KKM DÖNÜŞÜMLERİ VE UYGULAMALARI ÜZERİNE

Emrah GÜNGÖR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2011
ANKARA

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Emrah GÜNGÖR

KKM DÖNÜŞÜMLERİ VE UYGULAMALARI ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Emrah GÜNGÖR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2011

ÖZET

Bu tez çalışmasında topolojik vektör uzaylarda ve soyut konveks uzaylarda KKM dönüşümleri ve bazı uygulamaları incelendi. Öncelikle ön bilgiler, bazı temel tanım ve teoremler verildi. Genel hatlarıyla tek değerli ve çoğul değerli dönüşümlerde yarı süreklilik ele alındı. Topolojik vektör uzaylarda KKM dönüşümü ve bazı uygulamaları verilerek sabit nokta incelendi. Genel hatlarıyla soyut konveks uzaylar tanıtıldı ve KKM uzay ile olan ilişkisi vurgulandı. Ayrıca soyut konveks uzaylardaki KKM dönüşümünün bazı uygulamaları verilerek denklikleri gösterildi. Son olarak normlu uzaylarda KKM dönüşümünün bazı uygulamaları verilerek sabit ve çakışık nokta ele alındı.

Bilim kodu : **204.1.132**
Anahtar kelimeler : **KKM özellik, KKM dönüşümü, yarı süreklilik, topolojik vektör uzaylar, soyut konveks uzaylar, minimaks teoremi, minimaks eşitsizliği, değişim eşitsizliği, sabit nokta, çoğul değerli dönüşüm, (Kısmi) KKM prensibi, KKM uzay, geometrik lemma**
Sayfa Adedi : **131**
Tez Yöneticisi : **Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU**

NOTE ON KKM MAPS AND APPLICATIONS

(M.Sc. Thesis)

Emrah GÜNGÖR

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 2011

ABSTRACT

In this thesis, KKM mappings and some applications in topological vector and abstract convex spaces have been studied. At first, background information, some basic definitions and theorems were given. Then semi-continuous on single valued and multivalued mappings were given fundamentally. In topological vector spaces, KKM mapping and some applications were given and fixed point has been studied. In general, abstract convex spaces were introduced and the relation between KKM spaces and abstract convex spaces has been emphasized. Also equivalents of some applications of KKM mappings in abstract convex spaces were shown. Lastly fixed point and coincidence point on some applications of KKM mappings in normed spaces have been studied.

Science Code	:	**204.1.132**
Key Words	:	**KKM property, KKM map, semi continuous, topological vector spaces, abstract convex spaces, minimax theory, minimax inequality, variational inequality, fixed point, multivalued map, (partial) KKM principle, KKM space, geometric lemma**
Page Number	:	**131**
Adviser	:	**Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU'na ve tez yazım aşamasında benden yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Turan LALE'ye ve maddi ve manevi desteğini benden hiç eksik etmeyen aileme ve Berna AYDIN'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	Pozitif reel sayılar kümesi
$A \subset B$	A, B' nin alt kümesidir
$\Rightarrow$	Gerektirme
$\Leftarrow$	Yeterlilik
$\Leftrightarrow$	Ancak ve ancak
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
A^{0}	A kümesinin içi
$IntA$	A kümesinin içi
A^{c}	A kümesinin tümleyeni
$f\|_{A}$	f fonksiyonunun A kümesine kısıtlanması
$A-B$	A fark B kümesi
$\|A\|$	A kümesinin kardinalitesi
$\mathfrak{P}$	Sıfırın komşuluklar tabanı
$\mathfrak{U}_{x}$	x noktasının komşuluklar ailesi

Simgeler	**Açıklama**
(X,d)	Metrik uzay
$d(x,y)$	Metrik, x ile y arasındaki uzaklık
(X,τ)	Topolojik uzay
$\sup A$	A kümesinin en küçük üst sınırı (supremum)
$\inf A$	A kümenin en büyük alt sınırı (infimum)
(x_n)	Dizi
$x_n \to x$	(x_n) dizisi x e yakınsar
$\mathbb{F}$	Reel ya da kompleks sayılar kümesi
$\lVert\ \rVert$	Norm
$(X,\lVert\ \rVert)$	Normlu uzay
θ	Sıfır vektörü
$\lvert\ \rvert$	Mutlak değer
Δ	$X \times X$ nin köşegeni
$co(A)$	A kümesinin konveks zarfı
τ	Topoloji
$\forall$	Her
$\exists$	En az
$\ni$	Öyle ki
$A \approx B$	A ile B denktir
$B(x,\varepsilon)$	x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar

Simgeler	**Açıklama**
ℓ_∞	Skalerlerin bütün sınırlı dizilerinin koleksiyonu
c_0	Skalerlerin sıfıra yakınsak dizilerinin koleksiyonu
$\mathfrak{B}(x)$	x noktasının bir komşuluk tabanı
$F : X \to 2^Y$	X den $P(Y)$ kuvvet kümesine çoğul değerli dönüşüm
$G_r(F)$	F dönüşümünün grafiği
$KKM(X,Y)$	X den Y kümesine KKM özelliğine sahip dönüşümler ailesi
$(E,D;\Gamma)$	Soyut konveks uzay
Δ_n	Standart n – simpleks
$\langle D \rangle$	D kümesinin boştan farklı tüm sonlu altkümelerinin ailesi
∂A	A kümesinin sınırı

1. GİRİŞ

X boştan farklı bir küme ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $f(x) = x$ olacak şekildeki bir $x \in X$ noktasına f dönüşümünün sabit noktası denir. $f: X \to 2^X$ küme değerli dönüşüm ise o zaman $x \in f(x)$ olacak şekildeki $x \in X$ noktasına f küme değerli dönüşümünün sabit noktası denir.

