

T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU BURGERS' DENKLEMİNİN BİR NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Gonca CANBEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA  
Ağustos 2012

Tezin Başlığı: İki Boyutlu Burgers' Denkleminin Bir Nümerik Çözümü

Tezi Hazırlayan: Gonca CANBEK

Sınav Tarihi: 06.08.2012

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. E. Nesligül AKSAN (Danışman) (İnönü Üniv.) \_\_\_\_\_

Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR (Üye) (İnönü Üniv.) \_\_\_\_\_

Yrd. Doç. Dr. N. Murat YAĞMURLU (Üye) (İnönü Üniv.) \_\_\_\_\_

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Mehmet ALPASLAN  
Enstitü Müdürü

## ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “ *İki Boyutlu Burgers’ Denkleminin Bir Nümerik Çözümü* ” başlıklı bu çalışmamın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Gonca CANBEK

*Anneme, Babama ve kardeşlerime...*

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## İKİ BOYUTLU BURGERS' DENKLEMİNİN BİR NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Gonca CANBEK

İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

61+viii sayfa

2012

Danışman: Doç. Dr. E. Nesligül AKSAN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Burgers' denkleminin tarihçesi verildi.

İkinci bölümde, konuyla ilgili temel tanımlar verildi.

Üçüncü bölümde, Varyasyonel İterasyon Metodu sunuldu ve metod çeşitli problemlere uygulandı.

Dördüncü bölüm tezin orjinal kısmıdır. Bu bölümde bir ve iki boyutlu Burgers' denkleminin Varyasyonel İterasyon Metodu uygulandı.

Beşinci bölüm dördüncü bölümün nümerik sonuçlarına ayrılmıştır. Farklı viskosite değerleri için değişik zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümler tablolar ve grafikler verilerek karşılaştırıldı.

ANAHTAR KELİMELEER: Burgers' Denklemi, Varyasyonel İterasyon Metodu

# ABSTRACT

M. Sc. Thesis

A NUMERICAL SOLUTION OF  
TWO DIMENSIONAL BURGERS' EQUATION

Gonca CANBEK

İnönü University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

61+viii pages

2012

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. E. Nesligül AKSAN

This thesis consists of five chapters.

In Chapter 1, the history of the Burgers' equation is presented.

In Chapter 2, some fundamental definitions related to the subject are given.

In Chapter 3, Variational Iteration Method is presented and the method is applied to various problems.

The 4<sup>th</sup> Chapter is the original part of the thesis. In this chapter, Variational Iteration Method is applied to one and two dimensional Burgers' equation.

Chapter 5 is devoted to numerical results of the fourth chapter. The obtained numerical solutions for various values of viscosity at various time steps are compared with the exact solutions by presenting tables and graphs.

KEY WORDS: Burgers' Equation, Variational Iteration Method

## TEŞEKKÜR

Beni bu konuda alıŐmaya teŐvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren tez danışmanım Sayın Do. Dr. E. Nesligül AKSAN' a, bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŐ'e ve Matematik Bölümünün bütün değerli elemanlarına, zaman zaman karşılaŐtım problemleri tartıŐmak için bana değerli zamanını ve bilgilerini sunan sevgili hocam Yrd. Doç. Dr. Haydar ALICI' ya, manevi desteklerinden dolayı anneme, babama ve kardeşlerime teşekkür ederim.

# İçindekiler

ÖZET . . . . .	i
ABSTRACT . . . . .	ii
TEŞEKKÜR . . . . .	iii
İÇİNDEKİLER . . . . .	iv
1 GİRİŞ . . . . .	1
2 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR . . . . .	3
3 VARYASYONEL İTERASYON METODU . . . . .	6
3.1 Varyasyonel Hesap . . . . .	6
3.2 Lagrange Çarpanları Metodu . . . . .	9
3.3 Bir Fonksiyonel İçin Lagrange Çarpanları . . . . .	10
3.4 Varyasyonel İterasyon Metodu . . . . .	12
3.5 Yöntemin Çeşitli Problemlere Uygulanması . . . . .	13
3.5.1 Lineer Adi Diferansiyel Denklemler . . . . .	13
3.5.2 Bir Boyutlu Homojen Isı Denklemi . . . . .	15
3.5.3 Bir Boyutlu Homojen Olmayan Isı Denklemi . . . . .	17
4 BURGERS' DENKLEMİNİN VARYASYONEL İTERASYON METODU İLE ÇÖZÜMÜ . . . . .	20
4.1 Bir Boyutlu Burgers' Denklemi . . . . .	20
4.2 İki Boyutlu Burgers' Denklem Sistemi . . . . .	23
4.3 Model Problemler . . . . .	26
4.3.1 Burgers' Denklemi ve Hopf-Cole Dönüşümü . . . . .	26
5 SONUÇ VE TARTIŞMA . . . . .	34
6 Kaynakça . . . . .	56
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	61

## Tablo Listesi

5.1	Problem 4.3.1 için $v=0.1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	38
5.2	Problem 4.3.1 için $v=0.05$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	38
5.3	Problem 4.3.1 için farklı zaman adımlarında farklı viskosite değerleri için elde edilen nümerik sonuçlar . . . . .	39
5.4	Problem 4.3.1 için $v=0.1$ için direkt VIM ile Hopf-Cole dönüşümünden sonra VIM uygulanmasıyla elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman adımları için karşılaştırılması . . . . .	39
5.5	Problem 4.3.2 için $v=0.1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	40
5.6	Problem 4.3.2 için $v=0.05$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	41
5.7	Problem 4.3.3 için $v=1, y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	43
5.8	Problem 4.3.3 için $v=0.1, y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . .	44
5.9	Problem 4.3.4, $u(x,y,t)$ için $y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . .	46
5.10	Problem 4.3.4, $v(x,y,t)$ için $y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . .	47
5.11	Problem 4.3.5, $u(x,y,t)$ için $R=1, y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması .	48
5.12	Problem 4.3.5, $v(x,y,t)$ için $R=1, y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması .	49
5.13	Problem 4.3.5, $u(x,y,t)$ için $R=10, y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması .	50
5.14	Problem 4.3.5, $v(x,y,t)$ için $R=10, y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması .	51

- 5.15 Problem 4.3.5,  $u(x,y,t)$  için  $R=100$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . 52
- 5.16 Problem 4.3.5,  $v(x,y,t)$  için  $R=100$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . 53

## Şekil Listesi

5.1	Problem 4.3.1 için $v=0.000001$ için sırasıyla $t=0.05$ , $t=0.1$ , $t=0.2$ için elde edilen nümerik çözümler . . . . .	36
5.2	Problem 4.3.1 için $v=0.000001$ için sırasıyla $t=0.3$ , $t=0.4$ için elde edilen nümerik çözümler . . . . .	36
5.3	Problem 4.3.1 için $v=1$ için sırasıyla $t=0.01$ , $t=0.03$ , $t=0.05$ için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	37
5.4	Problem 4.3.1 için $v=0.1$ için sırasıyla $t=0.05$ , $t=0.1$ , $t=0.15$ için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	37
5.5	Problem 4.3.1 için $v=0.05$ için sırasıyla $t=0.05$ , $t=0.1$ , $t=0.15$ için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	40
5.6	Problem 4.3.2 için $v=0.1$ için sırasıyla $t=0.01$ , $t=0.05$ , $t=0.1$ için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	41
5.7	Problem 4.3.2 için $v=0.05$ için sırasıyla $t=0.01$ , $t=0.05$ , $t=0.1$ için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	42
5.8	Problem 4.3.2 için $v=0.02$ için sırasıyla $t=0.05$ , $t=0.1$ , $t=0.15$ için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	42
5.9	Problem 4.3.3 için $v=1$ için sırasıyla $t=0.1$ , $t=0.5$ , $t=1$ , $t=1.5$ için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	43
5.10	Problem 4.3.3 için $v=0.1$ için sırasıyla $t=0.1$ , $t=0.2$ , $t=0.3$ , $t=0.4$ , $t=0.5$ için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması .	44
5.11	Problem 4.3.3 için $v=0.05$ için sırasıyla $t=0.05$ , $t=0.1$ , $t=0.15$ , $t=0.2$ için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . .	45
5.12	Problem 4.3.3 için $v=0.1$ , $t=0.1$ için sırasıyla nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	45
5.13	Problem 4.3.3 için $v=0.05$ , $t=0.1$ için sırasıyla nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	46
5.14	Problem 4.3.4 için sırasıyla $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ için farklı zaman adımlarında nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması . . . . .	47

5.15 Problem 4.3.5, $u(x,y,t)$ için $R=1$ , $y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması	48
5.16 Problem 4.3.5, $v(x,y,t)$ için $R=1$ , $y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması	49
5.17 Problem 4.3.5, $u(x,y,t)$ için $R=10$ , $y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması	50
5.18 Problem 4.3.5, $v(x,y,t)$ için $R=10$ , $y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması	51
5.19 Problem 4.3.5, $u(x,y,t)$ için $R=100$ , $y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması	52
5.20 Problem 4.3.5, $v(x,y,t)$ için $R=100$ , $y=1$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması	53
5.21 Problem 4.3.5, $u(x,y,t)$ için $R=50$ için sırasıyla $y=-5$ , $y=0$ , $y=5$ için nümerik çözümler . . . . .	54
5.22 Problem 4.3.5, $v(x,y,t)$ için $R=50$ için sırasıyla $y=-5$ , $y=0$ , $y=5$ için nümerik çözümler . . . . .	55

# 1. GİRİŞ

$v$ , bir reel sabit olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

non-linear kısmi diferansiyel denklem Burgers' denklemi olarak bilinir. Burgers' denklemi ilk olarak 1915' de Bateman' ın sıvıların hareketi üzerine yaptığı makalesinde görüldü [1]. J. M. Burgers' in özellikle turbulans teorisi üzerine yaptığı çalışmalarda denklemi model olarak kullanması, Burgers' denkleminin bilim dünyasında popüler bir denklem olarak yer almasını sağladı [2–11]. Burgers bir boyutlu turbulans ve şok dalgaları için denklemi model olarak kullanmayı önerdi [4]. Cole [13] denklemin şok dalga teorisi ve turbulans teorisi ile ilişkisini verdi. Denklemin küçük bir parametreyle çarpılmış yüksek mertebeden türevleri içermesinden dolayı denklemin Navier-Stokes denklemlerine benzediği Lagerstrom vd. [12] tarafından vurgulandı. Goldberg [14] denklemin sonlu genlikli enine hidromagnetik dalgalarla olan ilişkisini ve Pospelov [15] denklemin izotropik katılardaki elastik dalgalarla ilişkisini verdi. Denklemin sayılar teorisi ile olan ilişkisi ise Van der Pol [16] tarafından verildi.

Bir çok araştırmacı Burgers' denkleminin çözümü için çeşitli nümerik çözüm metodları kullanmıştır. Kutluay, Bahadır ve Özdeş [17] açık sonlu farklar metoduyla bir boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümleri üzerine çalıştılar. Aksan, Özdeş ve Öziş [18] en küçük kareler yaklaşımıyla bir boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümünü elde ettiler. Xie vd. [19] kompakt sonlu farklar metodu yardımıyla bir boyutlu Burgers' denklemini nümerik olarak çözdüler ve metodun kararlılığını incelediler. Öziş, Aksan ve Özdeş [31] bir boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini sonlu eleman yöntemi ile elde ettiler. Aksan [32] bir boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için zamanı ayrıştırma metodu üzerine kurulmuş sonlu eleman metodunu kullandı. Abdou ve Soliman [30] Varyasyonel

İterasyon Metodu kullanarak bir boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini elde etti ve elde ettikleri çözümleri Adomian decomposition metodu ile elde edilen çözümlerle karşılaştırdılar. Daha sonra Soliman [29] iki boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini denkleme Varyasyonel İterasyon Metodu uygulayarak elde etti. Bir ve iki boyutlu Burgers' denkleminin tam ve nümerik çözümlerinin elde edildiği bir diğer çalışma da Biazar ve Aminikhah [27] tarafından verildi. Jain ve Holla [20] kübik spline fonksiyonları kullanarak sonlu farklar metodu ile bir ve iki boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümünü elde ettiler. El-Sayed ve Kaya [21] decomposition metoduyla iki boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümünü elde ettiler. Liu ve Weiping [22] iki boyutlu Burgers' denkleminin lattice Boltzmann metodu ile nümerik çözümlerini araştırdılar. Bahadır [23] kapalı sonlu farklar metodu ile iki boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini elde etti. Mittal ve Jiwari [24] iki boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için Quadrature metodunu kullandılar. İki boyutlu Burgers' denklemini için bir spektral yaklaşım Boules ve Eick [25] tarafından verildi. Liao [33] iki boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için dördüncü mertebeden sonlu farklar metodunu kullandı.

Bu çalışmada bir ve iki boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümleri Varyasyonel İterasyon Metodu ile elde edildi ve elde edilen nümerik çözümler denklemin analitik çözümleri ile karşılaştırıldı.

## 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

**Tanım 2.0.1.** *Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev varsa bu değişkene bağımsız değişken, türevi alınan değişkene de bağımlı değişken denir [45].*

**Tanım 2.0.2.** *Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir [45].*

**Tanım 2.0.3.** *Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin bir tek bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini içeren diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir [45].*

**Tanım 2.0.4.** *Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin en az iki bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini içeren bir diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir [45].*

**Tanım 2.0.5.** *Bir diferansiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir [45].*

**Tanım 2.0.6.** *Bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken (birden fazla bağımlı değişken olması halinde bağımlı değişkenler) ve bunların denklemde görülen çeşitli mertebeden türevleri birinci dereceden ve denkleme bağımlı değişken ve onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenin (birden fazla bağımsız değişken olması halinde bağımsız değişkenlerin) fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Aksi halde lineer olmayan(non-lineer) diferansiyel denklem adını alır [44].*

**Tanım 2.0.7.**  $(p, q) \in R^2$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun.

$$K(\varepsilon) = \{(x, y) : \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} < \varepsilon\} \subset R^2$$

kümesine  $(p, q)$  merkezli  $\varepsilon$ - yarıçaplı açık yuvar veya  $(p, q)$  noktasının  $\varepsilon$ - komşuluğu denir [43].

**Tanım 2.0.8.**  $A \subset R^2$ ,  $f : A \rightarrow R$  bir fonksiyon,  $(a, b) \in A$  olsun. Eğer her  $(x, y) \in K_1(\varepsilon)$  için

$$f(x, y) \leq f(a, b)$$

olacak şekilde  $(a, b)$  noktasının bir  $K_1(\varepsilon)$  komşuluğu varsa  $f$  fonksiyonu  $(a, b)$  noktasında bir yerel (lokal) maksimuma sahiptir denir  $f(a, b)$  sayısına da fonksiyonun bir yerel maksimum değeri denir.

$(c, d) \in A$  olsun. Eğer her  $(x, y) \in K_2(\varepsilon)$  için

$$f(x, y) \geq f(c, d)$$

olacak şekilde  $(c, d)$  noktasının bir  $K_2(\varepsilon)$  komşuluğu varsa  $f$  fonksiyonu  $(c, d)$  noktasında bir yerel (lokal) minimuma sahiptir denir  $f(c, d)$  sayısına da fonksiyonun bir yerel minimum değeri adı verilir.

Yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına fonksiyonun yerel ekstremum noktaları denir [43].

**Tanım 2.0.9.** Herhangi iki  $M_1$  ve  $M_2$  cümlesi verilsin. Her  $u \in M_1$  elemanını bir  $v \in M_2$  elemanına dönüştüren ve

$$v = Au$$

şeklinde tanımlı  $A$  kuralına  $M_1$  den  $M_2$  ye bir operatör denir [46].

**Tanım 2.0.10.** Bir  $A$  operatörünün tanım bölgesi  $D_A$  olsun.  $u_1, u_2, \dots, u_N \in D_A$  bölgesindeki keyfi elemanlar ve  $a_1, a_2, \dots, a_N$  keyfi reel sabitler olmak üzere

$$A(a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_Nu_N) = a_1Au_1 + a_2Au_2 + \dots + a_NAu_N$$

oluyor ise  $A$  operatörüne lineerdir denir [46].

**Tanım 2.0.11.**  $Y$  bir fonksiyonlar kümesi olmak üzere

$$I : Y \rightarrow R$$

şeklinde tanımlı operatöre fonksiyonel denir. Fonksiyoneller genellikle

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

gibi fonksiyonları ve türevlerini içeren belirli integraller şeklindedir [38].

**Tanım 2.0.12.**  $I$  bir fonksiyonel olsun.  $\varepsilon > 0$  olmak üzere

$$\delta I = \varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(y + \varepsilon\eta) - I(y)}{\varepsilon} = \varepsilon \left. \frac{dI(y + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyonelin türevi ifadesine varyasyon denir. Burada  $y$  ve  $\eta$  birer fonksiyon,  $\varepsilon$  ise skalerdir [38].

**Tanım 2.0.13.**  $y = f(x)$  fonksiyonu  $a$  noktasının bir komşuluğunda her mertebeden türevelere sahip olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

serisine  $f$  fonksiyonunun  $a$  noktasındaki Taylor serisi denir [43].

$z = f(x, y)$  fonksiyonunun  $(a, b)$  noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)]^{(k)} \\ &= f(a, b) + \frac{1}{1!} [f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)] \\ & \quad + \frac{1}{2!} [f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a, b)(y-b)^2] + \dots \end{aligned}$$

serisine  $f$  fonksiyonunun  $(a, b)$  noktasındaki Taylor serisi denir [43].

### 3. VARYASYONEL İTERASYON METODU

#### 3.1 Varyasyonel Hesap

Matematiksel fizik, elastikiyet teorisi, hidrodinamik gibi bir çok alanda ortaya çıkan problemlerin matematiksel modeli yapıldığında genellikle kısmi diferansiyel denklemler yada nadiren adi diferansiyel denklemler karşımıza çıkar. Bu problemlerin çözümü için; problemlerin çözümünü cebirsel bir denklem sistemine dönüştüren direkt metodlar yaygın olarak uygulandığı gibi birçok durumdada varyasyonel hesap dediğimiz diferansiyel denklemin çözümü yerine buna denk olan bir integralin değerini minimum yapan bir fonksiyon aranır.

