T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UNITARY CAYLEY GRAFLARIN BASKINLIK SAYISININ İNCELENMESİ

Bahadır YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Temmuz-2012
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Bahadır YILDIRIM tarafından hazırlanan "UNITARY CAYLEY GRAFLARIN BASKINLIK SAYISININ İNCELENMESİ" adlı tez çalışması **10/07/2012** tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Ayşe Dilek MADEN	....
Danışman Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK	....
Üye Doç. Dr. Fırat ATEŞ	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Aşır GENÇ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Bahadır YILDIRIM

27/06/2012

ÖZET

YÜKSEK LİSANS
UNITARY CAYLEY GRAFLARIN BASKINLIK SAYISININ İNCELENMESİ

Bahadır YILDIRIM

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

2012, 48

Jüri
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Doç. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Doç. Dr. Fırat ATEŞ

Bu çalışmada tarafımızdan ilk defa sınırlandırılmış olan unitary Cayley grafların baskınlık sayısı ile ilgili sınır değerleri bulunmuştur. Daha sonra bu sınırlar Unitary Cayley grafların belli sınıfları için çap değerleri ile yeni bir sınır değeri elde edilmiştir. Yine aynı sınıflandırmayı kullanarak unitary Cayley grafların klik ve kromatik sayılarının değerleri baskınlık sayısı ile kıyaslanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Baskınlık Sayısı, Graf Teori, Spectral Graf Teori, Unitary Cayley Graf, Klik Sayısı, Kromatik Sayısı

ABSTRACT

MS THESIS

INVESTIGATION OF DOMINATION NUMBER OF THE UNITARY CAYLEY GRAPHS

Bahadır YILDIRIM

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

2012, 48

Jury
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Assoc. Prof. Ayşe Dilek MADEN
Assoc. Prof. Fırat ATEŞ

In this study we are obtained the bounds over unitary Cayley graphs in terms of domination numbers which are given at the first time in the literature. Moreover, by using the value of radius of the bounds over unitary Cayley graphs, it has been obtained some new bounds. Furthermore, again using by same classification, it has been compared domination, clique and chromatic numbers.

Keywords: Domination Number, Graph Theory, Unitary Cayley Graph, Clique Number, Chromatic Number

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli bilgilerini benimle paylaşan sayın hocam Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e

Desteğini yaşamımım her safhasında hissettiğim anneme ve değerli dostum Ali BAKKALOĞLU'na

Çalışmalarım boyunca yardımcı olan ve beni sürekli teşvik eden Kamile AKÇA'ya

En içten teşekkürlerimi sunarım.

Bahadır YILDIRIM
KONYA-2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Simgeler

$G=(V,E)$:	Herhangi bir graf
$V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$:	G grafının nokta kümesi
$E(G)=\{e_1,e_2,...,e_m\}$:	G grafının kenar kümesi
$\langle S \rangle$:	G grafının indüklenmiş alt grafı
K_n :	n noktalı tam graf
$der(v_i)$:	Grafın v_i noktasının derecesi
$\delta(G)$:	Grafın en küçük nokta derecesi
$\Delta(G)$:	Grafın en büyük nokta derecesi
$N(v)$:	Grafın v noktasının açık komşuluğu
$N[v]$:	Grafın v noktasının kapalı komşuluğu
$\overline{G}$:	G grafının tamamlayıcısı
C_n:	Çevre graf
$K_{m,n}$:	İki parçalı tam graf
S_n:	Star graf
T:	Ağaç graf
W_n:	Tekerlek graf
$d(u,v)$:	u ve v noktaları arasındaki uzaklık
$diam(G)$:	G grafının çapı
$\chi(G)$:	G grafının kromatik sayısı
$e(G)$:	G grafının eksantriği
$rad(G)$:	G grafının yarıçapı
$\alpha(G)$:	G grafının örtü sayısı
$\omega(G)$:	G grafının klik sayısı
$\kappa(G)$:	G grafının nokta bağlantılık sayısı
$ind(G)$:	G grafının bağımsız sayısı
$\gamma(G)$:	G grafının baskınlık sayısı
$\gamma_t(G)$:	G grafının total baskınlık sayısı
$\gamma_c(G)$:	G grafının bağlantılı baskınlık sayısı
$\gamma_{pr}(G)$:	G grafının eşlendirilmiş baskınlık sayısı

1. GİRİŞ

Euler (1736) yılında yazdığı makale ile graf teorisinin doğmasına sebep olmuştur. Graf Teorisinin çıkış ve gelişmesi alışılagelmiş biçimde olmamıştır. Teori, kendisinden çok daha eski bir problemin çözümü olarak ortaya konmuştur. Graflar daha sonra elektrik mühendisliği, kimya ve ekonomi gibi birbirinden bağımsız alanlarda karşımıza çıkmıştır. Bugün ise graf teorisi, modern cebirin önemli kollarından biri olmuştur.

Graf teoride, bir iletişim ağı modeli olarak ele alınan grafın iletişimini kuvvetlendirmek amacıyla çeşitli ölçümlerinden yararlanılmaktadır. Bu ölçümlerden olan baskınlık kavramı ilk kez Reese T. Prosser (1959) tarafından yayınlanan bir makalede ele alındı. Bu kavram zaman içinde büyük oranda önemli hale geldi ve geliştirildi. Berge (1962) yaptığı yayında baskınlık sayısı için en genel alt sınır, Walikar ve ark. (1979) yaptığı yayında ise en gene üst sınır ifadesini verdiler. Haynes, Teresa W. , Hedetniemi, Stephen, Slater, Peter (1998) baskınlık kavramını genel anlamda incelediler. Minimum derece ve mertebedeki graf için üst sınır aralıklarını W.Edwin Clark ve Larry A. Dunning (1997-2000) bulmuştur. Adriana Hansberg ve Lutz Volkmann (2007) bazı değerler kullanarak graflardaki k-baskınlık sayısı üzerine sınırlar belirlemişlerdir.

Arthur Cayley tarafından tanımlanan Cayley grafın tam sayılar halkası üzerinde tanımlanmasıyla oluşan grafa Unitary Cayley graf adı verilir. Walter Klotz ve Torsten Sander (2007) bu graf üzerinde bazı özellikleri incelemişlerdir. İncelendikleri bu grafı Cayley grafından ayıran en büyük özellik üreteç kümesidir.

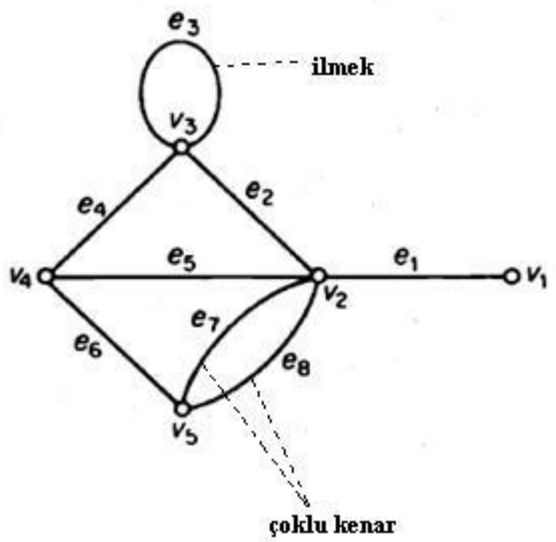
Cebirsel ve uygulamalı matematik alanlarında önemli bir yer tutan Graf Teori belirli noktalarla bu noktaları belirli özelliklerle birleştirmeye çalışan bir alandır. Bu alanda tanımlanmış birçok graf çeşidi mevcuttur. Biz bunlardan bazı özel graf türlerinin incelenmesi ve bu özelliklerin grafları sınıflandırmadaki önemini göstermek üzerinde duracağız. Buna ek olarak bu özel graf türlerinin genel özelliklerini bir arada toplayarak bunlar üzerinden yeni bulgular elde etmeye çalışacağız.

1.1. Grafın Tanımı ve Yapısı

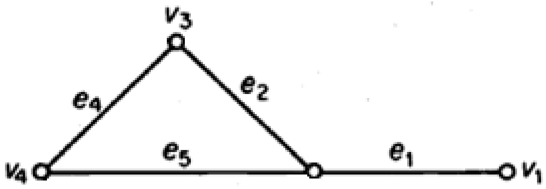
V elemanları noktalar olan boştan farklı bir küme, E de V nin elamanlarından oluşan sıralı olmayan bir küme olsun. V yi nokta kümesi, E yi kenar kabul edecek şekilde tanımlanan $G=(V,E)$ ikilisinden oluşan diagrama *graf* denir.

G grafında bir noktayı yine kendisiyle birleştiren kenara *ilmek* denir. Aynı nokta çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara *çoklu kenar* denir**.** Bir graf çoklu kenar ve ilmek içermiyorsa *basit graf*, içeriyorsa *çoklu graf* denir. Graf yapısındaki her bir noktadan diğer noktalara bir kenar varsa o graf *bağlıdır* denir. Nokta kümesi ve kenar kümesi sonlu olan bir graf *sonlu graf* olarak adlandırılır. Sonlu bir grafta $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ nokta kümesi olmak üzere $|V(G)|=n$ sayısına grafın *mertebesi,* $E(G)=\{e_1,e_2,...,e_m\}$ kenar kümesi olmak üzere $|E(G)|=m$ sayısına grafın *boyutu* denir. Şimdi bu özellikleri bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 1.1: Nokta kümesi $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ ve kenar kümesi $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$ olarak verilen bir $G=(V,E)$ grafının şekli aşağıdaki gibidir.

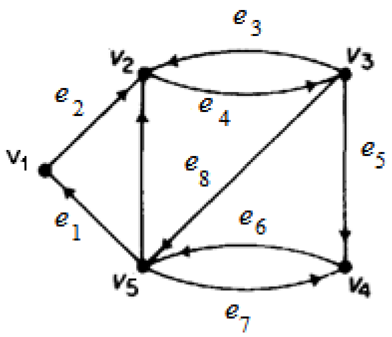


Şekil 1.1. Çoklu graf



Şekil 1.2. Basit graf

Kenarları doğrultuya sahip veya kenarları sıralanmış olan graflara *yönlendirilmiş graf* denir. Burada herhangi iki nokta v_i, v_j arasındaki kenar olan $e = v_i v_j$ için $v_i v_j \neq v_j v_i$ dir. Noktalara bağlı kenarlar, noktadan dışarı doğru çıkıyorsa bu noktaya *başlangıç noktası*, noktaya doğru giriyorsa bu noktaya *final noktası* denir.



Şekil 1.3. Yönlendirilmiş graf

Şekil 1.3 de görüldüğü gibi v_1 noktası e_2 kenarı için başlangıç noktası, e_1 kenarı için final noktasıdır. Görüldüğü gibi graf çizimlerinde şeklin çizimi önemli değildir. Önemli olan noktalar ile kenarlar arasındaki ilişkiyi tam olarak ortaya koyabilmektir. Bir G grafının nokta kümesi olan V den alınan iki nokta v_i ve v_j olsun. Alınan bu noktalar arasında bir kenar varsa bu noktalara *komşudur* denir.

Bir G grafında herhangi bir v_i noktasının derecesi bu noktaya komşu olan noktaların sayısıyla bulunur ve $der(v_i)$ ile gösterilir. Eğer nokta sıfır dereceli ise bu noktaya *izole nokta*, 1 dereceli ise bu noktaya *uç nokta (pendant)* adı verilir. Burada her bir nokta komşu olduğu noktaya bir 1 derece kazandırır. İlmikte ise nokta kendisine komşu olduğundan noktaya 2 derece kazandıracaktır. Derecesi tek sayı olan bir noktaya *tek nokta*, derecesi çift sayı olan bir noktaya *çift nokta* olarak adlandırılır. Bir grafta en az dereceli noktaya *minimum dereceli* denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir. En çok dereceli noktaya ise *maksimum dereceli* denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir. Şekil 1.1 deki grafı ele alacak olursak $\delta(G)=1$ ve $\Delta(G)=5$ tir.

