspat. Önce gereklilik kısmı yapılsın. $\psi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(x,\lambda) \\ \psi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.6) denkleminin

$$\psi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \psi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.1.9}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\psi(x,\lambda)$ nın (4.1.7) sınır koşullarını sağladığı açıktır. Bu sebeple $\psi(x,\lambda_n)$ (4.1.6)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonlarıdır ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \big(\psi(t,\lambda_n), \psi(t,\lambda_n)\big) dt = \int_0^{\pi} \left\{\psi_1^2(x,\lambda_n) + \psi_2^2(x,\lambda_n)\right\} dx,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{4.1.10}$$

şeklindedir.

Bu teoremi tümevarım metodu ile ispatlayalım. $k = 0$ olsun. Bu takdirde $\cdots, \lambda_{-1}, \lambda_1, \cdots$ ve $\cdots, \alpha_{-1}, \alpha_1, \cdots$ sırasıyla (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları olduğu ispatlayalım. (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özfonksiyonları ile (4.1.6)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonları arasında

$$\varphi(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + \frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x \big(\psi(y,\lambda_0), \psi(y,\lambda)\big) dy}{\alpha_0 - \int_0^x \big(\psi(t,\lambda_0), \psi(t,\lambda_0)\big) dt} \tag{4.1.11}$$

bağıntısı vardır. Buna Crum dönüşümü denir.

(4.1.1)-(4.1.3) ve (4.1.6)-(4.1.8) problemlerinin çözüm fonksiyonlarında $x = 0$ yazılırsa

$$\varphi(0,\lambda)=\psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix}$$

elde edilir.

$\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu, (4.1.6) denkleminin çözümü olduğundan

$$K(x,y)=\frac{\psi(x,\lambda_0)\psi^T(y,\lambda_0)}{\alpha_0-\int\limits_0^x\big(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\big)\,dt} \qquad (4.1.12)$$

fonksiyonu

$$BK_x^{'}(x,y)+Q_1(x)K(x,y)+\big[K(x,x)B-BK(x,x)\big]K(x,y)=-K_y^{'}(x,y)B+K(x,y)Q_1(y) \qquad (4.1.13)$$

denkleminin çözümü olduğu aşikardır.

Bu takdirde (4.1.11) ile tanımlı $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$B\varphi'(x,y)+Q_1(x)\varphi(x,\lambda)+\big[K(x,x)B-BK(x,x)\big]\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda) \qquad (4.1.14)$$

denklemini sağlar.

$$\Delta Q_1(x)=K(x,x)B-BK(x,x)$$

fonksiyonu göz önüne alalım.

$x\to\pi$ iken $\Delta Q_1(x)$ fonksiyonunun davranışını bulalım. $\Delta Q_1(x)$ eşitliğinde düzenleme yapılırsa

$$\Delta Q_1(x)=K(x,x)B-BK(x,x)=\frac{1}{\alpha_0-\int\limits_0^x\big(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\big)\,dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. $x\to\pi$ iken $\psi_1(\pi)=0,\ \lim\limits_{x\to\pi}\psi_2(x)=c\neq 0$ olduğu bilinmektedir. ($c=0$ için $\psi(t,\lambda_0)=0$ olduğundan bu mümkün değildir).

Bu sebeple $x\to\pi$ iken limit alınırsa

$$\Delta Q_1(x)\to\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}0 & -c^2\\ -c^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix},\ l=-1$$

sonucu bulunur. Gerçekten de

$$\Delta Q_1(x)=\frac{1}{\alpha_0-\int\limits_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\int\limits_0^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt+\int\limits_x^0\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\int\limits_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. Son eşitlikte $x\to\pi$ için limit alınırsa

$$\Delta Q_1(x)\to\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}0 & -c^2\\ -c^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix},\ l=-1$$

olduğu bulunur.

$$Q(x)=Q_1(x)+\Delta Q_1(x)-\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix}\tag{4.1.15}$$

fonksiyonun $[0,\pi]$de düzgünlük mertebesi $Q_1(x)$ fonksiyonunun düzgünlük mertebesi ile aynıdır. Böylece $l=-1$ için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (4.1.1) denklemini sağladığı ispatlanmıştır. Burada $Q(x)$ fonksiyonu (4.1.15) ile tanımlıdır.

Şimdi $\varphi_1^2(\pi,\lambda_n)+\varphi_2^2(\pi,\lambda_n)<\infty$ olduğunu ve $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$de tam ortogonal sistem oluşturduğu ispatlayalım. $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin ortogonal sistem olduğu bellidir. Bu sebeple farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonalliğinden

$$\int\limits_0^\pi\left(\psi(x,\lambda_0),\psi(x,\lambda_n)\right)dx=0,\ n\neq0$$

bulunur. Bu takdirde (4.1.11) eşitliğinde $x\to\pi$ iken limit alınırsa özfonksiyonların ortogonalligi ve L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{x\to\pi}\varphi(x,\lambda_n)=\psi(\pi,\lambda_n)+\lim_{x\to\pi}\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{\int_0^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}$$

$$=\psi(\pi,\lambda_n)+\lim_{x\to\pi}\frac{\psi(x,\lambda_0)\left\{\int_0^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy-\int_x^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy\right\}}{\int_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}$$

$$=\psi(\pi,\lambda_n)-\psi(\pi,\lambda_0)\lim_{x\to\pi}\frac{\int_x^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{\int_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}=0$$

eşitliği elde edilir. Yani $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu yakınsaktır. Bu sebeple $\varphi_1^2(\pi,\lambda_n)+\varphi_2^2(\pi,\lambda_n)<\infty$ olduğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$ fonksiyonları (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özfonksiyonları olur. Bu sebeple $[0,\pi]$ üzerinde ikişerli ortogonaldirler.

Şimdi $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğunu ve

$$\alpha_n=\int_0^\pi\left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dt$$

olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned}A(x)&=\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_0^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi-\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_0^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi+\int_x^0\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_x^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\end{aligned}$$

fonksiyonu verilsin. Dirac-Delta fonksiyonunun tanımından

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan, $t > x$ için

$$\varphi(x,\lambda_n) = \psi(x,\lambda_n) + \frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{A(x)}$$

eşitliği ve bu eşitliğin transpozu alınırsa

$$\varphi^T(t,\lambda_n) = \psi^T(t,\lambda_n) + \frac{\psi^T(t,\lambda_0)\int_0^t \left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{A(t)}$$

elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa çarparsak ve daha sonra her iki taraftan sonsuz toplam alırsak;

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\frac{\psi^T(t,\lambda_0)\int_0^t \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(t)} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_0)\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(x)}\varphi^T(t,\lambda_n) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\frac{\psi(x,\lambda_0)\psi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi\int_0^t \left(\psi(s,\lambda_0),\psi(s,\lambda_n)\right)ds \\
&= \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\psi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}\int_0^t \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n),\psi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\psi(\xi,\lambda_0)d\xi \\
&+ \frac{\psi(x,\lambda_0)}{A(x)}\int_0^x \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(t,\lambda_n),\psi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\psi(\xi,\lambda_0)d\xi \\
&+ \frac{\psi(x,\lambda_0)\psi(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x \left\{\left[\frac{1}{\alpha_n}\psi(\xi,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n)\right]\psi(\xi,\lambda_0)\right\}\psi(s,\lambda_0)d\xi ds \\
&= \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha_0\psi(x,\lambda_0)}{A(x)}\frac{\psi(t,\lambda_0)}{A(\xi)} \\
&= \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha_0}\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)
\end{aligned}$$

buradan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1.16}$$

elde edilir. Burada ' sembolü $n=0$ teriminin bulunmadığını ifade eder.

(4.1.16) eşitliği $\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpılıp 0 dan π ye kadar x'e göre integrallenirse ve Dirac-Delta fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n)\right]\varphi(x,\lambda_n)dx=\int_0^{\pi}\delta(x-t)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\varphi(x,\lambda_n)dx$$

yani

$$\frac{1}{\alpha_n}\varphi(t,\lambda_n)\int_0^{\pi}\left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx=\varphi(t,\lambda_n)$$

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx \qquad (4.1.17)$$

bağıntısı bulunur. (4.1.16) ve (4.1.17) formülleri $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ $n=\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ de tam ortogonal sistem oluşturduğunu gösterir.

Böylece $l=-1$ durumunda teoremin gerekliliği ispatlandı. Tümevarım uygulayarak teoremi genel durumda da ispatlamak mümkündür.

Şimdi yeterlilik kısmını ispatlayalım. $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \qquad (4.1.18)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1.2) sınır koşullarını sağladığı açıktır. $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots,$ $l=-(2k+1)$ için (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda_n)$, $n\in\pm\overline{(k+1,\infty)}$ bu problemin özfonksiyonları olur ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx,\ n\in\pm\overline{(k+1,\infty)} \qquad (4.1.19)$$

şeklindedir. Teoremde gösterilen şekilde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayı dizilerini oluşturalım. Bunların (4.1.6)-(4.1.8) sınır değer probleminin spektral karakteristikleri olduğunu ispatlayalım. Teoremi $k=0$ durumu için ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde ispatlanabilir.

$$\psi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\int_0^{x}\left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda)\right)dt}{\alpha_0+\int_0^{x}\left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\right)dt} \qquad (4.1.20)$$

eşitliği verilsin. Burada $\lambda_0, \lambda_n, n \neq 0$ lerden farklıdır ve α_0 sabit pozitif sayıdır. Burada $x=0$ için $\psi(0,\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(0,\lambda) \\ \psi_2(0,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$ olur.

$\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin çözümü olduğundan

$$K(x,y) = -\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(y,\lambda_0)}{\alpha_0 + \int\limits_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0), \varphi(t,\lambda_0)\right) dt} \tag{4.1.21}$$

matris fonksiyonunun

$$\begin{aligned} &BK_x^{'}(x,y) + Q(x)K(x,y) + \left[K(x,x)B - BK(x,x)\right]K(x,y) + LK(x,y) \\ &= -K_y^{'}(x,y)B + K(x,y)Q(y) + K(x,y)L \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

denkleminin çözümü olduğu aşikardır. Bu takdirde (4.1.20) ile tanımlı $\psi\left(x,\lambda\right)$ fonksiyonu

$$B\psi^{'}(x,y) + Q_1(x)\psi(x,\lambda) + \left[K(x,x)B - BK(x,x)\right]\psi(x,\lambda) + L\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda) \tag{4.1.23}$$

denklemini sağlar.

Şimdi

$$\Delta Q(x) = K(x,x)B - BK(x,x)$$

fonksiyonu detaylı bir şekilde inceleyelim.

$x \to \pi$ iken $\Delta Q(x)$ fonksiyonunun davranışını bulalım. $\Delta Q(x)$ fonksiyonunda matris fonksiyonları yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \Delta Q(x) &= K(x,x)B - BK(x,x) \\ &= \frac{1}{\alpha_0 + \int\limits_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0), \varphi(t,\lambda_0)\right) dt} \begin{pmatrix} -2\varphi_1(x,\lambda_0)\varphi_2(x,\lambda_0) & \varphi_1^2(x,\lambda_0) - \varphi_2^2(x,\lambda_0) \\ \varphi_1^2(x,\lambda_0) - \varphi_2^2(x,\lambda_0) & 2\varphi_1(x,\lambda_0)\varphi_2(x,\lambda_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu sebeple $x \to \pi$ iken

$$\varphi(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{\pi - x} \end{pmatrix}$$

bilinmektedir [21]. Bu sebeple $x \to \pi$ iken limit alınırsa,

$$\Delta Q(x) = -\frac{1}{\alpha_0 + \int\limits_0^x \frac{c_2^2}{(\pi - t)^2} dt + c_1 x} \begin{pmatrix} -2c_1 \frac{c_2}{(\pi - x)} & c_1^2 - \frac{c_2^2}{(\pi - x)^2} \\ c_1^2 - \frac{c_2^2}{(\pi - x)^2} & 2c_1 \frac{c_2}{(\pi - x)} \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} -2c & c^2(\pi - x) - \frac{1}{(\pi - x)} \\ c^2(\pi - x) - \frac{1}{(\pi - x)} & 2c \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{(\pi - x)} \\ -\frac{1}{(\pi - x)} & 0 \end{pmatrix} + \Delta Q_2 = -L + \Delta Q_2$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$Q_1(x) = Q(x) + \Delta Q(x) + L = Q(x) + \Delta Q_2(x)$$

fonksiyonun $[0, \pi]$de $Q(x)$ ile aynı düzgünlük derecesine sahip olduğu bulunur.

Şimdi de $n = (-\infty, \infty)$, için $\psi_1(\pi, \lambda_n) = 0$ ve $\{\psi(x, \lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0, \pi)$de tam ortogonal sistem oluşturduğunu ispatlayalım. Önce $\psi_1(\pi, \lambda_0) = 0$ olduğunu ispatlayalım. (4.1.20) eşitliğinde $\lambda = \lambda_0$ yazılırsa

$$\psi(x, \lambda_0) = \varphi(x, \lambda_0) - \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \int\limits_0^x \left(\varphi(t, \lambda_0), \varphi(t, \lambda_0)\right) dt}.$$

formüllü bulunur. Bu sebeple $x \to \pi$ iken

$$\varphi(x, \lambda) \to \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{\pi - x} \end{pmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$\lim_{x \to \pi} \psi(x, \lambda_0) = \lim_{x \to \pi} \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{(\pi - x)} \end{pmatrix} \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + c_1^2 x + \frac{c_2^2}{(\pi - x)} - \frac{c_2^2}{\pi}}$$

$$= \lim_{x \to \pi} \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{(\pi - x)} \end{pmatrix} \frac{\alpha_0 \pi (\pi - x)}{(\pi - x)\left(\alpha_0 \pi + c_1^2 \pi x - c_2^2\right) + c_2^2 \pi}$$

$$= \lim_{x \to \pi} \begin{pmatrix} c_1 \alpha_0 \pi (\pi - x) \\ c_2 \alpha_0 \pi \end{pmatrix} \frac{1}{(\pi - x)\left(\alpha_0 \pi + c_1^2 \pi x - c_2^2\right) + c_2^2 \pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \alpha_0 \pi \end{pmatrix} \frac{1}{c_2^2 \pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0 c_2^{-1} \end{pmatrix}$$

olur. $\lambda = \lambda_n$ olsun.

$$\beta_n = \int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda_n) \right) dx$$

fonksiyonu verilsin. Buradan;

$$\lim_{x\to\pi} \psi(x,\lambda_n) = -\lim_{x\to\pi} \frac{\begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{(\pi - x)} \end{pmatrix}}{\dfrac{c_2^2}{(\pi - x)}} \beta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_n c_2^{-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\psi_1(\pi,\lambda_0) = 0$ olur. Bu sebeple $\{\psi(x,\lambda_n)\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ fonksiyonları (4.1.5)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonları olur. Bu sebeple $[0,\pi]$ üzerinde ikişerli ortogonaldirler.

Şimdi $L_2(0,\pi)$ de $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğunu ispatlayalım. Önceden $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğu gösterilmişti.

$$A(x) = \alpha_0 + \int_0^{t} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_0) \right) d\xi$$

fonksiyonu verilsin.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} {}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \varphi^T(t,\lambda_n) = \delta(x - t) E$$

burada $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t > x$ için yukarıdaki yapılan benzer işlemler tekrarlanırsa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} {}' \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n) \psi^T(t,\lambda_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \varphi^T(t,\lambda_n)$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \frac{\varphi^T(t,\lambda_0) \int_0^{t} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_n) \right) d\xi}{A(t)}$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi^T(t,\lambda_n) \frac{\varphi(x,\lambda_0) \int_0^{x} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_n) \right) d\xi}{A(x)}$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)} \int_0^x \left(\varphi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right) d\xi \int_0^t \left(\varphi(s,\lambda_0),\varphi(s,\lambda_n)\right) ds$$

$$=\delta(x-t)E - \frac{\varphi(t,\lambda_0)}{A(t)} \int_0^t \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n),\varphi^T(\xi,\lambda_n) \right\} \varphi(\xi,\lambda_0) d\xi$$

$$-\frac{\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)} \int_0^x \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(t,\lambda_n),\varphi^T(\xi,\lambda_n) \right\} \varphi(\xi,\lambda_0) d\xi$$

$$+\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)} \int_0^x \int_0^t \left\{ \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \varphi(\xi,\lambda_n)\varphi(s,\lambda_n) \right] \varphi(\xi,\lambda_0) \right\} \varphi(s,\lambda_0) d\xi ds$$

$$=\delta(x-t)E - \frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(t)} + \frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)} \int_0^x \left(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_0)\right) d\xi$$

$$=\delta(x-t)E - \frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)} \left[A(x) - \int_0^x \left(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_0)\right) d\xi \right]$$

$$=\delta(x-t)E - \frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)} \alpha_0$$

olur. Buradan da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n) + \frac{\alpha_0\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)} \frac{\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(t)} = \delta(x-t)E \tag{4.1.24}$$

formülü elde edilir.

(4.1.20) formülünde $\lambda = \lambda_0$ için

$$\psi(x,\lambda_0) = \frac{\alpha_0\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}$$

olduğu elde edilir. Son eşitlik (4.1.24) formülünde yerine yazılırsa;

$$\begin{gathered} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n) + \frac{1}{\alpha_0} \psi(x,\lambda_0)\psi^T(t,\lambda_0) = \delta(x-t)E \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t)E \end{gathered} \tag{4.1.25}$$

bulunur. Teoremin gerekliliğinin ispatının benzerinin yorumları yapılırsa

$$\alpha_n = \int_0^\pi \left(\psi(x,\lambda_n),\psi(x,\lambda_n)\right) dx \tag{4.1.26}$$

olur. (4.1.25) ve (4.1.26) fonksiyonlarından $\{\psi(x,\lambda_n)\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ fonksiyonlarının $L_2(0,\pi)$ de tam ortogonal sistem olduğu elde edilir.

Sonuç 4.1.1. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları ve $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ matris fonksiyonun

$k.$ mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ olacak şekilde (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğer ve normlaştırıcı sayıları

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k} \tag{4.1.27}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{\pi} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{4.1.28}$$

şeklinde asimptotik formüllere sahiptir. Burada $l=-(2k+1)$, $n \in \pm\overline{(s+1,\infty)}$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\alpha_{n,k}\right|^2 < \infty$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_{n,k}\right|^2 < \infty$ serileri yakınsaktır

Not 4.1.1. Eğer $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ ler l için (4.1.1)-(4.1.3) tipindeki problemin sırasıyla özdeğer ve normlaştırıcı sayıları ise, bu takdirde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ ler, $-l$ için de (4.1.1)-(4.1.3) problemin özdeğer ve normlaştırıcı sayılarıdır.

4.2. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektrum Türünden İfadesi

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y \tag{4.2.1}$$

diferansiyel denklemini ve

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.2.2}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0, y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.2.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım. Burada

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{l}{\pi-x} \\ \dfrac{l}{\pi-x} & 0 \end{pmatrix},\ y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

$0 \le \alpha \le \pi$, $0 \le \beta \le \pi$ öyleki $\alpha \ne \beta$, $Q(x)$ matris fonksiyonu $[0,\pi]$ de tanımlı ve sürekli ve $l=-(2k+1)$ olsun. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$ sırasıyla (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.1), (4.2.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri olsun. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (4.2.1) denkleminin sırasıyla

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.2.4}$$

$$\psi_1(0,\lambda) = \sin\beta,\ \ \psi_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{4.2.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu takdirde (4.2.1), (4.2.2) sınır değer probleminin özfonksiyonları $\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)$ ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\left(\varphi_n(x),\varphi_n(x)\right)dx,\ n\in\pm\overline{(k+1,\infty)} \tag{4.2.6}$$

şeklindedir.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ spektrumuna göre $\{\alpha_n\}$ için formül bulalım.

$$f(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{4.2.7}$$

fonksiyonu verilsin. Burada $f(x,\lambda)\in L_2(0,\pi)$ dir. Bu takdirde $x\to\pi$ iken limit alınırsa

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\left|f_1^2(x,\lambda)\right|+\left|f_2^2(x,\lambda)\right|\right\}=0$$

bulunur. Burada

$$c_1+m(\lambda)c_2=0 \tag{4.2.8}$$

$$c_1=\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\psi_1^2(x,\lambda)+\psi_2^2(x,\lambda)\right\},\ c_2=\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\varphi_1^2(x,\lambda)+\varphi_2^2(x,\lambda)\right\}$$

şeklindedir. (4.2.8) formülünden $m(\lambda)$ nın bir meromorf fonksiyon olduğu gözükmektedir. Dolayısıyla kutupları ve sıfırları (4.2.1), (2.2.2) ve (4.2.1), (2.2.3) probleminin sırasıyla özdeğerleri ile çakışır. Bölüm 3.4'te yapılan işlemler tekrarlanırsa

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}\left(f(x,\lambda_1),f(x,\lambda_2)\right)dx=\left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)$$

formülü bulunur. $\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\overline{\lambda}$ olduğu durumda

$$\int_0^{\pi}\left|f(x,\lambda)\right|^2dx=\sin(\beta-\alpha)\frac{\operatorname{Im}m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \tag{4.2.9}$$

formülü elde edilir. Bu takdirde $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları yani (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.1), (4.2.3) sınır probleminin özdeğerleri çarprazlaşırlar. $m(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan

$$m(\lambda)=A\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda}{\mu_p}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{-1} \tag{4.2.10}$$

elde edilir.

Burada ' sembolü sonsuz çarpımda $p=-k,\dots,k$ çarpanlarının bulunmadığını ifade eder ve A sabit sayıdır. Bölüm 3 teki işlemler tekrarlanırsa

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\pi}\left(f(x,\lambda),\varphi_n(x)\right)dx=\int_0^{\pi}\left\{\left(Bf'(x,\lambda),\varphi_n(x)\right)+\left(Bf(x,\lambda),\varphi_n^{'}(x)\right)\right\}dx=\sin(\alpha-\beta)$$

olur. Burada $\lambda\to\lambda_n$ için limit alınırsa

$$\alpha_n=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)} \tag{4.2.11}$$

eşitliği elde edilir. (4.2.10) formülü düzenlenirse daha sonra her iki taraftan logaritma alınırsa

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_p-\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}\right)=\sum_{p=k+1}^{\infty}\left(\frac{\mu_p-\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}+\frac{\mu_{-p}-\lambda_{-p}}{\lambda_{-p}-\lambda}\right)$$

serisi elde edilir. Bu serinin yakınsaklığı Bölüm 3 te yapılan işlemler tekrarlanırsa elde edilir. (4.2.10) formülünde cebirsel işlemler yapılırsa

$$m(\lambda)=A_1\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{\mu_p-\lambda}{\lambda_p-\lambda}\right)$$

fonksiyonu bulunur. Burada

$$A_1=A\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_p}{\mu_p}$$

şeklindedir. Bu takdirde (4.2.11) den

$$\alpha_n=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{A_1(\mu_n-\lambda_n)}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_p-\lambda_n}{\mu_p-\lambda_n} \tag{4.2.12}$$

elde edilir. İleride $A_1=-1$ olduğu ispatlanacaktır.

4.3. İki Spektruma Göre Singüler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

Bu bölümde tekile sahip Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem çözümü verilmiştir.

Teorem 4.3.1. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $n\in\pm\overline{(k+1,\infty)}$ dizileri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. λ_n ve μ_n dizileri sıralıdırlar (çaprazlaşırlar).
2. α, α_1, β, β_1 sabit sayılar olmak üzere $n\to\pm\infty$ iken $\lambda_{n+k},\lambda_{n-k}$ ve μ_{n+k},μ_{n-k} sayıları için

$$\lambda_{n+k}=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n>0$$
$$\lambda_{n-k}=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n<0 \qquad (4.3.1)$$

ve

$$\mu_{n+k}=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n>0$$
$$\mu_{n-k}=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n<0 \qquad (4.3.2)$$

asimptotik formülleri sağlanır.

3. $0\le\alpha\le\pi,\ 0\le\beta\le\pi,\ \alpha\ne\beta$ dır.

Bu takdirde $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $n\in\pm\overline{(k+1,\infty)}$

$$By'+Q(x)y+Ly=\lambda y \qquad (4.3.3)$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \qquad (4.3.4)$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \qquad (4.3.5)$$

probleminin iki farklı spektrumlarıdır.

Burada $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}0 & \frac{l}{\pi-x}\\ \frac{l}{\pi-x} & 0\end{pmatrix}$ şeklindedir.

İspat. Teoremi $l=-1$ için ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde ispatlanır. Sırasıyla (4.3.1) ve (4.3.2) asimptotik formülleriyle tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizileri verilsin. Normlaştırıcı sayıların iki spektrum türünden ifadesi olan

$$\alpha_n=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\mu_n-\lambda_n}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_p-\lambda_n}{\mu_p-\lambda_n} \qquad (4.3.6)$$

formülü yazılsın. Burada ' sembolü sonsuz çarpımda $p=0, p=n$ çarpanlarının bulunmadığını ifade eder.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları için asimptotik formüllerden faydalanarak $\{\alpha_n\}$ sayıları için asimptotik formül bulalım. $\lambda_0\ne\lambda_n,\mu_0\ne\mu_n,n=\pm1,\pm2,\cdots$ olmak üzere λ_0,μ_0 sayıları ele alınsın. Bu durumda (4.3.6) formülünün $-1.$ kuvveti alınırsa

$$\frac{1}{\alpha_n}=\frac{\mu_n-\lambda_n}{\sin(\alpha-\beta)}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_p-\lambda_n}{\lambda_p-\lambda_n}\frac{\lambda_0-\lambda_n}{\mu_0-\lambda_n}$$

olduğu elde edilir. Burada $'$sembolü sonsuz çarpımda $p = n$ sayılı terimin olmadığını ifade eder.

$$\frac{1}{b_n} = \frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha - \beta)} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_p - \lambda_n}{\lambda_p - \lambda_n}$$

olacak şekilde yukarıdaki sonsuz çarpım

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n} \frac{\lambda_0 - \lambda_n}{\mu_0 - \lambda_n}$$

Şeklinde yazılır. Bölüm 3.4 de verilen

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha - \beta)\right] + O(\frac{\ln n}{n^2}) \qquad (4.3.7)$$

asimptotik formülünü ele alalım. Burada $s = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\lambda_k - \mu_k + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right)$şeklindedir ve

$\sum{}'$ sembolü toplamda $k = n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder. Bu takdirde

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n}\left(1 + \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n - \mu_0}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Özdeğerler için asimptotik formüllerden faydalanılırsa

$$\frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n - \mu_0} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n} \frac{1}{1 - \frac{\mu_0}{\lambda_n}} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n}\left(1 + \frac{\mu_0 - \lambda_0}{n}\right) + O(\frac{1}{n^2})$$

şeklinde yazılabilir. Son formül ve (4.3.7) den normlaştırıcı saylar için asimptotik formül

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s'}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha - \beta) + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right] + O(\frac{\ln n}{n^2}) \qquad (4.3.8)$$

bulunur. Burada $s' = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\lambda_k - \mu_k + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right)$ve $'$sembolü toplamda $k = n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder. Böylece (4.3.8) formülü

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{c}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \qquad (4.3.9)$$

elde edilir. Burada

$$c=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''\left(\lambda_k-\mu_k+\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)+(\beta_1-\alpha_1)ctg(\alpha-\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\pi^2}$$

şeklindedir. Tüm α_n lerin 0 dan büyük olduğunu gösterelim.

$$m_1(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_p-\lambda}{\lambda_p-\lambda} \qquad (4.3.10)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Teoremin koşulundan dolayı $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları çaprazlaşırlar. $\lambda\to i\infty$ iken limit alınırsa

$$m_1(\lambda)\to-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \qquad (4.3.11)$$

sonucu alınır. Weyl fonksiyonu tanımından

$$\frac{1}{\alpha_n}=\operatorname{Re}s\,m_1(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n} \qquad (4.3.12)$$

eşitliği yazılır. Bu sebeple

$$m_1(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_1(\lambda-\lambda_p)} \qquad (4.3.13)$$

olur, öyleki α_n lerin hepsi aynı işarete sahiptir.

(4.3.9) formülünde büyük p ler için $a_p>0$ olduğu elde edilir. Bu takdirde [21] den $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonunu birebir olarak tanımlamak mümkündür. Öyleki $\{\lambda_n\}$ (4.3.3)-(4.3.5) probleminin özdeğerleridir.

$$By'+Q(x)y+Ly=\lambda y \qquad (4.3.14)$$

denklemi ve

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \qquad (4.3.15)$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \qquad (4.3.16)$$

sınır koşullarıyla tanımlı problemin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ özdeğer ve normlaştırıcı saylarına göre tanımlanan $\{\gamma_n\}$, $n\in\pm\overline{(1,\infty)}$ özdeğerleri olsun. Burada β sayısı (4.3.2) ile tanımlanır.

$\gamma_n=\mu_n$, $n\in\pm\overline{(1,\infty)}$ olduğunu ispatlayalım.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix},\ \psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\beta\\-\cos\beta\end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını sağlayan (4.3.14) denkleminin çözümleri olsun. Bu takdirde

$$m(\lambda)=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-\lambda_n}{\lambda-\gamma_n} \tag{4.3.17}$$

eşitliği ile tanımlı meromorf fonksiyon mevcuttur. Öyleki $m(\lambda)$ fonksiyonunun kutupları ve sıfırları sırasıyla $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ sayıları ile çakışır. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_n}=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n}$$

formülü bulunur. $\lambda\to i\infty$ iken (4.3.17) de limit alınırsa $m(\lambda)\to 1$ elde edilir. Bu sebeple

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_p(\lambda_p-\lambda)} \tag{4.3.18}$$

eşitliği elde edilir. (4.3.13) ve (4.3.18) formüllerinden

$$m_1(\lambda)=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda) \tag{4.3.19}$$

olur ve dolayısıyla $\gamma_n=\mu_n$, $n=\pm\overline{(1,\infty)}$ elde edilir. Bununla teorem ispatlanır.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarını aynı bir denklemin farklı iki özdeğeri olabilmesi için yeterlilik koşullarını göstermiş olduk. Benzer yorumları yaparak genel durumda iki spektruma göre ters problemi tam olarak çözmek mümkündür.

Teorem 4.3.2. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizilerinin (4.3.14) denkleminin (4.3.15) ve (4.3.16) sınır koşullarını sağlayan iki farklı spektrumları olması için $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ nin elemanı ve $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$ olacak biçimde aşağıdaki koşulların sağlanması gerek ve yeterdir..

1. λ_n ve μ_n dizileri sıralıdırlar(çarprazlaşır).
2. Aşağıdaki asimptotik formüller söz konusudur.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+\frac{\beta_2}{n^2}+\cdots+\frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

burada $\alpha\neq\beta,\ 0\le\beta,\ \alpha\le\pi, l=-(2k+1)$ ve her bir n için

$\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\alpha_{k,n}\right|^2<\infty,\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\beta_{k,n}\right|^2<\infty, n=\pm\overline{(k+1,\infty)}$ dir.

İspat. Gerekliliğin ispatı Bölüm 3.2 den elde edilir. Yeterlilik ise Teorem 4.3.1.'in ispatı gibidir.

Not 4.3.1. Bölüm 3.2. de $\{\alpha_n\}$ lerin (4.1.28) bağıntısını sağladığı ispatlanmıştır. Bu Teoremden ise $\{\alpha_n\}$ lerin (4.3.9) bağıntısını sağladığı elde edilir. (4.1.28) ve (4.3.9) formülleri karşılaştırılırsa $A_1 = -1$ olduğu elde edilir.

5. YARI EKSENDE DIRAC SİSTEMİ İÇİN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

5.1. Problemin Tanımı

$$By'+Q(x)y=\lambda y, 0\le x<\infty \tag{5.1.1}$$

denklemini ve

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{5.1.2}$$

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \tag{5.1.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım.

Burada $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$, $y(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ayrıca $Q(x)$ normalleştirilmiş matris fonksiyonunu $0\le x<\infty$ yarı ekseninde diferansiyellenebilen fonksiyondur. Öyleki $\forall\alpha\, ve\, \beta$ $(\alpha\ne\beta)$ için (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin spektrumları ayrık tır. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sırasıyla (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerler dizisi olsun. Bu bölümde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ özdeğerlerine göre (5.1.1), (5.1.2) sınır değer probleminin spektral fonksiyonunun birebir olarak tanımlandığı gösterilecektir.

Spektral fonksiyona göre (5.1.1) Kanonik Dirac sistemi birebir tanımlandığından dolayı [3], iki farklı spektruma göre Kanonik Dirac sisteminin birebir tanımlandığı elde edilir.

5.2. $\rho(\lambda)$ -spektral fonksiyonun spektrumlar cinsinden ifadesi

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ (5.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \ \varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{5.2.1}$$

$$\theta_1(0,\lambda)=\sin\beta,\ \ \theta_2(0,\lambda)=-\cos\beta \tag{5.2.2}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ nın sırasıyla (5.1.2) ve (5.1.3) sınır koşullarını sağladığı aşikardır. Bu sebeple $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\theta(x,\lambda_n)$ sırasıyla $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ özdeğerlerine karşılık gelen (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

Teorem 5.2.1. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ sırasıyla (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerler dizisi olsun. Bu takdirde (5.1.1), (5.1.2) sınır değer probleminin $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ ler cinsinden

$$\rho(\lambda)=\begin{cases} \sum\limits_{0\le\lambda_n<\lambda}\dfrac{1}{\alpha_n} & , \lambda\ge 0 \\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n<0}\dfrac{1}{\alpha_n} & , \lambda<0 \end{cases} \tag{5.2.3}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha_n}=-c\frac{\lambda_n}{\mu_n}(\mu_n-\lambda_n)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{-1} \tag{5.2.4}$$

formülleri ile tanımlanır.

Burada c herhangi sabit, ' sembolü çarpımda $k=n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder.

İspat. $f(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$ fonksiyonu, (5.1.1) denkleminin çözümü olsun. Burada $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ dır.

$$f(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{5.2.5}$$

olacak şekilde $f(x,\lambda)$ fonksiyonunu seçilsin. Bölüm 4.2. de yapılan işlemler tekrarlanırsa ve $x\to\infty$ için $\overline{f^*(x,\lambda)Bf(x,\lambda)}\to 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(\lambda-\overline{\lambda})\int_0^{\infty}\left(f(x,\lambda),f(x,\lambda)\right)dx=\left[m(\overline{\lambda})-m(\lambda)\right]\sin(\alpha-\beta)$$

olur. Buradan

$$\int_0^{\infty}\left(f(x,\lambda),f(x,\lambda)\right)dx=-\frac{\operatorname{Im}m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}\sin(\alpha-\beta)$$

formülü elde edilir. (5.2.5) den (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri sırasıyla $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları olduğu elde edilir. Dolayısıyla $m(\lambda)$ meromorf fonksiyondur. Bu sebeple $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ çaprazlaşırlar, dolayısıyla

$$m(\lambda)=c\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^{-1} \tag{5.2.6}$$

olur . Burada c sabit sayıdır.

Titchmarch çalışmasında (5.1.1), (5.1.2) probleminin $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu $m(\lambda)$ cinsinden

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{0\le\lambda_n<\lambda}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda\ge 0\\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n<0}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda<0\end{cases}$$

bağıntısıyla tanımlanır, burada

$$\frac{1}{\alpha_n}=\operatorname{Res} m(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n}$$

şeklindedir. Sonuncu formülden, (5.2.6) eşitliğinden aranan (5.2.3) formülü kolaylıkla elde edilir.

Not 5.2.1 Teorem 5.2.1, (5.1.1), (5.1.2) probleminin spektral fonksiyonu c sabit farkıyla iki spektruma göre hesaplandığını mümkün kılar.

Teorem 5.2.2. $\rho_1(\lambda)$ ve $\rho_2(\lambda)$ spektral fonksiyonları birbirinden sabit c çarpanı kadar farklı olduğunda yani $\rho_1(\lambda)=c\rho_2(\lambda)$ ise ve bunlar Dirac sistemiyle oluşan sınır problemlerinin spektral fonksiyonları olduğunda $c=1$ dir.

İspat.

$$\rho_1(\lambda)-\rho_1(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)$$

$$\rho_2(\lambda)-\rho_2(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)$$

buradan

$$\rho_1(\lambda)-\rho_1(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)=c\left[\rho_2(\lambda)-\rho_2(-\lambda)\right]=c\left[\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)\right]$$

elde eldir. Dolayısıyla $c=1$ olur.

Bu teoremden görüldüğü gibi $\rho(\lambda)$ nın tanımındaki sabit sayısı belirli durumlarda $\rho(\lambda)$ için asimptotik formüllerden hesaplanabilir. Not etmek gerekir ki c sabitinin kesin ifadesi bize gerekmez.

5.3. Spektrumun Ayrıklığı İçin Yeterlilik Şartları

Bu bölümde Dirac sisteminin spektrumunun diskret olacağı durumlar incelenecektir. Bununla ilgili birçok çalışma ithaf edilmiştir. Fakat bu çalışmalarda sistem kanonik şekilde ele alındığı için elde edilen sonuçlar daha az kullanılmaktadır.

Teorem 5.3.1 $Q(x)$ matris fonksiyonu sürekli türeve sahip olsun. Bu takdirde (5.1.1), (5.1.2) probleminin ayrık spektrum'a sahip olması için

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+k}\left\{p^2+q^2-(p'^2-q'^2)^{\frac{1}{2}}\right\}dt=\infty \tag{5.3.1}$$

bağıntısının sağlanması yeterlidir.

İspat. (5.1.1) denklemi (5.1.2) sınır koşullarıyla oluşan operatörü L ile gösterelim. Bu takdirde L^2 operatörü

$$-y''+(Q^2+BQ^1)y=\lambda^2 y \tag{5.3.2}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0$$

$$\left\{y_2'(0)+p(0)y_1(0)+q(0)y_2(0)\right\}\cos\alpha+\left\{-y_1'(0)+q(0)y_1(0)-p(0)y_2(0)\right\}\sin\alpha=0$$

sınır koşullarıyla oluşur. L^2 operatörünün diskretliği L operatörünün spektrumunun diskretliğin den elde edilir. Q^2+BQ^1 matrisine karşılık gelen en küçük özdeger $\mu(x)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+k}\mu(x)dx=\infty \tag{5.3.3}$$

şeklindedir.

Basit hesaplamalardan sonra $\mu(x)=p^2+q^2-(p'^2-q'^2)^{\frac{1}{2}}$ elde edilir. Bu sebeple (5.3.3) koşulundan (5.3.1) elde edilir. Dolayısıyla L^2 operatörü ve doğal olarak L operatörünün diskret spektruma sahiptir.

Sonuç 5.3.1. $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlar olduğunda (5.1.1), (5.1.2) problemi ayrık spektrumuna sahiptir.

6. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN KISMEN ÇAKIŞMAYAN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

6.1. $K(x,s)$ Matris Fonksiyonunun Genel Dejenereliği

$$By'+Q(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}y=\lambda y, 0<x\le\pi \tag{6.1.1}$$

denklemini ve

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.2}$$

$$y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{6.1.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım. Burada

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\ y(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

ve H reel sayıdır.

Bu problemin $y_1(0)=0,\ y_2(0)=-1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$y_1(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x\left[-p(s)y_1(s)-q(s)y_2(s)+\frac{y_2(s)}{s}\right]\sin\lambda(s-x)ds$$
$$+\int_0^x\left[q(s)y_1(s)-p(s)y_2(s)-\frac{y_1(s)}{s}\right]\cos\lambda(s-x)ds$$
$$y_2(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x\left[-p(s)y_1(s)-q(s)y_2(s)+\frac{y_2(s)}{s}\right]\cos\lambda(s-x)ds$$
$$+\int_0^x\left[q(s)y_1(s)-p(s)y_2(s)-\frac{y_1(s)}{s}\right]\sin\lambda(s-x)ds$$

şeklindedir. Burada $\frac{y_1(s)}{s}\in C[0,\pi],\ \frac{y_2(s)}{s}\in C[0,\pi]$ dır.

Bu özfonksiyonlar (6.1.3) te yerine yazılırsa ve Bölüm 3.2 de yapılan işlemler tekrarlanırsa özdeğerler için asimptotik formül

$$\lambda_n=n+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{H}+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{6.1.4}$$

şeklinde elde edilir.

(6.1.1) denkleminin $Q(x)=0$ olduğu durumda, $y_{01}(0)=0,\ y_{02}(0)=-1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$y_{01}(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x \frac{y_2(s)}{s}\sin\lambda(s-x)ds-\int_0^x \frac{y_1(s)}{s}\cos\lambda(s-x)ds \qquad (6.1.5)$$

$$y_{02}(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x \frac{y_2(s)}{s}\cos\lambda(s-x)ds-\int_0^x \frac{y_1(s)}{s}\sin\lambda(s-x)ds \qquad (6.1.6)$$

şeklindedir. O halde bu özfonksiyonlar büyük λ lar için

$$y_{01}(x,\lambda)=\sin\lambda x+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.7)$$

$$y_{02}(x,\lambda)=-\cos\lambda x+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.8)$$

şeklinde yazılır. Burada $\tau=|\operatorname{Im}\lambda|$ dır.

Perturbe olmuş (6.1.1) denklemi ile perturbe olmamış yani $Q(x)=0$ olduğu durumda olan denklem arasında

$$y(x,\lambda)=y_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,s)y_0(s,\lambda)dt \qquad (6.1.9)$$

bağıntısı vardır. Burada $y_0(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_{01}(x,\lambda) \\ y_{02}(x,\lambda)\end{pmatrix}$ fonksiyonu $Q(x)=0$ olduğu durumdaki çözüm fonksiyonudur ve $K(x,s)=\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}$ çekirdek fonksiyonudur.

(6.1.9) eşitliğinde $y(x,\lambda)$, $y_0(x,\lambda)$, $K(x,s)$ ifadeleri yerine yazılıp düzenlenirse

$$y_1(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x\left[K_{11}(x,s)\sin\lambda t-K_{12}(x,s)\cos\lambda s\right]ds+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.10)$$

$$y_2(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x\left[K_{21}(x,s)\sin\lambda s-K_{22}(x,s)\cos\lambda s\right]ds+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.11)$$

formülleri elde edilir.

$y(x,\lambda)$ vektör fonksiyon, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$, $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar ve H reel sayı olmak üzere, (I)problemini

$$By'+Q(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}y=\lambda y,\ 0<x\le\pi \tag{6.1.12}$$

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.13}$$

$$y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{6.1.14}$$

şeklinde ele alalım. (I) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. (6.1.12), (6.1.13) ve

$$y_2(\pi)+H_1y_1(\pi)=0 \tag{6.1.15}$$

koşulu ile birlikte tanımlı olan (II) probleminin özdeğerleri $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun.

Benzer şekilde $\widetilde{Q}(x)=\begin{pmatrix}\widetilde{p}(x) & \widetilde{q}(x)\\ \widetilde{q}(x) & -\widetilde{p}(x)\end{pmatrix}$, $\widetilde{p}(x)$ ve $\widetilde{q}(x)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, $\widetilde{H}$, H dan farklı reel sayı olmak üzere, (III) problemi

$$By'+\widetilde{Q}(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}y=\lambda y, 0<x\le\pi \tag{6.1.16}$$

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.17}$$

$$y_2(\pi)+\widetilde{H}y_1(\pi)=0 \tag{6.1.18}$$

şeklinde ele alınsın. (III) probleminin özdeğerleri $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. (6.1.16), (6.1.17) ve

$$y_2(\pi)+\widetilde{H}_1y_1(\pi)=0 \tag{6.1.19}$$

koşulu ile birlikte tanımlı olan (IV) probleminin özdeğerleri $\{\widetilde{\mu}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun.

Aşağıdaki teorem söz konusudur.

Teorem 6.1.1. (I), (II), (III) ve (IV) problemlerinin özdeğerleri sırası ile $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\widetilde{\mu}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ $\left(n\in\overline{-\infty,\infty}\right)$ olsun. Bu takdirde;

1. $\lambda_n\equiv\widetilde{\lambda}_n$ tüm n ler için çakışır.
2. $\mu_n\ne\widetilde{\mu}_n$, $n=0,1,2,\ldots,\mathbb{N}$ ve $\mu_n\equiv\widetilde{\mu}_n$, $\{n\in\mathbb{Z}-\{0,\mathbb{N}\}\}$.
3. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\widetilde{\mu}_n\}$ özdeğerleri çaprazlaşırlar.

koşulları sağlanacak biçimde

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+\int_0^x K(x,s)\varphi(t,\lambda)dt \tag{6.1.20}$$

bağıntısında bulunan $K(x,s)$ çekirdek fonksiyonu genel dejeneredir.

İspat. (6.1.20) dönüşüm operatörü

$$\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\\ \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s)\\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(s,\lambda)\\ \varphi_2(s,\lambda)\end{pmatrix}ds$$

veya

$$\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)=\varphi_1(x,\lambda)+\int_0^x\{K_{11}(x,s)\varphi_1(s,\lambda)+K_{12}(x,s)\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds \qquad (6.1.21)$$

$$\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)=\varphi_2(x,\lambda)+\int_0^x\{K_{21}(x,s)\varphi_1(s,\lambda)+K_{22}(x,s)\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds \qquad (6.1.22)$$

şeklinde yazılabilir. (6.1.21) bağıntısı $\tilde{H}$ ile çarpılıp daha sonra (6.1.22) eşitliği ile toplanırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)+\tilde{H}\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)&=\varphi_2(x,\lambda)+H\varphi_1(x,\lambda)\\ &+\int_0^x\Big[\big\{K_{21}(x,s)+\tilde{H}K_{11}(x,s)\big\}\varphi_1(s,\lambda)+\big\{K_{22}(x,s)+\tilde{H}K_{12}(x,s)\big\}\varphi_2(s,\lambda)\Big]ds\end{aligned} \qquad (6.1.23)$$

formülü elde edilir.

Son ifadede $x=\pi,\ \lambda=\lambda_n$ alıp (I) ve (II) problemlerinin spektrumları için verilen (6.1.14) ve (6.1.15) koşullarından faydalanılırsa ve $\lambda_n\equiv\tilde{\lambda}_n$ olduğundan

$$\begin{aligned}0=\big(\tilde{H}-H\big)\varphi_1(\pi,\lambda_n)&+\int_0^\pi\Big[\big\{K_{21}(\pi,s)+\tilde{H}K_{11}(\pi,s)\big\}\varphi_1(s,\lambda_n)\\ &+\big\{K_{22}(\pi,s)+\tilde{H}K_{12}(\pi,s)\big\}\varphi_2(s,\lambda_n)\Big]ds\end{aligned}$$

bulunur. (6.1.10) formülünde $n\to\infty$ için limit alınırsa $\varphi_1(\pi,\lambda_n)\to(-1)^n\sin(\arctan\frac{1}{H})$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0' a gider. Dolayısıyla

$$\big(\tilde{H}-H\big)=0 \qquad (6.1.24)$$

ve

$$\int_0^\pi\Big[\big\{K_{21}(\pi,s)+\tilde{H}K_{11}(\pi,s)\big\}\varphi_1(s,\lambda_n)+\big\{K_{22}(\pi,s)+\tilde{H}K_{12}(\pi,s)\big\}\varphi_2(s,\lambda_n)\Big]ds=0,\ n\in\mathbb{N} \qquad (6.1.25)$$

formülleri bulunur. $\varphi(x,\lambda_n)$ özvektör fonksiyonlarının tamlığından

$$K_{21}(\pi,s)+\tilde{H}K_{11}(\pi,s)=0 \qquad (6.1.26)$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{12}(\pi,s)=0 \tag{6.1.27}$$

elde edilir.

Şimdi ikinci spektrum için benzer işlemler yapalım. (6.1.21) eşitliği $\widetilde{H}_1$ ile çarpılıp daha sonra (6.1.22) eşitliği ile toplanırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_2(x,\lambda)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(x,\lambda)&=\varphi_2(x,\lambda)+H_1\varphi_1(x,\lambda)\\&+\int_0^x\Big[\Big\{K_{21}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\lambda)+\Big\{K_{22}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\lambda)\Big]ds\end{aligned} \tag{6.1.28}$$

formülü bulunur.

Son ifadede $x=\pi,\ \lambda=\mu_n,\ n>\mathbb{N}$ alıp (III) ve (IV) problemlerinin spektrumları için verilen (6.1.18) ve (6.1.19) koşullarından faydalanılırsa ve $\mu_n\equiv\widetilde{\mu}_n,\ \{n\in\mathbb{Z}-\{0,\mathbb{N}\}\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}0=\Big(\widetilde{H}_1-H_1\Big)\varphi_1(\pi,\mu_n)&+\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)\\&+\Big\{K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds\end{aligned}$$

yazılır. (6.1.10) formülünden $n\to\infty$ için limit alınırsa $\varphi_1(\pi,\mu_n)\to(-1)^n\sin(\arctan\frac{1}{H})$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0 a gider. Dolayısıyla

$$\Big(\widetilde{H}_1-H_1\Big)=0 \tag{6.1.29}$$

ve

$$\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)+\Big\{K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds=0,\ n\in\mathbb{N} \tag{6.1.30}$$

formülleri elde edilir.

Şimdi ise benzer işlemleri $\mu_n\neq\widetilde{\mu}_n,\ n=0,1,2,\ldots,\mathbb{N}$ olduğu durumda yapılsın. $x=\pi,\ \lambda=\mu_n,\ n=0,1,\cdots,N$ alınırsa (6.1.28) ve (6.1.29) formüllerinden

$$\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)=\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)+\Big\{K_{22}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds \tag{6.1.31}$$

elde edilir. (6.1.30) ve (6.1.31) formüllerinden

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}\varphi_1(s,\mu_n) \tag{6.1.32}$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}\varphi_2(s,\mu_n) \tag{6.1.33}$$

bağıntıları elde edilir.

Burada

$$\|\varphi(s,\mu_n)\|^2=\alpha_n=\int_0^{\pi}\left\{\varphi_1^2(s,\mu_n)+\varphi_2^2(s,\mu_n)\right\}ds$$

olacak şekilde

$$\tau_n=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}$$

eşitliği verilsin. Böylece $K_{ij}(\pi,s),\ i,j=1,2$ fonksiyonlarını tanımlamak için

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{11}(\pi,s)=0$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{12}(\pi,s)=0$$

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

denklemler sistemi elde edilir. Yukarıdaki denklem sistemini $K_{ij}(\pi,s),(i,j=1,2)$ e göre çözülürse

$$K_{11}(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{12}(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

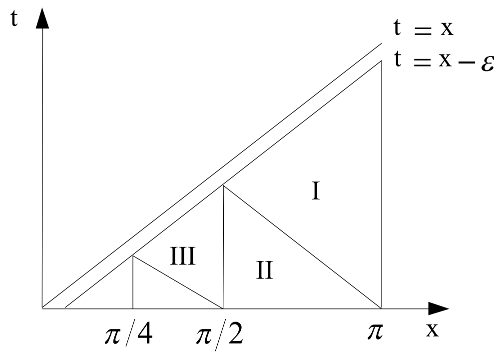
$$K_{21}(\pi,s)=-\frac{\widetilde{H}}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{22}(\pi,s)=-\frac{\widetilde{H}}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$K(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\begin{pmatrix}\varphi_1(s,\mu_n) & \varphi_2(s,\mu_n)\\ -\widetilde{H}_1\varphi_1(s,\mu_n) & -\widetilde{H}\varphi_2(s,\mu_n)\end{pmatrix} \tag{6.1.34}$$

şeklindedir. $K(x,s)$ fonksiyonu birinci mertebeden hiperbolik denklemler sistemini sağladığı için (6.1.34) koşulu birlikte OAB üçgeninin tamamında birebir olarak tanımlanır.



Şekil 6.1.1 OAB üçgeninin tamamında $K(x,s)$ fonksiyonunun görüntüsü

Bu sebeple OAB üçgeninin tamamında $K(x,s)$ fonksiyonunun görüntüsü

$$K(x,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\left\|\varphi(s,\mu_n)\right\|^2}\times\left[\theta(x,\mu_n)-\widetilde{H}\chi(x,\mu_n)\right]\varphi^T(s,\mu_n) \qquad (6.1.35)$$

şeklindedir. Burada

$$\theta(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\theta_1(x,\lambda)\\ \theta_2(x,\lambda)\end{pmatrix},\quad \chi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\chi_1(x,\lambda)\\ \chi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

denklemin

$$\theta_1(\pi,\lambda)=\chi_2(\pi,\lambda)=1,\quad \theta_2(\pi,\lambda)=\chi_1(\pi,\lambda)=0$$

koşullarını sağlayan çözümleridir. $\varphi^T(s,\lambda)$ ise transpozu alınmış vektör fonksiyonudur.

7. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

7.1. Farklı potansiyellere sahip singüler Dirac operatörü için kararlılık problemi

$p_i(x)$ ve $q_i(x)$ $(i=1,2)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ve

$$Q_1(x)=\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix},\quad Q_2(x)=\begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\pi-x} \\ -\dfrac{1}{\pi-x} & 0 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$By'+Q_1(x)y+L(x)y=\lambda y, 0\le x<\pi \tag{7.1.1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{7.1.2}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{7.1.3}$$

sınır değer problemi ele alınsın. (7.1.1) probleminin $\psi_1(0,\lambda)=\sin\alpha$, $\psi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda)\\ \psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ile gösterilsin. Bu problemin

spektral karakteristikleri $\{\lambda_n,\rho_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. Bu karakteristikler (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar) sırasıyla aşağıdaki asimptotik formülleri sağlarlar.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{k,n}}{n^k} \tag{7.1.4}$$

$$\rho_n=\pi+\frac{c_1}{n}+\cdots+\frac{c_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{7.1.5}$$

Benzer şekilde (7.1.1) in pertürbesi olan aşağıdaki sınır değer problemi

$$By'+Q_2(x)y+Ly=\mu y, 0\le x<\pi \tag{7.1.6}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{7.1.7}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{7.1.8}$$

ele alınsın. (7.1.6) probleminin $\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha$, $\varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ile gösterilsin. Bu problemin

spektral karakteristikleri $\{\mu_n,\sigma_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. Bu karakteristikler (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar) sırasıyla aşağıdaki asimptotik formülleri sağlarlar.

$$\mu_n = n - \frac{\alpha'}{\pi} + \frac{\alpha'_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha'_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha'_{k,n}}{n^k} \tag{7.1.9}$$

$$\sigma_n = \pi + \frac{c'_1}{n} + \cdots + \frac{c'_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c'_{n,k}}{n^k} \tag{7.1.10}$$

Ayrıca

$$F(x,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sigma_n} \psi(x,\mu_n)\psi^T(s,\mu_n) - \frac{1}{\rho_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n) \right\}$$

olmak üzere;

$$K(x,s) + F(x,s) + \int_0^x K(x,t)F(t,s)dt = 0 \quad (0 \le s \le x \le \pi)$$

esas integral denklemini sağlayan bir tek $K(x,s)$ matris fonksiyonu vardır. Burada $K(x,s)$ matris fonksiyonu

$$BK(x,x) - K(x,x)B = Q_1(x) - Q_2(x) \tag{7.1.11}$$

koşulunu sağlar.