Varyasyonel hesap;

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (3.1.1)$$

ile tanımlanan fonksiyonelin minimum değerinin bulunmasıdır [38, 39].

Burada  $F(x, y, y')$  problemin ifadesinden tanımlanan bir fonksiyondur. Eğer  $x$  bağımsız değişkeni sabit,  $y$  değişken olarak gözönüne alınırsa (3.1.1) integrali farklı eğriler boyunca farklı değerler alır. Amaç; bu integrali minimum yapan  $y(x)$  eğrisini bulmaktır [38, 39].

Kabul edelim ki  $y(x)$  (3.1.1) ifadesini minimum yapan fonksiyon olsun. Bu durumda  $y(x)$  fonksiyonunun bir komşuluğunda tanımlı fonksiyon  $y(x) + \varepsilon\eta(x)$  şeklinde olsun. Burada  $\eta(x)$   $[a, b]$  aralığında sürekli ve  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  koşulunu sağlayan bir fonksiyon,  $\varepsilon$  ise bir parametredir. Bu durumda bu fonksiyonlar cinsinden (3.1.1) integrali

$$I(\varepsilon) = \int_a^b F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') dx$$

şeklinde yazılabilir. İntegrali minimum yapan fonksiyon  $y(x)$  olduğuna göre  $\varepsilon = 0$  için

$$\left. \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

olmalıdır.

$F(\varepsilon) = F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\varepsilon} &= \int_a^b \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} dx \\ \Rightarrow \frac{dI}{d\varepsilon} &= \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial (y + \varepsilon\eta)} \eta + \frac{\partial F}{\partial (y' + \varepsilon\eta')} \eta' \right) dx\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade  $\varepsilon = 0$  için yazılırsa;

$$\begin{aligned}\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta - \eta \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right|_a^b = 0 \\ \Rightarrow \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx &= 0\end{aligned}$$

elde edilir [38, 39].

**Lemma 3.1.1.**  $M(x) \in C(a, b)$ ,  $\eta(x) \in C^1(a, b)$  ve  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  olmak üzere bütün  $\eta$  fonksiyonları için

$$\int_a^b \eta(x) M(x) dx = 0$$

ise

$$M(x) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

dir [38, 39].

**İspat 3.1.1.**  $\eta(x)$ ,  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  şartını sağlayan bir sürekli fonksiyon olsun. Kabul edelim ki  $\eta(x) = -M(x)(x-a)(x-b)$  olsun.  $M(x)$  sürekli olduğundan  $\eta(x)$  fonksiyonu da sürekli dir. Ayrıca  $[a, b]$  aralığında  $M(x)\eta(x) \geq 0$  dir. Diğer taraftan negatif olmayan bir fonksiyonun belirli integrali sifıra eşit ise fonksiyonun kendisinde sifıra eşit olmalıdır. O halde

$$\begin{aligned}0 &= M(x)\eta(x) \\ &= M(x)[-M(x)(x-a)(x-b)] \\ &= [M(x)]^2[-(x-a)(x-b)]\end{aligned}$$

olur. Bu durumda  $(a, b)$  aralığında  $[-(x-a)(x-b)] > 0$  olduğundan  $[a, b]$  aralığında  $[M(x)]^2 = 0$  dir. Dolayısıyla  $[a, b]$  aralığında  $M(x) = 0$  olur [38, 39].

Lemma (3.1.1) in kullanılmasıyla

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.1.2)$$

elde edilir. (3.1.2) denkleminin Varyasyonel Problem ile birleşmiş Euler denklemini denir [38, 39].

Böylece  $y(x)$  fonksiyonu (3.1.1) integralini minimum yapan bir fonksiyon ise;  $y(x)$  (3.1.2) Euler denklemini sağlamalıdır.

Şimdi  $I(\varepsilon)$  fonksiyonu ile  $I(y + \varepsilon\eta)$  fonksiyoneli arasındaki ilişkiyi kurmak için;  $I(\varepsilon)$  fonksiyonu ve  $I(y + \varepsilon\eta)$  fonksiyoneli  $\varepsilon = 0$  civarında Taylor serisine açılırsa;

$$I(\varepsilon) = I(0) + \left. \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \left. \frac{d^2I(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots, \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} I(y + \varepsilon\eta) &= \int_0^1 F(x, y, y') dx + \varepsilon \int_0^1 \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \eta^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} 2\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} (\eta')^2 \right] dx + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(y + \varepsilon\eta) = I(y) + \varepsilon I_1(y, \eta) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 I_2(y, \eta) + \dots \quad (3.1.4)$$

elde edilir [38]. (3.1.3) ve (3.1.4) denklemlerinden

$$\left. \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \equiv I_1(y, \eta)$$

elde edilir.

$$\delta I \equiv \varepsilon I_1(y, \eta)$$

ifadesine  $I'$  nın birinci varyasyonu denir [38].

$F = F(u)$  ve  $G = G(u)$  olmak üzere  $\delta'$  nın bazı özellikleri aşağıdaki gibidir [40]:

1.  $\delta(F \mp G) = \delta(F) \mp \delta(G)$
2.  $\delta(FG) = G\delta(F) + F\delta(G)$

$$3. \delta \left( \frac{F}{G} \right) = \frac{G\delta(F) - F\delta(G)}{G^2}$$

$$4. \delta [(F)^n] = nF^{n-1}\delta(F)$$

$$5. \delta \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \delta F(x) dx$$

$$6. \frac{d}{dx} (\delta F) = \delta \left( \frac{dF}{dx} \right)$$

### 3.2 Lagrange Çarpanları Metodu

$f(x, y, z)$ ;  $g(x, y, z) = 0$  yan şartı altında ekstremum değerleri aranan bir fonksiyon olsun.  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerinin var olduklarını kabul edelim.  $\lambda$  bulunması gereken bir sabit olmak üzere,

$$h(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

fonksiyonu teşkil edilir [43]. Bundan sonra  $x, y, z, \lambda$  değişkenlerine göre kısmi türevler alınarak

$$h_x = f_x + \lambda g_x = 0$$

$$h_y = f_y + \lambda g_y = 0$$

$$h_z = f_z + \lambda g_z = 0$$

$$h_\lambda = g = 0$$

sistemi bulunur. Bu sistemin çözümü olan  $(x, y, z)$  noktası  $f(x, y, z)$  fonksiyonu için bir ekstremum noktadır [43].

**Örnek 3.2.1.**  $O(0,0,0)$  noktasının  $3x + 2y + z = 14$  düzlemine olan uzaklığını bulalım.

Düzlem üzerindeki bir temsili nokta  $P(x, y, z)$  olsun. Orjinin  $P(x, y, z)$  noktasına olan uzaklığı  $d$  olmak üzere

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

dır.  $d$  yi minimum yapan değerler  $d^2$  ifadesinide minimum yaparlar.

O halde

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

fonksiyonunun

$$g(x, y, z) = 3x + 2y + z - 14 = 0$$

yan şartı altında minimumu bulunmalıdır.

$$h(x, y, z; \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(3x + 2y + z - 14)$$

olacağından

$$\begin{aligned} h_x &= 2x + 3\lambda &= 0 \\ h_y &= 2y + 2\lambda &= 0 \\ h_z &= 2z + \lambda &= 0 \\ h_\lambda &= 3x + 2y + z - 14 &= 0 \end{aligned}$$

sisteminin ilk üç denkleminde  $x, y, z$  nin  $\lambda$  cinsinden değerleri bulunur, son denklemde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 3\left(-\frac{3}{2}\lambda\right) + 2(-\lambda) + \left(-\frac{\lambda}{2}\right) - 14 &= 0 \\ \Rightarrow (-7)\lambda &= 14 \\ \Rightarrow \lambda &= -2 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda  $x = 3, y = 2, z = 1$  bulunur. O halde

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{14}$$

dır [43].

### 3.3 Bir Fonksiyonel İçin Lagrange Çarpanları

Belli şartlar altında alınan varyasyonlar Lagrange çarpanları kullanılarak kolayca elde edilebilirler [38]:

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

ve

$$K = \int_a^b G(x, y, y') dx$$

olmak üzere  $J$  fonksiyoneli  $K=K_1$  şartı altında minimum yapan  $y(x)$  fonksiyonunu bulalım:

Bunun için  $y = y(x)$  aranılan minimum olsun.  $Y = y + \varepsilon_1 \eta(x) + \varepsilon_2 \zeta(x)$  eğri ailesini göz önüne alalım, burada  $\eta(x)$  ve  $\zeta(x)$  fonksiyonları sürekli türevlenebilen ve aralığın uç noktalarındaki değeri sıfır olan fonksiyonlar ve  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  birer parametredir [38]. Bu durumda

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_a^b F(x, y + \varepsilon_1 \eta + \varepsilon_2 \zeta, y' + \varepsilon_1 \eta' + \varepsilon_2 \zeta') dx$$

fonksiyoneli yeteri kadar küçük  $\varepsilon_1$  ve  $\varepsilon_2$  parametreleri için

$$\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_a^b G(x, y + \varepsilon_1 \eta + \varepsilon_2 \zeta, y' + \varepsilon_1 \eta' + \varepsilon_2 \zeta') dx = K_1$$

ile tanımlı  $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  şartına bağlı olarak  $\varepsilon_1 = 0$  ve  $\varepsilon_2 = 0$  için sabit yapılabilir.

Bunun için  $\lambda_0 \neq 0$  ve  $\lambda \neq 0$  olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} [\lambda_0 \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)]_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} [\lambda_0 \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)]_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = 0$$

olup buradan

$$\int_a^b [\lambda_0 [F]_y + \lambda [G]_y] \eta dx = 0 \quad (3.3.1)$$

$$\int_a^b [\lambda_0 [F]_y + \lambda [G]_y] \zeta dx = 0 \quad (3.3.2)$$

elde edilir. Burada  $[F]_y$  ve  $[G]_y$  sırasıyla  $F$  ve  $G$  fonksiyonellerine karşılık gelen Euler denklemlerini göstermektedir. Birinci denklem  $\zeta$  keyfi fonksiyonunu içermediğinden  $\lambda_0$ ' in  $\lambda$ ' ya oranı  $\zeta$ ' a bağlı değildir.  $\zeta$  keyfi olduğundan ikinci denklemden  $\lambda_0 [F]_y + \lambda [G]_y = 0$  olur.

$$\lambda_0 \neq 0$$

veya

$$[G]_y = \frac{d}{dx}G_{y'} - G_y \neq 0$$

ise  $\lambda_0 = 1$  alabiliriz ve (3.3.1) denkleminde keyfi  $\eta$  fonksiyonları için

$$\frac{d}{dx}[F_{y'} + \lambda G_{y'}] - \frac{\partial}{\partial y}[F + \lambda G] = 0 \quad (3.3.3)$$

olur [38].

$G = 0$  şartı altında verilen bir  $F$  fonksiyoneline karşılık gelen Euler denklemini türetmek demek;  $F^* = F + \lambda G$  için Euler denklemini türetmek demektir. (3.3.3) denkleminin çözümü belirlenmesi gereken iki sabite ek olarak bir  $\lambda$  parametresi içerir. Bu iki sabit ve  $\lambda$  parametresi; iki sınır şartı ve  $K = K_1$  şartından belirlenir [38, 39].

### 3.4 Varyasyonel İterasyon Metodu

*Genel Lagrange Çarpanları Metodu'* nun modifiye edilmiş olan *Varyasyonel İterasyon Metodu* ilk olarak Ji Huan He tarafından sunuldu [34–37]. Varyasyonel İterasyon Metodu; özellikle non-lineer problemlerin çözümünde kullanılan, problemlerin tam çözümlerine hızlı yakınsayan iteratif bir yöntemdir. Birçok araştırmacı çeşitli problemlerin çözümü için yöntemi kullanmıştır [29, 30, 41, 42].

$$L_t u + L_x u + Nu = g(x, t)$$

ile verilmiş kısmi diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Burada  $L_t, L_x$  sırasıyla  $t, x$  üzerindeki lineer operatörler,  $N$  non-lineer operatör ve  $g(x, t)$  bilinen fonksiyondur [34].

*Varyasyonel İterasyon Metodu'* na göre sırasıyla  $t$ - ve  $x$ - yönündeki düzeltme fonksiyonelleri:

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda_1 \{L_\tau u_n + (L_x + N) \tilde{u}_n - g\} d\tau$$

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^x \lambda_2 \{L_\varepsilon u_n + (L_t + N) \tilde{u}_n - g\} d\varepsilon$$

ile tanımlıdır [34].

Burada  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ) genel Lagrange Çarpanı' dır ve varyasyonel teoriden belirlenebilir,  $u_0$  başlangıç yaklaşımı ve  $\tilde{u}_n$ ;  $\delta\tilde{u}_n = 0$  şartını sağlayan bir yaklaşım olup bu yaklaşıma kısıtlı varyasyon denir [38].

$\lambda_i$  Lagrange çarpanının elde edilmesiyle,  $u(x, t)$  çözümü için  $u_{n+1}(x, t)$  ardışık yaklaşımları belirlenmiş Lagrange çarpanı ve  $u_0$  başlangıç yaklaşımı yardımıyla bulunur. Böylece tam çözüm

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$$

kullanılmasıyla elde edilir [26–30, 34].

## 3.5 Yöntemin Çeşitli Problemlere Uygulanması

### 3.5.1 Linear Adi Diferansiyel Denklemler

$$\frac{dy}{dt} + y = f(t) \quad (3.5.1)$$

lineer diferansiyel denklemini

$$y(0) = y_0 \quad (3.5.2)$$

başlangıç şartıyla göz önüne alalım.

(3.5.1)-(3.5.2) başlangıç değer probleminin *Varyasyonel İterasyon Metodu* (VIM) ile çözümünü araştıralım: Düzeltme fonksiyoneli

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) \left( \frac{\partial y_n}{\partial \tau}(\tau) + y_n(\tau) - f(\tau) \right) d\tau \quad (3.5.3)$$

dır [34].  $\delta y_n(0) = 0$  ve  $\delta f(\tau) = 0$  olmak üzere bu eşitliğin varyansı alınırsa

$$\delta y_{n+1}(x, t) = \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) \delta \left( \frac{\partial y_n}{\partial \tau}(\tau) \right) d\tau + \int_0^t \lambda(\tau) \delta y_n(\tau) d\tau$$

$$\delta y_{n+1}(x, t) = \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) \frac{d}{d\tau} (\delta y_n) d\tau + \int_0^t \lambda(\tau) \delta y_n(\tau) d\tau$$

elde edilir. Bu ifadede ki ilk integrale kısmi integrasyon uygulanması ile

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \lambda(\tau) \delta y_n(\tau) \Big|_0^t + \int_0^t (-\lambda'(\tau) + \lambda(\tau)) \delta y_n(\tau) d\tau = 0$$

elde edilir [34]. Buradan

$$-\lambda'(\tau) + \lambda(\tau) = 0 \quad \text{ve} \quad 1 + \lambda(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0$$

olup Lagrange çarpanı

$$\lambda = -e^{(\tau-t)}$$

dır. Lagrange çarpanı; (3.5.3) de yazılırsa

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \int_0^t e^{(\tau-t)} \left( \frac{dy_n(\tau)}{d\tau} + y_n(\tau) - f(\tau) \right) d\tau \quad (3.5.4)$$

iterasyon formülü elde edilir [34].

$y(0) = y_0$  ile başlanarak (3.5.1) denkleminin tam çözümü; (3.5.4) iterasyon formülünün uygulanmasıyla bulunur [34].

### Örnek 3.5.1.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + y &= \sin t + t \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

*Başlangıç-değer probleminin yaklaşık çözümünü Varyasyonel İterasyon Metodu kullanarak bulalım [34].*

(3.5.4) ile verilen iteratif yöntem;

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \int_0^t e^{(\tau-t)} \left( \frac{dy_n(\tau)}{d\tau} + y_n(\tau) - f(\tau) \right) d\tau$$

şeklinde olup  $y_0(t) = y_0$  olmak üzere;

$n = 0$  için,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 - \int_0^t e^{(\tau-t)} (y_0 - \sin \tau - \tau) d\tau \\ &= y_0 - y_0 e^{(\tau-t)} \Big|_0^t + \frac{1}{2} (e^{(\tau-t)} \sin \tau - e^{(\tau-t)} \cos \tau) \Big|_0^t + e^{(\tau-t)} (\tau - 1) \Big|_0^t \\ &= \left( y_0 + \frac{3}{2} \right) e^{-t} + \frac{1}{2} (\sin t - \cos t) + t - 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu çözüm problemin tam çözümüdür [34].

### 3.5.2 Bir Boyutlu Homojen Isı Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (3.5.5)$$

bir boyutlu homojen ısı denklemini

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.5.6)$$

başlangıç şartı ve

$$u(a, t) = f_1(t), \quad u(b, t) = f_2(t)$$

sınır şartları ile göz önüne alalım. Burada  $u = u(x, t)$  aradığımız bilinmeyen fonksiyon ve  $v > 0$  bir parametredir.

(3.5.6) başlangıç şartıyla birlikte verilen (3.5.5) denkleminin *Varyasyonel İterasyon Metodu* ile çözümünü araştıralım. Düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\tau) \left( \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, \tau) - v \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x, \tau) \right) d\tau \quad (3.5.7)$$

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\tau) \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, \tau) d\tau - v \int_0^t \lambda(\tau) \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x, \tau) d\tau$$

dır [26].

$\delta u_n(x, 0) = 0$  olmak üzere eşitliğin varyansı alınır;

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x, t) &= \delta u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\tau) \delta \left( \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, \tau) \right) d\tau - \int_0^t \lambda(\tau) \delta \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x, \tau) \right) d\tau \\ &= \delta u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta u_n(x, \tau)) d\tau - v \int_0^t \lambda(\tau) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta \tilde{u}_n(x, \tau)) d\tau \end{aligned}$$

elde edilir.  $\delta \tilde{u}_n = 0$  kullanılırsa

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta u_n(x, \tau)) d\tau$$

elde edilir [26]. Kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \lambda(\tau) \delta u_n(x, \tau) \Big|_0^t - \int_0^t \lambda'(\tau) \delta u_n(x, \tau) d\tau = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda'(\tau) = 0 \quad \text{ve} \quad 1 + \lambda(\tau)|_{\tau=t} = 0$$

bulunur. Böylece Lagrange çarpanı

$$\lambda = -1$$

dır. Lagrange çarpanı (3.5.7) düzeltme fonksiyoneline yerine yazılırsa

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left( \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, \tau) - v \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, \tau) \right) d\tau \quad (3.5.8)$$

iterasyon formülü elde edilir [26].