Tarihsel olarak sabit nokta teorisinde çalışmalar iki ana kolda gelişmektedir. Birincisi normlu lineer uzayların kompakt, konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teori, diğeri ise tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipli dönüşümler sabit nokta teoridir. Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları 1910 yılında Brouwer ile başlamıştır. Brouwer $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından kendi üzerine tanımlanan sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını ispatlamıştır [9]. Ardından 1930 da Schauder, Brouwer'in teoremini $\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir normlu lineer uzay alarak genişletmiştir [57]. Tam metrik uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları ise 1922 yılında Banach ile başlamıştır [5]. Metrik uzaylarda tanımlı dönüşümlerin sabit noktasının varlığı ve tekliği üzerinde çalışmaların temeli "Banach Büzülme Prensibi" ile ilişkilendirilir.

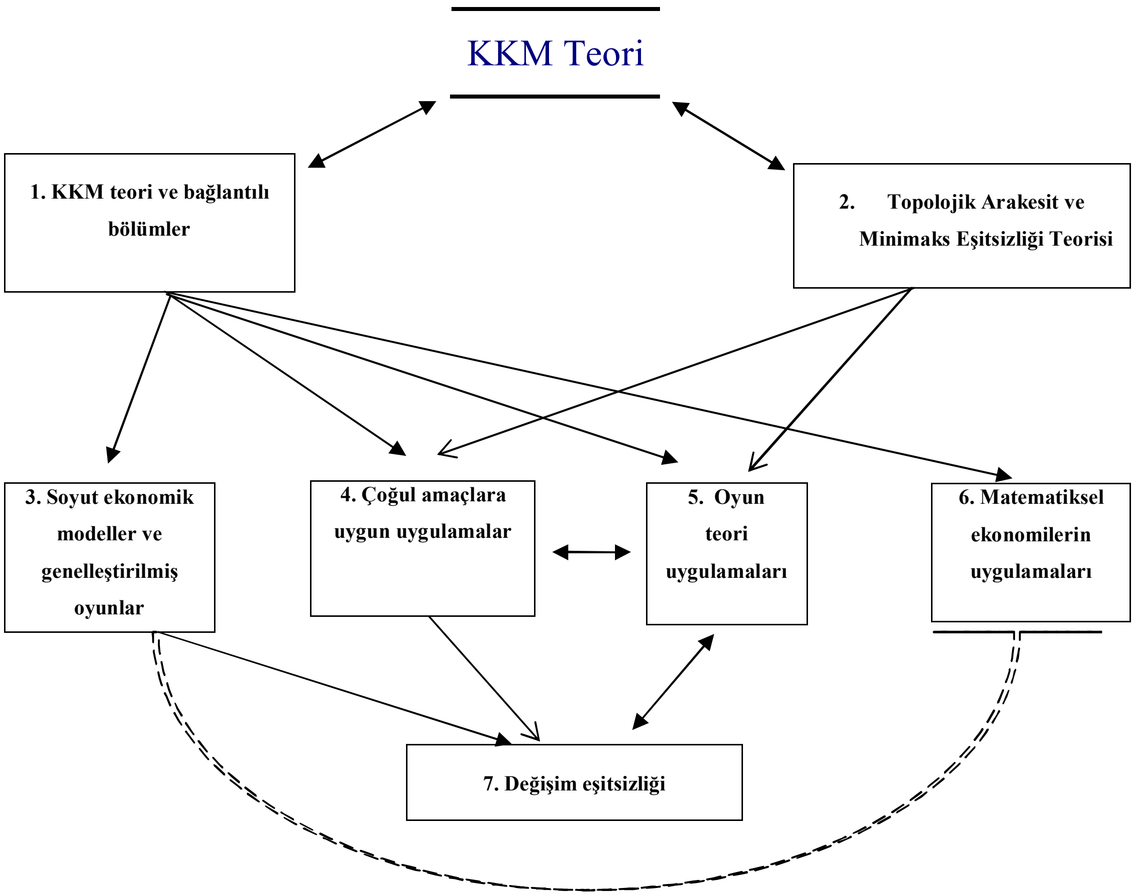
(X, d) bir metrik uzay ve $f: X \to X$ herhangi dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$ eşitsizliğini sağlayan bir $\alpha \in [0,1)$ reel sayısı varsa f dönüşümüne bir *büzülme dönüşümü* denir.

Matematik ve diğer bilimlerde çalışılan problemlerin çoğu yalnızca klasik Banach büzülme prensibi kullanılarak çözülememiştir. Bu nedenle daha genel olan sabit nokta teoremlerine ihtiyaç duyulmuştur. Ćirić, Chatterja ve daha bir çok bilim adamı sabit nokta teoremleri ve uygulamaları üzerine çalışmaları yapmışlardır [10,18,20,61].

Sabit nokta teori çalışmaları sadece tek değerli dönüşümler açısından değil küme değerli dönüşümlerde de incelenmiştir. 1969 yılında Nadler, Banach sabit nokta teoremini küme değerli dönüşümlere genelleştirmiştir [51]. Bu çalışma esas alınarak bir çok araştırmacı küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri vermişlerdir [3,21,26,35].

Ayrıca metrik ve lineer uzaylardan başka olarak düzgün uzayda da sabit nokta teoremleri araştırılmış ve bu çalışmaların temel teşkil etmiş olanlarından biri Acharya tarafından yapılmıştır [2]. Ganguly, Mishra, Singh, Türkoğlu, Özer, Fisher, Altun, Aslan ve diğer araştırmacılar da düzgün uzaylar üzerinde tanımlanan tek ve küme değerli dönüşümlerin sabit noktasının varlığı ve tekliği ile ilgili çalışmalar yapmışlardır [36,49,67-71].