Teorem 7.1. Eğer $A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right]$ yeterince küçük ise

$$\max_{0 \le x < \pi} |p_1(x) - p_2(x)| \le C'A$$
$$\max_{0 \le x < \pi} |q_1(x) - q_2(x)| \le C''A$$

dır. Burada $C' > 0$ ve $C'' > 0$ sabit sayılardır.

İspat.

$$K(x,s) + F(x,s) + \int_0^x K(x,t)F(t,s)dt = 0 \quad (0 \le s \le x \le \pi)$$

integral denklemi göz önüne alınsın. Burada $F(x,s)$ bilinen fonksiyondur. Bu integral denklemini çözelim.

$$F^{(1)}(x,s) = F(x,s)$$

olmak üzere

$$F^{(n+1)}(s,t;x) = \int_0^x F(s,u)F^{(n)}(u,t;x)du, \ n \ge 1 \tag{7.1.12}$$

itere fonksiyonları yazılabilir. Burada $K(x,s)$ matris fonksiyonu

$$K(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.13}$$

dir. $F(x,s)$ fonksiyonun da düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
F(x,s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\psi(x,\mu_n)\psi^T(s,\mu_n)-\frac{1}{\rho_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n)\right\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_n}\begin{pmatrix}\psi_1(x,\mu_n)\\ \psi_2(x,\mu_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(s,\mu_n) & \psi_1(s,\mu_n)\end{pmatrix}-\frac{1}{\rho_n}\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda_n)\\ \psi_2(x,\lambda_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(s,\lambda_n) & \psi_1(s,\lambda_n)\end{pmatrix} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\begin{Bmatrix}\dfrac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n} & \dfrac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n} \\ \dfrac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n} & \dfrac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\dfrac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.1.14}$$

olur. Burada $F(x,s)$ fonksiyonunun matris gösterimi

$$F(x,s)=\begin{pmatrix}F_{11}(x,s) & F_{12}(x,s)\\ F_{21}(x,s) & F_{22}(x,s)\end{pmatrix} \tag{7.1.15}$$

şeklindedir. O halde (7.1.14) den

$$F_{11}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.16}$$

$$F_{12}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.17}$$

$$F_{21}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.18}$$

$$F_{22}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.19}$$

yazılır.

Önce $F_{11}(x,s)$ formülü hesaplansın. (7.1.16) nin sağ tarafına $\dfrac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa

$$F_{11}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}+\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)+\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\left(\psi_1(x,\mu)\psi_1(s,\mu)\right)'d\lambda\right]$$

elde edilir. Burada$\,'=\dfrac{d}{d\lambda}$. $-1\le\cos x\le 1,\ -1\le\sin x\le 1,\ 0\le x<\pi$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)c_1\right|+\left|\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_2\,d\lambda\right|\right]$$

$$\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\rho_n-\sigma_n\right)c_3\right|+\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_4\,d\lambda\right|\right]$$

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le C_1\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$$

elde edilir. $A\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$ olduğundan

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le C_1A \tag{7.1.20}$$

bulunur. (7.1.12) den

$$F_{11}^{(n+1)}(s,t;x)=\int_0^x F_{11}(s,u)F_{11}^{(n)}(u,t;x)\,du,\ \ n\ge 1 \tag{7.1.21}$$

olur buradan

$$F_{11}^{(2)}(s,t;x)=\int_0^x F_{11}(s,u)F_{11}(u,t;x)\,du$$

elde edilir. $0\le x<\pi$ olduğundan

$$\left|F_{11}^{(2)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^2}{\pi}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\left|F_{11}^{(3)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^3}{\pi}$$

$$\vdots\qquad=\qquad\vdots$$

$$\left|F_{11}^{(n)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}$$

elde edilir. (7.1.13) eşitliğinden

$$K_{11}(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F_{11}^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.22}$$

yazılabilir. (7.1.22) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\left|K_{11}(x,x)\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}\right|$$

olur. $C_1A\pi\leq\dfrac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left|K_{11}(x,x)\right|&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}=C_1A+\pi(C_1A)^2+\pi^2(C_1A)^3+\ldots\\&\leq C_1A\left(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots\right)\\&\leq 2C_1A\end{aligned} \tag{7.1.23}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}F_{12}(x,s)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}+\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\sigma_n}\right]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)+\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\left(\psi_1(x,\mu)\psi_2(s,\mu)\right)'d\lambda\right]\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\left|F_{12}(x,s)\right|&\leq\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)c_5\right|+\left|\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_6\,d\lambda\right|\right]\\&\leq\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\rho_n-\sigma_n\right)c_7\right|+\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_8\,d\lambda\right|\right]\\\left|F_{12}(x,s)\right|&\leq C_2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\end{aligned}$$

elde edilir. $A\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$ olduğundan yukarıdaki işlemlerin benzerleri yapılırsa

$$\left|F_{12}(x,s)\right|\leq C_2A \tag{7.1.24}$$

elde edilir. (7.1.12) den

$$F_{12}^{(n+1)}(s,t;x)=\int_0^x F_{12}(s,u)F_{12}^{(n)}(u,t;x)du,\ \ n\geq 1 \tag{7.1.25}$$

olup buradan

$$F_{12}^{(2)}(s,t;x)=\int_0^x F_{12}(s,u)F_{12}(u,t;x)du$$

elde edilir. $0\leq x<\pi$ olduğundan

$$\left|F_{12}^{(2)}(s,t;x)\right|\leq \left(C_2A\right)^2\pi$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\begin{aligned} F_{12}^{(3)}(s,t;x) &\leq \frac{\left(C_2A\pi\right)^3}{\pi} \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ F_{12}^{(n)}(s,t;x) &\leq \frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi} \end{aligned}$$

elde edilir. (7.1.13) eşitliğinden

$$K_{12}(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F_{12}^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.26}$$

yazılabilir. (7.1.22) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\left|K_{12}(x,x)\right|\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\right|$$

olur. Burada $C_2A\pi\leq\dfrac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} \left|K_{12}(x,x)\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}=C_2A+\pi(C_2A)^2+\pi^2(C_2A)^3+\ldots \\ &\leq C_2A\left(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots\right) \\ &\leq 2C_2A \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\left|K_{21}(x,x)\right|\leq 2C_3A \tag{7.1.27}$$

$$\left|K_{22}(x,x)\right|\leq 2C_4A \tag{7.1.28}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Diğer taraftan

$$BK(x,x)-K(x,x)B=Q_1(x)-Q_2(x)$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{11}(x,x) & K_{12}(x,x)\\ K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}K_{11}(x,x) & K_{12}(x,x)\\ K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x)\\ K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x)-K_{21}(x,x)\end{pmatrix}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{pmatrix}K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x)\\ K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x)-K_{21}(x,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1(x)-p_2(x) & q_1(x)-q_2(x)\\ q_1(x)-q_2(x) & p_2(x)-p_1(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan da

$$q_1(x)-q_2(x)=K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) \tag{7.1.29}$$

$$p_1(x)-p_2(x)=K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \tag{7.1.30}$$

bulunur. (7.1.29) ve (7.1.30) denklemleri ve (7.1.23), (7.1.26), (7.1.27) ve (7.1.28) eşitsizliklerinden

$$\left|p_1(x)-p_2(x)\right|\le C'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C'A$$

$$\left|q_1(x)-q_2(x)\right|\le C''\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C''A$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler $\left[0,\pi\right)$ aralığında bulunan tüm x değerleri için sağlandığından

$$\max_{0\le x<\pi}\left|p_1(x)-p_2(x)\right|\le C'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C'A$$

$$\max_{0\le x<\pi}\left|q_1(x)-q_2(x)\right|\le C''\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C''A$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] **Ambartsumyan, V.A.,** 1929, *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Z. Physik, 53, 690-695.

[2] **Borg, G.,** 1945, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta Math., 78, 1-96.

[3] **Levinson, N.,** 1949, *The Inverse Sturm- Liouville Problem,* Mat. Tidsskr. B., pp.25-30.

[4] **Levinson, N.,** 1949, *Criteria fort he Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators*, Casopis. Pest. Mat. Fys., 74, 17-20.

[5] **Delsarte, J.,** 1938, *Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Linearies Aux Derivees Partielles du Second Ordre*, C. R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182.

[6] **Delsarte, J. and Lions, J.,** 1957, *Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe*, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128.

[7] **Levitan, B.M.,** 1964, *Generalized Translation Operators and some of its Applications,* Jerusalem.

[8] **Povzner, A.V.,** 1948, *On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis*, *Mat. Sb.,* 23.

[9] **Tichkonov, A.N.,** 1949, *Uniqueness Theorem for Jeophysics Problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 69, No:4, 797-800.

[10] **Marchenko, V.A.,** 1950, *Some Problems in the Theory of Second–Order Differantial Operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 72, 457-560.

[11] **Krein, M.G.,** 1951, *Solution of the Inverse Sturm-Liouville problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR,76, 21-24.

[12] **Krein, M.G.,** 1954, *On a Method of the Effective Solution of an Inverse BoundaryValue Problem,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 95, 767-770.

[13] **Gelfand, I.M. and Levitan, B.M.,** 1951, *On the Determination of a DifferentialEquations by its Spectral Function,* Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math., 15, 309-360.

[14] **Levitan, B.M. and Gasymov, M.G.,** 1964, *Determination of a Differential Equations by two its Spectra*, Russian Math Surveys, 19, 1-63.

[15] **Cardner, G., Green, J., Kruskal, M. and Miura, M.,** 1967, *A Method for Solvingthe Korteweg-De Vries Equation*, Phys. Rev. Lett., v. 19, 1095-1098.

[16] **Lax, P.,** 1968. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, *Comm. Pure and Appl. Math.*, v .21,467-490.

[17] **Faddeev, L.D.,** 1964, *Properties of the S-Matrix of the One-Dimensional Schrödinger Equation trudy* Mat. Inst. Steklow, 73, 314-336.

[18] **Prats, F. and Toll, J.,** 1959, *Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States*, Phys. Rew., 113, (1), 363-370.

[19] **Moses, H.E.,** 1957, *Calculation of the Scattering Potential for One-DimensionalDirac Equation from Reflection Coefficient and Point Eigenvalues*, Bull. Amer. Phys. Soc., 4, 240.

[20] **Gasymov, M.G. and Levitan, B.M.,** 1966, *The Inverse Problem for the Dirac System*, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.

[21] **Gasymov, M.G. and Dzhabiev T.T.,** 1955, *On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator,* Baku- ELM., *46-71.*

[22] **Sargsjan, I.S.,** 1966a, *A Theorem of the Completeness of the Eigenfunctions of the Generalized Dirac System,* Dokl., Akad. Nauk. Arm. SSR, 42, (2), 77-82.

[23] **Sargsjan, I.S.,** 1966b, *Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional DiracSystem,* Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat., 1, (6), 392-436.

[24] **Quigg, C., Rosner, J.L. and Thacker, H.B.,** 1978, Inverse Scattering Problem for Quarkonium Systems, I and II Phys. Rev., D 18, No: 1, 274-295.

[25] **Grosse, H. and Martin, A.,** 1979, *Theory of the Inverse Problem for ConfiningPotentials*, Nuclear Phys., B 14 B, 413-432.

[26] **Abdukadyrov, E.,** 1967, *Computation of the Regularizad Trace for a Dirac System,* Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh., 22, (4), 17-24.

[27] **Khasanov, A.B.,** 1994, *On Eigenvalues of the Dirac Operator Located on the Continuous Spectrum*, Theory and Math. Phys. V.99, No: 1, 20-26.

[28] **Gasymov, M.G.,** 1967, *The Inserve Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order 2n*, Soviet Physics Dokl. 11, 676-678.

[29] **Veliev, S.G.,** 1972, *Inverse Problem for the Dirac systems a the Whole Axis*, DEP. VINITI, 4917-4972.

[30] **Maksudov, F.G. and Veliev, S.G.,** 1975, *The Inverse Scattering Problem for the Nonself-Adjoint Dirac Operator on the Whole Axis*, Soviet Math. Dokl. V. 16, No: 6, 1629-1633.

[31] **Roos, B.W. and Sangren, W.C.,** 1961, *Spectra for a Pair Singular First OrderDifferential Equations*, Proc. Amer. Math. Soc., V. 12, 468-476.

[32] **Harris, B.J.,** 1983, *Bounds for the Eigenvalues of Separated Dirac Operators*, Proc. of Royal Society of Edinburgh, 95 A, 341-366.

[33] **Evans, W.D. and Harris, B.J.,** 1980, *Bounds for the Point Spectra of Separated Dirac Operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect., A 88, 1-15.

[34] **Otelbayev, M.O.,** 1973, *Distribution of the Eigenvalues of the Dirac Operator*, Mat. Zametki, 14, 843-852.

[35] **Martynov, V.V.,** 1965, *Conditions of Discreteness and Countinuity of the Spectrumin the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Differential Equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165, 996-999.

[34] **Nabiev, I.M.,** 2003, *On reconstruction of Dirac operator on the segment*, Proceedingof IMM of Nas of Azerbaijan, 18, 97-102.

[35] **Kerimov N.B.,** 2002, *A boundary value problem for the Dirac system with a spectralparameter in the boundary conditions*, Differ. Equ. 38 (2), 164-174.

[36] **Agranovich M.S.,** 2001, *Spectral problems for the Dirac system with spectralparameter in local boundary conditions,* Funct. Anal. Appl. 35, 161-175.

[37] **Arutyunyan, T.N.,** 2008, *Transformation operators for the canonical Dirac system*, Differ. Uravn. 44, 1011-1021.

[38] **Amirov R. Kh. Keskin B. and Ozkan A. S.,** 2009, *Direct and inverse problems for the Dirac operator with a spectral parameter linear contained in a boundarycondition*, Ukrainian Math. J. 61, 1365-1379.

[39] **Yang C.F.,** 2011, *Hochstadt-Lieberman theorem for Dirac operator with igenparameter dependent boundary conditions*, Nonlinear Anal., 74, 2475-2484.

[40] **Panakhov, E.S.,** 1981, *Inverse problem for Dirac system in two partially settled spectrum*, VINITY 3304, 1-29.

[41] **Hryniv R.O. and Mykytyuk Ya.V.,** 2003, *Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Inverse problems, 19, 665-684.

[42] **Savchuk A.M. and Shkalikov A.A.,** 1999, *Sturm-Liouville operators with singularpotentials*, Mat. Zametki, 66, 897-912.

[43] **Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R. and Holden H.,** 1988, *Solvable Modelsin Quantum Mechanics*, New York.

[44] **Albeverio S. and Kurasov P.,** 2000, *Singular Perturbations of Differential Operators, Solvable Schrödinger Type Operators*.

[45] **Savchuk A.M.,** 2001, *On eigenvalues and eigenfunctions of Sturm-Liouvilleoperators with singular potentials*, Mat. Zametki, 69, 277-285.

[46] **Hryniv R.O. and Mykytyuk Ya.V.,** 2003, *Transformation operators for Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Math. Phys. Anal. Geom.

[47] **Pöschel J. and Trubowitz E.,** 1987, *Inverse spectral theory*, Pure Appl. Math., 130.

[48] **Hald O.,** 1984, *Discontinuous Inverse Eigenvalue Problem*, Commun. Pure Appl. Math., 37, 539-577.

[49] **Andersson L.,** 1988, *Inverse Eigenvalue problems for a Sturm-Liouville equation in impedance form*, Inverse problems, 4, 929-971.

[50] **Carlson R.,** 1994, *Inverse Sturm-Liouville problems with singularity at zero,* Inverse problems, 10, 851-864.

[51] **Hald O. and McLaughlin J.R.,** 1998, *Recovery of BV Coefficients from nodes*, Inverse problems, 14, 245-273.

[52] **Yurko V.A.,** 2000, *Inverse problems for differential equations with singularities lying inside the interval,* J. Inverse Ill.-Posed Probl., 8, 89-103.

[53] **Amirov, R.Kh. and Yurko V.A., ** 2001**,** *On differential operators with singularity and Discontinuous Conditions Inside the Interval*. Ukr. Math. Jour., 53, 1443-1458.

[54] **Gasymov M.G.,** 1965, *Determination of the Sturm-Liouville equation having singularity from two spectra*, DAN SSSR, 161, 274-276.

[55] **Koyunbakan H.,** 2002, *Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Teorisi*, Doktora Tezi, Elazığ.

[56] **Panakhov E.S. and Yilmazer R.,** 2006, *On inverse problem for Singular Sturm-Liouville operator from two spectra*, Ukrainian Mathematical Journal, 147-154.

[57] **İç Ü.,** 2003, *Kanonik Dirac Operatörü İçin Kısmen Çakışmayan İki Spektruma göre Ters problem*, Doktora Tezi, Elazığ.

[58] **Baş E.,** 2006, *Spektral ve Potansiyel Teorinin Ters problemleri*, Doktora Tezi, Elazığ.

[59] **Kayalar M.,** 2003, *Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Singüler Sturm-Liouville Operatörü için Ters problem*, Doktora Tezi, Erzurum.

[60] **Levitan, B.M.,** 1978, *On the Determination of the Sturm-Liouville operator from One and Two Spectra*, Math. Ussr, Izvestija, vol. 12, no.1, 179-193.

[61] **Mizutani, A.,** 1984, *On the inverse Sturm-Liouville problem,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math., 31, 319-350.

[62] **Kreyszig, E.,** 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications,* New York.

[63] **Bayraktar, M.,** 1994, *Fonksiyonel Analiz, Atatürk üniversitesi yayınları*, Erzurum, s.314.

[64] **Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V.,** 1972, *Elementary of Functional Analysis and Theory of Functions*, Moscow, Russia*,* p. 327.

[65] **Musayev, B., Alp, M.,** 2000, *Fonksiyonel Analiz,* Balcı yayınları, Kütahya, s. 470.

[66] **Levitan, B.M., and Sargsyan, I.S.,** 1990, *Sturm-Liouville and Dirac Operators*, Netherlands.

[67] **Naimark, M. A.,** 1968, *Linear Differential Operators*, Frederik Ungar Publishing Co. Inc., London.

[68] **İdemen, M.,** 1999, *Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi*, Işık ün., İstanbul.

[69] **Hacısalihoğlu, H.H., Haciyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown L.M., İbikli, E., Brown, S.,** 2000, *Matematik Terimleri Sözlüğü*, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, s.678.

[70] **Olver, F.W.J.,** 1974, *Introduction to asymptotics and special functions*, Akademic pres, New York and London, p. 375.

[71] **Balcı, M.,** 1997, *Analiz II*, Balcı yayınları, Ankara, s.420.

[72] **Adams, R.A.,** 1978, *Sobolev Space,* Academic Press, New York.

[73] **Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S.,** 2010, *Adi Diferansiyel Denklemler*, Dora Yayınları, Bursa.

ÖZGEÇMİŞ

10.09.1979 yılında Erzincan'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzincan' da tamamladı. 1999 yılında Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen–Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2003 yılında mezun oldu. 2005 yılında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2006 yılında Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2008 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansını bitirdi. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına başladı.

Evli ve bir çocuk babasıdır.

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ
Murat ŞAT

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT

(08121204)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12.06.2012

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ
Murat ŞAT
(08121204)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12.06.2012
Tezin Savunulduğu Tarih: 03.07.2012

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (A.Ü.)
Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK (F.Ü.)
Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü.)
Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü.)

TEMMUZ-2012

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında ve yürütülmesinde, engin bilgi birikimini tam olarak bir eğitimci üslubu ve sıfatıyla, yüksek makamın alçak gönüllülüğü içerisinde, aktarmasına ve böyle bir çalışmanın planlanması, düzenli bir şekilde yürütülmesi sürecinde her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum yakın ilgi ve desteklerinden dolayı anneme ve aileme teşekkür eder saygı ve sevgilerimi sunarım.

Murat ŞAT

ELAZIĞ–2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışma yedi bölümden oluşmuştur.

İlk bölümde; regüler Sturm-Liouville ve Dirac operatörlerinin, spektral teorisinin (düz ve ters problemler) tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümde; diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; bir boyutlu stasyoner Dirac operatörünün genel görüntüsü ve kanonik formları, özdeğerler için asimptotik formül, kanonik Dirac operatörü için matris dönüşüm operatörü, normlaştırıcı sayıların iki spektrum türünden ifadesi, normlaştırıcı sayılar için asimptotik formül ve iki spektruma göre ters problem incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; singüler Dirac operatörü, iki spektruma göre ters problem, normlaştırıcı sayılar için asimptotik ifadeler elde edilmiştir.

Beşinci bölümde; yarı eksende Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem incelenmiştir.

Altıncı ve yedinci bölümler çalışmanın orijinal kısmı olup bu bölümlerde sırasıyla singüler Dirac operatörü için dönüşüm operatörünün genel dejenereliği ve kararlılık problemi incelenmiştir

Anahtar Kelimeler: Spektrum, Ters problem, Dirac operatörü, Özdeğer, Özvektör fonksiyon, Genel dejenere, Kararlılık.

SUMMARY

Spectral Theory of the Singular Dirac Operator

This thesis consists of seven chapters.

In the first chapter; the history of spectral theory (well and ill-posed problem) Sturm-Liouville and Dirac operators were given.

In the second chapter; some fundemantal definitions often used in the spectral theory differential operators were given.

In the third chapter; one dimensional stationary and canonic forms of Dirac operator, asymptotic formula for eigenvalues, matrix transformation operator for canonic Dirac operators, the statement of norming constants in terms of two spectrums, asymptotic formula for norming constants and inverse problem according to two spectrums were studied.

In the fourth chapter; singular Dirac operator, inverse problem according to two spectrum and asymptotic statements for norming constants were obtained.

In the fifth chapter; in semi-axis inverse problem according to two spectrums for Dirac operator was examined.

In the sixth and the seventh chapters that constitute the original part of our study, the general degenerate of transformation operator for singular Dirac operator and well-posedness problem were studied, respectively.

Key Words: Spectrum, Inverse problem, Dirac operator, Eigenvalue, Eigenvector function, General degenerate, Well-posedness.

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER LİSTESİ

$L_2[a,b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
H	: Hilbert uzayı
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyon
λ_n	: $n.$ özdeğer
φ_n	: $n.$ özfonksiyon
$K(x,y)$	: Çekirdek fonksiyonu
α_n	: $n.$ normlaştırıcı sayı
$\rho(\lambda)$	: Spektral fonksiyon
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir (telin titreşimi, zar titreşimi, vb.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Matematikte l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H da lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX.–XX. asırlarda birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sınırlı ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler; tanım bölgesi sınırsız veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak şekilde) diferansiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Rietsz, J. Von Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapıldığı bilinmektedir.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşım 1946 yılında E. C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre sık sık bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Lineer diferansiyel operatörler teorisinde spektral analizin ters problemleri önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel operatörler için ters problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak (veya yapısını kurmak) mümkündür.
2. Spektral verilere göre operatör birebir olarak mı tanımlanır.
3. Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması (kurulması) yöntemlerinin bulunmasıdır.

Ters problemlerle ilgili ilk sonuç, V. A. Ambartsumyan' a [1] aittir. 1929 yılında V. A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.1. $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_n, \cdots$'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (0 \le x \le \pi) \tag{1.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{1.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0,1,\cdots)$ ise $q(x) = 0$ dır.

V. A. Ambartsumyan'ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir.

Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G. Borg'a aittir [2].

Teorem 1.2. $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (1.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0\,, \tag{1.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\,, \tag{1.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$'ler ise (1.1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad (h \neq h_1) \tag{1.5}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\,,$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve $h,\ h_1$ ve H sayılarını tek olarak belirtir. ($h,\ h_1$ ve H sonlu gerçel sayılardır).

G. Borg'un bu çalışmasında $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilmiştir ve operatör bu dizilerin yardımıyla belirtilmiştir. Yani, bu tip operatörün varlığı önceden belli olduğu kabul edilmiştir. G. Borg, aynı çalışmada bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, V. A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığı N. Levinson [3], [4] tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca N. Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte, J. Lions [5], [6] ve B. M. Levitan [7] tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner [8] kendi çalışmalarında göstermiştir.

Daha sonra ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde teklik problemiyle ilgili en önemli çalışmalar A. N. Tichkonov (Tikhonov) [9] ve V. A. Marchenko [10] tarafından yapılmıştır. Marchenko bu çalışmasında teklik problemlerinin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=1, \quad \varphi'(0,\lambda)=h \tag{1.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda)=\varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{1.7}$$

sayıları verilen operatörün normlaştırıcı sayıları,

$$\rho(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}\frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V. A. Marchenko yukarıda bahsedilen çalışmada G. Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımı ile vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun, Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. V. A. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M. G. Krein [11], [12] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V. A. Marchenko'nun çalışması yayınlanmadan önce A. N. Tikhonov [9] tarafından V. A. Marchenko'nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A. N. Tichkonov'un çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir.

Teorem 1.3. $\lambda<0$ olduğunda

$$U''+\lambda\rho^2(x)U=0, \qquad x>0,\ U(\infty)=0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x)\geq\rho_0>0$ dır. $R(\lambda)=\dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda<0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I. M. Gelfand ve B. M. Levitan [13], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları verdiler. Ayrıca bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir

yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre bulunması için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen klasik asimptotik formüllerinin sağlanmasıdır:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \ldots + \frac{a_{\left[\left[\frac{m}{2}\right]\right]}}{n^{2\left[\left[\frac{m}{2}\right]\right]+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\left[\left[\frac{m}{2}\right]\right]+1}},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \ldots + \frac{b_{\left[\left[\frac{m}{2}\right]\right]}}{n^{2\left[\left[\frac{m}{2}\right]\right]+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\left[\left[\frac{m}{2}\right]\right]+1}},$$

burada $a_0 = \frac{1}{\pi}\left[h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\frac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek sayı ise $\sum \left(\frac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dur.

Fakat bu çalışmalarda ters problemin iki spektruma göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B. M. Levitan ve M. G. Gasimov'un [14] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{1.8}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n.$ çarpanın bulunmadığını gösterir. (1.8) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (1.8) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [14] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1. $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri çaprazlaşır (sıralıdır), yani

   $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$

2. λ_n ve μ_n'ler

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3. $a_0 \neq a_0'$.

Sturm-Liouville operatörünü inceleme sürecinde özellikle XX. asrın ikinci yarısında kullanılan yöntemlerin sayısı sürekli bir şekilde çoğalmıştır. Buna kanıt olarak 1967 yılında bir grup Amerikan fizikçileri ve matematikçileri G. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura [15] ve P. Lax [16] tarafından bulunan bazı kısmi türevli nonlineer evalusyon denklemleri ile Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki bağıntıyı gösterebiliriz. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulamaları olan singüler Sturm-Liouville operatörleri için kuantum teorisinin ters saçılma problemleri halen yoğun bir şekilde fizikçiler ve matematikçiler tarafından araştırılmaktadır. Kuantum saçılma teorisinin ters problemleri ile ilgili tarihçe detaylı bir şekilde L. D. Faddeev'in [17] çalışmasında verilmiştir.

Şimdi ise Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları hatırlatalım. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar doğal olarak fizikçiler F. Prats, J. Toll [18], H. E. Moses [19] ve diğerleri tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0,\infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasimov ve B. M. Levitan [20] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B\frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y, \qquad 0 < x < \infty \tag{1.9}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \tag{1.10}$$

$$(y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0, \ H_1 \neq H) \tag{1.11}$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$, (1.9) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=0,\quad \varphi_2(0,\lambda)=-1$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan $\rho(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ fonksiyonu (1.9), (1.10) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x)\in L^2(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda)=\int_0^n f^T(x)\,\varphi(x,\lambda)dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(\lambda)-F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda)=0$$

olmak üzere

$$\int_0^{\infty} f^T(x)\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F^2(\lambda)d\rho(\lambda) \tag{1.12}$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Ayrıca, bu çalışmada aşağıdaki önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 1.4.

$$\sigma(\lambda)=\rho(\lambda)-\frac{\lambda}{\pi}$$

ve

$$F(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}(1-\cos\lambda x)/\lambda\\ -\sin\lambda x/\lambda\end{pmatrix}\left(\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda}-\frac{\sin\lambda y}{\lambda}\right)d\sigma(\lambda)$$

olmak üzere $y\le x$ için $K(x,y)$ matris fonksiyonu

$$F(x,y)+K(x,y)+\int_0^x K(x,s)F(s,y)ds=0 \tag{1.13}$$

integral denklemini sağlar.

Teorem 1.5. $\rho(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

1. $g(x)\in L^2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyonu ve

$$G(\lambda)=\int_0^{\infty} g^T(x)\,s(x,\lambda)dx,\quad s(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\lambda x\\ -\cos\lambda x\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}, \quad c(x,\lambda) = \begin{pmatrix} (1-\cos\lambda x)/\lambda \\ -\sin\lambda x/\lambda \end{pmatrix}$$

olacak biçimde

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda) c^T(y,\lambda) d\sigma(\lambda)$$

matris fonksiyonu ikinci merteben sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

Bu takdirde her sabit $x \geq 0$ için (1.13) integral denklemi her iki değişkene göre sürekli olan tek $K(x,y)$ çözümüne sahiptir.

Teorem 1.6. $Q(x)$ sürekli matris fonksiyonu olmak üzere monoton artan $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun (1.9), (1.10) sınır değer probleminin spektral fonksiyonu olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerek ve yeterdir:

1. Eğer $g(x) \in L^2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} g^T(x) s(x,\lambda) dx$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda) c^T(y,\lambda) d\{\rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}\}$$

matris fonksiyonu $F_{11}(x,0) = F_{21}(x,0) = 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi M. G. Gasimov ve T. T. Dzhabiev [21] tarafından yapılan çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki önemli teoremler ispatlanmıştır:

Teorem 1.7. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri sırası ile (1.9), (1.10) ve (1.9), (1.11) problemlerinin özdeğerleri ise

$$\alpha_n = \frac{H_1 - H}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \mu_n}, \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots) \tag{1.14}$$

dir. Burada, ' simgesi sonsuz çarpımda $k = n$ teriminin mevcut olmadığını gösterir.

Teorem 1.8. $p(x)$ ve $q(x)$ $[0, \pi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve k. mertebeden türevleri $L^2(0,\pi)$ de olmak üzere $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizilerinin sırası ile (1.9), (1.10) ve (1.9), (1.11) problemlerinin spektrumları olması için

1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarının çaprazlaşması, yani

   $$\cdots < \lambda_{-n} < \mu_{-n} < \lambda_{-n+1} < \cdots < \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \cdots < \lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1} < \cdots$$

2. $\alpha \neq \beta,\ 0 \le \beta, \alpha \le \pi$ ve $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{n,k}\right|^2$ ve $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left|\beta_{n,k}\right|^2$ serileri yakınsak olmak üzere

   $$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

   $$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \cdots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

asimptotik formüllerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

Dirac operatörü için özvektör fonksiyonlarının tamlığı, Cauchy probleminin çözümü, self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülarize izin hesaplanması, periodik ve antiperiodik problemler, açılım teoremleri, özvektör fonksiyonlarının asimptotiği, 2n mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi, kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem sırası ile [22-40] çalışmalarında incelenmiştir.

Diğer taraftan $W_2^{-1}(0,1)$ uzayında singüler reel değerli potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem R.O. Hryniv ve Ya.V. Mykytyuk [41] tarafından yapılan çalışmada incelenmiştir.

Bu çalışmada $q \in W_2^{-1}(0,1)$ reel değerli dağılım fonksiyonu olmak üzere $H := L_2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$l := -\frac{d^2}{dx^2} + q \tag{1.15}$$

diferansiyel ifadesine karşılık gelen T Sturm-Liouville operatörü tanımlanmış ve A. M.

Savchuk ve A. A. Shkalikov [42]' deki çalışmasına göre, regularizasyon yöntemi ile Dirichlet sınır koşularından bahsedilmiştir.

Dağılım anlamında $\sigma' = q$ olacak şekilde reel değerli $\sigma \in H$ alınmış ve

$$D(T_\sigma) = \left\{ u \in W_1^1(0,1) \middle| u' - \sigma u \in W_1^1(0,1), l_\sigma(u) \in H, u(0) = u(1) = 0 \right\} \quad (1.16)$$

tanım kümesinde

$$Tu = T_\sigma u = l_\sigma(u) := -(u' - \sigma u)' - \sigma u' \quad (1.17)$$

ifadesi yazılmıştır.

Burada, dağılım anlamında bütün $u \in D(T_\sigma)$ için $l_\sigma(u) = -u'' + qu$ ifadesi incelendiğinde özellikle T_σ operatörü, regüler potansiyeller için ilkel σ nın özel seçimine bağlı değildir ve (1.15)'e karşılık gelen standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörü ile çakışır. Ayrıca T_σ ilkel $\sigma \in H$ 'ye düzgün resolvent anlamında sürekli olarak bağlıdır ve böylece T_σ, herhangi bir $\sigma' = q \in W_2^{-1}(0,1)$ için (1.15) 'e ait standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörüdür. Ele alınan potansiyeller sınıfı Dirac δ -tipli ve $\frac{1}{x}$ -Coulomb tipli potansiyelleri içerir ve matematiksel fizik ve kuantum mekaniğinde geniş olarak kullanılır [43,44].

[42] den iyi bilinir ki, her reel değerli $\sigma \in H$ için yukarıda tanımlanan T_σ operatörü, diskret basit (λ_k^2), $k \in \mathbb{N}$ spektrumlu self-adjoint operatörüdür

ve $\lambda_k, \lambda_k = \pi k + \mu_k$ ($\mu_k \in l_2$ olan dizi) şeklinde asimptotiğe sahiptir [42,45,46]. Regüler

q potansiyelleri için yukarıdaki asimptotikler $\mu_k = O(\frac{1}{k})$ olacak şekilde yazılır.

Bu çalışmada, reel ikişerli farklı sayılardan oluşan ve yukarıda ifade edilen asimptotiklere sahip hangi (λ_k^2) dizileri $W_2^{-1}(0,1)$ den olan singüler potansiyelli Sturm-Liouville operatörlerinin spektrumu dur? Sorusunun cevabı araştırılmıştır. Bu soru, ele alınan potansiyeller için ters spektral probleme götürür. Yani; bu durum, karşılık gelen spektral parametreye dayanan q potansiyelinin kurulmasıdır.

Regüler durumda, yukarıda bahsedilen problemin çözümü için sadece (λ_k^2) spektrumunun yetersiz olduğu bilinmektedir. Aynı Dirichlet spektrumlu Sturm-Liouville operatörlerinin ürettiği birçok farklı q potansiyelleri (izospektral) vardır. J. Pöschel ve E.

Trubowitz [47]; verilen (λ_k^2) spektrumlu (reel, basit ve $\lambda_k = \pi k + O(\frac{1}{k})$ asimptotiğine ait) H Hilbert uzayındaki bütün potansiyellerinin kümesinin, analitik olarak $w_n = n$ ağırlıkları ile $l_2(w_n)$ ağırlıklı uzaya difeomorfik olduğunu göstermişlerdir.

q potansiyelini yeniden tek olarak elde etmek için spektrumun yanında bazı ek bilgiler verilmelidir. Bu bilgiler, $(0,1)$ aralığının yarısı üzerindeki potansiyelin bilinmesi veya farklı sınır koşulları olan aynı diferansiyel ifade ile verilen Sturm-Liouville operatörünün spektrumu veya biri bütün aralık için ve diğerleri aralığın eşit iki yarısı için olan üç spektrum olabilir.

Hryniv ve Mykytyuk çalışmasında; I. M. Gelfand, B. M. Levitan ve V. A. Marchenko'ya göre klasik yaklaşım genelleştirilmiş ve $W_2^{-1}(0,1)$ den singüler potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem tam olarak çözülmüştür. Şöyle ki, spektral veriler kümesinin açık bir şekli verilmiş ve bu kümenin keyfi bir elamanından q ' nun yeniden nasıl elde edildiği açıklanmıştır [41].

Diğer singülerite tiplerine (örneğin Sturm-Liouville operatörler sınıfı için a süreksizlik noktası, $\frac{1}{x^\gamma}$ ya benzer potansiyeller, vs.), [48]'de O. Hald, [49]' da L. Andersson, [50]'de R. Carlson, [51]'de O. Hald ve J. R. McLaughlin, [52]'de V. A. Yurko, [53]'de V. A. Yurko ve R. Kh. Amirov bakmışlardır. $q(x) = q_1(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}$ potansiyeline sahip (1.1) denklemi için iki spektruma göre ters problem M. G. Gasimov [54] tarafından çözülmüştür. Daha sonraki yıllarda Bessel tipi tekilliğe sahip potansiyller için ters problemler farklı yöntemlerle H. Koyunbakan [55], Hidrojen atomu denklemleri için E. S. Panakhov ve R. Yılmazer [56], Dirac denklemler sistemi için Ü. İç [57] ve tekile sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörü için kuantum saçılma teorisinin ters problemleri E. Baş [58] ve tekile sahip Sturm-Liouville operatörü için ters problem Mehmet Kayalar [59] tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında singüler Dirac operatörünün spektral analizi (düz ve ters problemleri) incelenmiştir. Ayrıca Levitan'ın çalışmasından faydalanılarak [60]; $K(x,s)$ matris fonksiyonunun genel dejenereliği gösterilmiştir. Son bölümde A. Mizutani'nin [61] çalışmasından faydalanılarak özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar için belirli şartlar sağlamak üzere potansiyel farkı ile ilgili teorem ispatlanmıştır.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, sunulan tezde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Metrik Uzay): X bir cümle olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. Bu özellikler $\forall x, y, z \in X$ için

M1) $d(x, y) \geq 0$

M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3) $d(x, y) = d(y, x)$

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şeklindedir. (X, d) ikilisine ise bir metrik uzay denir. Bir uzay üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir [62].

Örnek 2.1.1. $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $l_\infty = \left\{ x = (x_n) \in K^\infty \,\middle|\, (x_n)\ sınırlı \right\}$ uzayı $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in l_\infty$ olmak üzere

$$d_\infty(x, y) = \sup\left\{ |x_k - y_k| : k \in \mathbb{N} \right\}$$

metriğine göre bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.2. (Tam Uzay): Bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir. l_∞, c, $C[a,b]$, $\mathbb{R}^n$ gibi uzaylar tam uzaylardır. Fakat $\mathbb{Q}$ uzayı tam değildir [63].

Tanım 2.1.3. (Normlu Uzay): X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x \in X$ noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir normlu uzay denir. Bu şartlar $\forall x, y \in X$ için

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3) $\|kx\| = |k| \|x\|$ (k skaler)

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şeklindedir [63].

Örnek 2.1.2. $L_p[0,1]$ uzayı, $f(x) \in L_p[0,1]$ olmak üzere

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır.

Tanım 2.1.4. (Hilbert Uzayı): Herhangi $x, y, z, \ldots$ elamanlar cümlesini H ile gösterelim.

1) H lineer kompleks (reel) uzaydır.
2) H da bulunan her x, y eleman çiftine bu elemanların iç çarpımı denilen ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen karmaşık (reel) bir sayı karşılık gelir. Bu iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar.
   a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
   b) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
   c) $\forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ için $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
   d) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $g(x, y) = \|x - y\|$ olacak şekilde norm anlamında yakınsaklığa göre H uzayı tamdır.
4) Keyfi doğal n sayısı için H uzayında lineer bağımsız n tane eleman mevcuttur. Yani H sonsuz boyutludur.

(1), (2) ve (3) aksiyomları sağlanıyorsa H uzayına üniter Hilbert uzayı denir. (1), (2), (3) ve (4) özellikleri sağlanıyor ise H uzayına soyut Hilbert uzayı veya kısaca Hilbert uzayı denir. Başka bir ifade ile tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [64].

Tanım 2.1.5. $a \leq t \leq b$ olmak üzere $(L_2[a,b])$ uzayı,

$$(L_2[a,b]) = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 \, dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$ dir).

Tanım 2.1.6. (Operatör): Tanım ve değer cümlesi bir vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [65].

Örnek 2.1.3 $C[a,b]$ den kendi içine olan ve

$$Tx(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau,\ \ t\in[a,b]$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir operatördür. Bu operatöre integral operatörü denir.

Tanım 2.1.7. (Lineer Operatör) : E_x ve E_y iki reel lineer topolojik uzay olsun. Değer bölgesi E_y de bulunan ve E_x de tanımlı $y=Ax$ operatörünü göz önüne alalım. A operatörü için

1) $x_1,x_2\in E_x$ olmak üzere $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$

2) λ bir skaler olmak üzere $\forall x\in E_x$ için $A(\lambda x)=\lambda A(x)$

şartları sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir [65].

Örnek 2.1.4. $K(t,s),\ 0\le t,\ s\le 1$ sürekli bir fonksiyon, $x(s)\in C[0,1]$ olmak üzere

$$y(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

eşitliği ile tanımlı $y=Ax$ operatörü bir lineer operatördür.

Tanım 2.1.8. (Sınırlı Operatör): X ve Y birer normlu uzay ve $D(L)\subset X$ olmak üzere $L:D(L)\to Y$ bir operatör olsun.

$$\|Lx\|\le c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c>0$ reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise L operatörünün normu denir [65].

Tanım 2.1.9. (Sürekli Operatör): X ve Y normlu uzaylar $L:X\to Y$ bir operatör ve $x_0\in X$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\|x-x_0\|<\delta$ olduğunda $\|Lx-Lx_0\|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı varsa L operatörü $x_0\in X$ noktasında süreklidir denir [65].

Tanım 2.1.10. (Adjoint Operatör): H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L:H_1\to H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer $L^*:H_1\to H_2$ operatörü

$$\langle Lx,y\rangle=\langle x,L^*y\rangle$$

şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L'nin adjointi denir. Eğer $L^*=L$ ise L'ye self-adjoint operatör denir [65].

Tanım 2.1.11. (Dönüşüm Operatörü): E lineer topolojik uzay, A ve B de $A:E\to E$, $B:E\to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının

kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer tersi olan X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir [66].

Tanım 2.1.12. $L-\lambda I$ operatörünün sınırlı $(L-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir [67].

Tanım 2.1.13. Herhangi λ için $L-\lambda I$ operatörü tersi mevcut olacak şekilde $R_\lambda = (L-\lambda I)^{-1}$ operatörüne

$$Lx - \lambda x = y \text{ veya } (L-\lambda I)x = y$$

denkleminin rezolvent operatörü denir.

Tanım 2.1.14. $D(L)$ tanım bölgesi, L sınırlı lineer bir operatör ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Ly \equiv By' + Q(x)y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x,\lambda) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise, λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise λ sayısına karşılık gelen özvektör fonksiyonu denir [66].

Tanım 2.1.15. $\{\lambda_n\}$ ler L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b \left\{ y_1^2(x,\lambda_n) + y_2^2(x,\lambda_n) \right\} dx$$

sayılarına L operatörünün normlaştırıcı sayıları denir [66].

Tanım 2.1.16. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının herhangi bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 2.1.17. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye tam fonksiyon denir. e^z, $\sin z$, z^2 gibi fonksiyonlar tam fonksiyonlardır.

Tanım 2.1.18. $f(z)$, kompleks düzlemin bir W alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\forall z \in W$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $f(z)$'ye W'de sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.1.19. (Liouville Teoremi): Kompleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

Tanım 2.1.20. $f(z)$ kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon, z_0 ise $f(z)$ 'nin tanımlı olduğu herhangi bir nokta olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir. Eğer $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0, \ldots f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n-katlı sıfırı diye adlandırılır.

Tanım 2.1.21. $f(z)$, z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ama z_0'da diferansiyellenemeyen bir fonksiyon ise z_0'a $f(z)$ 'nin ayrık singüler (aykırı) noktası denir.

Tanım 2.1.22. z_0 bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun.

i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kaldırılabilir aykırı noktası denir.

ii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kutup noktası denir (kutup yeri) denir.

iii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut değilse z_0 noktasına $f(z)$ 'nin esas aykırı noktası denir.

Tanım 2.1.23. (Rouche Teoremi): f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar ve γ, B bölgesinde bulunan f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. Eğer γ üzerinde $|f(z) - g(z)| \leq |f(z)|$ eşitsizliği gerçekleniyorsa, $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ eşitliği geçerlidir. Burada Z_f ve Z_g, $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki sıfırlarının sayısını; P_f ve P_g ise $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki kutuplarının sayısını göstermektedir. Eğer f ve g, B içindeki analitik fonksiyonlarsa $Z_f = Z_g$ [68].

Tanım 2.1.24. $f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(r^{\mu}) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$'nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir [68].

Tanım 2.1.25. $f(z)$ sonlu mertebeli bir tam fonksiyon olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(ar^{\rho})$$

eşitsizliğini sağlayan $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir. (2.1.1) eşitsizliğini sağlayan a sayılarının infimumuna $f(z)$ fonksiyonunun tipi adı verilir ve σ ile gösterilir [68].

Tanım 2.1.26. (Hadamard Teoremi): Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = Cz^{m}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{z_{n}})$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada m, $f(z)$ 'nin orjindeki sıfırının katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$ 'nin 0'dan farklı tüm sıfırlarının kümesidir.

Teorem 2.1.1. (Cauchy İntegral Teoremi): $f(z)$ tek irtibatlı G bölgesinde birebir analitik fonksiyon, γ ise G de kapsanan keyfi düzeltilebilir kapalı eğri olsun. $f(z)$ 'nin γ egrisi üzerinde integrali sıfıra eşittir:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Teorem 2.1.2. (Rezidü Teoremi): D bölgesinde ($f(z)$' nin sonlu sayıda ayrık tekil $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ noktaları hariç) ve D'nin Γ sınırında analitik $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun k katlı kutup noktası ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)(z-z_0)^{k}\right],$$

z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right] \quad \text{dir.}$$

Tanım 2.1.27. (Mittag-Leffler Açılımı): Bir $f(z)$ fonksiyonunun sonlu düzlemdeki aykırılıkları mutlak değer büyüklüğüne göre sıralanmış, basit $a_1, a_2, \ldots$ kutup yerleri ve bu noktalardaki rezüdileri sırasıyla $b_1, b_2, \ldots$ olsun. Eğer C_N hiçbir kutup yerinden geçmeyen, üzerinde $|f(z)| < M$ eşitsizliğinin gerçeklendiği R_N yarıçaplı çember ise ve $N \to \infty$ iken $R_N \to \infty$ oluyorsa

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right]$$

yazılır [68].

Tanım 2.1.28. (O ve o sembolleri): [69,70] $x \in X$ olduğunda, verilen x ler için $|f(x)| \leq C|g(x)|$ olacak şekilde bir C sabiti varsa $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.1.5. $\dfrac{1}{x^3} = o(\dfrac{1}{x^2})$ dir. Çünkü $x \to \infty$ iken $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)/(\dfrac{1}{x^2}) \to 0$ olur.

Örnek 2.1.6. $\cosh x = O(e^x)$ dir. Çünkü $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ olduğundan her iki taraf e^x ile bölünürse

$$\frac{\cosh x}{e^x} = \frac{e^x}{2e^x} + \frac{e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}}$$

olur. Buradan da $x \to \infty$ iken $\dfrac{\cosh x}{e^x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2e^{2x}} \to \dfrac{1}{2}$ olur. Yani $\left|\dfrac{\cosh x}{e^x}\right|$ sınırlıdır. Bu nedenle $\cosh x = O(e^x)$ olur.

Tanım 2.1.29. (Noktasal Yakınsaklık): (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada herbir $x \in A$ için bir n_0 bulunacağından n_0 sayısı hem ε a hem de x noktasına bağlıdır [71].

Tanım 2.1.30. (Düzgün Yakınsaklık): (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada sözü edilen n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlı olup, x noktasına bağlı değildir. Buna göre düzgün yakınsak her dizi noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersi

her zaman doğru değildir. Eğer A cümlesi sonlu ise düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık birbirine denktir [71].

Tanım 2.1.31. $[a,b]$, $\mathbb{R}$'nin kapalı sınırlı bir aralığı ve $(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$'ler $[a,b]$ de açık aralıklar olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ için

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$$

iken

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(b_i)-f(a_i)\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ varsa $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir denir.

Tanım 2.1.32. (Parseval Eşitliği): $f(x),g(x)\in L_2(a,b)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(u)\,g(u)\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho_n}\left(\int_a^b f(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du\right)\left(\int_a^b g(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du\right)$$

dir.

Tanım 2.1.33. Eğer

$$K(x,s)=\sum_{n=0}^{N}f_n(x)\,g_n(x),\qquad s\le x$$

ise $K(x,s)$ çekirdeği genel dejeneredir denir.

Tanım 2.1.34. $\{\lambda_n\}_0^\infty$ ve $\{\lambda_n^{'}\}_0^\infty$ spektrumları çakışsın. $\{\tilde{\lambda}_n\}_0^\infty$ ve $\{\tilde{\lambda}_n^{'}\}_0^\infty$ spektrumları ise sonlu $n=0,1,\cdots,N$ için $\tilde{\lambda}_n\neq\tilde{\lambda}_n^{'}$ ve $n>N$ için $\tilde{\lambda}_n=\tilde{\lambda}_n^{'}$ olsun. Bu takdirde ters problemin

$$K(x,s)+F(x,s)+\int_0^x K(x,t)\,F(t,s)ds=0,\ (0\le x\le\pi)$$

temel integral denklemi genel dejeneredir [60].

Tanım 2.1.35. (a,b) aralığında tanımlı, $(k-1)$. mertebeden türevleri mutlak sürekli olan ve $f,f'',f''',\cdots,f^{(k)}\in L_2(a,b)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W_2^k(a,b)$ ile gösterilir [72].

Tanım 2.1.36. (Dirac-Delta Fonksiyonu):

$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}0, & 0\le t<t_0-a\\ \dfrac{1}{2a}, & t_0-a\le t<t_0+a_0\\ 0, & t\ge t_0+a\end{cases}$$

olmak üzere

$$\delta(t-t_0)=\lim_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)$$

fonksiyonuna Dirac-Delta fonksiyonu denir. Bu fonksiyon

1) $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\ne t_0\end{cases}$

2) $\int_0^\infty \delta(t-t_0)\,dt=1$

3) Herhangi sürekli bir $G(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty \delta(t-a)\,G(t)\,dt=G(a)$$

özellikleri ile karakterize edilir [73].

3. DIRAC OPERATÖRÜ

3.1. Bir Boyutlu Dirac Sistemi

$p_{ik}(x), (i,k=1,2), [0,\pi]$ aralığında tanımlı ve sürekli reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$L=\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{12}(x)=p_{21}(x) \tag{3.1.1}$$

bir matris operatörü olsun. $y(x)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \;\; ve \;\; B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(B\frac{d}{dx}+L(x)-\lambda I\right)y=0 \tag{3.1.2}$$

denklemi, iki tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemden oluşan

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx}+p_{11}(x)y_1+p_{12}(x)y_2&=\lambda y_1 \\ -\frac{dy_1}{dx}+p_{21}(x)y_1+p_{22}(x)y_2&=\lambda y_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

denklem sistemine denktir.

Bu durumda $V(x)-$potansiyel fonksiyon, $m-$parçacığın kütlesi olacak biçimde $p_{12}(x)=p_{21}(x)\equiv 0$ ve $p_{11}(x)=V(x)+m,\; p_{22}(x)=V(x)-m$ olurken relativistik kuantum teorisinde (3.1.2) sistemi 1-boyutlu stasyoner Dirac sistemi olarak bilinmektedir.

2-boyutlu uzayın her düzgün ortogonal dönüşümü

$$H(x)=\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile tanımlanır [66]. Ayrıca,

$$BH=HB$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

$y=Hz$ olacak şekilde (3.1.2) denkleminin her iki tarafı soldan H^{-1} ile çarpılırsa,

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz)+H^{-1}LHz=\lambda H^{-1}Hz$$

veya

$$B\frac{dz}{dx}+\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}LH\right)z=\lambda z \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

$$Q = H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH$$

olacak şekilde, Q matrisi hesaplansın. Bu takdirde

$$H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

ve

$$\frac{d}{dx}H = \begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} H^{-1}B\frac{d}{dx}H &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \\ -\cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{-1}LH &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Son iki eşitlikten,

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) + p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & \varphi'(x) + p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. $\varphi(x)$ fonksiyonu $q_{12}(x) = 0$ olmak üzere seçilsin. Bu takdirde

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x) + \frac{1}{2}\{p_{22}(x) - p_{11}(x)\}\sin 2\varphi(x) = 0$$

şeklindedir. Buradan,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x) - p_{22}(x)}$$

elde edilir. $Q(x)$ matrisinin görüntüsü

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buna göre (3.1.4) denklemi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{3.1.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **I. kanonik formu** denir.

Şimdi $izQ(x) = q_{11}(x) + q_{22}(x) = 0$ olmak üzere bir $\varphi(x)$ fonksiyonu seçilsin, dolayısıyla $2\varphi'(x) + p_{11}(x) + p_{22}(x) = 0$

halini alır. Buradan

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \{p_{11}(z) + p_{22}(z)\}dz$$

elde edilir. Buna göre (3.1.4) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{3.1.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **II. kanonik formu** denir. (3.1.5) ve (3.1.6) denklemlerine (3.1.2) sisteminin kanonik formları da denir. (3.1.2) denklem sistemlerinin spektral teorisinin çeşitli sorunlarını incelerken bu veya diğer kanonik formlardan faydalanmak bize kolaylık sağlar. Örneğin, özdeğerlerin ve özvektör fonksiyonlarının asimptotik davranışı araştırılırken ve keyfi vektör fonksiyonunun (0 ve π noktalarında homojen sınır şartları sağlandığında) (3.1.2) denklem sisteminin özvektör fonksiyonlarına göre açılımı incelenirken, (3.1.5) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar. Sonsuz aralıkta verilmiş (3.1.2) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve ters problem incelenirken de (3.1.6) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar.