Teorem 1.1. (Newman, J, 1953) $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ nokta kümesi ve $E(G)=\{e_1,e_2,...,e_m\}$ kenar kümesi üzerinde tanımlanan bir G grafında aşağıdaki eşitlik mevcuttur.

$$\sum der\, v_i = 2m \tag{1.1}$$

İspat: G grafı, n mertebeli ve m boyutlu bir graf olduğundan dolayı her kenar, iki noktaya komşudur. Bu nedenle noktaların dereceleri toplanırken her bir kenar iki noktayı temsil eder. Dolayısıyla tüm noktaların toplamı, kenar sayısının iki katına eşittir. Yani kısaca 2m dir.

Bu teoremin bazı sonuçlarını aşağıda vermek mümkündür.

Sonuç 1.2. Herhangi bir G grafında bütün noktaların dereceleri toplamı çifttir.

İspat: Teorem 1.1.1 den görüleceği gibi noktaların dereceleri toplamı kenarların iki katıdır. Buda bir çift sayıdır.

Sonuç 1.3. Bir G grafında tek dereceli noktaların sayısı çifttir.

İspat: G grafının tek noktalarının kümesi $A(G)$ ve çift noktalarının kümesi $B(G)$ olsun. Teorem 1.1.1 den

$$\sum_{v\in A(G)} der(v) + \sum_{v\in B(G)} der(v) = \sum_{v\in V(G)} der(v) = 2m$$

olur ki buda

$$\sum_{v\in A(G)} der(v) + \sum_{v\in B(G)} der(v)$$

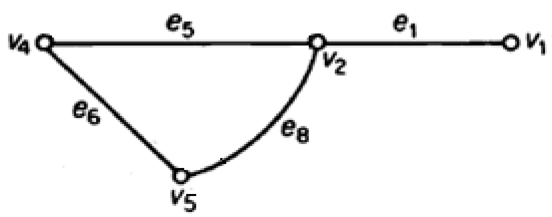
çift sayı olduğunu gösterir. $\sum_{v\in B(G)} der(v)$ toplamı terimler çift olduğundan dolayı çift sayı gelmek zorundadır. O halde $\sum_{v\in A(G)} der(v)$ toplamı çift olmalıdır. Toplamdaki tüm elemanlar tek olduğundan dolayı toplamın çift sayı gelebilmesi için çift sayıda terim toplanmalıdır. Buradan da $|A(G)|$ nin çift olduğu bulunmuş olur.

Bir G grafında her kenar iki noktayı birleştirdiğinden noktaların dereceleri toplamı kenar sayısının iki katı olup ve bütün noktaların dereceleri toplamı çift sayıdır. Bu nedenle bir grafın bütün derecelerinin toplamı her zaman çift sayıdır.

G bir graf ve $v \in V$ olmak üzere v noktasının *açık komşuluğu kümesi* $N(v)$ olarak gösterilir ve v ye komşu olan V deki tüm noktaları içerir. $N[v] = N(u) \cup \{v\}$ kümesine de v nin *kapalı komşuluğu kümesi* denir.

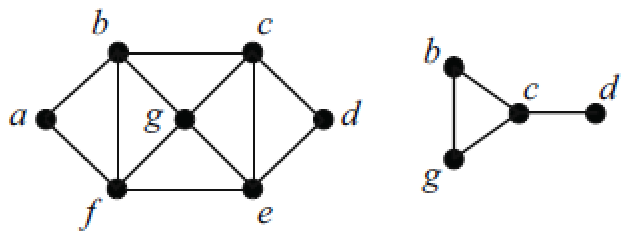
1.2. Alt Graf

$G = (V_1, E_1)$ ve $H = (V_2, E_2)$ birer graf olsun. Eğer $V_2 \subseteq V_1$ ve $E_2 \subseteq E_1$ oluyorsa H grafı G grafının *alt grafıdır* denir. Kısaca H grafı noktaları G de bulunan ve kenarlarıda G deki aynı nokta çiftleri arasındaki ilişkiyi koruyan graftır. H grafına aynı zamanda G grafının *süper grafı* denir. Şekil 1.1 deki grafın bir alt grafı aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 1.4. Alt graf

G bir graf ve S de bu grafın nokta kümesinin boştan farklı alt kümesi olsun. G nin *indüklenmiş alt grafı (induced subgraph)* nokta kümesi S ve kenar kümesi de G nin S deki nokta çiftleriyle komşu olan kenarlardan oluşan kümedir. $\langle S \rangle$ ile gösterilir. $\langle S \rangle$ kümesi S nin noktalarının tümünü ve G nin kenarlarını kapsar.



Şekil 1.5. Bir graf ve indüklenmiş alt grafı

Bir grafın alt graflarını, o grafa ait nokta veya kenarları silerek de bulmak mümkündür.

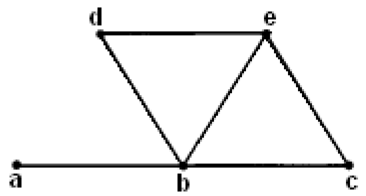
1.3. Yürüme ve Yol Kavramı

Nokta kümesi $V = \{a, b, c, ..., y, z\}$ olan bir G grafı için her biri birbiriyle sırasıyla bağlanan noktalar dizisine *yürüme* denir. G deki $ab, bc, ..., yz$ formundaki yürümenin uzunluğu, k tane kenarın bir araya gelmesinden oluştuğu için bu yürümenin uzunluğu k dır. Bu şekildeki yürüme $abc...yz$ şeklinde gösterilir ve a ile z arasında bir yürüme olarak adlandırılır. Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan yürümeye kapalı yürüme denir. Bir yürümede hiçbir nokta tekrar etmiyorsa bu yürümeye yol adı verilir. G grafından alınan farklı iki nokta arasında bir yol varsa bu iki nokta bağlantılıdır denir.

Teorem 1.3.1 (Harris ve ark., 2000) Bir G grafından alınan tüm u ve v noktaları arasındaki $u-v$ yürümesi bir $u-v$ yolu içerir.

Eğer yürünen tüm kenarlar farklıysa bu yürümeye *gezi* denilmektedir. Tek bir nokta kendi başına bir yol teşkil eder. O halde her yol bir gezi olurken her gezi bir yol olmaz. Başlangıç ve bitiş noktaları hariç tüm noktaları farklı ve tüm kenarları farklı olan kapalı yürümeye ise *devir* denir. k uzunluğundaki bir devire $k-devir$ denilir. k sayısının durumuna göre bu devir *tek devir* veya *çift devir* olarak adlandırılır.

Bir G grafı aşağıdaki gibi verilsin.

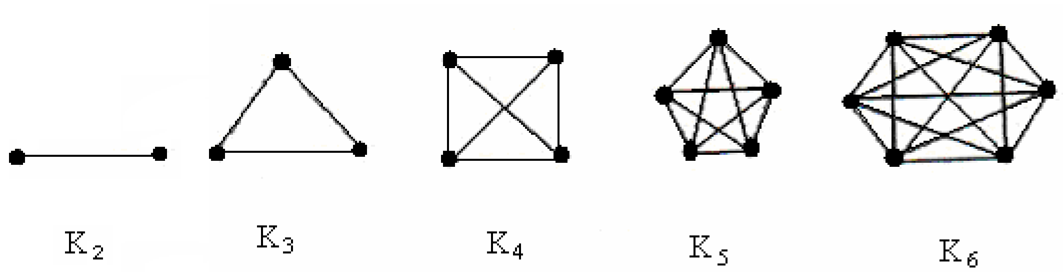


Şekil 1.6. Bir G grafı

Burada $abebc$, 4 uzunluğunda bir yürümedir fakat dikkat edersek bir gezi değildir. $abedbc$ bir gezidir. Ancak bu bir yol değildir. $abed$ bir yoldur ve $bdeb$ bir devirdir diyebiliriz.

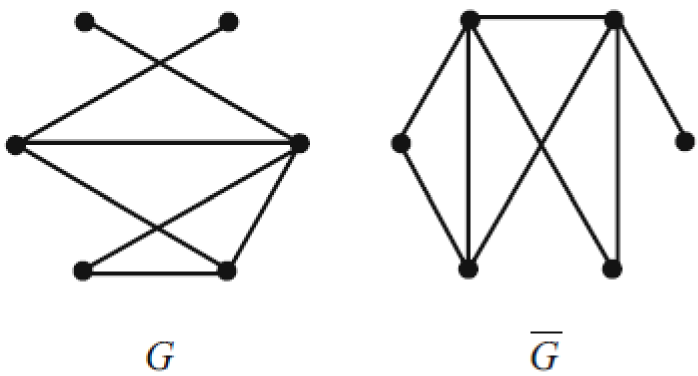
1.4. Graf Çeşitleri

Bir grafta her bir nokta çifti birbirine komşu ise bu grafa *tam graf* denir. n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir. n noktalı bir tam grafın kenar sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ ile ve nokta derecesi de $(n-1)$ ile bulunabilir.



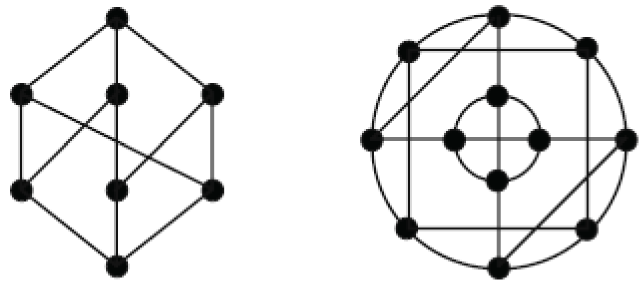
Şekil 1.7. Tam Graf

Nokta kümesi G nin nokta kümesiyle aynı olan, kenar kümesi ise G de olmayan kenarlardan oluşan ve komşu olmayan noktaları birbirine komşu yapan grafa *tamamlayıcı graf* denir. Bir G grafının tamamlayıcısı $\overline{G}$ ile gösterilir.



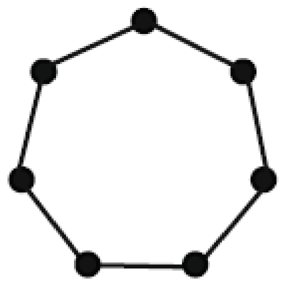
Şekil 1.8. Tamamlayıcı Graf

Bir grafta tüm noktalar aynı dereceye sahipse bu tür graflara *düzgün graf* denir. Grafın tüm noktalarının derecesi r ise bu grafa r*-düzgün graf* denir. n noktalı bir tam graf için her bir noktanın derecesi $n-1$olduğundan dolayı $n-1$ dereceli düzgün graftır.



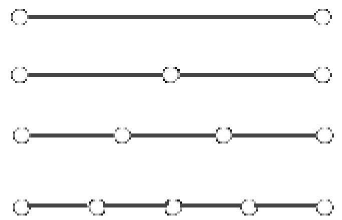
Şekil 1.9. 3-düzgün ve 4-düzgün graflara örnek

Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan ve tüm noktaların derecesi 2 olan grafa *çevre graf* denir. n noktaları bir çevre graf C_n ile gösterilir.



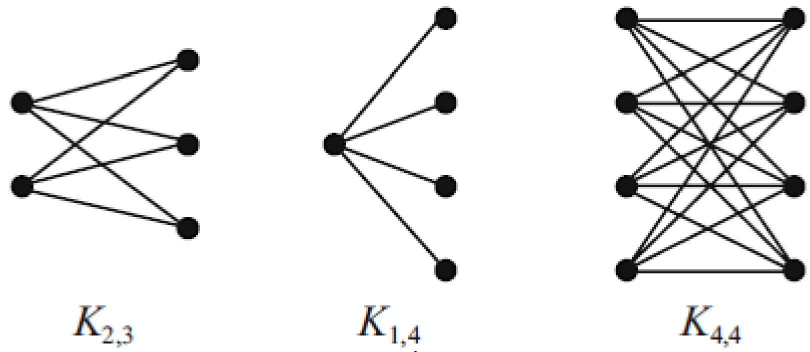
Şekil 1.10. C_7 grafı

Başlangıç ve bitiş noktalarının derecesi 1 ve diğer noktaların dereceleri 2 olan grafa *yol graf denir.* n noktalı bir yol graf P_n ile gösterilir.