$u_0 = u(x, 0) = f(x)$  ile başlanarak (3.5.5) denkleminin yaklaşık çözümü (3.5.8)

iterasyon formülü yardımıyla bulunur [26].

### Örnek 3.5.2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin \pi x \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0 \end{aligned}$$

*Başlangıç-Sınır değer probleminin yaklaşık çözümlerini ve tam çözümünü Varyasyonel İterasyon Metodu kullanarak bulalım.*

*Başlangıç şartına göre iteratif denklem;*

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left( \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, \tau) - v \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, \tau) \right) d\tau$$

*şeklinde olup burada  $u_0(x, t) = \sin \pi x$  dir.  $n = 0, 1, 2, \dots, n-1$  için*

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sin \pi x - t\pi^2 \sin \pi x \\ u_2(x, t) &= \sin \pi x - t\pi^2 \sin \pi x + \frac{t^2\pi^4}{2!} \sin \pi x \\ u_3(x, t) &= \sin \pi x - t\pi^2 \sin \pi x + \frac{t^2\pi^4}{2!} \sin \pi x - \frac{t^3\pi^6}{3!} \sin \pi x \\ u_4(x, t) &= \sin \pi x - t\pi^2 \sin \pi x + \frac{t^2\pi^4}{2!} \sin \pi x - \frac{t^3\pi^6}{3!} \sin \pi x + \frac{t^4\pi^8}{4!} \sin \pi x \\ &\vdots \\ u_n(x, t) &= \sin \pi x \left( 1 - (t\pi^2) + \frac{(t\pi^2)^2}{2!} - \frac{(t\pi^2)^3}{3!} + \frac{(t\pi^2)^4}{4!} - \dots \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$$

olduğundan

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi x \left( 1 - (t\pi^2) + \frac{(t\pi^2)^2}{2!} - \frac{(t\pi^2)^3}{3!} + \frac{(t\pi^2)^4}{4!} - \dots \right)$$

$$u(x, t) = e^{-t\pi^2} \sin \pi x$$

bulunur. Bu çözüm problemin tam çözümüdür.

### 3.5.3 Bir Boyutlu Homojen Olmayan Isı Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (3.5.9)$$

bir boyutlu homojen olmayan ısı denklemini

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.5.10)$$

başlangıç şartı ve

$$u(a, t) = f_1(t), \quad u(b, t) = f_2(t)$$

sınır şartları ile göz önüne alalım.

Burada  $u = u(x, t)$  bilinmeyen fonksiyon,  $g(x, t)$  bilinen fonksiyon ve  $v > 0$  bir parametredir.

(3.5.10) başlangıç şartıyla birlikte verilen (3.5.9) denkleminin *Varyasyonel İterasyon Metodu* kullanarak çözümünde düzeltme fonksiyoneli;

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \left( \frac{\partial u_n}{\partial \xi}(x, \xi) - v \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x, \xi) - g(x, \xi) \right) d\xi \quad (3.5.11)$$

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \frac{\partial u_n}{\partial \xi}(x, \xi) d\xi - v \int_0^t \lambda(\xi) \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x, \xi) d\xi - \int_0^t \lambda(\xi) g(x, \xi) d\xi$$

dır [26].  $\delta u_n(x, 0) = 0$  olmak üzere eşitliğin varyansı alınırsa

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1}(x, t) &= \delta u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \delta \left( \frac{\partial u_n}{\partial \xi}(x, \xi) \right) d\xi \\ &\quad - v \int_0^t \lambda(\xi) \delta \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x, \xi) \right) d\xi - \int_0^t \lambda(\xi) \delta g(x, \xi) d\xi \\ &= \delta u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} (\delta u_n(x, \xi)) d\xi \\ &\quad - v \int_0^t \lambda(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta \tilde{u}_n(x, \xi)) d\xi - \int_0^t \lambda(\xi) \delta g(x, \xi) d\xi\end{aligned}$$

elde edilir.  $\delta \tilde{u}_n = 0$  ve  $\delta g = 0$  kullanılırsa

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} (\delta u_n(x, \xi)) d\xi$$

elde edilir [26]. Kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \lambda(\xi) \delta u_n(x, \xi) \Big|_0^t - \int_0^t \lambda'(\xi) \delta u_n(x, \xi) d\xi = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda'(\xi) = 0 \quad \text{ve} \quad 1 + \lambda(\xi) \Big|_{\xi=t} = 0$$

olup, Lagrange çarpanı

$$\lambda = -1$$

olarak elde edilir. Lagrange çarpanı (3.5.11) denkleminde yazılırsa

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left( \frac{\partial u_n}{\partial \xi}(x, \xi) - v \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, \xi) - g(x, \xi) \right) d\xi \quad (3.5.12)$$

iterasyon formülü elde edilir [26].

$u_0 = u(x, 0)$  ile başlanarak (3.5.9) denkleminin yaklaşık çözümü (3.5.12) iterasyon denklemini yardımıyla bulunur [26].

### Örnek 3.5.3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 0 \\ u(0, t) &= 1 - e^{-t}, \quad u(\pi, t) = -1 + e^{-t}\end{aligned}$$

*Başlangıç-Sınır değer probleminin yaklaşık çözümlerini Varyasyonel İterasyon Metodu kullanarak bulalım [26].*

*Verilen başlangıç şartına göre iterasyon denklemi*

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left( \frac{\partial u_n}{\partial \xi}(x, \xi) - v \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, \xi) - g(x, \xi) \right) d\xi$$

*dır. Burada  $u_0(x, t) = 0$  olup  $n = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  için*

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= t \cos x \\ u_2(x, t) &= t \cos x - \frac{t^2}{2!} \cos x \\ u_3(x, t) &= t \cos x - \frac{t^2}{2!} \cos x + \frac{t^3}{3!} \cos x \\ u_4(x, t) &= t \cos x - \frac{t^2}{2!} \cos x + \frac{t^3}{3!} \cos x - \frac{t^4}{4!} \cos x \\ &\vdots \\ u_n(x, t) &= \cos x \left( t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \dots \right) \end{aligned}$$

*elde edilir. Böylece*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) \\ u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos x \left( t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \dots \right) \\ u(x, t) &= \cos x (1 - e^{-t}) \end{aligned}$$

*elde edilir. Bu çözüm problemin tam çözümüdür [26].*

## 4. BURGERS' DENKLEMİNİN VARYASYONEL İTERASYON METODU İLE ÇÖZÜMÜ

### 4.1 Bir Boyutlu Burgers' Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (4.1.1)$$

bir boyutlu Burgers' denklemini

$$u(x, 0) = f(x)$$

başlangıç şartı ve

$$u(a, t) = f_1(t), \quad u(b, t) = f_2(t)$$

sınır şartları ile göz önüne alalım. Burada  $u = u(x, t)$  bilinmeyen fonksiyon,  $v$  bir parametredir ( $v > 0$ ).

Bu problemin düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\varepsilon) \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) + \tilde{u}_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x, \varepsilon) - v \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x, \varepsilon) \right) d\varepsilon \quad (4.1.2)$$

dır [27]. Basit bir düzenleme yapılırsa;

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\varepsilon) \frac{\partial u_n}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) d\varepsilon + \int_0^t \lambda(\varepsilon) \tilde{u}_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x, \varepsilon) d\varepsilon - v \int_0^t \lambda(\varepsilon) \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x, \varepsilon) d\varepsilon$$

elde edilir.  $\delta u_n(x, 0) = 0$  olmak üzere eşitliğin varyansı alınırsa

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x, t) &= \delta u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\varepsilon) \delta \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \right) d\varepsilon + \int_0^t \lambda(\varepsilon) \delta(\tilde{u}_n) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x, \varepsilon) d\varepsilon \\ &+ \int_0^t \lambda(\varepsilon) \tilde{u}_n \delta \left( \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x, \varepsilon) \right) d\varepsilon - v \int_0^t \lambda(\varepsilon) \delta \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x, \varepsilon) \right) d\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x, t) &= \delta u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\delta u_n(x, \varepsilon)) d\varepsilon + \int_0^t \lambda(\varepsilon) \delta(\tilde{u}_n) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x, \varepsilon) d\varepsilon \\ &+ \int_0^t \lambda(\varepsilon) \tilde{u}_n \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tilde{u}_n(x, \varepsilon)) d\varepsilon - v \int_0^t \lambda(\varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta \tilde{u}_n(x, \varepsilon)) d\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\delta \tilde{u}_n = 0$$

ifadesinin kullanılmasıyla

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\delta u_n(x, \varepsilon)) d\varepsilon$$

bulunur [27]. Kısmi integrasyon uygulanması ile

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \lambda(\varepsilon) \delta u_n(x, \varepsilon) \Big|_0^t - \int_0^t \lambda'(\varepsilon) \delta u_n(x, \varepsilon) d\varepsilon = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda'(\varepsilon) = 0 \quad \text{ve} \quad 1 + \lambda(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=t} = 0$$

bulunur. Böylece Lagrange çarpanı

$$\lambda = -1$$

olarak elde edilir. Lagrange çarpanı (4.1.2) denkleminde yazılırsa

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, \varepsilon) - v \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, \varepsilon) \right) d\varepsilon \quad (4.1.3)$$

iterasyon formülü elde edilir [27].

$u_0 = u(x, 0)$  ile başlanarak (4.1.1) Burgers' denkleminin yaklaşık çözümü (4.1.3) iterasyon formülü yardımıyla bulunur [27].

Öte yandan başlangıç şartları;

$$u(0, t) = g_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g_2(t), \quad t > 0$$

şeklinde verilen (4.1.1) denkleminin *Varyasyonel İterasyon Metodu* ile çözümünde düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^x \lambda(\eta) \left( \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(\eta, t) + \tilde{u}_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \eta}(\eta, t) - v \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \eta^2}(\eta, t) \right) d\eta \quad (4.1.4)$$

dır [27]. Bu ifade düzenlenirse;

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^x \lambda(\eta) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(\eta, t) d\eta + \int_0^x \lambda(\eta) \tilde{u}_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \eta}(\eta, t) d\eta - v \int_0^x \lambda(\eta) \frac{\partial^2 u_n}{\partial \eta^2}(\eta, t) d\eta$$

elde edilir.  $\delta u_n(0, t) = 0$  olmak üzere  $\lambda'$  nın uygun değerini bulmak için eşitliğin varyansı alınırsa

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x, t) &= \delta u_n(x, t) + \int_0^x \lambda(\eta) \delta \left( \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(\eta, t) \right) d\eta + \int_0^x \lambda(\eta) \delta(\tilde{u}_n) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \eta}(\eta, t) d\eta \\ &+ \int_0^x \lambda(\eta) \tilde{u}_n \delta \left( \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \eta}(\eta, t) \right) d\eta - v \int_0^x \lambda(\eta) \delta \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial \eta^2}(\eta, t) \right) d\eta \end{aligned}$$

elde edilir. Basit bir düzenleme ile

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x, t) &= \delta u_n(x, t) + \int_0^x \lambda(\eta) \frac{\partial}{\partial t}(\delta \tilde{u}_n(\eta, t)) d\eta + \int_0^x \lambda(\eta) \delta(\tilde{u}_n) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \eta}(\eta, t) d\eta \\ &+ \int_0^x \lambda(\eta) \tilde{u}_n \frac{\partial}{\partial \eta}(\delta \tilde{u}_n(\eta, t)) d\eta - v \int_0^x \lambda(\eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(\delta u_n(\eta, t)) d\eta \end{aligned}$$

bulunur.  $\delta \tilde{u}_n = 0$  kullanılması ile

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) - v \int_0^x \lambda(\eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(\delta u_n(\eta, t)) d\eta$$

elde edilir [27]. İki kez kısmi integrasyon uygulanması ile

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x, t) &= \delta u_n(x, t) - v \lambda(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta}(\delta u_n) \Big|_0^x + v \lambda'(\eta) \delta u_n(\eta, t) \Big|_0^x \\ &- v \int_0^x \lambda''(\eta) \delta u_n(\eta, t) d\eta = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \lambda''(\eta) &= 0 \\ 1 + v \lambda'(\eta) \Big|_{\eta=x} &= 0 \\ \lambda(\eta) \Big|_{\eta=x} &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\lambda''(\eta) = 0 \Rightarrow \lambda(\eta) = k_1\eta + k_2$$

$$\lambda(\eta) = k_1\eta + k_2 \Rightarrow \lambda'(\eta) = k_1$$

dır.

$$1 + v\lambda'(\eta)|_{\eta=x} = 0 \Rightarrow 1 + vk_1 = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = -\frac{1}{v}$$

$$\lambda(\eta)|_{\eta=x} = 0 \Rightarrow \lambda(x) = k_1x + k_2 = 0$$

$$\Rightarrow k_2 = -k_1x$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{1}{v}x$$

$$\lambda(\eta) = k_1\eta + k_2 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{v}\eta + \frac{1}{v}x$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{v}(x - \eta)$$

bulunur. Elde edilen Lagrange çarpımının (4.1.4) iterasyon denkleminde yazılmasıyla

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \frac{1}{v} \int_0^x (x - \eta) \left( \frac{\partial u_n}{\partial t}(\eta, t) + u_n \frac{\partial u_n}{\partial \eta}(\eta, t) - v \frac{\partial^2 u_n}{\partial \eta^2}(\eta, t) \right) d\eta \quad (4.1.5)$$

elde edilir [27].

$u_0 = g_1(t) + xg_2(t)$  ile başlanarak (4.1.1) Burgers' denkleminin yaklaşık çözümü (4.1.5) iterasyon formülü yardımıyla bulunur [27].

## 4.2 İki Boyutlu Burgers' Denklem Sistemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

iki boyutlu Burgers' denklem sistemini

$$u(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

$$v(x, y, 0) = f_2(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartları ve

$$u(x, y, t) = g_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t > 0$$

$$v(x, y, t) = g_2(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t > 0$$

sınır şartları ile göz önüne alalım. Burada  $u = u(x, y, t)$  ve  $v = v(x, y, t)$  bilinmeyen fonksiyonlar,  $R$ , Reynold katsayısı ( $R > 0$ ) olarak bilinen bir parametredir.

Bu problemin düzeltme fonksiyoneli

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, y, t) &= u_n(x, y, t) \\ &+ \int_0^t \lambda_1(\tau) \left[ \frac{\partial u_n}{\partial \tau} + \tilde{u}_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x} + \tilde{v}_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial y^2} \right) \right] d\tau \\ v_{n+1}(x, y, t) &= v_n(x, y, t) \\ &+ \int_0^t \lambda_2(\tau) \left[ \frac{\partial v_n}{\partial \tau} + \tilde{u}_n \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial x} + \tilde{v}_n \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial y} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_n}{\partial y^2} \right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

olup [27], buradan

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, y, t) &= u_n(x, y, t) + \int_0^t \lambda_1(\tau) \frac{\partial u_n}{\partial \tau} d\tau + \int_0^t \lambda_1(\tau) \tilde{u}_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x} d\tau \\ &+ \int_0^t \lambda_1(\tau) \tilde{v}_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y} d\tau - \frac{1}{R} \int_0^t \lambda_1(\tau) \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial y^2} \right) d\tau \\ v_{n+1}(x, y, t) &= v_n(x, y, t) + \int_0^t \lambda_2(\tau) \frac{\partial v_n}{\partial \tau} d\tau + \int_0^t \lambda_2(\tau) \tilde{u}_n \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial x} d\tau \\ &+ \int_0^t \lambda_2(\tau) \tilde{v}_n \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial y} d\tau - \frac{1}{R} \int_0^t \lambda_2(\tau) \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_n}{\partial y^2} \right) d\tau \end{aligned}$$

olur.  $\delta u_n(x, y, 0) = 0$  ve  $\delta v_n(x, y, 0) = 0$  olmak üzere eşitliğin varyansı alınırsa

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x, y, t) &= \delta u_n(x, y, t) + \int_0^t \lambda_1(\tau) \delta \left( \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \right) d\tau + \int_0^t \lambda_1(\tau) \delta(\tilde{u}_n) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x} d\tau \\ &+ \int_0^t \lambda_1(\tau) \tilde{u}_n \delta \left( \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x} \right) d\tau + \int_0^t \lambda_1(\tau) \delta(\tilde{v}_n) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y} d\tau \\ &+ \int_0^t \lambda_1(\tau) \tilde{v}_n \delta \left( \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y} \right) d\tau - \frac{1}{R} \int_0^t \lambda_1(\tau) \delta \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial y^2} \right) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta v_{n+1}(x, y, t) &= \delta v_n(x, y, t) + \int_0^t \lambda_2(\tau) \delta \left( \frac{\partial v_n}{\partial \tau} \right) d\tau + \int_0^t \lambda_2(\tau) \delta(\tilde{u}_n) \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial x} d\tau \\
&+ \int_0^t \lambda_2(\tau) \tilde{v}_n \delta \left( \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial x} \right) d\tau + \int_0^t \lambda_2(\tau) \delta(\tilde{v}_n) \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial y} d\tau \\
&+ \int_0^t \lambda_2(\tau) \tilde{v}_n \delta \left( \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial y} \right) d\tau - \frac{1}{R} \int_0^t \lambda_2(\tau) \delta \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_n}{\partial y^2} \right) d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir [27]. Basit bir düzenlemeyle;

$$\begin{aligned}
\delta u_{n+1}(x, y, t) &= \delta u_n(x, y, t) + \int_0^t \lambda_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(u_n) d\tau + \int_0^t \lambda_1(\tau) \delta(\tilde{u}_n) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x} d\tau \\
&+ \int_0^t \lambda_1(\tau) \tilde{u}_n \frac{\partial}{\partial x} \delta(\tilde{u}_n) d\tau + \int_0^t \lambda_1(\tau) \delta(\tilde{v}_n) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y} d\tau \\
&+ \int_0^t \lambda_1(\tau) \tilde{v}_n \frac{\partial}{\partial y} \delta(\tilde{u}_n) d\tau - \frac{1}{R} \int_0^t \lambda_1(\tau) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(\tilde{u}_n) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta(\tilde{u}_n) \right) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta v_{n+1}(x, y, t) &= \delta v_n(x, y, t) + \int_0^t \lambda_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(v_n) d\tau + \int_0^t \lambda_2(\tau) \delta(\tilde{u}_n) \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial x} d\tau \\
&+ \int_0^t \lambda_2(\tau) \tilde{v}_n \frac{\partial}{\partial x} \delta(\tilde{v}_n) d\tau + \int_0^t \lambda_2(\tau) \delta(\tilde{v}_n) \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial y} d\tau \\
&+ \int_0^t \lambda_2(\tau) \tilde{v}_n \frac{\partial}{\partial y} \delta(\tilde{v}_n) d\tau - \frac{1}{R} \int_0^t \lambda_2(\tau) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(\tilde{v}_n) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta(\tilde{v}_n) \right) d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir [27].