(3.1.5) kanonik denklem sistemi için $p(x)$ ve $r(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y_2' + \{p(x) - \lambda\}y_1 = 0, \quad y_1' - \{r(x) - \lambda\}y_2 = 0 \tag{3.1.7}$$

$$y_2(0)\cos\alpha + y_1(0)\sin\alpha = 0 \tag{3.1.8}$$

$$y_2(\pi)\cos\beta + y_1(\pi)\sin\beta = 0 \tag{3.1.9}$$

sınır problemi göz önüne alınsın. Herhangi bir λ_1 değeri için bu problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x,\lambda_1) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_1) \\ y_2(x,\lambda_1) \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda λ_1'e özdeğer, buna karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$'e de özvektör fonksiyon denir.

Lemma 3.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonaldir, yani,

$$\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

dir.

İspat: $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları (3.1.7) sisteminin çözümleri olduğundan,

$$\begin{aligned}
&y_2'(x,\lambda_1) + \{p(x) - \lambda_1\}y_1(x,\lambda_1) = 0 \\
&y_1'(x,\lambda_1) - \{r(x) - \lambda_1\}y_2(x,\lambda_1) = 0 \\
&z_2'(x,\lambda_2) + \{p(x) - \lambda_2\}z_1(x,\lambda_2) = 0 \\
&z_1'(x,\lambda_2) - \{r(x) - \lambda_2\}z_2(x,\lambda_2) = 0
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemler sırası ile $z_1(x,\lambda_2)$, $-z_2(x,\lambda_2)$, $-y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ ile çarpılıp ve daha sonra sonuçlar toplanırsa,

$$\frac{d}{dx}\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\} = (\lambda_1 - \lambda_2)\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}$$

elde edilir. Bu son eşitlik x' e göre 0 dan π ye integrallenirse

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = \{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\}\Big|_0^\pi$$

bulunur. Buradan

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

veya

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi y^T(x,\lambda_1)z(x,\lambda_2)dx = 0$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan, $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonal olurlar. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.2. (3.1.7)-(3.1.9) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: Aksini varsayalım yani, $\lambda_1 = u + iv$ kompleks özdeğer olsun. $p(x)$ ve $r(x)$ reel fonksiyonlar ve α, β sayıları reel olduğu için Dirac operatörünün genel denkleminde eşleniği alınırsa, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısı da bir özdeğerdir. λ_2 ye karşılık gelen $\overline{y}(x, \lambda_1)$ özvektör fonksiyonudur. Bu takdirde Lemma 3.1.1 den dolayı

$$(\lambda - \overline{\lambda})\int_0^{\pi} \{y_1(x,\lambda_1)\overline{y_1}(x,\lambda_1) + y_2(x,\lambda_1)\overline{y_2}(x,\lambda_1)\}dx = 0$$

ve

$$(\lambda - \overline{\lambda})\int_0^{\pi} \left\{|y_1(x,\lambda_1)|^2 + |y_2(x,\lambda_1)|^2\right\}dx = 0$$

olur. $\lambda \neq \overline{\lambda}$ olduğundan, $y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ sıfır olur ki, bu da özvektör fonksiyonlarının sıfır olmaması gerçeği ile çelişir. O halde özdeğerler kompleks olamaz. Bu da ispatı tamamlar.

3.2. Özdeğerler için asimptotik formüller

$$By' + Q(x)y = \lambda y, 0 \le x \le \pi \tag{3.2.1}$$

denklemi göz önüne alınsın. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

$p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli $[0,\pi]$ de toplanabilir (integrallenebilir) fonksiyonlardır. (3.2.1) diferansiyel denklemi

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \tag{3.2.2}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.2.3}$$

sınır koşullarıyla ele alınsın. (3.2.1)-(3.2.3) sınır değer probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}$ normalleştirici sayıları $\{\alpha_n\}$ ile gösterilsin.

Teorem 3.2.1. $p(x)$ ve $q(x)$ k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olacak şekilde verilsin. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları için

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k} \tag{3.2.4}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{\pi} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{3.2.5}$$

asimptotik formülleri söz konusudur. Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{n,k}\right|^2 < \infty$ ve $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_{n,k}\right|^2 < \infty$ serileri yakınsaktır. Bu teoremi $k=1$ ve $p(x)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$ durumunda ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde gösterilebilir.

(3.2.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha, \ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.2.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ ile gösterilsin.

Bu takdirde (3.2.1)-(3.2.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.2.7}$$

denkleminin kökleri ile çakıştığı aşikardır.

Bilindiği gibi [21]

$$\begin{aligned} &K(x,x)B - BK(x,x) = 0 \\ &K_{11}(x,0)\cos\alpha + K_{12}(x,0)\sin\alpha = 0 \\ &K_{21}(x,0)\cos\alpha + K_{22}(x,0)\sin\alpha = 0 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

koşullarını sağlayan bir $K(x,t)$ matrisi vardır.

Ayrıca $[0,\pi]$ aralığında bulunan her sabit x için $K(x,t)$ nin birinci türevleri $L_2(0,x)$ e aittir ve

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt = 0 \tag{3.2.9}$$

dönüşüm operatörü vardır. Burada $\varphi_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$ fonksiyonu $Q(x) = 0$ durumuna karşılık gelen çözüm fonksiyonudur ve $K(x,t) = \begin{pmatrix} K_{11}(x,t) & K_{12}(x,t) \\ K_{21}(x,t) & K_{22}(x,t) \end{pmatrix}$ şeklindedir. (3.2.9) integral denklemi düzenlenip (3.2.3) koşulunda yerine yazılırsa

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = \sin(\lambda\pi + \alpha) + \int_0^\pi \left\{K_{11}(\pi,t)\sin(\lambda t + \alpha) - K_{12}(\pi,t)\cos(\lambda t + \alpha)\right\} dt = 0 \tag{3.2.10}$$

elde edilir. (3.2.10) eşitliğinde kısmi integrasyon uygulanırsa ve (3.2.8) deki ikinci koşuldan faydalanılırsa;

$$\sin(\lambda\pi+\alpha)-\frac{1}{\lambda}K_{11}(\pi,\pi)\cos(\lambda\pi+\alpha)-\frac{1}{\lambda}K_{12}(\pi,\pi)\sin(\lambda\pi+\alpha)$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi\left\{\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos(\lambda t+\alpha)+\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin(\lambda t+\alpha)\right\}dt=0 \tag{3.2.11}$$

elde edilir.

λ_n $\left(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$ (3.2.11) denkleminin kökleri olsun. Bu takdirde $n\to\infty$ iken $\lambda_n\to\infty$ dur. Bu sebeple büyük n ler için birinci yaklaşımda

$$\sin(\lambda_n\pi+\alpha)+O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)=0$$

ifadesi bulunur. Buradan

$$\lambda_n\pi+\alpha=n\pi+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

yazılabilir. $n\to\infty$ iken $\varepsilon_n\to0$ olmak üzere

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n \tag{3.2.12}$$

eşitliği verilsin. Bu takdirde (3.2.11) den

$$\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]-\frac{1}{\lambda_n}\left\{\left[K_{11}(\pi,\pi)\cos\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]\right.$$
$$\left.+K_{12}(\pi,\pi)\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]\right\}+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\int_0^\pi\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right. \tag{3.2.13}$$
$$\left.+\int_0^\pi\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right\}dt=0$$

elde edilir.

$$b_n=\int_0^\pi\left\{\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]+\int_0^\pi\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right\}dt \tag{3.2.14}$$

olsun.

$\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}$ ve $\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}$ fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ ye ait olduğu için $\sum_{-\infty}^{\infty}b_n^{\,2}$ yakınsaktır.

Bu takdirde (3.2.13) den

$$(-1)^n \varepsilon_n \pi - \frac{(-1)^n}{\lambda_n}\left\{K_{11}(\pi,\pi)\cos\left(\varepsilon_n \pi\right) + K_{12}(\pi,\pi)\sin\left(\varepsilon_n \pi\right)\right\} + \frac{b_n}{\lambda_n} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\varepsilon_n = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{b_n}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.2.15}$$

olur. Burada

$$\alpha_1 = \frac{K_1(\pi,\pi)}{\pi}$$

dir. $K_{11}(\pi,\pi)$ fonksiyonunu $p(x)$, $q(x)$ ile ifade ederek hesaplayalım. (3.2.15) formülünden λ_n için aranan formül bulunur.

(3.2.15) ten faydalanarak benzer işlemler yapılırsa

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \frac{c_{1,k}}{n} \text{ ve } \sum_{-\infty}^{\infty} c_{1,k}{}^2 < \infty \tag{3.2.16}$$

şeklinde normlaştırıcı sayılar için asimptotik formül elde edilir. Burada

$$c_1 = \frac{1}{2n}\int_0^\pi \left\{K_{12}(x,x) - K_{21}(x,x)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2n}\left\{\int_0^\pi \left[\frac{3}{2}p(x) - \frac{1}{9}(q(x) + p(x)ctgx)\right]dx - \frac{p(0) + \sin^2\alpha(1 - ctg\alpha)\left[q(0) + p(0)ctg\alpha\right]}{2(1 + ctg\alpha)}\right\}$$

dir.

3.3. Kanonik Dirac Operatörü İçin Matris Dönüşüm Operatörü

A_1 ve A_2 iki lineer diferansiyel operatör, E_1 ve E_2 ise iki lineer fonksiyonel uzay olsun.

Tanım 3.3.1. $X : E_1 \to E_2$ lineer sürekli operatör olmak üzere

1. $A_1 X = X A_2$ (3.3.1)

2. X^{-1} mevcut ve sürekli

şartlarının sağlanması halinde X' e A_1 ve A_2 operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir.

Lemma 3.3.1. λ özdeğerine karşılık gelen A_2 operatörünün özfonksiyonu $\varphi_\lambda \in E_1$, yani

$$A_2 \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$$

olmak üzere aynı λ özdeğerine karşılık gelen $\psi_\lambda = X\varphi_\lambda$, A_1 operatörünün özfonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$A_1\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

şeklindedir.

İspat. $A_1 X = XA_2$ olduğundan

$$A_1\psi_\lambda = A_1 X\varphi_\lambda = XA_2\varphi_\lambda = X\lambda\varphi_\lambda = \lambda X\varphi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.3.2. Lineer topolojik E uzayında A_1, A_2 ve A_3 lineer operatörleri ve E_1, E_2, E_3 kapalı alt uzayları verilmiş olsun. A_1 ve A_2 operatör çifti için X_{A_1,A_2} dönüşüm operatörü

$$X_{A_1,A_2} : E_1 \to E_2$$

şeklinde, A_2 ve A_3 operatörler çifti için X_{A_2,A_3} dönüşüm operatörü ise

$$X_{A_2,A_3} : E_2 \to E_3$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, A_1 ve A_3 operatör çifti için X_{A_1,A_3} dönüşüm operatörü,

$$X_{A_1,A_3} : E_1 \to E_3$$

şeklinde olmak üzere

$$X_{A_1,A_3} = X_{A_1,A_2} X_{A_2,A_3}$$

formülü ile ifade edilir.

İspat. Dönüşüm operatörünün tanımından dolayı

$$A_1 X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2} A_2$$
$$A_2 X_{A_2,A_3} = X_{A_2,A_3} A_3$$

şeklinde olup, ikinci denklemden $A_2 = X_{A_2,A_3} A_3 X^{-1}_{A_2,A_3}$ elde edilir. Bu eşitlik birinci denklemde yerine yazılırsa

$$A_1 X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2} X_{A_2,A_3} A_3 X^{-1}_{A_2,A_3}$$

veya

$$A_1 X_{A_1,A_2} X_{A_2,A_3} = X_{A_1,A_2} X_{A_2,A_3} A_3$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$p_i(x)$ ve $r_i(x)$, $(i=1,2)$, her sonlu aralıkta $(0 \le x \le b < \infty)$ integrallenebilir reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$A_1=\begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_1(x) \tag{3.3.2}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_2(x) & 0 \\ 0 & r_2(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_2(x) \tag{3.3.3}$$

operatörlerini göz önüne alalım. Keyfi sonlu reel h_1 sayısı için

$$f_2(0)-h_1 f_1(0)=0 \tag{3.3.4}$$

sınır şartını sağlayan, $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_1 olsun. Keyfi sonlu reel h_2 sayısı için

$$g_2(0)-h_2 g_1(0)=0 \tag{3.3.5}$$

sınır şartını sağlayan $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_2 olsun. X operatör matrisi $f(x)\in E_1$ için

$$X\{f(x)\}=R(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)f(s)ds \tag{3.3.6}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $R(x)$ ve $K(x,s)$ iki boyutlu veya 2x2 boyutlu kare matrislerdir.

(3.3.2) ve (3.3.6) den,

$$\begin{aligned} A_1X\{f(x)\} &= BR'(x)f(x)+BR(x)f'(x)+Q_1(x)R(x)f(x)+BK(x,x)f(x) \\ &\quad +\int_0^x \{BK'_x(x,s)+Q_1(x)K(x,s)\}f(s)ds \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

dir. Diğer taraftan (3.3.3) ve (3.3.6) dan dolayı

$$XA_2\{f(x)\}= R(x)Bf'(x)+R(x)Q_2(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)\{Bf'(s)+Q_2(s)f(s)\}ds$$

dir. Son integralde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$XA_2\left\{f(x)\right\} = R(x)Bf'(x)+R(x)Q_2(x)f(x)+K(x,x)Bf(x)-K(x,0)Bf(0)$$
$$+\int_0^x \left\{K\left(x,s\right)Q_2(s)-K_s'(x,s)B\right\}f(s)ds \tag{3.3.8}$$

elde edilir. $f(x)$, E_1 uzayında keyfi vektör fonksiyonu olduğu için (3.3.1) eşitliğinden dolayı $f(x)$ ve $f'(x)$ in katsayıları ve (3.3.7), (3.3.8) in integral altındaki ifadelerinin eşit olması gerekir. Bu sebeple $f'(x)$ lerin katsayıları için

$$BR(x) = R(x)B \tag{3.3.9}$$

elde edilir. Eğer

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde alınırsa (3.3.9) eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\delta(x) = \alpha(x),\ \gamma(x) = -\beta(x)$$

bulunur, yani $R(x)$ matrisinin görüntüsü

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix} \tag{3.3.10}$$

olur.

Şimdi $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları hesaplansın. Bunun için (3.3.7) ve (3.3.8) de, $f(x)$ in katsayıları eşitlenirse $R(x)$ matrisinin tanımlanması için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$BR'(x)+Q_1(x)R(x)-R(x)Q_2(x) = K(x,x)B-BK(x,x) \tag{3.3.11}$$

$$K(x,s) = \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

olmak üzere $Q_1(x), Q_2(x), R(x)$ ve B matrislerinin görüntülerinden faydalanarak (3.3.11) denklemi

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x) & p_1(x)\beta(x) \\ -r_1(x)\beta(x) & r_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x) & r_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & r_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s) \\ K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \\ -K_{11}(x,s) & -K_{12}(x,s) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x)+\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x) & \alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x) \\ -\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x) & -\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\left[K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x)\right] & K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \end{pmatrix} \qquad (3.3.12)$$

şeklinde yazılabilir. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple (3.3.12) denklemlerinden

$$\alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x)=-\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x)$$

$$\beta'(x)-\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x)=-\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x)$$

bulunur, yani

$$\begin{aligned} &2\alpha'(x)+q(x)\beta(x)=0 \\ &-2\beta'(x)+q(x)\alpha(x)=0 \end{aligned} \qquad (3.3.13)$$

olur. Burada

$$q(x)=p_1(x)-p_2(x)+r_1(x)-r_2(x) \qquad (3.3.14)$$

şeklindedir. (3.3.13) sistemi de, bulunan birinci eşitliği $\alpha(x)$ ile ikinci eşitliği de $\beta(x)$ ile çarpıp, birinciden ikinci çıkarılırsa

$$2\alpha(x)\alpha'(x)+2\beta(x)\beta'(x)=0$$

yani

$$\left(\alpha^2(x)+\beta^2(x)\right)'=0$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha^2(x)+\beta^2(x)=\alpha^2(0)+\beta^2(0) \qquad (3.3.15)$$

bulunur.

$$f_1(0)=1, \quad f_2(0)=h_1 \qquad (3.3.16)$$

şartları sağlanmak üzere $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu sürekli, diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde $f(x)$ in (3.3.4) sınır koşulunu sağladığı açıktır ve bu sebeple $f(x)\in E_1$

dir. Yine kabul edilsin ki, $g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu, E_2 uzayının elemanı, dolayısıyla (3.3.5) sınır şartı sağlanacak şekilde

$$X\{f(x)\}=g(x) \tag{3.3.17}$$

olsun. Bu takdirde x=0 için (3.3.17) eşitliğinden ve X matris operatörünün tanımından dolayı, yani (3.3.6) ve (3.3.10) bağıntılarına göre

$$X\{f(0)\}=g(0)=R(0)f(0)$$

veya

$$\begin{aligned} g_1(0)&=\alpha(0)f_1(0)+\beta(0)f_2(0) \\ g_2(0)&=-\beta(0)f_1(0)+\alpha(0)f_2(0) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerden (3.3.5) sınır şartını ve (3.3.16) şartlarını göz önüne almak üzere son eşitliklerin birincisini h_2 sayısı ile çarpıp, daha sonra ikinciden çıkarıldığında,

$$\beta(0)=\frac{h_1-h_2}{1+h_1h_2}\alpha(0)$$

elde edilir.

$$\alpha(0)=1 \tag{3.3.18}$$

alınırsa,

$$\beta(0)=\frac{h_1-h_2}{1+h_1h_2} \tag{3.3.19}$$

olur. Buna göre,

$$\alpha^2(0)+\beta^2(0)=\frac{(1+h_1^2)(1+h_2^2)}{(1+h_1h_2)^2}=X^2 \tag{3.3.20}$$

olur. Şimdi (3.3.15), (3.3.18)-(3.3.20) eşitliklerinden faydalanarak (3.3.13) sistemini çözelim. Eğer,

$$\alpha(x)=\chi\sin k(x) \quad \text{ve} \quad \beta(x)=\chi\cos k(x) \tag{3.3.20'}$$

olarak alınırsa,

$$\alpha'(x)=k'(x)\chi\cos k(x) \quad \text{ve} \quad \beta'(x)=-k'(x)\chi\sin k(x)$$

bulunur. Bu değerler (3.3.13) de yerine yazılıp elde edilen denklemlerden birincisi $\cos k(x)$ ile ikincisi de $\sin k(x)$ ile çarpılıp, elde edilen denklemler toplanırsa

$$k(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz + \arcsin\frac{1}{\chi}$$

eşitliği elde edilir. Bu değerler (3.3.20') de yerine yazılırsa, $q(x)$ fonksiyonu (3.3.14) formülü, χ sayısı ise (3.3.20) formülü ile tanımlanacak şekilde $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları için

$$\alpha(x) = \chi\sin\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz + \arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{3.3.21}$$

$$\beta(x) = \chi\cos\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz + \arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{3.3.22}$$

ifadeleri bulunur. Şimdi (3.3.7) ve (3.3.8) de verilen integral altındaki ifadeler eşitlenirse, $K(x,s)$ matris çekirdeği için,

$$K_s'(x,s)B + BK_x'(x,s) = K(x,s)Q_2(s) - Q_1(x)K(x,s) \tag{3.3.23}$$

matris denklemi veya

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial s} & \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} & \frac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2(s) & 0 \\ 0 & r_2(s) \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_2(s) - p_1(x))K_{11}(x,s) & (r_2(s) - p_1(x))K_{12}(x,s) \\ (p_2(s) - r_1(x))K_{21}(x,s) & (r_2(s) - r_1(x))K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= \left(p_2(s) - p_1(x)\right)K_{11}(x,s) \\ \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= \left(r_2(s) - p_1(x)\right)K_{12}(x,s) \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= \left(p_2(s) - r_1(x)\right)K_{21}(x,s) \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= \left(r_2(s) - r_1(x)\right)K_{22}(x,s) \end{aligned}\right\} \tag{3.3.23'}$$

denklem sistemi elde edilir. Sonuç olarak (3.3.8) ifadesinde $f(0)$'ı içeren terim (3.3.7) de

benzer terim olmadığı için) sıfıra eşit olur. Böylece,

$$K(x,0)Bf(0)=0$$

yani,

$$\begin{pmatrix} -K_{12}(x,0) & K_{11}(x,0) \\ -K_{22}(x,0) & K_{21}(x,0) \end{pmatrix} f(0)=0,$$

bu ise

$$K_{12}(x,0)f_1(0)=K_{11}(x,0)f_2(0)$$
$$K_{22}(x,0)f_1(0)=K_{21}(x,0)f_2(0)$$

denklemler sistemine eşdeğerdir. (3.3.4) sınır koşulundan dolayı

$$K_{12}(x,0)=h_1K_{11}(x,0)\ , \quad K_{22}(x,0)=h_1K_{21}(x,0) \qquad (3.3.24)$$

elde edilir. $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ keyfi diferansiyellenebilir sürekli fonksiyonlar olacak biçimde,

$$K_{11}(x,0)=\varphi(x)\ , \quad K_{21}(x,0)=\psi(x) \qquad (3.3.25)$$

ele alınırsa (3.3.24) ve (3.3.25) şartları, $K(x,s)$ matris çekirdeği için

$$K(x,s)\,|_{s=0}=\begin{pmatrix} \varphi(x) & h_1\varphi(x) \\ \psi(x) & h_1\psi(x) \end{pmatrix} \qquad (3.3.26)$$

şartını tanımlar. Burada (3.3.26) şartı (3.3.23) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir [23].

Benzer şekilde Dirac operatörünün II. Kanonik formu için

$$A_1=\begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx}+q_1(x) \\ -\dfrac{d}{dx}+q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_1(x)$$

$$A_2=\begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx}+q_2(x) \\ -\dfrac{d}{dx}+q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_2(x)$$

olmak üzere (3.3.11) denklemi

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x) - q_1(x)\beta(x) & p_1(x)\beta(x) + q_1(x)\alpha(x) \\ q_1(x)\alpha(x) + p_1(x)\beta(x) & q_1(x)\beta(x) + p_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x) + q_2(x)\beta(x) & q_2(x)\alpha(x) - p_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & -q_2(x)\beta(x) - p_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s) \\ -K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \\ -K_{11}(x,s) & -K_{11}(x,s) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) + [p_1(x) - p_2(x)]\alpha(x) - [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x) & \alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x) \\ -\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x) & -\beta'(x) + [p_2(x) - p_1(x)]\alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -[K_{12}(x,x) + K_{21}(x,x)] & K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x) + K_{21}(x,x) \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple

$$\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x)$$
$$= -\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x)$$

$$\beta'(x) - [p_1(x) - p_2(x)]\alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x)$$
$$= -\beta'(x) + [p_2(x) - p_1(x)]\alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x)$$

bulunur, yani

$$2\alpha'(x) = 0, \quad 2\beta'(x) = 0$$

dır. Burada c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere

$$\alpha(x) = c_1, \quad \beta(x) = c_2$$

bulunur. Ayrıca (3.3.23) denklemi

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(s) & q_2(s) \\ q_2(s) & -p_2(s) \end{pmatrix}
$$

$$
- \begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}
$$

veya

$$
\begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \left(p_2(s) - p_1(x)\right) K_{11}(x,s) + q_2(s) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) & q_2(s) K_{11}(x,s) - \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) \\ -q_1(x) K_{11}(x,s) + p_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{22}(x,s) & -q_1(x) K_{12}(x,s) + q_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s) K_{22}(x,s)\right) \end{pmatrix}
$$

şeklindedir. Bu durumda

$$
\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= \left(p_2(s) - p_1(x)\right) K_{11}(x,s) + q_2(s) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) \\
\frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= q_2(s) K_{11}(x,s) - \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{12}(x,s) - q_1(x) K_{22}(x,s) \\
-\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= -q_1(x) K_{11}(x,s) + p_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{22}(x,s) \\
\frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= -q_1(x) K_{12}(x,s) + q_2(s) K_{21}(x,s) + \left(p_1(x) + p_2(s)\right) K_{22}(x,s)
\end{aligned}\right\} \quad (3.3.27)
$$

denklemler sistemi elde edilir. Burada (3.3.26) şartı (3.3.27) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir.

3.4. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektrum Türünden İfadesi

$$
By' + Q(x)y = \lambda y, 0 \le x \le \pi \tag{3.4.1}
$$

denklemini ve

$$
y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ y_1(\pi) = 0 \tag{3.4.2}
$$

$$
y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0,\ y_1(\pi) = 0 \tag{3.4.3}
$$

sınır koşullarını göz önüne alalım.

Burada

$$0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le \beta \le \pi\ ,\ \alpha \ne \beta\ ,\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

ve $p(x),\ q(x) \in L_2(0,\pi)$ dir. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ $n \in \overline{(-\infty,\infty)}$, (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \alpha_n,\ \ \mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \beta_n \tag{3.4.5}$$

asimptotik formülleri vardır. Burada

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\beta_n|^2 < \infty,\ \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \tag{3.4.6}$$

serileri yakınsaktır. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (3.4.1) denkleminin sırasıyla

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.4.7}$$

$$\psi_1(0,\lambda) = \sin\beta,\ \ \psi_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{3.4.8}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. λ_n ve μ_n lerin sırasıyla

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.9}$$

$$\psi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.10}$$

kökleri ile çakıştığı aşikardır.

Böylece $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

Teorem 4.1.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde (3.4.1), (3.4.2) probleminin α_n normlaştırıcı sayıları λ_n ve μ_n ler kullanılarak

$$\alpha_n = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{3.4.11}$$

formülü ile tanımlanır.

Burada, ' simgesi sonsuz çarpımda $k = n$ teriminin mevcut olmadığını gösterir.

İspat.

$$f(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{3.4.12}$$

fonksiyonu verilsin ve

$$f_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.13}$$

koşulu sağlansın. Bu takdirde

$$m(\lambda) = -\frac{\psi_1(\pi,\lambda)}{\varphi_1(\pi,\lambda)} \tag{3.4.14}$$

elde ederiz. Burada $m(\lambda)$ fonksiyonunun kutuplarının ve sıfırlarının sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakıştıkları ve meromorf fonksiyon olduğu görülür.

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \left(f(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx &= \int_0^\pi \left\{\left(Bf'(x,\lambda_1)+Qf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)\right.\\
&\quad \left.-\left(Bf'(x,\lambda_2)+Qf(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)\right\}dx\\
&= \int_0^\pi \left(Bf'(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx + \int_0^\pi \left(Qf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx\\
&\quad -\int_0^\pi \left(Bf'(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)dx - \int_0^\pi \left(Qf(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)dx\\
&= \int_0^\pi \left\{\left(Bf'(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)+\left(Bf(x,\lambda_1), f'(x,\lambda_2)\right)dx\right\}\\
&= \left[Bf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right]_0^\pi\\
&= \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(x,\lambda_1)\\ f_2(x,\lambda_1)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}f_1(x,\lambda_2)\\ f_2(x,\lambda_2)\end{pmatrix}\right]_0^\pi\\
&= \left[f_2(x,\lambda_1)f_1(x,\lambda_2) - f_1(x,\lambda_1)f_2(x,\lambda_2)\right]_0^\pi\\
&= f_2(0,\lambda_2)f_1(0,\lambda_1) - f_1(0,\lambda_2)f_2(0,\lambda_1)\\
&= \left[\psi_1(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\varphi_1(0,\lambda_1)\right]\times\left[\psi_2(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\varphi_2(0,\lambda_2)\right]\\
&\quad -\left[\psi_2(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\varphi_2(0,\lambda_1)\right]\times\left[\psi_1(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\varphi_1(0,\lambda_2)\right]\\
&= \left[\sin\beta + m(\lambda_1)\sin\alpha\right]\left[-\cos\beta - m(\lambda_2)\cos\alpha\right]\\
&\quad -\left[-\cos\beta - m(\lambda_1)\cos\alpha\right]\left[\sin\beta + m(\lambda_2)\sin\alpha\right]\\
&= \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\left[\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\right]\\
&= \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \left(f(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx = \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)$$

$\lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = \overline{\lambda}$ olarak alınırsa, özdeğerler reel olduğundan ve $z-\overline{z} = 2\operatorname{Im} z$ eşitliğinden

$$\int_0^\pi \left(f(x,\lambda), f(x,\lambda)\right)dx = \sin(\beta-\alpha)\frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \tag{3.4.15}$$

elde edilir. Bu formülde $\beta > \alpha (\beta < \alpha)$ olduğu durumda bu meromorf fonksiyon üst yarı düzlemi kendine dönüştürür.

Bu takdirde $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çaprazlaşırlar.

$n \neq m$ ise $\lambda_n \neq \lambda_m$ olur ve $m(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan

$$m(\lambda) = A \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{-1} \tag{3.4.16}$$

görüntüsü söz konusudur, burada A reel sayıdır. Yukarıdaki hesaplamaların benzeri yapılırsa

$$(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(f(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \sin(\alpha - \beta)$$

eşitliği kolayca elde edilebilir. (3.4.12) ifadesi yerine yazılırsa, buradan

$$(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(\psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx + m(\lambda)(\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \sin(\alpha - \beta)$$

olur. Burada $\lambda \to \lambda_n$ için limit alınırsa

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda_n), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) m(\lambda)} \tag{3.4.17}$$

eşitliği elde edilir.

Bu formülden faydalanılarak α_n lerin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ ler yardımıyla görüntüsü elde edilebilir.

Öncelikle

$$m(\lambda) = A_1 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda}\right) \tag{3.4.18}$$

eşitliği ele alınsın. Burada

$$A_1 = A \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \tag{3.4.19}$$

şeklindedir. (3.4.18) deki

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda}\right) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda}\right) \tag{3.4.20}$$

çarpımını göz önüne alalım. (3.4.20) eşitliğinde logaritma alınıp $\{\lambda_k\}$ ve $\{\mu_k\}$ lar için asimptotik formüllerden yararlanılırsa;

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}+\frac{\mu_{-k}-\lambda_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi}+\beta_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}+\frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi}+\beta_{-k}-\alpha_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda} \tag{3.4.21}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}+\frac{1}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k-\alpha_k}{\lambda_k-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{-k}-\alpha_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda}$$

elde edilir.

(3.4.6) serilerinin yakınsaklığından (3.4.5) asimptotik formüllerinden ve Cauchy-Banjokowski eşitsizliğinden (3.4.21) deki son iki serinin yakınsaklığı elde edilir. (3.4.5) asimptotik formüllerinden

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}+\frac{1}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{-k}-\lambda+\lambda_k-\lambda}{(\lambda_k-\lambda)(\lambda_{-k}-\lambda)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2\frac{\alpha}{\pi}-2\lambda+\alpha_k+\alpha_{-k}}{(\lambda_k-\lambda)(\lambda_{-k}-\lambda)}$$

olur ve bu son seri yakınsaktır.

Bu sonuçlardan (3.4.20) sonsuz çarpımının yakınsaklığı elde edilir. (3.4.19) sonsuz çarpımının yakınsaklığından ve (3.4.20) formülünden (3.4.18) elde edilir. Bu takdirde

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)=\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)A_1\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda}\right)=-A_1\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\mu_n-\lambda)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda}$$

$$=-A_1(\mu_n-\lambda_n)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-\lambda_n}{\lambda_k-\lambda_n}$$

olur. Buradan

$$\alpha_n=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{A_1(\mu_n-\lambda_n)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n}\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

elde edilir. İleride $A_1=-1$ olduğu ispatlanacaktır. Bununla teorem ispatlanır.

3.5. Normlaştırıcı Sayılar İçin Asimptotik Formül

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\pm\infty \tag{3.5.1}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\pm\infty \tag{3.5.2}$$

asimptotik formülleri verilsin.

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{(\mu_n - \lambda_n)}{-A_1 \sin(\beta - \alpha)} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}; \; k \neq n \tag{3.5.3}$$

eşitliği ele alınsın. Bu bölümde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları için bilinen asimptotik formüllerden faydalanarak α_n ler için asimptotik formülü bulmaya çalışalım.

$$\phi(\lambda_n) = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \quad k \neq n \tag{3.5.4}$$

çarpımı göz önüne alınsın.

$$\phi(\lambda_n) = B_1 B_2 B_3 \tag{3.5.5}$$

olsun. Burada

$$B_1 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}{k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.6}$$

$$B_2 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.7}$$

$$B_3 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \; k \neq n \tag{3.5.8}$$

şeklindedir. Önce B_1 göz önüne alınsın. B_1 eşitliğinde λ_n ler için asimptotik formüllerden faydalanılırsa

$$B_1 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\pi(k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n)} \right), \; k \neq n \tag{3.5.9}$$

eşitliği bulunur. Bu formülde (3.5.1) asimptotik formülü kullanılırsa ve $k - n = p$ alınırsa

$$B_1 = \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\pi\left(p - \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \right) \tag{3.5.10}$$

olur.

$$\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\lambda}{p} \right) = \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda\pi} \tag{3.5.11}$$

olduğu için

$$B_1=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left\{\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\pi p}\right)\right\}^{-1}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\pi\left(p-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n\right)}\right)$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\alpha_1}{np}\right)\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right) \tag{3.5.12}$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\frac{\sin\frac{\alpha_1}{n}\pi}{\frac{\alpha_1}{n}\pi}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

eşitliği elde edilir.

$$I_1=\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

sonsuz çarpımı göz önüne alınsın. Bu takdirde yukarıdaki son eşitlikte logaritma alınıp daha sonra $\cot x$ in seri açılımından faydalanılırsa;

$$I_2=1-\frac{\pi\alpha_1}{n}\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\pi p+\alpha-\beta}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{\pi\alpha_1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{-2(\alpha-\beta)}{(\pi p)^2-(\alpha-\beta)^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\frac{\alpha_1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2\frac{\alpha-\beta}{\pi}}{p^2-(\frac{\alpha-\beta}{\pi})^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{\pi\alpha_1}{n}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}-ctg(\alpha-\beta)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.5.13}$$

eşitliği elde edilir.

Bu takdirde

$$B_1=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left\{1+\frac{\pi\alpha_1}{n}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}-ctg(\alpha-\beta)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \tag{3.5.14}$$

bulunur.

Büyük n ler için B_2 sonsuz çarpımının asimptotik formülünü bulmaya çalışalım. Yukarıda yapılan işlemler tekrarlanırsa ve $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ için asimptotik formüllerden yararlanılırsa

$$B_2=\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda_n}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}=\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}\right)=1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{\lambda_n\left(k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n\right)_n}-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.5.15)$$

$$=1-\frac{s_1}{n}+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{\lambda_n\left(k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda\right)_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$s_1=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}$$

şeklindedir.

Benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$B_3=\frac{1}{\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}}=\frac{1}{1-\frac{s_2}{n}+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=1+\frac{s_2}{n}-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.5.16)$$

elde edilir. Burada

$$s_2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}$$

şeklindedir. (3.5.15) ve (3.5.16) çarpılıp ve daha sonra n nin kuvvetlerine göre düzenlenirse;

$$B_2B_3=1-\frac{s_1-s_2}{n}$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.5.17)$$

elde edilir.

(3.5.17) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk seri ele alınsın. (3.5.2) den $\mu_k - k + \frac{\beta}{\pi} = \frac{\beta_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ yazılabilir. Bu eşitlik (3.5.17) de yerine yazılırsa

$$J_2 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \mu_k - k + \frac{\beta}{\pi} \right\} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{\beta_1}{k} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' O(\frac{1}{k^2}) \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n} (\mu_0 + \frac{\beta}{\pi}) \frac{-\frac{\beta}{\pi}}{-\frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} = E_1 + E_2 + O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.5.18}$$

eşitliği bulunur. Burada

$$E_1 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{\beta_1}{k} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} \tag{3.5.19}$$

$$E_2 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' O\left(\frac{1}{k^2}\right) \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} \tag{3.5.20}$$

şeklindedir. $\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''$ sembolü seride $k = n$ ve $k = 0$ terimleri'nin bulunmadığını ifade eder.

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{1}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}$$

olsun. $\lambda_n + \frac{\beta}{\pi} = \lambda$ olsun. Bu takdirde

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{1}{k - \lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{k^2 - \lambda^2} - \frac{1}{n - \lambda} \tag{3.5.21}$$

olur. [66] dan bilindiği gibi

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{k^2 - \lambda^2} = -\pi ctg \pi\lambda + \frac{1}{\lambda}$$

şeklindeydi. Bu takdirde $\lambda_n + \frac{\beta}{\pi} = \lambda$ eşitliğinden

$$F_1 = -\pi ctg\pi\lambda + \frac{1}{\lambda} = -\pi ctg\pi\left(\lambda_n + \frac{\beta}{n}\right) + \frac{1}{\lambda_n + \frac{\beta}{n}}$$
$$= -\pi ctg\pi\left[n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (3.5.22)$$
$$= -\pi ctg\left[\beta - \alpha + \frac{\pi\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \pi ctg(\alpha - \beta) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ve

$$F_2 = \frac{1}{n-\lambda} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha_1}{n} - \frac{\beta}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (3.5.23)$$

olur. (3.5.22) ve (3.5.23) formüllerinden

$$F = \pi ctg(\alpha - \beta) + \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Bu takdirde (3.5.19) dan

$$E_1 = \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha - \beta) - \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (3.5.24)$$

elde edilir.

Şimdi E_2 nin davranışı incelensin.

(3.5.20) formülünün sağ tarafındaki toplamın mertebesi aşağıdaki integraller toplamının mertebesi ile aynı olduğunu gösterilebilir.

$$c\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx + c\int_{1}^{n-1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx + c\int_{n+1}^{\infty} \frac{x}{x^2(x-n)}dx$$

integrallerini hesaplayalım. O halde

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx = \frac{1}{n}\int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+x}\right)dx = \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n+x}\bigg|_{1}^{\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\int_{1}^{n-1} \frac{dx}{x(n-x)} = \int_{1}^{\frac{n}{2}} \frac{dx}{x(n-x)} + \int_{\frac{n}{2}}^{n-1} \frac{dx}{x(n-x)} = \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n-x}\bigg|_{1}^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n-x}\bigg|_{\frac{n}{2}}^{n-1} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x(x-n)} = \frac{1}{n}\ln\frac{x-n}{x}\bigg|_{n+1}^{\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

bağıntıları bulunur.

Bu takdirde bu integrallerin değerlerinden ve (3.5.20) den

$$E_2 = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.25}$$

elde edilir. (3.5.24) ve (3.5.25) formüllerinden faydalanılarak (3.5.18) den

$$J_2 = \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{\alpha-\beta}\right] O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.26}$$

bulunur. Benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$J_3 = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left\{\lambda_k - k + \frac{\alpha}{\pi}\right\} \frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.27}$$

eşitliği elde edilir. (3.5.26), (3.5.27) ve (3.5.17) formüllerinden

$$B_2 B_3 = 1 - \frac{s_1 - s_2}{n} + \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{\alpha-\beta}\right] + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.28}$$

eşitliği bulunur.

$\dfrac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha-\beta)}$ çarpımı göz önüne alınsın. (3.5.1) ve (3.5.2) asimptotik formüllerinden $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ için

$$\frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi} + \frac{\beta_1-\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha-\beta}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{1}{n}\frac{\beta_1-\alpha_1}{\sin(\alpha-\beta)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

yazılır. Son eşitlik, (3.5.14) ve (3.5.28) ifadeleri (3.5.3) te yerine yazılırsa α_n sayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \left\{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s_2 - s_1}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1) ctg(\alpha-\beta)\right] + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\}\frac{1}{(-A_1)}$$

asimptotik formülü veya

$$\frac{1}{\alpha_n} = \left\{\frac{1}{\pi} + \frac{c}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\}\frac{1}{(-A_1)} \tag{3.5.29}$$

formülü elde edilir.

Burada

$$c = \frac{s}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1) ctg(\alpha-\beta) \tag{3.5.30}$$

ve

$$s = s_2 - s_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\lambda_k - \mu_k\} + \frac{\beta-\alpha}{\pi} \tag{3.5.31}$$

şeklindedir. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 3.5.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları sırasıyla (3.5.1) ve (3.5.2) asimptotik formülleri sağlandığında (3.5.3) ile tanımlı α_n normlaştırıcı sayıları (3.5.29) asimptotik formülünü sağlar.

Not 3.5.1. Daha önceki bölümde α_n lerin (3.2.5) bağıntısını sağladığı ispatlanmıştır. Bu teoremde α_n lerin (3.5.29) bağıntısını sağladığı elde edilir. (3.2.5) ve (3.5.29) formülleri karşılaştırılırsa $A=-1$ elde edilir.

3.6. İki Spektruma Göre Regüler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

Bu bölümde iki spektruma göre Kanonik Dirac operatörü için ters problemin çözümü detaylı bir şekilde incelenecektir. Sturm-Liouville için benzer problem [14] çalışmasında tamamıyla çözülmüş ve bu problemin çözümüyle ilgili literatürde geniş kaynaklar verilmiştir.

$$By'+Q(x)y=\lambda y,\ 0\le x\le\pi \tag{3.6.1}$$

ve

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

olsun. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının $[0,\pi]$ de tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve onların k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olsun. (3.6.1) denklemi ve

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \tag{3.6.2}$$

$$y_1(\pi)=0 \tag{3.6.3}$$

sınır koşullarıyla oluşan sınır değer problemi göz önüne alınsın.

Teoremi ispat etmeden önce aşağıdaki Lemma'yı verelim.

Lemma 3.6.1. Eğer $n\ne m$ için $\lambda_n\ne\lambda_m$ ve $n\to\infty$ için

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\alpha_n \tag{3.6.4}$$

asimptotik formülü sağlanıyorsa ve $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$ ise bu takdirde elemanların görüntüsü (f_1,f_2) ve bu elemanlar $L_2(0,\pi)$ de lineer bağımsız olmak üzere $\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar

sistemi tamdır. Burada $\varphi_0^T(x,\lambda_n) = \left(\sin(\lambda_n x+\alpha), -\cos(\lambda_n x+\alpha)\right)$ şeklindedir.

İspat. $L_2(0,\pi)$ de $\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ sisteminin tam olmadığı kabul edilsin. Bu takdirde

$\int_0^\pi \left(f_1 \sin(\lambda_n x+\alpha) - f_2 \cos(\lambda_n x+\alpha)\right)dx = 0$ olmak üzere $L_2(0,\pi)$ de $\exists f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \neq 0$

vardır.

$$F(\lambda) = \int_0^\pi \left(f_1 \sin(\lambda x+\alpha) - f_2 \cos(\lambda x+\alpha)\right)dx$$

olsun. Eğer $\lambda = \lambda_n$ ise $F(\lambda_n) = 0$ dır. $F(\lambda)$ fonksiyonu mertebesi 1, tipi π olan ve

$$\left|F(\lambda)\right| = O(e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\pi}) \tag{3.6.5}$$

olacak şekilde bir tam fonksiyondur.

$$G(\lambda) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=-N}^{N} (1-\frac{\lambda}{\lambda_n})$$

fonksiyonu verilsin. Bu sonsuz çarpımın yakınsaklığı $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} (1-\frac{\lambda}{\lambda_n})$ limitinin yakınsak oluşundan elde edilir.

$$G(\lambda) = \frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)}\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)$$

Burada λ_n^0, $Q(x)=0$ olduğu duruma karşılık gelen sınır değer probleminin özdeğerleridir. Bu özdeğerlerin aşağıdaki formülü sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

$$\lambda_n^0 = n - \frac{\alpha}{\pi} \tag{3.6.6}$$

$\sin(\lambda\pi+\alpha)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan aşağıdaki formül doğrudur.

$$G_0(\lambda) = \sin(\lambda\pi+\alpha) = \left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)$$

Bu takdirde

$$G(\lambda) = A(\lambda)G_0(\lambda) \tag{3.6.7}$$

olur. Burada

$$A(\lambda)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)} \tag{3.6.8}$$

şeklindedir. (3.6.8) formülünden faydalanarak $A(\lambda)$ için asimptotik formülü bulalım. $A(\lambda)$ fonksiyonunda düzenleme yapılırsa;

$$A(\lambda)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)}=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{\lambda_n\lambda_{-n}}}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)}{\lambda_n^0\lambda_{-n}^0}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^0\lambda_{-n}^0}{\lambda_n\lambda_{-n}}\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)}$$

formülü bulunur. (3.6.6) formülünden $\lambda_n^0\lambda_{-n}^0=-n^2+\frac{\alpha^2}{\pi^2}$ elde edilir. Bu takdirde

$$A(\lambda)\sim c\,\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)} \tag{3.6.9}$$

ve (3.6.4) ve (3.6.6) formüllerinden $\lambda_n-\lambda_n^0=O\left(\frac{1}{n}\right)$ elde edilir. Şimdi

$$J(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda_n^0-\lambda}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)$$

sonsuz çarpım göz önüne alınsın. Bu son formülde logaritma alınıp daha sonra seri açılımı yapılırsa;

$$\ln J(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)^2+\cdots \tag{3.6.10}$$

bulunur. Burada; $n\to\infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)^2\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}{\left(n-\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)^2}\to 0$$

elde edilir.

$\lambda=a+ib$ olsun. Buradan $\left|\lambda_n^0-\lambda\right|=\sqrt{(\lambda_n^0-a^2)+b^2}$ olur. O halde (3.6.10) deki ilk toplam

serisi için aşağıdaki eşitsizlik bulunur.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right| \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\alpha_1}{n}+O(\frac{1}{n^2})}{\sqrt{(\lambda_n^0-a^2)+b^2}} \le \int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$$

Son durumdaki has olmayan integral a ve b nin durumlarına göre incelensin.

1. $a=b$ ve $a\to\infty$ iken $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}a}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\frac{1}{4a^2}}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a}\to 0$

2. $a=-b$ ve $a\to\infty$ iken $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+a^2}}\to 0$

olur.

Bu sonuçlar (3.6.10) de yerine yazılırsa,

$$J(\lambda)=1+o(1)$$

elde edilir. Buradan (3.6.9) ve (3.6.7) formüllerinden

$$G(\lambda)=G_0(\lambda)[c+o(1)] \tag{3.6.11}$$

elde edilir.

$$\phi(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)} \tag{3.6.12}$$

fonksiyonu verilsin. Bu takdirde $G(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları da $F(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırı olduğu için $\phi(\lambda)$ tam fonksiyondur yani $\phi(\lambda)$ fonksiyonu bir meromorf fonksiyondur. (3.6.5) ve (3.6.11) asimptotik formüllerinden $F(\lambda)$ fonksiyonunun $\arg\lambda=\pm\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{2}$ ışınları üzerinde sınırlı olduğu elde edilir. Bu sebeble $\phi(\lambda)$ sabit bir sayıdır. Buradan

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}\phi(\lambda)=\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}=\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}O(e^{-i\lambda\pi})\frac{1}{\sin(\lambda\pi+\alpha)}=0$$

olur. Dolayısıyla $\phi(\lambda)=0$, bu sebeple $F(\lambda)=0$ olur. Buradan $f(x)=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix}=0$ olur.

Bu ise varsayım ile çelişir. Bu sebeple $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sistemi tamdır.

$\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\}$ sisteminin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$$G_n(\lambda)=\frac{G(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}, \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{3.6.13}$$

fonksiyonu verilsin.

$$\int_0^{\pi}\left(f_n(x),\varphi_0(x,\lambda_k)\right)dx=G_n(\lambda) \tag{3.6.14}$$

sağlanacak şekilde $f_n(x)=\begin{pmatrix} f_{1,n}(x) \\ f_{2,n}(x)\end{pmatrix}$ fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de olsun.

$$\int_0^{\pi}\left(f_n(x),\varphi_0(x,\lambda_k)\right)dx=\begin{cases}0 & k\neq n\\ G_n(\lambda) & k=n\end{cases} \tag{3.6.15}$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. $\{f_n(x)\}$ ve $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ vektör fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de olmak üzere bir ortogonal sistem oluştururlar.

$\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin lineer bağımsız yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_0(x,\lambda_n)=0 \tag{3.6.16}$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım. (3.6.16) eşitliğinin $f_k(x)$ ile skaler çarpılıp ve daha sonra 0 dan π ye kadar x e göre integrallenirse ve sonuç olarak (3.6.15) ifadesi kullanılarak $\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$ yani $\alpha_k=0$ bulunur.

Gerçekten de

$$f_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_0(x,\lambda_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}f_k(x)\alpha_k\varphi_0(x,\lambda_k)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$$

olur. Burada $\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k)=0$ yani $\alpha_k=0$ bulunur. Bu ise çelişkidir. Bununla Lemma 3.6.1. ispatlanır.

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.6.1. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının k.mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$de olmak üzere $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ matris fonksiyonlu (3.6.1)-(3.6.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve normlaştırıcı sayılarının $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ olabilmesi için, $n \neq m$ için $\lambda_n \neq \lambda_m$, tüm n ler için $\alpha_n > 0$ olacak biçimde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ lerin

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k,n}}{n^k} \tag{3.6.17}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{k,n}}{n^k} \tag{3.6.18}$$

asimptotik formüllerini sağlaması ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$$

şeklinde olmak üzere

$$F(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n) - \frac{1}{\pi} \varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0) \right\} \tag{3.6.19}$$

fonksiyonunun k. mertebeden türevlerinin $L_2(0,\pi)$ den olması gerek ve yeterdir.

İspat: Önce gereklilik kısmını hesaplayalım. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ (3.6.1)-(3.6.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları olsun. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları için (3.6.17) ve (3.6.18) asimptotik formülleri daha önceden verilmişti ve ayrıca tanımdan dolayı tüm α_n ler 0 dan büyüktür.

$\lambda_n \neq \lambda_m$ olması ise ileride gösterilecektir. Bu sebeple $F(x,t)$ lerin k. mertebeden türevlerinin $L_2(0,\pi)$ de olduğunu ispatlamak gerekir.

$t < x$ olsun. (3.6.17) ve (3.6.18) asimptotik formüllerini kullanarak $\forall x \neq t$ için $L_2(0,\pi)$ deki tanımlı metrik anlamda (3.6.19) serisinin yakınsaklığını ve

$$\int_0^x \int_0^t F(u,v)\,du\,dv = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x \int_0^t \varphi_0(u,\lambda_n)\varphi_0^T(v,\lambda_n)\,du\,dv - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^x \int_0^t \varphi_0(u,\lambda_n^0)\varphi_0^T(v,\lambda_n^0)\,du\,dv \tag{3.6.20}$$

nin sağlandığını ispat etmek mümkündür. [21] den bilindiği gibi

$$\varphi_0(x,\lambda_n) = \varphi(x,\lambda_n) + \int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt \tag{3.6.21}$$

integral denklemi vardır. Her iki tarafın transpozu alınırsa

$$\varphi_0^T(x,\lambda_n)=\varphi^T(x,\lambda_n)+\int_0^x\varphi^T(t,\lambda_n)H^T(x,t)dt,\quad n=(-\infty,\infty) \tag{3.6.22}$$

elde edilir. Bu dönüşüm operatörleri (3.6.20) de yerine yazılırsa ve düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^t F(u,v)dudv=&\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x\int_0^t\varphi(u,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)dudv+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v\varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds\\&+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x dv\int_0^t du\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)ds\\&+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x du\int_0^t dv\left\{\int_0^u\int_0^v H(u,s_1)\varphi(s_1,\lambda_n)\varphi^T(s_2,\lambda_n)H^T(x,s_2)ds_1ds_2\right.\\&-\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^x\int_0^t\left\{\varphi(u,\lambda_n^0)+\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n^0)ds\right\}\left\{\varphi^T(v,\lambda_n^0)+\int_0^v\varphi^T(s,\lambda_n^0)H^T(v,s)ds\right\}dudv\left.\right\}\end{aligned} \tag{3.6.23}$$

formülü bulunur. (3.6.23) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamları ayrı ayrı hesaplayalım.

$$I_1=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v\varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds \tag{3.6.24}$$

toplamını göz önüne alalım.

$$f_t(u)=\begin{cases}1, & u\le t\\ 0, & u>t\end{cases}$$

fonksiyonu verilsin.

Bu takdirde

$$\begin{aligned}I_1&=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v\varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds\\&=\int_0^x dv\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t f_1(u)\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^v\varphi^T(s,\lambda_n)f_2^T(v)ds\\&=\int_0^x dv\int_s^t H^T(v,s)dv=\int_0^x du\int_u^t H^T(s,u)ds\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x dv\int_0^t du\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)ds=\int_0^t du\int_u^v H(s,u)ds \tag{3.6.25}$$

ve

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x du\int_0^t dv\left\{\int_0^u\int_0^v H(u,s_1)\varphi(s_1,\lambda_n)\varphi^T(s_2,\lambda_n)H^T(v,s_2)ds_1ds_2=\int_0^t ds\int_s^x H(u,s)du\int_0^t H^T(v,s)dv\right. \tag{3.6.26}$$

olduğunu ispat etmek mümkündür.

$$I_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x \int_0^t \varphi(u, \lambda_n) \varphi^T(v, \lambda_n) du dv$$

toplamı ve

$$\varphi_t(u) = \begin{cases} 1, & u \le t \\ 0, & u > t \end{cases}, \quad \psi_x(u) = \begin{cases} 1, & u \le x \\ 0, & u > x \end{cases}$$

fonksiyonları verilsin. Bu takdirde

$$I_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x \psi_x(u) \varphi(u, \lambda_n) du \int_0^t \psi_t(u) \varphi^T(v, \lambda_n) dv = \int_0^t \psi_x(u) \psi_t(u) du \tag{3.6.27}$$

ve

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^x \int_0^t \left\{ \left\{ \varphi(u, \lambda_n^0) + \int_0^u H(u,s) \varphi(s, \lambda_n^0) ds \right\} \left\{ \varphi^T(v, \lambda_n^0) + \int_0^v \varphi^T(s, \lambda_n^0) H^T(v,s) ds \right\} du dv \right\}$$
$$= \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^x \int_0^t \varphi_0(u, \lambda_n) \varphi_0^T(v, \lambda_n^0) du dv = \int_0^t \psi_x(u) \psi_t(u) du$$

(3.6.28)

elde edilir.

(3.6.24)-(3.6.27) ve (3.6.28) fonksiyonları (3.6.23) te yerine yazılırsa

$$\int_0^x \int_0^t F(u,v) du dv = \int_0^x du \int_u^t H^T(s,u) ds + \int_0^t du \int_u^x H(s,u) ds + \int_0^t ds \int_s^x H(u,s) du \int_s^t H(v,s) dv$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$ operatörü uygulanırsa

$$F(x,t) = H(x,t) + H^T(t,x) + \int_0^t H(x,s) H^T(t,s) ds$$

integral denklemi bulunur. $t < x$ için $H(t,x) = 0$ olduğu için buradan;

$$F(x,t) = H(x,t) + \int_0^t H(x,s) H^T(t,s) ds \tag{3.6.29}$$

elde edilir. $H(x,t)$ $L_2(0,\pi)$ de bulunacak şekilde k. mertebeden türevlere sahip olduğundan (3.6.29) eşitliğinden $F(x,t)$ nin de aynı özelliklere sahip olduğu elde edilir. Bununla gereklilik ispatlanır.