Son yıllarda sabit nokta teorisinin uygulanabileceği daha kapsamlı bir uzayın olmayacağı araştırılmıştır. 2007 yılında Huang ve Zhang metrik uzaydan daha kapsamlı bir uzayın olabileceğini görmüşlerdir. Bilindiği gibi metrik fonksiyonları $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlardır. Burada $\mathbb{R}$ özel bir Banach uzaydır. Herhangi bir Banach uzayda $\mathbb{R}^+$ nın yerine geçecek ve konik olarak adlandırılacak bir küme tanımlayıp metrik uzayları genelleştirerek konik metrik uzayları tanımlamışlardır. Ayrıca çalışmalarında konik metrik uzaylarda yakınsaklık, tamlık tanımını verip büzülebilir dönüşümlerle ilgili bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır [40]. Ardından Abbas ve Jungck [1], Ilić ve Rakočević [44], Rezapour ve Halmbarani [56], Vetro [73], Şahin ve Telci [63] konik metrik uzaylarda büzülebilir dönüşümler için bazı ortak sabit nokta teoremleri ispatlamıştır. Türkoğlu ve Abuloha konik metrik topolojisi ile ilgili bazı topolojik özellikleri ve sabit nokta teoremlerini vermişlerdir [72].

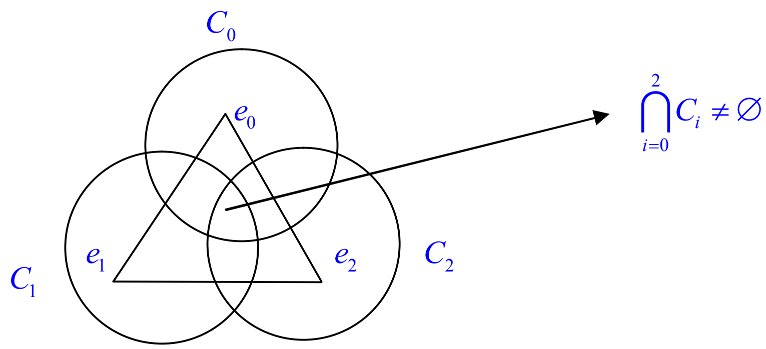


Şekil 1.1. KKM Teori ve bağlantılar

Yukarıda görüldüğü üzere KKM teori değişik uzay ve uygulamalarla bağlantılıdır. Çalışmamızda öncelikle genel hatlarıyla KKM teori ele alınmış ve sonra KKM teorinin değişim eşitsizliği, topolojik arakesit ve minimaks eşitsizliği teorisi ile olan ilişkisi incelenmiştir.

n pozitif bir tamsayı, $N=\{0,1,2,...,n\}$ ve Δ_N, $(n+1)$ boyutlu $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında birim $n-$simpleks olsun. $S\subset\{0,1,...,n\}$ ve $i\in S$ için Δ_S yi e_i birim vektörler tarafından üretilen Δ_N nin yüzeyi olarak tanımlayalım. $C=\{C_0,C_1,...,C_n\}$ olsun. Eğer her $\varnothing\neq S\subset N$ için $\Delta_S\subset\bigcup_{i\in S}C_i$ oluyorsa Δ_N nin $C=\{C_0,C_1,...,C_n\}$ kapalı örtüsüne Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (KKM) örtüsü denir.

1929 yılında Knaster, Kuratowski ve Mazurkiewicz, $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ ın Δ_N nin KKM kapalı örtüsü olması durumunda $\bigcap_{i=0}^{n} C_i \neq \varnothing$ olduğunu göstermişlerdir [47]. Bu sonuç günümüzde KKM prensibi ya da KKM lemması olarak adlandırılmaktadır. Aşağıda KKM lemmasının geometrik anlamı şekil üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 1.2. KKM prensibinin geometrik yapısı

1961 de Fan, klasik KKM teoremini sonsuz boyutlu Hausdorff topolojik vektör uzaylarına genelledi ve Fan'ın geometrik lemması olarak bilinen küme değerli dönüşümler için temel bir geometrik lemmayı tanımladı.

1968 de Browder, Fan'ın geometrik lemmasının sabit nokta versiyonunu vermiştir ve günümüzde bu sonuç Browder-Fan sabit nokta teoremi olarak bilinmektedir. Fan-Browder sabit nokta teoreminin sayısal genelleştirmeleri çakışma ve sabit nokta teorisi, minimaks eşitsizliği, nonlineer analizde değişim eşitsizliği, konveks analiz, oyun teori, matematiksel ekonomi ve sosyal bilimler üzerine uygulanmıştır. Fan 1972 de geometrik lemmayı uygulayarak minimaks eşitsizliğini kurmuştur ve bu eşitsizliğe Ky Fan minimaks eşitsizliği veya Ky Fan minimaks prensibi denilmektedir [33]. Ky Fan minimaks eşitsizliği nonlineer analizin en önemli prensiplerinden biridir ve kısmi diferensiyel denklemler, potential teori, monoton operatörler, değişim eşitsizliği, optimization, oyun teori, lineer ve nonlineer programlar, operatör teori, topolojik grup ve lineer cebirde başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Özellikle, üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümler için Fan-

Glicksberg sabit nokta teoreminde Ky Fan minimaks eşitsizliği kullanılmıştır. Son zamanlarda Horvath [37] de Ky Fan minimaks eşitsizliği ve Fan'ın geometrik lemmasının bazı genelleştirmelerini elde etmiştir. [38] de ise konvekslik varsayımı yerine topolojik özelliklerden büzülebilirlik ve pseudo-konveksliği kullanmıştır. Horvath'ın kavramlarının genişlemesiyle 1988 de Bardaro ve Ceppitelli özel özellikler ile topolojik uzaylardaki Ky Fan minimaks eşitsizliğinin genelleştirmesini elde etmiştir ve bunu *H-yapıları* diye adlandırmışlardır [6]. Horvath [39], Bardaro ve Ceppitelli [7], Chang [13]-[17], Ding ve Tan [22], Ding [24]-[25], Chang ve Ma [17], Lan [48], Tarafdar [65], Tan [64] tarafından topolojik uzaylarda verilen Ky Fan minimaks eşitsizliğinin bazı genelleştirmeleri H-uzayda H-yapıya sahip olmasına rağmen lineer yapıya sahip olmak zorunda değildir.