Şekil 1.11. Yol Graf

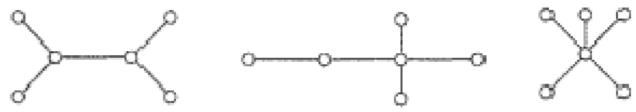
Bir grafın nokta kümesi V_1 ve V_2 şeklinde 2 kümeye ayrılmış olsun. Eğer kenarları V_1 deki noktalarla V_2 deki noktaların birleştirilmesiyle oluşuyorsa bu grafa *iki parçalı graf* denir. $|V_1| = m$ ve $|V_2| = n$ olan iki parçalı bir graf $K_{m,n}$ ile gösterilir. V_1 ve V_2 deki tüm noktalar karşılıklı olarak birbirleriyle birleştirilmiş ise bu tür graflara *iki parçalı tam graf* denir.



Şekil 1.12. İki Parçalı Graf

Teorem 1.4.1 (Bondy ve Murty, 1978) Bir graf ancak tek devir içermiyorsa iki parçalı bir graftır.

Bir bağlantılı grafta hiç devir yoksa buna *ağaç graf* denir. Ağaç graflar T ile gösterilir.



Şekil 1.13. Ağaç Graf

Teorem 1.4.2 (Bondy ve Murty, 1978) Bir ağaç grafta herhangi iki nokta tek bir yolla birbirine bağlıdır.

Teorem 1.4.3 (Bondy ve Murty, 1978) Eğer G bir ağaç graf ise

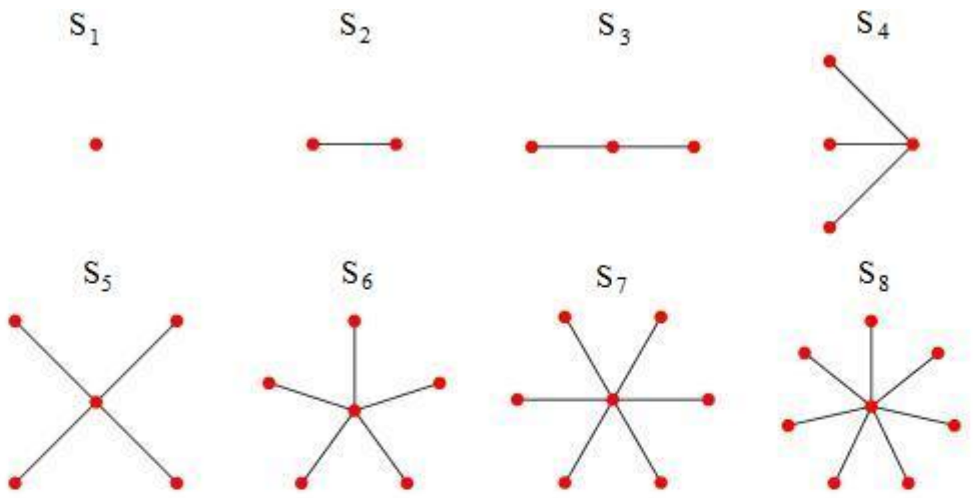
$$E(G) = V(G) - 1$$

eşitliği vardır.

Yukarıdaki teoremin önemli bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

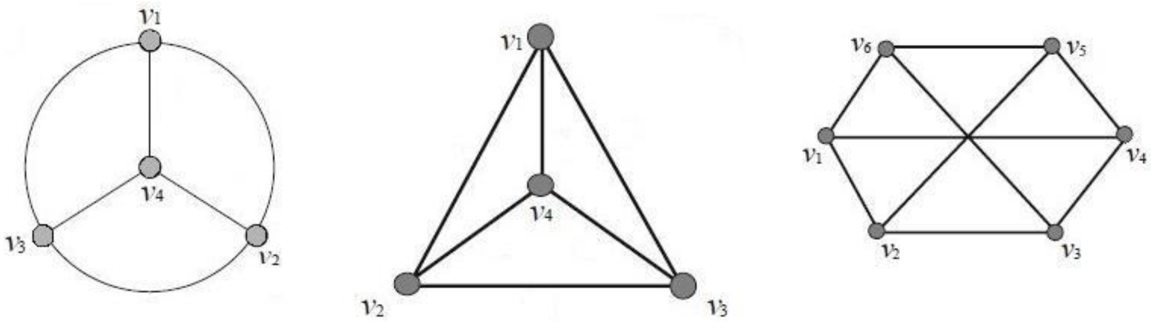
Sonuç 1.4.4 (Bondy ve Murty, 1978) Tüm basit olmayan ağaç graflarda derecesi bir olan en az iki nokta vardır.

n noktalı bir ağaç grafın, bir noktasının derecesi $n-1$ ve geriye kalan diğer tüm noktaların dereceleri 1 ise bu şekilde ki graflara *yıldız graf* denir. Tam iki parçalı graf olarak da adlandırılırlar. İki parçalı gralarda özel olarak $m=1$ alınırsa oluşan $K_{1,n}$ grafı bir yıldız graftır. S_n ile gösterilir.



Şekil 1.14. Yıldız graf

n noktalı bir C_n çevre grafının tüm noktalarına tek bir kenarla komşu olan yeni bir nokta eklenmesiyle elde edilen grafa *tekerlek graf* denir. W_n ile gösterilir.



Şekil 1.15. Tekerlek graf

1.5. Graf Parametreleri

$G=(V,E)$ bir graf ve $u,v \in V(G)$ olmak üzere bu iki nokta arasındaki en kısa yolun uzunluğuna u ile v arasındaki *uzaklık (distance)* denir. $d(u,v)$ ile gösterilir.

Bir $G=(V,E)$ grafından alınan v noktası ile v noktasına en uzak nokta arasındaki uzaklığa v noktasının *eksantiriği (eccentricity)* denir. $e(v)$ ile gösterilir.

$$e(v)=\max\{d(v,x) \mid x \in V(G)\}$$

Bağlantılı bir grafın noktaları arasındaki minimum eksantriğe G nin *yarıçapı (radius)* denir. $rad(G)$ ile gösterilir.

$rad(G) = \min\{e(v) \mid v \in V(G)\}$

Bağlantılı bir grafın noktaları arasındaki maximum eksantriğe G nin çapı (diameter) denir.

$diam(G) = \max\{e(v) \mid v \in V(G)\}$

Tam bir grafta tüm noktalar birbirine komşu olduğundan dolayı her zaman $diam(G) = 1$ dir.

Teorem 1.5.1 (Haynes ve ark., 1998) Herhangi bir G grafı için

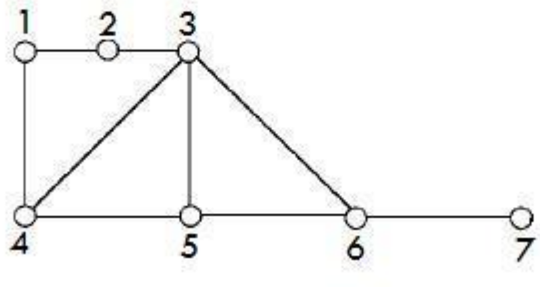
$rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$

eşitsizliği mevuttur.

Teorem 1.5.2 (Haynes ve ark., 1998) Bir G grafınınn yarıçapının 1 olması için gerek ve yeter şart G grafının diğer bütün noktalara komşu bir düğüm içermesidir.

İspat: $\Rightarrow G$ yarıçapı 1 olan bir graf olsun. Varsayalım ki G nin diğer bütün noktalara komşu bir düğümü bulunmasın. O halde G nin herhangi bir u noktası için $e(u) \geq 2$ olacaktır. Bu ise G nin yarıçapının 1 olması ile çelişir. O halde u noktası v noktası ile komşudur.

$\Leftarrow$ u, G grafının diğer tüm noktalara komşu bir noktası olsun. $e(u) = 1$ olacağı açıktır. Üstelik bu değer, G nin noktaları arasındaki minimum eksantriktir. O halde $rad(G) = 1$ dir.



Şekil 1.16. G grafının yarıçapı ve çapı

Şekil 1.16 de verilen G grafının noktaları arasındaki uzaklığa bakarsak, $d(5,6) = 1$, $d(1,3) = 2$, $d(4,7) = 3$, $d(1,7) = 4$ bazı noktaların uzaklıkları olarak verilebilir. Çap bu noktalar arasındaki en büyük değer olduğundan dolayı G grafının çapı $diam(G)=4$ dür. Bu G grafının yarıçapı şekilden de anlaşılacağı gibi $rad(G)=2$ olarak bulunur.

G grafının nokta kümesi $V(G)$ ve $S \subseteq V(G)$ boştan farklı bir küme olmak üzere G deki tüm kenarların en az bir noktası bu kümede ise bu kümeye *örtü kümesi* denir. Bir grafta en az bir tane örtü kümesi bulunur. Bu kümeler içinde en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısına G grafının *örtü sayısı (covering number)* denir. $\alpha(G)$ ile gösterilir.

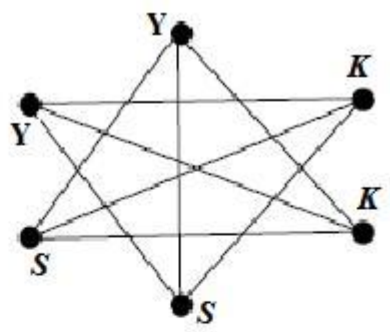
Bir G grafında, G'nin tüm noktalarını renklendirmek için gerekli olan en az sayıdaki renk sayısına *kromatik sayı (chromatic number)* denir. $\chi(G)$ ile gösterilir. Yani komşu olan iki nokta farklı renkle renklendirilir.

Teorem 1.5.3 (Bondy ve Murty, 1978) Herhangi bir G grafı için

$$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$$

eşitsizliği mevcuttur.

Bir G grafının *klik sayısı*, graftaki en büyük tam grafın nokta sayısıdır. $\omega(G)$ ile gösterilir.

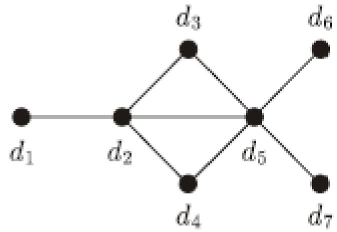


Şekil 1.17. Kromatik ve Klik sayı

Şekil 1.17 de verilen G grafının noktalarını K (kırmızı), S (sarı) ve Y (yeşil) ile renklendirecek olursak görüleceği gibi kromatik sayısı 3 olarak bulunur. Klik sayısı da en büyük tam alt grafı olduğundan dolayı en büyük tam alt grafın nokta sayısı 3 dir.

Bir G grafını bağlantısız veya izole noktalı bir graf haline getirmek için graftan çıkarılması gerekli olan en az sayıdaki nokta sayısına *bağlantı noktaları sayısı (vertex connectivity)* denir. $\kappa(G)$ ile gösterilir. G grafı n mertebeli tam graf ise $\kappa(G)=n-1$ dir. Eğer G grafı bağlantısız bir graf ise $\kappa(G)=0$ dır. G grafı bağlantılı ancak tam graf değil ise $1 \leq \kappa(G) \leq n-2$ dir.

A bir küme ve $A \subseteq V(G)$ olsun. G grafındaki birbiriyle komşuluğu olmayan noktaların kümesi A ise bu kümeye *bağımsız küme* denir. Bu kümelerden en geniş olanın eleman sayısına ise *bağımsız sayı (independent number)* denir. $ind(G)$ ile gösterilir.



Şekil 1.18. G grafı

Şekil 1.18 deki belirtilen G grafı için $A_1 = \{d_1\}$, $A_2 = \{d_1, d_3\}$, $A_3 = \{d_2, d_4, d_6\}$, $A_4 = \{d_1, d_3, d_4, d_6, d_7\}$ bazı bağımsız kümelerdir. A_4 kümesi G nin bağımsız kümelerinin en genişidir. $ind(G) = 5$ olarak bulunur. Bu grafın bağlantı noktaları sayısını bulmak için en az komşuluğa sahip olan noktanın kenarlarını silmemiz yeterlidir. Aynı G grafı için $\kappa(G) = 1$ dir.

Teorem 1.5.4 $S \subseteq V$ kümesi, G nin bağımsız sayısı olmak üzere $V \setminus S$, G grafının örtüsüdür.

Sonuç 1.5.5 G bir graf olmak üzere

$$\kappa(G) + \alpha(G) = v$$

eşitliği vardır.