$$\delta \tilde{u}_n = 0 \quad \text{ve} \quad \delta \tilde{v}_n = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\delta u_{n+1}(x, y, t) &= \delta u_n(x, y, t) + \int_0^t \lambda_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(u_n) d\tau \\
\delta v_{n+1}(x, y, t) &= \delta v_n(x, y, t) + \int_0^t \lambda_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(v_n) d\tau
\end{aligned}$$

bulunur [27]. Kısmi integrasyon uygulayarak

$$\begin{aligned}
\delta u_{n+1}(x, y, t) &= \delta u_n(x, y, t) + \lambda_1(\tau) \delta u_n(x, y, \tau) \Big|_0^t - \int_0^t \lambda_1'(\tau) \delta u_n(x, y, \tau) d\tau = 0 \\
\delta v_{n+1}(x, y, t) &= \delta v_n(x, y, t) + \lambda_2(\tau) \delta v_n(x, y, \tau) \Big|_0^t - \int_0^t \lambda_2'(\tau) \delta v_n(x, y, \tau) d\tau = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda_1'(\tau) = \lambda_2'(\tau) = 0 \quad \text{ve} \quad 1 + \lambda_1(\tau)|_{\tau=t} = 1 + \lambda_2(\tau)|_{\tau=t} = 0$$

bulunur. Böylece Lagrange çarpanları

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

olarak elde edilir. Lagrange çarpanları (4.2.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, y, t) &= u_n(x, y, t) \\ &\quad - \int_0^t \left[ \frac{\partial u_n}{\partial \tau} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \right) \right] d\tau \\ v_{n+1}(x, y, t) &= v_n(x, y, t) \\ &\quad - \int_0^t \left[ \frac{\partial v_n}{\partial \tau} + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} \right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

iterasyon formülleri elde edilir [27].  $u_0 = u(x, y, 0)$  ve  $v_0 = v(x, y, 0)$  ile başlanarak (4.2.1) denklemlerinin yaklaşık çözümleri (4.2.3) iterasyon formülleri yardımıyla bulunur [27].

### 4.3 Model Problemler

#### 4.3.1 Burgers' Denklemleri ve Hopf-Cole Dönüşümü

1950 yılında Hopf

$$u = -2v \frac{\theta_x}{\theta}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımladı. Burada  $\theta(x, t)$ ;

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

ısı denkleminin herhangi bir çözümü ve  $u(x, t)$ ' de bir boyutlu Burgers' denkleminin çözümüdür. Hopf bu dönüşümle Burgers' denkleminin çözülebileceğini ifade etti [13].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

ile verilen Burgers' denkleminin Hopf-Cole dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} &= v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \theta(x, 0) &= \exp\{-(2v\pi)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} \\ \theta_x(0, t) &= 0, \quad \theta_x(1, t) = 0\end{aligned}$$

haline dönüşür.

Bu başlangıç-sınır değer problemine Varyasyonel İterasyon Metodu uygulandı Hopf-Cole dönüşümünün kullanılmasıyla Burgers' denkleminin nümerik çözümleri elde edilebilir.

Elde edilen bu nümerik çözümler ile Burgers' denkleminin direkt Varyasyonel İterasyon Metodu uygulanarak elde edilen nümerik çözümlerin karşılaştırılması Tablo 5.4 de verildi.

**Problem 4.3.1.**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

ile verilen Burgers' denklemini

$$u(x, 0) = \sin \pi x$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

sınır şartları ile göz önüne alalım [13].

Bu denklemin yaklaşık çözümlerini Varyasyonel İterasyon Metodu kullanarak bulalım. Başlangıç şartına göre iteratif yöntem;

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, \varepsilon) - v \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, \varepsilon) \right) d\varepsilon$$

şeklinde olup  $u_0(x, t) = u(x, 0)$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \sin \pi x \\
u_1(x, t) &= u_0(x, t) - \pi \sin(\pi x) (\cos(\pi x) - v\pi)t \\
u_2(x, t) &= u_1(x, t) - \frac{1}{2}\pi \sin(\pi x) [(-2\pi \cos^2(\pi x) + \pi \sin^2(\pi x) \\
&\quad - 5v\pi^2 \cos(\pi x) - v\pi^2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) - v^2\pi^3)]t^2 \\
&\quad - \frac{1}{3}\pi \sin(\pi x) [(\cos(\pi x) - v\pi)(-\pi \cos^2(\pi x) + \pi \sin^2(\pi x) \\
&\quad - v\pi^2 \cos(\pi x))]t^3 \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan bu yaklaşık çözümlerin,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} dx \\
a_n &= 2 \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} \cos(n\pi x) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 vt} n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 vt} \cos(n\pi x)}$$

şeklinde verilen tam çözümle [13], farklı viskozite değerleri için karşılaştırılması Tablo 5.1-5.2 ve Şekil 5.3-5.5 ile verildi.

#### Problem 4.3.2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

ile verilen Burgers' denklemini

$$u(x, 0) = 4x(1 - x)$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

sınır şartları ile göz önüne alalım. Bu problemin yaklaşık çözümünü Varyasyonel İterasyon Metodu kullanarak bulalım. Başlangıç şartına göre iteratif yöntem;

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, \varepsilon) - v \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, \varepsilon) \right) d\varepsilon$$

şeklinde olup  $u_0(x, t) = u(x, 0)$  olmak üzere

$$u_0(x, t) = 4x(1 - x)$$

$$u_1(x, t) = u_0(x, t) - [4x(1 - x)(4 - 8x) + 8v]t$$

$$u_2(x, t) = u_1(x, t) - \frac{1}{2}[4x(1 - x)(-4(1 - x)(4 - 8x) + 4x(4 - 8x) + 32x(1 - x)) \\ + (-4x(1 - x)(4 - 8x) - 8v)(4 - 8x) - v(96 - 192x)]t^2 \\ - \frac{1}{3}[(-4x(1 - x)(4 - 8x) - 8v)(-4(1 - x)(4 - 8x) + 4x(4 - 8x) \\ + 32x(1 - x))]t^3$$

⋮

elde edilir. Bulunan bu yaklaşık çözümlerin,

$$a_0 = \int_0^1 \exp\{-x^2(3v)^{-1}(3 - 2x)\} dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\{-x^2(3v)^{-1}(3 - 2x)\} \cos(n\pi x) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 vt} n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 vt} \cos(n\pi x)}$$

şeklinde verilen tam çözümle [13], farklı viskozite değerleri için karşılaştırılması Tablo 5.5-5.6 ve Şekil 5.6-5.8 ile verildi.

### Problem 4.3.3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

ile verilen iki boyutlu Burgers' denklemini

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x+y}{2v}\right)}$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, y, t) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y-t}{2v}\right)}, \quad y \in [0, 2], \quad t > 0$$

$$u(2, y, t) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{2+y-t}{2v}\right)}, \quad y \in [0, 2], \quad t > 0$$

sınır şartları ile göz önüne alalım [33]. Bu denklemin yaklaşık çözümlerini Varyasyonel İterasyon Metodu kullanarak bulalım. Başlangıç şartına göre iteratif yöntem;

$$u_{n+1}(x, y, t) = u_n(x, y, t) - \int_0^t \left[ \frac{\partial u_n}{\partial \tau} + u_n \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y} \right) - v \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \right) \right] d\tau$$

şeklinde olup  $\theta = \frac{(x+y)}{2v}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \frac{1}{1 + \exp(\theta)} \\ u_1(x, y, t) &= u_0(x, y, t) + \frac{\exp(\theta)t}{2v(1 + \exp(\theta))^2} \\ u_2(x, y, t) &= u_1(x, y, t) + \frac{\exp(\theta)(\exp(\theta) - 1)t^2}{8v^2(1 + \exp(\theta))^3} + \frac{(\exp(\theta))^2(\exp(\theta) - 1)t^3}{12v^3(1 + \exp(\theta))^5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu yaklaşık çözümlerin,

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x+y-t}{2v}\right)}$$

şeklinde verilen tam çözümle [33], farklı viskozite değerleri için karşılaştırılması Tablo 5.7-5.8 ve Şekil 5.9-5.13 ile verildi.

#### Problem 4.3.4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

ile verilen iki boyutlu Burgers' denklem sistemini

$$u(x, y, 0) = x + y$$

$$v(x, y, 0) = x - y$$

başlangıç şartları ile göz önüne alalım [27].

Bu denklemin yaklaşık çözümlerini Varyasyonel İterasyon Metodu kullanarak bulalım. Başlangıç şartlarına göre iteratif yöntem;

$$u_{n+1}(x, y, t) = u_n(x, y, t) - \int_0^t \left[ \frac{\partial u_n}{\partial \tau} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \right) \right] d\tau$$

$$v_{n+1}(x, y, t) = v_n(x, y, t) - \int_0^t \left[ \frac{\partial v_n}{\partial \tau} + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} \right) \right] d\tau$$

şeklinde olup  $u_0(x, y, t) = x + y$  ve  $v_0(x, y, t) = x - y$  olmak üzere

$$u_0(x, y, t) = x + y$$

$$v_0(x, y, t) = x - y$$

$$u_1(x, y, t) = x + y - 2xt$$

$$v_1(x, y, t) = x - y - 2yt$$

$$u_2(x, y, t) = x + y - 2xt + 2xt^2 + 2yt^2 - \frac{4}{3}xt^3$$

$$v_2(x, y, t) = x - y - 2yt + 2xt^2 - 2yt^2 - \frac{4}{3}yt^3$$

$$u_3(x, y, t) = x + y - 2xt + 2xt^2 + 2yt^2 - 4xt^3 + \frac{8}{3}yt^4 + \frac{8}{3}xt^4 - \frac{8}{3}xt^5 + \frac{8}{9}xt^6 + \frac{8}{9}yt^6 - \frac{16}{63}xt^7$$

$$v_3(x, y, t) = x - y - 2yt + 2xt^2 - 2yt^2 - 4yt^3 + \frac{8}{3}xt^4 - \frac{8}{3}yt^4 - \frac{8}{3}yt^5 + \frac{8}{9}xt^6 - \frac{8}{9}yt^6 - \frac{16}{63}yt^7$$

$$u_4(x, y, t) = x + y - 2xt + 2xt^2 + 2yt^2 - 4xt^3 + 4yt^4 + 4xt^4 - \frac{104}{15}xt^5 + \frac{16}{3}xt^6 + \frac{16}{3}yt^6 - \frac{464}{63}xt^7 + \frac{284}{63}yt^8 + \frac{284}{63}xt^8 - \frac{2752}{567}xt^9 + \frac{704}{315}xt^{10} + \frac{704}{315}yt^{10} - \frac{320}{189}xt^{11} + \frac{32}{63}xt^{12} + \frac{32}{63}yt^{12} - \frac{128}{567}xt^{13} + \frac{128}{3969}xt^{14} + \frac{128}{3969}yt^{14} - \frac{256}{59535}xt^{15}$$

$$v_4(x, y, t) = x - y - 2yt + 2xt^2 - 2yt^2 - 4yt^3 + 4xt^4 - 4yt^4 - \frac{104}{15}yt^5 + \frac{16}{3}xt^6 - \frac{16}{3}yt^6 - \frac{464}{63}yt^7 + \frac{284}{63}yt^8 - \frac{284}{63}xt^8 - \frac{2752}{567}yt^9 + \frac{704}{315}xt^{10} - \frac{704}{315}yt^{10} - \frac{320}{189}yt^{11} + \frac{32}{63}xt^{12} - \frac{32}{63}yt^{12} - \frac{128}{567}yt^{13} + \frac{128}{3969}xt^{14} - \frac{128}{3969}yt^{14} - \frac{256}{59535}yt^{15}$$

⋮

$$u_n(x, y, t) = x + y - 2xt + 2xt^2 + 2yt^2 - 4xt^3 + 4yt^4 + 4xt^4 - 8xt^5 + \dots$$

$$v_n(x, y, t) = x - y - 2yt + 2xt^2 - 2yt^2 - 4yt^3 + 4xt^4 - 4yt^4 - 8yt^5 + \dots$$

elde edilir.

$$u(x, y, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y, t)$$

ve

$$v(x, y, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, y, t)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y, t) \\ &= x + y - 2xt + 2xt^2 + 2yt^2 - 4xt^3 + 4yt^4 + 4xt^4 - 8xt^5 + \dots \\ &= x(1 + 2t^2 + 4t^4 + \dots) + y(1 + 2t^2 + 4t^4 + \dots) - 2xt(1 + 2t^2 + 4t^4 + \dots) \\ &= \frac{x + y - 2xt}{1 - 2t^2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, y, t) \\ &= x - y - 2yt + 2xt^2 - 2yt^2 - 4yt^3 + 4xt^4 - 4yt^4 - 8yt^5 + \dots \\ &= x(1 + 2t^2 + 4t^4 + \dots) - y(1 + 2t^2 + 4t^4 + \dots) - 2yt(1 + 2t^2 + 4t^4 + \dots) \\ &= \frac{x - y - 2yt}{1 - 2t^2} \end{aligned}$$

elde edilir ve bu çözümler tam çözümdür [27].

Elde edilen bu tam çözümlerle yaklaşık çözümlerin farklı viskosite değerleri için karşılaştırılması Tablo 5.9-5.10 ve Şekil 5.14 ile verildi.

#### Problem 4.3.5.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

ile verilen iki boyutlu Burgers' denklem sistemini

$$u(x, y, 0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \left( 1 + \exp\left(\frac{R(-x+y)}{8}\right) \right)}$$

$$v(x, y, 0) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \left( 1 + \exp\left(\frac{R(-x+y)}{8}\right) \right)}$$

başlangıç şartları ile göz önüne alalım [27]. Bu denklemin yaklaşık çözümlerini Varyasyonel İterasyon Metodu kullanarak bulalım. Başlangıç şartlarına göre iteratif yöntem;

$$u_{n+1}(x, y, t) = u_n(x, y, t) - \int_0^t \left[ \frac{\partial u_n}{\partial \tau} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \right) \right] d\tau$$

$$v_{n+1}(x, y, t) = v_n(x, y, t) - \int_0^t \left[ \frac{\partial v_n}{\partial \tau} + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} \right) \right] d\tau$$

şeklinde olup  $\theta = \frac{R(-x+y)}{8}$  olmak üzere

$$u_0(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp(\theta))}$$

$$v_0(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp(\theta))}$$

$$u_1(x, y, t) = u_0(x, y, t) - \frac{\exp(\theta)Rt}{128(1 + \exp(\theta))^2}$$

$$v_1(x, y, t) = v_0(x, y, t) + \frac{\exp(\theta)Rt}{128(1 + \exp(\theta))^2}$$

$$u_2(x, y, t) = u_1(x, y, t) - \frac{\exp(\theta)(\exp(\theta) - 1)R^2t^2}{8192(1 + \exp(\theta))^3} - \frac{(\exp(\theta))^2(\exp(\theta) - 1)R^3t^3}{196608(1 + \exp(\theta))^5}$$

$$v_2(x, y, t) = v_1(x, y, t) + \frac{\exp(\theta)(\exp(\theta) - 1)R^2t^2}{8192(1 + \exp(\theta))^3} + \frac{(\exp(\theta))^2(\exp(\theta) - 1)R^3t^3}{196608(1 + \exp(\theta))^5}$$

⋮

elde edilir. Bulunan bu yaklaşık çözümlerin,

$$u(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \left( 1 + \exp\left(\frac{R(-t-4x+4y)}{32}\right) \right)}$$

$$v(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \left( 1 + \exp\left(\frac{R(-t-4x+4y)}{32}\right) \right)}$$

şeklinde verilen tam çözümle [27], farklı viskozite değerleri için karşılaştırılması Tablo 5.11-5.16 ve Şekil 5.15-5.22 ile verildi.

## 5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Uygulamalı bilimlerde karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemesi yapıldığında elde edilen denklemler genellikle “ non-lineer denklemler ” olarak ortaya çıkar. Varyasyonel İterasyon Metodu bu tip non-lineer problemlerin çözümlerini elde etmek için etkili bir metoddur. Metod bir fonksiyoneldeki parametrelerin en uygun değerini belirlemede kullanılan Lagrange Çarpanları Metodu üzerine kurulmuştur. Problemi ayrıştırmadan yaklaşık çözümünü bulmak için uygun bir yöntemdir. Sonlu fark teknikleri gibi sadece mesh noktalarındaki yaklaşık çözümleri veren yöntemlerden farklı olarak, uygun başlangıç şartları için probleme Varyasyonel İterasyon Metodu uygulanması ile elde edilen yaklaşık çözümler, sonsuz kuvvet serisi şeklindedir. Aslında bu elde edilen sonsuz seri kapalı formda ifade edildiğinde tam çözümün kendisidir. Bu metodla problemin non-lineer terimlerini özel olarak ele almaya gerek yoktur, metod lineer ve non-lineer problemleri benzer şekilde ele alır. Fakat lineer problemlerde tam çözüme yakınsama non-lineer problemlere göre daha hızlıdır. Tam çözümün olmadığı problemlerde ise birkaç yaklaşım ile yüksek hassasiyette sonuçlar elde etmek mümkündür.