Sabit nokta teorisinin doğal uzantısı çakışma noktalarındaki çalışmalardır. X ve Y Hausdorff topolojik uzaylar ve $S,T : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümler olsun. (S,T) için çakışma problemi $y_0 \in S(x_0) \cap T(x_0)$ olacak şekilde $(x_0, y_0) \in X \times Y$ bulunmasıdır. Bu tipteki geometrik problemler uygun bir durumda konveks analizden kaynaklanan bazı temel problemlere bağlı olarak derinlemesine ortaya çıkar. Bu önemli durum 1928 de Von Neumann tarafından keşfedilmiştir [52] ve Von Neumann $\mathbb{R}^n$'de çakışma teorisini kurarak minimaks teoreminin ispatında direkt olarak kullanmıştır. Bundan sonra benzer şekildeki geometrik problemler (analitik eşdeğerlerinin yanında) birçok alanda yeni uygulamaları bulmada pek çok insanın dikkatini çekmiştir. Özellikle 1946 da topolojik yapılarda çakışma teoresinde çalışan [27] Eilenberg ve Montgomery'den beri bu konu Kakutani, Nash, Fan, Kneser, Gale, Debreu, Nikaido, Park, Sion, Gorniewicz, Granas, Liu, Chang, Ben-El-Medchaiek, Deguire, Kryszewski, Shih, Tan, Powers, Tarafdar ve diğerlerinin etraflıca katkılarıyla geliştirilmiştir. Bu konu matematik ve diğer çalışma alanlarında birçok kez uygulanmıştır.

1972 de ortaya konan Ky Fan'ın ünlü minimaks prensibi [33], 1961 yılındaki [28] Fan'ın geometrik lemmasının bir uygulamasıdır ki bu klasik KKM prensibinin [47] sonsuz boyutlu bir versiyonudur. 1968 yılında Browder tarafından ilk kez verilen

Browder-Fan sabit nokta teoremi [8] lokal konveks topolojik vektör uzayında ve topolojik vektör uzayındaki küme değerli dönüşümlerdeki Fan'ın seçme teoremi ve Fan'ın en iyi yaklaşım teoremi ile bağlantılıdır. Ayrıca Browder-Fan sabit nokta teoremi Fan minimaks prensibine denk olup Fan geometrik lemmasının ise bir denklik formudur. Geçen 40 yılda Profesör Ky Fan çalışmalarıyla KKM teorisine önemli katkılar sağlamıştır.

Küme değerli dönüşümlerdeki sabit nokta teorisinde özellikle Browder-Fan tipi ve Fan- Glicksberg tipi sabit nokta teoremleri lokal konveks uzayda, H-uzayda, MC-uzayda, G-konveks ve Hyperkonveks uzaylarda geniş bir şekilde çalışılmıştır. Klasik KKM prensibi ve Sperner lemmasının [62] bazı genelleştirmeleri Fan [29]-[30], [32] ve [34], Ding ve Tan [23], Idzik ve Tan [43], Shih ve Tan [58],[59],[60], Ichiishi [41], Ichiishi ve Idzik [42] tarafından verilmiştir. Son zamanlarda Horvath büzülebilir yapıya sahip topolojik uzayların kapalı örtüleri için bazı arakesit teoremleri elde etmiştir [39].

1993 den beri KKM teori, Park ve diğerlerinin çalışmalarında genelleştirilmiş konveks uzaya (G-konveks uzaya) genişletilmiştir. G-konveks uzaylar üzerinde çalışan Park ve diğerleri Alexandroff-Pasynkoff teoremi, Fan tipi denkleştirme teoremi, Tarafdar tipi arakesit teoremi, geometrik ve seçme özelliği, Fan-Browder tipi sabit nokta teoremleri, maksimal eleman teoremleri, analitik alternatifler, Fan tipi minimaks eşitsizliği, değişim eşitsizliği gibi KKM prensibinin 15 den fazla denklik formunu elde etmişlerdir. Ayrıca bunlar KKM uzaylar içinde geçerlidir. Türkoğlu, Abuloha, Abdeljawad KKM teorisini konik metrik uzaylara taşımıştır [66]. KKM teori ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için [74]'e bakılabilir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Bazı Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde ileride kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlere yer vereceğiz.

2.1.1. Tanım

X ve Y kümelerinin *kartezyen çarpımı* $X \times Y$ simgesiyle gösterilir ve

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

olarak tanımlanır. X kümesinin kendisiyle çarpımı, $X \times X$ yerine X^2 gösterimi ile belirtilir. Kartezyen çarpım kavramı sonlu tane kümeye de genelleştirilebilir: $X_1, X_2, \ldots X_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : her\, bir\ i = 1, 2, \ldots, n\ için\ x_i \in X_i\}$$

olarak tanımlanır ve kısaca $\mathop{\Large\times}\limits_{i=1}^{n} X_i$ veya $\prod_{i=1}^{n} X_i$ biçiminde gösterilir.

2.1.2. Tanım

X ve Y herhangi iki küme olmak üzere $\Re \subset X \times Y$ olsun. $\Re$ kümesine X dan Y ye bir bağıntı ve X e $\Re$ bağıntısının tanım kümesi, Y ye $\Re$ bağıntısının değer kümesi denir. Eğer $(x, y) \in \Re$ ise $x\Re y$ biçiminde gösterilir. $\Re$ bağıntısının tersi $\Re^{-1}$ ile gösterilir ve $\Re^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \Re\}$ olarak tanımlanır.

$\Re$, X üzerinde bir bağıntı, yani $\Re \subset X \times X$ olmak üzere, $\Re$ bağıntısı

a. Her $x \in X$ için $(x, x) \in \Re$

b. $(x, y) \in \Re$ ise $(y, x) \in \Re$

c. $(x, y) \in \Re$ ve $(y, z) \in \Re$ ise $(x, z) \in \Re$

koşullarını sağlıyorsa $\Re$ ye X üzerinde bir denklik bağıntısı denir. $\Re$, X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olsun. x e $\Re$ bağıntısına göre denk olan noktaların kümesine x in denklik sınıfı denir ve $[x]$ ile gösterilir, yani $[x] = \{y : (x,y) \in \Re\}$ dir. X in denklik sınıflarının ailesi $X/\Re$ ile gösterilir ve bu aileye X in $\Re$ ile bölümü denir. Buna göre $X/\Re = \{[x] : x \in X\}$ dır ve bu aile

a. Her $x \in X$ için $x \in [x]$

b. $[x] = [y] \Leftrightarrow (x,y) \in \Re$

c. Eğer $[x] \neq [y]$ ise $[x]$ ve $[y]$ ayrıktır

özelliklerini sağlar. Böylece X kümesi ayrık denklik sınıflarının birleşimi olarak ifade edilebilir.