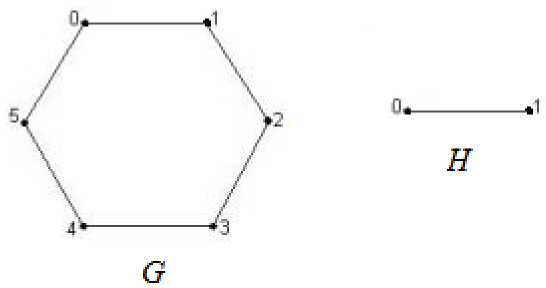
İspat: S, G nin en büyük bağımsız kümesi ve K da G nin en küçük örtüsü olsun. $V \setminus K$ bir bağımsız küme ve $V \setminus S$ bir örtüdür. Buradan

$$v - \kappa(G) = |V \setminus K| \leq \alpha(G) \quad (1.1)$$

$$v - \alpha(G) = |V \setminus S| \geq \kappa(G) \quad (1.2)$$

Bu iki eşitsizlikten istenilen sonuca ulaşılabilir.

Bir G grafı için her indüklenmiş alt grafının klik sayısı ile kromatik sayısı eşitse G gafı *mükemmeldir* denir.



Şekil 1.19 G bir graf ve H , G nin indüklenmiş alt grafı

Şekil 1.19 da verilen G grafının indüklenmiş alt grafı olan H için $\omega(H) = 2$ ve $\chi(H) = 2$ dir. $\chi(H) = \omega(H)$ olduğundan dolayı G grafı mükemmeldir denir.

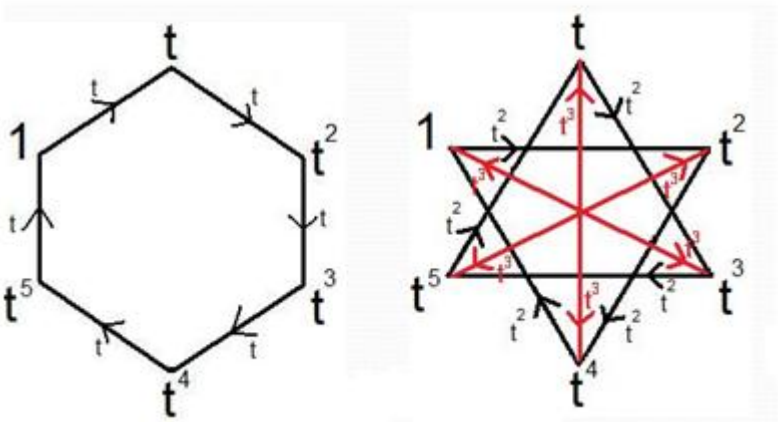
2.UNİTARY CAYLEY GRAF

2.1. Unitary Cayley Grafın Tanımı ve Yapısı

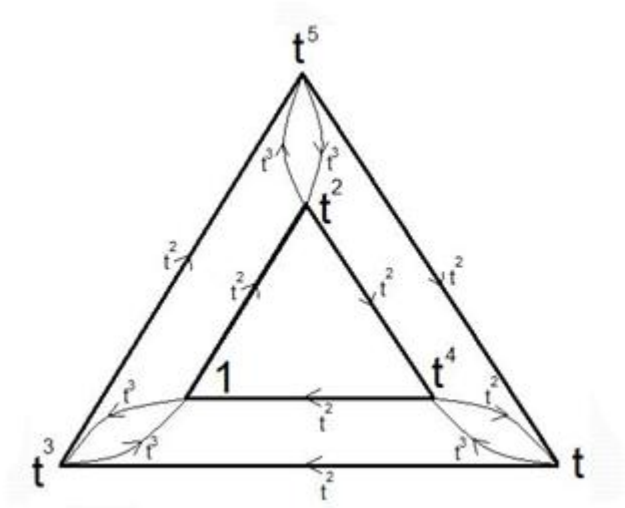
Bu bölümde bir graf çeşidi olan Cayley graflarının özel bir hali olan unitary Cayley graflar hakkında genel bilgiler verilmiştir.

G sonlu bir grup ve S kümesi de G nin üreteç kümesi olsun. $e \notin S$ ve $S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\} = S$ olmak üzere $V(G,S)$ kümesini elemanları G den alınan elemanlardan oluşan *nokta kümesi* ve $E(G,S)$ kümesini de elemanları $G \times S = \{(g,s) : g \in G, s \in S\}$ den oluşan *kenar kümesi* olarak ifade edelim.

Yukarıda verilen $V(G,S)$ ve $E(G,S)$ kümeleriyle oluşturulan grafa, G nin *Cayley grafı* denir ve genellikle $\Gamma = Cay(G,S)$ ile ifade edilir. Bir (g,s) kenarının başlangıç noktası g ve bitiş noktası gs dir. Ayrıca (g,s) kenarının tersi (gs, s^{-1}) biçimdedir. Γ, Cayley grafının derecesi düzenli ve $|S|$ dir. Bağlantılı, yönlü ve ilmek içermeyen bir graftır. Cayley graf ile ilgili daha detaylı bilgilere Jajcay (2000), Godsil ve Royle (2001), Biggs (1993) kaynaklarından ulaşılabilir.



Şekil 2.1. C_6 için $S = \{t\}$



Şekil 2.2. C_6 için $S=\{t^2,t^3\}$

$n>1$ pozitif tam sayı olmak üzere, Z_n tam sayılar halkası üzerinde tanımlanan Cayley grafa unitary Cayley graf denir. $G=(Z_n,U_n)$ şeklinde gösterilir. Z_n tam sayı halkasının nokta kümesinin elemanlarını $V(G)=\{0,1,2,...,n-1\}=Z_n$ tam sayıları ile temsil edebiliriz. Unitary Cayley grafın üreteç kümesi

$$U_n=\{a\in Z_n:(a,n)=1\}.$$

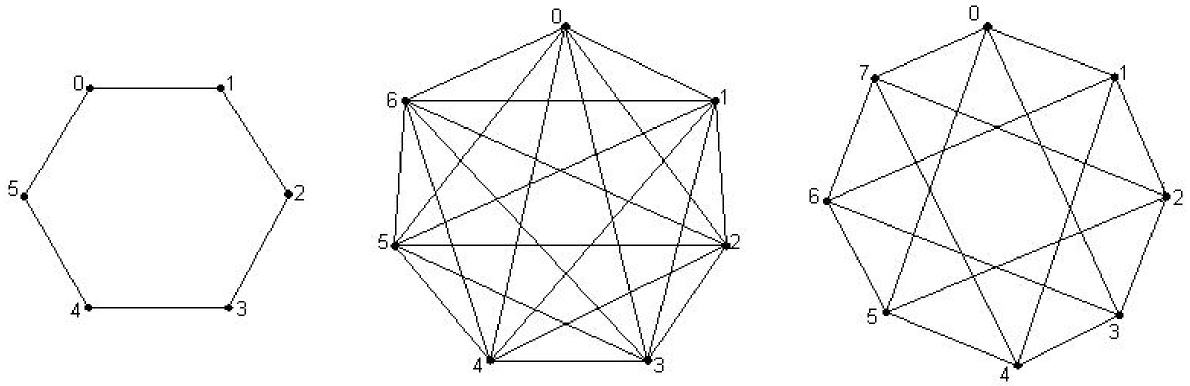
Kenar kümesi ise

$$E(G)=\{\{a,b\}:a,b\in Z_n,(a-b,n)=1\}.$$

şeklinde tanımlıdır. Üreteç kümesindeki elemanların seçiminde de anlaşılacağı gibi her elemanın terside yine bu küme içinde yer alır. Bu yüzden unitary Cayley graf simetrik bir graftır. Her elemanın tersini üreteç kümesinde bulundurmasından dolayı da yönsüz bir graftır.

Görüldüğü gibi Cayley graf ile arasında bazı farklar vardır. Bunlardan bazıları Cayley graf gruplar üzerinde tanımlanırken, unitary Cayley graf tam sayılar halkası Z_n üzerinde tanımlıdır. Cayley graf gruplar üzerinde tanımlanmasından dolayı çarpımsal veya toplamsal özellikte olabilirken, unitary Cayley graf tam sayılar halkası üzerinde tanımlı olmasından dolayı sadece toplamsal özelliktedir. Ayrıca Cayley graflar yönlüyken, unitary Cayley graflar yönsüzdür.

Unitary Cayley graflar hakkında daha detaylı bilgilere Klotz ve Sander (2007), Boggess ve ark. (2008), Dejter ve Giudici (1995), Beaudrap (2010) kaynaklarından ulaşılabilir.



Şekil.2.3. $Z_{6,}$ Z_7 ve Z_8 grafları

2.2. Genel Teoremler ve Sonuçlar

Önerme 2.1. (Boggess ve ark., 2008) $p_1 ... p_s$ farklı asal sayılar ve $p_1 < p_2 < ... < p_s$ olmak üzere $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_s^{e_s}$ olsun. Buradan $v \in V(Z_n)$ noktasının derecesi $d(v) = \varphi(n)$ şeklinde bulunur. Burada $\varphi(n)$ ile gösterdiğimiz fonksiyon Euler totient fonksiyonudur.

Sonuç 2.2. (Boggess ve ark., 2008) Tüm n tam sayıları için G grafı $\varphi(n)$ – düzenli graftır.

Bu sonuçların ardından Klotz ve Sander (2007) in ispatlamış oldukları aşağıdaki teoremde $\varphi(n)$ fonksiyonunun aynı zamanda unitary Cayley graflar için bağlantı noktaları sayısına eşit olduğunu göstermişlerdir.

Teorem 2.3. (Klotz ve Sander, 2007) G bir unitary Cayley grafının bağlantı nokta sayısı $\kappa(n) = \varphi(n)$ dir.

Bir G grafındaki nokta çiftlerinin ortak komşuluklarının sayısını aşağıdaki lemma ile bulmamız mümkündür.

Lemma 2.4. (Klotz ve Sander, 2007) $n,\ s,\ n \geq 2$ tam sayıları için

$$x + y \equiv s \ (\mathrm{mod}\, n),\ x \in U_n,\ y \in U_n \tag{2.1}$$

kongrüansının çözümlerinin sayısı $F_n(s)$ ile gösterilirse,

$$F_n(s) = s \prod_{p|n,\, p\ prime} (1 - \frac{\varepsilon(p)}{p}), \qquad \varepsilon(p) = \begin{cases} 1, & p \mid s \\ 2, & p \nmid s \end{cases} \tag{2.2}$$

şeklinde çözümlenebilir.

Lemma 2.4'ü kullanarak G grafından alınan farklı iki noktanın ortak komşuluklarının sayısı da kolayca bulunabilir.

Teorem 2.5. (Klotz ve Sander, 2007) a, b noktaları G grafının nokta kümesinden alınan iki farklı nokta olmak üzere, bu noktaların ortak komşuluklarının sayısı $F_n(a-b)$ ile bulunur.

İspat: $a, b, z \in V(G) = Z_n = \{0,1,2,...,n-1\}$ olsun. z noktasının a ve b noktaların ortak noktası olması için gerek ve yeter şart $(a-z,n) = (z-b,n) = 1$ olmasıdır. Tek çözümü vardır. O da $x, y \in Z_n$ için

$$a - z \equiv x \ (\mathrm{mod}\, n), \quad z - b \equiv y \ (\mathrm{mod}\, n) \tag{2.3}$$

buradan $z \equiv a - x \equiv b + y$ denkliği a ve b nin ortak komşulukları olur. Bunu kullanarak

$$x + y \equiv a - b (\mathrm{mod}\, n), \ x \in U_n, \ y \in U_n \tag{2.4}$$

elde ederiz. Görüldüğü gibi lemma 2.4 de kullanılan (2.2) denklemi ortak komşuluklarının sayısında s yerine $s = a - b$ alınarak çözüm bulunmuş olur.

Boggess ve ark. (2008) unitary Cayley grafların kromatik ve klik sayısını belirlemede büyük öneme sahip olan aşağıdaki teoremi ispatlayarak bu graflar üzerinde işlem yapabilmemizi kolaylaştırmışlardır. Graf teoriden bildiğimiz gibi klik ve kromatik sayı arasındaki ilişki $\omega(G) \le \chi(G)$ şeklindedir.

Bunu göz önünde bulundurarak aşağıdaki ispatı verebiliriz.