Bu çalışmada bir ve iki boyutlu Burgers’ denklemini çözmek için Varyasyonel İterasyon Metodu kullanıldı. Metod beş model probleme uygulandı ve elde edilen çözümlerin literatürdeki çözümlerle uyumlu olduğu görüldü. Metodun etkinliğini göstermek için farklı zaman adımlarında farklı viskosite değerleri için elde edilen nümerik çözümler tam çözümlerle karşılaştırıldı. Nümerik çözümler tablo ve grafikler ile verildi.

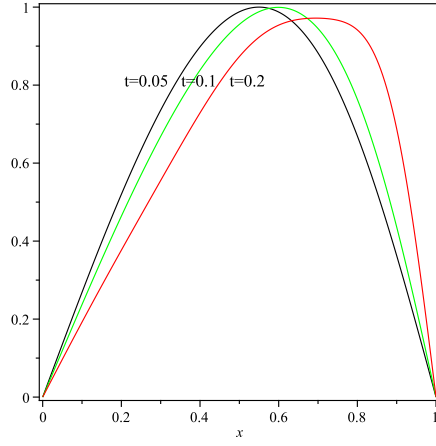
Varyasyonel İterasyon Metodu lineer adi diferensiyel denklemlere uygulandığında tam çözüme ulaşmak için bir iterasyon yeterli iken (örnek 3.5.1) kısmi diferensiyel denklemler yada non-lineer denklemlere uygulandığında daha fazla iterasyona ihtiyaç duyulduğu görüldü (Örnek 3.5.2, Örnek 3.5.3).

Bir boyutlu Burgers' denkleminin Hopf-Cole dönüşümü uygulanarak elde edilen lineer ısı probleminin Varyasyonel İterasyon Metodu uygulanıp Hopf-Cole dönüşümünün kullanılmasıyla Burgers' denkleminin nümerik çözümleri elde edildi. Dönüşüm uygulanarak elde edilen nümerik çözümlerle denkleme direkt Varyasyonel İterasyon Metodu uygulanmasıyla elde edilen nümerik çözümler ve denklemin tam çözümünün karşılaştırılması Tablo 5.4 de verildi. Denkleme Hopf-Cole dönüşümü uygulanmadan direkt Varyasyonel İterasyon Metodu uygulanmasıyla daha iyi sonuçlar elde edildiği görüldü.

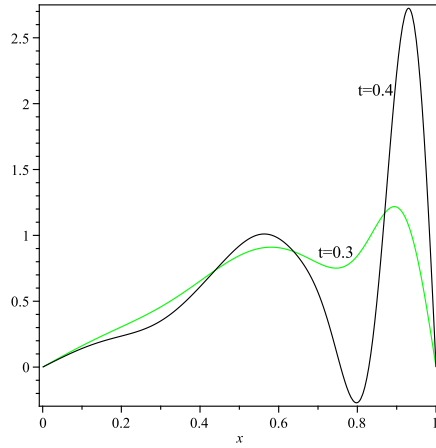
Bir boyutlu Burgers' denkleminde  $v = 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 0.000001$  için  $t = 0.01, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$  zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler karşılaştırıldı ve çok küçük viskozite değerlerinde denklemin matematiksel ve fiziksel yapısının bozulmadığı görüldü (Tablo 5.3 ve Şekil 5.1). Ayrıca küçük viskozite değerlerinde ilerleyen zaman adımlarında problemin yapısının bozulduğu gözlemlendi (Şekil 5.2).

Sonuç olarak, Burgers' denkleminin için küçük viskozite değerlerinde de denklemin yapısını koruyan bir metod sunulmuştur.

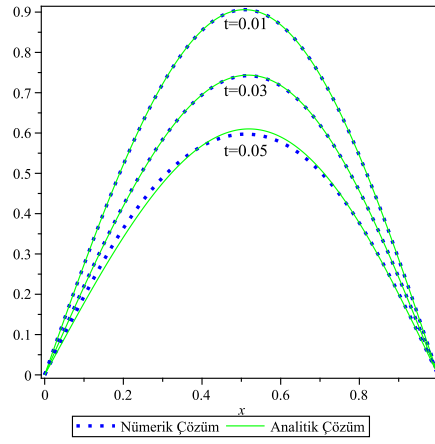
Burgers' denklemini çözmek için kullanılan bu metodun birçok non-lineer problemin çözümünde kullanılabileceği açıktır.



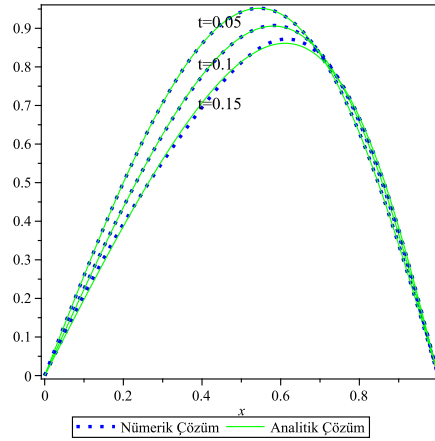
Şekil 5.1: Problem 4.3.1 için  $v=0.000001$  için sırasıyla  $t=0.05$ ,  $t=0.1$ ,  $t=0.2$  için elde edilen nümerik çözümler



Şekil 5.2: Problem 4.3.1 için  $v=0.000001$  için sırasıyla  $t=0.3$ ,  $t=0.4$  için elde edilen nümerik çözümler



Şekil 5.3: Problem 4.3.1 için  $v=1$  için sırasıyla  $t=0.01$ ,  $t=0.03$ ,  $t=0.05$  için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması



Şekil 5.4: Problem 4.3.1 için  $v=0.1$  için sırasıyla  $t=0.05$ ,  $t=0.1$ ,  $t=0.15$  için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 5.1: Problem 4.3.1 için  $v=0.1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

$t$	$x$	Analitik Çözüm	$u_2(x, t)$	$ u_2 - u $	$u_4(x, t)$	$ u_4 - u $
0.001	0.1	0.3077941866	0.3077942087	$2.21000000E - 8$	0.3077941867	$0.1000000E - 9$
	0.3	0.8067295744	0.8067295744	0	0.8067295741	$0.3000000E - 9$
	0.5	0.9990086164	0.9990085950	$2.14000000E - 8$	0.9990086159	$0.5000000E - 9$
	0.7	0.8097085494	0.8097085577	$7.70000000E - 9$	0.8097085510	$1.6000000E - 8$
	0.9	0.3096353202	0.3096353277	$8.20000000E - 9$	0.3096353220	$1.8000000E - 9$
0.01	0.1	0.2972585788	0.2972794613	$2.08825000E - 5$	0.2972586124	$3.3600000E - 8$
	0.3	0.7865891870	0.7865903893	$1.20230000E - 6$	0.7865891558	$3.1200000E - 8$
	0.5	0.9897096341	0.9896888669	$2.07672000E - 5$	0.9897096502	$1.6100000E - 8$
	0.7	0.8155758400	0.8155819816	$6.14040000E - 6$	0.8155758427	$2.7000000E - 9$
	0.9	0.3151982123	0.3152040422	$5.83110000E - 6$	0.3151982096	$2.7000000E - 9$
0.1	0.1	0.2234495336	0.2366854651	$1.32359315E - 2$	0.2251998656	$1.7503319E - 3$
	0.3	0.6251182333	0.6303460275	$5.22779420E - 3$	0.6237746715	$1.3435618E - 3$
	0.5	0.8772796527	0.8600733582	$1.72062945E - 2$	0.8774436370	$1.6398430E - 4$
	0.7	0.8369225599	0.8385957140	$1.67315410E - 3$	0.8377527892	$8.3022930E - 4$
	0.9	0.3657544542	0.3721829172	$6.42846340E - 3$	0.3651210012	$6.3345300E - 4$

Tablo 5.2: Problem 4.3.1 için  $v=0.05$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

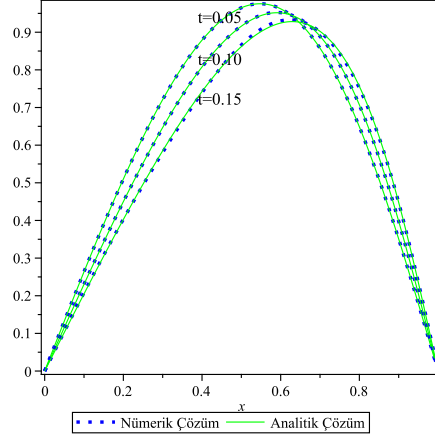
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$u_2(x, t)$	$ u_2 - u $	$u_4(x, t)$	$ u_4 - u $
0.001	0.1	0.3079452117	0.3079452239	$1.2200000E - 8$	0.3079452117	$0.1000000E - 9$
	0.3	0.8071263077	0.8071263014	$6.3000000E - 9$	0.8071263077	0
	0.5	0.9995017244	0.9995017084	$1.5400000E - 8$	0.9995017189	$4.9000000E - 9$
	0.7	0.8101096366	0.8101097074	$7.3300000E - 8$	0.8101096977	$6.1100000E - 8$
	0.9	0.3097890519	0.3097890762	$1.0100000E - 8$	0.3097890745	$1.8300000E - 8$
0.01	0.1	0.2986458439	0.2986575078	$1.1663900E - 5$	0.2986458532	$9.3000000E - 9$
	0.3	0.7903379262	0.7903324224	$5.5038000E - 6$	0.7903379141	$1.2200000E - 8$
	0.5	0.9945963879	0.9945855172	$1.0870700E - 5$	0.9945963974	$9.7000000E - 9$
	0.7	0.8197560483	0.8197656179	$9.5737000E - 6$	0.8197560907	$4.0900000E - 8$
	0.9	0.3168532477	0.3168550146	$1.7471000E - 6$	0.3168532833	$3.6300000E - 8$
0.1	0.1	0.2304108939	0.2382217699	$7.8108760E - 3$	0.2309526276	$5.417334E - 4$
	0.3	0.6469242599	0.6456093736	$1.3148863E - 3$	0.6461664933	$7.577666E - 4$
	0.5	0.9160225164	0.9041450544	$1.1877462E - 2$	0.9168413337	$8.188175E - 4$
	0.7	0.8894891306	0.8973645372	$7.8754078E - 3$	0.8891080821	$3.810489E - 4$
	0.9	0.3978830938	0.4006070855	$2.7239891E - 3$	0.3978634905	$1.960370E - 5$

Tablo 5.3: Problem 4.3.1 için farklı zaman adımlarında farklı viskozite değerleri için elde edilen nümerik sonuçlar

$x$	$t$	$v = 0.01$	$v = 0.001$	$v = 0.0001$	$v = 0.00001$	$v = 0.000001$
0.25	0.01	0.69093	0.69151	0.69157	0.69158	0.69158
	0.05	0.63090	0.63313	0.63336	0.63338	0.63338
	0.10	0.56636	0.56953	0.56985	0.56988	0.56988
	0.15	0.51239	0.51566	0.51599	0.51602	0.51602
	0.20	0.46774	0.47027	0.47052	0.47054	0.47054
0.50	0.01	0.99853	0.99941	0.99950	0.99951	0.99951
	0.05	0.98335	0.98751	0.98794	0.98797	0.98799
	0.10	0.94743	0.95463	0.95535	0.95542	0.95542
	0.15	0.90025	0.90938	0.91029	0.91038	0.91039
	0.20	0.84725	0.85906	0.86025	0.86036	0.86038
0.75	0.01	0.72222	0.72290	0.72296	0.72297	0.72297
	0.05	0.78433	0.78861	0.78903	0.78908	0.78908
	0.10	0.85998	0.87069	0.87177	0.87187	0.87188
	0.15	0.92122	0.93820	0.93991	0.94008	0.94010
	0.20	0.95544	0.97197	0.97359	0.97375	0.97376

Tablo 5.4: Problem 4.3.1 için  $v=0.1$  için direkt VIM ile Hopf-Cole dönüşümünden sonra VIM uygulanmasıyla elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman adımları için karşılaştırılması

$t$	$x$	Analitik Çözüm	$u_5(x, y, t)$	$ u_5 - u $	$H.C.$	$ H.C. - u $
0.05	0.1	0.2586892510	0.2586739267	$1.5324400E - 5$	0.2586191360	$7.01150000E - 5$
	0.3	0.7064636241	0.7064793050	$1.5680900E - 5$	0.7065010156	$3.73915000E - 5$
	0.5	0.9423701739	0.9423572085	$1.2965400E - 5$	0.9423550798	$1.50941000E - 5$
	0.7	0.8334299427	0.8334359042	$5.9615000E - 6$	0.8334370184	$7.07640000E - 6$
	0.9	0.3393615763	0.3393611922	$3.8410000E - 7$	0.3393589154	$2.66170000E - 6$
0.1	0.1	0.2234495336	0.2227909665	$6.5856730E - 4$	0.2195618662	$3.88766740E - 3$
	0.3	0.6251182332	0.6257866042	$6.6837100E - 4$	0.6272266138	$2.10838090E - 3$
	0.5	0.8772796527	0.8767442710	$5.3538170E - 4$	0.8763681588	$9.11493900E - 4$
	0.7	0.8369225593	0.8371433352	$2.2077600E - 4$	0.8373551170	$4.32557700E - 4$
	0.9	0.3657544532	0.3657745247	$2.0071600E - 5$	0.3656028334	$1.51620100E - 4$
0.15	0.1	0.1971691635	0.1919057739	$5.2633897E - 3$	0.1578443476	$3.93248159E - 2$
	0.3	0.5599836737	0.5650181662	$5.0344924E - 3$	0.5814036352	$2.14199615E - 2$
	0.5	0.8132408493	0.8098201013	$3.4207474E - 3$	0.8039091964	$9.33165290E - 3$
	0.7	0.8229761637	0.8236449864	$6.6882270E - 4$	0.8273586400	$4.38247630E - 3$
	0.9	0.3844012476	0.3852263434	$8.2509810E - 4$	0.3829500538	$1.45119330E - 3$



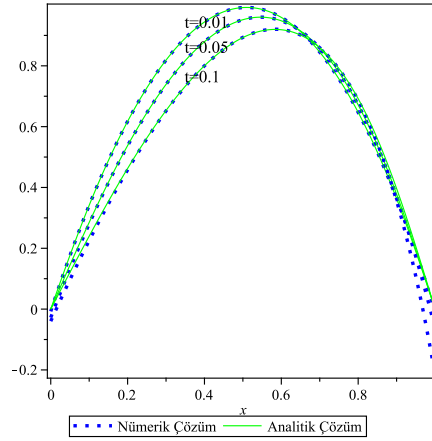
Şekil 5.5: Problem 4.3.1 için  $v=0.05$  için sırasıyla  $t=0.05$ ,  $t=0.1$ ,  $t=0.15$  için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 5.5: Problem 4.3.2 için  $v=0.1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

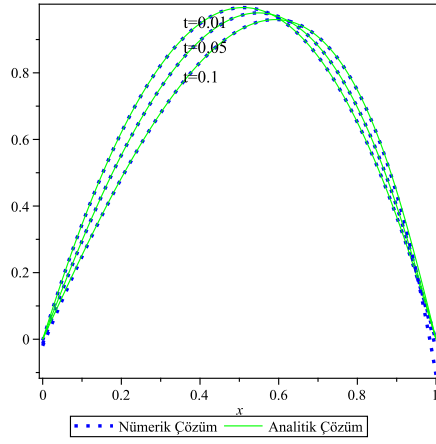
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$u_2(x, t)$	$ u_2 - u $	$u_4(x, t)$	$ u_4 - u $
0.001	0.1	0.3580572339	0.3580562832	$9.50800000E - 7$	0.3580562613	$9.72500000E - 7$
	0.3	0.8378586031	0.8378578910	$7.12700000E - 7$	0.8378579026	$7.01100000E - 7$
	0.5	0.9991969882	0.9991960021	$9.86700000E - 7$	0.9991960128	$9.75400000E - 7$
	0.7	0.8405421911	0.8405407672	$1.42330000E - 6$	0.8405407625	$1.42930000E - 6$
	0.9	0.3603515794	0.3603500488	$1.52940000E - 6$	0.3603500348	$1.54340000E - 6$
0.01	0.1	0.3413298223	0.3413040111	$2.58112000E - 5$	0.3412824278	$4.73945000E - 5$
	0.3	0.8187626571	0.8187517730	$1.08841000E - 5$	0.8187626516	$5.60000000E - 9$
	0.5	0.9916129724	0.9916021333	$1.08391000E - 5$	0.9916129803	$8.50000000E - 9$
	0.7	0.8451115428	0.8451160456	$4.50220000E - 6$	0.8451115458	$2.40000000E - 9$
	0.9	0.3633537648	0.3633256635	$2.81039000E - 5$	0.3633111275	$4.26381000E - 5$
0.1	0.1	0.2398920650	0.2428910933	$2.99902830E - 3$	0.2255299339	$1.43621310E - 2$
	0.3	0.6531413180	0.6474530133	$5.68830470E - 3$	0.6516404155	$1.50090250E - 3$
	0.5	0.8930473860	0.8821333333	$1.09140527E - 2$	0.8935616009	$5.14214300E - 4$
	0.7	0.8595445359	0.8613256533	$1.78111800E - 3$	0.8593800116	$1.64523600E - 4$
	0.9	0.3963939871	0.3765435733	$1.98504140E - 2$	0.3560221194	$4.03718684E - 2$

Tablo 5.6: Problem 4.3.2 için  $v=0.05$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