Şimdi de yeterlilik kısmını hesaplayalım. (3.6.17) ve (3.6.18) ile tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları verilsin. Ayrıca $n \ne m$ için $\lambda_n \ne \lambda_m$ ve tüm $\alpha_n > 0$ ler için (3.6.19) formülü

ile tanımlı $F(x,t)$ fonksiyonunun k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olsun. $K(x,t)$ çekirdeğinin

$$F(x,t)+K(x,t)+\int_0^t K(x,s)F(s,t)ds=0,\quad 0\le t\le x\le\pi \tag{3.6.30}$$

integral denklemini sağladığı ispatlanmıştır.

$t>x$ için $K(x,t)$ (1.28) tek çözüme sahiptir. Bunun için

$$g(t)+\int_0^x F(s,t)g(s)ds=0,\quad 0\le x\le\pi \tag{3.6.31}$$

homojen denkleminin $L_2(0,\pi)$de bulunan aşikar çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Aksini varsayalım. (3.6.31) integral denklemi $L_2(0,\pi)$ de aşikar olmayan $g(t)\neq 0$ çözümüne sahip olsun. (3.6.31) denkleminin her iki tarafı $g(t)$ ile skaler çarpılırsa ve t ye göre 0 dan x e kadar integrallenirse

$$\int_0^x \left|g^2(t)\right|dt+\int_0^x\int_0^x \left(F(s,t)g(s)g(t)\right)dsdt=0$$

elde edilir.

Bu son formülde $F(x,t)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\int_0^x g^2(t)dt+\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(s)g(t)dsdt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)g(s)g(t)dsdt=0$$

elde edilir. Burada Parseval eşitliğinden faydalanılırsa

$$\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(s)g(t)dsdt=0$$

yani

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^x\left(\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(t)dt\right)\right)^2=0$$

sonsuz toplamı elde edilir. $\alpha_n>0$ olduğu için buradan

$$\int_0^x\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(t)dt=0$$

elde edilir. Bu takdirde $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tamlığından $g(t)=0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla (3.6.31) denklemi çözülebilirdir ve bir tek $K(x,t)$

çözümüne sahiptir. Bu takdirde

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt \tag{3.6.32}$$

integral denklemi,

$$B\varphi'+Q(x)\varphi=\lambda\varphi, \quad Q(x)=K(x,x)B-BK(x,x) \tag{3.6.33}$$

denklemini ve

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{3.6.34}$$

başlangıç koşullarını sağlar.

Şimdi $\varphi(x,\lambda_n)$ $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlarının ortogonalliğini ispatlayalım ve π noktasındaki sınır koşullarını tanımlayalım. $f(x)\in L_2(0,\pi)$ ve $g(x)\in L_2(0,\pi)$ olmak üzere Parseval eşitliğinden

$$\int_0^\pi (f(x),g(x))dx=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(x),\varphi(x,\lambda_n))dx\int_0^\pi (g(t),\varphi(t,\lambda_n))dt \tag{3.6.35}$$

yazılır. (3.6.35) eşitliğini kullanarak

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(t),\varphi(t,\lambda_n))dt\right)\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.36}$$

serisi de düzgün yakınsak olacak biçimde

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.37}$$

$$c_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(t),\varphi(t,\lambda_n))dt \tag{3.6.38}$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlamak mümkündür. Gerçekten de

$$g(t)=\begin{cases}1, & x\le t\le x+\Delta x\\ 0, & 0\le t<x \ ve\, x+\Delta x\le t\le\pi\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu verilsin. Bu takdirde (3.6.37) eşitliğine göre aşağıdaki eşitlik

$$\int_0^{x+\Delta x} f(t)dt=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(t),\varphi(t,\lambda_n))dt\int_x^{x+\Delta x}\varphi(t,\lambda_n)dt$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafı Δx 'e bölünürse ve $\Delta x\to 0$ için limit alınırsa sonuçta (3.6.37) fonksiyonu elde edilir. Özel olarak Green formülünden $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ için

asimptotik formüllerden $f(x)=\varphi(x,\lambda_k),\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ olacak şekilde (3.6.37) serisinin düzgün ve mutlak yakınsaklığı elde edilir.
Bu sebeple

$$\varphi(x,\lambda_k)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}\left(\varphi(t,\lambda_k),\varphi(t,\lambda_n)\right)dt\right)\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.39}$$

eşitliği bulunur. $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sistemi lineer bağımsız olduğu için (3.6.32) dönüşüm formülünden dolayı $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sistemi de $L_2(0,\pi)$ de lineer bağımsızdır. Bu sebeple (3.6.39) eşitliğinden

$$\int_0^{\pi}\left(\varphi(t,\lambda_k),\varphi(t,\lambda_n)\right)dt=\begin{cases}0, & n\neq k\\ \alpha_n, & n=k\end{cases} \tag{3.6.40}$$

eşitliği elde edilir. (3.6.40) ve Parseval eşitliğinden $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam ortogonal sistem oluşturduğu elde edilir.

π noktasındaki sınır koşulunu tanımlayalım. $\varphi(x,\lambda)$ (3.6.33) denklemini sağladığı için

$$B\varphi'(x,\lambda_n)+Q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n\varphi(x,\lambda_n)$$

$$B\varphi'(x,\lambda_m)+Q(x)\varphi(x,\lambda_m)=\lambda_m\varphi(x,\lambda_m)$$

olur. I. soldan $\varphi^T(x,\lambda_m)$, II. soldan $\varphi^T(x,\lambda_n)$ çarpılıp ve daha sonra I. ifade II. 'den çıkarılırsa

$$\varphi^T(x,\lambda_m)B\varphi'(x,\lambda_n)-\varphi^T(x,\lambda_n)B\varphi'(x,\lambda_m)=(\lambda_n-\lambda_m)\varphi^T(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)$$

elde edilir.

Sonuncu denklem 0 dan π ye kadar integrallenirse, $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ nin ortogonolliği ve (3.6.34) koşulu kullanılırsa;

$$\int_0^{\pi}\left[\left(\varphi_{1m},\varphi_{2m}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1n}'\\ \varphi_{2n}'\end{pmatrix}-\left(\varphi_{1n},\varphi_{2n}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1m}'\\ \varphi_{2m}'\end{pmatrix}\right]dx=\left(\lambda_n-\lambda_m\right)\int_0^{\pi}\left[\left(\varphi_{1n},\varphi_{2n}\right)\begin{pmatrix}\varphi_{1n}\\ \varphi_{2n}\end{pmatrix}\right]dx$$

veya

$$\int_0^{\pi}\left[-\varphi_{1n}'\varphi_{2m}+\varphi_{1m}\varphi_{2n}'+\varphi_{1m}'\varphi_{2n}-\varphi_{1n}\varphi_{2m}'\right]dx=0$$

veya

$$\int_0^{\pi}\left(\varphi_{1m}\varphi_{2n}-\varphi_{1n}\varphi_{2m}\right)'dx=0$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_{1m}(\pi)\varphi_{2n}(\pi)-\varphi_{1n}(\pi)\varphi_{2m}(\pi)=0$$

ve böylece

$$\frac{\varphi_{1m}(\pi)}{\varphi_{2m}(\pi)}=\frac{\varphi_{1n}(\pi)}{\varphi_{2n}(\pi)}=sabit$$

olur.

Diğer taraftan (3.6.32) dönüşüm formülünden

$$\frac{\varphi_1(\pi,\lambda_k)}{\varphi_2(\pi,\lambda_k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_1(\pi,\lambda_n)}{\varphi_2(\pi,\lambda_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\lambda_n\pi+\alpha)+o(1)}{-\cos(\lambda_n\pi+\alpha)+o(1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n\pi-\alpha+\alpha)+o(1)}{-\cos(n\pi-\alpha+\alpha)+o(1)}=0$$

elde edilir. Bu sebeple $\varphi_1(\pi,\lambda_k)=0$ dır. Bununla teorem ispatlanır.

3.6.1. İki Spektruma Göre Ters Problem

Bu bölümde regüler Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem çözümü tam şekilde verilmiştir.

Teorem 3.6.1.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. λ_n ve μ_n dizileri çaprazlaşırlar.
2. $\alpha,\ \alpha_1,\ \beta,\ \beta_1$ sabit sayılar olmak üzere $n\to\pm\infty$ iken λ_n ve μ_n sayıları için

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.6.1.1}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.6.1.2}$$

asimptotik formülleri sağlanır.

3. $0\le\alpha\le\pi,\ 0\le\beta\le\pi,\ \alpha\ne\beta$ dır.

Bu takdirde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonlu (3.4.2) ve (3.4.3) sınır koşullarını sağlayan aynı bir kanonik Dirac operatörünün iki farklı spektrumlarıdır.

İspat. (3.6.1.1) ve (3.6.1.2) asimptotik formülleriyle tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizileri verilsin.

$$\alpha_n=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\mu_n-\lambda_n}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n} \tag{3.6.1.3}$$

formülü ele alınsın.

Önceki bölümde verilen sonuçlardan α_n normlaştırıcı sayıları için (3.5.29) asimptotik

formülünün sağlandığı elde edilmişti.

Tüm α_n lerin 0 dan büyük olduğunu gösterelim.

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda} \tag{3.6.1.4}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın.

$m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları ile çakışırlar. Bu takdirde teoremin koşulundan dolayı $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları sıralıdırlar.

$\lambda = it$ ve $t \to \infty$ için

$$m_1(\lambda) \to -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \tag{3.6.1.5}$$

elde edilir ve Weyl fonksiyonunun tanımından

$$\frac{1}{\alpha_n} = \operatorname{Re} s m_1(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n} \tag{3.6.1.6}$$

eşitliği yazılır. Bu sebeple

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda-\lambda_n)} \tag{3.6.1.7}$$

dir. Burada α_k lerın hepsi aynı işarete sahiptirler.

(3.5.29) formülünde büyük k lar için $\alpha_k > 0$ olduğu görülüyor. Bu sebeple $\forall\alpha_k > 0$ için sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonuna sahip (3.4.1) denkleminin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre birebir olarak tanımlanması elde edilir. $\{\lambda_n\}$ dizisi

$$By' + Q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le \pi \tag{3.6.1.8}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\quad 0 \le \alpha \le \pi \tag{3.6.1.9}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.6.1.10}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Burada α sayısı (3.6.1.1) ile tanımlanır. $\{\gamma_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre tanımlanmış

$$By' + Q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le \pi \qquad (3.6.1.8)$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0 \tag{3.6.1.11}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.6.1.12}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Burada β, (3.6.1.2) ile tanımlanır. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$,

(3.6.1.8) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix},\ \psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\beta\\ -\cos\beta\end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarıyla tanımlı çözümleri olsun. Bu takdirde

$$m(\lambda)=\frac{\psi_1(\pi,\lambda)}{\varphi_1(\pi,\lambda)}$$

fonksiyonunun kutupları ve sıfırları sırasıyla $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ sayıları ile çakışır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n}$$

formülü bulunur. Bu takdirde

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda-\lambda_k)} \tag{3.6.1.13}$$

eşitliği elde edilir. (3.6.1.7) ve (3.6.1.13) formüllerinden

$$m_1(\lambda)=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)$$

elde edilir. Bu sebeple $m(\lambda)$ ve $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları çakışırlar. Dolayısıyla $\gamma_n=\mu_n,\ 0,\pm1,\pm2,\cdots$ olur. Bununla teorem ispatlanır.

Teorem 3.6.1.2. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ (3.6.1.8) denkleminin (3.6.1.9) ve (3.6.1.10) sınır koşullarını sağlayan iki farklı spektrumları olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerek ve yeterdir.

$p(x)$ ve $q(x)$ k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ uzayında olacak şekilde

$$Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$$

matris fonksiyonu verilsin.

1. λ_n ve μ_n dizileri çaprazlaşır.
2. Aşağıdaki asimptotik formüller söz konusudur.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

burada $\alpha \neq \beta, 0 \leq \beta, \alpha \leq \pi$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{k,n}\right|^2 < \infty, \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\beta_{k,n}\right|^2 < \infty$ dir.

İspat. λ_n ve μ_n sayıları çaprazlaştığı için bu teoremin gerekliliği Bölüm 3.2 de verildi. Yeterliliğin ispatı ise Teorem 3.6.1.1 in ispatına benzerdir.

4. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ

Bu bölümde sonlu kapalı aralıkta tanımlı ve l pozitif veya negatif tam sayı olmak üzere, π noktasında $\frac{l}{\pi - x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tekile sahip Dirac operatörü için ters problem incelenecektir. Özel olarak farklı sınır koşullarına karşılık gelen $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ sayılar dizisine göre potansiyel matris fonksiyonunun bulunması ispatlanacaktır. Benzer problemler [21], [54] ve diğer çalışmalarda ele alınmıştır.

4.1. Singuler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y, 0 \le x < \pi \tag{4.1.1}$$

denklemi ile birlikte

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ 0 \le \alpha < \pi \tag{4.1.2}$$

$$y_1^{\,2}(\pi) + y_2^{\,2}(\pi) < \infty \tag{4.1.3}$$

sınır şartları göz önüne alınsın. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{l}{\pi - x} \\ \dfrac{l}{\pi - x} & 0 \end{pmatrix},\ y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $Q(x)$, $[0,\pi]$ de sürekli bir matris fonksiyonu, λ ise kompleks parametredir. Basitlik için biz l yi tek negatif tam sayı olarak ele alacağız.

(4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerlerini $\{\lambda_n\}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$ ve buna karşılık gelen özfonksiyonları ise $\varphi_n(x)$ olsun.

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} (\varphi_n(x), \varphi_n(x))dx = \int_0^{\pi} \left\{\varphi_1^2(x,\lambda_n) + \varphi_2^2(x,\lambda_n)\right\} dx \tag{4.1.4}$$

sayılarına (4.1.1)-(4.1.3) probleminin normlaştırıcı sayıları denir. $\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.1.5}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun.

Teorem 4.1.1. $Q_1(x)=\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}$ için $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tekilsiz problemin sırasıyla özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları ise $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\cdots$ (4.1.1)-(4.1.3) probleminin $l=-(2k+1)$ için özdeğerleri ve normlaştırıcı sayılarıdır ve tersine $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\cdots$ (4.1.1)-(4.1.3) probleminin $l=-(2k+1)$ için özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları ise

$$By'+Q_1(x)y=\lambda y, 0\le x\le \pi \tag{4.1.6}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{4.1.7}$$

$$y_1(\pi)=0 \tag{4.1.8}$$

probleminin sırasıyla özdegerleri ve normlaştırıcı sayılarıdır.

İspat. Önce gereklilik kısmı yapılsın. $\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \psi_1(x,\lambda) \\ \psi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.6) denkleminin

$$\psi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \psi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{4.1.9}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\psi(x,\lambda)$ nın (4.1.7) sınır koşullarını sağladığı açıktır. Bu sebeple $\psi(x,\lambda_n)$ (4.1.6)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonlarıdır ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\left(\psi(t,\lambda_n),\psi(t,\lambda_n)\right)dt=\int_0^{\pi}\left\{\psi_1^2(x,\lambda_n)+\psi_2^2(x,\lambda_n)\right\}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{4.1.10}$$

şeklindedir.

Bu teoremi tümevarım metodu ile ispatlayalım. $k=0$ olsun. Bu takdirde $\cdots,\lambda_{-1},\lambda_1,\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{-1},\alpha_1,\cdots$ sırasıyla (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları olduğu ispatlayalım. (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özfonksiyonları ile (4.1.6)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonları arasında

$$\varphi(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda)\right)dy}{\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.11}$$

bağıntısı vardır. Buna Crum dönüşümü denir.

(4.1.1)-(4.1.3) ve (4.1.6)-(4.1.8) problemlerinin çözüm fonksiyonlarında $x=0$ yazılırsa

$$\varphi(0,\lambda)=\psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix}$$

elde edilir.

$\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu, (4.1.6) denkleminin çözümü olduğundan

$$K(x,y)=\frac{\psi(x,\lambda_0)\psi^T(y,\lambda_0)}{\alpha_0-\int\limits_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.12}$$

fonksiyonu

$$BK_x'(x,y)+Q_1(x)K(x,y)+\left[K(x,x)B-BK(x,x)\right]K(x,y)=-K_y'(x,y)B+K(x,y)Q_1(y) \tag{4.1.13}$$

denkleminin çözümü olduğu aşikardır.

Bu takdirde (4.1.11) ile tanımlı $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$B\varphi'(x,y)+Q_1(x)\varphi(x,\lambda)+\left[K(x,x)B-BK(x,x)\right]\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda) \tag{4.1.14}$$

denklemini sağlar.

$$\Delta Q_1(x)=K(x,x)B-BK(x,x)$$

fonksiyonu göz önüne alalım.

$x\to\pi$ iken $\Delta Q_1(x)$ fonksiyonunun davranışını bulalım. $\Delta Q_1(x)$ eşitliğinde düzenleme yapılırsa

$$\Delta Q_1(x)=K(x,x)B-BK(x,x)=\frac{1}{\alpha_0-\int\limits_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. $x\to\pi$ iken $\psi_1(\pi)=0,\ \lim\limits_{x\to\pi}\psi_2(x)=c\neq 0$ olduğu bilinmektedir. ($c=0$ için $\psi(t,\lambda_0)=0$ olduğundan bu mümkün değildir).

Bu sebeple $x\to\pi$ iken limit alınırsa

$$\Delta Q_1(x)\to\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}0 & -c^2\\ -c^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix},\ l=-1$$

sonucu bulunur. Gerçekten de

$$\Delta Q_1(x)=\frac{1}{\alpha_0-\int\limits_0^x\big(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\big)\,dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\int\limits_0^\pi\big(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\big)\,dt+\int\limits_x^0\big(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\big)\,dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\int\limits_x^\pi\big(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\big)\,dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. Son eşitlikte $x\to\pi$ için limit alınırsa

$$\Delta Q_1(x)\to\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}0 & -c^2\\ -c^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix},\ l=-1$$

olduğu bulunur.

$$Q(x)=Q_1(x)+\Delta Q_1(x)-\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix}\tag{4.1.15}$$

fonksiyonun $[0,\pi]$de düzgünlük mertebesi $Q_1(x)$ fonksiyonunun düzgünlük mertebesi ile aynıdır. Böylece $l=-1$ için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (4.1.1) denklemini sağladığı ispatlanmıştır. Burada $Q(x)$ fonksiyonu (4.1.15) ile tanımlıdır.

Şimdi $\varphi_1^2(\pi,\lambda_n)+\varphi_2^2(\pi,\lambda_n)<\infty$ olduğunu ve $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$de tam ortogonal sistem oluşturduğu ispatlayalım. $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin ortogonal sistem olduğu bellidir. Bu sebeple farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonalliğinden

$$\int\limits_0^\pi\big(\psi(x,\lambda_0),\psi(x,\lambda_n)\big)dx=0,\ \ n\neq 0$$

bulunur. Bu takdirde (4.1.11) eşitliğinde $x\to\pi$ iken limit alınırsa özfonksiyonların ortogonalligi ve L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{x\to\pi}\varphi(x,\lambda_n)=\psi(\pi,\lambda_n)+\lim_{x\to\pi}\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{\int_0^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}$$

$$=\psi(\pi,\lambda_n)+\lim_{x\to\pi}\frac{\psi(x,\lambda_0)\left\{\int_0^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy-\int_x^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy\right\}}{\int_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}$$

$$=\psi(\pi,\lambda_n)-\psi(\pi,\lambda_0)\lim_{x\to\pi}\frac{\int_x^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{\int_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}=0$$

eşitliği elde edilir. Yani $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu yakınsaktır. Bu sebeple $\varphi_1^2(\pi,\lambda_n)+\varphi_2^2(\pi,\lambda_n)<\infty$ olduğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$ fonksiyonları (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özfonksiyonları olur. Bu sebeple $[0,\pi]$ üzerinde ikişerli ortogonaldirler.

Şimdi $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğunu ve

$$\alpha_n=\int_0^\pi\left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dt$$

olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned}A(x)&=\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_0^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi-\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_0^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi+\int_x^0\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_x^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\end{aligned}$$

fonksiyonu verilsin. Dirac-Delta fonksiyonunun tanımından

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)=\delta(x-t)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

olduğundan, $t > x$ için

$$\varphi(x,\lambda_n)=\psi(x,\lambda_n)+\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{A(x)}$$

eşitliği ve bu eşitliğin transpozu alınırsa

$$\varphi^T(t,\lambda_n)=\psi^T(t,\lambda_n)+\frac{\psi^T(t,\lambda_0)\int_0^t\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{A(t)}$$

elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa çarparsak ve daha sonra her iki taraftan sonsuz toplam alırsak;

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)\\
&+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\frac{\psi^T(t,\lambda_0)\int_0^t\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(t)}\\
&+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_0)\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(x)}\varphi^T(t,\lambda_n)\\
&+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\frac{\psi(x,\lambda_0)\psi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi\int_0^t\left(\psi(s,\lambda_0),\psi(s,\lambda_n)\right)ds\\
&=\delta(x-t)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{\psi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}\int_0^t\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n),\psi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\psi(\xi,\lambda_0)d\xi\\
&+\frac{\psi(x,\lambda_0)}{A(x)}\int_0^x\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(t,\lambda_n),\psi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\psi(\xi,\lambda_0)d\xi\\
&+\frac{\psi(x,\lambda_0)\psi(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\left\{\left[\frac{1}{\alpha_n}\psi(\xi,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n)\right]\psi(\xi,\lambda_0)\right\}\psi(s,\lambda_0)d\xi ds\\
&=\delta(x-t)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{\alpha_0\psi(x,\lambda_0)}{A(x)}\frac{\psi(t,\lambda_0)}{A(\xi)}\\
&=\delta(x-t)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{\alpha_0}\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)
\end{aligned}$$

buradan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n)=\delta(x-t)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{4.1.16}$$

elde edilir. Burada ' sembolü $n=0$ teriminin bulunmadığını ifade eder.

(4.1.16) eşitliği $\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpılıp 0 dan π ye kadar x'e göre integrallenirse ve Dirac-Delta fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$\int_0^\pi \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) \right] \varphi(x,\lambda_n)dx = \int_0^\pi \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\varphi(x,\lambda_n)dx$$

yani

$$\frac{1}{\alpha_n}\varphi(t,\lambda_n)\int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx = \varphi(t,\lambda_n)$$

$$\alpha_n = \int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx \tag{4.1.17}$$

bağıntısı bulunur. (4.1.16) ve (4.1.17) formülleri $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ $n=\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ de tam ortogonal sistem oluşturduğunu gösterir.

Böylece $l=-1$ durumunda teoremin gerekliliği ispatlandı. Tümevarım uygulayarak teoremi genel durumda da ispatlamak mümkündür.

Şimdi yeterlilik kısmını ispatlayalım. $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{4.1.18}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1.2) sınır koşullarını sağladığı açıktır. $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots$, $l=-(2k+1)$ için (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda_n)$, $n\in\pm\overline{(k+1,\infty)}$ bu problemin özfonksiyonları olur ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n = \int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx,\ n\in\pm\overline{(k+1,\infty)} \tag{4.1.19}$$

şeklindedir. Teoremde gösterilen şekilde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayı dizilerini oluşturalım. Bunların (4.1.6)-(4.1.8) sınır değer probleminin spektral karakteristikleri olduğunu ispatlayalım. Teoremi $k=0$ durumu için ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde ispatlanabilir.

$$\psi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda)\right)dt}{\alpha_0+\int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.20}$$

eşitliği verilsin. Burada $\lambda_0, \lambda_n, n \neq 0$ lerden farklıdır ve α_0 sabit pozitif sayıdır. Burada $x = 0$ için $\psi(0,\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(0,\lambda) \\ \psi_2(0,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$ olur.

$\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin çözümü olduğundan

$$K(x,y) = -\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(y,\lambda_0)}{\alpha_0 + \int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.21}$$

matris fonksiyonunun

$$\begin{aligned} &BK_x^{'}(x,y) + Q(x)K(x,y) + \left[K(x,x)B - BK(x,x)\right]K(x,y) + LK(x,y) \\ &= -K_y^{'}(x,y)B + K(x,y)Q(y) + K(x,y)L \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

denkleminin çözümü olduğu aşikardır. Bu takdirde (4.1.20) ile tanımlı $\psi\left(x,\lambda\right)$ fonksiyonu

$$B\psi^{'}(x,y) + Q_1(x)\psi(x,\lambda) + \left[K(x,x)B - BK(x,x)\right]\psi(x,\lambda) + L\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda) \tag{4.1.23}$$

denklemini sağlar.

Şimdi

$$\Delta Q(x) = K(x,x)B - BK(x,x)$$

fonksiyonu detaylı bir şekilde inceleyelim.

$x \to \pi$ iken $\Delta Q(x)$ fonksiyonunun davranışını bulalım. $\Delta Q(x)$ fonksiyonunda matris fonksiyonları yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \Delta Q(x) &= K(x,x)B - BK(x,x) \\ &= \frac{1}{\alpha_0 + \int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\right)dt} \begin{pmatrix} -2\varphi_1(x,\lambda_0)\varphi_2(x,\lambda_0) & \varphi_1^2(x,\lambda_0) - \varphi_2^2(x,\lambda_0) \\ \varphi_1^2(x,\lambda_0) - \varphi_2^2(x,\lambda_0) & 2\varphi_1(x,\lambda_0)\varphi_2(x,\lambda_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu sebeple $x \to \pi$ iken

$$\varphi(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{\pi - x} \end{pmatrix}$$

bilinmektedir [21]. Bu sebeple $x \to \pi$ iken limit alınırsa,

$$\Delta Q(x) = -\frac{1}{\alpha_0 + \int\limits_0^x \frac{c_2^2}{(\pi-t)^2}dt + c_1 x}\begin{pmatrix} -2c_1\frac{c_2}{(\pi-x)} & c_1^2 - \frac{c_2^2}{(\pi-x)^2} \\ c_1^2 - \frac{c_2^2}{(\pi-x)^2} & 2c_1\frac{c_2}{(\pi-x)} \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} -2c & c^2(\pi-x) - \frac{1}{(\pi-x)} \\ c^2(\pi-x) - \frac{1}{(\pi-x)} & 2c \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{(\pi-x)} \\ -\frac{1}{(\pi-x)} & 0 \end{pmatrix} + \Delta Q_2 = -L + \Delta Q_2$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$Q_1(x) = Q(x) + \Delta Q(x) + L = Q(x) + \Delta Q_2(x)$$

fonksiyonun $[0,\pi]$de $Q(x)$ ile aynı düzgünlük derecesine sahip olduğu bulunur.

Şimdi de $n = (-\infty,\infty)$, için $\psi_1(\pi,\lambda_n) = 0$ ve $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$de tam ortogonal sistem oluşturduğunu ispatlayalım. Önce $\psi_1(\pi,\lambda_0) = 0$ olduğunu ispatlayalım. (4.1.20) eşitliğinde $\lambda = \lambda_0$ yazılırsa

$$\psi(x,\lambda_0) = \varphi(x,\lambda_0) - \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \int\limits_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\right)dt}.$$

formüllü bulunur. Bu sebeple $x \to \pi$ iken

$$\varphi(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{\pi - x} \end{pmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$\lim_{x\to\pi}\psi(x,\lambda_0) = \lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{(\pi-x)} \end{pmatrix}\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + c_1^2 x + \frac{c_2^2}{(\pi-x)} - \frac{c_2^2}{\pi}}$$

$$= \lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{(\pi-x)} \end{pmatrix}\frac{\alpha_0\pi(\pi-x)}{(\pi-x)\left(\alpha_0\pi + c_1^2\pi x - c_2^2\right) + c_2^2\pi}$$

$$= \lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1\alpha_0\pi(\pi-x) \\ c_2\alpha_0\pi \end{pmatrix}\frac{1}{(\pi-x)\left(\alpha_0\pi + c_1^2\pi x - c_2^2\right) + c_2^2\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2\alpha_0\pi \end{pmatrix}\frac{1}{c_2^2\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0 c_2^{-1} \end{pmatrix}$$

olur. $\lambda = \lambda_n$ olsun.

$$\beta_n = \int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda_n)\right) dx$$

fonksiyonu verilsin. Buradan;

$$\lim_{x\to\pi} \psi(x,\lambda_n) = -\lim_{x\to\pi} \frac{\begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{(\pi - x)} \end{pmatrix}}{\dfrac{c_2^2}{(\pi - x)}} \beta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_n c_2^{-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\psi_1(\pi,\lambda_0) = 0$ olur. Bu sebeple $\{\psi(x,\lambda_n)\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ fonksiyonları (4.1.5)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonları olur. Bu sebeple $[0,\pi]$ üzerinde ikişerli ortogonaldirler.

Şimdi $L_2(0,\pi)$ de $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğunu ispatlayalım. Önceden $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğu gösterilmişti.

$$A(x) = \alpha_0 + \int_0^{t} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_0)\right) d\xi$$

fonksiyonu verilsin.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \varphi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t) E$$

burada $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t > x$ için yukarıdaki yapılan benzer işlemler tekrarlanırsa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n) \psi^T(t,\lambda_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \varphi^T(t,\lambda_n)$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \frac{\varphi^T(t,\lambda_0) \int_0^{t} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_n)\right) d\xi}{A(t)}$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi^T(t,\lambda_n) \frac{\varphi(x,\lambda_0) \int_0^{x} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_n)\right) d\xi}{A(x)}$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\big(\varphi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\big)d\xi\int_0^t\big(\varphi(s,\lambda_0),\varphi(s,\lambda_n)\big)ds$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(t,\lambda_0)}{A(t)}\int_0^t\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n),\varphi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\varphi(\xi,\lambda_0)d\xi$$

$$-\frac{\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}\int_0^x\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(t,\lambda_n),\varphi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\varphi(\xi,\lambda_0)d\xi$$

$$+\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\int_0^t\left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(\xi,\lambda_n)\varphi(s,\lambda_n)\right]\varphi(\xi,\lambda_0)\right\}\varphi(s,\lambda_0)d\xi ds$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}+\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\big(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_0)\big)d\xi$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\left[A(x)-\int_0^x\big(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_0)\big)d\xi\right]$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\alpha_0$$

olur. Buradan da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)+\frac{\alpha_0\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}\frac{\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}=\delta(x-t)E \tag{4.1.24}$$

formülü elde edilir.

(4.1.20) formülünde $\lambda=\lambda_0$ için

$$\psi(x,\lambda_0)=\frac{\alpha_0\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}$$

olduğu elde edilir. Son eşitlik (4.1.24) formülünde yerine yazılırsa;

$$\begin{gathered}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)+\frac{1}{\alpha_0}\psi(x,\lambda_0)\psi^T(t,\lambda_0)=\delta(x-t)E\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)=\delta(x-t)E\end{gathered} \tag{4.1.25}$$

bulunur. Teoremin gerekliliğinin ispatının benzerinin yorumları yapılırsa

$$\alpha_n=\int_0^\pi\big(\psi(x,\lambda_n),\psi(x,\lambda_n)\big)dx \tag{4.1.26}$$

olur. (4.1.25) ve (4.1.26) fonksiyonlarından $\{\psi(x,\lambda_n)\}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlarının $L_2(0,\pi)$ de tam ortogonal sistem olduğu elde edilir.

Sonuç 4.1.1. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları ve $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ matris fonksiyonun k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ olacak şekilde (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğer ve normlaştırıcı sayıları

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k} \tag{4.1.27}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{\pi} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{4.1.28}$$

şeklinde asimptotik formüllere sahiptir. Burada $l=-(2k+1)$, $n \in \pm\overline{(s+1,\infty)}$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\alpha_{n,k}\right|^2 < \infty$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_{n,k}\right|^2 < \infty$ serileri yakınsaktır

Not 4.1.1. Eğer $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ ler l için (4.1.1)-(4.1.3) tipindeki problemin sırasıyla özdeğer ve normlaştırıcı sayıları ise, bu takdirde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ ler, $-l$ için de (4.1.1)-(4.1.3) problemin özdeğer ve normlaştırıcı sayılarıdır.

4.2. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektrum Türünden İfadesi

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y \tag{4.2.1}$$

diferansiyel denklemini ve

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.2.2}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0, y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.2.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım. Burada

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{l}{\pi - x} \\ \dfrac{l}{\pi - x} & 0 \end{pmatrix},\ y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

$0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le \beta \le \pi$ öyleki $\alpha \ne \beta$, $Q(x)$ matris fonksiyonu $[0,\pi]$ de tanımlı ve sürekli ve $l=-(2k+1)$ olsun. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$ sırasıyla (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.1), (4.2.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri olsun. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (4.2.1) denkleminin sırasıyla

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.2.4}$$

$$\psi_1(0,\lambda) = \sin\beta,\ \ \psi_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{4.2.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu takdirde (4.2.1), (4.2.2) sınır değer probleminin özfonksiyonları $\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)$ ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\left(\varphi_n(x),\varphi_n(x)\right)dx,\ n\in\pm\overline{(k+1,\infty)} \tag{4.2.6}$$

şeklindedir.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ spektrumuna göre $\{\alpha_n\}$ için formül bulalım.

$$f(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{4.2.7}$$

fonksiyonu verilsin. Burada $f(x,\lambda)\in L_2(0,\pi)$ dir. Bu takdirde $x\to\pi$ iken limit alınırsa

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\left|f_1^2(x,\lambda)\right|+\left|f_2^2(x,\lambda)\right|\right\}=0$$

bulunur. Burada

$$c_1+m(\lambda)c_2=0 \tag{4.2.8}$$

$$c_1=\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\psi_1^2(x,\lambda)+\psi_2^2(x,\lambda)\right\},\ c_2=\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\varphi_1^2(x,\lambda)+\varphi_2^2(x,\lambda)\right\}$$

şeklindedir. (4.2.8) formülünden $m(\lambda)$ nın bir meromorf fonksiyon olduğu gözükmektedir. Dolayısıyla kutupları ve sıfırları (4.2.1), (2.2.2) ve (4.2.1), (2.2.3) probleminin sırasıyla özdeğerleri ile çakışır. Bölüm 3.4'te yapılan işlemler tekrarlanırsa

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}\left(f(x,\lambda_1),f(x,\lambda_2)\right)dx=\left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)$$

formülü bulunur. $\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\overline{\lambda}$ olduğu durumda

$$\int_0^{\pi}\left|f(x,\lambda)\right|^2dx=\sin(\beta-\alpha)\frac{\operatorname{Im}m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \tag{4.2.9}$$

formülü elde edilir. Bu takdirde $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları yani (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.1), (4.2.3) sınır probleminin özdeğerleri çarprazlaşırlar. $m(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan

$$m(\lambda)=A\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda}{\mu_p}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{-1} \tag{4.2.10}$$

elde edilir.

Burada $'$sembolü sonsuz çarpımda $p=-k,\ldots,k$ çarpanlarının bulunmadığını ifade eder ve A sabit sayıdır. Bölüm 3 teki işlemler tekrarlanırsa

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\pi}\left(f(x,\lambda),\varphi_n(x)\right)dx=\int_0^{\pi}\left\{\left(Bf'(x,\lambda),\varphi_n(x)\right)+\left(Bf(x,\lambda),\varphi_n^{'}(x)\right)\right\}dx=\sin(\alpha-\beta)$$

olur. Burada $\lambda\to\lambda_n$ için limit alınırsa

$$\alpha_n=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)} \tag{4.2.11}$$

eşitliği elde edilir. (4.2.10) formülü düzenlenirse daha sonra her iki taraftan logaritma alınırsa

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_p-\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}\right)=\sum_{p=k+1}^{\infty}\left(\frac{\mu_p-\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}+\frac{\mu_{-p}-\lambda_{-p}}{\lambda_{-p}-\lambda}\right)$$

serisi elde edilir. Bu serinin yakınsaklığı Bölüm 3 te yapılan işlemler tekrarlanırsa elde edilir. (4.2.10) formülünde cebirsel işlemler yapılırsa

$$m(\lambda)=A_1\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{\mu_p-\lambda}{\lambda_p-\lambda}\right)$$

fonksiyonu bulunur. Burada

$$A_1=A\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_p}{\mu_p}$$

şeklindedir. Bu takdirde (4.2.11) den

$$\alpha_n=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{A_1(\mu_n-\lambda_n)}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_p-\lambda_n}{\mu_p-\lambda_n} \tag{4.2.12}$$

elde edilir. İleride $A_1=-1$ olduğu ispatlanacaktır.

4.3. İki Spektruma Göre Singüler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

Bu bölümde tekile sahip Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem çözümü verilmiştir.

Teorem 4.3.1. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $n\in\pm\overline{(k+1,\infty)}$ dizileri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. λ_n ve μ_n dizileri sıralıdırlar (çaprazlaşırlar).
2. α, α_1, β, β_1 sabit sayılar olmak üzere $n\to\pm\infty$ iken $\lambda_{n+k},\lambda_{n-k}$ ve μ_{n+k},μ_{n-k} sayıları için

$$\lambda_{n+k} = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n > 0$$
$$\lambda_{n-k} = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n < 0 \qquad (4.3.1)$$

ve

$$\mu_{n+k} = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n > 0$$
$$\mu_{n-k} = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n < 0 \qquad (4.3.2)$$

asimptotik formülleri sağlanır.

3. $0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le \beta \le \pi,\ \alpha \ne \beta$ dır.

Bu takdirde $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y \qquad (4.3.3)$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \qquad (4.3.4)$$

$$y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \qquad (4.3.5)$$

probleminin iki farklı spektrumlarıdır.

Burada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{l}{\pi - x} \\ \dfrac{l}{\pi - x} & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

İspat. Teoremi $l = -1$ için ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde ispatlanır. Sırasıyla (4.3.1) ve (4.3.2) asimptotik formülleriyle tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizileri verilsin. Normlaştırıcı sayıların iki spektrum türünden ifadesi olan

$$\alpha_n = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_p - \lambda_n}{\mu_p - \lambda_n} \qquad (4.3.6)$$

formülü yazılsın. Burada ' sembolü sonsuz çarpımda $p = 0, p = n$ çarpanlarının bulunmadığını ifade eder.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları için asimptotik formüllerden faydalanarak $\{\alpha_n\}$ sayıları için asimptotik formül bulalım. $\lambda_0 \ne \lambda_n, \mu_0 \ne \mu_n, n = \pm 1, \pm 2, \cdots$ olmak üzere λ_0, μ_0 sayıları ele alınsın. Bu durumda (4.3.6) formülünün -1. kuvveti alınırsa

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha - \beta)} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_p - \lambda_n}{\lambda_p - \lambda_n} \frac{\lambda_0 - \lambda_n}{\mu_0 - \lambda_n}$$

olduğu elde edilir. Burada $'$sembolü sonsuz çarpımda $p = n$ sayılı terimin olmadığını ifade eder.

$$\frac{1}{b_n} = \frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha - \beta)} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_p - \lambda_n}{\lambda_p - \lambda_n}$$

olacak şekilde yukarıdaki sonsuz çarpım

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n} \frac{\lambda_0 - \lambda_n}{\mu_0 - \lambda_n}$$

Şeklinde yazılır. Bölüm 3.4 de verilen

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha - \beta)\right] + O(\frac{\ln n}{n^2}) \tag{4.3.7}$$

asimptotik formülünü ele alalım. Burada $s = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\lambda_k - \mu_k + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right)$şeklindedir ve

$\sum'$sembolü toplamda $k = n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder. Bu takdirde

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n}\left(1 + \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n - \mu_0}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Özdeğerler için asimptotik formüllerden faydalanılırsa

$$\frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n - \mu_0} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n} \frac{1}{1 - \frac{\mu_0}{\lambda_n}} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n}\left(1 + \frac{\mu_0 - \lambda_0}{n}\right) + O(\frac{1}{n^2})$$

şeklinde yazılabilir. Son formül ve (4.3.7) den normlaştırıcı saylar için asimptotik formül

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s'}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha - \beta) + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right] + O(\frac{\ln n}{n^2}) \tag{4.3.8}$$

bulunur. Burada $s' = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\lambda_k - \mu_k + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right)$ve $'$sembolü toplamda $k = n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder. Böylece (4.3.8) formülü

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{c}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \tag{4.3.9}$$

elde edilir. Burada

$$c=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''\left(\lambda_k-\mu_k+\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)+(\beta_1-\alpha_1)ctg(\alpha-\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\pi^2}$$

şeklindedir. Tüm α_n lerin 0 dan büyük olduğunu gösterelim.

$$m_1(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_p-\lambda}{\lambda_p-\lambda} \tag{4.3.10}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Teoremin koşulundan dolayı $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları çaprazlaşırlar. $\lambda\to i\infty$ iken limit alınırsa

$$m_1(\lambda)\to-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \tag{4.3.11}$$

sonucu alınır. Weyl fonksiyonu tanımından

$$\frac{1}{\alpha_n}=\operatorname{Re}s\,m_1(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n} \tag{4.3.12}$$

eşitliği yazılır. Bu sebeple

$$m_1(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_1(\lambda-\lambda_p)} \tag{4.3.13}$$

olur, öyleki α_n lerin hepsi aynı işarete sahiptir.

(4.3.9) formülünde büyük p ler için $a_p>0$ olduğu elde edilir. Bu takdirde [21] den $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonunu birebir olarak tanımlamak mümkündür. Öyleki $\{\lambda_n\}$ (4.3.3)-(4.3.5) probleminin özdeğerleridir.

$$By'+Q(x)y+Ly=\lambda y \tag{4.3.14}$$

denklemi ve

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \tag{4.3.15}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{4.3.16}$$

sınır koşullarıyla tanımlı problemin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ özdeğer ve normlaştırıcı saylarına göre tanımlanan $\{\gamma_n\}$, $n\in\pm\overline{(1,\infty)}$ özdeğerleri olsun. Burada β sayısı (4.3.2) ile tanımlanır.

$\gamma_n=\mu_n$, $n\in\pm\overline{(1,\infty)}$ olduğunu ispatlayalım.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix},\ \psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\beta\\-\cos\beta\end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını sağlayan (4.3.14) denkleminin çözümleri olsun. Bu takdirde

$$m(\lambda)=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-\lambda_n}{\lambda-\gamma_n} \tag{4.3.17}$$

eşitliği ile tanımlı meromorf fonksiyon mevcuttur. Öyleki $m(\lambda)$ fonksiyonunun kutupları ve sıfırları sırasıyla $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ sayıları ile çakışır. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_n}=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n}$$

formülü bulunur. $\lambda\to i\infty$ iken (4.3.17) de limit alınırsa $m(\lambda)\to 1$ elde edilir. Bu sebeple

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_p(\lambda_p-\lambda)} \tag{4.3.18}$$

eşitliği elde edilir. (4.3.13) ve (4.3.18) formüllerinden

$$m_1(\lambda)=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda) \tag{4.3.19}$$

olur ve dolayısıyla $\gamma_n=\mu_n$, $n=\pm\overline{(1,\infty)}$ elde edilir. Bununla teorem ispatlanır.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarını aynı bir denklemin farklı iki özdeğeri olabilmesi için yeterlilik koşullarını göstermiş olduk. Benzer yorumları yaparak genel durumda iki spektruma göre ters problemi tam olarak çözmek mümkündür.

Teorem 4.3.2. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizilerinin (4.3.14) denkleminin (4.3.15) ve (4.3.16) sınır koşullarını sağlayan iki farklı spektrumları olması için $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ nin elamanı ve $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$ olacak biçimde aşağıdaki koşulların sağlanması gerek ve yeterdir..

1. λ_n ve μ_n dizileri sıralıdırlar(çarprazlaşır).
2. Aşağıdaki asimptotik formüller söz konusudur.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+\frac{\beta_2}{n^2}+\cdots+\frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

burada $\alpha\neq\beta,\ 0\le\beta,\ \alpha\le\pi, l=-(2k+1)$ ve her bir n için

$\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_{k,n}|^2<\infty, \sum_{-\infty}^{\infty}|\beta_{k,n}|^2<\infty, n=\pm\overline{(k+1,\infty)}$ dir.

İspat. Gerekliliğin ispatı Bölüm 3.2 den elde edilir. Yeterlilik ise Teorem 4.3.1.'in ispatı gibidir.

Not 4.3.1. Bölüm 3.2. de $\{\alpha_n\}$ lerin (4.1.28) bağıntısını sağladığı ispatlanmıştır. Bu Teoremden ise $\{\alpha_n\}$ lerin (4.3.9) bağıntısını sağladığı elde edilir. (4.1.28) ve (4.3.9) formülleri karşılaştırılırsa $A_1 = -1$ olduğu elde edilir.

5. YARI EKSENDE DIRAC SİSTEMİ İÇİN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

5.1. Problemin Tanımı

$$By' + Q(x)y = \lambda y, 0 \le x < \infty \tag{5.1.1}$$

denklemini ve

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \tag{5.1.2}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0 \tag{5.1.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım.

Burada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ ayrıca $Q(x)$ normalleştirilmiş matris fonksiyonunu $0 \le x < \infty$ yarı ekseninde diferansiyellenebilen fonksiyondur. Öyleki $\forall \alpha\, ve\, \beta$ $(\alpha \ne \beta)$ için (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin spektrumları ayrık tır. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sırasıyla (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerler dizisi olsun. Bu bölümde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ özdeğerlerine göre (5.1.1), (5.1.2) sınır değer probleminin spektral fonksiyonunun birebir olarak tanımlandığı gösterilecektir.

Spektral fonksiyona göre (5.1.1) Kanonik Dirac sistemi birebir tanımlandığından dolayı [3], iki farklı spektruma göre Kanonik Dirac sisteminin birebir tanımlandığı elde edilir.

5.2. $\rho(\lambda)$ -spektral fonksiyonun spektrumlar cinsinden ifadesi

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ (5.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha, \quad \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{5.2.1}$$

$$\theta_1(0,\lambda) = \sin\beta, \quad \theta_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{5.2.2}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ nın sırasıyla (5.1.2) ve (5.1.3) sınır koşullarını sağladığı aşikardır. Bu sebeple $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\theta(x,\lambda_n)$ sırasıyla $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ özdeğerlerine karşılık gelen (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

Teorem 5.2.1. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ sırasıyla (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerler dizisi olsun. Bu takdirde (5.1.1), (5.1.2) sınır değer probleminin $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ ler cinsinden

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{0\le\lambda_n<\lambda}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda\ge 0\\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n<0}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda<0\end{cases} \tag{5.2.3}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha_n}=-c\frac{\lambda_n}{\mu_n}(\mu_n-\lambda_n)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{-1} \tag{5.2.4}$$

formülleri ile tanımlanır.

Burada c herhangi sabit, ' sembolü çarpımda $k=n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder.

İspat. $f(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$ fonksiyonu, (5.1.1) denkleminin çözümü olsun. Burada $\operatorname{Im}\lambda\ne 0$ dır.

$$f(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{5.2.5}$$

olacak şekilde $f(x,\lambda)$ fonksiyonunu seçilsin. Bölüm 4.2. de yapılan işlemler tekrarlanırsa ve $x\to\infty$ için $\overline{f^*(x,\lambda)Bf(x,\lambda)}\to 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(\lambda-\overline{\lambda})\int_0^{\infty}\big(f(x,\lambda),f(x,\lambda)\big)dx=\left[m(\overline{\lambda})-m(\lambda)\right]\sin(\alpha-\beta)$$

olur. Buradan

$$\int_0^{\infty}\big(f(x,\lambda),f(x,\lambda)\big)dx=-\frac{\operatorname{Im}m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}\sin(\alpha-\beta)$$

formülü elde edilir. (5.2.5) den (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri sırasıyla $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları olduğu elde edilir. Dolayısıyla $m(\lambda)$ meromorf fonksiyondur. Bu sebeple $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ çaprazlaşırlar, dolayısıyla

$$m(\lambda)=c\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^{-1} \tag{5.2.6}$$

olur . Burada c sabit sayıdır.

Titchmarch çalışmasında (5.1.1), (5.1.2) probleminin $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu $m(\lambda)$ cinsinden

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{0\le\lambda_n<\lambda}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda\ge 0\\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n<0}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda<0\end{cases}$$

bağıntısıyla tanımlanır, burada

$$\frac{1}{\alpha_n}=\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n}$$

şeklindedir. Sonuncu formülden, (5.2.6) eşitliğinden aranan (5.2.3) formülü kolaylıkla elde edilir.

Not 5.2.1 Teorem 5.2.1, (5.1.1), (5.1.2) probleminin spektral fonksiyonu c sabit farkıyla iki spektruma göre hesaplandığını mümkün kılar.

Teorem 5.2.2. $\rho_1(\lambda)$ ve $\rho_2(\lambda)$ spektral fonksiyonları birbirinden sabit c çarpanı kadar farklı olduğunda yani $\rho_1(\lambda)=c\rho_2(\lambda)$ ise ve bunlar Dirac sistemiyle oluşan sınır problemlerinin spektral fonksiyonları olduğunda $c=1$ dir.

İspat.

$$\rho_1(\lambda)-\rho_1(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)$$

$$\rho_2(\lambda)-\rho_2(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)$$

buradan

$$\rho_1(\lambda)-\rho_1(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)=c\left[\rho_2(\lambda)-\rho_2(-\lambda)\right]=c\left[\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)\right]$$

elde eldir. Dolayısıyla $c=1$ olur.

Bu teoremden görüldüğü gibi $\rho(\lambda)$ nın tanımındaki sabit sayısı belirli durumlarda $\rho(\lambda)$ için asimptotik formüllerden hesaplanabilir. Not etmek gerekir ki c sabitinin kesin ifadesi bize gerekmez.

5.3. Spektrumun Ayrıklığı İçin Yeterlilik Şartları

Bu bölümde Dirac sisteminin spektrumunun diskret olacağı durumlar incelenecektir. Bununla ilgili birçok çalışma ithaf edilmiştir. Fakat bu çalışmalarda sistem kanonik şekilde ele alındığı için elde edilen sonuçlar daha az kullanılmaktadır.

Teorem 5.3.1 $Q(x)$ matris fonksiyonu sürekli türeve sahip olsun. Bu takdirde (5.1.1), (5.1.2) probleminin ayrık spektrum'a sahip olması için

$$\lim_{x\to\infty}\int_{x}^{x+k}\left\{p^2+q^2-(p'^2-q'^2)^{\frac{1}{2}}\right\}dt=\infty \tag{5.3.1}$$

bağıntısının sağlanması yeterlidir.

İspat. (5.1.1) denklemi (5.1.2) sınır koşullarıyla oluşan operatörü L ile gösterelim. Bu takdirde L^2 operatörü

$$-y''+(Q^2+BQ^1)y=\lambda^2 y \tag{5.3.2}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0$$

$$\left\{y_2'(0)+p(0)y_1(0)+q(0)y_2(0)\right\}\cos\alpha+\left\{-y_1'(0)+q(0)y_1(0)-p(0)y_2(0)\right\}\sin\alpha=0$$

sınır koşullarıyla oluşur. L^2 operatörünün diskretliği L operatörünün spektrumunun diskretliğin den elde edilir. Q^2+BQ^1 matrisine karşılık gelen en küçük özdeger $\mu(x)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty}\int_{x}^{x+k}\mu(x)dx=\infty \tag{5.3.3}$$

şeklindedir.

Basit hesaplamalardan sonra $\mu(x)=p^2+q^2-(p'^2-q'^2)^{\frac{1}{2}}$ elde edilir. Bu sebeple (5.3.3) koşulundan (5.3.1) elde edilir. Dolayısıyla L^2 operatörü ve doğal olarak L operatörünün diskret spektruma sahiptir.

Sonuç 5.3.1. $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlar olduğunda (5.1.1), (5.1.2) problemi ayrık spektrumuna sahiptir.

6. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN KISMEN ÇAKIŞMAYAN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

6.1. $K(x,s)$ Matris Fonksiyonunun Genel Dejenereliği

$$By'+Q(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}y=\lambda y, 0<x\le\pi \tag{6.1.1}$$

denklemini ve

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.2}$$

$$y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{6.1.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım. Burada

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\ y(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

ve H reel sayıdır.

Bu problemin $y_1(0)=0,\ y_2(0)=-1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$y_1(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x\left[-p(s)y_1(s)-q(s)y_2(s)+\frac{y_2(s)}{s}\right]\sin\lambda(s-x)ds$$
$$+\int_0^x\left[q(s)y_1(s)-p(s)y_2(s)-\frac{y_1(s)}{s}\right]\cos\lambda(s-x)ds$$

$$y_2(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x\left[-p(s)y_1(s)-q(s)y_2(s)+\frac{y_2(s)}{s}\right]\cos\lambda(s-x)ds$$
$$+\int_0^x\left[q(s)y_1(s)-p(s)y_2(s)-\frac{y_1(s)}{s}\right]\sin\lambda(s-x)ds$$

şeklindedir. Burada $\frac{y_1(s)}{s}\in C[0,\pi],\ \frac{y_2(s)}{s}\in C[0,\pi]$ dır.

Bu özfonksiyonlar (6.1.3) te yerine yazılırsa ve Bölüm 3.2 de yapılan işlemler tekrarlanırsa özdeğerler için asimptotik formül

$$\lambda_n=n+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{H}+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{6.1.4}$$

şeklinde elde edilir.

(6.1.1) denkleminin $Q(x)=0$ olduğu durumda, $y_{01}(0)=0,\ y_{02}(0)=-1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$y_{01}(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x \frac{y_2(s)}{s}\sin\lambda(s-x)ds-\int_0^x \frac{y_1(s)}{s}\cos\lambda(s-x)ds \tag{6.1.5}$$

$$y_{02}(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x \frac{y_2(s)}{s}\cos\lambda(s-x)ds-\int_0^x \frac{y_1(s)}{s}\sin\lambda(s-x)ds \tag{6.1.6}$$

şeklindedir. O halde bu özfonksiyonlar büyük λ lar için

$$y_{01}(x,\lambda)=\sin\lambda x+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \tag{6.1.7}$$

$$y_{02}(x,\lambda)=-\cos\lambda x+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \tag{6.1.8}$$

şeklinde yazılır. Burada $\tau=\left|\operatorname{Im}\lambda\right|$ dır.

Perturbe olmuş (6.1.1) denklemi ile perturbe olmamış yani $Q(x)=0$ olduğu durumda olan denklem arasında

$$y(x,\lambda)=y_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,s)y_0(s,\lambda)dt \tag{6.1.9}$$

bağıntısı vardır. Burada $y_0(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_{01}(x,\lambda) \\ y_{02}(x,\lambda)\end{pmatrix}$ fonksiyonu $Q(x)=0$ olduğu durumdaki çözüm fonksiyonudur ve $K(x,s)=\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}$ çekirdek fonksiyonudur.