Teorem 2.6. (Boggess ve ark., 2008) G bir graf ve $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_s^{e_s}$ olsun. Burada $p_1 < p_2 < ... < p_s$ ve tüm $i = 1,...,s$ ler için $e_i \ge 1$ olmak üzere

$$\omega(G) = \chi(G) = p_1. \tag{2.5}$$

İspat: Grafın noktalarının m ile renklendirmesi k_m ile temsil edilsin. Her bir $0 \le m \le n-1$ sayısı için $m \equiv k_m (\mathrm{mod}\, p_1)$ de tek k_m vardır. m nokta, k_m renkle renklendirilir. Graftan alınan herhangi iki nokta m ve m', aynı rengi alırlarsa

$k_m \equiv k_{m'} (\bmod\, p_1)$ olur ve buradan $m \equiv m' (\bmod\, p_1)$ bulunur. Bu bize gösterir ki m ile m' komşu değildir. Görüleceği gibi

$$\chi(G) \leq p_1 \tag{2.6}$$

sağlanmış olur.

G grafının p_1 kliği vardır. G deki klikler $\{0,1,..., p_1 - 1\}$ şeklindedir. Buradan da anlaşılacağı gibi

$$p_1 \leq \omega(G) \tag{2.7}$$

elde edilir.

(2.6) ve (2.7) den

$$p_1 \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq p_1 \tag{2.8}$$

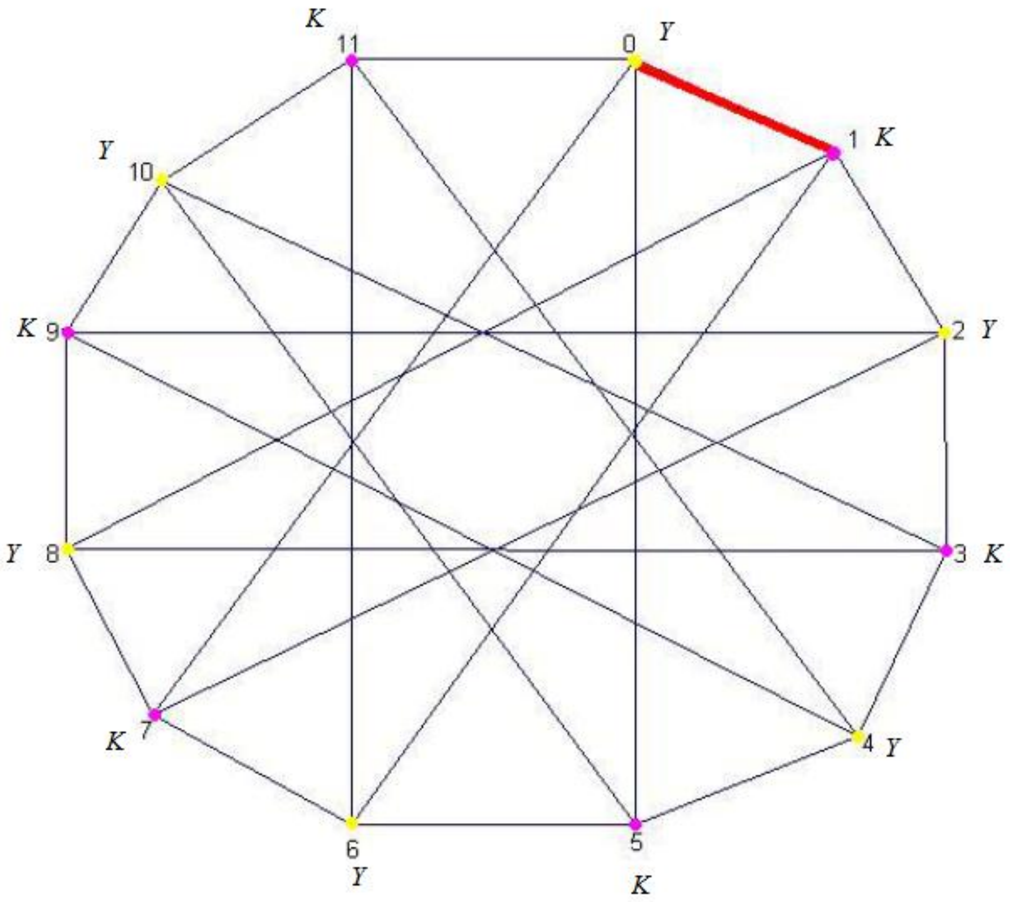
eşitsizliği elde edilmiş olur. Buradan da görüldüğü gibi

$$\omega(G) = \chi(G) = p_1 \tag{2.9}$$

sonucunu çıkarabiliriz.

Bu ispatı bir örnekte açıklayalım. $G = (Z_{12}, U_{12})$ grafının klik ve kromatik sayısını bulalım.

Aşağıdaki şeklin renklendirmesinden de görüleceği gibi K (kırmızı) ve Y (yeşil) renklerini kullanırsak iki farklı renk seçmiş oluruz. O halde $\chi(G) = 2$ olarak bulunur. Yine şekle bakarak söyleyebiliriz ki $\omega(G) = 2$ dir.



Şekil 2.4. $G = (Z_{12}, U_{12})$

Klotz ve Sander (2007) unitary Cayley grafları çap uzunluğuna *(diametre)* göre sınıflandırmayı başarmışlardır.

Teorem 2.7. (Klotz ve Sander, 2007) $n \geq 2$ ve $G = (Z_n, U_n)$ için

$$diam(X_n) = \begin{cases} 1, \; n \; asal \; bir \; sayı \; ise \\ 2, \; n = 2^{\alpha}, \; \alpha > 1 \\ 2, \; n \; tek \; fakat \; bir \; asal \; sayı \; değilse \\ 3, \; n \; çift \; ve \; bir \; tek \; asal \; bölene \; sahipse \end{cases} \tag{2.10}$$

İspat: Eğer n asal ise $G = K_n$ bir tam graftır ve çapı 1 dir. Eğer $n = 2^{\alpha}$, $\alpha > 1$ ise grafımız tam bipartite graftır ve çapı 2 dir. n bir tek sayı fakat asal sayı değilse, Teorem 2.5 den $a \neq b$ olmak üzere a ve b noktalarının ortak komşuluklarının sayısı $F_n(a-b)$ ile bulunur. Eğer n sadece tek asal bölene sahipse, lemma 2.4 e göre $F_n(a-b)$ nin açılımındaki tüm durumlar pozitiftir. Bu durumda tüm farklı nokta çiftlerinin bir ortak komşuluğu vardır ki buda $diam(G) = 2$ olması demektir. Son durum olarak n çift ve tek asal bölene sahipse, G grafının 0 ve p noktaları komşu değildir. Teorem 2.5 den ortak komşuları olmadığı da görülebilir. Bu yüzden $diam(G) \geq d(0, p) \geq 3$ dir. Farz edelim ki a ve b, $a \neq b$, G nin komşu olmayan noktalarıdır ve bu noktaların ortak komşulukları da yoktur. G nin herhangi iki noktası x ve y, $x \neq y$, noktalarının Teorem 2.5 den ikisi de çift ya da tek ortak komşuluklara sahiptir. Buradan iddia edebiliriz ki a çift, b tektir. a nın komşuluklarının tümü tektir. Onlardan biri c olsun. c ve b nin ikisi de çifttir. Burada bir d ortak komşuluklarına sahiptir. a, c, d, b arasındaki geçişler gösterir ki $d(a,b) \leq 3$, $diam(G) = 3$ olarak bulunur.

Teorem 2.8. (Klotz ve Sander, 2007) $n \geq 2$ ve $G = (Z_n, U_n)$ unitary Cayley grafı için eğer n çift yada n tek ve en çok iki farklı asal bölene sahip ise bu graf mükemmeldir.

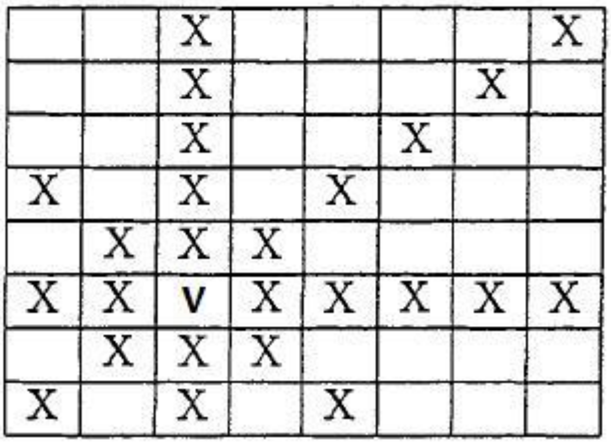
3. GRAFLARDA BASKINLIK SAYISI

Bu bölümde graflarda baskınlık sayısı ile ilgili literatürdeki temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

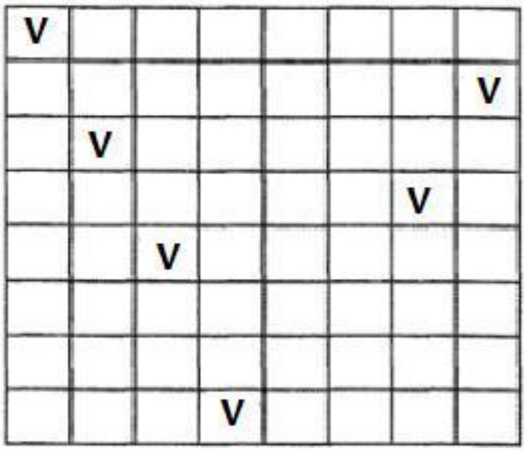
Baskınlık sayısı graf teoride geniş bir araştırma alanına sahiptir. Haynes ve ark. (1998) bu alandaki yayınları bir araya getirerek bir kitap yayınlamıştır. Genel olarak da bir grafdaki baskınlık sayısı D kümesi olmak üzere her bir küme, D deki her bir noktayla ya da D deki bir noktaya komşu olarak ifade edilmiştir. Baskınlık kümesinin içeriğinde birçok problem bulunabilir. Bunlardan biri iletişim ağı problemidir. İletişim ağları noktaların bir kümesini içerir, burada bir nokta diğerlerine bağlanabilir. Bu noktaların kümesinden diğer tüm noktalara mesaj göndermek için bu kümeden bir tanesini seçmek gerekir. Öyle ki bu kümedeki en az bir nokta diğer tüm noktalarla bağlantılıdır. Bunun gibi örnekleri çoğaltmak mümkündür.

Graftaki baskınlık sayısı çalışmalarının kökeninde aşağıdaki şekil 3.1 ve şekil 3.2 de belirttiğimiz satranç problemi vardır. Satranç kuralları gereği bir vezir bir hareketinde istediği kadar karede çapraz, dikey ya da yatay hareket edebilir. Şekil 3.1 de bir vezirin saldırabildiği ve hakim olduğu tüm durumlar gösterilmiştir. Vezirin gidebileceği olası tüm durumlar değerlendirildiğinde görülecektir ki satranç tahtasındaki her kare farklı yerlere yerleştirilebilecek bir vezir tarafından saldırılabilecek veya hakim olunabilecek konumda olacaktır. Vezirin olası bu durumları şekil 3.2 de gösterilmiştir. Baskınlık problemi de buradan çıkmaktadır. Satranç tahtası üzerinde bir vezirle en az nokta seçerek en fazla noktaya ulaşılmak istenmiştir.

Bu problemimizi graflara uyarlarsak satranç tahtası bir G grafı olmak üzere bu tahtanın her bir karesi bir nokta olsun. Bu noktaların her biri dikey, yatay yada çapraz olarak birbirine komşudur. Kenar ise herhangi iki nokta arasındaki dikey, yatay yada çapraz uzaklıktır. O halde satranç tahtasının noktaları aslında bizim için bir baskınlık kümesidir.