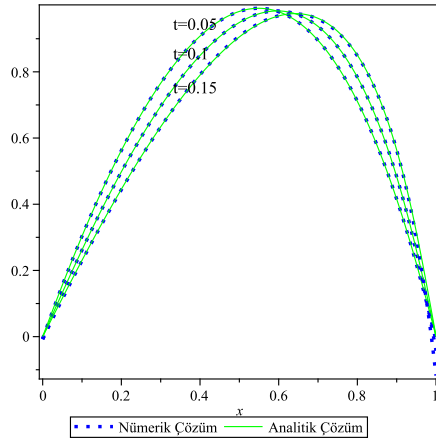
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$u_2(x, t)$	$ u_2 - u $	$u_4(x, t)$	$ u_4 - u $
0.001	0.1	0.3584578320	0.3584537242	$4.1078000E - 6$	0.3584537112	$4.1208000E - 6$
	0.3	0.8382616884	0.8382566105	$5.0779000E - 6$	0.8382566204	$5.0680000E - 6$
	0.5	0.9996139189	0.9995960011	$1.7917800E - 5$	0.9995960064	$1.7912500E - 5$
	0.7	0.8410052746	0.8409420467	$6.3227900E - 5$	0.8409420402	$6.3234400E - 5$
	0.9	0.3608266290	0.3607526098	$7.4019200E - 5$	0.3607526048	$7.4024200E - 5$
0.01	0.1	0.3450372884	0.3450489925	$1.1704100E - 5$	0.3450362710	$1.0174000E - 6$
	0.3	0.8226327152	0.8226232184	$9.4968000E - 6$	0.8226327145	$0.8000000E - 9$
	0.5	0.9956066827	0.9956010667	$5.6160000E - 6$	0.9956066820	$0.6000000E - 9$
	0.7	0.8492370126	0.8492434910	$6.4784000E - 6$	0.8492370595	$4.6900000E - 8$
	0.9	0.3675782248	0.3675826449	$4.4201000E - 6$	0.3675774447	$7.8010000E - 7$
0.1	0.1	0.2524698007	0.2582724267	$5.8026260E - 3$	0.2481300199	$4.3397808E - 3$
	0.3	0.6797949801	0.6740983467	$5.6966334E - 3$	0.6795188399	$2.7614020E - 4$
	0.5	0.9282050039	0.9210666667	$7.1383372E - 3$	0.9286204289	$4.1542500E - 4$
	0.7	0.9083164579	0.9135709866	$5.2545287E - 3$	0.9081582336	$1.5822430E - 4$
	0.9	0.4445094738	0.4431249066	$1.3845672E - 3$	0.4358284695	$8.6810043E - 3$



Şekil 5.6: Problem 4.3.2 için  $v=0.1$  için sırasıyla  $t=0.01$ ,  $t=0.05$ ,  $t=0.1$  için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması



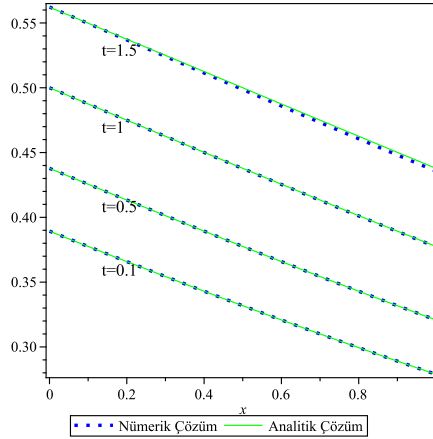
Şekil 5.7: Problem 4.3.2 için  $v=0.05$  için sırasıyla  $t=0.01$ ,  $t=0.05$ ,  $t=0.1$  için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması



Şekil 5.8: Problem 4.3.2 için  $v=0.02$  için sırasıyla  $t=0.05$ ,  $t=0.1$ ,  $t=0.15$  için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 5.7: Problem 4.3.3 için  $v=1$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

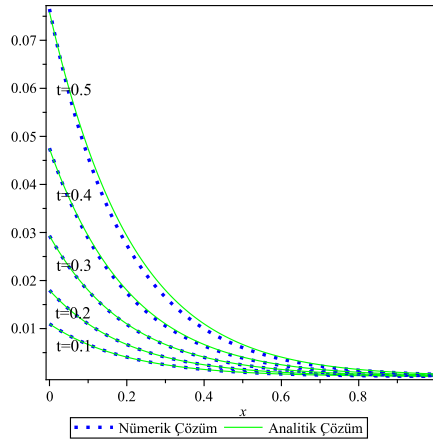
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$u_2(x, y, t)$	$ u_2 - u $	$u_4(x, y, t)$	$ u_4 - u $
0.1	0.1	0.3775406688	0.3775437958	$3.127000E - 6$	0.3775406688	$0.1000E - 9$
	0.3	0.3543436938	0.3543467068	$3.013000E - 6$	0.3543436931	$0.5000E - 9$
	0.5	0.3318122279	0.3318150737	$2.845800E - 6$	0.3318122266	$1.3000E - 9$
	0.7	0.3100255189	0.3100281534	$2.634500E - 6$	0.3100255172	$1.6000E - 9$
	0.9	0.2890504974	0.2890528865	$2.389100E - 6$	0.2890504955	$2.0000E - 9$
0.2	0.1	0.3893607661	0.3893860050	$2.523890E - 5$	0.3893607674	$1.3000E - 9$
	0.3	0.3658644090	0.3658887593	$2.435030E - 5$	0.3658643893	$1.9600E - 8$
	0.5	0.3429895373	0.3430125644	$2.302710E - 5$	0.3429894992	$3.8200E - 8$
	0.7	0.3208213008	0.3208426429	$2.134210E - 5$	0.3208212478	$5.3200E - 8$
	0.9	0.2994328575	0.2994522341	$1.937660E - 5$	0.2994327937	$6.3800E - 8$
0.3	0.1	0.4013123398	0.4013982573	$8.591750E - 5$	0.4013123443	$4.3000E - 9$
	0.3	0.3775406688	0.3776236679	$8.299910E - 5$	0.3775405103	$1.5840E - 7$
	0.5	0.3543436938	0.3544222800	$7.858620E - 5$	0.3543433917	$3.0200E - 7$
	0.7	0.3318122279	0.3318851518	$7.292390E - 5$	0.3318118110	$4.1670E - 7$
	0.9	0.3100255189	0.3100918078	$6.628890E - 5$	0.3100250218	$4.9710E - 7$
0.4	0.1	0.4133824210	0.4135877723	$2.053513E - 4$	0.4133824123	$8.7000E - 9$
	0.3	0.3893607661	0.3895594061	$1.986400E - 4$	0.3893600592	$7.0680E - 7$
	0.5	0.3658644090	0.3660527275	$1.883185E - 4$	0.3658630880	$1.3210E - 6$
	0.7	0.3429895373	0.3431645060	$1.749687E - 4$	0.3429877279	$1.8094E - 6$
	0.9	0.3208213008	0.3209805504	$1.592496E - 4$	0.3208191520	$2.1488E - 6$
0.5	0.1	0.4255574831	0.4259617704	$4.042873E - 4$	0.4255573764	$1.0670E - 7$
	0.3	0.4013123398	0.4017039470	$3.916072E - 4$	0.4013100627	$2.2772E - 6$
	0.5	0.3775406688	0.3779124142	$3.717454E - 4$	0.3775364903	$4.1786E - 6$
	0.7	0.3543436938	0.3546895314	$3.458376E - 4$	0.3543380078	$5.6860E - 6$
	0.9	0.3318122279	0.3321274047	$3.151768E - 4$	0.3318055018	$6.7260E - 6$



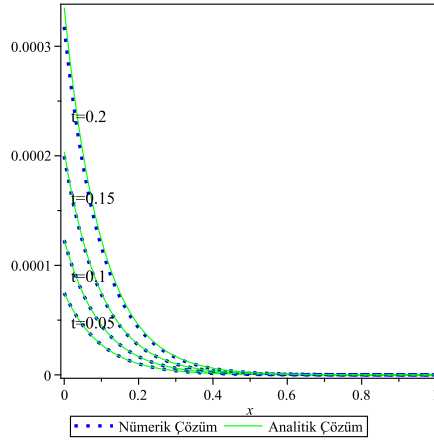
Şekil 5.9: Problem 4.3.3 için  $v=1$  için sırasıyla  $t=0.1$ ,  $t=0.5$ ,  $t=1$ ,  $t=1.5$  için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 5.8: Problem 4.3.3 için  $v=0.1$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

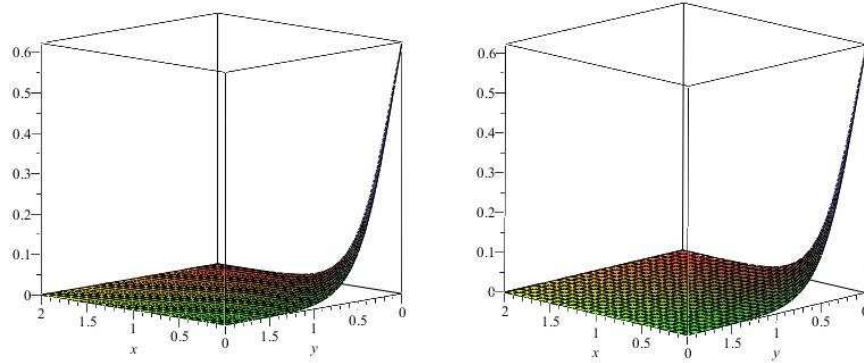
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$u_2(x, y, t)$	$ u_2 - u $	$u_4(x, y, t)$	$ u_4 - u $
0.1	0.1	0.0066928509240	0.0066008535080	$9.199741600E - 5$	0.0066924429780	$4.07946000E - 7$
	0.3	0.0024726231570	0.0024376368320	$3.498632500E - 5$	0.0024723030610	$3.20096000E - 7$
	0.5	0.0009110511948	0.0008980233652	$1.302782960E - 5$	0.0009109089093	$1.42285400E - 7$
	0.7	0.0003353501305	0.0003305360773	$4.814053200E - 6$	0.0003352943304	$5.58001000E - 8$
	0.9	0.0001233945760	0.0001216206849	$1.773891100E - 6$	0.0001233736120	$2.09642000E - 8$
0.2	0.1	0.0109869426300	0.0101448617500	$8.420808800E - 4$	0.0109726193900	$1.43232200E - 5$
	0.3	0.0040701377150	0.0037488185250	$3.213191900E - 4$	0.0040588995240	$1.12381900E - 5$
	0.5	0.0015011822570	0.0013813861070	$1.197961500E - 4$	0.0014961911380	$4.99112100E - 6$
	0.7	0.0005527786371	0.0005084915629	$4.428707420E - 5$	0.0005508231031	$1.95553400E - 6$
	0.9	0.0002034269781	0.0001871052980	$1.632168010E - 5$	0.0002026918411	$7.35136900E - 7$
0.3	0.1	0.0179862099600	0.0147103113100	$3.275898650E - 3$	0.0178673214800	$1.18888480E - 4$
	0.3	0.0066928509240	0.0054358473630	$1.257003561E - 3$	0.0065988413000	$9.40096230E - 5$
	0.5	0.0024726231570	0.0020030193070	$4.696038500E - 4$	0.0024308555980	$4.17675600E - 5$
	0.7	0.0009110511948	0.0007373141091	$1.737370857E - 4$	0.0008946895054	$1.63616893E - 5$
	0.9	0.0003353501305	0.0002713028672	$6.404726330E - 5$	0.0003291979561	$6.15217440E - 6$
0.4	0.1	0.0293122307500	0.0203053509700	$9.006879780E - 3$	0.0287697381200	$5.42492640E - 4$
	0.3	0.0109869426300	0.0074998433600	$3.487099270E - 3$	0.0105490571300	$4.37885500E - 4$
	0.5	0.0040701377150	0.0027630754090	$1.307062306E - 3$	0.0038751253610	$1.95012356E - 4$
	0.7	0.0015011822570	0.0010170243900	$4.841578670E - 4$	0.0014247501320	$7.64321250E - 5$
	0.9	0.0005527786371	0.0003742161928	$1.785624443E - 4$	0.0005240303590	$2.87482780E - 5$
0.5	0.1	0.0474258731800	0.0269381296300	$2.048774355E - 2$	0.0456648153300	$1.76105788E - 3$
	0.3	0.0179862099600	0.0099419265410	$8.044283419E - 3$	0.0165059318300	$1.48027812E - 3$
	0.5	0.0066928509240	0.0036617068590	$3.031144065E - 3$	0.0060299442190	$6.62906705E - 4$
	0.7	0.0024726231570	0.0013476430810	$1.124980076E - 3$	0.0022124094910	$2.60213665E - 4$
	0.9	0.0009110511948	0.0004958480744	$4.152031204E - 4$	0.0008131184713	$9.79327234E - 5$



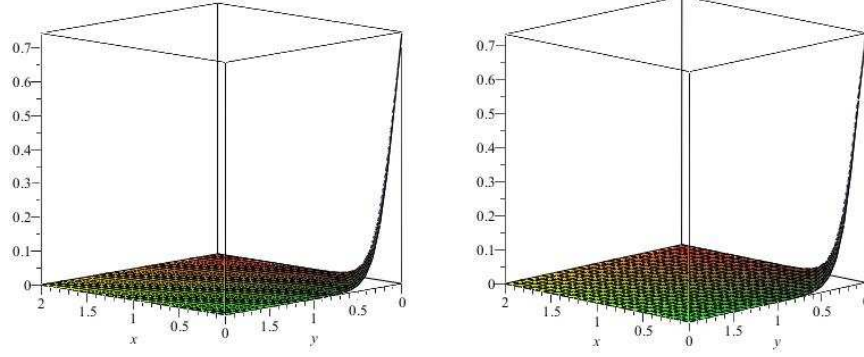
Şekil 5.10: Problem 4.3.3 için  $v=0.1$  için sırasıyla  $t=0.1$ ,  $t=0.2$ ,  $t=0.3$ ,  $t=0.4$ ,  $t=0.5$  için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması



Şekil 5.11: Problem 4.3.3 için  $v=0.05$  için sırasıyla  $t=0.05$ ,  $t=0.1$ ,  $t=0.15$ ,  $t=0.2$  için nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması



Şekil 5.12: Problem 4.3.3 için  $v=0.1$ ,  $t=0.1$  için sırasıyla nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması



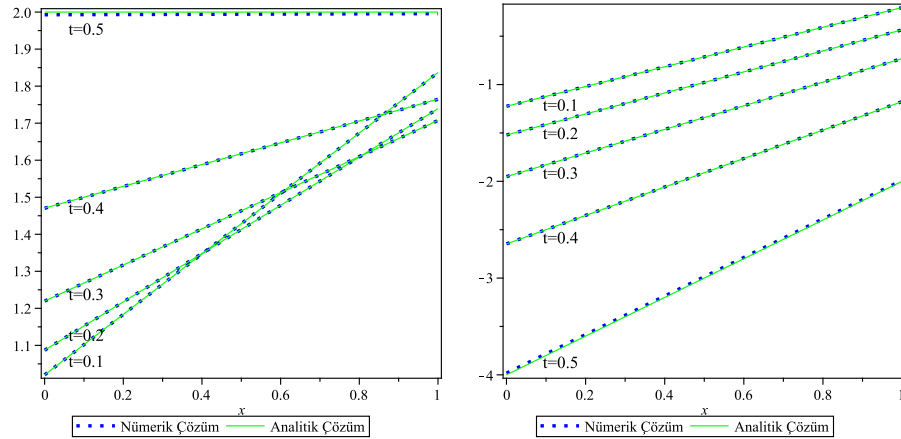
Şekil 5.13: Problem 4.3.3 için  $v=0.05$ ,  $t=0.1$  için sırasıyla nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 5.9: Problem 4.3.4,  $u(x,y,t)$  için  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

$t$	$x$	Analitik Çözüm	$u_4(x, y, t)$	$ u_4 - u $	$u_6(x, y, t)$	$ u_6 - u $
0.1	0.1	1.102040816	1.102038910	$1.90600000E - 6$	1.102040810	$0.6000000E - 8$
	0.3	1.265306122	1.265305970	$1.52000000E - 7$	1.265306119	$0.2000000E - 8$
	0.5	1.428571429	1.428573031	$1.60200000E - 6$	1.428571429	0
	0.7	1.591836735	1.591840092	$3.35700000E - 6$	1.591836739	$0.3000000E - 8$
	0.9	1.755102041	1.755107152	$5.11100000E - 6$	1.755102047	$0.7000000E - 8$
0.2	0.1	1.152173913	1.151996869	$1.77044000E - 4$	1.152171670	$2.2410000E - 6$
	0.3	1.282608696	1.282484398	$1.24298000E - 4$	1.282606869	$1.8260000E - 6$
	0.5	1.413043478	1.412971926	$7.15520000E - 5$	1.413042067	$1.4110000E - 6$
	0.7	1.543478261	1.543459457	$1.88040000E - 5$	1.543477265	$9.9600000E - 7$
	0.9	1.673913043	1.673946985	$3.39420000E - 5$	1.673912464	$5.7900000E - 7$
0.3	0.1	1.268292683	1.265601227	$2.69145600E - 3$	1.268205257	$8.7427000E - 5$
	0.3	1.365853659	1.363609210	$2.24444900E - 3$	1.365776358	$7.7301000E - 5$
	0.5	1.463414634	1.461617195	$1.79743900E - 3$	1.463347461	$6.7173000E - 5$
	0.7	1.560975610	1.559625180	$1.35043000E - 3$	1.560918563	$5.7046000E - 5$
	0.9	1.658536585	1.657633165	$9.03420000E - 4$	1.658489664	$4.6921000E - 5$
0.4	0.1	1.500000000	1.478145957	$2.18540430E - 2$	1.498424392	$1.5756080E - 3$
	0.3	1.558823529	1.539552648	$1.92708810E - 2$	1.557397543	$1.4259870E - 3$
	0.5	1.617647059	1.600959339	$1.66877200E - 2$	1.616370693	$1.2763670E - 3$
	0.7	1.676470588	1.662366029	$1.41045590E - 2$	1.675343844	$1.1267440E - 3$
	0.9	1.735294118	1.723772717	$1.15214010E - 2$	1.734316994	$9.7712400E - 4$

Tablo 5.10: Problem 4.3.4,  $v(x,y,t)$  için  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