(6.1.9) eşitliğinde $y(x,\lambda)$, $y_0(x,\lambda)$, $K(x,s)$ ifadeleri yerine yazılıp düzenlenirse

$$y_1(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x \left[K_{11}(x,s)\sin\lambda t-K_{12}(x,s)\cos\lambda s\right]ds+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \tag{6.1.10}$$

$$y_2(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x \left[K_{21}(x,s)\sin\lambda s-K_{22}(x,s)\cos\lambda s\right]ds+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \tag{6.1.11}$$

formülleri elde edilir.

$y(x,\lambda)$ vektör fonksiyon, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$, $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $\left[0,\pi\right]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar ve H reel sayı olmak üzere, (I)problemini

$$By' + Q(x)y - \frac{1}{x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y = \lambda y,\ 0 < x \le \pi \tag{6.1.12}$$

$$y_1(0) = 0 \tag{6.1.13}$$

$$y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \tag{6.1.14}$$

şeklinde ele alalım. (I) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. (6.1.12), (6.1.13) ve

$$y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0 \tag{6.1.15}$$

koşulu ile birlikte tanımlı olan (II) probleminin özdeğerleri $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun.

Benzer şekilde $\widetilde{Q}(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{p}(x) & \widetilde{q}(x) \\ \widetilde{q}(x) & -\widetilde{p}(x) \end{pmatrix}$, $\widetilde{p}(x)$ ve $\widetilde{q}(x)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, $\widetilde{H}$, H dan farklı reel sayı olmak üzere, (III) problemi

$$By' + \widetilde{Q}(x)y - \frac{1}{x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y = \lambda y, 0 < x \le \pi \tag{6.1.16}$$

$$y_1(0) = 0 \tag{6.1.17}$$

$$y_2(\pi) + \widetilde{H} y_1(\pi) = 0 \tag{6.1.18}$$

şeklinde ele alınsın. (III) probleminin özdeğerleri $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. (6.1.16), (6.1.17) ve

$$y_2(\pi) + \widetilde{H}_1 y_1(\pi) = 0 \tag{6.1.19}$$

koşulu ile birlikte tanımlı olan (IV) probleminin özdeğerleri $\{\widetilde{\mu}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun.

Aşağıdaki teorem söz konusudur.

Teorem 6.1.1. (I), (II), (III) ve (IV) problemlerinin özdeğerleri sırası ile $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\widetilde{\mu}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ $\left(n \in \overline{-\infty,\infty}\right)$ olsun. Bu takdirde;

1. $\lambda_n \equiv \widetilde{\lambda}_n$ tüm n ler için çakışır.

2. $\mu_n \ne \widetilde{\mu}_n$, $n = 0,1,2,\ldots,\mathbb{N}$ ve $\mu_n \equiv \widetilde{\mu}_n$, $\{n \in \mathbb{Z} - \{0,\mathbb{N}\}\}$.

3. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\widetilde{\mu}_n\}$ özdeğerleri çaprazlaşırlar.

koşulları sağlanacak biçimde

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \int_0^x K(x,s)\varphi(t,\lambda)dt \tag{6.1.20}$$

bağıntısında bulunan $K(x,s)$ çekirdek fonksiyonu genel dejeneredir.

İspat. (6.1.20) dönüşüm operatörü

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_1(x,\lambda) \\ \widetilde{\varphi}_2(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(s,\lambda) \\ \varphi_2(s,\lambda) \end{pmatrix} ds$$

veya

$$\widetilde{\varphi}_1(x,\lambda) = \varphi_1(x,\lambda) + \int_0^x \{K_{11}(x,s)\varphi_1(s,\lambda) + K_{12}(x,s)\varphi_2(s,\lambda)\}\, ds \tag{6.1.21}$$

$$\widetilde{\varphi}_2(x,\lambda) = \varphi_2(x,\lambda) + \int_0^x \{K_{21}(x,s)\varphi_1(s,\lambda) + K_{22}(x,s)\varphi_2(s,\lambda)\}\, ds \tag{6.1.22}$$

şeklinde yazılabilir. (6.1.21) bağıntısı $\widetilde{H}$ ile çarpılıp daha sonra (6.1.22) eşitliği ile toplanırsa

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varphi}_2(x,\lambda) + \widetilde{H}\widetilde{\varphi}_1(x,\lambda) = \varphi_2(x,\lambda) + H\varphi_1(x,\lambda) \\ &\quad + \int_0^x \Big[\Big\{K_{21}(x,s) + \widetilde{H}K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\lambda) + \Big\{K_{22}(x,s) + \widetilde{H}K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\lambda)\Big] ds \end{aligned} \tag{6.1.23}$$

formülü elde edilir.

Son ifadede $x=\pi$, $\lambda=\lambda_n$ alıp (I) ve (II) problemlerinin spektrumları için verilen (6.1.14) ve (6.1.15) koşullarından faydalanılırsa ve $\lambda_n \equiv \widetilde{\lambda}_n$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 = \Big(\widetilde{H} - H\Big)\varphi_1(\pi,\lambda_n) &+ \int_0^\pi \Big[\Big\{K_{21}(\pi,s) + \widetilde{H}K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\lambda_n) \\ &+ \Big\{K_{22}(\pi,s) + \widetilde{H}K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\lambda_n)\Big] ds \end{aligned}$$

bulunur. (6.1.10) formülünde $n\to\infty$ için limit alınırsa $\varphi_1(\pi,\lambda_n) \to (-1)^n \sin(\arctan\frac{1}{H})$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0' a gider. Dolayısıyla

$$\Big(\widetilde{H} - H\Big) = 0 \tag{6.1.24}$$

ve

$$\int_0^\pi \Big[\Big\{K_{21}(\pi,s) + \widetilde{H}K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\lambda_n) + \Big\{K_{22}(\pi,s) + \widetilde{H}K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\lambda_n)\Big] ds = 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{6.1.25}$$

formülleri bulunur. $\varphi(x,\lambda_n)$ özvektör fonksiyonlarının tamlığından

$$K_{21}(\pi,s) + \widetilde{H}K_{11}(\pi,s) = 0 \tag{6.1.26}$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{12}(\pi,s)=0 \tag{6.1.27}$$

elde edilir.

Şimdi ikinci spektrum için benzer işlemler yapalım. (6.1.21) eşitliği $\widetilde{H}_1$ ile çarpılıp daha sonra (6.1.22) eşitliği ile toplanırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_2(x,\lambda)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(x,\lambda)&=\varphi_2(x,\lambda)+H_1\varphi_1(x,\lambda)\\&+\int_0^x\Big[\Big\{K_{21}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\lambda)+\Big\{K_{22}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\lambda)\Big]ds\end{aligned} \tag{6.1.28}$$

formülü bulunur.

Son ifadede $x=\pi,\ \lambda=\mu_n,\ n>\mathbb{N}$ alıp (III) ve (IV) problemlerinin spektrumları için verilen (6.1.18) ve (6.1.19) koşullarından faydalanılırsa ve $\mu_n\equiv\widetilde{\mu}_n,\ \{n\in\mathbb{Z}-\{0,\mathbb{N}\}\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}0=\Big(\widetilde{H}_1-H_1\Big)\varphi_1(\pi,\mu_n)+\int_0^\pi\Big[&\Big\{K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)\\&+\Big\{K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds\end{aligned}$$

yazılır. (6.1.10) formülünden $n\to\infty$ için limit alınırsa $\varphi_1(\pi,\mu_n)\to(-1)^n\sin(\arctan\frac{1}{H})$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0 a gider. Dolayısıyla

$$\Big(\widetilde{H}_1-H_1\Big)=0 \tag{6.1.29}$$

ve

$$\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)+\Big\{K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds=0,\ n\in\mathbb{N} \tag{6.1.30}$$

formülleri elde edilir.

Şimdi ise benzer işlemleri $\mu_n\neq\widetilde{\mu}_n,\ n=0,1,2,\ldots,\mathbb{N}$ olduğu durumda yapılsın. $x=\pi,\ \lambda=\mu_n,\ n=0,1,\cdots,N$ alınırsa (6.1.28) ve (6.1.29) formüllerinden

$$\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)=\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)+\Big\{K_{22}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds \tag{6.1.31}$$

elde edilir. (6.1.30) ve (6.1.31) formüllerinden

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}\varphi_1(s,\mu_n) \tag{6.1.32}$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}\varphi_2(s,\mu_n) \tag{6.1.33}$$

bağıntıları elde edilir.

Burada

$$\|\varphi(s,\mu_n)\|^2=\alpha_n=\int_0^{\pi}\left\{\varphi_1^2(s,\mu_n)+\varphi_2^2(s,\mu_n)\right\}ds$$

olacak şekilde

$$\tau_n=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}$$

eşitliği verilsin. Böylece $K_{ij}(\pi,s),\ i,j=1,2$ fonksiyonlarını tanımlamak için

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{11}(\pi,s)=0$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{12}(\pi,s)=0$$

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

denklemler sistemi elde edilir. Yukarıdaki denklem sistemini $K_{ij}(\pi,s),(i,j=1,2)$ e göre çözülürse

$$K_{11}(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{12}(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

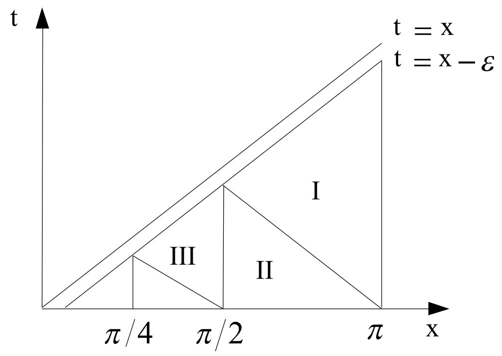
$$K_{21}(\pi,s)=-\frac{\widetilde{H}}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{22}(\pi,s)=-\frac{\widetilde{H}}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$K(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\begin{pmatrix}\varphi_1(s,\mu_n) & \varphi_2(s,\mu_n)\\ -\widetilde{H}_1\varphi_1(s,\mu_n) & -\widetilde{H}\varphi_2(s,\mu_n)\end{pmatrix} \tag{6.1.34}$$

şeklindedir. $K(x,s)$ fonksiyonu birinci mertebeden hiperbolik denklemler sistemini sağladığı için (6.1.34) koşulu birlikte OAB üçgeninin tamamında birebir olarak tanımlanır.



Şekil 6.1.1 OAB üçgeninin tamamında $K(x,s)$ fonksiyonunun görüntüsü

Bu sebeple OAB üçgeninin tamamında $K(x,s)$ fonksiyonunun görüntüsü

$$K(x,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\left\|\varphi(s,\mu_n)\right\|^2}\times\left[\theta(x,\mu_n)-\widetilde{H}\chi(x,\mu_n)\right]\varphi^T(s,\mu_n) \qquad (6.1.35)$$

şeklindedir. Burada

$$\theta(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\theta_1(x,\lambda)\\ \theta_2(x,\lambda)\end{pmatrix},\quad \chi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\chi_1(x,\lambda)\\ \chi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

denklemin

$$\theta_1(\pi,\lambda)=\chi_2(\pi,\lambda)=1,\quad \theta_2(\pi,\lambda)=\chi_1(\pi,\lambda)=0$$

koşullarını sağlayan çözümleridir. $\varphi^T(s,\lambda)$ ise transpozu alınmış vektör fonksiyonudur.

7. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

7.1. Farklı potansiyellere sahip singüler Dirac operatörü için kararlılık problemi

$p_i(x)$ ve $q_i(x)$ $(i=1,2)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ve

$$Q_1(x)=\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix},\quad Q_2(x)=\begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\pi-x} \\ -\dfrac{1}{\pi-x} & 0 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$By'+Q_1(x)y+L(x)y=\lambda y, 0\le x<\pi \tag{7.1.1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{7.1.2}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{7.1.3}$$

sınır değer problemi ele alınsın. (7.1.1) probleminin $\psi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \psi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda)\\ \psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ile gösterilsin. Bu problemin

spektral karakteristikleri $\{\lambda_n,\rho_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. Bu karakteristikler (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar) sırasıyla aşağıdaki asimptotik formülleri sağlarlar.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{k,n}}{n^k} \tag{7.1.4}$$

$$\rho_n=\pi+\frac{c_1}{n}+\cdots+\frac{c_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{7.1.5}$$

Benzer şekilde (7.1.1) in pertürbesi olan aşağıdaki sınır değer problemi

$$By'+Q_2(x)y+Ly=\mu y, 0\le x<\pi \tag{7.1.6}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{7.1.7}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{7.1.8}$$

ele alınsın. (7.1.6) probleminin $\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ile gösterilsin. Bu problemin

spektral karakteristikleri $\{\mu_n,\sigma_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. Bu karakteristikler (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar) sırasıyla aşağıdaki asimptotik formülleri sağlarlar.

$$\mu_n = n - \frac{\alpha'}{\pi} + \frac{\alpha'_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha'_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha'_{k,n}}{n^k} \tag{7.1.9}$$

$$\sigma_n = \pi + \frac{c'_1}{n} + \cdots + \frac{c'_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c'_{n,k}}{n^k} \tag{7.1.10}$$

Ayrıca

$$F(x,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sigma_n} \psi(x,\mu_n)\psi^T(s,\mu_n) - \frac{1}{\rho_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n) \right\}$$

olmak üzere;

$$K(x,s) + F(x,s) + \int_0^x K(x,t)F(t,s)dt = 0 \quad (0 \le s \le x \le \pi)$$

esas integral denklemini sağlayan bir tek $K(x,s)$ matris fonksiyonu vardır. Burada $K(x,s)$ matris fonksiyonu

$$BK(x,x) - K(x,x)B = Q_1(x) - Q_2(x) \tag{7.1.11}$$

koşulunu sağlar.

Teorem 7.1. Eğer $A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right]$ yeterince küçük ise

$$\max_{0 \le x < \pi} |p_1(x) - p_2(x)| \le C'A$$
$$\max_{0 \le x < \pi} |q_1(x) - q_2(x)| \le C''A$$

dır. Burada $C' > 0$ ve $C'' > 0$ sabit sayılardır.

İspat.

$$K(x,s) + F(x,s) + \int_0^x K(x,t)F(t,s)dt = 0 \quad (0 \le s \le x \le \pi)$$

integral denklemi göz önüne alınsın. Burada $F(x,s)$ bilinen fonksiyondur. Bu integral denklemini çözelim.

$$F^{(1)}(x,s) = F(x,s)$$

olmak üzere

$$F^{(n+1)}(s,t;x) = \int_0^x F(s,u)F^{(n)}(u,t;x)du, \ n \ge 1 \tag{7.1.12}$$

itere fonksiyonları yazılabilir. Burada $K(x,s)$ matris fonksiyonu

$$K(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.13}$$

dir. $F(x,s)$ fonksiyonun da düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
F(x,s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\psi(x,\mu_n)\psi^T(s,\mu_n)-\frac{1}{\rho_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n)\right\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_n}\begin{pmatrix}\psi_1(x,\mu_n)\\ \psi_2(x,\mu_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(s,\mu_n) & \psi_1(s,\mu_n)\end{pmatrix}-\frac{1}{\rho_n}\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda_n)\\ \psi_2(x,\lambda_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(s,\lambda_n) & \psi_1(s,\lambda_n)\end{pmatrix} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\begin{Bmatrix}\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n} & \frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n} \\ \frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n} & \frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.1.14}$$

olur. Burada $F(x,s)$ fonksiyonunun matris gösterimi

$$F(x,s)=\begin{pmatrix}F_{11}(x,s) & F_{12}(x,s)\\ F_{21}(x,s) & F_{22}(x,s)\end{pmatrix} \tag{7.1.15}$$

şeklindedir. O halde (7.1.14) den

$$F_{11}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.16}$$

$$F_{12}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.17}$$

$$F_{21}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.18}$$

$$F_{22}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \tag{7.1.19}$$

yazılır.

Önce $F_{11}(x,s)$ formülü hesaplansın. (7.1.16) nin sağ tarafına $\dfrac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa

$$F_{11}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}+\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)+\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\left(\psi_1(x,\mu)\psi_1(s,\mu)\right)'d\lambda\right]$$

elde edilir. Burada $'=\frac{d}{d\lambda}$. $-1\le\cos x\le 1,\ -1\le\sin x\le 1,\ 0\le x<\pi$ olduğu göz önüne

alınırsa

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)c_1\right|+\left|\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_2\,d\lambda\right|\right]$$

$$\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\rho_n-\sigma_n\right)c_3\right|+\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_4\,d\lambda\right|\right]$$

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le C_1\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$$

elde edilir. $A\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$ olduğundan

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le C_1A \tag{7.1.20}$$

bulunur. (7.1.12) den

$$F_{11}^{(n+1)}(s,t;x)=\int_0^x F_{11}(s,u)F_{11}^{(n)}(u,t;x)\,du,\ \ n\ge 1 \tag{7.1.21}$$

olur buradan

$$F_{11}^{(2)}(s,t;x)=\int_0^x F_{11}(s,u)F_{11}(u,t;x)\,du$$

elde edilir. $0\le x<\pi$ olduğundan

$$\left|F_{11}^{(2)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^2}{\pi}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\left|F_{11}^{(3)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^3}{\pi}$$

$$\vdots\qquad = \qquad\vdots$$

$$\left|F_{11}^{(n)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}$$

elde edilir. (7.1.13) eşitliğinden

$$K_{11}(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F_{11}^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.22}$$

yazılabilir. (7.1.22) eşitliği göz önüne alınırsa

$$|K_{11}(x,x)|\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{(C_1A\pi)^n}{\pi}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(C_1A\pi)^n}{\pi}\right|$$

olur. $C_1A\pi\leq\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}|K_{11}(x,x)|&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(C_1A\pi)^n}{\pi}=C_1A+\pi(C_1A)^2+\pi^2(C_1A)^3+\ldots\\&\leq C_1A\left(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots\right)\\&\leq 2C_1A\end{aligned} \tag{7.1.23}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}F_{12}(x,s)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}+\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\sigma_n}\right]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)+\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\left(\psi_1(x,\mu)\psi_2(s,\mu)\right)'d\lambda\right]\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}|F_{12}(x,s)|&\leq\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)c_5\right|+\left|\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_6\,d\lambda\right|\right]\\&\leq\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\rho_n-\sigma_n\right)c_7\right|+\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_8\,d\lambda\right|\right]\end{aligned}$$

$$|F_{12}(x,s)|\leq C_2\sum_{n=0}^{\infty}\left[|\sigma_n-\rho_n|+|\mu_n-\lambda_n|\right]$$

elde edilir. $A\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left[|\sigma_n-\rho_n|+|\mu_n-\lambda_n|\right]$ olduğundan yukarıdaki işlemlerin benzerleri yapılırsa

$$|F_{12}(x,s)|\leq C_2A \tag{7.1.24}$$

elde edilir. (7.1.12) den

$$F_{12}^{(n+1)}(s,t;x)=\int_0^x F_{12}(s,u)F_{12}^{(n)}(u,t;x)du,\ \ n\geq 1 \tag{7.1.25}$$

olup buradan

$$F_{12}^{(2)}(s,t;x)=\int_0^x F_{12}(s,u)F_{12}(u,t;x)du$$

elde edilir. $0\leq x<\pi$ olduğundan

$$\left|F_{12}^{(2)}(s,t;x)\right|\leq\left(C_2A\right)^2\pi$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\begin{aligned}F_{12}^{(3)}(s,t;x)&\leq\frac{\left(C_2A\pi\right)^3}{\pi}\\ \vdots\quad &=\quad\vdots\\ F_{12}^{(n)}(s,t;x)&\leq\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\end{aligned}$$

elde edilir. (7.1.13) eşitliğinden

$$K_{12}(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nF_{12}^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.26}$$

yazılabilir. (7.1.22) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\left|K_{12}(x,x)\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\right|$$

olur. Burada $C_2A\pi\leq\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left|K_{12}(x,x)\right|&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}=C_2A+\pi(C_2A)^2+\pi^2(C_2A)^3+\ldots\\ &\leq C_2A\left(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots\right)\\ &\leq 2C_2A\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\left|K_{21}(x,x)\right|\leq 2C_3A \tag{7.1.27}$$

$$\left|K_{22}(x,x)\right|\leq 2C_4A \tag{7.1.28}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
BK(x,x)-K(x,x)B &= Q_1(x)-Q_2(x)\\
&=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{11}(x,x) & K_{12}(x,x)\\ K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} K_{11}(x,x) & K_{12}(x,x)\\ K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x)\\ K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x)-K_{21}(x,x)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla

$$
\begin{pmatrix} K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x)\\ K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x)-K_{21}(x,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1(x)-p_2(x) & q_1(x)-q_2(x)\\ q_1(x)-q_2(x) & p_2(x)-p_1(x)\end{pmatrix}
$$

elde edilir. Buradan da

$$
q_1(x)-q_2(x)=K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) \tag{7.1.29}
$$

$$
p_1(x)-p_2(x)=K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \tag{7.1.30}
$$

bulunur. (7.1.29) ve (7.1.30) denklemleri ve (7.1.23), (7.1.26), (7.1.27) ve (7.1.28) eşitsizliklerinden

$$
\left|p_1(x)-p_2(x)\right|\le C'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C'A
$$

$$
\left|q_1(x)-q_2(x)\right|\le C''\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C''A
$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler $[0,\pi)$ aralığında bulunan tüm x değerleri için sağlandığından

$$
\max_{0\le x<\pi}\left|p_1(x)-p_2(x)\right|\le C'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C'A
$$

$$
\max_{0\le x<\pi}\left|q_1(x)-q_2(x)\right|\le C''\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C''A
$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] **Ambartsumyan, V.A.,** 1929, *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Z. Physik, 53, 690-695.

[2] **Borg, G.,** 1945, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta Math., 78, 1-96.

[3] **Levinson, N.,** 1949, *The Inverse Sturm- Liouville Problem,* Mat. Tidsskr. B., pp.25-30.

[4] **Levinson, N.,** 1949, *Criteria fort he Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators*, Casopis. Pest. Mat. Fys., 74, 17-20.

[5] **Delsarte, J.,** 1938, *Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Linearies Aux Derivees Partielles du Second Ordre*, C. R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182.

[6] **Delsarte, J. and Lions, J.,** 1957, *Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe*, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128.

[7] **Levitan, B.M.,** 1964, *Generalized Translation Operators and some of its Applications,* Jerusalem.

[8] **Povzner, A.V.,** 1948, *On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis*, *Mat. Sb.,* 23.

[9] **Tichkonov, A.N.,** 1949, *Uniqueness Theorem for Jeophysics Problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 69, No:4, 797-800.

[10] **Marchenko, V.A.,** 1950, *Some Problems in the Theory of Second–Order Differantial Operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 72, 457-560.

[11] **Krein, M.G.,** 1951, *Solution of the Inverse Sturm-Liouville problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR,76, 21-24.

[12] **Krein, M.G.,** 1954, *On a Method of the Effective Solution of an Inverse BoundaryValue Problem,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 95, 767-770.

[13] **Gelfand, I.M. and Levitan, B.M.,** 1951, *On the Determination of a DifferentialEquations by its Spectral Function,* Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math., 15, 309-360.

[14] **Levitan, B.M. and Gasymov, M.G.,** 1964, *Determination of a Differential Equations by two its Spectra*, Russian Math Surveys, 19, 1-63.

[15] **Cardner, G., Green, J., Kruskal, M. and Miura, M.,** 1967, *A Method for Solvingthe Korteweg-De Vries Equation*, Phys. Rev. Lett., v. 19, 1095-1098.

[16] **Lax, P.,** 1968. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, *Comm. Pure and Appl. Math.*, v .21,467-490.

[17] **Faddeev, L.D.,** 1964, *Properties of the S-Matrix of the One-Dimensional Schrödinger Equation trudy* Mat. Inst. Steklow, 73, 314-336.

[18] **Prats, F. and Toll, J.,** 1959, *Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States*, Phys. Rew., 113, (1), 363-370.

[19] **Moses, H.E.,** 1957, *Calculation of the Scattering Potential for One-DimensionalDirac Equation from Reflection Coefficient and Point Eigenvalues*, Bull. Amer. Phys. Soc., 4, 240.

[20] **Gasymov, M.G. and Levitan, B.M.,** 1966, *The Inverse Problem for the Dirac System*, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.

[21] **Gasymov, M.G. and Dzhabiev T.T.,** 1955, *On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator,* Baku- ELM., *46-71.*

[22] **Sargsjan, I.S.,** 1966a, *A Theorem of the Completeness of the Eigenfunctions of the Generalized Dirac System,* Dokl., Akad. Nauk. Arm. SSR, 42, (2), 77-82.

[23] **Sargsjan, I.S.,** 1966b, *Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional DiracSystem,* Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat., 1, (6), 392-436.

[24] **Quigg, C., Rosner, J.L. and Thacker, H.B.,** 1978, Inverse Scattering Problem for Quarkonium Systems, I and II Phys. Rev., D 18, No: 1, 274-295.

[25] **Grosse, H. and Martin, A.,** 1979, *Theory of the Inverse Problem for ConfiningPotentials*, Nuclear Phys., B 14 B, 413-432.

[26] **Abdukadyrov, E.,** 1967, *Computation of the Regularizad Trace for a Dirac System,* Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh., 22, (4), 17-24.

[27] **Khasanov, A.B.,** 1994, *On Eigenvalues of the Dirac Operator Located on the Continuous Spectrum*, Theory and Math. Phys. V.99, No: 1, 20-26.

[28] **Gasymov, M.G.,** 1967, *The Inserve Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order 2n*, Soviet Physics Dokl. 11, 676-678.

[29] **Veliev, S.G.,** 1972, *Inverse Problem for the Dirac systems a the Whole Axis*, DEP. VINITI, 4917-4972.

[30] **Maksudov, F.G. and Veliev, S.G.,** 1975, *The Inverse Scattering Problem for the Nonself-Adjoint Dirac Operator on the Whole Axis*, Soviet Math. Dokl. V. 16, No: 6, 1629-1633.

[31] **Roos, B.W. and Sangren, W.C.,** 1961, *Spectra for a Pair Singular First OrderDifferential Equations*, Proc. Amer. Math. Soc., V. 12, 468-476.

[32] **Harris, B.J.,** 1983, *Bounds for the Eigenvalues of Separated Dirac Operators*, Proc. of Royal Society of Edinburgh, 95 A, 341-366.

[33] **Evans, W.D. and Harris, B.J.,** 1980, *Bounds for the Point Spectra of Separated Dirac Operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect., A 88, 1-15.

[34] **Otelbayev, M.O.,** 1973, *Distribution of the Eigenvalues of the Dirac Operator*, Mat. Zametki, 14, 843-852.

[35] **Martynov, V.V.,** 1965, *Conditions of Discreteness and Countinuity of the Spectrumin the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Differential Equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165, 996-999.

[34] **Nabiev, I.M.,** 2003, *On reconstruction of Dirac operator on the segment*, Proceedingof IMM of Nas of Azerbaijan*,* 18, 97-102.

[35] **Kerimov N.B.,** 2002, *A boundary value problem for the Dirac system with a spectralparameter in the boundary conditions*, Differ. Equ. 38 (2), 164-174.

[36] **Agranovich M.S.,** 2001, *Spectral problems for the Dirac system with spectralparameter in local boundary conditions,* Funct. Anal. Appl. 35, 161-175.

[37] **Arutyunyan, T.N.,** 2008, *Transformation operators for the canonical Dirac system*, Differ. Uravn. 44, 1011-1021.

[38] **Amirov R. Kh. Keskin B. and Ozkan A. S.,** 2009, *Direct and inverse problems for the Dirac operator with a spectral parameter linear contained in a boundarycondition*, Ukrainian Math. J. 61, 1365-1379.

[39] **Yang C.F.,** 2011, *Hochstadt-Lieberman theorem for Dirac operator with igenparameter dependent boundary conditions*, Nonlinear Anal., 74, 2475-2484.

[40] **Panakhov, E.S.,** 1981, *Inverse problem for Dirac system in two partially settled spectrum*, VINITY 3304, 1-29.

[41] **Hryniv R.O. and Mykytyuk Ya.V.,** 2003, *Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Inverse problems*,* 19, 665-684.

[42] **Savchuk A.M. and Shkalikov A.A.,** 1999, *Sturm-Liouville operators with singularpotentials*, Mat. Zametki, 66, 897-912.

[43] **Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R. and Holden H.,** 1988, *Solvable Modelsin Quantum Mechanics*, New York.

[44] **Albeverio S. and Kurasov P.,** 2000, *Singular Perturbations of Differential Operators, Solvable Schrödinger Type Operators.*

[45] **Savchuk A.M.,** 2001, *On eigenvalues and eigenfunctions of Sturm-Liouvilleoperators with singular potentials*, Mat. Zametki, 69, 277-285.

[46] **Hryniv R.O. and Mykytyuk Ya.V.,** 2003, *Transformation operators for Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Math. Phys. Anal. Geom.

[47] **Pöschel J. and Trubowitz E.,** 1987, *Inverse spectral theory*, Pure Appl. Math., 130.

[48] **Hald O.,** 1984, *Discontinuous Inverse Eigenvalue Problem*, Commun. Pure Appl. Math., 37, 539-577.

[49] **Andersson L.,** 1988, *Inverse Eigenvalue problems for a Sturm-Liouville equation in impedance form*, Inverse problems, 4, 929-971.

[50] **Carlson R.,** 1994, *Inverse Sturm-Liouville problems with singularity at zero,* Inverse problems, 10, 851-864.

[51] **Hald O. and McLaughlin J.R.,** 1998, *Recovery of BV Coefficients from nodes*, Inverse problems, 14, 245-273.

[52] **Yurko V.A.,** 2000, *Inverse problems for differential equations with singularities lying inside the interval,* J. Inverse Ill.-Posed Probl., 8, 89-103.

[53] **Amirov, R.Kh. and Yurko V.A., ** 2001**,** *On differential operators with singularity and Discontinuous Conditions Inside the Interval*. Ukr. Math. Jour., 53, 1443-1458.

[54] **Gasymov M.G.,** 1965, *Determination of the Sturm-Liouville equation having singularity from two spectra*, DAN SSSR, 161, 274-276.

[55] **Koyunbakan H.,** 2002, *Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Teorisi*, Doktora Tezi, Elazığ.

[56] **Panakhov E.S. and Yilmazer R.,** 2006, *On inverse problem for Singular Sturm-Liouville operator from two spectra*, Ukrainian Mathematical Journal, 147-154.

[57] **İç Ü.,** 2003, *Kanonik Dirac Operatörü İçin Kısmen Çakışmayan İki Spektruma göre Ters problem*, Doktora Tezi, Elazığ.

[58] **Baş E.,** 2006, *Spektral ve Potansiyel Teorinin Ters problemleri*, Doktora Tezi, Elazığ.

[59] **Kayalar M.,** 2003, *Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Singüler Sturm-Liouville Operatörü için Ters problem*, Doktora Tezi, Erzurum.

[60] **Levitan, B.M.,** 1978, *On the Determination of the Sturm-Liouville operator from One and Two Spectra*, Math. Ussr, Izvestija, vol. 12, no.1, 179-193.

[61] **Mizutani, A.,** 1984, *On the inverse Sturm-Liouville problem,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math., 31, 319-350.

[62] **Kreyszig, E.,** 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications,* New York.

[63] **Bayraktar, M.,** 1994, *Fonksiyonel Analiz, Atatürk üniversitesi yayınları*, Erzurum, s.314.

[64] **Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V.,** 1972, *Elementary of Functional Analysis and Theory of Functions*, Moscow, Russia, p. 327.

[65] **Musayev, B., Alp, M.,** 2000, *Fonksiyonel Analiz,* Balcı yayınları, Kütahya, s. 470.

[66] **Levitan, B.M., and Sargsyan, I.S.,** 1990, *Sturm-Liouville and Dirac Operators*, Netherlands.

[67] **Naimark, M. A.,** 1968, *Linear Differential Operators*, Frederik Ungar Publishing Co. Inc., London.

[68] **İdemen, M.,** 1999, *Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi*, Işık ün., İstanbul.

[69] **Hacısalihoğlu, H.H., Haciyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown L.M., İbikli, E., Brown, S.,** 2000, *Matematik Terimleri Sözlüğü*, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, s.678.

[70] **Olver, F.W.J.,** 1974, *Introduction to asymptotics and special functions*, Akademic pres, New York and London, p. 375.

[71] **Balcı, M.,** 1997, *Analiz II*, Balcı yayınları, Ankara, s.420.

[72] **Adams, R.A.,** 1978, *Sobolev Space,* Academic Press, New York.

[73] **Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S.,** 2010, *Adi Diferansiyel Denklemler*, Dora Yayınları, Bursa.

ÖZGEÇMİŞ

10.09.1979 yılında Erzincan'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzincan' da tamamladı. 1999 yılında Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen–Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2003 yılında mezun oldu. 2005 yılında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2006 yılında Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2008 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansını bitirdi. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına başladı.
Evli ve bir çocuk babasıdır.

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ
Murat ŞAT

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ
Murat ŞAT
(08121204)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12.06.2012

TEMMUZ–2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Murat ŞAT
(08121204)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12.06.2012
Tezin Savunulduğu Tarih: 03.07.2012

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (A.Ü.)
Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK (F.Ü.)
Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü.)
Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü.)

TEMMUZ-2012

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında ve yürütülmesinde, engin bilgi birikimini tam olarak bir eğitimci üslubu ve sıfatıyla, yüksek makamın alçak gönüllülüğü içerisinde, aktarmasına ve böyle bir çalışmanın planlanması, düzenli bir şekilde yürütülmesi sürecinde her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum yakın ilgi ve desteklerinden dolayı anneme ve aileme teşekkür eder saygı ve sevgilerimi sunarım.

Murat ŞAT

ELAZIĞ–2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışma yedi bölümden oluşmuştur.

İlk bölümde; regüler Sturm-Liouville ve Dirac operatörlerinin, spektral teorisinin (düz ve ters problemler) tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümde; diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; bir boyutlu stasyoner Dirac operatörünün genel görüntüsü ve kanonik formları, özdeğerler için asimptotik formül, kanonik Dirac operatörü için matris dönüşüm operatörü, normlaştırıcı sayıların iki spektrum türünden ifadesi, normlaştırıcı sayılar için asimptotik formül ve iki spektruma göre ters problem incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; singüler Dirac operatörü, iki spektruma göre ters problem, normlaştırıcı sayılar için asimptotik ifadeler elde edilmiştir.

Beşinci bölümde; yarı eksende Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem incelenmiştir.

Altıncı ve yedinci bölümler çalışmanın orijinal kısmı olup bu bölümlerde sırasıyla singüler Dirac operatörü için dönüşüm operatörünün genel dejenereliği ve kararlılık problemi incelenmiştir

Anahtar Kelimeler: Spektrum, Ters problem, Dirac operatörü, Özdeğer, Özvektör fonksiyon, Genel dejenere, Kararlılık.

SUMMARY

Spectral Theory of the Singular Dirac Operator

This thesis consists of seven chapters.

In the first chapter; the history of spectral theory (well and ill-posed problem) Sturm-Liouville and Dirac operators were given.

In the second chapter; some fundemantal definitions often used in the spectral theory differential operators were given.

In the third chapter; one dimensional stationary and canonic forms of Dirac operator, asymptotic formula for eigenvalues, matrix transformation operator for canonic Dirac operators, the statement of norming constants in terms of two spectrums, asymptotic formula for norming constants and inverse problem according to two spectrums were studied.

In the fourth chapter; singular Dirac operator, inverse problem according to two spectrum and asymptotic statements for norming constants were obtained.

In the fifth chapter; in semi-axis inverse problem according to two spectrums for Dirac operator was examined.

In the sixth and the seventh chapters that constitute the original part of our study, the general degenerate of transformation operator for singular Dirac operator and well-posedness problem were studied, respectively.

Key Words: Spectrum, Inverse problem, Dirac operator, Eigenvalue, Eigenvector function, General degenerate, Well-posedness.

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER LİSTESİ

$L_2[a,b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
H	: Hilbert uzayı
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyon
λ_n	: n. özdeğer
φ_n	: n. özfonksiyon
$K(x,y)$	: Çekirdek fonksiyonu
α_n	: n. normlaştırıcı sayı
$\rho(\lambda)$	: Spektral fonksiyon
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir (telin titreşimi, zar titreşimi, vb.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Matematikte l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H da lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX.–XX. asırlarda birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sınırlı ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler; tanım bölgesi sınırsız veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak şekilde) diferansiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Rietsz, J. Von Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapıldığı bilinmektedir.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşım 1946 yılında E. C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre sık sık bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Lineer diferansiyel operatörler teorisinde spektral analizin ters problemleri önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel operatörler için ters problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak (veya yapısını kurmak) mümkündür.
2. Spektral verilere göre operatör birebir olarak mı tanımlanır.
3. Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması (kurulması) yöntemlerinin bulunmasıdır.

Ters problemlerle ilgili ilk sonuç, V. A. Ambartsumyan' a [1] aittir. 1929 yılında V. A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.1. $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_n, \cdots$'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (0 \le x \le \pi) \tag{1.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{1.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0,1,\cdots)$ ise $q(x) = 0$ dır.

V. A. Ambartsumyan'ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir.

Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G. Borg'a aittir [2].

Teorem 1.2. $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (1.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0\,, \tag{1.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\,, \tag{1.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$'ler ise (1.1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad (h \neq h_1) \tag{1.5}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\,,$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir. (h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılardır).

G. Borg'un bu çalışmasında $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilmiştir ve operatör bu dizilerin yardımıyla belirtilmiştir. Yani, bu tip operatörün varlığı önceden belli olduğu kabul edilmiştir. G. Borg, aynı çalışmada bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, V. A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığı N. Levinson [3], [4] tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca N. Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte, J. Lions [5], [6] ve B. M. Levitan [7] tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner [8] kendi çalışmalarında göstermiştir.

Daha sonra ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde teklik problemiyle ilgili en önemli çalışmalar A. N. Tichkonov (Tikhonov) [9] ve V. A. Marchenko [10] tarafından yapılmıştır. Marchenko bu çalışmasında teklik problemlerinin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=1, \quad \varphi'(0,\lambda)=h \tag{1.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda)=\varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{1.7}$$

sayıları verilen operatörün normlaştırıcı sayıları,

$$\rho(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}\frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V. A. Marchenko yukarıda bahsedilen çalışmada G. Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımı ile vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun, Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. V. A. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M. G. Krein [11], [12] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\ge 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\ge 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul $\{\lambda_n\}_{n\ge 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\ge 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V. A. Marchenko'nun çalışması yayınlanmadan önce A. N. Tikhonov [9] tarafından V. A. Marchenko'nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A. N. Tichkonov'un çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir.

Teorem 1.3. $\lambda<0$ olduğunda

$$U''+\lambda\rho^2(x)U=0, \qquad x>0,\ U(\infty)=0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x)\ge\rho_0>0$ dır. $R(\lambda)=\dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda<0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I. M. Gelfand ve B. M. Levitan [13], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları verdiler. Ayrıca bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir

yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre bulunması için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen klasik asimptotik formüllerinin sağlanmasıdır:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \ldots + \frac{a_{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \ldots + \frac{b_{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1}},$$

burada $a_0 = \frac{1}{\pi}\left[h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum\left(\frac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek sayı ise $\sum\left(\frac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dur.

Fakat bu çalışmalarda ters problemin iki spektruma göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B. M. Levitan ve M. G. Gasimov'un [14] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{1.8}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n.$ çarpanın bulunmadığını gösterir. (1.8) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (1.8) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [14] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1. $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri çaprazlaşır (sıralıdır), yani

   $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$

2. λ_n ve μ_n'ler

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3. $a_0 \neq a_0'$.

Sturm-Liouville operatörünü inceleme sürecinde özellikle XX. asrın ikinci yarısında kullanılan yöntemlerin sayısı sürekli bir şekilde çoğalmıştır. Buna kanıt olarak 1967 yılında bir grup Amerikan fizikçileri ve matematikçileri G. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura [15] ve P. Lax [16] tarafından bulunan bazı kısmi türevli nonlineer evalusyon denklemleri ile Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki bağıntıyı gösterebiliriz. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulamaları olan singüler Sturm-Liouville operatörleri için kuantum teorisinin ters saçılma problemleri halen yoğun bir şekilde fizikçiler ve matematikçiler tarafından araştırılmaktadır. Kuantum saçılma teorisinin ters problemleri ile ilgili tarihçe detaylı bir şekilde L. D. Faddeev'in [17] çalışmasında verilmiştir.

Şimdi ise Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları hatırlatalım. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar doğal olarak fizikçiler F. Prats, J. Toll [18], H. E. Moses [19] ve diğerleri tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0,\infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasimov ve B. M. Levitan [20] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B\frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y, \qquad 0 < x < \infty \tag{1.9}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \tag{1.10}$$

$$(y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0, \; H_1 \neq H) \tag{1.11}$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$, (1.9) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=0,\quad \varphi_2(0,\lambda)=-1$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan $\rho(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ fonksiyonu (1.9), (1.10) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x)\in L^2(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda)=\int_0^n f^T(x)\,\varphi(x,\lambda)dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(\lambda)-F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda)=0$$

olmak üzere

$$\int_0^{\infty} f^T(x)\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F^2(\lambda)d\rho(\lambda) \qquad (1.12)$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Ayrıca, bu çalışmada aşağıdaki önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 1.4.

$$\sigma(\lambda)=\rho(\lambda)-\frac{\lambda}{\pi}$$

ve

$$F(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}(1-\cos\lambda x)/\lambda\\ -\sin\lambda x/\lambda\end{pmatrix}\left(\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda}-\frac{\sin\lambda y}{\lambda}\right)d\sigma(\lambda)$$

olmak üzere $y\le x$ için $K(x,y)$ matris fonksiyonu

$$F(x,y)+K(x,y)+\int_0^x K(x,s)F(s,y)ds=0 \qquad (1.13)$$

integral denklemini sağlar.

Teorem 1.5. $\rho(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

1. $g(x)\in L^2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyonu ve

$$G(\lambda)=\int_0^{\infty} g^T(x)\,s(x,\lambda)dx,\quad s(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\lambda x\\ -\cos\lambda x\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}, \quad c(x,\lambda) = \begin{pmatrix} (1-\cos\lambda x)/\lambda \\ -\sin\lambda x/\lambda \end{pmatrix}$$

olacak biçimde

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda) c^T(y,\lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

matris fonksiyonu ikinci merteben sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

Bu takdirde her sabit $x \geq 0$ için (1.13) integral denklemi her iki değişkene göre sürekli olan tek $K(x,y)$ çözümüne sahiptir.

Teorem 1.6. $Q(x)$ sürekli matris fonksiyonu olmak üzere monoton artan $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun (1.9), (1.10) sınır değer probleminin spektral fonksiyonu olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerek ve yeterdir:

1. Eğer $g(x) \in L^2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} g^T(x) s(x,\lambda) dx$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda) c^T(y,\lambda)\, d\{\rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}\}$$

matris fonksiyonu $F_{11}(x,0) = F_{21}(x,0) = 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi M. G. Gasimov ve T. T. Dzhabiev [21] tarafından yapılan çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki önemli teoremler ispatlanmıştır:

Teorem 1.7. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri sırası ile (1.9), (1.10) ve (1.9), (1.11) problemlerinin özdeğerleri ise

$$\alpha_n = \frac{H_1 - H}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty} {}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \mu_n}, \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots) \tag{1.14}$$

dir. Burada, ' simgesi sonsuz çarpımda $k = n$ teriminin mevcut olmadığını gösterir.

Teorem 1.8. $p(x)$ ve $q(x)$ $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve k. mertebeden türevleri $L^2(0,\pi)$ de olmak üzere $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizilerinin sırası ile (1.9), (1.10) ve (1.9), (1.11) problemlerinin spektrumları olması için

1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarının çaprazlaşması, yani

$$\cdots < \lambda_{-n} < \mu_{-n} < \lambda_{-n+1} < \cdots < \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \cdots < \lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1} < \cdots$$

2. $\alpha \neq \beta,\ 0 \leq \beta, \alpha \leq \pi$ ve $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{n,k}\right|^2$ ve $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left|\beta_{n,k}\right|^2$ serileri yakınsak olmak üzere

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \cdots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

asimptotik formüllerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

Dirac operatörü için özvektör fonksiyonlarının tamlığı, Cauchy probleminin çözümü, self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülarize izin hesaplanması, periodik ve antiperiodik problemler, açılım teoremleri, özvektör fonksiyonlarının asimptotiği, 2n mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi, kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem sırası ile [22-40] çalışmalarında incelenmiştir.

Diğer taraftan $W_2^{-1}(0,1)$ uzayında singüler reel değerli potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem R.O. Hryniv ve Ya.V. Mykytyuk [41] tarafından yapılan çalışmada incelenmiştir.

Bu çalışmada $q \in W_2^{-1}(0,1)$ reel değerli dağılım fonksiyonu olmak üzere $H := L_2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$l := -\frac{d^2}{dx^2} + q \tag{1.15}$$

diferansiyel ifadesine karşılık gelen T Sturm-Liouville operatörü tanımlanmış ve A. M.

Savchuk ve A. A. Shkalikov [42]' deki çalışmasına göre, regularizasyon yöntemi ile Dirichlet sınır koşularından bahsedilmiştir.

Dağılım anlamında $\sigma' = q$ olacak şekilde reel değerli $\sigma \in H$ alınmış ve

$$D(T_\sigma) = \left\{ u \in W_1^1(0,1) \middle| u' - \sigma u \in W_1^1(0,1), l_\sigma(u) \in H, u(0) = u(1) = 0 \right\} \quad (1.16)$$

tanım kümesinde

$$Tu = T_\sigma u = l_\sigma(u) := -(u' - \sigma u)' - \sigma u' \quad (1.17)$$

ifadesi yazılmıştır.

Burada, dağılım anlamında bütün $u \in D(T_\sigma)$ için $l_\sigma(u) = -u'' + qu$ ifadesi incelendiğinde özellikle T_σ operatörü, regüler potansiyeller için ilkel σ nın özel seçimine bağlı değildir ve (1.15)'e karşılık gelen standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörü ile çakışır. Ayrıca T_σ ilkel $\sigma \in H$ 'ye düzgün resolvent anlamında sürekli olarak bağlıdır ve böylece T_σ, herhangi bir $\sigma' = q \in W_2^{-1}(0,1)$ için (1.15) 'e ait standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörüdür. Ele alınan potansiyeller sınıfı Dirac δ -tipli ve $\frac{1}{x}$ -Coulomb tipli potansiyelleri içerir ve matematiksel fizik ve kuantum mekaniğinde geniş olarak kullanılır [43,44].

[42] den iyi bilinir ki, her reel değerli $\sigma \in H$ için yukarıda tanımlanan T_σ operatörü, diskret basit (λ_k^2), $k \in \mathbb{N}$ spektrumlu self-adjoint operatörüdür

ve $\lambda_k, \lambda_k = \pi k + \mu_k$ ($\mu_k \in l_2$ olan dizi) şeklinde asimptotiğe sahiptir [42,45,46]. Regüler

q potansiyelleri için yukarıdaki asimptotikler $\mu_k = O(\frac{1}{k})$ olacak şekilde yazılır.

Bu çalışmada, reel ikişerli farklı sayılardan oluşan ve yukarıda ifade edilen asimptotiklere sahip hangi (λ_k^2) dizileri $W_2^{-1}(0,1)$ den olan singüler potansiyelli Sturm-Liouville operatörlerinin spektrumu dur? Sorusunun cevabı araştırılmıştır. Bu soru, ele alınan potansiyeller için ters spektral probleme götürür. Yani; bu durum, karşılık gelen spektral parametreye dayanan q potansiyelinin kurulmasıdır.

Regüler durumda, yukarıda bahsedilen problemin çözümü için sadece (λ_k^2) spektrumunun yetersiz olduğu bilinmektedir. Aynı Dirichlet spektrumlu Sturm-Liouville operatörlerinin ürettiği birçok farklı q potansiyelleri (izospektral) vardır. J. Pöschel ve E.

Trubowitz [47]; verilen (λ_k^2) spektrumlu (reel, basit ve $\lambda_k = \pi k + O(\frac{1}{k})$ asimptotiğine ait) H Hilbert uzayındaki bütün potansiyellerinin kümesinin, analitik olarak $w_n = n$ ağırlıkları ile $l_2(w_n)$ ağırlıklı uzaya difeomorfik olduğunu göstermişlerdir.

q potansiyelini yeniden tek olarak elde etmek için spektrumun yanında bazı ek bilgiler verilmelidir. Bu bilgiler, $(0,1)$ aralığının yarısı üzerindeki potansiyelin bilinmesi veya farklı sınır koşulları olan aynı diferansiyel ifade ile verilen Sturm-Liouville operatörünün spektrumu veya biri bütün aralık için ve diğerleri aralığın eşit iki yarısı için olan üç spektrum olabilir.

Hryniv ve Mykytyuk çalışmasında; I. M. Gelfand, B. M. Levitan ve V. A. Marchenko'ya göre klasik yaklaşım genelleştirilmiş ve $W_2^{-1}(0,1)$den singüler potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem tam olarak çözülmüştür. Şöyle ki, spektral veriler kümesinin açık bir şekli verilmiş ve bu kümenin keyfi bir elamanından q' nun yeniden nasıl elde edildiği açıklanmıştır [41].

Diğer singülerite tiplerine (örneğin Sturm-Liouville operatörler sınıfı için a süreksizlik noktası, $\frac{1}{x^\gamma}$ ya benzer potansiyeller, vs.), [48]'de O. Hald, [49]' da L. Andersson, [50]'de R. Carlson, [51]'de O. Hald ve J. R. McLaughlin, [52]'de V. A. Yurko, [53]'de V. A. Yurko ve R. Kh. Amirov bakmışlardır. $q(x) = q_1(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}$ potansiyeline sahip (1.1) denklemi için iki spektruma göre ters problem M. G. Gasimov [54] tarafından çözülmüştür. Daha sonraki yıllarda Bessel tipi tekilliğe sahip potansiyller için ters problemler farklı yöntemlerle H. Koyunbakan [55], Hidrojen atomu denklemleri için E. S. Panakhov ve R. Yılmazer [56], Dirac denklemler sistemi için Ü. İç [57] ve tekile sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörü için kuantum saçılma teorisinin ters problemleri E. Baş [58] ve tekile sahip Sturm-Liouville operatörü için ters problem Mehmet Kayalar [59] tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında singüler Dirac operatörünün spektral analizi (düz ve ters problemleri) incelenmiştir. Ayrıca Levitan'ın çalışmasından faydalanılarak [60]; $K(x,s)$ matris fonksiyonunun genel dejenereliği gösterilmiştir. Son bölümde A. Mizutani'nin [61] çalışmasından faydalanılarak özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar için belirli şartlar sağlamak üzere potansiyel farkı ile ilgili teorem ispatlanmıştır.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, sunulan tezde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Metrik Uzay): X bir cümle olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. Bu özellikler $\forall x, y, z \in X$ için

M1) $d(x, y) \geq 0$

M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3) $d(x, y) = d(y, x)$

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şeklindedir. (X, d) ikilisine ise bir metrik uzay denir. Bir uzay üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir [62].

Örnek 2.1.1. $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $l_\infty = \left\{ x = (x_n) \in K^\infty \,\middle|\, (x_n) \; sınırlı \right\}$ uzayı $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in l_\infty$ olmak üzere

$$d_\infty(x, y) = \sup\left\{ \left| x_k - y_k \right| : k \in \mathbb{N} \right\}$$

metriğine göre bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.2. (Tam Uzay): Bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir. l_∞, c, $C[a,b]$, $\mathbb{R}^n$ gibi uzaylar tam uzaylardır. Fakat $\mathbb{Q}$ uzayı tam değildir [63].

Tanım 2.1.3. (Normlu Uzay): X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x \in X$ noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir normlu uzay denir. Bu şartlar $\forall x, y \in X$ için

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3) $\|kx\| = |k| \|x\|$ (k skaler)

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şeklindedir [63].

Örnek 2.1.2. $L_p[0,1]$ uzayı, $f(x) \in L_p[0,1]$ olmak üzere

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır.

Tanım 2.1.4. (Hilbert Uzayı): Herhangi $x, y, z, \ldots$ elamanlar cümlesini H ile gösterelim.

1) H lineer kompleks (reel) uzaydır.
2) H da bulunan her x, y eleman çiftine bu elemanların iç çarpımı denilen ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen karmaşık (reel) bir sayı karşılık gelir. Bu iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar.
   a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
   b) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
   c) $\forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ için $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
   d) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $g(x, y) = \|x - y\|$ olacak şekilde norm anlamında yakınsaklığa göre H uzayı tamdır.
4) Keyfi doğal n sayısı için H uzayında lineer bağımsız n tane eleman mevcuttur. Yani H sonsuz boyutludur.

(1), (2) ve (3) aksiyomları sağlanıyorsa H uzayına üniter Hilbert uzayı denir. (1), (2), (3) ve (4) özellikleri sağlanıyor ise H uzayına soyut Hilbert uzayı veya kısaca Hilbert uzayı denir. Başka bir ifade ile tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [64].

Tanım 2.1.5. $a \leq t \leq b$ olmak üzere $(L_2[a,b])$ uzayı,

$$(L_2[a,b]) = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 \, dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$ dir).

Tanım 2.1.6. (Operatör): Tanım ve değer cümlesi bir vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [65].

Örnek 2.1.3 $C[a,b]$ den kendi içine olan ve

$$Tx(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau,\ \ t\in[a,b]$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir operatördür. Bu operatöre integral operatörü denir.

Tanım 2.1.7. (Lineer Operatör) : E_x ve E_y iki reel lineer topolojik uzay olsun. Değer bölgesi E_y de bulunan ve E_x de tanımlı $y=Ax$ operatörünü göz önüne alalım. A operatörü için

1) $x_1,x_2\in E_x$ olmak üzere $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$

2) λ bir skaler olmak üzere $\forall x\in E_x$ için $A(\lambda x)=\lambda A(x)$

şartları sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir [65].

Örnek 2.1.4. $K(t,s),\ 0\le t,\ s\le 1$ sürekli bir fonksiyon, $x(s)\in C[0,1]$ olmak üzere

$$y(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

eşitliği ile tanımlı $y=Ax$ operatörü bir lineer operatördür.

Tanım 2.1.8. (Sınırlı Operatör): X ve Y birer normlu uzay ve $D(L)\subset X$ olmak üzere $L:D(L)\to Y$ bir operatör olsun.

$$\|Lx\|\le c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c>0$ reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise L operatörünün normu denir [65].