2.1.3. Tanım

Herhangi X kümesi verilsin, X üzerindeki $\leq$ bağıntısı, her $x, y, z \in X$ için

a. $x \leq x$,

b. $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $y = x$,

c. $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$

koşullarını sağlıyorsa $\leq$ bağıntısına X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır denir. Bu bağıntı ile birlikte X kümesine kısmi sıralanmış küme denir.
X kısmi sıralı bir küme olmak üzere, $\leq$ bağıntısı, her $x, y \in X$ için

d. $x \leq y$ veya $y \leq x$

koşulunu da sağlıyorsa $\leq$ bağıntısına X üzerinde bir tam sıralama bağıntısı, X kümesine de tam sıralanmış küme denir.

2.1.4. Uyarı

Kısmi sıralı herhangi bir kümedeki her bir öğe çifti karşılaştırılabilir değildir, ancak tam sıralı bir kümede kümenin tüm öğeleri birbirleri ile karşılaştırılabilirdir.

$(X,\leq)$ kısmi sıralanmış bir küme ve $A \subset X$ bir altküme olsun. Eğer,

a. $x_0 \in X$ ve her $x \in X$ için $x_0 \leq x$ ise, bu x_0 elemanına X in en küçük elemanı denir ve "$\min X$" ile gösterilir.

b. $x_1 \in X$ ve her $x \in X$ için $x \leq x_1$ ise, bu x_1 elemanına X in en büyük elemanı denir ve "$\max X$" ile gösterilir.

c. $y_0 \in X$ olsun. Eğer $x \leq y_0$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $x = y_0$ ise, bu y_0 elemanına X nın bir *minimal elemanı* denir.

d. $y_1 \in X$ olsun. Eğer $y_1 \leq x$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $x = y_1$ ise, bu y_1 elemanına X nın bir *maksimal elemanı* denir

e. $x_0 \in X$ ve her $x \in A$ için $x_0 \leq x$ ise, bu x_0 elemanına A kümesinin bir alt sınırı denir.

f. $x_1 \in X$ ve her $x \in A$ için $x \leq x_1$ ise, bu x_1 elemanına A kümesinin bir üst sınırı denir.

g. $\{x \in X : a \leq x,\ \forall a \in A\}$ kümesinin, varsa en küçük elemanına, A kümesinin *supremumu* denir ve $\sup A$ ile gösterilir. Kolayca görüleceği gibi, bir kümenin supremumu tektir. Eğer $\sup A \in A$ ise, $\sup A$ ile A nın en büyük elemanı $\max A$ aynıdır.

h. $\{x \in X : x \leq a,\ \forall a \in A\}$ kümesinin, varsa en büyük elemanına, A kümesinin *infimumu* denir ve $\inf A$ ile gösterilir. Kolayca görüleceği gibi, bir kümenin infimumu tektir. Eğer $\inf A \in A$ ise, $\inf A$ ile A nın en büyük elemanı $\min A$ aynıdır.

2.1.5. *Örnek*

a. $(\mathbb{R},\leq)$ kısmi sıralı kümesi için $\inf\mathbb{R}=-\infty$ ve $\sup\mathbb{R}=+\infty$ dur. Yani $\inf\mathbb{R}$ ve $\sup\mathbb{R}$ yoktur.

b. $(\mathbb{R},\leq)$ kısmi sıralı kümesinin $A=\{x:0<x<1\}$ altkümesini düşünelim. $\inf A=0\notin A$ ve $\sup A=1\notin A$ olduğundan A nın ne minimumu ne de maksimumu vardır.

c. $a<b$ olmak üzere $A=[a,b]\subset\mathbb{R}$ ise $\inf A=a\in A$ ve $\sup A=b\in A$ olduğundan a ve b, A nın sırasıyla minimum ve maksimum elemanıdır.

d. $\mathbb{R}$ nin A altkümesi sınırlı ve $B\subseteq A$ ise B de sınırlı ve $\sup B\leq\sup A$ dır.

2.1.6. Teorem

$\inf A=a$, $\sup A=b$ olsun.

a) Her $x\in A$ için $x\geq a$ dır.

b) Her $\varepsilon>0$ için, A da $x_0<a+\varepsilon$ olacak şekilde en az bir x_0 vardır.

c) Her $x\in A$ için $x\leq b$ dır.

d) Her $\varepsilon>0$ için, A da $x_1>b-\varepsilon$ olacak şekilde en az bir x_1 vardır.

Kısmi sıralanmış bir $(X,\leq)$ kümesinin boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanı varsa, bu X kümesine iyi sıralanmıştır denir. Bu durumda $\leq$ bağıntısına da iyi sıralama bağıntısı denir.

2.1.7. Tanım

X ve Y herhangi iki küme olsun. X nın her bir elemanına Y nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren f kuralına X dan Y ye bir fonksiyon denir.

$f:X\to Y$ veya $X\xrightarrow{f}Y$ şeklinde gösterilir. X kümesine tanım kümesi, Y kümesine de değer kümesi denir.

$A \subset X$ ve $B \subset Y$ olsun.

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$$

kümesine A nın f altındaki görüntüsü,

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \}$$

kümesine de B nin f altındaki ters görüntüsü denir.

2.1.8. Tanım

Eğer $f(X) = Y$ ise f fonksiyonu örtendir denir. $x_1 \neq x_2$ olsun.
$x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonuna birebir fonksiyon denir.
Hem birebir hem de örten fonksiyona birebir örten fonksiyon denir.