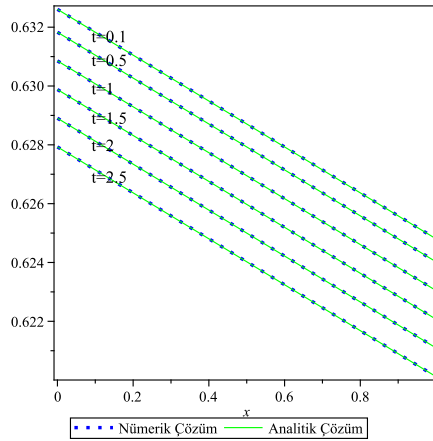
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$v_4(x, y, t)$	$ v_4 - v $	$v_6(x, y, t)$	$ v_6 - v $
0.1	0.1	-1.1224489800	-1.1224349160	$1.40640000E - 5$	-1.1224489490	$3.1000000E - 8$
	0.3	-0.9183673469	-0.9183538398	$1.35071000E - 5$	-0.9183673180	$2.8900000E - 8$
	0.5	-0.7142857143	-0.7142727640	$1.29503000E - 5$	-0.7142856868	$2.7500000E - 8$
	0.7	-0.5102040816	-0.5101916883	$1.23933000E - 5$	-0.5102040558	$2.5800000E - 8$
	0.9	-0.3061224490	-0.3061106125	$1.18365000E - 5$	-0.3061224247	$2.4300000E - 8$
0.2	0.1	-1.4130434780	-1.4123932540	$6.50224000E - 4$	-1.4130367420	$6.7340000E - 6$
	0.3	-1.1956521740	-1.1950426320	$6.09542000E - 4$	-1.1956459270	$6.2470000E - 6$
	0.5	-0.9782608696	-0.9776920120	$5.68857600E - 4$	-0.9782551151	$5.7545000E - 6$
	0.7	-0.7608695652	-0.7603413911	$5.28174100E - 4$	-0.7608643009	$5.2643000E - 6$
	0.9	-0.5434782609	-0.5429907701	$4.87490800E - 4$	-0.5434734866	$4.7743000E - 6$
0.3	0.1	-1.8292682930	-1.8214948220	$7.77347100E - 3$	-1.8290419310	$2.2636200E - 4$
	0.3	-1.5853658540	-1.5781753760	$7.19047800E - 3$	-1.5851579900	$2.0786400E - 4$
	0.5	-1.3414634150	-1.3348559290	$6.60748600E - 3$	-1.3412740480	$1.8936500E - 4$
	0.7	-1.0975609760	-1.0915364820	$6.02449400E - 3$	-1.0973901080	$1.7086600E - 4$
	0.9	-0.8536585366	-0.8482170355	$5.44150110E - 3$	-0.8535061664	$1.5237020E - 4$
0.4	0.1	-2.5000000000	-2.4431075110	$5.68924890E - 2$	-2.4961160960	$3.8839040E - 3$
	0.3	-2.2058823530	-2.1536189880	$5.22633650E - 2$	-2.2023285330	$3.5538200E - 3$
	0.5	-1.9117647060	-1.8641304660	$4.76342400E - 2$	-1.9085409680	$3.2237370E - 3$
	0.7	-1.6176470590	-1.5746419440	$4.30051150E - 2$	-1.6147534050	$2.8936540E - 3$
	0.9	-1.3235294120	-1.2851534210	$3.83759910E - 2$	-1.3209658440	$2.5635680E - 3$



Şekil 5.14: Problem 4.3.4 için sırasıyla  $u(x,y,t)$  ve  $v(x,y,t)$  için farklı zaman adımlarında nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 5.11: Problem 4.3.5,  $u(x,y,t)$  için  $R=1$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

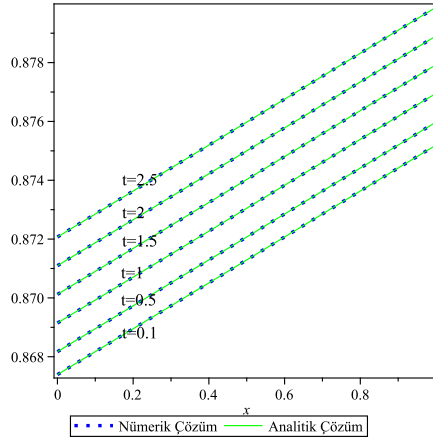
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$u_2(x, y, t)$	$ u_2 - u $	$u_4(x, y, t)$	$ u_4 - u $
0.1	0.1	0.6318291309	0.6318291308	$0.10E - 9$	0.6318291309	0
	0.3	0.6302703112	0.6302703111	$0.10E - 9$	0.6302703112	0
	0.5	0.6287098477	0.6287098476	$0.10E - 9$	0.6287098478	$0.1E - 9$
	0.7	0.6271482260	0.6271482259	$0.10E - 9$	0.6271482261	$0.1E - 9$
	0.9	0.6255859332	0.6255859332	0	0.6255859334	$0.2E - 9$
0.2	0.1	0.6316343849	0.6316343834	$1.50E - 9$	0.6316343849	0
	0.3	0.6300753332	0.6300753317	$1.50E - 9$	0.6300753331	$0.1E - 9$
	0.5	0.6285146983	0.6285146971	$1.20E - 9$	0.6285146985	$0.2E - 9$
	0.7	0.6269529660	0.6269529647	$1.30E - 9$	0.6269529660	0
	0.9	0.6253906237	0.6253906224	$1.30E - 9$	0.6253906236	$0.1E - 9$
0.3	0.1	0.6314396065	0.6314396019	$4.60E - 9$	0.6314396067	$0.2E - 9$
	0.3	0.6298803305	0.6298803259	$4.60E - 9$	0.6298803305	0
	0.5	0.6283195318	0.6283195272	$4.60E - 9$	0.6283195316	$0.2E - 9$
	0.7	0.6267576966	0.6267576921	$4.50E - 9$	0.6267576966	0
	0.9	0.6251953123	0.6251953082	$4.10E - 9$	0.6251953126	$0.3E - 9$
0.4	0.1	0.6312447969	0.6312447855	$1.14E - 8$	0.6312447966	$0.3E - 9$
	0.3	0.6296853040	0.6296852933	$1.07E - 8$	0.6296853042	$0.2E - 9$
	0.5	0.6281243491	0.6281243384	$1.07E - 8$	0.6281243490	$0.1E - 9$
	0.7	0.6265624187	0.6265624082	$1.05E - 8$	0.6265624187	0
	0.9	0.6250000000	0.6249999897	$1.03E - 8$	0.6250000000	0
0.5	0.1	0.6310499568	0.6310499350	$2.18E - 8$	0.6310499568	0
	0.3	0.6294902546	0.6294902331	$2.15E - 8$	0.6294902547	$0.1E - 9$
	0.5	0.6279291512	0.6279291302	$2.10E - 8$	0.6279291513	$0.1E - 9$
	0.7	0.6263671330	0.6263671123	$2.07E - 8$	0.6263671329	$0.1E - 9$
	0.9	0.6248046877	0.6248046678	$1.99E - 8$	0.6248046879	$0.2E - 9$



Şekil 5.15: Problem 4.3.5,  $u(x,y,t)$  için  $R=1$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 5.12: Problem 4.3.5,  $v(x,y,t)$  için  $R=1$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

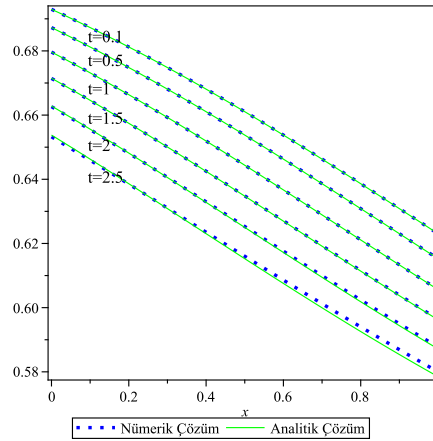
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$v_2(x, y, t)$	$ v_2 - v $	$v_4(x, y, t)$	$ v_4 - v $
0.1	0.1	0.8681708691	0.8681708692	$0.10E - 9$	0.8681708691	0
	0.3	0.8697296888	0.8697296889	$0.10E - 9$	0.8697296888	0
	0.5	0.8712901523	0.8712901524	$0.10E - 9$	0.8712901522	$0.1E - 9$
	0.7	0.8728517740	0.8728517741	$0.10E - 9$	0.8728517739	$0.1E - 9$
	0.9	0.8744140668	0.8744140668	0	0.8744140666	$0.2E - 9$
0.2	0.1	0.8683656151	0.8683656166	$1.50E - 9$	0.8683656151	0
	0.3	0.8699246668	0.8699246683	$1.50E - 9$	0.8699246669	$0.1E - 9$
	0.5	0.8714853017	0.8714853029	$1.20E - 9$	0.8714853015	$0.2E - 9$
	0.7	0.8730470340	0.8730470353	$1.30E - 9$	0.8730470340	0
	0.9	0.8746093763	0.8746093776	$1.30E - 9$	0.8746093764	$0.1E - 9$
0.3	0.1	0.8685603935	0.8685603981	$4.60E - 9$	0.8685603933	$0.2E - 9$
	0.3	0.8701196695	0.8701196741	$4.60E - 9$	0.8701196695	0
	0.5	0.8716804682	0.8716804728	$4.60E - 9$	0.8716804684	$0.2E - 9$
	0.7	0.8732423034	0.8732423079	$4.50E - 9$	0.8732423034	0
	0.9	0.8748046877	0.8748046918	$4.10E - 9$	0.8748046874	$0.3E - 9$
0.4	0.1	0.8687552031	0.8687552145	$1.14E - 8$	0.8687552034	$0.3E - 9$
	0.3	0.8703146960	0.8703147067	$1.07E - 8$	0.8703146958	$0.2E - 9$
	0.5	0.8718756509	0.8718756616	$1.07E - 8$	0.8718756510	$0.1E - 9$
	0.7	0.8734375813	0.8734375918	$1.05E - 8$	0.8734375813	0
	0.9	0.8750000000	0.8750000103	$1.03E - 8$	0.8750000000	0
0.5	0.1	0.8689500432	0.8689500650	$2.18E - 8$	0.8689500432	0
	0.3	0.8705097454	0.8705097669	$2.15E - 8$	0.8705097453	$0.1E - 9$
	0.5	0.8720708488	0.8720708698	$2.10E - 8$	0.8720708487	$0.1E - 9$
	0.7	0.8736328670	0.8736328877	$2.07E - 8$	0.8736328671	$0.1E - 9$
	0.9	0.8751953123	0.8751953322	$1.99E - 8$	0.8751953121	$0.2E - 9$



Şekil 5.16: Problem 4.3.5,  $v(x,y,t)$  için  $R=1$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 5.13: Problem 4.3.5,  $u(x,y,t)$  için  $R=10$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

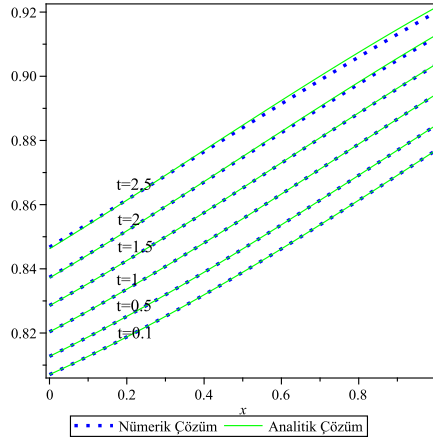
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$u_2(x, y, t)$	$ u_2 - u $	$u_4(x, y, t)$	$ u_4 - u $
0.1	0.1	0.6872718033	0.6872716874	$1.15900E - 7$	0.6872718030	$0.300E - 9$
	0.3	0.6748136053	0.6748134490	$1.56300E - 7$	0.6748136054	$0.100E - 9$
	0.5	0.6610562766	0.6610560914	$1.85200E - 7$	0.6610562768	$0.200E - 9$
	0.7	0.6462752886	0.6462750949	$1.93700E - 7$	0.6462752884	$0.200E - 9$
	0.9	0.6308550872	0.6308549108	$1.76400E - 7$	0.6308550872	0
0.2	0.1	0.6857920022	0.6857910664	$9.35800E - 7$	0.6857920040	$1.800E - 9$
	0.3	0.6731604958	0.6731592339	$1.26190E - 6$	0.6731604974	$1.600E - 9$
	0.5	0.6592576986	0.6592562072	$1.49140E - 6$	0.6592576987	$0.100E - 9$
	0.7	0.6443738413	0.6443722873	$1.55400E - 6$	0.6443738406	$0.700E - 9$
	0.9	0.6289049789	0.6289035650	$1.41390E - 6$	0.6289049771	$1.800E - 9$
0.3	0.1	0.6842895406	0.6842863505	$3.19010E - 6$	0.6842895531	$1.250E - 8$
	0.3	0.6714873637	0.6714830707	$4.29300E - 6$	0.6714873738	$1.010E - 8$
	0.5	0.6574436519	0.6574385874	$5.06450E - 6$	0.6574436537	$1.800E - 9$
	0.7	0.6424631629	0.6424578969	$5.26600E - 6$	0.6424631555	$7.400E - 9$
	0.9	0.6269529660	0.6269481885	$4.77750E - 6$	0.6269529523	$1.370E - 8$
0.4	0.1	0.6827646446	0.6827570078	$7.63680E - 6$	0.6827646991	$5.450E - 8$
	0.3	0.6697946748	0.6697844177	$1.02571E - 5$	0.6697947185	$4.370E - 8$
	0.5	0.6556148328	0.6556027556	$1.20772E - 5$	0.6556148441	$1.130E - 8$
	0.7	0.6405441252	0.6405315943	$1.25309E - 5$	0.6405440955	$2.970E - 8$
	0.9	0.6250000000	0.6249886625	$1.13375E - 5$	0.6249999396	$6.040E - 8$
0.5	0.1	0.6812175691	0.6812025056	$1.50635E - 5$	0.6812177384	$1.693E - 7$
	0.3	0.6680829248	0.6680627333	$2.01915E - 5$	0.6680830605	$1.357E - 7$
	0.5	0.6537719639	0.6537482347	$2.37292E - 5$	0.6537720012	$3.720E - 8$
	0.7	0.6386176163	0.6385930501	$2.45662E - 5$	0.6386175252	$9.110E - 8$
	0.9	0.6230470339	0.6230248690	$2.21649E - 5$	0.6230468470	$1.869E - 7$



Şekil 5.17: Problem 4.3.5,  $u(x,y,t)$  için  $R=10$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 5.14: Problem 4.3.5,  $v(x,y,t)$  için  $R=10$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

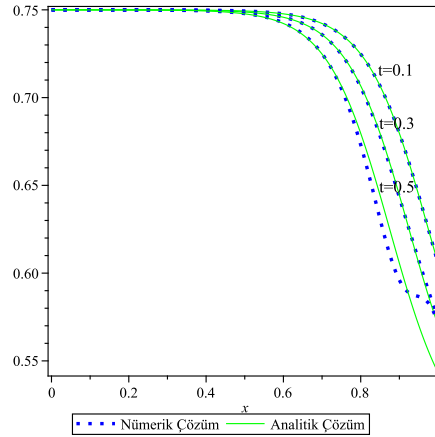
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$v_2(x, y, t)$	$ v_2 - v $	$v_4(x, y, t)$	$ v_4 - v $
0.1	0.1	0.8127281967	0.8127283126	$1.15900E - 7$	0.8127281970	$0.300E - 9$
	0.3	0.8251863947	0.8251865510	$1.56300E - 7$	0.8251863946	$0.100E - 9$
	0.5	0.8389437234	0.8389439086	$1.85200E - 7$	0.8389437232	$0.200E - 9$
	0.7	0.8537247114	0.8537249051	$1.93700E - 7$	0.8537247116	$0.200E - 9$
	0.9	0.8691449128	0.8691450892	$1.76400E - 7$	0.8691449128	0
0.2	0.1	0.8142079978	0.8142089336	$9.35800E - 7$	0.8142079960	$1.800E - 9$
	0.3	0.8268395042	0.8268407661	$1.26190E - 6$	0.8268395026	$1.600E - 9$
	0.5	0.8407423014	0.8407437928	$1.49140E - 6$	0.8407423013	$0.100E - 9$
	0.7	0.8556261587	0.8556277127	$1.55400E - 6$	0.8556261594	$0.700E - 9$
	0.9	0.8710950211	0.8710964350	$1.41390E - 6$	0.8710950229	$1.800E - 9$
0.3	0.1	0.8157104594	0.8157136495	$3.19010E - 6$	0.8157104469	$1.250E - 8$
	0.3	0.8285126363	0.8285169293	$4.29300E - 6$	0.8285126262	$1.010E - 8$
	0.5	0.8425563481	0.8425614126	$5.06450E - 6$	0.8425563463	$1.800E - 9$
	0.7	0.8575368371	0.8575421031	$5.26600E - 6$	0.8575368444	$7.400E - 9$
	0.9	0.8730470340	0.8730518115	$4.77750E - 6$	0.8730470477	$1.370E - 8$
0.4	0.1	0.8172353554	0.8172429922	$7.63680E - 6$	0.8172353009	$5.450E - 8$
	0.3	0.8302053252	0.8302155823	$1.02571E - 5$	0.8302052815	$4.370E - 8$
	0.5	0.8443851672	0.8443972444	$1.20772E - 5$	0.8443851559	$1.130E - 8$
	0.7	0.8594558748	0.8594684057	$1.25309E - 5$	0.8594559045	$2.970E - 8$
	0.9	0.8750000000	0.8750113375	$1.13375E - 5$	0.8750000604	$6.040E - 8$
0.5	0.1	0.8187824309	0.8187974944	$1.50635E - 5$	0.8187822616	$1.693E - 7$
	0.3	0.8319170752	0.8319372667	$2.01915E - 5$	0.8319169395	$1.357E - 7$
	0.5	0.8462280361	0.8462517653	$2.37292E - 5$	0.8462279989	$3.720E - 8$
	0.7	0.8613823837	0.8614069499	$2.45662E - 5$	0.8613824748	$9.110E - 8$
	0.9	0.8769529661	0.8769751310	$2.21649E - 5$	0.8769531530	$1.869E - 7$



Şekil 5.18: Problem 4.3.5,  $v(x,y,t)$  için  $R=10$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 5.15: Problem 4.3.5,  $u(x,y,t)$  için  $R=100$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