Tanım 2.1.9. (Sürekli Operatör): X ve Y normlu uzaylar $L:X\to Y$ bir operatör ve $x_0\in X$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\|x-x_0\|<\delta$ olduğunda $\|Lx-Lx_0\|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı varsa L operatörü $x_0\in X$ noktasında süreklidir denir [65].

Tanım 2.1.10. (Adjoint Operatör): H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L:H_1\to H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer $L^*:H_1\to H_2$ operatörü

$$\langle Lx,y\rangle=\langle x,L^*y\rangle$$

şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L'nin adjointi denir. Eğer $L^*=L$ ise L'ye self-adjoint operatör denir [65].

Tanım 2.1.11. (Dönüşüm Operatörü): E lineer topolojik uzay, A ve B de $A:E\to E$, $B:E\to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının

kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer tersi olan X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir [66].

Tanım 2.1.12. $L - \lambda I$ operatörünün sınırlı $(L - \lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir [67].

Tanım 2.1.13. Herhangi λ için $L - \lambda I$ operatörü tersi mevcut olacak şekilde $R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$ operatörüne

$$Lx - \lambda x = y \text{ veya } (L - \lambda I)x = y$$

denkleminin rezolvent operatörü denir.

Tanım 2.1.14. $D(L)$ tanım bölgesi, L sınırlı lineer bir operatör ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Ly \equiv By' + Q(x)y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x,\lambda) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise, λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise λ sayısına karşılık gelen özvektör fonksiyonu denir [66].

Tanım 2.1.15. $\{\lambda_n\}$ ler L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b \left\{ y_1^2(x,\lambda_n) + y_2^2(x,\lambda_n) \right\} dx$$

sayılarına L operatörünün normlaştırıcı sayıları denir [66].

Tanım 2.1.16. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının herhangi bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 2.1.17. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye tam fonksiyon denir. e^z, $\sin z$, z^2 gibi fonksiyonlar tam fonksiyonlardır.

Tanım 2.1.18. $f(z)$, kompleks düzlemin bir W alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\forall z \in W$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $f(z)$'ye W'de sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.1.19. (Liouville Teoremi): Kompleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

Tanım 2.1.20. $f(z)$ kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon, z_0 ise $f(z)$ 'nin tanımlı olduğu herhangi bir nokta olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir. Eğer $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0, \ldots f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n-katlı sıfırı diye adlandırılır.

Tanım 2.1.21. $f(z)$, z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ama z_0'da diferansiyellenemeyen bir fonksiyon ise z_0'a $f(z)$ 'nin ayrık singüler (aykırı) noktası denir.

Tanım 2.1.22. z_0 bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun.

i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kaldırılabilir aykırı noktası denir.

ii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kutup noktası denir (kutup yeri) denir.

iii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut değilse z_0 noktasına $f(z)$ 'nin esas aykırı noktası denir.

Tanım 2.1.23. (Rouche Teoremi): f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar ve γ, B bölgesinde bulunan f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. Eğer γ üzerinde $|f(z) - g(z)| \leq |f(z)|$ eşitsizliği gerçekleniyorsa, $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ eşitliği geçerlidir. Burada Z_f ve Z_g, $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki sıfırlarının sayısını; P_f ve P_g ise $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki kutuplarının sayısını göstermektedir. Eğer f ve g, B içindeki analitik fonksiyonlarsa $Z_f = Z_g$ [68].

Tanım 2.1.24. $f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(r^{\mu}) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$'nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir [68].

Tanım 2.1.25. $f(z)$ sonlu mertebeli bir tam fonksiyon olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(ar^{\rho})$$

eşitsizliğini sağlayan $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir. (2.1.1) eşitsizliğini sağlayan a sayılarının infimumuna $f(z)$ fonksiyonunun tipi adı verilir ve σ ile gösterilir [68].

Tanım 2.1.26. (Hadamard Teoremi): Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n})$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada m, $f(z)$ 'nin orjindeki sıfırının katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$ 'nin 0'dan farklı tüm sıfırlarının kümesidir.

Teorem 2.1.1. (Cauchy İntegral Teoremi): $f(z)$ tek irtibatlı G bölgesinde birebir analitik fonksiyon, γ ise G de kapsanan keyfi düzeltilebilir kapalı eğri olsun. $f(z)$ 'nin γ egrisi üzerinde integrali sıfıra eşittir:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Teorem 2.1.2. (Rezidü Teoremi): D bölgesinde ($f(z)$' nin sonlu sayıda ayrık tekil $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ noktaları hariç) ve D'nin Γ sınırında analitik $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun k katlı kutup noktası ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[f(z)(z-z_0)^k \right],$$

z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left[f(z)(z-z_0) \right] \quad \text{dir.}$$

Tanım 2.1.27. (Mittag-Leffler Açılımı): Bir $f(z)$ fonksiyonunun sonlu düzlemdeki aykırılıkları mutlak değer büyüklüğüne göre sıralanmış, basit $a_1, a_2, \ldots$ kutup yerleri ve bu noktalardaki rezüdileri sırasıyla $b_1, b_2, \ldots$ olsun. Eğer C_N hiçbir kutup yerinden geçmeyen, üzerinde $|f(z)| < M$ eşitsizliğinin gerçeklendiği R_N yarıçaplı çember ise ve $N \to \infty$ iken $R_N \to \infty$ oluyorsa

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right]$$

yazılır [68].

Tanım 2.1.28. (O ve o sembolleri): [69,70] $x \in X$ olduğunda, verilen x ler için $|f(x)| \le C|g(x)|$ olacak şekilde bir C sabiti varsa $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.1.5. $\dfrac{1}{x^3} = o(\dfrac{1}{x^2})$ dir. Çünkü $x \to \infty$ iken $\left(\dfrac{1}{x^3}\right) / (\dfrac{1}{x^2}) \to 0$ olur.

Örnek 2.1.6. $\cosh x = O(e^x)$ dir. Çünkü $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ olduğundan her iki taraf e^x ile bölünürse

$$\frac{\cosh x}{e^x} = \frac{e^x}{2e^x} + \frac{e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}}$$

olur. Buradan da $x \to \infty$ iken $\dfrac{\cosh x}{e^x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2e^{2x}} \to \dfrac{1}{2}$ olur. Yani $\left|\dfrac{\cosh x}{e^x}\right|$ sınırlıdır. Bu nedenle $\cosh x = O(e^x)$ olur.

Tanım 2.1.29. (Noktasal Yakınsaklık): (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \ge n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada herbir $x \in A$ için bir n_0 bulunacağından n_0 sayısı hem ε a hem de x noktasına bağlıdır [71].

Tanım 2.1.30. (Düzgün Yakınsaklık): (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \ge n_0$ için ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada sözü edilen n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlı olup, x noktasına bağlı değildir. Buna göre düzgün yakınsak her dizi noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersi

her zaman doğru değildir. Eğer A cümlesi sonlu ise düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık birbirine denktir [71].

Tanım 2.1.31. $[a,b]$, $\mathbb{R}$'nin kapalı sınırlı bir aralığı ve $(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$'ler $[a,b]$ de açık aralıklar olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ için

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$$

iken

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(b_i)-f(a_i)\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ varsa $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir denir.

Tanım 2.1.32. (Parseval Eşitliği): $f(x),g(x)\in L_2(a,b)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(u)\,g(u)\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho_n}\left(\int_a^b f(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du\right)\left(\int_a^b g(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du\right)$$

dir.

Tanım 2.1.33. Eğer

$$K(x,s)=\sum_{n=0}^{N}f_n(x)\,g_n(x),\qquad s\le x$$

ise $K(x,s)$ çekirdeği genel dejeneredir denir.

Tanım 2.1.34. $\{\lambda_n\}_0^\infty$ ve $\{\lambda_n'\}_0^\infty$ spektrumları çakışsın. $\{\tilde{\lambda}_n\}_0^\infty$ ve $\{\tilde{\lambda}_n'\}_0^\infty$ spektrumları ise sonlu $n=0,1,\cdots,N$ için $\tilde{\lambda}_n\neq\tilde{\lambda}_n'$ ve $n>N$ için $\tilde{\lambda}_n=\tilde{\lambda}_n'$ olsun. Bu takdirde ters problemin

$$K(x,s)+F(x,s)+\int_0^x K(x,t)\,F(t,s)ds=0,\ (0\le x\le\pi)$$

temel integral denklemi genel dejeneredir [60].

Tanım 2.1.35. (a,b) aralığında tanımlı, $(k-1)$. mertebeden türevleri mutlak sürekli olan ve $f,f'',f''',\cdots,f^{(k)}\in L_2(a,b)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W_2^k(a,b)$ ile gösterilir [72].

Tanım 2.1.36. (Dirac-Delta Fonksiyonu):

$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}0, & 0\le t<t_0-a\\ \dfrac{1}{2a}, & t_0-a\le t<t_0+a_0\\ 0, & t\ge t_0+a\end{cases}$$

olmak üzere

$$\delta(t-t_0)=\lim_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)$$

fonksiyonuna Dirac-Delta fonksiyonu denir. Bu fonksiyon

1) $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases}$

2) $\int_0^\infty \delta(t-t_0)\,dt=1$

3) Herhangi sürekli bir $G(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty \delta(t-a)\,G(t)\,dt=G(a)$$

özellikleri ile karakterize edilir [73].

3. DIRAC OPERATÖRÜ

3.1. Bir Boyutlu Dirac Sistemi

$p_{ik}(x), (i,k=1,2), [0,\pi]$ aralığında tanımlı ve sürekli reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$L=\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{12}(x)=p_{21}(x) \tag{3.1.1}$$

bir matris operatörü olsun. $y(x)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \; ve \; B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(B\frac{d}{dx}+L(x)-\lambda I \right) y=0 \tag{3.1.2}$$

denklemi, iki tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemden oluşan

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_2}{dx}+p_{11}(x)y_1+p_{12}(x)y_2=\lambda y_1 \\ -\frac{dy_1}{dx}+p_{21}(x)y_1+p_{22}(x)y_2=\lambda y_2 \end{aligned} \right\} \tag{3.1.3}$$

denklem sistemine denktir.

Bu durumda $V(x)-$potansiyel fonksiyon, $m-$parçacığın kütlesi olacak biçimde $p_{12}(x)=p_{21}(x)\equiv 0$ ve $p_{11}(x)=V(x)+m,\; p_{22}(x)=V(x)-m$ olurken relativistik kuantum teorisinde (3.1.2) sistemi 1-boyutlu stasyoner Dirac sistemi olarak bilinmektedir.

2-boyutlu uzayın her düzgün ortogonal dönüşümü

$$H(x)=\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile tanımlanır [66]. Ayrıca,

$$BH=HB$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

$y=Hz$ olacak şekilde (3.1.2) denkleminin her iki tarafı soldan H^{-1} ile çarpılırsa,

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz)+H^{-1}LHz=\lambda H^{-1}Hz$$

veya

$$B\frac{dz}{dx}+\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}LH \right) z=\lambda z \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

$$Q = H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH$$

olacak şekilde, Q matrisi hesaplansın. Bu takdirde

$$H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

ve

$$\frac{d}{dx}H = \begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} H^{-1}B\frac{d}{dx}H &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \\ -\cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{-1}LH &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Son iki eşitlikten,

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) + p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & \varphi'(x) + p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. $\varphi(x)$ fonksiyonu $q_{12}(x) = 0$ olmak üzere seçilsin. Bu takdirde

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x) + \frac{1}{2}\{p_{22}(x) - p_{11}(x)\}\sin 2\varphi(x) = 0$$

şeklindedir. Buradan,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\arctan\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x)-p_{22}(x)}$$

elde edilir. $Q(x)$ matrisinin görüntüsü

$$Q(x)=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x)\end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buna göre (3.1.4) denklemi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.1.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **I. kanonik formu** denir.

Şimdi $izQ(x)=q_{11}(x)+q_{22}(x)=0$ olmak üzere bir $\varphi(x)$ fonksiyonu seçilsin, dolayısıyla $2\varphi'(x)+p_{11}(x)+p_{22}(x)=0$

halini alır. Buradan

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\{p_{11}(z)+p_{22}(z)\}dz$$

elde edilir. Buna göre (3.1.4) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.1.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **II. kanonik formu** denir. (3.1.5) ve (3.1.6) denklemlerine (3.1.2) sisteminin kanonik formları da denir. (3.1.2) denklem sistemlerinin spektral teorisinin çeşitli sorunlarını incelerken bu veya diğer kanonik formlardan faydalanmak bize kolaylık sağlar. Örneğin, özdeğerlerin ve özvektör fonksiyonlarının asimptotik davranışı araştırılırken ve keyfi vektör fonksiyonunun (0 ve π noktalarında homojen sınır şartları sağlandığında) (3.1.2) denklem sisteminin özvektör fonksiyonlarına göre açılımı incelenirken, (3.1.5) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar. Sonsuz aralıkta verilmiş (3.1.2) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve ters problem incelenirken de (3.1.6) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar.

(3.1.5) kanonik denklem sistemi için $p(x)$ ve $r(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y_2'+\{p(x)-\lambda\}y_1=0,\quad y_1'-\{r(x)-\lambda\}y_2=0 \tag{3.1.7}$$

$$y_2(0)\cos\alpha+y_1(0)\sin\alpha=0 \tag{3.1.8}$$

$$y_2(\pi)\cos\beta + y_1(\pi)\sin\beta = 0 \tag{3.1.9}$$

sınır problemi göz önüne alınsın. Herhangi bir λ_1 değeri için bu problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x,\lambda_1) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_1) \\ y_2(x,\lambda_1) \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda λ_1'e özdeğer, buna karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$'e de özvektör fonksiyon denir.

Lemma 3.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonaldir, yani,

$$\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

dir.

İspat: $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları (3.1.7) sisteminin çözümleri olduğundan,

$$\begin{aligned}
&y_2'(x,\lambda_1) + \{p(x) - \lambda_1\}y_1(x,\lambda_1) = 0 \\
&y_1'(x,\lambda_1) - \{r(x) - \lambda_1\}y_2(x,\lambda_1) = 0 \\
&z_2'(x,\lambda_2) + \{p(x) - \lambda_2\}z_1(x,\lambda_2) = 0 \\
&z_1'(x,\lambda_2) - \{r(x) - \lambda_2\}z_2(x,\lambda_2) = 0
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemler sırası ile $z_1(x,\lambda_2)$, $-z_2(x,\lambda_2)$, $-y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ ile çarpılıp ve daha sonra sonuçlar toplanırsa,

$$\frac{d}{dx}\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\} = (\lambda_1 - \lambda_2)\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}$$

elde edilir. Bu son eşitlik x' e göre 0 dan π ye integrallenirse

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = \{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\}\Big|_0^\pi$$

bulunur. Buradan

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

veya

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi y^T(x,\lambda_1)z(x,\lambda_2)dx = 0$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan, $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonal olurlar. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.2. (3.1.7)-(3.1.9) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: Aksini varsayalım yani, $\lambda_1 = u + iv$ kompleks özdeğer olsun. $p(x)$ ve $r(x)$ reel fonksiyonlar ve α, β sayıları reel olduğu için Dirac operatörünün genel denkleminde eşleniği alınırsa, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısı da bir özdeğerdir. λ_2 ye karşılık gelen $\overline{y}(x, \lambda_1)$ özvektör fonksiyonudur. Bu takdirde Lemma 3.1.1 den dolayı

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)\overline{y_1}(x,\lambda_1) + y_2(x,\lambda_1)\overline{y_2}(x,\lambda_1)\} dx = 0$$

ve

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^\pi \left\{ |y_1(x,\lambda_1)|^2 + |y_2(x,\lambda_1)|^2 \right\} dx = 0$$

olur. $\lambda \neq \overline{\lambda}$ olduğundan, $y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ sıfır olur ki, bu da özvektör fonksiyonlarının sıfır olmaması gerçeği ile çelişir. O halde özdeğerler kompleks olamaz. Bu da ispatı tamamlar.

3.2. Özdeğerler için asimptotik formüller

$$By' + Q(x)y = \lambda y, 0 \leq x \leq \pi \qquad (3.2.1)$$

denklemi göz önüne alınsın. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

$p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli $[0,\pi]$ de toplanabilir (integrallenebilir) fonksiyonlardır. (3.2.1) diferansiyel denklemi

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \qquad (3.2.2)$$

$$y_1(\pi) = 0 \qquad (3.2.3)$$

sınır koşullarıyla ele alınsın. (3.2.1)-(3.2.3) sınır değer probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}$ normalleştirici sayıları $\{\alpha_n\}$ ile gösterilsin.

Teorem 3.2.1. $p(x)$ ve $q(x)$ k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olacak şekilde verilsin. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları için

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k} \qquad (3.2.4)$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{\pi} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{3.2.5}$$

asimptotik formülleri söz konusudur. Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{n,k}\right|^2 < \infty$ ve $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_{n,k}\right|^2 < \infty$ serileri yakınsaktır. Bu teoremi $k=1$ ve $p(x)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$ durumunda ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde gösterilebilir.

(3.2.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha, \; \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.2.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ ile gösterilsin.

Bu takdirde (3.2.1)-(3.2.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.2.7}$$

denkleminin kökleri ile çakıştığı aşikardır.

Bilindiği gibi [21]

$$\begin{aligned} &K(x,x)B - BK(x,x) = 0 \\ &K_{11}(x,0)\cos\alpha + K_{12}(x,0)\sin\alpha = 0 \\ &K_{21}(x,0)\cos\alpha + K_{22}(x,0)\sin\alpha = 0 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

koşullarını sağlayan bir $K(x,t)$ matrisi vardır.

Ayrıca $[0,\pi]$ aralığında bulunan her sabit x için $K(x,t)$ nin birinci türevleri $L_2(0,x)$ e aittir ve

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt = 0 \tag{3.2.9}$$

dönüşüm operatörü vardır. Burada $\varphi_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$ fonksiyonu $Q(x) = 0$ durumuna karşılık gelen çözüm fonksiyonudur ve $K(x,t) = \begin{pmatrix} K_{11}(x,t) & K_{12}(x,t) \\ K_{21}(x,t) & K_{22}(x,t) \end{pmatrix}$ şeklindedir. (3.2.9) integral denklemi düzenlenip (3.2.3) koşulunda yerine yazılırsa

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = \sin(\lambda\pi + \alpha) + \int_0^\pi \left\{K_{11}(\pi,t)\sin(\lambda t + \alpha) - K_{12}(\pi,t)\cos(\lambda t + \alpha)\right\}dt = 0 \tag{3.2.10}$$

elde edilir. (3.2.10) eşitliğinde kısmi integrasyon uygulanırsa ve (3.2.8) deki ikinci koşuldan faydalanılırsa;

$$\sin(\lambda\pi+\alpha)-\frac{1}{\lambda}K_{11}(\pi,\pi)\cos(\lambda\pi+\alpha)-\frac{1}{\lambda}K_{12}(\pi,\pi)\sin(\lambda\pi+\alpha)$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi\left\{\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos(\lambda t+\alpha)+\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin(\lambda t+\alpha)\right\}dt=0 \tag{3.2.11}$$

elde edilir.

λ_n $\left(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$ (3.2.11) denkleminin kökleri olsun. Bu takdirde $n\to\infty$ iken $\lambda_n\to\infty$ dur. Bu sebeple büyük n ler için birinci yaklaşımda

$$\sin(\lambda_n\pi+\alpha)+O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)=0$$

ifadesi bulunur. Buradan

$$\lambda_n\pi+\alpha=n\pi+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

yazılabilir. $n\to\infty$ iken $\varepsilon_n\to 0$ olmak üzere

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n \tag{3.2.12}$$

eşitliği verilsin. Bu takdirde (3.2.11) den

$$\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]-\frac{1}{\lambda_n}\left\{\left[K_{11}(\pi,\pi)\cos\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]\right.$$
$$\left.+K_{12}(\pi,\pi)\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)\pi+\alpha\right]\right\}+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\int_0^\pi\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right. \tag{3.2.13}$$
$$\left.+\int_0^\pi\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right\}dt=0$$

elde edilir.

$$b_n=\int_0^\pi\left\{\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\cos\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]+\int_0^\pi\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}\sin\left[\left(n-\frac{\alpha}{\pi}+\varepsilon_n\right)t+\alpha\right]\right\}dt \tag{3.2.14}$$

olsun.

$\left.\frac{\partial K_{11}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}$ ve $\left.\frac{\partial K_{12}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\pi}$ fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ ye ait olduğu için $\sum_{-\infty}^{\infty}b_n^{\,2}$ yakınsaktır.

Bu takdirde (3.2.13) den

$$(-1)^n \varepsilon_n \pi - \frac{(-1)^n}{\lambda_n}\left\{K_{11}(\pi,\pi)\cos\left(\varepsilon_n \pi\right) + K_{12}(\pi,\pi)\sin\left(\varepsilon_n \pi\right)\right\} + \frac{b_n}{\lambda_n} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\varepsilon_n = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{b_n}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.2.15}$$

olur. Burada

$$\alpha_1 = \frac{K_1(\pi,\pi)}{\pi}$$

dir. $K_{11}(\pi,\pi)$ fonksiyonunu $p(x)$, $q(x)$ ile ifade ederek hesaplayalım. (3.2.15) formülünden λ_n için aranan formül bulunur.

(3.2.15) ten faydalanarak benzer işlemler yapılırsa

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \frac{c_{1,k}}{n} \text{ ve } \sum_{-\infty}^{\infty} c_{1,k}{}^2 < \infty \tag{3.2.16}$$

şeklinde normlaştırıcı sayılar için asimptotik formül elde edilir. Burada

$$c_1 = \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\left\{K_{12}(x,x) - K_{21}(x,x)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2n}\left\{\int_0^{\pi}\left[\frac{3}{2}p(x) - \frac{1}{9}(q(x) + p(x)ctgx)\right]dx - \frac{p(0) + \sin^2\alpha(1 - ctg\alpha)\left[q(0) + p(0)ctg\alpha\right]}{2(1 + ctg\alpha)}\right\}$$

dir.

3.3. Kanonik Dirac Operatörü İçin Matris Dönüşüm Operatörü

A_1 ve A_2 iki lineer diferansiyel operatör, E_1 ve E_2 ise iki lineer fonksiyonel uzay olsun.

Tanım 3.3.1. $X : E_1 \to E_2$ lineer sürekli operatör olmak üzere

1. $A_1 X = X A_2$ (3.3.1)

2. X^{-1} mevcut ve sürekli

şartlarının sağlanması halinde X' e A_1 ve A_2 operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir.

Lemma 3.3.1. λ özdeğerine karşılık gelen A_2 operatörünün özfonksiyonu $\varphi_\lambda \in E_1$, yani

$$A_2\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$$

olmak üzere aynı λ özdeğerine karşılık gelen $\psi_\lambda = X\varphi_\lambda$, A_1 operatörünün özfonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$A_1\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

şeklindedir.

İspat. $A_1X = XA_2$ olduğundan

$$A_1\psi_\lambda = A_1X\varphi_\lambda = XA_2\varphi_\lambda = X\lambda\varphi_\lambda = \lambda X\varphi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.3.2. Lineer topolojik E uzayında A_1, A_2 ve A_3 lineer operatörleri ve E_1, E_2, E_3 kapalı alt uzayları verilmiş olsun. A_1 ve A_2 operatör çifti için X_{A_1,A_2} dönüşüm operatörü

$$X_{A_1,A_2} : E_1 \to E_2$$

şeklinde, A_2 ve A_3 operatörler çifti için X_{A_2,A_3} dönüşüm operatörü ise

$$X_{A_2,A_3} : E_2 \to E_3$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, A_1 ve A_3 operatör çifti için X_{A_1,A_3} dönüşüm operatörü,

$$X_{A_1,A_3} : E_1 \to E_3$$

şeklinde olmak üzere

$$X_{A_1,A_3} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}$$

formülü ile ifade edilir.

İspat. Dönüşüm operatörünün tanımından dolayı

$$A_1X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2}A_2$$
$$A_2X_{A_2,A_3} = X_{A_2,A_3}A_3$$

şeklinde olup, ikinci denklemden $A_2 = X_{A_2,A_3}A_3X^{-1}_{A_2,A_3}$ elde edilir. Bu eşitlik birinci denklemde yerine yazılırsa

$$A_1X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}A_3X^{-1}_{A_2,A_3}$$

veya

$$A_1X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}A_3$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$p_i(x)$ ve $r_i(x)$, $(i = 1,2)$, her sonlu aralıkta $(0 \le x \le b < \infty)$ integrallenebilir reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$A_1=\begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_1(x) \tag{3.3.2}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_2(x) & 0 \\ 0 & r_2(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_2(x) \tag{3.3.3}$$

operatörlerini göz önüne alalım. Keyfi sonlu reel h_1 sayısı için

$$f_2(0)-h_1f_1(0)=0 \tag{3.3.4}$$

sınır şartını sağlayan, $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_1 olsun. Keyfi sonlu reel h_2 sayısı için

$$g_2(0)-h_2g_1(0)=0 \tag{3.3.5}$$

sınır şartını sağlayan $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_2 olsun. X operatör matrisi $f(x)\in E_1$ için

$$X\{f(x)\}=R(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)f(s)ds \tag{3.3.6}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $R(x)$ ve $K(x,s)$ iki boyutlu veya 2x2 boyutlu kare matrislerdir.

(3.3.2) ve (3.3.6) den,

$$\begin{aligned} A_1X\{f(x)\}&=BR'(x)f(x)+BR(x)f'(x)+Q_1(x)R(x)f(x)+BK(x,x)f(x) \\ &+\int_0^x\{BK'_x(x,s)+Q_1(x)K(x,s)\}f(s)ds \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

dir. Diğer taraftan (3.3.3) ve (3.3.6) dan dolayı

$$XA_2\{f(x)\}=R(x)Bf'(x)+R(x)Q_2(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)\{Bf'(s)+Q_2(s)f(s)\}ds$$

dir. Son integralde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$XA_2\left\{f(x)\right\}= R(x)Bf'(x)+R(x)Q_2(x)f(x)+K(x,x)Bf(x)-K(x,0)Bf(0)$$
$$+\int_0^x\left\{K(x,s)Q_2(s)-K_s'(x,s)B\right\}f(s)ds \qquad (3.3.8)$$

elde edilir. $f(x)$, E_1 uzayında keyfi vektör fonksiyonu olduğu için (3.3.1) eşitliğinden dolayı $f(x)$ ve $f'(x)$ in katsayıları ve (3.3.7), (3.3.8) in integral altındaki ifadelerinin eşit olması gerekir. Bu sebeple $f'(x)$ lerin katsayıları için

$$BR(x)=R(x)B \qquad (3.3.9)$$

elde edilir. Eğer

$$R(x)=\begin{pmatrix}\alpha(x) & \beta(x)\\ \gamma(x) & \delta(x)\end{pmatrix}$$

şeklinde alınırsa (3.3.9) eşitliğinden

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(x) & \beta(x)\\ \gamma(x) & \delta(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(x) & \beta(x)\\ \gamma(x) & \delta(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\delta(x)=\alpha(x),\ \gamma(x)=-\beta(x)$$

bulunur, yani $R(x)$ matrisinin görüntüsü

$$R(x)=\begin{pmatrix}\alpha(x) & \beta(x)\\ -\beta(x) & \alpha(x)\end{pmatrix} \qquad (3.3.10)$$

olur.

Şimdi $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları hesaplansın. Bunun için (3.3.7) ve (3.3.8) de, $f(x)$ in katsayıları eşitlenirse $R(x)$ matrisinin tanımlanması için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$BR'(x)+Q_1(x)R(x)-R(x)Q_2(x)=K(x,x)B-BK(x,x) \qquad (3.3.11)$$

$$K(x,s)=\begin{pmatrix}K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s)\\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}$$

olmak üzere $Q_1(x), Q_2(x), R(x)$ ve B matrislerinin görüntülerinden faydalanarak (3.3.11) denklemi

$$\begin{pmatrix}-\beta'(x) & \alpha'(x)\\ -\alpha'(x) & -\beta'(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p_1(x)\alpha(x) & p_1(x)\beta(x)\\ -r_1(x)\beta(x) & r_1(x)\alpha(x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p_2(x)\alpha(x) & r_2(x)\beta(x)\\ -p_2(x)\beta(x) & r_2(x)\alpha(x)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s)\\ K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\\ -K_{11}(x,s) & -K_{12}(x,s)\end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x)+\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x) & \alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x) \\ -\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x) & -\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\left[K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x)\right] & K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \end{pmatrix} \qquad (3.3.12)$$

şeklinde yazılabilir. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple (3.3.12) denklemlerinden

$$\alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x)=-\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x)$$

$$\beta'(x)-\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x)=-\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x)$$

bulunur, yani

$$\begin{aligned} &2\alpha'(x)+q(x)\beta(x)=0 \\ &-2\beta'(x)+q(x)\alpha(x)=0 \end{aligned} \qquad (3.3.13)$$

olur. Burada

$$q(x)=p_1(x)-p_2(x)+r_1(x)-r_2(x) \qquad (3.3.14)$$

şeklindedir. (3.3.13) sistemi de, bulunan birinci eşitliği $\alpha(x)$ ile ikinci eşitliği de $\beta(x)$ ile çarpıp, birinciden ikinci çıkarılırsa

$$2\alpha(x)\alpha'(x)+2\beta(x)\beta'(x)=0$$

yani

$$\left(\alpha^2(x)+\beta^2(x)\right)'=0$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha^2(x)+\beta^2(x)=\alpha^2(0)+\beta^2(0) \qquad (3.3.15)$$

bulunur.

$$f_1(0)=1, \quad f_2(0)=h_1 \qquad (3.3.16)$$

şartları sağlanmak üzere $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu sürekli, diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde $f(x)$ in (3.3.4) sınır koşulunu sağladığı açıktır ve bu sebeple $f(x)\in E_1$

dir. Yine kabul edilsin ki, $g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu, E_2 uzayının elemanı, dolayısıyla (3.3.5) sınır şartı sağlanacak şekilde

$$X\{f(x)\}=g(x) \tag{3.3.17}$$

olsun. Bu takdirde x=0 için (3.3.17) eşitliğinden ve X matris operatörünün tanımından dolayı, yani (3.3.6) ve (3.3.10) bağıntılarına göre

$$X\{f(0)\}=g(0)=R(0)f(0)$$

veya

$$g_1(0)=\alpha(0)f_1(0)+\beta(0)f_2(0)$$
$$g_2(0)=-\beta(0)f_1(0)+\alpha(0)f_2(0)$$

elde edilir. Bu denklemlerden (3.3.5) sınır şartını ve (3.3.16) şartlarını göz önüne almak üzere son eşitliklerin birincisini h_2 sayısı ile çarpıp, daha sonra ikinciden çıkarıldığında,

$$\beta(0)=\frac{h_1-h_2}{1+h_1h_2}\alpha(0)$$

elde edilir.

$$\alpha(0)=1 \tag{3.3.18}$$

alınırsa,

$$\beta(0)=\frac{h_1-h_2}{1+h_1h_2} \tag{3.3.19}$$

olur. Buna göre,

$$\alpha^2(0)+\beta^2(0)=\frac{\left(1+h_1^2\right)\left(1+h_2^2\right)}{\left(1+h_1h_2\right)^2}=X^2 \tag{3.3.20}$$

olur. Şimdi (3.3.15), (3.3.18)-(3.3.20) eşitliklerinden faydalanarak (3.3.13) sistemini çözelim. Eğer,

$$\alpha(x)=\chi\sin k(x) \text{ ve } \beta(x)=\chi\cos k(x) \tag{3.3.20'}$$

olarak alınırsa,

$$\alpha'(x)=k'(x)\chi\cos k(x) \text{ ve } \beta'(x)=-k'(x)\chi\sin k(x)$$

bulunur. Bu değerler (3.3.13) de yerine yazılıp elde edilen denklemlerden birincisi $\cos k(x)$ ile ikincisi de $\sin k(x)$ ile çarpılıp, elde edilen denklemler toplanırsa

$$k(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz+\arcsin\frac{1}{\chi}$$

eşitliği elde edilir. Bu değerler (3.3.20') de yerine yazılırsa, $q(x)$ fonksiyonu (3.3.14) formülü, χ sayısı ise (3.3.20) formülü ile tanımlanacak şekilde $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları için

$$\alpha(x)=\chi\sin\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz+\arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{3.3.21}$$

$$\beta(x)=\chi\cos\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz+\arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{3.3.22}$$

ifadeleri bulunur. Şimdi (3.3.7) ve (3.3.8) de verilen integral altındaki ifadeler eşitlenirse, $K(x,s)$ matris çekirdeği için,

$$K_s'(x,s)B+BK_x'(x,s)=K(x,s)Q_2(s)-Q_1(x)K(x,s) \tag{3.3.23}$$

matris denklemi veya

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial K_{11}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial s}\\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial K_{11}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial x}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s)\\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_2(s) & 0\\ 0 & r_2(s)\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}p_1(x) & 0\\ 0 & r_1(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s)\\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial K_{12}}{\partial s}+\dfrac{\partial K_{21}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{11}}{\partial s}+\dfrac{\partial K_{22}}{\partial x}\\ -\dfrac{\partial K_{22}}{\partial s}-\dfrac{\partial K_{11}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{21}}{\partial s}-\dfrac{\partial K_{12}}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(p_2(s)-p_1(x))K_{11}(x,s) & (r_2(s)-p_1(x))K_{12}(x,s)\\ (p_2(s)-r_1(x))K_{21}(x,s) & (r_2(s)-r_1(x))K_{22}(x,s)\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x}=\left(p_2(s)-p_1(x)\right)K_{11}(x,s)\\ &\frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x}=\left(r_2(s)-p_1(x)\right)K_{12}(x,s)\\ &-\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x}=\left(p_2(s)-r_1(x)\right)K_{21}(x,s)\\ &\frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial x}=\left(r_2(s)-r_1(x)\right)K_{22}(x,s)\end{aligned}\right\} \tag{3.3.23'}$$

denklem sistemi elde edilir. Sonuç olarak (3.3.8) ifadesinde $f(0)$'ı içeren terim (3.3.7) de

benzer terim olmadığı için) sıfıra eşit olur. Böylece,

$$K(x,0)Bf(0)=0$$

yani,

$$\begin{pmatrix} -K_{12}(x,0) & K_{11}(x,0) \\ -K_{22}(x,0) & K_{21}(x,0) \end{pmatrix} f(0)=0,$$

bu ise

$$K_{12}(x,0)f_1(0)=K_{11}(x,0)f_2(0)$$
$$K_{22}(x,0)f_1(0)=K_{21}(x,0)f_2(0)$$

denklemler sistemine eşdeğerdir. (3.3.4) sınır koşulundan dolayı

$$K_{12}(x,0)=h_1K_{11}(x,0)\ , \quad K_{22}(x,0)=h_1K_{21}(x,0) \tag{3.3.24}$$

elde edilir. $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ keyfi diferansiyellenebilir sürekli fonksiyonlar olacak biçimde,

$$K_{11}(x,0)=\varphi(x)\ , \quad K_{21}(x,0)=\psi(x) \tag{3.3.25}$$

ele alınırsa (3.3.24) ve (3.3.25) şartları, $K(x,s)$ matris çekirdeği için

$$K(x,s)|_{s=0}=\begin{pmatrix} \varphi(x) & h_1\varphi(x) \\ \psi(x) & h_1\psi(x) \end{pmatrix} \tag{3.3.26}$$

şartını tanımlar. Burada (3.3.26) şartı (3.3.23) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir [23].

Benzer şekilde Dirac operatörünün II. Kanonik formu için

$$A_1=\begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx}+q_1(x) \\ -\dfrac{d}{dx}+q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_1(x)$$

$$A_2=\begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx}+q_2(x) \\ -\dfrac{d}{dx}+q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_2(x)$$

olmak üzere (3.3.11) denklemi

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x)-q_1(x)\beta(x) & p_1(x)\beta(x)+q_1(x)\alpha(x) \\ q_1(x)\alpha(x)+p_1(x)\beta(x) & q_1(x)\beta(x)+p_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x)+q_2(x)\beta(x) & q_2(x)\alpha(x)-p_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & -q_2(x)\beta(x)-p_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s) \\ -K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \\ -K_{11}(x,s) & -K_{11}(x,s) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x)+\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x)-\left[q_1(x)+q_2(x)\right]\beta(x) & \alpha'(x)+\left[q_1(x)-q_2(x)\right]\alpha(x)+\left[p_1(x)+p_2(x)\right]\beta(x) \\ -\alpha'(x)+\left[q_1(x)-q_2(x)\right]\alpha(x)+\left[p_1(x)+p_2(x)\right]\beta(x) & -\beta'(x)+\left[p_2(x)-p_1(x)\right]\alpha(x)+\left[q_1(x)+q_2(x)\right]\beta(x) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -\left[K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x)\right] & K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple

$$\alpha'(x)+\left[q_1(x)-q_2(x)\right]\alpha(x)+\left[p_1(x)+p_2(x)\right]\beta(x)$$
$$=-\alpha'(x)+\left[q_1(x)-q_2(x)\right]\alpha(x)+\left[p_1(x)+p_2(x)\right]\beta(x)$$

$$\beta'(x)-\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x)+\left[q_1(x)+q_2(x)\right]\beta(x)$$
$$=-\beta'(x)+\left[p_2(x)-p_1(x)\right]\alpha(x)+\left[q_1(x)+q_2(x)\right]\beta(x)$$

bulunur, yani

$$2\alpha'(x)=0, \quad 2\beta'(x)=0$$

dır. Burada c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere

$$\alpha(x)=c_1, \quad \beta(x)=c_2$$

bulunur. Ayrıca (3.3.23) denklemi

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2(s) & q_2(s) \\ q_2(s) & -p_2(s) \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial s} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \left(p_2(s)-p_1(x)\right)K_{11}(x,s)+q_2(s)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) & q_2(s)K_{11}(x,s)-\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) \\ -q_1(x)K_{11}(x,s)+p_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{22}(x,s) & -q_1(x)K_{12}(x,s)+q_2(s)K_{21}(x,s)+(p_1(x)+p_2(s)K_{22}(x,s)) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= \left(p_2(s)-p_1(x)\right)K_{11}(x,s)+q_2(s)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) \\ \frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= q_2(s)K_{11}(x,s)-\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= -q_1(x)K_{11}(x,s)+p_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{22}(x,s) \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= -q_1(x)K_{12}(x,s)+q_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{22}(x,s) \end{aligned}\right\} \quad (3.3.27)$$

denklemler sistemi elde edilir. Burada (3.3.26) şartı (3.3.27) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir.

3.4. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektrum Türünden İfadesi

$$By'+Q(x)y=\lambda y, 0\le x\le \pi \qquad (3.4.1)$$

denklemini ve

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ y_1(\pi)=0 \qquad (3.4.2)$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0,\ y_1(\pi)=0 \qquad (3.4.3)$$

sınır koşullarını göz önüne alalım.

Burada

$$0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le \beta \le \pi\ ,\ \alpha \ne \beta\ ,\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

ve $p(x),\ q(x) \in L_2(0,\pi)$ dir. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ $n \in \overline{(-\infty,\infty)}$, (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \alpha_n,\ \ \mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \beta_n \tag{3.4.5}$$

asimptotik formülleri vardır. Burada

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\beta_n|^2 < \infty,\ \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \tag{3.4.6}$$

serileri yakınsaktır. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (3.4.1) denkleminin sırasıyla

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.4.7}$$

$$\psi_1(0,\lambda) = \sin\beta,\ \ \psi_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{3.4.8}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. λ_n ve μ_n lerin sırasıyla

$$\varphi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.9}$$

$$\psi_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.10}$$

kökleri ile çakıştığı aşikardır.

Böylece $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

Teorem 4.1.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde (3.4.1), (3.4.2) probleminin α_n normlaştırıcı sayıları λ_n ve μ_n ler kullanılarak

$$\alpha_n = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{3.4.11}$$

formülü ile tanımlanır.

Burada, ' simgesi sonsuz çarpımda $k = n$ teriminin mevcut olmadığını gösterir.

İspat.

$$f(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{3.4.12}$$

fonksiyonu verilsin ve

$$f_1(\pi,\lambda) = 0 \tag{3.4.13}$$

koşulu sağlansın. Bu takdirde

$$m(\lambda) = -\frac{\psi_1(\pi,\lambda)}{\varphi_1(\pi,\lambda)} \tag{3.4.14}$$

elde ederiz. Burada $m(\lambda)$ fonksiyonunun kutuplarının ve sıfırlarının sırasıyla (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakıştıkları ve meromorf fonksiyon olduğu görülür.

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \left(f(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx &= \int_0^\pi \left\{\left(Bf'(x,\lambda_1)+Qf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)\right. \\
&\quad \left.-\left(Bf'(x,\lambda_2)+Qf(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)\right\}dx \\
&= \int_0^\pi \left(Bf'(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx + \int_0^\pi \left(Qf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx \\
&\quad -\int_0^\pi \left(Bf'(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)dx - \int_0^\pi \left(Qf(x,\lambda_2), f(x,\lambda_1)\right)dx \\
&= \int_0^\pi \left\{\left(Bf'(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)+\left(Bf(x,\lambda_1), f'(x,\lambda_2)\right)dx\right\} \\
&= \left[Bf(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right]_0^\pi \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(x,\lambda_1) \\ f_2(x,\lambda_1)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1(x,\lambda_2) \\ f_2(x,\lambda_2)\end{pmatrix}\right]_0^\pi \\
&= \left[f_2(x,\lambda_1)f_1(x,\lambda_2) - f_1(x,\lambda_1)f_2(x,\lambda_2)\right]_0^\pi \\
&= f_2(0,\lambda_2)f_1(0,\lambda_1) - f_1(0,\lambda_2)f_2(0,\lambda_1) \\
&= \left[\psi_1(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\varphi_1(0,\lambda_1)\right]\times\left[\psi_2(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\varphi_2(0,\lambda_2)\right] \\
&\quad -\left[\psi_2(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\varphi_2(0,\lambda_1)\right]\times\left[\psi_1(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\varphi_1(0,\lambda_2)\right] \\
&= \left[\sin\beta + m(\lambda_1)\sin\alpha\right]\left[-\cos\beta - m(\lambda_2)\cos\alpha\right] \\
&\quad -\left[-\cos\beta - m(\lambda_1)\cos\alpha\right]\left[\sin\beta + m(\lambda_2)\sin\alpha\right] \\
&= \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\left[\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\right] \\
&= \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \left(f(x,\lambda_1), f(x,\lambda_2)\right)dx = \left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)$$

$\lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = \overline{\lambda}$ olarak alınırsa, özdeğerler reel olduğundan ve $z-\overline{z} = 2\operatorname{Im} z$ eşitliğinden

$$\int_0^\pi \left(f(x,\lambda), f(x,\lambda)\right)dx = \sin(\beta-\alpha)\frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \tag{3.4.15}$$

elde edilir. Bu formülde $\beta > \alpha (\beta < \alpha)$ olduğu durumda bu meromorf fonksiyon üst yarı düzlemi kendine dönüştürür.

Bu takdirde $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları (3.4.1), (3.4.2) ve (3.4.1), (3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çaprazlaşırlar.

$n \neq m$ ise $\lambda_n \neq \lambda_m$ olur ve $m(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan

$$m(\lambda) = A \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{-1} \tag{3.4.16}$$

görüntüsü söz konusudur, burada A reel sayıdır. Yukarıdaki hesaplamaların benzeri yapılırsa

$$(\lambda - \lambda_n) \int_0^{\pi} \left(f(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n) \right) dx = \sin(\alpha - \beta)$$

eşitliği kolayca elde edilebilir. (3.4.12) ifadesi yerine yazılırsa, buradan

$$(\lambda - \lambda_n) \int_0^{\pi} \left(\psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n) \right) dx + m(\lambda)(\lambda - \lambda_n) \int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n) \right) dx = \sin(\alpha - \beta)$$

olur. Burada $\lambda \to \lambda_n$ için limit alınırsa

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda_n), \varphi(x,\lambda_n) \right) dx = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) m(\lambda)} \tag{3.4.17}$$

eşitliği elde edilir.

Bu formülden faydalanılarak α_n lerin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ ler yardımıyla görüntüsü elde edilebilir.

Öncelikle

$$m(\lambda) = A_1 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda} \right) \tag{3.4.18}$$

eşitliği ele alınsın. Burada

$$A_1 = A \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \tag{3.4.19}$$

şeklindedir. (3.4.18) deki

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda} \right) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda} \right) \tag{3.4.20}$$

çarpımını göz önüne alalım. (3.4.20) eşitliğinde logaritma alınıp $\{\lambda_k\}$ ve $\{\mu_k\}$ lar için asimptotik formüllerden yararlanılırsa;

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}+\frac{\mu_{-k}-\lambda_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi}+\beta_k-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}+\frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi}+\beta_{-k}-\alpha_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda} \tag{3.4.21}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}+\frac{1}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k-\alpha_k}{\lambda_k-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{-k}-\alpha_{-k}}{\lambda_{-k}-\lambda}+\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_0-\lambda}$$

elde edilir.

(3.4.6) serilerinin yakınsaklığından (3.4.5) asimptotik formüllerinden ve Cauchy-Banjokowski eşitsizliğinden (3.4.21) deki son iki serinin yakınsaklığı elde edilir. (3.4.5) asimptotik formüllerinden

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}+\frac{1}{\lambda_{-k}-\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{-k}-\lambda+\lambda_k-\lambda}{(\lambda_k-\lambda)(\lambda_{-k}-\lambda)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2\frac{\alpha}{\pi}-2\lambda+\alpha_k+\alpha_{-k}}{(\lambda_k-\lambda)(\lambda_{-k}-\lambda)}$$

olur ve bu son seri yakınsaktır.

Bu sonuçlardan (3.4.20) sonsuz çarpımının yakınsaklığı elde edilir. (3.4.19) sonsuz çarpımının yakınsaklığından ve (3.4.20) formülünden (3.4.18) elde edilir. Bu takdirde

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)=\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)A_1\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda}\right)=-A_1\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\mu_n-\lambda)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda}$$

$$=-A_1(\mu_n-\lambda_n)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-\lambda_n}{\lambda_k-\lambda_n}$$

olur. Buradan

$$\alpha_n=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{A_1(\mu_n-\lambda_n)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n}\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

elde edilir. İleride $A_1=-1$ olduğu ispatlanacaktır. Bununla teorem ispatlanır.

3.5. Normlaştırıcı Sayılar İçin Asimptotik Formül

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\pm\infty \tag{3.5.1}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\pm\infty \tag{3.5.2}$$

asimptotik formülleri verilsin.

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{(\mu_n - \lambda_n)}{-A_1 \sin(\beta - \alpha)} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n};\ k \neq n \tag{3.5.3}$$

eşitliği ele alınsın. Bu bölümde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları için bilinen asimptotik formüllerden faydalanarak α_n ler için asimptotik formülü bulmaya çalışalım.

$$\phi(\lambda_n) = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \quad k \neq n \tag{3.5.4}$$

çarpımı göz önüne alınsın.

$$\phi(\lambda_n) = B_1 B_2 B_3 \tag{3.5.5}$$

olsun. Burada

$$B_1 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}{k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n},\ k \neq n \tag{3.5.6}$$

$$B_2 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_k - \lambda_n}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n},\ k \neq n \tag{3.5.7}$$

$$B_3 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n},\ k \neq n \tag{3.5.8}$$

şeklindedir. Önce B_1 göz önüne alınsın. B_1 eşitliğinde λ_n ler için asimptotik formüllerden faydalanılırsa

$$B_1 = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\pi(k - \frac{\alpha}{\pi} - \lambda_n)} \right),\ k \neq n \tag{3.5.9}$$

eşitliği bulunur. Bu formülde (3.5.1) asimptotik formülü kullanılırsa ve $k - n = p$ alınırsa

$$B_1 = \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\pi\left(p - \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \right) \tag{3.5.10}$$

olur.

$$\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\lambda}{p} \right) = \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda\pi} \tag{3.5.11}$$

olduğu için

$$B_1=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left\{\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\pi p}\right)\right\}^{-1}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\pi\left(p-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n\right)}\right)$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\alpha_1}{np}\right)\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right) \qquad (3.5.12)$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\frac{\sin\frac{\alpha_1}{n}\pi}{\frac{\alpha_1}{n}\pi}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

eşitliği elde edilir.

$$I_1=\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\pi\alpha_1}{n(\pi p+\alpha-\beta)}\right)$$

sonsuz çarpımı göz önüne alınsın. Bu takdirde yukarıdaki son eşitlikte logaritma alınıp daha sonra $\cot x$ in seri açılımından faydalanılırsa;

$$I_2=1-\frac{\pi\alpha_1}{n}\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\pi p+\alpha-\beta}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{\pi\alpha_1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{-2(\alpha-\beta)}{(\pi p)^2-(\alpha-\beta)^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\frac{\alpha_1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2\frac{\alpha-\beta}{\pi}}{p^2-(\frac{\alpha-\beta}{\pi})^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{\pi\alpha_1}{n}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}-ctg(\alpha-\beta)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (3.5.13)$$

eşitliği elde edilir.

Bu takdirde

$$B_1=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left\{1+\frac{\pi\alpha_1}{n}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}-ctg(\alpha-\beta)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \qquad (3.5.14)$$

bulunur.

Büyük n ler için B_2 sonsuz çarpımının asimptotik formülünü bulmaya çalışalım. Yukarıda yapılan işlemler tekrarlanırsa ve $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ için asimptotik formüllerden yararlanılırsa

$$B_2=\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda_n}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}=\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}\right)=1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{\lambda_n\left(k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n\right)_n}-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.5.15)$$

$$=1-\frac{s_1}{n}+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{\lambda_n\left(k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda\right)_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$s_1=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}$$

şeklindedir.

Benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$B_3=\frac{1}{\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}}=\frac{1}{1-\frac{s_2}{n}+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=1+\frac{s_2}{n}-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.5.16)$$

elde edilir. Burada

$$s_2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k-k+\frac{\alpha}{\pi}\right\}$$

şeklindedir. (3.5.15) ve (3.5.16) çarpılıp ve daha sonra n nin kuvvetlerine göre düzenlenirse;

$$B_2B_3=1-\frac{s_1-s_2}{n}$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\mu_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\beta}{\pi}}{k-\frac{\beta}{\pi}-\lambda_n}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k-k+\frac{\beta}{\pi}\right\}\frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.5.17)$$

elde edilir.

(3.5.17) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk seri ele alınsın. (3.5.2) den $\mu_k - k + \frac{\beta}{\pi} = \frac{\beta_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ yazılabilir. Bu eşitlik (3.5.17) de yerine yazılırsa

$$J_2 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \mu_k - k + \frac{\beta}{\pi} \right\} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{\beta_1}{k} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' O(\frac{1}{k^2}) \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n} (\mu_0 + \frac{\beta}{\pi}) \frac{-\frac{\beta}{\pi}}{-\frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} = E_1 + E_2 + O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.5.18}$$

eşitliği bulunur. Burada

$$E_1 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{\beta_1}{k} \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} \tag{3.5.19}$$

$$E_2 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' O\left(\frac{1}{k^2}\right) \frac{k - \frac{\beta}{\pi}}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n} \tag{3.5.20}$$

şeklindedir. $\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''$ sembolü seride $k = n$ ve $k = 0$ terimleri'nin bulunmadığını ifade eder.

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{1}{k - \frac{\beta}{\pi} - \lambda_n}$$

olsun. $\lambda_n + \frac{\beta}{\pi} = \lambda$ olsun. Bu takdirde

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{1}{k - \lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{k^2 - \lambda^2} - \frac{1}{n - \lambda} \tag{3.5.21}$$

olur. [66] dan bilindiği gibi

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{k^2 - \lambda^2} = -\pi ctg \pi\lambda + \frac{1}{\lambda}$$

şeklindeydi. Bu takdirde $\lambda_n + \frac{\beta}{\pi} = \lambda$ eşitliğinden

$$F_1 = -\pi ctg\pi\lambda + \frac{1}{\lambda} = -\pi ctg\pi\left(\lambda_n + \frac{\beta}{n}\right) + \frac{1}{\lambda_n + \frac{\beta}{n}}$$

$$= -\pi ctg\pi\left[n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (3.5.22)$$

$$= -\pi ctg\left[\beta - \alpha + \frac{\pi\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \pi ctg(\alpha - \beta) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ve

$$F_2 = \frac{1}{n-\lambda} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha_1}{n} - \frac{\beta}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (3.5.23)$$

olur. (3.5.22) ve (3.5.23) formüllerinden

$$F = \pi ctg(\alpha - \beta) + \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Bu takdirde (3.5.19) dan

$$E_1 = \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha - \beta) - \frac{\pi}{\alpha - \beta} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (3.5.24)$$

elde edilir.

Şimdi E_2 nin davranışı incelensin.

(3.5.20) formülünün sağ tarafındaki toplamın mertebesi aşağıdaki integraller toplamının mertebesi ile aynı olduğunu gösterilebilir.

$$c\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx + c\int_{1}^{n-1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx + c\int_{n+1}^{\infty} \frac{x}{x^2(x-n)}dx$$

integrallerini hesaplayalım. O halde

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2(n-x)}dx = \frac{1}{n}\int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+x}\right)dx = \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n+x}\Big|_{1}^{\infty} = O(\frac{\ln n}{n})$$

$$\int_{1}^{n-1} \frac{dx}{x(n-x)} = \int_{1}^{\frac{n}{2}} \frac{dx}{x(n-x)} + \int_{\frac{n}{2}}^{n-1} \frac{dx}{x(n-x)} = \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n-x}\Big|_{1}^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n-x}\Big|_{\frac{n}{2}}^{n-1} = O(\frac{\ln n}{n})$$

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x(x-n)} = \frac{1}{n}\ln\frac{x-n}{x}\Big|_{n+1}^{\infty} = O(\frac{\ln n}{n})$$

bağıntıları bulunur.

Bu takdirde bu integrallerin değerlerinden ve (3.5.20) den

$$E_2 = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.25}$$

elde edilir. (3.5.24) ve (3.5.25) formüllerinden faydalanılarak (3.5.18) den

$$J_2 = \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{\alpha-\beta}\right] O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.26}$$

bulunur. Benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$J_3 = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left\{\lambda_k - k + \frac{\alpha}{\pi}\right\} \frac{k-\frac{\alpha}{\pi}}{k-\frac{\alpha}{\pi}-\lambda_n} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.27}$$

eşitliği elde edilir. (3.5.26), (3.5.27) ve (3.5.17) formüllerinden

$$B_2 B_3 = 1 - \frac{s_1 - s_2}{n} + \frac{\beta_1}{n}\left[\pi ctg(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{\alpha-\beta}\right] + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{3.5.28}$$

eşitliği bulunur.