2.1.9. Tanım

f, A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon ve $f(A)$ görüntü kümesi üstten sınırlı (alttan sınırlı, sınırlı) ise f ye üstten sınırlı (alttan sınırlı, sınırlı) denir ve

$$\sup f(A) = \sup \{ f(x) : x \in A \}, \ \inf f(A) = \inf f \{ f(x) : x \in A \}$$

olarak tanımlanır.
Şayet f üstten sınırlı ise $-f$ alttan sınırlı ve

$$\inf \{ -f(x) : x \in A \} = \sup \{ f(x) : x \in A \}$$

dır.

2.1.10. Teorem

f ve g, A dan $\mathbb{R}$ ye iki fonksiyon olsun. Bu taktirde

a. Her $x \in A$ için $f(x) \leq g(x)$ ve g sınırlı ise f de sınırlı ve $\sup\{f(x) : x \in A\} \leq \sup\{g(x) : x \in A\}$ dır.

b. f ve g sınırlı ise $f+g$ de sınırlı ve $\sup\{f(x)+g(x) : x \in A\} \leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}$ dır. Üstelik g alttan sınırlı ise $\sup\{f(x) : x \in A\} + \inf\{g(x) : x \in A\} \leq \sup\{f(x)+g(x) : x \in A\}$ dır.

İspat

a. Tanımdan açıktır.

b. $a = \sup\{f(x) : x \in A\}$ ve $b = \sup\{g(x) : x \in A\}$ olsun.

Bu taktirde her $x \in A$ için $f(x) \leq a$ ve $g(x) \leq b$ dir. Böylece $f(x)+g(x) \leq a+b$ olup buradan birinci eşitsizliğin sağlandığı görülür. İkinci eşitsizliğe gelince $c = \inf\{g(x) : x \in A\}$ dersek her $x \in A$ için

$$f(x)+c \leq f(x)+g(x) \leq d = \sup\{f(x)+g(x) : x \in A\}$$

yani $f(x) \leq d-c$ ve dolayısıyla $a \leq d-c$ veya $a+c \leq d$ elde edilir. Bu da ikinci eşitsizliğin doğruluğunu ifade eder.

2.1.11. Tanım

Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan her fonksiyona bir dizi denir. Eğer bir dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, $P(X)$ kuvvet kümesi ise küme dizisi adı verilir. Bir x dizisi n doğal sayısına x_n elemanını getiriyorsa x_n elemanına dizinin genel terimi denir.

2.1.12. Tanım

$\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$K = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

aralığına a nın ε - komşuluğu adı verilir.

2.1.13. Tanım

(x_n) bir reel sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için (x_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri bir x reel sayısının ε - komşuluğunda bulunuyorsa (x_n) dizisinin limiti x dir veya (x_n) dizisi x sayısına yakınsaktır denir ve

$$\lim x_n = x \text{ veya } (x_n) \to x$$

biçiminde gösterilir. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ aralığının dışında dizinin sonlu sayıda terimi olduğundan öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki $n > n_0$ için (x_n) dizisinin terimleri$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ aralığının içine düşer. Buna göre yakınsaklık tanımı için şu tanımı verebiliriz.

2.1.14. Tanım

(x_n) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε na bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir. Yani

$$(x_n) \to x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \forall n > n_0 \text{ için } |x_n - x| < \varepsilon$$

dır.

2.1.15. Tanım

a. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (x_n) dizisi üstten sınırlıdır denir. M sayısına da bu dizinin bir üst sınırı adı verilir. Üst sınırların en küçüğüne dizinin *en küçük üst sınırı* veya *supremumu* denir, $\sup x_n$ veya $\text{eküs}\, x_n$ ile gösterilir.

b. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (x_n) dizisi alttan sınırlıdır denir. m sayısına da bu dizinin bir alt sınırı adı verilir. Alt sınırların en büyüğüne dizinin *en büyük alt sınırı* veya *infimumu* denir, $\inf x_n$ veya $\text{ebas}\, x_n$ ile gösterilir.

c. Bir dizi alttan ve üstten sınırlı ise diziye sınırlı dizi denir.

d. (x_n) reel sayıların bir sınırlı dizisi olsun.

$$\limsup x_n = \inf_{m \geq 1}\left(\sup_{n \geq m} x_n\right), \quad \liminf x_n = \sup_{m \geq 1}\left(\inf_{n \geq m} x_n\right)$$

sayılarına, sırası ile, (x_n) dizisinin üst limiti (limit süperyörü) ve alt limiti (limit inferyörü) denir.

2.1.16. Teorem

(x_n) bir sınırlı dizi ise $\limsup x_n$ ve $\liminf x_n$ sayıları (x_n) dizisinin en büyük ve en küçük limit noktalarıdır. Ayrıca

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n \text{ ve } \liminf(-x_n) = -\limsup x_n$$

dır.

2.1.17. Teorem

(x_n) reel sayıların bir sınırlı dizisi olsun.

$$\liminf x_n = \limsup x_n = x \Leftrightarrow \lim x_n = x$$

dır.

2.1.18. Tanım

X bir küme (A_n) de X in alt kümelerinin bir dizisi olsun.

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right), \quad \liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right)$$

kümelerine, sırası ile, (A_n) dizisinin üst limiti ve alt limiti denir. Eğer $\liminf A_n = \limsup A_n = A$ ise (A_n) yakınsak ve limiti A dır denir.

2.1.19. *Örnek*

$A_n = \{1,2,3,...,n\}$ olsun. $\limsup A_n$ ve $\liminf A_n$ kümelerini bulunuz. (A_n) dizisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise limitini bulunuz.