Şekil 3.1 Vezirin saldırabileceği ve hakim olduğu durumlar

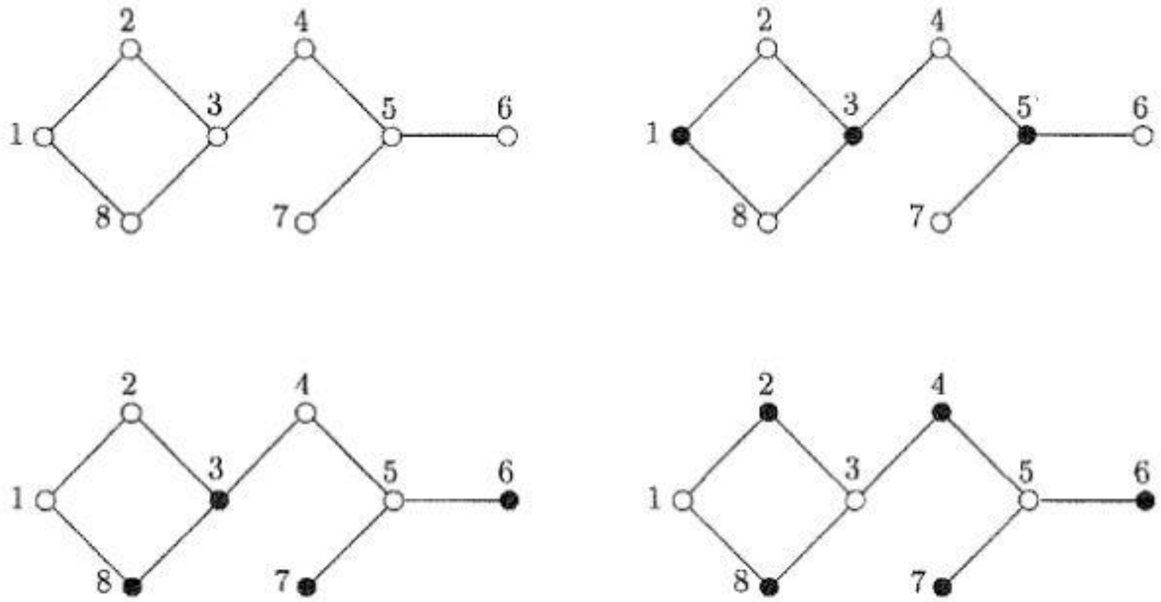


Şekil 3.2 Vezirin olası durumları

Baskınlık sayısının tanımını vermeden önce baskınlık kümesinin tanımını vermeliyiz. Baskınlık sayısının birçok tanımını yapmak mümkün ama en genel tanımını aşağıdaki gibi verebiliriz.

$G=(V,E)$ bir graf ve D kümesi V noktalar kümesinin alt kümesi olmak üzere $u \in V-D$ deki tüm noktalar, D deki her bir noktayla yada D deki en az bir noktaya komşu ise bu D kümesine *baskınlık kümesi* denir. Baskınlık kümeleri arasında en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısına *baskınlık sayısı* denir. $\gamma(G)$ ile gösterilir.

Şekil 3.3 de bir G grafının baskınlık kümesinin farklı durumları gösterilmiştir.



Şekil 3.3 Minimum baskınlık kümesi

3.1. Mertebeleri Bakımdan Baskınlık Sayısı Sınırları

Bu bölümde biz daha çok baskınlık sayısını nokta derecesi, en büyük ve en küçük nokta derecelerine göre sınırlarından bahsedeceğiz. n noktalı bir $G=(V,E)$ grafının baskınlık sayısının $1\leq\gamma(G)\leq n$ aralığında olduğu açıktır. G grafı $\Delta(G)=n-1$ olan bir graf olsun. Bu durumda G deki diğer tüm noktalar en büyük dereceli nokta ile komşudur. Bu yüzden $\gamma(G)=1$ dir. Üst sınır için ise G grafını izole noktalardan oluşan bir graf seçersek tüm noktaları baskınlık sayısı seçmiş oluruz. Buradan da $\gamma(G)=n$ bulunur.

Şimdi baskınlık sayısı ile ilgili bazı bilinen teorem ve sonuçları verelim.

Ore (1962) izole nokta içermeyen graflardaki baskınlık sayısı için bir üst sınır geliştirmeyi başardı.

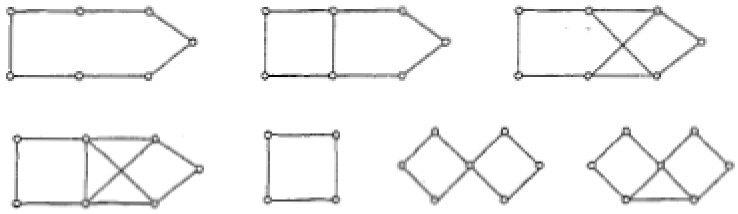
Teorem 3.1. (Ore, 1962) G grafı izole noktası olmayan bir graf ise

$$\gamma(G)\leq\frac{n}{2} \tag{3.1}$$

eşitsizliği mevuttur.

Ore'nin bulduğu sınır $\delta(G)\geq 1$ için uygulanabiliyordu. Bu yüzden $\delta(G)\geq 2$ şeklindeki graflarda yetersiz kalmaktaydı. Bu yüzden McCuaig ve Shepherd (1989)

$\delta(G) \geq 2$ ve şekil 3.4 deki M graf ailesindeki graflardan birinin dışında olan bağlantılı graflar için bir üst sınır geliştirdi.



Şekil 3.4 M graf ailesi

Teorem 3.2. (McCuaig ve Shepherd, 1989) G grafı $\delta(G) \geq 2$ ve $G \notin M$ olan bir graf ise

$$\gamma(G) \leq \frac{2n}{5} \tag{3.2}$$

eşitsizliği mevuttur.

Bu sınırlar daha da geliştiren Reed (1996), $\delta(G) \geq 3$ için aşağıdaki sınırı bulmuştur.

Teorem 3.3. (Reed, 1996) G grafı $\delta(G) \geq 3$ olan bağlantılı bir graf ise

$$\gamma(G) \leq \frac{3n}{8} \tag{3.3}$$

eşitsizliği mevuttur.

Bu sonuçlara dayanarak Haynes ve ark. (1998) yayınlarında $\delta(G) \geq k$ şeklindeki graflar için aşağıdaki teoremin doğru olduğunu savundular.

Varsayım 3.4. (Haynes ve ark., 1998) G grafı $\delta(G) \geq k$ olan herhangi bir graf ise

$$\gamma(G) \leq \frac{kn}{3k-1} \tag{3.4}$$

eşitsizliği mevuttur.

Ancak Caro ve Roditty farklı yıllarda yaptıkları çalışmalarda (1985 ve 1990) $\delta(G) \leq 7$ olan bir graf için varsayım 3.4 deki sınırlardan daha iyi bir sınır elde etmeyi başardılar.

Teorem 3.5. (Caro ve Roditty, 1985 ve 1990) G grafı $\delta(G) \geq 7$ olan herhangi bir graf ise

$$\gamma(G) \leq n\left[1-\delta(G)\left(\frac{1}{\delta(G)+1}\right)^{1+\frac{1}{\delta(G)}}\right] \tag{3.5}$$

eşitsizliği mevuttur.

Varsayım 3.4 de yukarıdaki ispattanda görüleceği gibi $4 \leq \delta(G) \leq 6$ arasındaki değerler için açık bir problem olarak kaldı. Ancak daha sonra Liu ve Sun (2004) 4-düzgün graflar için bu varsayımı ispatladılar.

Teorem 3.6. (Liu ve Sun, 2004) G grafı n mertebeli $4-\textit{düzgün}$ graf ise aşağıdaki eşitsizlik mevuttur.

$$\gamma(G) \leq \frac{4n}{11} \tag{3.6}$$

G grafının mertebesi ve nokta derecesi açısından bilinen en iyi sonucu veren aşağıdaki teoremin üst sınırını Berge (1962) ve alt sınırını da Walikar ve ark. (1979) geliştirmiştir. Bu teoremi ispatıyla birlikte vermekte fayda görüyoruz.

Teorem 3.7. (Berge, 1962 ve Walikar ve ark, 1979) Herhangi bir G grafı için

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n-\Delta(G) \tag{3.7}$$

eşitsizliği mevuttur.

İspat: Herbir nokta en fazla kendisine ve diğer noktalara baskın olabilir. Buradan da $\gamma(G) \geq \lceil n/(1+\Delta(G)) \rceil$ sınırı elde edilir.

Üst sınır için G grafından alacağımız bir u elemanı maksimum nokta derecesine sahip olsun. u noktası, $N[u]$ ve $V-N[u]$ daki noktaların hepsine baskındır. Bu yüzden $V-N(u)$ kümesi $n-\Delta(G)$ elemanların bir baskınlık kümesidir. O halde $\gamma(G) \leq n-\Delta(G)$ dir

3.2. Çap ve Yarıçap Bakımından Baskınlık Sayısı

Bu bölümde uzaklığa bağlı olarak baskınlık sayısı için bulunmuş olan sınırları vereceğiz.

Teorem 3.8. (Haynes ve ark., 1998) G grafı, $diam(G)=2$ olan bir graf ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur.

$$\gamma(G)\leq\delta(G) \tag{3.8}$$

Aşağıdaki teorem baskınlık sayısının alt sınırını, uzaklığı kullanarak bulmamızda büyük öneme sahiptir. Bu teoremi ispatıyla verelim.

Teorem 3.9. (Haynes ve ark., 1998) G herhangi bir bağlantılı graf ise

$$\left\lceil\frac{diam(G)+1}{3}\right\rceil\leq\gamma(G) \tag{3.9}$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat: Bağlantılı bir G grafının baskınlık kümesi S olsun. $diam(G)$ uzunluğu keyfi bir yolun uzunluğu olarak düşünülebilir. Bu çapsal yol her bir $u\in S$ için $\langle N[v]\rangle$ indüklenmiş alt grafının en çok iki kenarını içerir. Buna ek olarak, S baskınlık kümesi olduğundan dolayı bu çapsal yol S nin noktalarının komşuluklarına bağlı en çok $\gamma(G)-1$ kenar içerir. Buradan $diam(G)\leq 2\gamma(G)+\gamma(G)-1=3\gamma(G)-1$ olarak bulunur ve bize istenilen sonucu verir.

Teorem 3.9'u daha da geliştirmeye çalışan DeLaViña ve ark. (2008) çapla bulunan sonucu daha da sınırlayarak bunu yarıçap üzerine uyarlamışlardır.

Teorem 3.10. (DeLaViña ve ark., 2008) G herhangi bir bağlantılı graf ve $n>1$ ise

$$\gamma(G)\geq\frac{2}{3}rad(G) \tag{3.10}$$

eşitsizliği vardır.

3.3. Bazı Baskınlık Sayısı Çeşitleri

Diğer baskınlık sayısı çeşitleri ve onlar hakkında literatürdeki teoremleri bu bölümde vereceğiz.

3.3.1. Total baskınlık sayısı

$S \subseteq V(G)$ olmak üzere $V(G)$ nokta kümesinden aldığımız her $u \in V(G)$ için S de bir $v \in S$ noktası var ve u, v noktaları komşu ise o halde bu S kümesine total baskınlık kümesi denir. Başka bir deyişle $N(S) = V(G)$ oluyorsa S kümesine G grafının total baskınlık kümesi denir. G nin total baskınlık kümeleri arasında en az elemana sahip kümenin eleman sayısına da total baskınlık sayısı denir. $\gamma_t(G)$ ile gösterilir.

Aşağıda total baskınlık sayısının en küçük nokta dereceleri bakımdan genel sınırları verilmiştir.

Cockayne ve ark., (1980) aşağıdaki teoremle total baskınlık sayısı için bulunan ilk sınırı verdiler.

Teorem 3.11. (Cockayne ve ark., 1980) G grafı, $n \geq 3$ noktalı bağlantılı ve $\delta(G) \geq 1$ bir graf ise

$$\gamma_t(G) \leq \frac{2n}{3} \tag{3.11}$$

eşitsizliği vardır.

Henning (2000) bu sınırı bazı grafları dışarıda tutarak bu sınırı daha da geliştirdi.

Teorem 3.12. (Henning, 2000) G grafı, $G \notin \{C_3, C_5, C_6, C_{10}\}$ ve $\delta(G) \geq 2$ olan bağlantılı bir graf ise

$$\gamma_t \leq \frac{4}{7}n \tag{3.12}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Archdeacon ve ark. (2004) aşağıdaki teoremle bu alandaki en çok bilinen sınırı vermiş oldular.

Teorem 3.13. (Archdeacon ve ark., 2004) G bir graf ve $\delta(G) \geq 3$ ise

$$\gamma_t \leq \frac{1}{2}n \tag{3.13}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Son olarak Thomasse ve Yeo (2007) aşağıdaki teoremle $\delta(G) \geq 4$ için daha iyi bir sınır vermeyi başardılar.