$\dfrac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha-\beta)}$ çarpımı göz önüne alınsın. (3.5.1) ve (3.5.2) asimptotik formüllerinden $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ için

$$\frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{\alpha-\beta}{\pi} + \frac{\beta_1-\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha-\beta}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{1}{n}\frac{\beta_1-\alpha_1}{\sin(\alpha-\beta)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

yazılır. Son eşitlik, (3.5.14) ve (3.5.28) ifadeleri (3.5.3) te yerine yazılırsa α_n sayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \left\{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s_2-s_1}{\pi} + (\beta_1-\alpha_1)ctg(\alpha-\beta)\right] + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\}\frac{1}{(-A_1)}$$

asimptotik formülü veya

$$\frac{1}{\alpha_n} = \left\{\frac{1}{\pi} + \frac{c}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\}\frac{1}{(-A_1)} \tag{3.5.29}$$

formülü elde edilir.

Burada

$$c = \frac{s}{\pi} + (\beta_1-\alpha_1)ctg(\alpha-\beta) \tag{3.5.30}$$

ve

$$s = s_2 - s_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\lambda_k - \mu_k\} + \frac{\beta-\alpha}{\pi} \tag{3.5.31}$$

şeklindedir. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 3.5.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları sırasıyla (3.5.1) ve (3.5.2) asimptotik formülleri sağlandığında (3.5.3) ile tanımlı α_n normlaştırıcı sayıları (3.5.29) asimptotik formülünü sağlar.

Not 3.5.1. Daha önceki bölümde α_n lerin (3.2.5) bağıntısını sağladığı ispatlanmıştır. Bu teoremde α_n lerin (3.5.29) bağıntısını sağladığı elde edilir. (3.2.5) ve (3.5.29) formülleri karşılaştırılırsa $A=-1$ elde edilir.

3.6. İki Spektruma Göre Regüler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

Bu bölümde iki spektruma göre Kanonik Dirac operatörü için ters problemin çözümü detaylı bir şekilde incelenecektir. Sturm-Liouville için benzer problem [14] çalışmasında tamamıyla çözülmüş ve bu problemin çözümüyle ilgili literatürde geniş kaynaklar verilmiştir.

$$By'+Q(x)y=\lambda y,\ 0\le x\le\pi \tag{3.6.1}$$

ve

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

olsun. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının $[0,\pi]$ de tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve onların k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olsun. (3.6.1) denklemi ve

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \tag{3.6.2}$$

$$y_1(\pi)=0 \tag{3.6.3}$$

sınır koşullarıyla oluşan sınır değer problemi göz önüne alınsın.
Teoremi ispat etmeden önce aşağıdaki Lemma'yı verelim.

Lemma 3.6.1. Eğer $n\ne m$ için $\lambda_n\ne\lambda_m$ ve $n\to\infty$ için

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\alpha_n \tag{3.6.4}$$

asimptotik formülü sağlanıyorsa ve $\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$ ise bu takdirde elemanların görüntüsü (f_1,f_2) ve bu elemanlar $L_2(0,\pi)$ de lineer bağımsız olmak üzere $\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar

sistemi tamdır. Burada $\varphi_0^T(x,\lambda_n) = \left(\sin(\lambda_n x+\alpha), -\cos(\lambda_n x+\alpha)\right)$ şeklindedir.

İspat. $L_2(0,\pi)$ de $\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ sisteminin tam olmadığı kabul edilsin. Bu takdirde

$\int_0^\pi \left(f_1\sin(\lambda_n x+\alpha) - f_2\cos(\lambda_n x+\alpha)\right)dx = 0$ olmak üzere $L_2(0,\pi)$ de $\exists f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \neq 0$

vardır.

$$F(\lambda) = \int_0^\pi \left(f_1\sin(\lambda x+\alpha) - f_2\cos(\lambda x+\alpha)\right)dx$$

olsun. Eğer $\lambda = \lambda_n$ ise $F(\lambda_n) = 0$ dır. $F(\lambda)$ fonksiyonu mertebesi 1, tipi π olan ve

$$\left|F(\lambda)\right| = O(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\pi}) \tag{3.6.5}$$

olacak şekilde bir tam fonksiyondur.

$$G(\lambda) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=-N}^{N}(1-\frac{\lambda}{\lambda_n})$$

fonksiyonu verilsin. Bu sonsuz çarpımın yakınsaklığı $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}(1-\frac{\lambda}{\lambda_n})$ limitinin yakınsak oluşundan elde edilir.

$$G(\lambda) = \frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)}\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)$$

Burada λ_n^0, $Q(x)=0$ olduğu duruma karşılık gelen sınır değer probleminin özdeğerleridir. Bu özdeğerlerin aşağıdaki formülü sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

$$\lambda_n^0 = n - \frac{\alpha}{\pi} \tag{3.6.6}$$

$\sin(\lambda\pi+\alpha)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan aşağıdaki formül doğrudur.

$$G_0(\lambda) = \sin(\lambda\pi+\alpha) = \left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)$$

Bu takdirde

$$G(\lambda) = A(\lambda)G_0(\lambda) \tag{3.6.7}$$

olur. Burada

$$A(\lambda)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)} \tag{3.6.8}$$

şeklindedir. (3.6.8) formülünden faydalanarak $A(\lambda)$ için asimptotik formülü bulalım. $A(\lambda)$ fonksiyonunda düzenleme yapılırsa;

$$A(\lambda)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}^0}\right)}=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)}\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{\lambda_n\lambda_{-n}}}{\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)}{\lambda_n^0\lambda_{-n}^0}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^0\lambda_{-n}^0}{\lambda_n\lambda_{-n}}\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)}$$

formülü bulunur. (3.6.6) formülünden $\lambda_n^0\lambda_{-n}^0=-n^2+\frac{\alpha^2}{\pi^2}$ elde edilir. Bu takdirde

$$A(\lambda)\sim c\,\frac{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{-n}-\lambda)}{(\lambda_n^0-\lambda)(\lambda_{-n}^0-\lambda)} \tag{3.6.9}$$

ve (3.6.4) ve (3.6.6) formüllerinden $\lambda_n-\lambda_n^0=O\left(\frac{1}{n}\right)$ elde edilir. Şimdi

$$J(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda_n^0-\lambda}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)$$

sonsuz çarpım göz önüne alınsın. Bu son formülde logaritma alınıp daha sonra seri açılımı yapılırsa;

$$\ln J(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)^2+\cdots \tag{3.6.10}$$

bulunur. Burada; $n\to\infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)^2\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}{\left(n-\frac{\alpha}{\pi}\lambda\right)^2}\to 0$$

elde edilir.

$\lambda=a+ib$ olsun. Buradan $\left|\lambda_n^0-\lambda\right|=\sqrt{(\lambda_n^0-a^2)+b^2}$ olur. O halde (3.6.10) deki ilk toplam

serisi için aşağıdaki eşitsizlik bulunur.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right|\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\alpha_1}{n}+O(\frac{1}{n^2})}{\sqrt{(\lambda_n^0-a^2)+b^2}}\le\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$$

Son durumdaki has olmayan integral a ve b nin durumlarına göre incelensin.

1. $a=b$ ve $a\to\infty$ iken $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}a}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\frac{1}{4a^2}}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a}\to 0$

2. $a=-b$ ve $a\to\infty$ iken $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^2+a^2}}\to 0$

olur.

Bu sonuçlar (3.6.10) de yerine yazılırsa,

$$J(\lambda)=1+o(1)$$

elde edilir. Buradan (3.6.9) ve (3.6.7) formüllerinden

$$G(\lambda)=G_0(\lambda)[c+o(1)] \qquad (3.6.11)$$

elde edilir.

$$\phi(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)} \qquad (3.6.12)$$

fonksiyonu verilsin. Bu takdirde $G(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları da $F(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırı olduğu için $\phi(\lambda)$ tam fonksiyondur yani $\phi(\lambda)$ fonksiyonu bir meromorf fonksiyondur. (3.6.5) ve (3.6.11) asimptotik formüllerinden $F(\lambda)$ fonksiyonunun $\arg\lambda=\pm\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{2}$ ışınları üzerinde sınırlı olduğu elde edilir. Bu sebeble $\phi(\lambda)$ sabit bir sayıdır. Buradan

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}\phi(\lambda)=\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}=\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \arg\lambda=\frac{\pi}{4}}}O(e^{-i\lambda\pi})\frac{1}{\sin(\lambda\pi+\alpha)}=0$$

olur. Dolayısıyla $\phi(\lambda)=0$, bu sebeple $F(\lambda)=0$ olur. Buradan $f(x)=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}=0$ olur.

Bu ise varsayım ile çelişir. Bu sebeple $L_2(0,\pi)$ de $\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ fonksiyonlar sistemi tamdır.

$\left\{\varphi_0^T(x,\lambda_n)\right\}$ sisteminin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$$G_n(\lambda) = \frac{G(\lambda)}{\lambda - \lambda_n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{3.6.13}$$

fonksiyonu verilsin.

$$\int_0^\pi \left(f_n(x), \varphi_0(x, \lambda_k) \right) dx = G_n(\lambda) \tag{3.6.14}$$

sağlanacak şekilde $f_n(x) = \begin{pmatrix} f_{1,n}(x) \\ f_{2,n}(x) \end{pmatrix}$ fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de olsun.

$$\int_0^\pi \left(f_n(x), \varphi_0(x, \lambda_k) \right) dx = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ G_n(\lambda) & k = n \end{cases} \tag{3.6.15}$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. $\{f_n(x)\}$ ve $\{\varphi_0(x, \lambda_n)\}$ vektör fonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de olmak üzere bir ortogonal sistem oluştururlar.

$\{\varphi_0(x, \lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin lineer bağımsız yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_0(x, \lambda_n) = 0 \tag{3.6.16}$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım. (3.6.16) eşitliğinin $f_k(x)$ ile skaler çarpılıp ve daha sonra 0 dan π ye kadar x e göre integrallenirse ve sonuç olarak (3.6.15) ifadesi kullanılarak $\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k) = 0$ yani $\alpha_k = 0$ bulunur.

Gerçekten de

$$f_k(x) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_0(x, \lambda_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi f_k(x) \alpha_k \varphi_0(x, \lambda_k) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k G_k^{'}(\lambda_k) = 0$$

olur. Burada $\alpha_k G_k^{'}(\lambda_k) = 0$ yani $\alpha_k = 0$ bulunur. Bu ise çelişkidir. Bununla Lemma 3.6.1. ispatlanır.

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.6.1. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının $k.$mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$de olmak üzere $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$matris fonksiyonlu (3.6.1)-(3.6.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve normlaştırıcı sayılarının $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ olabilmesi için, $n \neq m$ için $\lambda_n \neq \lambda_m$, tüm n ler için $\alpha_n > 0$ olacak biçimde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ lerin

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k,n}}{n^k} \tag{3.6.17}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{k,n}}{n^k} \tag{3.6.18}$$

asimptotik formüllerini sağlaması ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$$

şeklinde olmak üzere

$$F(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n) - \frac{1}{\pi}\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0) \right\} \tag{3.6.19}$$

fonksiyonunun $k.$ mertebeden türevlerinin $L_2(0,\pi)$ den olması gerek ve yeterdir.

İspat: Önce gereklilik kısmını hesaplayalım. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ (3.6.1)-(3.6.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları olsun. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları için (3.6.17) ve (3.6.18) asimptotik formülleri daha önceden verilmişti ve ayrıca tanımdan dolayı tüm α_n ler 0 dan büyüktür.

$\lambda_n \neq \lambda_m$ olması ise ileride gösterilecektir. Bu sebeple $F(x,t)$ lerin $k.$ mertebeden türevlerinin $L_2(0,\pi)$ de olduğunu ispatlamak gerekir.

$t < x$ olsun. (3.6.17) ve (3.6.18) asimptotik formüllerini kullanarak $\forall x \neq t$ için $L_2(0,\pi)$ deki tanımlı metrik anlamda (3.6.19) serisinin yakınsaklığını ve

$$\int_0^x \int_0^t F(u,v)\,du\,dv = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x \int_0^t \varphi_0(u,\lambda_n)\varphi_0^T(v,\lambda_n)\,du\,dv - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^x \int_0^t \varphi_0(u,\lambda_n^0)\varphi_0^T(v,\lambda_n^0)\,du\,dv \tag{3.6.20}$$

nin sağlandığını ispat etmek mümkündür. [21] den bilindiği gibi

$$\varphi_0(x,\lambda_n) = \varphi(x,\lambda_n) + \int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt \tag{3.6.21}$$

integral denklemi vardır. Her iki tarafın transpozu alınırsa

$$\varphi_0^T(x,\lambda_n)=\varphi^T(x,\lambda_n)+\int_0^x \varphi^T(t,\lambda_n)H^T(x,t)dt, \quad n=(-\infty,\infty) \tag{3.6.22}$$

elde edilir. Bu dönüşüm operatörleri (3.6.20) de yerine yazılırsa ve düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^t F(u,v)dudv =&\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)dudv+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds\\ &+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x dv\int_0^t du\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)ds\\ &+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x du\int_0^t dv\left\{\int_0^u\int_0^v H(u,s_1)\varphi(s_1,\lambda_n)\varphi^T(s_2,\lambda_n)H^T(x,s_2)ds_1ds_2\right.\\ &-\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^x\int_0^t\left\{\varphi(u,\lambda_n^0)+\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n^0)ds\right\}\left\{\varphi^T(v,\lambda_n^0)+\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n^0)H^T(v,s)ds\right\}dudv\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.6.23}$$

formülü bulunur. (3.6.23) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamları ayrı ayrı hesaplayalım.

$$I_1=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds \tag{3.6.24}$$

toplamını göz önüne alalım.

$$f_t(u)=\begin{cases}1, & u\le t\\ 0, & u>t\end{cases}$$

fonksiyonu verilsin.

Bu takdirde

$$\begin{aligned}I_1&=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t \varphi(u,\lambda_n)du\int_0^x dv\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)H^T(x,s)ds\\ &=\int_0^x dv\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t f_1(u)\varphi(u,\lambda_n)du\int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n)f_2^T(v)ds\\ &=\int_0^x dv\int_s^t H^T(v,s)dv=\int_0^x du\int_u^t H^T(s,u)ds\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x dv\int_0^t du\int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)ds=\int_0^t du\int_u^v H(s,u)ds \tag{3.6.25}$$

ve

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^x du\int_0^t dv\left\{\int_0^u\int_0^v H(u,s_1)\varphi(s_1,\lambda_n)\varphi^T(s_2,\lambda_n)H^T(v,s_2)ds_1ds_2=\int_0^t ds\int_s^x H(u,s)du\int_0^t H^T(v,s)dv\right. \tag{3.6.26}$$

olduğunu ispat etmek mümkündür.

$$I_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x \int_0^t \varphi(u,\lambda_n)\varphi^T(v,\lambda_n)dudv$$

toplamı ve

$$\varphi_t(u) = \begin{cases} 1, & u \le t \\ 0, & u > t \end{cases}, \quad \psi_x(u) = \begin{cases} 1, & u \le x \\ 0, & u > x \end{cases}$$

fonksiyonları verilsin. Bu takdirde

$$I_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^x \psi_x(u)\varphi(u,\lambda_n)du \int_0^t \psi_t(u)\varphi^T(v,\lambda_n)dv = \int_0^t \psi_x(u)\psi_t(u)du \tag{3.6.27}$$

ve

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^x \int_0^t \left\{ \varphi(u,\lambda_n^0) + \int_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n^0)ds \right\} \left\{ \varphi^T(v,\lambda_n^0) + \int_0^v \varphi^T(s,\lambda_n^0)H^T(v,s)ds \right\} dudv \Bigg\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^x \int_0^t \varphi_0(u,\lambda_n)\varphi_0^T(v,\lambda_n^0)dudv = \int_0^t \psi_x(u)\psi_t(u)du$$

(3.6.28)

elde edilir.

(3.6.24)-(3.6.27) ve (3.6.28) fonksiyonları (3.6.23) te yerine yazılırsa

$$\int_0^x \int_0^t F(u,v)dudv = \int_0^x du \int_u^t H^T(s,u)ds + \int_0^t du \int_u^x H(s,u)ds + \int_0^t ds \int_s^x H(u,s)du \int_s^t H(v,s)dv$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$ operatörü uygulanırsa

$$F(x,t) = H(x,t) + H^T(t,x) + \int_0^t H(x,s)H^T(t,s)ds$$

integral denklemi bulunur. $t < x$ için $H(t,x) = 0$ olduğu için buradan;

$$F(x,t) = H(x,t) + \int_0^t H(x,s)H^T(t,s)ds \tag{3.6.29}$$

elde edilir. $H(x,t)$ $L_2(0,\pi)$ de bulunacak şekilde k. mertebeden türevlere sahip olduğundan (3.6.29) eşitliğinden $F(x,t)$ nin de aynı özelliklere sahip olduğu elde edilir. Bununla gereklilik ispatlanır.

Şimdi de yeterlilik kısmını hesaplayalım. (3.6.17) ve (3.6.18) ile tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları verilsin. Ayrıca $n \neq m$ için $\lambda_n \neq \lambda_m$ ve tüm $\alpha_n > 0$ ler için (3.6.19) formülü

ile tanımlı $F(x,t)$ fonksiyonunun k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olsun. $K(x,t)$ çekirdeğinin

$$F(x,t)+K(x,t)+\int_0^t K(x,s)F(s,t)ds=0,\quad 0\le t\le x\le\pi \tag{3.6.30}$$

integral denklemini sağladığı ispatlanmıştır.
$t>x$ için $K(x,t)$ (1.28) tek çözüme sahiptir. Bunun için

$$g(t)+\int_0^x F(s,t)g(s)ds=0,\quad 0\le x\le\pi \tag{3.6.31}$$

homojen denkleminin $L_2(0,\pi)$de bulunan aşikar çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Aksini varsayalım. (3.6.31) integral denklemi $L_2(0,\pi)$ de aşikar olmayan $g(t)\ne 0$ çözümüne sahip olsun. (3.6.31) denkleminin her iki tarafı $g(t)$ ile skaler çarpılırsa ve t ye göre 0 dan x e kadar integrallenirse

$$\int_0^x \left|g^2(t)\right|dt+\int_0^x\int_0^x \left(F(s,t)g(s)g(t)\right)dsdt=0$$

elde edilir.
Bu son formülde $F(x,t)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\int_0^x g^2(t)dt+\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(s)g(t)dsdt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)g(s)g(t)dsdt=0$$

elde edilir. Burada Parseval eşitliğinden faydalanılırsa

$$\int_0^x\int_0^x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(s,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(s)g(t)dsdt=0$$

yani

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^x\left(\varphi_0^T(t,\lambda_n)g(t)dt\right)\right)^2=0$$

sonsuz toplamı elde edilir. $\alpha_n>0$ olduğu için buradan

$$\int_0^x \varphi_0^T(t,\lambda_n)g(t)dt=0$$

elde edilir. Bu takdirde $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tamlığından $g(t)=0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla (3.6.31) denklemi çözülebilirdir ve bir tek $K(x,t)$

çözümüne sahiptir. Bu takdirde

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt \tag{3.6.32}$$

integral denklemi,

$$B\varphi'+Q(x)\varphi=\lambda\varphi, \quad Q(x)=K(x,x)B-BK(x,x) \tag{3.6.33}$$

denklemini ve

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{3.6.34}$$

başlangıç koşullarını sağlar.

Şimdi $\varphi(x,\lambda_n)$ $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlarının ortogonalliğini ispatlayalım ve π noktasındaki sınır koşullarını tanımlayalım. $f(x)\in L_2(0,\pi)$ ve $g(x)\in L_2(0,\pi)$ olmak üzere Parseval eşitliğinden

$$\int_0^\pi (f(x),g(x))dx=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(x),\varphi(x,\lambda_n))dx\int_0^\pi (g(t),\varphi(t,\lambda_n))dt \tag{3.6.35}$$

yazılır. (3.6.35) eşitliğini kullanarak

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(t),\varphi(t,\lambda_n))dt\right)\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.36}$$

serisi de düzgün yakınsak olacak biçimde

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.37}$$

$$c_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(t),\varphi(t,\lambda_n))dt \tag{3.6.38}$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlamak mümkündür. Gerçekten de

$$g(t)=\begin{cases}1, & x\le t\le x+\Delta x\\ 0, & 0\le t<x \ ve\, x+\Delta x\le t\le\pi\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu verilsin. Bu takdirde (3.6.37) eşitliğine göre aşağıdaki eşitlik

$$\int_0^{x+\Delta x} f(t)dt=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi (f(t),\varphi(t,\lambda_n))dt\int_x^{x+\Delta x}\varphi(t,\lambda_n)dt$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafı Δx'e bölünürse ve $\Delta x\to 0$ için limit alınırsa sonuçta (3.6.37) fonksiyonu elde edilir. Özel olarak Green formülünden $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ için

asimptotik formüllerden $f(x)=\varphi(x,\lambda_k),\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ olacak şekilde (3.6.37) serisinin düzgün ve mutlak yakınsaklığı elde edilir.

Bu sebeple

$$\varphi(x,\lambda_k)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}\left(\varphi(t,\lambda_k),\varphi(t,\lambda_n)\right)dt\right)\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.6.39}$$

eşitliği bulunur. $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sistemi lineer bağımsız olduğu için (3.6.32) dönüşüm formülünden dolayı $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sistemi de $L_2(0,\pi)$ de lineer bağımsızdır. Bu sebeple (3.6.39) eşitliğinden

$$\int_0^{\pi}\left(\varphi(t,\lambda_k),\varphi(t,\lambda_n)\right)dt=\begin{cases}0, & n\neq k\\ \alpha_n, & n=k\end{cases} \tag{3.6.40}$$

eşitliği elde edilir. (3.6.40) ve Parseval eşitliğinden $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam ortogonal sistem oluşturduğu elde edilir.

π noktasındaki sınır koşulunu tanımlayalım. $\varphi(x,\lambda)$ (3.6.33) denklemini sağladığı için

$$B\varphi'(x,\lambda_n)+Q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n\varphi(x,\lambda_n)$$

$$B\varphi'(x,\lambda_m)+Q(x)\varphi(x,\lambda_m)=\lambda_m\varphi(x,\lambda_m)$$

olur. I. soldan $\varphi^T(x,\lambda_m)$, II. soldan $\varphi^T(x,\lambda_n)$ çarpılıp ve daha sonra I. ifade II. 'den çıkarılırsa

$$\varphi^T(x,\lambda_m)B\varphi'(x,\lambda_n)-\varphi^T(x,\lambda_n)B\varphi'(x,\lambda_m)=(\lambda_n-\lambda_m)\varphi^T(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)$$

elde edilir.

Sonuncu denklem 0 dan π ye kadar integrallenirse, $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ nin ortogonolliği ve (3.6.34) koşulu kullanılırsa;

$$\int_0^{\pi}\left[\left(\varphi_{1m},\varphi_{2m}\right)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1n}'\\ \varphi_{2n}'\end{pmatrix}-\left(\varphi_{1n},\varphi_{2n}\right)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1m}'\\ \varphi_{2m}'\end{pmatrix}\right]dx=\left(\lambda_n-\lambda_m\right)\int_0^{\pi}\left[\left(\varphi_{1n},\varphi_{2n}\right)\begin{pmatrix}\varphi_{1n}\\ \varphi_{2n}\end{pmatrix}\right]dx$$

veya

$$\int_0^{\pi}\left[-\varphi_{1n}'\varphi_{2m}+\varphi_{1m}\varphi_{2n}'+\varphi_{1m}'\varphi_{2n}-\varphi_{1n}\varphi_{2m}'\right]dx=0$$

veya

$$\int_0^{\pi}\left(\varphi_{1m}\varphi_{2n}-\varphi_{1n}\varphi_{2m}\right)'dx=0$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_{1m}(\pi)\varphi_{2n}(\pi)-\varphi_{1n}(\pi)\varphi_{2m}(\pi)=0$$

ve böylece

$$\frac{\varphi_{1m}(\pi)}{\varphi_{2m}(\pi)}=\frac{\varphi_{1n}(\pi)}{\varphi_{2n}(\pi)}=sabit$$

olur.

Diğer taraftan (3.6.32) dönüşüm formülünden

$$\frac{\varphi_1(\pi,\lambda_k)}{\varphi_2(\pi,\lambda_k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_1(\pi,\lambda_n)}{\varphi_2(\pi,\lambda_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\lambda_n\pi+\alpha)+o(1)}{-\cos(\lambda_n\pi+\alpha)+o(1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n\pi-\alpha+\alpha)+o(1)}{-\cos(n\pi-\alpha+\alpha)+o(1)}=0$$

elde edilir. Bu sebeple $\varphi_1(\pi,\lambda_k)=0$ dır. Bununla teorem ispatlanır.

3.6.1. İki Spektruma Göre Ters Problem

Bu bölümde regüler Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem çözümü tam şekilde verilmiştir.

Teorem 3.6.1.1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. λ_n ve μ_n dizileri çaprazlaşırlar.
2. $\alpha,\ \alpha_1,\ \beta,\ \beta_1$ sabit sayılar olmak üzere $n\to\pm\infty$ iken λ_n ve μ_n sayıları için

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \qquad (3.6.1.1)$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \qquad (3.6.1.2)$$

asimptotik formülleri sağlanır.

3. $0\le\alpha\le\pi,\ 0\le\beta\le\pi,\ \alpha\ne\beta$ dır.

Bu takdirde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonlu (3.4.2) ve (3.4.3) sınır koşullarını sağlayan aynı bir kanonik Dirac operatörünün iki farklı spektrumlarıdır.

İspat. (3.6.1.1) ve (3.6.1.2) asimptotik formülleriyle tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizileri verilsin.

$$\alpha_n=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\mu_n-\lambda_n}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n} \qquad (3.6.1.3)$$

formülü ele alınsın.

Önceki bölümde verilen sonuçlardan α_n normlaştırıcı sayıları için (3.5.29) asimptotik

formülünün sağlandığı elde edilmişti.

Tüm α_n lerin 0 dan büyük olduğunu gösterelim.

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda} \tag{3.6.1.4}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın.

$m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları ile çakışırlar. Bu takdirde teoremin koşulundan dolayı $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları sıralıdırlar.

$\lambda = it$ ve $t \to \infty$ için

$$m_1(\lambda) \to -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \tag{3.6.1.5}$$

elde edilir ve Weyl fonksiyonunun tanımından

$$\frac{1}{\alpha_n} = \operatorname{Re} s m_1(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n} \tag{3.6.1.6}$$

eşitliği yazılır. Bu sebeple

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda-\lambda_n)} \tag{3.6.1.7}$$

dir. Burada α_k lerın hepsi aynı işarete sahiptirler.

(3.5.29) formülünde büyük k lar için $\alpha_k > 0$ olduğu görülüyor. Bu sebeple $\forall\alpha_k > 0$ için sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonuna sahip (3.4.1) denkleminin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre birebir olarak tanımlanması elde edilir. $\{\lambda_n\}$ dizisi

$$By' + Q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le \pi \tag{3.6.1.8}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\quad 0 \le \alpha \le \pi \tag{3.6.1.9}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.6.1.10}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Burada α sayısı (3.6.1.1) ile tanımlanır. $\{\gamma_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre tanımlanmış

$$By' + Q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le \pi \tag{3.6.1.8}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0 \tag{3.6.1.11}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{3.6.1.12}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Burada β, (3.6.1.2) ile tanımlanır. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$,

(3.6.1.8) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix},\ \psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\beta\\ -\cos\beta\end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarıyla tanımlı çözümleri olsun. Bu takdirde

$$m(\lambda)=\frac{\psi_1(\pi,\lambda)}{\varphi_1(\pi,\lambda)}$$

fonksiyonunun kutupları ve sıfırları sırasıyla $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ sayıları ile çakışır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n}$$

formülü bulunur. Bu takdirde

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda-\lambda_k)} \qquad (3.6.1.13)$$

eşitliği elde edilir. (3.6.1.7) ve (3.6.1.13) formüllerinden

$$m_1(\lambda)=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)$$

elde edilir. Bu sebeple $m(\lambda)$ ve $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları çakışırlar. Dolayısıyla $\gamma_n=\mu_n,\ 0,\pm1,\pm2,\cdots$ olur. Bununla teorem ispatlanır.

Teorem 3.6.1.2. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ (3.6.1.8) denkleminin (3.6.1.9) ve (3.6.1.10) sınır koşullarını sağlayan iki farklı spektrumları olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerek ve yeterdir.

$p(x)$ ve $q(x)$ k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ uzayında olacak şekilde

$$Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$$

matris fonksiyonu verilsin.

1. λ_n ve μ_n dizileri çaprazlaşır.
2. Aşağıdaki asimptotik formüller söz konusudur.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

burada $\alpha \neq \beta, 0 \leq \beta, \alpha \leq \pi$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty} \left|\alpha_{k,n}\right|^2 < \infty, \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\beta_{k,n}\right|^2 < \infty$ dir.

İspat. λ_n ve μ_n sayıları çaprazlaştığı için bu teoremin gerekliliği Bölüm 3.2 de verildi. Yeterliliğin ispatı ise Teorem 3.6.1.1 in ispatına benzerdir.

4. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ

Bu bölümde sonlu kapalı aralıkta tanımlı ve l pozitif veya negatif tam sayı olmak üzere, π noktasında $\frac{l}{\pi - x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tekile sahip Dirac operatörü için ters problem incelenecektir. Özel olarak farklı sınır koşullarına karşılık gelen $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ sayılar dizisine göre potansiyel matris fonksiyonunun bulunması ispatlanacaktır. Benzer problemler [21], [54] ve diğer çalışmalarda ele alınmıştır.

4.1. Singuler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y, 0 \le x < \pi \tag{4.1.1}$$

denklemi ile birlikte

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ 0 \le \alpha < \pi \tag{4.1.2}$$

$$y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.1.3}$$

sınır şartları göz önüne alınsın. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{l}{\pi - x} \\ \frac{l}{\pi - x} & 0 \end{pmatrix},\ y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $Q(x)$, $[0,\pi]$ de sürekli bir matris fonksiyonu, λ ise kompleks parametredir. Basitlik için biz l yi tek negatif tam sayı olarak ele alacağız.

(4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerlerini $\{\lambda_n\}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$ ve buna karşılık gelen özfonksiyonları ise $\varphi_n(x)$ olsun.

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} (\varphi_n(x), \varphi_n(x))dx = \int_0^{\pi} \left\{ \varphi_1^2(x,\lambda_n) + \varphi_2^2(x,\lambda_n) \right\} dx \tag{4.1.4}$$

sayılarına (4.1.1)-(4.1.3) probleminin normlaştırıcı sayıları denir. $\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.1.5}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun.

Teorem 4.1.1. $Q_1(x)=\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x)\end{pmatrix}$ için $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tekilsiz problemin sırasıyla özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları ise $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\cdots$ (4.1.1)-(4.1.3) probleminin $l=-(2k+1)$ için özdeğerleri ve normlaştırıcı sayılarıdır ve tersine $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\cdots$ (4.1.1)-(4.1.3) probleminin $l=-(2k+1)$ için özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları ise

$$By'+Q_1(x)y=\lambda y, 0\le x\le \pi \tag{4.1.6}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{4.1.7}$$

$$y_1(\pi)=0 \tag{4.1.8}$$

probleminin sırasıyla özdegerleri ve normlaştırıcı sayılarıdır.

İspat. Önce gereklilik kısmı yapılsın. $\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda)\\ \psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.6) denkleminin

$$\psi_1(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \psi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{4.1.9}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\psi(x,\lambda)$ nın (4.1.7) sınır koşullarını sağladığı açıktır. Bu sebeple $\psi(x,\lambda_n)$ (4.1.6)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonlarıdır ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\left(\psi(t,\lambda_n),\psi(t,\lambda_n)\right)dt=\int_0^{\pi}\left\{\psi_1^2(x,\lambda_n)+\psi_2^2(x,\lambda_n)\right\}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{4.1.10}$$

şeklindedir.

Bu teoremi tümevarım metodu ile ispatlayalım. $k=0$ olsun. Bu takdirde $\cdots,\lambda_{-1},\lambda_1,\cdots$ ve $\cdots,\alpha_{-1},\alpha_1,\cdots$ sırasıyla (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları olduğu ispatlayalım. (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özfonksiyonları ile (4.1.6)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonları arasında

$$\varphi(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda)\right)dy}{\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.11}$$

bağıntısı vardır. Buna Crum dönüşümü denir.

(4.1.1)-(4.1.3) ve (4.1.6)-(4.1.8) problemlerinin çözüm fonksiyonlarında $x=0$ yazılırsa

$$\varphi(0,\lambda)=\psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix}$$

elde edilir.

$\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu, (4.1.6) denkleminin çözümü olduğundan

$$K(x,y)=\frac{\psi(x,\lambda_0)\psi^T(y,\lambda_0)}{\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.12}$$

fonksiyonu

$$BK_x^{'}(x,y)+Q_1(x)K(x,y)+\left[K(x,x)B-BK(x,x)\right]K(x,y)=-K_y^{'}(x,y)B+K(x,y)Q_1(y) \tag{4.1.13}$$

denkleminin çözümü olduğu aşikardır.

Bu takdirde (4.1.11) ile tanımlı $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$B\varphi'(x,y)+Q_1(x)\varphi(x,\lambda)+\left[K(x,x)B-BK(x,x)\right]\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda) \tag{4.1.14}$$

denklemini sağlar.

$$\Delta Q_1(x)=K(x,x)B-BK(x,x)$$

fonksiyonu göz önüne alalım.

$x\to\pi$ iken $\Delta Q_1(x)$ fonksiyonunun davranışını bulalım. $\Delta Q_1(x)$ eşitliğinde düzenleme yapılırsa

$$\Delta Q_1(x)=K(x,x)B-BK(x,x)=\frac{1}{\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. $x\to\pi$ iken $\psi_1(\pi)=0,\ \lim\limits_{x\to\pi}\psi_2(x)=c\neq 0$ olduğu bilinmektedir. ($c=0$ için $\psi(t,\lambda_0)=0$ olduğundan bu mümkün değildir).

Bu sebeple $x\to\pi$ iken limit alınırsa

$$\Delta Q_1(x)\to\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}0 & -c^2\\ -c^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix},\ l=-1$$

sonucu bulunur. Gerçekten de

$$\Delta Q_1(x)=\frac{1}{\alpha_0-\int\limits_0^x\big(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\big)\,dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\int\limits_0^\pi\big(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\big)\,dt+\int\limits_x^0\big(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\big)\,dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\int\limits_x^\pi\big(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\big)\,dt}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. Son eşitlikte $x\to\pi$ için limit alınırsa

$$\Delta Q_1(x)\to\frac{1}{c^2(\pi-x)}\begin{pmatrix}0 & -c^2\\ -c^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix},\ l=-1$$

olduğu bulunur.

$$Q(x)=Q_1(x)+\Delta Q_1(x)-\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-1}{(\pi-x)}\\ \dfrac{-1}{(\pi-x)} & 0\end{pmatrix}\tag{4.1.15}$$

fonksiyonun $[0,\pi]$de düzgünlük mertebesi $Q_1(x)$ fonksiyonunun düzgünlük mertebesi ile aynıdır. Böylece $l=-1$ için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (4.1.1) denklemini sağladığı ispatlanmıştır. Burada $Q(x)$ fonksiyonu (4.1.15) ile tanımlıdır.

Şimdi $\varphi_1^2(\pi,\lambda_n)+\varphi_2^2(\pi,\lambda_n)<\infty$ olduğunu ve $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$de tam ortogonal sistem oluşturduğu ispatlayalım. $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin ortogonal sistem olduğu bellidir. Bu sebeple farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonalliğinden

$$\int\limits_0^\pi\big(\psi(x,\lambda_0),\psi(x,\lambda_n)\big)dx=0,\ \ n\neq 0$$

bulunur. Bu takdirde (4.1.11) eşitliğinde $x\to\pi$ iken limit alınırsa özfonksiyonların ortogonalligi ve L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{x\to\pi}\varphi(x,\lambda_n)=\psi(\pi,\lambda_n)+\lim_{x\to\pi}\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{\int_0^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt-\int_0^x\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}$$

$$=\psi(\pi,\lambda_n)+\lim_{x\to\pi}\frac{\psi(x,\lambda_0)\left\{\int_0^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy-\int_x^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy\right\}}{\int_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}$$

$$=\psi(\pi,\lambda_n)-\psi(\pi,\lambda_0)\lim_{x\to\pi}\frac{\int_x^\pi\left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{\int_x^\pi\left(\psi(t,\lambda_0),\psi(t,\lambda_0)\right)dt}=0$$

eşitliği elde edilir. Yani $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu yakınsaktır. Bu sebeple $\varphi_1^2(\pi,\lambda_n)+\varphi_2^2(\pi,\lambda_n)<\infty$ olduğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$ fonksiyonları (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özfonksiyonları olur. Bu sebeple $[0,\pi]$ üzerinde ikişerli ortogonaldirler.

Şimdi $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğunu ve

$$\alpha_n=\int_0^\pi\left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dt$$

olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned}A(x)&=\alpha_0-\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_0^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi-\int_0^x\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_0^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi+\int_x^0\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\\&=\int_x^\pi\left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\end{aligned}$$

fonksiyonu verilsin. Dirac-Delta fonksiyonunun tanımından

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan, $t > x$ için

$$\varphi(x,\lambda_n) = \psi(x,\lambda_n) + \frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{A(x)}$$

eşitliği ve bu eşitliğin transpozu alınırsa

$$\varphi^T(t,\lambda_n) = \psi^T(t,\lambda_n) + \frac{\psi^T(t,\lambda_0)\int_0^t \left(\psi(y,\lambda_0),\psi(y,\lambda_n)\right)dy}{A(t)}$$

elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa çarparsak ve daha sonra her iki taraftan sonsuz toplam alırsak;

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\frac{\psi^T(t,\lambda_0)\int_0^t \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(t)} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_0)\frac{\psi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi}{A(x)}\varphi^T(t,\lambda_n) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\frac{\psi(x,\lambda_0)\psi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x \left(\psi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi\int_0^t \left(\psi(s,\lambda_0),\psi(s,\lambda_n)\right)ds \\
&= \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\psi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}\int_0^t \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n),\psi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\psi(\xi,\lambda_0)d\xi \\
&+ \frac{\psi(x,\lambda_0)}{A(x)}\int_0^x \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(t,\lambda_n),\psi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\psi(\xi,\lambda_0)d\xi \\
&+ \frac{\psi(x,\lambda_0)\psi(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x \left\{\left[\frac{1}{\alpha_n}\psi(\xi,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n)\right]\psi(\xi,\lambda_0)\right\}\psi(s,\lambda_0)d\xi ds \\
&= \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha_0\psi(x,\lambda_0)}{A(x)}\frac{\psi(t,\lambda_0)}{A(\xi)} \\
&= \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha_0}\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)
\end{aligned}$$

buradan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1.16}$$

elde edilir. Burada ' sembolü $n=0$ teriminin bulunmadığını ifade eder.

(4.1.16) eşitliği $\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpılıp 0 dan π ye kadar x'e göre integrallenirse ve Dirac-Delta fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$\int_0^\pi \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) \right] \varphi(x,\lambda_n)dx = \int_0^\pi \delta(x-t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi(x,\lambda_n)dx$$

yani

$$\frac{1}{\alpha_n}\varphi(t,\lambda_n)\int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx = \varphi(t,\lambda_n)$$

$$\alpha_n = \int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx \tag{4.1.17}$$

bağıntısı bulunur. (4.1.16) ve (4.1.17) formülleri $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ $n=\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ de tam ortogonal sistem oluşturduğunu gösterir.

Böylece $l=-1$ durumunda teoremin gerekliliği ispatlandı. Tümevarım uygulayarak teoremi genel durumda da ispatlamak mümkündür.

Şimdi yeterlilik kısmını ispatlayalım. $\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.1.18}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1.2) sınır koşullarını sağladığı açıktır. $\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots$, $l=-(2k+1)$ için (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olsun. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda_n)$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$ bu problemin özfonksiyonları olur ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n = \int_0^\pi \left(\varphi(x,\lambda_n),\varphi(x,\lambda_n)\right)dx,\ n \in \pm\overline{(k+1,\infty)} \tag{4.1.19}$$

şeklindedir. Teoremde gösterilen şekilde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayı dizilerini oluşturalım. Bunların (4.1.6)-(4.1.8) sınır değer probleminin spektral karakteristikleri olduğunu ispatlayalım. Teoremi $k=0$ durumu için ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde ispatlanabilir.

$$\psi(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) - \frac{\varphi(x,\lambda_0)\int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda)\right)dt}{\alpha_0 + \int_0^x \left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.20}$$

eşitliği verilsin. Burada $\lambda_0, \lambda_n, n \neq 0$ lerden farklıdır ve α_0 sabit pozitif sayıdır. Burada $x=0$ için $\psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_1(0,\lambda)\\ \psi_2(0,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix}$ olur.

$\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin çözümü olduğundan

$$K(x,y)=-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(y,\lambda_0)}{\alpha_0+\int\limits_0^x\left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\right)dt} \tag{4.1.21}$$

matris fonksiyonunun

$$\begin{aligned}&BK_x^{'}(x,y)+Q(x)K(x,y)+\left[K(x,x)B-BK(x,x)\right]K(x,y)+LK(x,y)\\ &=-K_y^{'}(x,y)B+K(x,y)Q(y)+K(x,y)L\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

denkleminin çözümü olduğu aşikardır. Bu takdirde (4.1.20) ile tanımlı $\psi\left(x,\lambda\right)$ fonksiyonu

$$B\psi^{'}(x,y)+Q_1(x)\psi(x,\lambda)+\left[K(x,x)B-BK(x,x)\right]\psi(x,\lambda)+L\psi(x,\lambda)=\lambda\psi(x,\lambda) \tag{4.1.23}$$

denklemini sağlar.

Şimdi

$$\Delta Q(x)=K(x,x)B-BK(x,x)$$

fonksiyonu detaylı bir şekilde inceleyelim.

$x\to\pi$ iken $\Delta Q(x)$ fonksiyonunun davranışını bulalım. $\Delta Q(x)$ fonksiyonunda matris fonksiyonları yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\Delta Q(x)&=K(x,x)B-BK(x,x)\\ &=\frac{1}{\alpha_0+\int\limits_0^x\left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\right)dt}\begin{pmatrix}-2\varphi_1(x,\lambda_0)\varphi_2(x,\lambda_0) & \varphi_1^2(x,\lambda_0)-\varphi_2^2(x,\lambda_0)\\ \varphi_1^2(x,\lambda_0)-\varphi_2^2(x,\lambda_0) & 2\varphi_1(x,\lambda_0)\varphi_2(x,\lambda_0)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu sebeple $x\to\pi$ iken

$$\varphi(x,\lambda)\to\begin{pmatrix}c_1\\ \dfrac{c_2}{\pi-x}\end{pmatrix}$$

bilinmektedir [21]. Bu sebeple $x\to\pi$ iken limit alınırsa,

$$\Delta Q(x)=-\frac{1}{\alpha_0+\int\limits_0^x \frac{c_2^2}{(\pi-t)^2}dt+c_1x}\begin{pmatrix} -2c_1\dfrac{c_2}{(\pi-x)} & c_1^2-\dfrac{c_2^2}{(\pi-x)^2} \\ c_1^2-\dfrac{c_2^2}{(\pi-x)^2} & 2c_1\dfrac{c_2}{(\pi-x)} \end{pmatrix}$$

$$\simeq\begin{pmatrix} -2c & c^2(\pi-x)-\dfrac{1}{(\pi-x)} \\ c^2(\pi-x)-\dfrac{1}{(\pi-x)} & 2c \end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{(\pi-x)} \\ -\dfrac{1}{(\pi-x)} & 0 \end{pmatrix}+\Delta Q_2=-L+\Delta Q_2$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$Q_1(x)=Q(x)+\Delta Q(x)+L=Q(x)+\Delta Q_2(x)$$

fonksiyonun $[0,\pi]$de $Q(x)$ ile aynı düzgünlük derecesine sahip olduğu bulunur.

Şimdi de $n=(-\infty,\infty)$, için $\psi_1(\pi,\lambda_n)=0$ ve $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$de tam ortogonal sistem oluşturduğunu ispatlayalım. Önce $\psi_1(\pi,\lambda_0)=0$ olduğunu ispatlayalım. (4.1.20) eşitliğinde $\lambda=\lambda_0$ yazılırsa

$$\psi(x,\lambda_0)=\varphi(x,\lambda_0)-\frac{\alpha_0}{\alpha_0+\int\limits_0^x\left(\varphi(t,\lambda_0),\varphi(t,\lambda_0)\right)dt}.$$

formüllü bulunur. Bu sebeple $x\to\pi$ iken

$$\varphi(x,\lambda)\to\begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{\pi-x} \end{pmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$\lim_{x\to\pi}\psi(x,\lambda_0)=\lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{(\pi-x)} \end{pmatrix}\frac{\alpha_0}{\alpha_0+c_1^2x+\dfrac{c_2^2}{(\pi-x)}-\dfrac{c_2^2}{\pi}}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{(\pi-x)} \end{pmatrix}\frac{\alpha_0\pi(\pi-x)}{(\pi-x)\left(\alpha_0\pi+c_1^2\pi x-c_2^2\right)+c_2^2\pi}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\begin{pmatrix} c_1\alpha_0\pi(\pi-x) \\ c_2\alpha_0\pi \end{pmatrix}\frac{1}{(\pi-x)\left(\alpha_0\pi+c_1^2\pi x-c_2^2\right)+c_2^2\pi}=\begin{pmatrix} 0 \\ c_2\alpha_0\pi \end{pmatrix}\frac{1}{c_2^2\pi}=\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0c_2^{-1} \end{pmatrix}$$

olur. $\lambda = \lambda_n$ olsun.

$$\beta_n = \int_0^{\pi} \left(\varphi(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda_n) \right) dx$$

fonksiyonu verilsin. Buradan;

$$\lim_{x \to \pi} \psi(x,\lambda_n) = -\lim_{x \to \pi} \frac{\begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{c_2}{(\pi - x)} \end{pmatrix}}{\dfrac{c_2^2}{(\pi - x)}} \beta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_n c_2^{-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\psi_1(\pi,\lambda_0) = 0$ olur. Bu sebeple $\{\psi(x,\lambda_n)\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ fonksiyonları (4.1.5)-(4.1.8) probleminin özfonksiyonları olur. Bu sebeple $[0,\pi]$ üzerinde ikişerli ortogonaldirler.

Şimdi $L_2(0,\pi)$ de $\{\psi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğunu ispatlayalım. Önceden $L_2(0,\pi)$ de $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin tam sistem oluşturduğu gösterilmişti.

$$A(x) = \alpha_0 + \int_0^{t} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_0) \right) d\xi$$

fonksiyonu verilsin.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \varphi^T(t,\lambda_n) = \delta(x-t)E$$

burada $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t > x$ için yukarıdaki yapılan benzer işlemler tekrarlanırsa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \psi(x,\lambda_n) \psi^T(t,\lambda_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \varphi^T(t,\lambda_n)$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x,\lambda_n) \frac{\varphi^T(t,\lambda_0) \int_0^{t} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_n) \right) d\xi}{A(t)}$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_n} \varphi^T(t,\lambda_n) \frac{\varphi(x,\lambda_0) \int_0^{x} \left(\varphi(\xi,\lambda_0), \varphi(\xi,\lambda_n) \right) d\xi}{A(x)}$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\left(\varphi(\xi,\lambda_0),\psi(\xi,\lambda_n)\right)d\xi\int_0^t\left(\varphi(s,\lambda_0),\varphi(s,\lambda_n)\right)ds$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(t,\lambda_0)}{A(t)}\int_0^t\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n),\varphi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\varphi(\xi,\lambda_0)d\xi$$

$$-\frac{\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}\int_0^x\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\varphi(t,\lambda_n),\varphi^T(\xi,\lambda_n)\right\}\varphi(\xi,\lambda_0)d\xi$$

$$+\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\int_0^t\left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(\xi,\lambda_n)\varphi(s,\lambda_n)\right]\varphi(\xi,\lambda_0)\right\}\varphi(s,\lambda_0)d\xi ds$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}+\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\int_0^x\left(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\left[A(x)-\int_0^x\left(\varphi(\xi,\lambda_0),\varphi(\xi,\lambda_0)\right)d\xi\right]$$

$$=\delta(x-t)E-\frac{\varphi(x,\lambda_0)\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(x)A(t)}\alpha_0$$

olur. Buradan da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)+\frac{\alpha_0\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}\frac{\varphi^T(t,\lambda_0)}{A(t)}=\delta(x-t)E \qquad (4.1.24)$$

formülü elde edilir.

(4.1.20) formülünde $\lambda=\lambda_0$ için

$$\psi(x,\lambda_0)=\frac{\alpha_0\varphi(x,\lambda_0)}{A(x)}$$

olduğu elde edilir. Son eşitlik (4.1.24) formülünde yerine yazılırsa;

$$\begin{gathered}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)+\frac{1}{\alpha_0}\psi(x,\lambda_0)\psi^T(t,\lambda_0)=\delta(x-t)E\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(t,\lambda_n)=\delta(x-t)E\end{gathered} \qquad (4.1.25)$$

bulunur. Teoremin gerekliliğinin ispatının benzerinin yorumları yapılırsa

$$\alpha_n=\int_0^\pi\left(\psi(x,\lambda_n),\psi(x,\lambda_n)\right)dx \qquad (4.1.26)$$

olur. (4.1.25) ve (4.1.26) fonksiyonlarından $\{\psi(x,\lambda_n)\}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ fonksiyonlarının $L_2(0,\pi)$ de tam ortogonal sistem olduğu elde edilir.

Sonuç 4.1.1. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları ve $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ matris fonksiyonun k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ olacak şekilde (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğer ve normlaştırıcı sayıları

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k} \tag{4.1.27}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{\pi} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{4.1.28}$$

şeklinde asimptotik formüllere sahiptir. Burada $l=-(2k+1)$, $n \in \pm\overline{(s+1,\infty)}$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_{n,k}|^2 < \infty$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_{n,k}|^2 < \infty$ serileri yakınsaktır

Not 4.1.1. Eğer $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ ler l için (4.1.1)-(4.1.3) tipindeki problemin sırasıyla özdeğer ve normlaştırıcı sayıları ise, bu takdirde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ ler, $-l$ için de (4.1.1)-(4.1.3) problemin özdeğer ve normlaştırıcı sayılarıdır.

4.2. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektrum Türünden İfadesi

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y \tag{4.2.1}$$

diferansiyel denklemini ve

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0,\ y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.2.2}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0, y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \tag{4.2.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{l}{\pi - x} \\ \dfrac{l}{\pi - x} & 0 \end{pmatrix},\ y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

$0 \le \alpha \le \pi$, $0 \le \beta \le \pi$ öyleki $\alpha \ne \beta$, $Q(x)$ matris fonksiyonu $[0,\pi]$de tanımlı ve sürekli ve $l=-(2k+1)$ olsun. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$ sırasıyla (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.1), (4.2.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri olsun. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (4.2.1) denkleminin sırasıyla

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \ \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.2.4}$$

$$\psi_1(0,\lambda) = \sin\beta,\ \ \psi_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{4.2.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu takdirde (4.2.1), (4.2.2) sınır değer probleminin özfonksiyonları $\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)$ ve normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\left(\varphi_n(x),\varphi_n(x)\right)dx,\ n\in\pm\overline{(k+1,\infty)} \tag{4.2.6}$$

şeklindedir.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ spektrumuna göre $\{\alpha_n\}$ için formül bulalım.

$$f(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{4.2.7}$$

fonksiyonu verilsin. Burada $f(x,\lambda)\in L_2(0,\pi)$ dir. Bu takdirde $x\to\pi$ iken limit alınırsa

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\left|f_1^2(x,\lambda)\right|+\left|f_2^2(x,\lambda)\right|\right\}=0$$

bulunur. Burada

$$c_1+m(\lambda)c_2=0 \tag{4.2.8}$$

$$c_1=\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\psi_1^2(x,\lambda)+\psi_2^2(x,\lambda)\right\},\ c_2=\lim_{x\to\pi}(\pi-x)^{-2l}\left\{\varphi_1^2(x,\lambda)+\varphi_2^2(x,\lambda)\right\}$$

şeklindedir. (4.2.8) formülünden $m(\lambda)$ nın bir meromorf fonksiyon olduğu gözükmektedir. Dolayısıyla kutupları ve sıfırları (4.2.1), (2.2.2) ve (4.2.1), (2.2.3) probleminin sırasıyla özdeğerleri ile çakışır. Bölüm 3.4'te yapılan işlemler tekrarlanırsa

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}\left(f(x,\lambda_1),f(x,\lambda_2)\right)dx=\left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]\sin(\beta-\alpha)$$

formülü bulunur. $\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\overline{\lambda}$ olduğu durumda

$$\int_0^{\pi}\left|f(x,\lambda)\right|^2dx=\sin(\beta-\alpha)\frac{\operatorname{Im}m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \tag{4.2.9}$$

formülü elde edilir. Bu takdirde $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları yani (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.1), (4.2.3) sınır probleminin özdeğerleri çarprazlaşırlar. $m(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan

$$m(\lambda)=A\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda}{\mu_p}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{-1} \tag{4.2.10}$$

elde edilir.

Burada $'$sembolü sonsuz çarpımda $p=-k,\dots,k$ çarpanlarının bulunmadığını ifade eder ve A sabit sayıdır. Bölüm 3 teki işlemler tekrarlanırsa

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\pi}\left(f(x,\lambda),\varphi_n(x)\right)dx=\int_0^{\pi}\left\{\left(Bf'(x,\lambda),\varphi_n(x)\right)+\left(Bf(x,\lambda),\varphi_n^{'}(x)\right)\right\}dx=\sin(\alpha-\beta)$$

olur. Burada $\lambda\to\lambda_n$ için limit alınırsa

$$\alpha_n=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)} \tag{4.2.11}$$

eşitliği elde edilir. (4.2.10) formülü düzenlenirse daha sonra her iki taraftan logaritma alınırsa

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_p-\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}\right)=\sum_{p=k+1}^{\infty}\left(\frac{\mu_p-\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}+\frac{\mu_{-p}-\lambda_{-p}}{\lambda_{-p}-\lambda}\right)$$

serisi elde edilir. Bu serinin yakınsaklığı Bölüm 3 te yapılan işlemler tekrarlanırsa elde edilir. (4.2.10) formülünde cebirsel işlemler yapılırsa

$$m(\lambda)=A_1\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{\mu_p-\lambda}{\lambda_p-\lambda}\right)$$

fonksiyonu bulunur. Burada

$$A_1=A\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_p}{\mu_p}$$

şeklindedir. Bu takdirde (4.2.11) den

$$\alpha_n=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{A_1(\mu_n-\lambda_n)}\prod_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_p-\lambda_n}{\mu_p-\lambda_n} \tag{4.2.12}$$

elde edilir. İleride $A_1=-1$ olduğu ispatlanacaktır.