Çözüm

$$\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=m}^{\infty}\{1,2,...,n\} = \{1,2,...,m\} \cup \{1,2,...,m,m+1\} \cup ... \cup \{1,2,...,m,m+1,...\} = \mathbb{N}$$

olacağından

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty}\mathbb{N} = \mathbb{N}$$

dır.

$$\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n = \{1,2,...,m\} \cap \{1,2,...,m,m+1\} \cap \{1,2,...,m,m+1,m+2\} \cap ... = \{1,2,...,m\}$$

olduğundan

$$\liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\{1,2,...,m\} = \mathbb{N}$$

dır. O halde (A_n) yakınsak ve

$$\lim\{1,2,...,n\} = \mathbb{N}$$

olur.

2.2. Sonlu ve Sayılabilir Kümeler

A ve B iki küme olsun. Eğer A dan B ye birebir örten bir f fonksiyonu varsa A ile B denktir denir, $A \approx B$ ile gösterilir. Eğer $A \approx \{1,2,...,n\}$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa A kümesi sonludur denir. Sonlu olmayan kümeye sonsuz küme denir. $A \neq \varnothing$ olduğunda bu özellikteki n doğal sayısı bir tektir ve bu sayıya A kümesinin *kardinalitesi* denir. Boş kümesinin kardinalitesi 0 olarak kabul edilir.
$S = \varnothing$, S sonlu veya $S \approx \mathbb{N}$ ise S kümesi sayılabilirdir denir. Şu halde S sayılabilir ise ya boştur ya da $\mathbb{N}$ nin bir alt kümesi ile aralarında birebir eşleme vardır. Sayılabilir her kümenin, sonlu ya da sonsuz her alt kümesi de sayılabilirdir.
Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ve rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, sonsuz kümeler olmasına karşılık sayılabilir kümelerdir. Doğal olarak sonsuz olup sayılamayan kümeler de vardır. Örneğin $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $[0,1]$ aralığı sonsuz ve sayılamayan kümelerdir.

2.3. Metrik Uzaylar

Metrik uzay, dizilerin yakınsaklığı ve fonksiyonların sürekliliği gibi temel kavramları incelemek için ortaya çıkan soyut bir kavramdır. Bunun için gerekli araç bir uzaklık fonksiyonu veya "*metrik*" tir.

2.3.1. Tanım

$X \neq \varnothing$ bir küme, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için

a) $d(x,y) \geq 0$;

b) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x,y) = d(y,x)$;

d) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna metrik, (X,d) uzayına da metrik uzay denir.

2.3.2. Örnek

a. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $d(x,y) = |x-y|$ ile tanımlı d fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe *mutlak değer metriği, Euclid metriği, adi metrik* ya da *alışılmış metrik* denir.

b. $\mathbb{R}^2$ üzerinde $d_1, d_2, d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

fonksiyonları birer metriktir.

c. X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere, her $x, y \in X$ için

$$d_A : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d_A(x,y) = \begin{cases} 0\,, & x = y \\ 1\,, & x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlanan d_A fonksiyonu X üzerinde bir metriktir ve dolayısıyla (X, d_A) bir metrik uzaydır. Bu şekilde tanımlanan d_A metriğine *ayrık metrik*, (X, d_A) ye ise *ayrık metrik uzay* denir.

2.3.3. Tanım

(X,d) metrik uzay, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.
$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ kümesine $x-$merkezli $\varepsilon-$yarıçaplı *açık yuvar* denir.
$\overline{B}(x,\varepsilon) = K(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}$ kümesine ise $x-$merkezli $\varepsilon-$yarıçaplı *kapalı yuvar* denir.

2.3.4. Tanım

(X,d) metrik uzay, $T \subseteq X$ olsun. Her $x \in T$ için $B(x,\varepsilon) \subseteq T$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa T ye açık küme denir.

2.3.5. Teorem

(X,d) metrik uzay olsun. Her açık yuvar açık kümedir.

İspat

$x \in X$, $r > 0$ olmak üzere $B(x,r)$ açık yuvarının açık küme olduğunu gösterelim. Keyfi bir $z \in B(x,r)$ için $\varepsilon = r - d(x,z) > 0$ dır.

Gösterelim ki $z \in B(z,\varepsilon) \subseteq B(x,r)$ dır. Her $y \in B(z,\varepsilon)$ için $d(z,y) \leq \varepsilon$ dır. $\varepsilon = r - d(x,z)$ olduğundan $d(x,z) + d(y,z) \leq r$ dir. Bu durumda üçgen eşitsizliğini kullanırsak $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \leq r$ olup $y \in B(x,r)$ dır. Sonuç olarak $B(z,\varepsilon) \subseteq B(x,r)$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

2.3.6. Teorem

(X,d) metrik uzay olsun.

a. $\varnothing$ ve X açık kümedir.

b. Herhangi sayıda açık kümenin birleşimi açık kümedir.

c. Sonlu sayıda açık kümenin arakesiti açık kümedir.

İspat

a. Boş kümenin bir elemanının her $\varepsilon > 0$ komşuluğu boş kümedir. $\varnothing \subset \varnothing$ olacağından $\varnothing$ açık kümedir. X açık kümedir gerçekten her $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \subset X$ dır.

b. $\wp = \{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ açık kümelerin bir ailesi olsun. $x \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ alalım.Bu taktirde en az bir $\alpha_0 \in \Delta$ için $x \in A_{\alpha_0}$ dır. A_{α_0} açık küme olduğundan en az bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $B(x,\varepsilon) \subset A_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ dır. O halde $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ açık kümedir.

c. A_1, A_2 açık kümeler ve $x \in A_1 \cap A_2$ olsun. Bu durumda $x \in A_1$ ve $x \in A_2$ dır. A_1 ve A_2 açık kümeler olduğundan $B(x,\varepsilon_1) \subset A_1$ ve $B(x,\varepsilon_2) \subset A_2$ olacak şekilde $\varepsilon_1 > 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ sayıları vardır. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ seçilirse $B(x,\varepsilon) \subset A_1$ ve $B(x,\varepsilon) \subset A_2$ olup $B(x,\varepsilon) \subset A_1 \cap A_2$ dır. Yani $A_1 \cap A_2$ açık kümedir.