Teorem 3.14. (Thomasse ve Yeo, 2007) G bir graf ve $\delta(G) \geq 4$ ise

$$\gamma_t \leq \frac{3}{7}n \tag{3.14}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Total baskınlık sayısı en büyük nokta derecesi ile de ilişkilidir. Bu ilişkiyi en iyi açıklayan teoremlerden birini aşağıda verelim.

Teorem 3.15. (Cockayne ve ark., 1980) G bir graf olmak üzere

a) G grafı izole nokta içermiyorsa $\gamma_t \leq n - \Delta(G) + 1$ dir.

b) G grafı bağlantılı bir graf ve $\Delta(G) < n-1$ ise $\gamma_t \leq n - \Delta(G) + 1$ dir.

Total baskınlık sayısı hakkında diğer önemli sınırlar aşağıda verilmiştir.

Theorem 3.16. (Atapour ve Soltankhah, 2009) G grafı bağlantılı bir graf

$$\gamma_t(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta(G)} \right\rceil \tag{3.15}$$

olacak şekilde bir sınır mevcuttur.

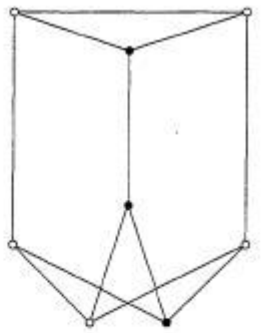
Theorem 3.17. (Atapour ve Soltankhah, 2009) G grafı $diam(G) = 2$ olan bir graf olsun.

$$\gamma_t \leq \delta(G) + 1 \tag{3.16}$$

eşitsizliği mevcuttur.

3.3.2. Bağlantılı baskınlık sayısı

Bağlantılı baskınlık kümesi, bağlantılı indüklenmiş alt graf içeren bir baskınlık kümesidir. Bir baskınlık kümesi G nin her bir parçasından en az bir nokta içermesi gerektiğinden sadece bağlantılı graflar, bağlantılı baskınlık kümesine sahiptir. Bu yüzden bu bölümde bahsettiğimiz tüm graflar bağlantılıdır. En az elamana sahip baskınlık kümesinin eleman sayısına bağlantılı baskınlık sayısı denir. $\gamma_c(G)$ ile gösterilir. Şekil 3.5 de bağlantılı baskınlık sayısını gösteren bir örnek verilmiştir. Görüldüğü gibi bağlantılı baskınlık sayısı $\gamma_c(G)=3$ olarak bulunur.



Şekil 3.5. G grafının bağlantılı baskınlık sayısı

Herhangi bilinmeyen bir baskınlık kümesi aynı zamanda bir total baskınlık kümesi olduğundan dolayı $\Delta(G)<n-1$ olan herhangi bir bağlantılı G graf için $\gamma(G)\le\gamma_t(G)\le\gamma_c(G)$ eşitsizliğinin varlığını söyleyebiliriz.

Bağlantılı baskınlık sayısı için bilinen genel teoremleri verelim.

Teorem 3.18. (Haynes ve ark., 1998) G grafı $\delta(G)\ge k$ olan herhangi bir bağlantılı graf olmak üzere

$$\gamma_c(G)\le 3\left\lfloor \frac{n}{n+k} \right\rfloor - 2 \tag{3.17}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Yukarıdaki Teorem 3.7 de bahsettiğimiz ve üst sınır olarak verilen $\gamma(G)\le n-\Delta(G)$ eşitsizliğini Hemetniemi ve Laskar (1984) bağlantılı baskınlık sayısı için sınır olarak göstermiştir.

Teorem 3.19. (Hemetniemi ve Laskar, 1984) Herhangi bir bağlantılı G grafı için

$$\gamma_c(G)\le n-\Delta(G) \tag{3.18}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Hemetniemi ve Laskar (1984) aynı zamanda bağlantılı baskınlık sayısını, grafın çapı ile ilişkilendirdiler.

Teorem 3.20. (Hemetniemi ve Laskar, 1984) G herhangi bir bağlantılı graf olmak üzere

$$diam(G)-1 \le \gamma_c(G) \tag{3.19}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Duchet ve Meyniel (1982) bağlantılı baskınlık sayısı ile baskınlık sayısı arasındaki ilişkiyi incelemiş ve aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 3.21.(Duchet ve Meyniel, 1982) G herhangi bir bağlantılı graf ise

$$\gamma(G) \le \gamma_c(G) \le 3\gamma(G)-2 \tag{3.20}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Caro ve ark. (2000) aşağıdaki teorem ile Teorem 3.21 i kesinleştirdiler.

Teorem 3.22. (Caro ve ark., 2000) G herhangi bir bağlantılı graf, D ise G grafının t-parçalı indüklenmiş bir alt grafı olmak üzere $\gamma_c(G) \le |D|+2t-2$ eşitsizliği mevcuttur. Özelliklede

$$\gamma(G) \le \gamma_c(G) \le 3\gamma(G)-2 \tag{3.21}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3.3 Eşlendirilmiş baskınlık sayısı

$S \subseteq V(G)$ olmak üzere eğer S kümesi mükemmel eşleşmiş bir indüklenmiş alt graf içeriyorsa bu S kümesine *eşlendirilmiş baskınlık kümesi* denir. En küçük elemanlı eşlendirilmiş baskınlık kümesinin eleman sayısına *eşlendirilmiş baskınlık sayısı* denir. $\gamma_{pr}(G)$ ile gösterilir. Her eşlendirilmiş baskınlık sayısı aslında bir total baskınlık sayısıdır. Bu yüzden izole nokta içermezler. Haynes ve Slater (1998) şu gözlemi yaparak gösterdiler. Eğer bir G grafı izole nokta içermiyorsa $\gamma(G) \le \gamma_t(G) \le \gamma_{pr}(G)$

eşitsizliği olur ve $\gamma_{pr}(G)$ çifttir. Haynes ve Slater (1998) bu baskınlık sayısı için önemli olan aşağıdaki teoremleri ispatlamışlardır.

Teorem 3.23. (Haynes ve Slater, 1998) G grafı izole nokta içermeyen bir graf ise

$$2 \leq \gamma_{pr}(G) \leq n \tag{3.22}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Bu sınırı n ve $\delta(G)$ ile ilişkilendirerek daha iyi bir üst sınır elde ettiler.

Teorem 3.24. (Haynes ve Slater, 1998) G bağlantılı bir graf olmak üzere $n \geq 6$ ve $\delta(G) \geq 2$ ise

$$\gamma_{pr} \leq \frac{2n}{3} \tag{3.23}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Haynes ve Slater (1998) eşlendirilmiş baskınlık sayısı ile baskınlık sayısı arasındaki ilişkiyi veren bir sınır elde etmişlerdir.

Teorem 3.25. (Haynes ve Slater, 1998) G grafı izole nokta içermeyen bir graf ise

$$\gamma_{pr} \leq 2\gamma(G) \tag{3.24}$$

eşitsizliği mevcuttur.

4. UNİTARY CAYLEY GRAFLARIN BASKINLIK SAYILARI

Bu bölümde unitary Cayley grafların domination sayılarını ve bu sayının klik sayısı, kromatik sayı, çap ile olan ilişkilerinden bahsedeceğiz. Bu bölümdeki tüm teorem ve sonuçlar tarafımızdan ispatlanmıştır.

Chelvam ve Rani (2007) aşağıdaki teoremde Z_n üzerinde tanımlanan Cayley graflarda baskınlık sayısı için bir eşitlik olduğunu göstermişlerdir.

Teorem 4.1. (Chelvam ve Rani, 2007) $G = Cay(Z_n, A)$ bir graf olsun. Burada $A = \{1, n-1, 2, n-2, ..., k, n-k\}$ ve $n, k \in Z^+$, $1 \le k \le \frac{(n-1)}{2}$ olmak üzere

$$\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{|A|+1} \right\rceil \tag{4.1}$$

eşitliği mevcuttur.

Chelvam ve Rani (2007) buldukları bu eşitliği önceki bölümümüzde vermiş olduğumuz, Berge (1962) ve Walikar ve ark. (1979) sınırlarını belirlediği $\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \gamma(G) \le n - \Delta(G)$ eşitsizliğini Cayley graflara uyarlamışlardır.

Bizde Chelvam ve Rani (2007) nin bulmuş olduğu sınır değerini unitary Cayley graflara uyarlayarak bir üst sınır belirlemeye çalıştık. Aşağıdaki teoremde bu sınırı göstereceğiz. Teoremi vermeden önce unitary Cayley grafın üreteç kümesinin eleman sayısını Euler fi ($\varphi(n)$) fonksiyon ile bulduğumuzu hatırlayalım. Üreteç kümesi ise

$U_n = \{a \in Z_n : \gcd(a, n) = 1\} = \{1,\ n\text{-}1,\ 2,\ n\text{-}2,\ ...,\ a,\ n\text{-}a\}$ şeklinde

tanımlanırsa burada n, a pozitif tam sayı ve $1 \le \text{a} \le \frac{\text{(n-1)}}{2}$ olmak üzere $k = \frac{|U_n|}{2}$ dir.

Teorem 4.2. $G = (Z_n, U_n)$ bir unitary Cayley graf olsun.

$$\gamma(G) \le \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \tag{4.2}$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat: Unitary Cayley grafların en küçük nokta derecesini $2k$ ile gösterelim. G' kümesi $V(G)$ nokta kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, G' de baskın olmayan noktaların kümesi G'' olsun. Biz iddia ediyoruz ki G' de olmayan bazı noktalar, G''

deki en az $\frac{n}{(k+1)}$ nokta tarafından baskınlaştırılacaktır. Bu yüzden G'' deki her bir nokta en az k komşuluğa sahiptir. Buradan açıkça görülür ki $\sum_{v\in V(G)} N[v] \geq \frac{n}{(k+1)}$ eşitsizliği mevcuttur.

Bu yüzden G grafının her bir noktası en çok $n=|G''|$ nokta tarafından baskınlaştırılır. Bu yüzden G' kümesinin dışındaki bir y noktası en az $\frac{n}{(k+1)}$ nokta tarafında baskın hale getirilmiş olur ki buda iddiamızı doğrular.

Unitary Cayley grafları Klotz ve Sander (2007) çap bakımından sınıflandırmayı başarmışlardır. Biz ise bu grafların baskınlık sayıları ile çapı arasında bir ilişki bulmaya çalıştık. Aşağıdaki teoremde bunu gösterdik.

Teorem 4.3. $G=(Z_n,U_n)$ bir unitary Cayley graf olsun.

$$diam(G)=\gamma(G)=\begin{cases}1, & n\, bir\ asal\ sayı\ ise\\ 2, & n=2^{\alpha}, \alpha>1\ ise\end{cases} \tag{4.2}$$

eşitliği vardır.

İspat: Eğer n asal bir sayı ise $G=K_n$ bir tam graf olur. Tam graflarda $|U_n|=n-1$ olduğundan dolayı nokta kümesinden alacağımız bir nokta tüm noktalara komşudur. Bu yüzden $\gamma(G)=1$ dir. Eğer $n=2^{\alpha}, \alpha>1$ ise G grafı tam iki parçalı bir graf olur. Buradan nokta kümesini aşağıdaki şekilde parçalayabiliriz.

$$V(G)=\{0,2,4,...,n-2\}\cup\{1,3,5,...,n-1\}$$

Bu parçalamadan da görüleceği gibi $diam(G)=2$ dir. Aynı mantıkla iki kümeden aldığımız birer elemanla tüm noktalara ulaşacağımızdan $\gamma(G)=2$ olarak bulunur.

Örnek verecek olursak $G=Cay(Z_8,U_8)$ grafı için üreteç kümesi $U_8=4=\{1,3,5,7\}$ gibi olur. Nokta kümesini $V(G)=\{0,2,4,6\}\cup\{1,3,5,7\}$ şeklinde ayırabileceğimizden dolayı G grafı iki parçalı bir graftır. Ayrılmış olan her kümeden bir eleman alarak komşu noktalara ulaşabileceğimizden baskınlık sayısı $\gamma(Z_8)=\{0,1\}=2$ olarak bulunur.