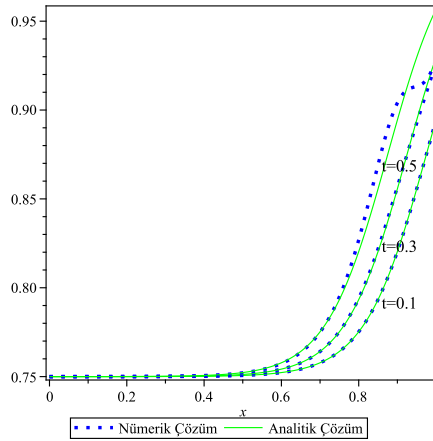
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$u_2(x, y, t)$	$ u_2 - u $	$u_4(x, y, t)$	$ u_4 - u $
0.1	0.1	0.7499955554	0.7499955732	$1.78000000E - 8$	0.7499955555	$0.10000000E - 9$
	0.3	0.7499458640	0.7499460818	$2.17800000E - 7$	0.7499458649	$0.90000000E - 9$
	0.5	0.7493420815	0.7493446776	$2.59610000E - 6$	0.7493420902	$8.60000000E - 9$
	0.7	0.7422140424	0.7422379046	$2.38622000E - 5$	0.7422137938	$2.48600000E - 7$
	0.9	0.6796485981	0.6795447045	$1.03893600E - 4$	0.6796541082	$5.51010000E - 6$
0.2	0.1	0.7499939249	0.7499940808	$1.55900000E - 7$	0.7499939278	$2.90000000E - 9$
	0.3	0.7499260107	0.7499279057	$1.89500000E - 6$	0.7499260449	$3.42000000E - 8$
	0.5	0.7491015994	0.7491241585	$2.25591000E - 5$	0.7491018920	$2.92600000E - 7$
	0.7	0.7394780680	0.7396825840	$2.04516000E - 4$	0.7394695207	$8.54730000E - 6$
	0.9	0.6628387162	0.6619134357	$9.25280500E - 4$	0.6630360523	$1.97336100E - 4$
0.3	0.1	0.7499916965	0.7499922707	$5.74200000E - 7$	0.7499917196	$2.31000000E - 8$
	0.3	0.7498988796	0.7499058618	$6.98220000E - 6$	0.7498991541	$2.74500000E - 7$
	0.5	0.7487736486	0.7488566466	$8.29980000E - 5$	0.7487759989	$2.35030000E - 6$
	0.7	0.7358368937	0.7365750223	$7.38128600E - 4$	0.7357666778	$7.02159000E - 5$
	0.9	0.6443738413	0.6409239958	$3.44984550E - 3$	0.6460554518	$1.68161050E - 3$
0.4	0.1	0.7499886505	0.7499901430	$1.49250000E - 6$	0.7499887538	$1.03300000E - 7$
	0.3	0.7498618053	0.7498799493	$1.81440000E - 5$	0.7498630337	$1.22840000E - 6$
	0.5	0.7483267873	0.7485420297	$2.15242400E - 4$	0.7483372950	$1.05077000E - 5$
	0.7	0.7310354550	0.7329005462	$1.86509120E - 3$	0.7307133695	$3.22085500E - 4$
	0.9	0.6250000000	0.6160692215	$8.93077850E - 3$	0.6329679779	$7.96797810E - 3$
0.5	0.1	0.7499844874	0.7499876980	$3.21060000E - 6$	0.7499848228	$3.35400000E - 7$
	0.3	0.7498111486	0.7498501678	$3.90192000E - 5$	0.7498151348	$3.98620000E - 6$
	0.5	0.7477185907	0.7481801952	$4.61604500E - 4$	0.7477526589	$3.40682000E - 5$
	0.7	0.7247803443	0.7286444823	$3.86413800E - 3$	0.7237037674	$1.07657690E - 3$
	0.9	0.6056261587	0.5868419493	$1.87842094E - 2$	0.6330156791	$2.73895204E - 2$



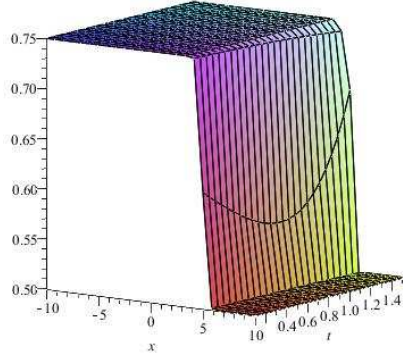
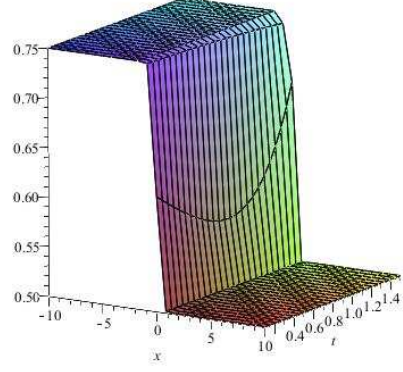
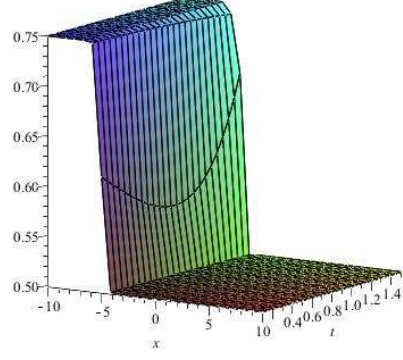
Şekil 5.19: Problem 4.3.5,  $u(x,y,t)$  için  $R=100$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 5.16: Problem 4.3.5,  $v(x,y,t)$  için  $R=100$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

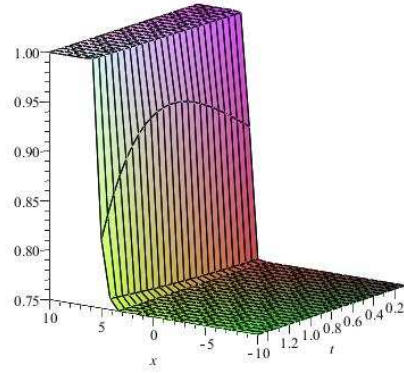
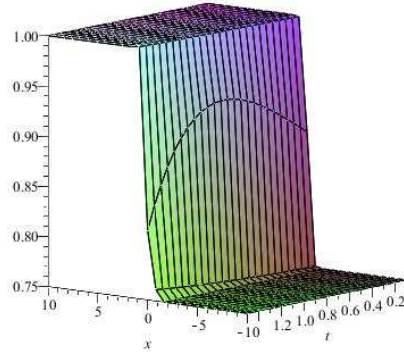
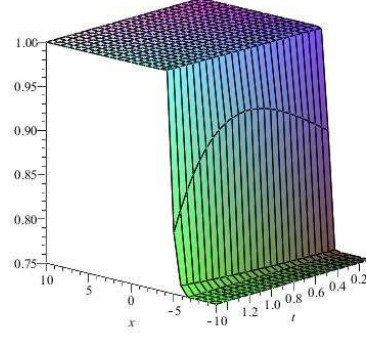
$t$	$x$	Analitik Çözüm	$v_2(x, y, t)$	$ v_2 - v $	$v_4(x, y, t)$	$ v_4 - v $
0.1	0.1	0.7500044446	0.7500044268	$1.78000000E - 8$	0.7500044445	$0.10000000E - 9$
	0.3	0.7500541360	0.7500539182	$2.17800000E - 7$	0.7500541351	$0.90000000E - 9$
	0.5	0.7506579185	0.7506553224	$2.59610000E - 6$	0.7506579098	$8.60000000E - 9$
	0.7	0.7577859576	0.7577620954	$2.38622000E - 5$	0.7577862062	$2.48600000E - 7$
	0.9	0.8203514019	0.8204552955	$1.03893600E - 4$	0.8203458918	$5.51010000E - 6$
0.2	0.1	0.7500060751	0.7500059192	$1.55900000E - 7$	0.7500060722	$2.90000000E - 9$
	0.3	0.7500739893	0.7500720943	$1.89500000E - 6$	0.7500739551	$3.42000000E - 8$
	0.5	0.7508984006	0.7508758415	$2.25591000E - 5$	0.7508981080	$2.92600000E - 7$
	0.7	0.7605219320	0.7603174160	$2.04516000E - 4$	0.7605304787	$8.54730000E - 6$
	0.9	0.8371612838	0.8380865643	$9.25280500E - 4$	0.8369639487	$1.97336100E - 4$
0.3	0.1	0.7500083035	0.7500077293	$5.74200000E - 7$	0.7500082804	$2.31000000E - 8$
	0.3	0.7501011204	0.7500941382	$6.98220000E - 6$	0.7501008459	$2.74500000E - 7$
	0.5	0.7512263514	0.7511433534	$8.29980000E - 5$	0.7512240012	$2.35030000E - 6$
	0.7	0.7641631063	0.7634249777	$7.38128600E - 4$	0.7642333222	$7.02159000E - 5$
	0.9	0.8556261587	0.8590760042	$3.44984550E - 3$	0.8539445482	$1.68161050E - 3$
0.4	0.1	0.7500113495	0.7500098570	$1.49250000E - 6$	0.7500112462	$1.03300000E - 7$
	0.3	0.7501381947	0.7501200507	$1.81440000E - 5$	0.7501369662	$1.22840000E - 6$
	0.5	0.7516732127	0.7514579703	$2.15242400E - 4$	0.7516627051	$1.05077000E - 5$
	0.7	0.7689645450	0.7670994538	$1.86509120E - 3$	0.7692866305	$3.22085500E - 4$
	0.9	0.8750000000	0.8839307785	$8.93077850E - 3$	0.8670320219	$7.96797810E - 3$
0.5	0.1	0.7500155126	0.7500123020	$3.21060000E - 6$	0.7500151771	$3.35400000E - 7$
	0.3	0.7501888514	0.7501498322	$3.90192000E - 5$	0.7501848651	$3.98620000E - 6$
	0.5	0.7522814093	0.7518198048	$4.61604500E - 4$	0.7522473414	$3.40682000E - 5$
	0.7	0.7752196557	0.7713555177	$3.86413800E - 3$	0.7762962326	$1.07657690E - 3$
	0.9	0.8943738413	0.9131580507	$1.87842094E - 2$	0.8669843210	$2.73895204E - 2$



Şekil 5.20: Problem 4.3.5,  $v(x,y,t)$  için  $R=100$ ,  $y=1$  için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması



Şekil 5.21: Problem 4.3.5,  $u(x,y,t)$  için  $R=50$  için sırasıyla  $y=-5$ ,  $y=0$ ,  $y=5$  için nümerik çözümler



Şekil 5.22: Problem 4.3.5,  $v(x,y,t)$  için  $R=50$  için sırasıyla  $y=-5$ ,  $y=0$ ,  $y=5$  için nümerik çözümler

## 6. Kaynakça

- [1] H. Bateman, *Some recent researches on the motion of fluids*, Mon. Weather Rev. 43 (1915) 163-170.
- [2] J. M. Burgers, *Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion*, Trans. Roy. Neth. Acad. Sci. 17 (1939) 1-53.
- [3] J.M. Burgers, *Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence*, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. 43 (1940) 2-12.
- [4] J. M. Burgers, *A Mathematical model illustrating the theory of turbulence*, Advances in Applied Mechanics 1, Academic Press, New York (1948).
- [5] J. M. Burgers, *The formation of vortex sheets in a simplified type of turbulence*, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. 53 (1950) 122-133.
- [6] J. M. Burgers, *Correlation problems in a one-dimensional model of turbulence*, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. 53 (1950) 247-260, 393-406, 718-742.
- [7] J. M. Burgers, *Statistical problems connected with the solution of a simple non-linear partial equation*, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. B57 (1954) 45-72, 159-169, 403-433.
- [8] J. M. Burgers, *An approximate equation for correlation function connected with a non-linear problem*, Proceedings of the eighth international congress for applied mechanics (University of İstanbul, Turkey) 2 (1955) 89-103.
- [9] J. M. Burgers, *A model for one-dimensional compressible turbulence with two sets of characteristics*, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. B58 (1955) 1-18.

- [10] J. M. Burgers, *Statistical problems connected with the solution of a simple non-linear partial equation*, Non-Linear Problems of Engineering, Academic Press, New York (1964).
- [11] J. M. Burgers, *Functions and integrals connected with the solution of the diffusion or heat flow equation*, The Institute for Fluid Dynamics Applied Mathematics, University of Maryland, Tech. Note BN-398 (1965).
- [12] P. A. Lagerstrom, J. D. Cole and L. Trilling, *Problems in the theory of viscous compressible fluids*, Calif. Inst. Tech., Tech. Note (1949).
- [13] J. D. Cole, *On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics*, Quart. Apply. Math. 9 (1951) 225-236, 393-406.
- [14] A. Goldberg, *Finite aplitude waves in magnetohydrodynamics*, Soviet Phys. JETP 15 (1962) 179-181.
- [15] L. A. Pospelov, *Propagation of finite-amplitude elastic waves*, Soviet Phys. Acoust. 11 (1966) 302-304.
- [16] B. Van der Pol, *On a non-linear partial differential equation satisfied by the logarithm of the Jacobean theta-functions, with aritmetical applications*, Proc. Acad. Sci. A13 (1951) 261-284.
- [17] S. Kutluay, A. R. Bahadir, A. Özdeş, *Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods*, Jour. of Comp. and Appl. Math. 103 (1999) 251-261.
- [18] E. N. Aksan, A. Özdeş, T. Öziş, *A numerical solution of Burgers' equation based on least squares approximation*, Appl. Math. and Comput. 176 (2006) 270-279.
- [19] S. Xie, G. Li, S. Yi, S. Heo, *A compact finite difference method for solving Burgers' equation*, Int. J. Numer. Meth. Fluids 62 (2010) 747-764.

- [20] P. C. Jain, D. N. Holla, *Numerical solution of coupled Burgers' equations*, Int. J. Nonlinear Mech. 13 (1978) 213-222.
- [21] S. M. El-Sayed, D. Kaya, *On the numerical solution of the system of two-dimensional Burgers' equations by the decomposition method*, Appl. Math. and Comput. 158 (2004) 101-109.
- [22] F. Liu, S. Weiping, *Numerical solution of two-dimensional Burgers' equation by lattice Boltzmann method*, Commun. in Nonlinear Sci. and Num. Simul. 16 (2011) 150-157.
- [23] A. R. Bahadır, *A fully implicit finite-difference scheme for two-dimensional Burgers' equations*, Appl. Math. and Comput. 137 (2003) 131-137.
- [24] R. C. Mittal, R. Jiware, *Differential quadrature method for two-dimensional Burgers' equations*, Int. J. for Comput. Meth. in Eng. Sci. and Mech. 10:6 (2009) 450-459.
- [25] A. N. Boules, I. J. Eick, *A spectral approximation of the two-dimensional Burgers' equation*, Indian. J. Pure Appl. Math. 34:2 (2003) 299-309.
- [26] A.-M. Wazwaz, *The variational iteration method: A powerful scheme for handling linear and nonlinear diffusion equations*, Computers and Mathematics with Applications 54 (2007) 933-939.
- [27] J. Biazar, H. Aminikhah, *Exact and numerical solutions for non-linear Burger's equation by VIM*, Mathematical and Computer Modelling 49 (2009) 1394-1400.
- [28] E. M. Abulwafa, M. A. Abdou, A. A. Mahmoud, *The solution of nonlinear coagulation problem with mass loss*, Chaos, Solitons and Fractals 29 (2006) 313-330.
- [29] A. A. Soliman, *On the solution of two-dimensional coupled Burgers' equations by variational iteration method*, Chaos, Solitons and Fractals 40 (2009) 1146-1155.

- [30] M. A. Abdou, A. A. Soliman, *Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics 181 (2005) 245-251.
- [31] T. Öziş, E. N. Aksan, A. Özdeş, *A finite element approach for solution of Burger's equation*, Appl. Math. and Comput. 139 (2003) 417-428.
- [32] E. N. Aksan,, *A numerical solution of Burger's equation by finite element method constructed on the method of discretization in time* , Appl. Math. and Comput. 170 (2005) 895-904.
- [33] W. Liao, *A fourth-order finite-difference method for solving the system of two-dimensional Burgers' equations*, Int. J. Numer. Meth. Fluids 64 (2010) 565-590.
- [34] J. H. He, *Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media*, Comput. Method Appl. Mech. Eng. 167 (1998) 57-68.
- [35] J. H. He, *Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities*, Comput. Method Appl. Mech. Eng. 167 (1998) 69-73.
- [36] J. H. He, *Variational iteration method - a kind of non-linear analytical technique: Some examples*, J. Non-linear Mech. 34 (1999) 699-708.
- [37] J. H. He, *A new approach to non-linear partial differential equations*, Commun. in Non-linear Sci. and Numer. Simulat. 2(4) (1997). 230-235.
- [38] B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York and London (1972).
- [39] Don S. Lemons, *Variational Principles, Methods, and Applications in Elementary Physics*, Princeton University Press, New Jersey (1997).

- [40] J. N. Reddy, *An Introduction To The Finite Element Method* , McGraw-Hill Education (1993) 27-28.
- [41] J. H. He, *Variational iteration method for delay differential equations*, Commun. in Non-linear Sci. and Numer. Simulat. 2(4) (1997) 235-241.
- [42] S. Momani, S. Abuasad, *Application of He's variational iteration method to Helmholtz equation*, Chaos, Solitons and Fractals 27 (2006) 1119-1142.
- [43] M. Balcı, *Genel Matematik II*, Balcı Yayınları, Ankara (2000).
- [44] K. Koca, *Kısmi Türevli Denklemler*, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara (2001).
- [45] S. L. Ross, *Differential Equations* , John Wiley and Sons, Canada (1984).
- [46] K. Rektorys, *Variational Methods in Mathematics* , Science and Engineering, London (1980).

## ÖZGEÇMİŞ

26 Şubat 1986 tarihinde Malatya' da doğdu. İlk öğrenimini ve orta öğrenimini Malatya' da tamamladı. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 2009' da bölüm birincisi olarak öğrenimini tamamlayıp yine 2009' da İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. Şubat 2010' da, Harran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen görevine devam etmektedir.