4.3. İki Spektruma Göre Singüler Dirac Operatörü İçin Ters Problem

Bu bölümde tekile sahip Dirac operatörü için iki spektruma göre ters problem çözümü verilmiştir.

Teorem 4.3.1. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $n\in\pm\overline{(k+1,\infty)}$ dizileri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. λ_n ve μ_n dizileri sıralıdırlar (çaprazlaşırlar).
2. α, α_1, β, β_1 sabit sayılar olmak üzere $n\to\pm\infty$ iken $\lambda_{n+k},\lambda_{n-k}$ ve μ_{n+k},μ_{n-k} sayıları için

$$\lambda_{n+k} = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n > 0$$

$$\lambda_{n-k} = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n < 0 \qquad (4.3.1)$$

ve

$$\mu_{n+k} = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n > 0$$

$$\mu_{n-k} = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n < 0 \qquad (4.3.2)$$

asimptotik formülleri sağlanır.

3. $0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le \beta \le \pi,\ \alpha \ne \beta$ dır.

Bu takdirde $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $n \in \pm\overline{(k+1,\infty)}$

$$By' + Q(x)y + Ly = \lambda y \qquad (4.3.3)$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \qquad (4.3.4)$$

$$y_1^2(\pi) + y_2^2(\pi) < \infty \qquad (4.3.5)$$

probleminin iki farklı spektrumlarıdır.

Burada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{l}{\pi - x} \\ \dfrac{l}{\pi - x} & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

İspat. Teoremi $l = -1$ için ispatlayalım. Genel durum benzer şekilde ispatlanır. Sırasıyla (4.3.1) ve (4.3.2) asimptotik formülleriyle tanımlı $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizileri verilsin. Normlaştırıcı sayıların iki spektrum türünden ifadesi olan

$$\alpha_n = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_p - \lambda_n}{\mu_p - \lambda_n} \qquad (4.3.6)$$

formülü yazılsın. Burada ' sembolü sonsuz çarpımda $p = 0, p = n$ çarpanlarının bulunmadığını ifade eder.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayıları için asimptotik formüllerden faydalanarak $\{\alpha_n\}$ sayıları için asimptotik formül bulalım. $\lambda_0 \ne \lambda_n, \mu_0 \ne \mu_n, n = \pm1, \pm2, \cdots$ olmak üzere λ_0, μ_0 sayıları ele alınsın. Bu durumda (4.3.6) formülünün $-1.$ kuvveti alınırsa

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha - \beta)} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_p - \lambda_n}{\lambda_p - \lambda_n} \frac{\lambda_0 - \lambda_n}{\mu_0 - \lambda_n}$$

olduğu elde edilir. Burada $'$sembolü sonsuz çarpımda $p = n$ sayılı terimin olmadığını ifade eder.

$$\frac{1}{b_n} = \frac{\mu_n - \lambda_n}{\sin(\alpha - \beta)} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu_p - \lambda_n}{\lambda_p - \lambda_n}$$

olacak şekilde yukarıdaki sonsuz çarpım

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n} \frac{\lambda_0 - \lambda_n}{\mu_0 - \lambda_n}$$

Şeklinde yazılır. Bölüm 3.4 de verilen

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha - \beta)\right] + O(\frac{\ln n}{n^2}) \tag{4.3.7}$$

asimptotik formülünü ele alalım. Burada $s = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\lambda_k - \mu_k + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right)$ şeklindedir ve

$\sum{}'$ sembolü toplamda $k = n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder. Bu takdirde

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n}\left(1 + \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n - \mu_0}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Özdeğerler için asimptotik formüllerden faydalanılırsa

$$\frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n - \mu_0} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n} \frac{1}{1 - \frac{\mu_0}{\lambda_n}} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{b_n}\left(1 + \frac{\mu_0 - \lambda_0}{n}\right) + O(\frac{1}{n^2})$$

şeklinde yazılabilir. Son formül ve (4.3.7) den normlaştırıcı saylar için asimptotik formül

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\left[\frac{s'}{\pi} + (\beta_1 - \alpha_1)ctg(\alpha - \beta) + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right] + O(\frac{\ln n}{n^2}) \tag{4.3.8}$$

bulunur. Burada $s' = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\lambda_k - \mu_k + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right)$ ve $'$sembolü toplamda $k = n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder. Böylece (4.3.8) formülü

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{c}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \tag{4.3.9}$$

elde edilir. Burada

$$c=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''\left(\lambda_k-\mu_k+\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)+(\beta_1-\alpha_1)ctg(\alpha-\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\pi^2}$$

şeklindedir. Tüm α_n lerin 0 dan büyük olduğunu gösterelim.

$$m_1(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_p-\lambda}{\lambda_p-\lambda} \tag{4.3.10}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Teoremin koşulundan dolayı $m_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları çaprazlaşırlar. $\lambda\to i\infty$ iken limit alınırsa

$$m_1(\lambda)\to-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \tag{4.3.11}$$

sonucu alınır. Weyl fonksiyonu tanımından

$$\frac{1}{\alpha_n}=\operatorname{Re}s\, m_1(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n} \tag{4.3.12}$$

eşitliği yazılır. Bu sebeple

$$m_1(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_1(\lambda-\lambda_p)} \tag{4.3.13}$$

olur, öyleki α_n lerin hepsi aynı işarete sahiptir.

(4.3.9) formülünde büyük p ler için $a_p>0$ olduğu elde edilir. Bu takdirde [21] den $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayılarına göre sürekli $Q(x)$ matris fonksiyonunu birebir olarak tanımlamak mümkündür. Öyleki $\{\lambda_n\}$ (4.3.3)-(4.3.5) probleminin özdeğerleridir.

$$By'+Q(x)y+Ly=\lambda y \tag{4.3.14}$$

denklemi ve

$$y_1(0)\cos\beta+y_2(0)\sin\beta=0 \tag{4.3.15}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{4.3.16}$$

sınır koşullarıyla tanımlı problemin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ özdeğer ve normlaştırıcı saylarına göre tanımlanan $\{\gamma_n\}$, $n\in\pm\overline{(1,\infty)}$ özdeğerleri olsun. Burada β sayısı (4.3.2) ile tanımlanır.

$\gamma_n=\mu_n$, $n\in\pm\overline{(1,\infty)}$ olduğunu ispatlayalım.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$

$$\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix},\ \psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\beta\\-\cos\beta\end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını sağlayan (4.3.14) denkleminin çözümleri olsun. Bu takdirde

$$m(\lambda)=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-\lambda_n}{\lambda-\gamma_n} \tag{4.3.17}$$

eşitliği ile tanımlı meromorf fonksiyon mevcuttur. Öyleki $m(\lambda)$ fonksiyonunun kutupları ve sıfırları sırasıyla $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ sayıları ile çakışır. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_n}=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n}$$

formülü bulunur. $\lambda\to i\infty$ iken (4.3.17) de limit alınırsa $m(\lambda)\to 1$ elde edilir. Bu sebeple

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda)=-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\alpha_p(\lambda_p-\lambda)} \tag{4.3.18}$$

eşitliği elde edilir. (4.3.13) ve (4.3.18) formüllerinden

$$m_1(\lambda)=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}m(\lambda) \tag{4.3.19}$$

olur ve dolayısıyla $\gamma_n=\mu_n$, $n=\pm\overline{(1,\infty)}$ elde edilir. Bununla teorem ispatlanır.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarını aynı bir denklemin farklı iki özdeğeri olabilmesi için yeterlilik koşullarını göstermiş olduk. Benzer yorumları yaparak genel durumda iki spektruma göre ters problemi tam olarak çözmek mümkündür.

Teorem 4.3.2. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayı dizilerinin (4.3.14) denkleminin (4.3.15) ve (4.3.16) sınır koşullarını sağlayan iki farklı spektrumları olması için $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ nin elamanı ve $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$ olacak biçimde aşağıdaki koşulların sağlanması gerek ve yeterdir..

1. λ_n ve μ_n dizileri sıralıdırlar(çarprazlaşır).
2. Aşağıdaki asimptotik formüller söz konusudur.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n=n-\frac{\beta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+\frac{\beta_2}{n^2}+\cdots+\frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

burada $\alpha\neq\beta,\ 0\le\beta,\ \alpha\le\pi, l=-(2k+1)$ ve her bir n için

$\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_{k,n}|^2<\infty, \sum_{-\infty}^{\infty}|\beta_{k,n}|^2<\infty, n=\pm\overline{(k+1,\infty)}$ dir.

İspat. Gerekliliğin ispatı Bölüm 3.2 den elde edilir. Yeterlilik ise Teorem 4.3.1.'in ispatı gibidir.

Not 4.3.1. Bölüm 3.2. de $\{\alpha_n\}$ lerin (4.1.28) bağıntısını sağladığı ispatlanmıştır. Bu Teoremden ise $\{\alpha_n\}$ lerin (4.3.9) bağıntısını sağladığı elde edilir. (4.1.28) ve (4.3.9) formülleri karşılaştırılırsa $A_1 = -1$ olduğu elde edilir.

5. YARI EKSENDE DIRAC SİSTEMİ İÇİN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

5.1. Problemin Tanımı

$$By' + Q(x)y = \lambda y, 0 \le x < \infty \tag{5.1.1}$$

denklemini ve

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \tag{5.1.2}$$

$$y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0 \tag{5.1.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım.

Burada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ ayrıca $Q(x)$ normalleştirilmiş matris fonksiyonunu $0 \le x < \infty$ yarı ekseninde diferansiyellenebilen fonksiyondur. Öyleki $\forall \alpha\, ve\, \beta$ $(\alpha \ne \beta)$ için (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin spektrumları ayrık tır. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sırasıyla (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerler dizisi olsun. Bu bölümde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ özdeğerlerine göre (5.1.1), (5.1.2) sınır değer probleminin spektral fonksiyonunun birebir olarak tanımlandığı gösterilecektir.

Spektral fonksiyona göre (5.1.1) Kanonik Dirac sistemi birebir tanımlandığından dolayı [3], iki farklı spektruma göre Kanonik Dirac sisteminin birebir tanımlandığı elde edilir.

5.2. $\rho(\lambda)$ -spektral fonksiyonun spektrumlar cinsinden ifadesi

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ (5.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \sin\alpha, \quad \varphi_2(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{5.2.1}$$

$$\theta_1(0,\lambda) = \sin\beta, \quad \theta_2(0,\lambda) = -\cos\beta \tag{5.2.2}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ nın sırasıyla (5.1.2) ve (5.1.3) sınır koşullarını sağladığı aşikardır. Bu sebeple $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\theta(x,\lambda_n)$ sırasıyla $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ özdeğerlerine karşılık gelen (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

Teorem 5.2.1. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ sırasıyla (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerler dizisi olsun. Bu takdirde (5.1.1), (5.1.2) sınır değer probleminin $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ ler cinsinden

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{0\le\lambda_n<\lambda}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda\ge 0\\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n<0}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda<0\end{cases} \tag{5.2.3}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha_n}=-c\frac{\lambda_n}{\mu_n}(\mu_n-\lambda_n)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{-1} \tag{5.2.4}$$

formülleri ile tanımlanır.

Burada c herhangi sabit, ' sembolü çarpımda $k=n$ nolu terimin mevcut olmadığını ifade eder.

İspat. $f(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$ fonksiyonu, (5.1.1) denkleminin çözümü olsun. Burada $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ dır.

$$f(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{5.2.5}$$

olacak şekilde $f(x,\lambda)$ fonksiyonunu seçilsin. Bölüm 4.2. de yapılan işlemler tekrarlanırsa ve $x\to\infty$ için $\overline{f^*(x,\lambda)Bf(x,\lambda)}\to 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(\lambda-\overline{\lambda})\int_0^\infty\big(f(x,\lambda),f(x,\lambda)\big)dx=\left[m(\overline{\lambda})-m(\lambda)\right]\sin(\alpha-\beta)$$

olur. Buradan

$$\int_0^\infty\big(f(x,\lambda),f(x,\lambda)\big)dx=-\frac{\operatorname{Im}m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}\sin(\alpha-\beta)$$

formülü elde edilir. (5.2.5) den (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1), (5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri sırasıyla $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları olduğu elde edilir. Dolayısıyla $m(\lambda)$ meromorf fonksiyondur. Bu sebeple $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ çaprazlaşırlar, dolayısıyla

$$m(\lambda)=c\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^{-1} \tag{5.2.6}$$

olur . Burada c sabit sayıdır.

Titchmarch çalışmasında (5.1.1), (5.1.2) probleminin $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu $m(\lambda)$ cinsinden

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{0\le\lambda_n<\lambda}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda\ge 0\\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n<0}\dfrac{1}{\alpha_n} & ,\ \lambda<0\end{cases}$$

bağıntısıyla tanımlanır, burada

$$\frac{1}{\alpha_n}=\operatorname{Re}s\, m(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n}$$

şeklindedir. Sonuncu formülden, (5.2.6) eşitliğinden aranan (5.2.3) formülü kolaylıkla elde edilir.

Not 5.2.1 Teorem 5.2.1, (5.1.1), (5.1.2) probleminin spektral fonksiyonu c sabit farkıyla iki spektruma göre hesaplandığını mümkün kılar.

Teorem 5.2.2. $\rho_1(\lambda)$ ve $\rho_2(\lambda)$ spektral fonksiyonları birbirinden sabit c çarpanı kadar farklı olduğunda yani $\rho_1(\lambda)=c\rho_2(\lambda)$ ise ve bunlar Dirac sistemiyle oluşan sınır problemlerinin spektral fonksiyonları olduğunda $c=1$ dir.

İspat.

$$\rho_1(\lambda)-\rho_1(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)$$

$$\rho_2(\lambda)-\rho_2(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)$$

buradan

$$\rho_1(\lambda)-\rho_1(-\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)=c\left[\rho_2(\lambda)-\rho_2(-\lambda)\right]=c\left[\frac{2}{\pi}\lambda+O(1)\right]$$

elde eldir. Dolayısıyla $c=1$ olur.

Bu teoremden görüldüğü gibi $\rho(\lambda)$ nın tanımındaki sabit sayısı belirli durumlarda $\rho(\lambda)$ için asimptotik formüllerden hesaplanabilir. Not etmek gerekir ki c sabitinin kesin ifadesi bize gerekmez.

5.3. Spektrumun Ayrıklığı İçin Yeterlilik Şartları

Bu bölümde Dirac sisteminin spektrumunun diskret olacağı durumlar incelenecektir. Bununla ilgili birçok çalışma ithaf edilmiştir. Fakat bu çalışmalarda sistem kanonik şekilde ele alındığı için elde edilen sonuçlar daha az kullanılmaktadır.

Teorem 5.3.1 $Q(x)$ matris fonksiyonu sürekli türeve sahip olsun. Bu takdirde (5.1.1), (5.1.2) probleminin ayrık spektrum'a sahip olması için

$$\lim_{x\to\infty}\int_{x}^{x+k}\left\{p^2+q^2-(p'^2-q'^2)^{\frac{1}{2}}\right\}dt=\infty \tag{5.3.1}$$

bağıntısının sağlanması yeterlidir.

İspat. (5.1.1) denklemi (5.1.2) sınır koşullarıyla oluşan operatörü L ile gösterelim. Bu takdirde L^2 operatörü

$$-y''+(Q^2+BQ^1)y=\lambda^2 y \tag{5.3.2}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0$$

$$\left\{y_2'(0)+p(0)y_1(0)+q(0)y_2(0)\right\}\cos\alpha+\left\{-y_1'(0)+q(0)y_1(0)-p(0)y_2(0)\right\}\sin\alpha=0$$

sınır koşullarıyla oluşur. L^2 operatörünün diskretliği L operatörünün spektrumunun diskretliğin den elde edilir. Q^2+BQ^1 matrisine karşılık gelen en küçük özdeger $\mu(x)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty}\int_{x}^{x+k}\mu(x)dx=\infty \tag{5.3.3}$$

şeklindedir.

Basit hesaplamalardan sonra $\mu(x)=p^2+q^2-(p'^2-q'^2)^{\frac{1}{2}}$ elde edilir. Bu sebeple (5.3.3) koşulundan (5.3.1) elde edilir. Dolayısıyla L^2 operatörü ve doğal olarak L operatörünün diskret spektruma sahiptir.

Sonuç 5.3.1. $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlar olduğunda (5.1.1), (5.1.2) problemi ayrık spektrumuna sahiptir.

6. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN KISMEN ÇAKIŞMAYAN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

6.1. $K(x,s)$ Matris Fonksiyonunun Genel Dejenereliği

$$By'+Q(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}y=\lambda y, 0<x\le\pi \tag{6.1.1}$$

denklemini ve

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.2}$$

$$y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{6.1.3}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım. Burada

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\ y(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

ve H reel sayıdır.

Bu problemin $y_1(0)=0,\ y_2(0)=-1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$\begin{aligned}y_1(x,\lambda)&=\sin\lambda x+\int_0^x\left[-p(s)y_1(s)-q(s)y_2(s)+\frac{y_2(s)}{s}\right]\sin\lambda(s-x)ds\\&+\int_0^x\left[q(s)y_1(s)-p(s)y_2(s)-\frac{y_1(s)}{s}\right]\cos\lambda(s-x)ds\\y_2(x,\lambda)&=-\cos\lambda x+\int_0^x\left[-p(s)y_1(s)-q(s)y_2(s)+\frac{y_2(s)}{s}\right]\cos\lambda(s-x)ds\\&+\int_0^x\left[q(s)y_1(s)-p(s)y_2(s)-\frac{y_1(s)}{s}\right]\sin\lambda(s-x)ds\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\frac{y_1(s)}{s}\in C[0,\pi],\ \frac{y_2(s)}{s}\in C[0,\pi]$ dır.

Bu özfonksiyonlar (6.1.3) te yerine yazılırsa ve Bölüm 3.2 de yapılan işlemler tekrarlanırsa özdeğerler için asimptotik formül

$$\lambda_n=n+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{H}+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{6.1.4}$$

şeklinde elde edilir.

(6.1.1) denkleminin $Q(x)=0$ olduğu durumda, $y_{01}(0)=0,\ y_{02}(0)=-1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$y_{01}(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x \frac{y_2(s)}{s}\sin\lambda(s-x)ds-\int_0^x \frac{y_1(s)}{s}\cos\lambda(s-x)ds \qquad (6.1.5)$$

$$y_{02}(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x \frac{y_2(s)}{s}\cos\lambda(s-x)ds-\int_0^x \frac{y_1(s)}{s}\sin\lambda(s-x)ds \qquad (6.1.6)$$

şeklindedir. O halde bu özfonksiyonlar büyük λ lar için

$$y_{01}(x,\lambda)=\sin\lambda x+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.7)$$

$$y_{02}(x,\lambda)=-\cos\lambda x+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.8)$$

şeklinde yazılır. Burada $\tau=|\operatorname{Im}\lambda|$ dır.

Perturbe olmuş (6.1.1) denklemi ile perturbe olmamış yani $Q(x)=0$ olduğu durumda olan denklem arasında

$$y(x,\lambda)=y_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,s)y_0(s,\lambda)dt \qquad (6.1.9)$$

bağıntısı vardır. Burada $y_0(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_{01}(x,\lambda) \\ y_{02}(x,\lambda)\end{pmatrix}$ fonksiyonu $Q(x)=0$ olduğu durumdaki çözüm fonksiyonudur ve $K(x,s)=\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\end{pmatrix}$ çekirdek fonksiyonudur.

(6.1.9) eşitliğinde $y(x,\lambda)$, $y_0(x,\lambda)$, $K(x,s)$ ifadeleri yerine yazılıp düzenlenirse

$$y_1(x,\lambda)=\sin\lambda x+\int_0^x \left[K_{11}(x,s)\sin\lambda t-K_{12}(x,s)\cos\lambda s\right]ds+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.10)$$

$$y_2(x,\lambda)=-\cos\lambda x+\int_0^x \left[K_{21}(x,s)\sin\lambda s-K_{22}(x,s)\cos\lambda s\right]ds+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \qquad (6.1.11)$$

formülleri elde edilir.

$y(x,\lambda)$ vektör fonksiyon, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$, $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar ve H reel sayı olmak üzere, (I)problemini

$$By'+Q(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}y=\lambda y,\ 0<x\le\pi \tag{6.1.12}$$

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.13}$$

$$y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{6.1.14}$$

şeklinde ele alalım. (I) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. (6.1.12), (6.1.13) ve

$$y_2(\pi)+H_1y_1(\pi)=0 \tag{6.1.15}$$

koşulu ile birlikte tanımlı olan (II) probleminin özdeğerleri $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun.

Benzer şekilde $\widetilde{Q}(x)=\begin{pmatrix}\widetilde{p}(x)&\widetilde{q}(x)\\\widetilde{q}(x)&-\widetilde{p}(x)\end{pmatrix}$, $\widetilde{p}(x)$ ve $\widetilde{q}(x)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, $\widetilde{H}$, H dan farklı reel sayı olmak üzere, (III) problemi

$$By'+\widetilde{Q}(x)y-\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}y=\lambda y,0<x\le\pi \tag{6.1.16}$$

$$y_1(0)=0 \tag{6.1.17}$$

$$y_2(\pi)+\widetilde{H}y_1(\pi)=0 \tag{6.1.18}$$

şeklinde ele alınsın. (III) probleminin özdeğerleri $\left\{\widetilde{\lambda}_n\right\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. (6.1.16), (6.1.17) ve

$$y_2(\pi)+\widetilde{H}_1y_1(\pi)=0 \tag{6.1.19}$$

koşulu ile birlikte tanımlı olan (IV) probleminin özdeğerleri $\left\{\widetilde{\mu}_n\right\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun.

Aşağıdaki teorem söz konusudur.

Teorem 6.1.1. (I), (II), (III) ve (IV) problemlerinin özdeğerleri sırası ile $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\left\{\widetilde{\lambda}_n\right\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\left\{\widetilde{\mu}_n\right\}_{-\infty}^{\infty}$ $\left(n\in\overline{-\infty,\infty}\right)$ olsun. Bu takdirde;

1. $\lambda_n\equiv\widetilde{\lambda}_n$ tüm n ler için çakışır.
2. $\mu_n\ne\widetilde{\mu}_n$, $n=0,1,2,\ldots,\mathbb{N}$ ve $\mu_n\equiv\widetilde{\mu}_n$, $\{n\in\mathbb{Z}-\{0,\mathbb{N}\}\}$.
3. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\widetilde{\mu}_n\}$ özdeğerleri çaprazlaşırlar.

koşulları sağlanacak biçimde

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+\int_0^x K(x,s)\varphi(t,\lambda)dt \tag{6.1.20}$$

bağıntısında bulunan $K(x,s)$ çekirdek fonksiyonu genel dejeneredir.

İspat. (6.1.20) dönüşüm operatörü

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_1(x,\lambda) \\ \widetilde{\varphi}_2(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(s,\lambda) \\ \varphi_2(s,\lambda) \end{pmatrix} ds$$

veya

$$\widetilde{\varphi}_1(x,\lambda) = \varphi_1(x,\lambda) + \int_0^x \{K_{11}(x,s)\varphi_1(s,\lambda) + K_{12}(x,s)\varphi_2(s,\lambda)\}\, ds \tag{6.1.21}$$

$$\widetilde{\varphi}_2(x,\lambda) = \varphi_2(x,\lambda) + \int_0^x \{K_{21}(x,s)\varphi_1(s,\lambda) + K_{22}(x,s)\varphi_2(s,\lambda)\}\, ds \tag{6.1.22}$$

şeklinde yazılabilir. (6.1.21) bağıntısı $\widetilde{H}$ ile çarpılıp daha sonra (6.1.22) eşitliği ile toplanırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_2(x,\lambda) + \widetilde{H}\widetilde{\varphi}_1(x,\lambda) &= \varphi_2(x,\lambda) + H\varphi_1(x,\lambda) \\ &+ \int_0^x \Big[\Big\{K_{21}(x,s) + \widetilde{H}K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\lambda) + \Big\{K_{22}(x,s) + \widetilde{H}K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\lambda)\Big] ds \end{aligned} \tag{6.1.23}$$

formülü elde edilir.

Son ifadede $x = \pi$, $\lambda = \lambda_n$ alıp (I) ve (II) problemlerinin spektrumları için verilen (6.1.14) ve (6.1.15) koşullarından faydalanılırsa ve $\lambda_n \equiv \widetilde{\lambda}_n$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 = \Big(\widetilde{H} - H\Big)\varphi_1(\pi,\lambda_n) + \int_0^\pi \Big[\Big\{K_{21}(\pi,s) + \widetilde{H}K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\lambda_n) \\ + \Big\{K_{22}(\pi,s) + \widetilde{H}K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\lambda_n)\Big] ds \end{aligned}$$

bulunur. (6.1.10) formülünde $n \to \infty$ için limit alınırsa $\varphi_1(\pi,\lambda_n) \to (-1)^n \sin(\arctan\frac{1}{H})$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0' a gider. Dolayısıyla

$$\Big(\widetilde{H} - H\Big) = 0 \tag{6.1.24}$$

ve

$$\int_0^\pi \Big[\Big\{K_{21}(\pi,s) + \widetilde{H}K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\lambda_n) + \Big\{K_{22}(\pi,s) + \widetilde{H}K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\lambda_n)\Big] ds = 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{6.1.25}$$

formülleri bulunur. $\varphi(x,\lambda_n)$ özvektör fonksiyonlarının tamlığından

$$K_{21}(\pi,s) + \widetilde{H}K_{11}(\pi,s) = 0 \tag{6.1.26}$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{12}(\pi,s)=0 \tag{6.1.27}$$

elde edilir.

Şimdi ikinci spektrum için benzer işlemler yapalım. (6.1.21) eşitliği $\widetilde{H}_1$ ile çarpılıp daha sonra (6.1.22) eşitliği ile toplanırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)+\widetilde{H}_1\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)&=\varphi_2(x,\lambda)+H_1\varphi_1(x,\lambda)\\&+\int_0^x\Big[\Big\{K_{21}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\lambda)+\Big\{K_{22}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\lambda)\Big]ds\end{aligned} \tag{6.1.28}$$

formülü bulunur.

Son ifadede $x=\pi,\ \lambda=\mu_n,\ n>\mathbb{N}$ alıp (III) ve (IV) problemlerinin spektrumları için verilen (6.1.18) ve (6.1.19) koşullarından faydalanılırsa ve $\mu_n\equiv\tilde{\mu}_n,\ \{n\in\mathbb{Z}-\{0,\mathbb{N}\}\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}0=\Big(\widetilde{H}_1-H_1\Big)\varphi_1(\pi,\mu_n)&+\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)\\&+\Big\{K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds\end{aligned}$$

yazılır. (6.1.10) formülünden $n\to\infty$ için limit alınırsa $\varphi_1(\pi,\mu_n)\to(-1)^n\sin(\arctan\frac{1}{H})$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0 a gider. Dolayısıyla

$$\Big(\widetilde{H}_1-H_1\Big)=0 \tag{6.1.29}$$

ve

$$\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)+\Big\{K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(\pi,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds=0,\ n\in\mathbb{N} \tag{6.1.30}$$

formülleri elde edilir.

Şimdi ise benzer işlemleri $\mu_n\neq\tilde{\mu}_n,\ n=0,1,2,\ldots,\mathbb{N}$ olduğu durumda yapılsın. $x=\pi,\ \lambda=\mu_n,\ n=0,1,\cdots,N$ alınırsa (6.1.28) ve (6.1.29) formüllerinden

$$\tilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\tilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)=\int_0^\pi\Big[\Big\{K_{21}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(x,s)\Big\}\varphi_1(s,\mu_n)+\Big\{K_{22}(x,s)+\widetilde{H}_1K_{12}(x,s)\Big\}\varphi_2(s,\mu_n)\Big]ds \tag{6.1.31}$$

elde edilir. (6.1.30) ve (6.1.31) formüllerinden

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1K_{11}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\tilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\tilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\|\varphi(s,\mu_n)\|^2}\varphi_1(s,\mu_n) \tag{6.1.32}$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1 K_{12}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\left\|\varphi(s,\mu_n)\right\|^2}\varphi_2(s,\mu_n) \qquad (6.1.33)$$

bağıntıları elde edilir.

Burada

$$\left\|\varphi(s,\mu_n)\right\|^2=\alpha_n=\int_0^{\pi}\left\{\varphi_1^2(s,\mu_n)+\varphi_2^2(s,\mu_n)\right\}ds$$

olacak şekilde

$$\tau_n=\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\left\|\varphi(s,\mu_n)\right\|^2}$$

eşitliği verilsin. Böylece $K_{ij}(\pi,s),\ i,j=1,2$ fonksiyonlarını tanımlamak için

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{11}(\pi,s)=0$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}K_{12}(\pi,s)=0$$

$$K_{21}(\pi,s)+\widetilde{H}_1 K_{11}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{22}(\pi,s)+\widetilde{H}_1 K_{12}(\pi,s)=\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

denklemler sistemi elde edilir. Yukarıdaki denklem sistemini $K_{ij}(\pi,s),(i,j=1,2)$ e göre çözülürse

$$K_{11}(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{12}(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

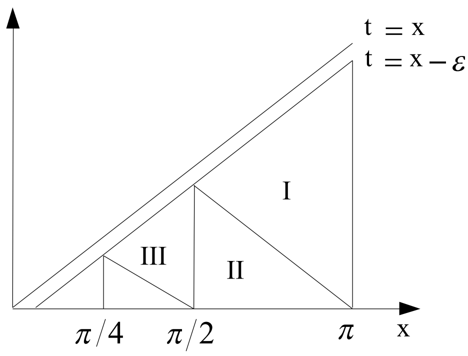
$$K_{21}(\pi,s)=-\frac{\widetilde{H}}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_1(s,\mu_n)$$

$$K_{22}(\pi,s)=-\frac{\widetilde{H}}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\varphi_2(s,\mu_n)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$K(\pi,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\tau_n\begin{pmatrix}\varphi_1(s,\mu_n) & \varphi_2(s,\mu_n)\\ -\widetilde{H}_1\varphi_1(s,\mu_n) & -\widetilde{H}\varphi_2(s,\mu_n)\end{pmatrix} \qquad (6.1.34)$$

şeklindedir. $K(x,s)$ fonksiyonu birinci mertebeden hiperbolik denklemler sistemini sağladığı için (6.1.34) koşulu birlikte OAB üçgeninin tamamında birebir olarak tanımlanır.



Şekil 6.1.1 OAB üçgeninin tamamında $K(x,s)$ fonksiyonunun görüntüsü

Bu sebeple OAB üçgeninin tamamında $K(x,s)$ fonksiyonunun görüntüsü

$$K(x,s)=\frac{1}{\widetilde{H}_1-\widetilde{H}}\sum_{n=0}^{N}\frac{\widetilde{\varphi}_2(\pi,\mu_n)+\widetilde{H}_1\widetilde{\varphi}_1(\pi,\mu_n)}{\left\|\varphi(s,\mu_n)\right\|^2}\times\left[\theta(x,\mu_n)-\widetilde{H}\chi(x,\mu_n)\right]\varphi^T(s,\mu_n) \qquad (6.1.35)$$

şeklindedir. Burada

$$\theta(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\theta_1(x,\lambda)\\ \theta_2(x,\lambda)\end{pmatrix},\quad \chi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\chi_1(x,\lambda)\\ \chi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

denklemin

$$\theta_1(\pi,\lambda)=\chi_2(\pi,\lambda)=1,\quad \theta_2(\pi,\lambda)=\chi_1(\pi,\lambda)=0$$

koşullarını sağlayan çözümleridir. $\varphi^T(s,\lambda)$ ise transpozu alınmış vektör fonksiyonudur.

7. SİNGÜLER DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

7.1. Farklı potansiyellere sahip singüler Dirac operatörü için kararlılık problemi

$p_i(x)$ ve $q_i(x)$ $(i=1,2)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ve

$$Q_1(x)=\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix},\quad Q_2(x)=\begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\pi-x} \\ -\dfrac{1}{\pi-x} & 0 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$By'+Q_1(x)y+L(x)y=\lambda y, 0\le x<\pi \tag{7.1.1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{7.1.2}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{7.1.3}$$

sınır değer problemi ele alınsın. (7.1.1) probleminin $\psi_1(0,\lambda)=\sin\alpha$, $\psi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda)\\ \psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ile gösterilsin. Bu problemin spektral karakteristikleri $\{\lambda_n,\rho_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. Bu karakteristikler (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar) sırasıyla aşağıdaki asimptotik formülleri sağlarlar.

$$\lambda_n=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\cdots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{k,n}}{n^k} \tag{7.1.4}$$

$$\rho_n=\pi+\frac{c_1}{n}+\cdots+\frac{c_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{c_{n,k}}{n^k} \tag{7.1.5}$$

Benzer şekilde (7.1.1) in pertürbesi olan aşağıdaki sınır değer problemi

$$By'+Q_2(x)y+Ly=\mu y, 0\le x<\pi \tag{7.1.6}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \tag{7.1.7}$$

$$y_1^2(\pi)+y_2^2(\pi)<\infty \tag{7.1.8}$$

ele alınsın. (7.1.6) probleminin $\varphi_1(0,\lambda)=\sin\alpha$, $\varphi_2(0,\lambda)=-\cos\alpha$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ile gösterilsin. Bu problemin spektral karakteristikleri $\{\mu_n,\sigma_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. Bu karakteristikler (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar) sırasıyla aşağıdaki asimptotik formülleri sağlarlar.

$$\mu_n = n - \frac{\alpha'}{\pi} + \frac{\alpha_1'}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}'}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k,n}'}{n^k} \tag{7.1.9}$$

$$\sigma_n = \pi + \frac{c_1'}{n} + \cdots + \frac{c_{k-1}'}{n^{k-1}} + \frac{c_{n,k}'}{n^k} \tag{7.1.10}$$

Ayrıca

$$F(x,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sigma_n} \psi(x,\mu_n)\psi^T(s,\mu_n) - \frac{1}{\rho_n} \psi(x,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n) \right\}$$

olmak üzere;

$$K(x,s) + F(x,s) + \int_0^x K(x,t)F(t,s)dt = 0 \quad (0 \le s \le x \le \pi)$$

esas integral denklemini sağlayan bir tek $K(x,s)$ matris fonksiyonu vardır. Burada $K(x,s)$ matris fonksiyonu

$$BK(x,x) - K(x,x)B = Q_1(x) - Q_2(x) \tag{7.1.11}$$

koşulunu sağlar.

Teorem 7.1. Eğer $A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right]$ yeterince küçük ise

$$\max_{0 \le x < \pi} |p_1(x) - p_2(x)| \le C'A$$
$$\max_{0 \le x < \pi} |q_1(x) - q_2(x)| \le C''A$$

dır. Burada $C' > 0$ ve $C'' > 0$ sabit sayılardır.

İspat.

$$K(x,s) + F(x,s) + \int_0^x K(x,t)F(t,s)dt = 0 \quad (0 \le s \le x \le \pi)$$

integral denklemi göz önüne alınsın. Burada $F(x,s)$ bilinen fonksiyondur. Bu integral denklemini çözelim.

$$F^{(1)}(x,s) = F(x,s)$$

olmak üzere

$$F^{(n+1)}(s,t;x) = \int_0^x F(s,u)F^{(n)}(u,t;x)du, \ n \ge 1 \tag{7.1.12}$$

itere fonksiyonları yazılabilir. Burada $K(x,s)$ matris fonksiyonu

$$K(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F^{(n)}(s,t;x) \qquad (7.1.13)$$

dir. $F(x,s)$ fonksiyonun da düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
F(x,s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\psi(x,\mu_n)\psi^T(s,\mu_n)-\frac{1}{\rho_n}\psi(x,\lambda_n)\psi^T(s,\lambda_n)\right\}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_n}\begin{pmatrix}\psi_1(x,\mu_n)\\ \psi_2(x,\mu_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(s,\mu_n) & \psi_1(s,\mu_n)\end{pmatrix}-\frac{1}{\rho_n}\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda_n)\\ \psi_2(x,\lambda_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(s,\lambda_n) & \psi_1(s,\lambda_n)\end{pmatrix}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\begin{Bmatrix}\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n} & \frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\\ \frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n} & \frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

(7.1.14)

olur. Burada $F(x,s)$ fonksiyonunun matris gösterimi

$$F(x,s)=\begin{pmatrix}F_{11}(x,s) & F_{12}(x,s)\\ F_{21}(x,s) & F_{22}(x,s)\end{pmatrix} \qquad (7.1.15)$$

şeklindedir. O halde (7.1.14) den

$$F_{11}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \qquad (7.1.16)$$

$$F_{12}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \qquad (7.1.17)$$

$$F_{21}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \qquad (7.1.18)$$

$$F_{22}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_2(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_2(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right] \qquad (7.1.19)$$

yazılır.

Önce $F_{11}(x,s)$ formülü hesaplansın. (7.1.16) nin sağ tarafına $\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa

$$F_{11}(x,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_1(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\rho_n}+\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)}{\sigma_n}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)\psi_1(x,\lambda_n)\psi_1(s,\lambda_n)+\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\left(\psi_1(x,\mu)\psi_1(s,\mu)\right)'d\lambda\right]$$

elde edilir. Burada $'=\dfrac{d}{d\lambda}$. $-1\le\cos x\le 1,\ -1\le\sin x\le 1,\ 0\le x<\pi$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)c_1\right|+\left|\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_2\,d\lambda\right|\right]$$

$$\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\rho_n-\sigma_n\right)c_3\right|+\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_4\,d\lambda\right|\right]$$

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le C_1\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$$

elde edilir. $A\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$ olduğundan

$$\left|F_{11}(x,s)\right|\le C_1A \tag{7.1.20}$$

bulunur. (7.1.12) den

$$F_{11}^{(n+1)}(s,t;x)=\int_0^x F_{11}(s,u)F_{11}^{(n)}(u,t;x)\,du,\ \ n\ge 1 \tag{7.1.21}$$

olur buradan

$$F_{11}^{(2)}(s,t;x)=\int_0^x F_{11}(s,u)F_{11}(u,t;x)\,du$$

elde edilir. $0\le x<\pi$ olduğundan

$$\left|F_{11}^{(2)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^2}{\pi}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\left|F_{11}^{(3)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^3}{\pi}$$

$$\vdots\qquad = \qquad\vdots$$

$$\left|F_{11}^{(n)}(s,t;x)\right|\le\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}$$

elde edilir. (7.1.13) eşitliğinden

$$K_{11}(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F_{11}^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.22}$$

yazılabilir. (7.1.22) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\left|K_{11}(x,x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}\right|$$

olur. $C_1A\pi\le\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left|K_{11}(x,x)\right|&\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(C_1A\pi\right)^n}{\pi}=C_1A+\pi(C_1A)^2+\pi^2(C_1A)^3+\ldots\\&\le C_1A\left(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots\right)\\&\le 2C_1A\end{aligned} \tag{7.1.23}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}F_{12}(x,s)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\psi_1(x,\mu_n)\psi_2(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\rho_n}+\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\sigma_n}-\frac{\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)}{\sigma_n}\right]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)\psi_1(x,\lambda_n)\psi_2(s,\lambda_n)+\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\left(\psi_1(x,\mu)\psi_2(s,\mu)\right)'d\lambda\right]\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\left|F_{12}(x,s)\right|&\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{\rho_n}\right)c_5\right|+\left|\frac{1}{\sigma_n}\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_6d\lambda\right|\right]\\&\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\left(\rho_n-\sigma_n\right)c_7\right|+\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n}c_8d\lambda\right|\right]\end{aligned}$$

$$\left|F_{12}(x,s)\right|\le C_2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$$

elde edilir. $A\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]$ olduğundan yukarıdaki işlemlerin benzerleri yapılırsa

$$\left|F_{12}(x,s)\right|\le C_2A \tag{7.1.24}$$

elde edilir. (7.1.12) den

$$F_{12}^{(n+1)}(s,t;x)=\int_0^x F_{12}(s,u)F_{12}^{(n)}(u,t;x)du,\ \ n\geq 1 \tag{7.1.25}$$

olup buradan

$$F_{12}^{(2)}(s,t;x)=\int_0^x F_{12}(s,u)F_{12}(u,t;x)du$$

elde edilir. $0\leq x<\pi$ olduğundan

$$\left|F_{12}^{(2)}(s,t;x)\right|\leq \left(C_2A\right)^2\pi$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\begin{aligned} F_{12}^{(3)}(s,t;x) &\leq \frac{\left(C_2A\pi\right)^3}{\pi} \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ F_{12}^{(n)}(s,t;x) &\leq \frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi} \end{aligned}$$

elde edilir. (7.1.13) eşitliğinden

$$K_{12}(s,t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F_{12}^{(n)}(s,t;x) \tag{7.1.26}$$

yazılabilir. (7.1.22) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\left|K_{12}(x,x)\right|\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}\right|$$

olur. Burada $C_2A\pi\leq\dfrac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} \left|K_{12}(x,x)\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(C_2A\pi\right)^n}{\pi}=C_2A+\pi(C_2A)^2+\pi^2(C_2A)^3+\ldots \\ &\leq C_2A\left(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots\right) \\ &\leq 2C_2A \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\left|K_{21}(x,x)\right|\leq 2C_3A \tag{7.1.27}$$

$$\left|K_{22}(x,x)\right|\leq 2C_4A \tag{7.1.28}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Diğer taraftan

$$BK(x,x)-K(x,x)B=Q_1(x)-Q_2(x)$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{11}(x,x) & K_{12}(x,x)\\ K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}K_{11}(x,x) & K_{12}(x,x)\\ K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x)\\ K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x)-K_{21}(x,x)\end{pmatrix}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{pmatrix}K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x)\\ K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x)-K_{21}(x,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1(x)-p_2(x) & q_1(x)-q_2(x)\\ q_1(x)-q_2(x) & p_2(x)-p_1(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan da

$$q_1(x)-q_2(x)=K_{22}(x,x)-K_{11}(x,x) \tag{7.1.29}$$

$$p_1(x)-p_2(x)=K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \tag{7.1.30}$$

bulunur. (7.1.29) ve (7.1.30) denklemleri ve (7.1.23), (7.1.26), (7.1.27) ve (7.1.28) eşitsizliklerinden

$$\left|p_1(x)-p_2(x)\right|\le C'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C'A$$

$$\left|q_1(x)-q_2(x)\right|\le C''\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C''A$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler $[0,\pi)$ aralığında bulunan tüm x değerleri için sağlandığından

$$\max_{0\le x<\pi}\left|p_1(x)-p_2(x)\right|\le C'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C'A$$

$$\max_{0\le x<\pi}\left|q_1(x)-q_2(x)\right|\le C''\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\sigma_n-\rho_n\right|+\left|\mu_n-\lambda_n\right|\right]\equiv C''A$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] **Ambartsumyan, V.A.,** 1929, *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Z. Physik, 53, 690-695.

[2] **Borg, G.,** 1945, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta Math., 78, 1-96.

[3] **Levinson, N.,** 1949, *The Inverse Sturm- Liouville Problem,* Mat. Tidsskr. B., pp.25-30.

[4] **Levinson, N.,** 1949, *Criteria fort he Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators*, Casopis. Pest. Mat. Fys., 74, 17-20.

[5] **Delsarte, J.,** 1938, *Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Linearies Aux Derivees Partielles du Second Ordre*, C. R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182.

[6] **Delsarte, J. and Lions, J.,** 1957, *Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe*, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128.

[7] **Levitan, B.M.,** 1964, *Generalized Translation Operators and some of its Applications,* Jerusalem.

[8] **Povzner, A.V.,** 1948, *On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis*, *Mat. Sb.,* 23.

[9] **Tichkonov, A.N.,** 1949, *Uniqueness Theorem for Jeophysics Problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 69, No:4, 797-800.

[10] **Marchenko, V.A.,** 1950, *Some Problems in the Theory of Second–Order Differantial Operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 72, 457-560.

[11] **Krein, M.G.,** 1951, *Solution of the Inverse Sturm-Liouville problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR,76, 21-24.

[12] **Krein, M.G.,** 1954, *On a Method of the Effective Solution of an Inverse BoundaryValue Problem,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 95, 767-770.

[13] **Gelfand, I.M. and Levitan, B.M.,** 1951, *On the Determination of a DifferentialEquations by its Spectral Function,* Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math., 15, 309-360.

[14] **Levitan, B.M. and Gasymov, M.G.,** 1964, *Determination of a Differential Equations by two its Spectra*, Russian Math Surveys, 19, 1-63.

[15] **Cardner, G., Green, J., Kruskal, M. and Miura, M.,** 1967, *A Method for Solvingthe Korteweg-De Vries Equation*, Phys. Rev. Lett., v. 19, 1095-1098.

[16] **Lax, P.,** 1968. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, *Comm. Pure and Appl. Math.*, v .21,467-490.

[17] **Faddeev, L.D.,** 1964, *Properties of the S-Matrix of the One-Dimensional Schrödinger Equation trudy* Mat. Inst. Steklow, 73, 314-336.

[18] **Prats, F. and Toll, J.,** 1959, *Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States*, Phys. Rew., 113, (1), 363-370.

[19] **Moses, H.E.,** 1957, *Calculation of the Scattering Potential for One-DimensionalDirac Equation from Reflection Coefficient and Point Eigenvalues*, Bull. Amer. Phys. Soc., 4, 240.

[20] **Gasymov, M.G. and Levitan, B.M.,** 1966, *The Inverse Problem for the Dirac System*, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.

[21] **Gasymov, M.G. and Dzhabiev T.T.,** 1955, *On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator,* Baku- ELM., *46-71.*

[22] **Sargsjan, I.S.,** 1966a, *A Theorem of the Completeness of the Eigenfunctions of the Generalized Dirac System,* Dokl., Akad. Nauk. Arm. SSR, 42, (2), 77-82.

[23] **Sargsjan, I.S.,** 1966b, *Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional DiracSystem,* Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat., 1, (6), 392-436.

[24] **Quigg, C., Rosner, J.L. and Thacker, H.B.,** 1978, Inverse Scattering Problem for Quarkonium Systems, I and II Phys. Rev., D 18, No: 1, 274-295.

[25] **Grosse, H. and Martin, A.,** 1979, *Theory of the Inverse Problem for ConfiningPotentials*, Nuclear Phys., B 14 B, 413-432.

[26] **Abdukadyrov, E.,** 1967, *Computation of the Regularizad Trace for a Dirac System,* Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh., 22, (4), 17-24.

[27] **Khasanov, A.B.,** 1994, *On Eigenvalues of the Dirac Operator Located on the Continuous Spectrum*, Theory and Math. Phys. V.99, No: 1, 20-26.

[28] **Gasymov, M.G.,** 1967, *The Inserve Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order 2n*, Soviet Physics Dokl. 11, 676-678.

[29] **Veliev, S.G.,** 1972, *Inverse Problem for the Dirac systems a the Whole Axis*, DEP. VINITI, 4917-4972.

[30] **Maksudov, F.G. and Veliev, S.G.,** 1975, *The Inverse Scattering Problem for the Nonself-Adjoint Dirac Operator on the Whole Axis*, Soviet Math. Dokl. V. 16, No: 6, 1629-1633.

[31] **Roos, B.W. and Sangren, W.C.,** 1961, *Spectra for a Pair Singular First OrderDifferential Equations*, Proc. Amer. Math. Soc., V. 12, 468-476.

[32] **Harris, B.J.,** 1983, *Bounds for the Eigenvalues of Separated Dirac Operators*, Proc. of Royal Society of Edinburgh, 95 A, 341-366.

[33] **Evans, W.D. and Harris, B.J.,** 1980, *Bounds for the Point Spectra of Separated Dirac Operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect., A 88, 1-15.

[34] **Otelbayev, M.O.,** 1973, *Distribution of the Eigenvalues of the Dirac Operator*, Mat. Zametki, 14, 843-852.

[35] **Martynov, V.V.,** 1965, *Conditions of Discreteness and Countinuity of the Spectrumin the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Differential Equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165, 996-999.

[34] **Nabiev, I.M.,** 2003, *On reconstruction of Dirac operator on the segment*, Proceedingof IMM of Nas of Azerbaijan, 18, 97-102.

[35] **Kerimov N.B.,** 2002, *A boundary value problem for the Dirac system with a spectralparameter in the boundary conditions*, Differ. Equ. 38 (2), 164-174.

[36] **Agranovich M.S.,** 2001, *Spectral problems for the Dirac system with spectralparameter in local boundary conditions,* Funct. Anal. Appl. 35, 161-175.

[37] **Arutyunyan, T.N.,** 2008, *Transformation operators for the canonical Dirac system*, Differ. Uravn. 44, 1011-1021.

[38] **Amirov R. Kh. Keskin B. and Ozkan A. S.,** 2009, *Direct and inverse problems for the Dirac operator with a spectral parameter linear contained in a boundarycondition*, Ukrainian Math. J. 61, 1365-1379.

[39] **Yang C.F.,** 2011, *Hochstadt-Lieberman theorem for Dirac operator with igenparameter dependent boundary conditions*, Nonlinear Anal., 74, 2475-2484.

[40] **Panakhov, E.S.,** 1981, *Inverse problem for Dirac system in two partially settled spectrum*, VINITY 3304, 1-29.

[41] **Hryniv R.O. and Mykytyuk Ya.V.,** 2003, *Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Inverse problems, 19, 665-684.

[42] **Savchuk A.M. and Shkalikov A.A.,** 1999, *Sturm-Liouville operators with singularpotentials*, Mat. Zametki, 66, 897-912.

[43] **Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R. and Holden H.,** 1988, *Solvable Modelsin Quantum Mechanics*, New York.

[44] **Albeverio S. and Kurasov P.,** 2000, *Singular Perturbations of Differential Operators, Solvable Schrödinger Type Operators*.

[45] **Savchuk A.M.,** 2001, *On eigenvalues and eigenfunctions of Sturm-Liouvilleoperators with singular potentials*, Mat. Zametki, 69, 277-285.

[46] **Hryniv R.O. and Mykytyuk Ya.V.,** 2003, *Transformation operators for Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Math. Phys. Anal. Geom.

[47] **Pöschel J. and Trubowitz E.,** 1987, *Inverse spectral theory*, Pure Appl. Math., 130.

[48] **Hald O.,** 1984, *Discontinuous Inverse Eigenvalue Problem*, Commun. Pure Appl. Math., 37, 539-577.

[49] **Andersson L.,** 1988, *Inverse Eigenvalue problems for a Sturm-Liouville equation in impedance form*, Inverse problems, 4, 929-971.

[50] **Carlson R.,** 1994, *Inverse Sturm-Liouville problems with singularity at zero,* Inverse problems, 10, 851-864.

[51] **Hald O. and McLaughlin J.R.,** 1998, *Recovery of BV Coefficients from nodes*, Inverse problems, 14, 245-273.

[52] **Yurko V.A.,** 2000, *Inverse problems for differential equations with singularities lying inside the interval,* J. Inverse Ill.-Posed Probl., 8, 89-103.

[53] **Amirov, R.Kh. and Yurko V.A., 2001,** *On differential operators with singularity and Discontinuous Conditions Inside the Interval*. Ukr. Math. Jour., 53, 1443-1458.

[54] **Gasymov M.G.,** 1965, *Determination of the Sturm-Liouville equation having singularity from two spectra*, DAN SSSR, 161, 274-276.

[55] **Koyunbakan H.,** 2002, *Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Teorisi*, Doktora Tezi, Elazığ.

[56] **Panakhov E.S. and Yilmazer R.,** 2006, *On inverse problem for Singular Sturm-Liouville operator from two spectra*, Ukrainian Mathematical Journal, 147-154.

[57] **İç Ü.,** 2003, *Kanonik Dirac Operatörü İçin Kısmen Çakışmayan İki Spektruma göre Ters problem*, Doktora Tezi, Elazığ.

[58] **Baş E.,** 2006, *Spektral ve Potansiyel Teorinin Ters problemleri*, Doktora Tezi, Elazığ.

[59] **Kayalar M.,** 2003, *Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Singüler Sturm-Liouville Operatörü için Ters problem*, Doktora Tezi, Erzurum.

[60] **Levitan, B.M.,** 1978, *On the Determination of the Sturm-Liouville operator from One and Two Spectra*, Math. Ussr, Izvestija, vol. 12, no.1, 179-193.

[61] **Mizutani, A.,** 1984, *On the inverse Sturm-Liouville problem,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math., 31, 319-350.

[62] **Kreyszig, E.,** 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications,* New York.

[63] **Bayraktar, M.,** 1994, *Fonksiyonel Analiz, Atatürk üniversitesi yayınları*, Erzurum, s.314.

[64] **Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V.,** 1972, *Elementary of Functional Analysis and Theory of Functions*, Moscow, Russia, p. 327.

[65] **Musayev, B., Alp, M.,** 2000, *Fonksiyonel Analiz,* Balcı yayınları, Kütahya, s. 470.

[66] **Levitan, B.M., and Sargsyan, I.S.,** 1990, *Sturm-Liouville and Dirac Operators*, Netherlands.

[67] **Naimark, M. A.,** 1968, *Linear Differential Operators*, Frederik Ungar Publishing Co. Inc., London.

[68] **İdemen, M.,** 1999, *Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi*, Işık ün., İstanbul.

[69] **Hacısalihoğlu, H.H., Haciyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown L.M., İbikli, E., Brown, S.,** 2000, *Matematik Terimleri Sözlüğü*, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, s.678.

[70] **Olver, F.W.J.,** 1974, *Introduction to asymptotics and special functions*, Akademic pres, New York and London, p. 375.

[71] **Balcı, M.,** 1997, *Analiz II*, Balcı yayınları, Ankara, s.420.

[72] **Adams, R.A.,** 1978, *Sobolev Space,* Academic Press, New York.

[73] **Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S.,** 2010, *Adi Diferansiyel Denklemler*, Dora Yayınları, Bursa.

ÖZGEÇMİŞ

10.09.1979 yılında Erzincan'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzincan' da tamamladı. 1999 yılında Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen–Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2003 yılında mezun oldu. 2005 yılında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2006 yılında Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2008 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansını bitirdi. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına başladı.

Evli ve bir çocuk babasıdır.