G grafının baskınlık sayısını aşağıdaki durumlarda da elde etmek mümkündür.

Teorem 4.4. p bir asal sayı ve $\alpha > 1$ pozitif bir tamsayı için $n = p^{\alpha}$ olmak üzere $G = \left(Z_n, U_n\right)$ grafının baskınlık sayısı γ(G)=2 olarak bulunur.

İspat: Eğer n, p asal sayısının bir kuvveti şeklinde ise G grafı tam p-parçalı bir graftır. Üreteç kümesinde en fazla asal sayının kuvvetleri kadar nokta bulunmaz ve bu kuvvetler ardışık olamayacağından dolayı baskınlık kümesi herhangi bir $a \in V(G)$ için $D = \{a, a+1\}$ şeklinde seçilebilir.

G=(Z_9,U_9) grafını ele alırsak üreteç kümesi U_9={1,2,4,5,7,8} şeklindedir. Burada n=3^2 olduğundan dolayı baskınlık sayısı alacağımız herhangi bir sayı ve bir fazlası olarak seçebiliriz. Bu yüzden baskınlık sayısı γ(G)=2=$\{0,1\}$ bulunur.

Teorem 4.5. Eğer n tek ve en fazla üç farklı asal bölene sahip ise G grafının baskınlık sayısı $\gamma(G) = 3$ ya da $\gamma(G) = 4$ olarak bulunur.

İspat: $n = p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} p^{\alpha_3}$, $p_{1,} p_2, p_3 > 2$ asal sayılar ve $\alpha_{1,} \alpha_2, \alpha_3 \geq 1$ için üreteç kümesinde $n$nin asal bölenleri ve onların katları n ile aralarında asal olmadığından dolayı bulunmaz. Buda iki asal böleni olan n sayısı için en fazla ard arda iki sayının üreteç kümesinde bulunmaması demektir. Bu durumda grafın nokta kümesinden alacağımız bir $a \in V(G)$ elemanı baskınlık sayısı olursa üreteç kümesinde olmayan sayılara komşu olan en az iki sayı daha seçilmelidir. Bu yüzden $\gamma(G) = 3$ olur. Benzer mantıkla üç farklı asal böleni olan n sayısı için baskınlık sayısı $\gamma(G) = 4$ olarak bulunur.

Örnek olarak $n = 3 \cdot 5$ için G=(Z_{15},U_{15}) grafının üreteç kümesi U_{15}={1,2,4,7,8,11,13,14} olur. Üreteç kümesine dikkat edilirse n sayısının asal bölenleri olan 3 ve 5 sayılarının kendileri ve bu sayıların böldüğü herhangi bir sayı bulunmamaktadır. Bu yüzden baskınlık sayısı $\gamma(G) = 3$ olarak bulunur.

Aşağıdaki teoremde baskınlık sayısının, klik sayısı ve kromatik sayı ile olan ilişkisini sınıflandırarak vermeye çalıştık. Bu sınıflandırmayı vermeden önce Boggess ve ark. (2008) nın ispatlamış olduğu aşağıdaki teoremi lemma olarak verelim.

Lemma 4.6. (Boggess ve ark., 2008) $G = (Z_n, U_n)$ bir graf ve $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_s^{e_s}$ olsun. Burada $p_1 < p_2 < ... < p_s$ ve tüm $i = 1, 2, ..., s$ için $e_i \geq 1$ dir. Buradan

$$\omega(G) = \chi(G) = p_1 \tag{4.3}$$

eşitliği vardır.

Bu lemmanın ardından aşağıda, sınıflandırmış olduğumuz baskınlık sayısı ile ilgili teoremimizi verebiliriz.

Teorem 4.7. $n \geq 2$ için $G = (Z_n, U_n)$ bir unitary Cayley graf olsun. n için aşağıdaki

i. $n\,bir\ asal\ sayı$

ii. $n = p^{\alpha}, p \geq 2\,bir\ asal\ sayı, \alpha > 1$

iii. $n\,tek\ fakat\ asal\ sayı\ değil\ ve\ en\ çok\ iki\ farklı\ asal\ bölene\ sahip$

iv. $n\,çift\ ve\ bir\ tek\ asal\ sayı\ bölene\ sahip$

durumlarından biri mevcut ise

$$\omega(G) = \chi(G) \geq \gamma(G) \tag{4.4}$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat: Unitary Cayley graflarda kromatik ve klik sayısının eşit olduğunu ve bir n tamsayısı için n nin en küçük asal böleni olduğunu lemma 4.6 dan biliyoruz. Bunu verdikten sonra durumları tek tek inceleyelim. $n \geq 2$ için

i. Eğer n asal bir sayı ise $G = K_n$ bir tam graf olur. Tam graflarda $|U_n| = n-1$ olduğundan dolayı nokta kümesinden alacağımız bir nokta tüm noktalara komşudur. Bu yüzden $\gamma(G) = 1$ dir. $n \geq 2$ olduğundan dolayı en küçük asal bölen 2 dir. Buda $\omega(G) = \chi(G) = 2$ olmasıdır. İstenilen eşitsizlik sağlanmış olur.

ii. Eğer $n = p^{\alpha}$ ise Teorem 4.4. de görüleceği gibi $\gamma(G) = 2$ dir. $n \geq 2$ olduğundan p en küçük 2 olur. Yani $\omega(G) = \chi(G) = 2$ olması demektir. Buradan da anlaşılacağı gibi $\omega(G) = \chi(G) = \gamma(G)$ eşit olmuş olur. Buda istenilen eşitsizliği sağlamış olur.

iii. Farz edelim ki n tek fakat asal sayı olmasın.

1.durum: $n = p^{\alpha}$, $p \geq 3, \alpha > 1$ ise Teorem 4.4 den dolayı $\gamma(G) = 2$ olarak bulunur. n nin en küçük asal böleni olan p sayısı $p \geq 3$ olduğundan $\omega(G) = \chi(G) = 3$ olur. Bundan dolayı $\omega(G) = \chi(G) \geq \gamma(G)$ eşitsizliğimiz sağlanmış olur.

2.durum: $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_s^{e_s}$ ise $p_1 < p_2 < ... < p_s$, $p_1 \geq 3$ ve $i = 1, 2, ..., s$ için $e_i \geq 1$ olmak üzere lemma 4.6 dan en küçük asal bölen p_1 olduğundan dolayı $\omega(G) = \chi(G) = p_1$ dir. Burada $p_1 \geq 3$ olması $\omega(G) = \chi(G)$ eşitliğinin en az 3 olması demektir. Baskınlık sayısı ise Teorem 4.5 den 2 farklı asal bölene sahip olan sayılar için $\gamma(G) = 3$dür. Buradan da en küçük asal sayı baskınlık sayısına eşit olduğundan dolayı istenilen eşitsizlik sağlanır.

iv. $n = p_1 p_2$ ve $p_1 = 2$ olmak üzere $p_2 > 2$ olan bir asal sayı olduğudan elde edilen graf parçalı bir graftır. Parçalı graf olmasından dolayı 0 ve p_2 noktasında iki parçalı graf olur. Baskınlık kümesi en az $D = \{0, p_2\}$ seçilebilir. Bu yüzden baskınlık sayısı $\gamma(G) = 2$ dir. Kromatik ve klik sayısı n nin en küçük asal bölenine eşit olduğundan dolayı buda 2 ye eşittir. Buradan da istenilen eşitsizliğe ulaşılmış olur.

Teorem 4.8. $G = (Z_n, U_n)$ bir unitary Cayley graf olsun. Eğer n çift yada n tek ve en çok iki farklı asal bölene sahip ise bu graf mükemmeldir. Mükemmel grafların baskınlık sayısı $\gamma(G) = 2$ dir.

İspat: n sayısının çift yada en çok iki farklı asal bölene sahip olduğu durumdaki unitary Cayley grafın mükemmelliğini Klotz ve Sande (2007) göstermiştir. Teorem 4.5. ve Teorem 4.3. den istenilen özellikteki grafların baskınlık sayısının $\gamma(G) = 2$ olduğu açıktır. O halde Mükemmel olan bir unitary Cayley grafın baskınlık sayısı 2 olarak bulunmuş olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Son bölümde; Teorem 4.1. de verilen baskınlık sayısı ile ilgili teorem unitary Cayley grafların baskınlık sayısı için uyarlanmış ve yeni bir *üst sınır* bulunmuştur. Teorem 2.7. de verilen unitary Cayley grafların çap bakımından sınıflandırılmalarını kullanarak, bu sınıflandırmalardaki *baskınlık sayısı* değerleri Teorem 4.3., Teorem 4.4. ve Teorem 4.5 te verilmiştir. Lemma 4.6. da unitary Cayley graflar için verilen kromatik ve klik sayılarını bulma yöntemini, Teorem 2.7. de kullanmış olduğumuz sınıflandırmaya uygulayarak *klik ve kromatik sayıları* elde edilmiştir. Elde etmiş olduğumuz bu sonuçları baskınlık sayısı olarak bulduğumuz sonuçlarla kıyaslanmış ve baskınlık sayısı için yeni bir *üst sınır* olarak verilmiştir.

Son olarak da *mükemmel* olan bir unitary Cayley grafın baskınlık sayısı nın 2 olduğu gösterilmiştir

.

5.2 Öneriler

Unitary Cayley grafların baskınlık sayısı ile ilgili olan bu sınırların daha da daraltılması için çalışılabilir. Bu sınırların elde edilmesinde kullanılan yöntemler farklı bir baskınlık sayısında uygulanabilir. Unitary Cayley graflar üzerinde farklı baskınlık sayıları için sınırlar bulunabilir.

KAYNAKLAR

Atapour M. and Soltankhah N., 2009, On Total Dominating Sets in Graphs. *Int. J. Contemp. Math. Sciences,* Vol. 4, no. 6, 253 – 257

Beaudrap N.D., 2010, On restricted unitary Cayley graphs and symplectic transformations modulo n, *Electron. J. Combin*., 17#R69.

Biggs, N., 1993, Algebraic graph theory. Second Edition. *Cambridge Mathematical Library.Cambridge University Press, Cambridge.*

Boggess, M., Jackson-Henderson, T., Jiménez, I. and Karpman, R., 2008, The structure of unitary Cayley graphs, *SUMSRI Journal.*

Bondy J.A. and Murty U.S.R., 1978, Graph Theory with Applications, *Macmillan*,.

Cockayne E. J., Dawes R. M., and Hedetniemi S. T., 1980, Total domination in graphs. *Networks*, 10:211-219.

Dejter, I. And Giudici, R. E., 1995, On unitary Cayley graphs. *J. Combin. Math. Combin.Comput. 18* ,121-124.

DeLaViña E., Pepper R., Waller B., 2008, Lower bounds for the domination number, *Manuscript* .

Godsil, C., and Royle, G., 2001, Algebraic graph theory. Graduate Texts in Mathematics.*Vol 207. Springer*,.

Harris, J M., Hirs J. L. and Mossinghoff M. J., 2000. Combinatorics and Graph Theory. *New York: Springer-Verlag. pp. 5*. ISBN 0-387-98736-3.

Haynes T.W., Hedetniemi S.T., Slater P.J., 1998 Fundamentals of Domination in Graphs. *Marcel Dekker*, New York, MR 1605684

Henning M. A., (2000), Graphs with large total domination number. J. Graph Theory 35, 21-45.

Jajcay, R., 2000, “The structure of automorphism groups of Cayley graphs and maps”, *Journal of Algebra*, **12**, 73.

Klotz ,W. and Sander T, 2007, Some Properties of Unitary Cayley Graphs. *Electronic Journal of Combinatorics 14* no. 1, Research Paper 45.

Newman, J, 1953, Leonhard Euler and the Konigsberg Bridges, *Sci. Amer*. 189, 66-70

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Bahadır YILDIRIM
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	ARTVİN/ 1986
Telefon	**:**	-
Faks	**:**	-
e-mail	**:**	bahadir.yildirim@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Konya Selçuklu Lisesi, Selçuklu, Konya**	2003
Üniversite	:	**Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Kurupelit, Samsun**	2009
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2007- 2009	Final Dergisi Dershaneleri	Matematik öğretmeni
2010- 2011	Elit eğitim Kurumları	Matematik öğretmeni

YABANCI DİLLER

İngilizce