2.3.7. Tanım

(X,d) metrik uzay, $K \subset X$ olsun. Eğer $K^c = X - K$ kümesi açık küme ise K'ya kapalı küme denir.

2.3.8. Teorem

(X,d) metrik uzay olsun.

a. $\varnothing$ ve X kapalı kümedir.
b. Herhangi sayıda kapalı kümenin arakesiti kapalı kümedir.
c. Sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi kapalı kümedir.

2.3.9. Not

Bir metrik uzayda $\varnothing$ ve X hem açık hem kapalı kümelerdir.

2.3.10. Tanım

(X,d) metrik uzayında bir dizi (x_n) olsun.

a. $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için $d(x, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi $x \in X$'ye yakınsar (ya da (x_n) dizisi yakınsaktır) denir. Bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ yazarız.
b. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m > 0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.
c. (X,d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya *tam metrik uzay* denir.

2.3.11. Teorem

(x_n), (X,d) metrik uzayında yakınsak bir dizi olsun. O zaman

a. $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ limiti tektir,

b. (x_n) nin herhangi bir alt dizisi de x 'e yakınsar;

c. (x_n) bir Cauchy dizisidir.

2.3.12. Tanım

(X,d) metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

a. Her $x, y \in A$ için $d(x,y) < c$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa A sınırlıdır denir.

b. $\sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$ değerine A kümesinin çapı denir ve $ç(A)$ ile gösterilir. A sınırlıdır $\Leftrightarrow ç(A) < \infty$.

c. $x \in A$ noktası için $B(x,\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa x 'e A nın bir iç noktası denir ve A nın bütün iç noktalarının kümesi A^0 ile gösterilir. Bir $x \in A$ noktası için x i kapsayan herhangi bir açık kümeye x noktasının bir komşuluğu denir.

d. $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $d(x,y) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in A$ noktası varsa (denk olarak, $y_n \to x$ olacak şekilde bir $(y_n) \subset A$ dizisi varsa) x 'e A nın bir kapanış noktası denir.

e. A kümesinin bütün kapanış noktalarının kümesi $\overline{A}$ ile gösterilir.

f. $\overline{A} = X$ ise A (X içinde) yoğundur denir. Eğer $\overline{A}$ hiç iç noktaya sahip değilse (yani A nın kapanışının içi boş ise, başka bir yazılışla $\overset{0}{\overline{A}} = \varnothing$ ise) A, X içinde hiçbir yerde yoğun değildir denir.

g. Eğer A kümesi X içinde hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin sayılabilir bir birleşimine eşitse A kümesine X içinde birinci kategoriden bir küme denir.

h. A, X içinde birinci kategoriden bir küme değilse bu A kümesine ikinci kategoriden bir küme adı verilir.

i. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $A \subseteq \{B(x_k, \varepsilon) : 1 \leq k \leq n\}$ yi sağlayan A nın sonlu bir $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ altkümesine A için bir $\varepsilon - a\breve{g}$ adı verilir. $\varepsilon > 0$ verildiğinde A için bir $\varepsilon - a\breve{g}$ varsa yani herhangi bir $\varepsilon > 0$ için A, merkezleri A içinde olan ε yarıçaplı açık yuvarların sonlu bir birleşimi tarafından örtülebiliyorsa, A ya tamamen sınırlıdır (totaly bounded) denir.

2.3.13. Not

Tamamen sınırlı bir küme sınırlıdır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

2.3.14. Örnek

$\mathbb{R}$ reel sayılar da $\bar{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$ metriği ile $\Gamma_{\bar{d}}$ topolojisini ele alalım. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\bar{d}(x, y) \leq 1$ olduğundan $(\mathbb{R}, \Gamma_{\bar{d}})$ uzayı sınırlıdır. Eğer $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi bu uzayın bir $\frac{1}{2} - a\breve{g}\imath$ ise, $x = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$ ve $y = x + 1$ olmak üzere $\bar{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1\} = \min\{1, 1\} = 1$ dır. Buradan her $x_i \in E$ için $\bar{d}(x_i, y) = 1 \nless \frac{1}{2}$ dır. Oysa bu E nin tanımıyla çelişir. Dolayısıyla $\mathbb{R}$, $\bar{d}$ metriğine göre tamamen sınırlı değildir.

2.3.15. Tanım

(X,d_1), (Y,d_2) iki metrik uzay $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in X$ için

$$d_2(f(x),f(y))=d_1(x,y)$$

ise f fonksiyonuna eşmetrel (izometri) denir. İlave olarak f eşmetrel ve örten ise f ye eşmetrel eşyapı (izometrik izomorfizm) dönüşümü denir.

2.3.16. Tanım

$f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ birebir ve örten fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} sürekli ise f ye *topolojik eşyapı dönüşümü* denir.

2.3.17. Sonuç

Her eşmetrel eşyapı dönüşümü bir topolojik eşyapı dönüşümüdür.

2.3.18. Tanım

(X,d_1), (X,d_2) iki metrik uzay ve $f:X\to X$ fonksiyonu bir topolojik eşyapı dönüşümü ise d_1 ve d_2 metrikleri denktir denir ve $d_1\sim d_2$ biçiminde gösterilir.

2.3.19. Sonuç

X üzerinde iki metrik d_1 ve d_2 olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a. $d_1\sim d_2$

b. $\Gamma_{d_1}=\Gamma_{d_2}$

c. Her $x,y\in X$ için $m.d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le M.d_1(x,y)$ olacak şekilde $m,M>0$ sayıları vardır.

2.3.20. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(x) = x$ olacak şekilde $x \in X$ varsa, bu x noktasına f dönüşümünün sabit noktası denir. Başka bir ifadeyle $f(x) = x$ $(x \in X)$ denkleminin çözümü f dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

2.3.21. *Örnek*

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$ dönüşümü için $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları sabit noktalardır.

2.3.22. *Örnek*

$X = [0, \infty)$ ve $c > 0$ olmak üzere $f: X \to X$, $f(x) = x + c$ olsun. Bu durumda, bu dönüşümün hiçbir sabit noktası yoktur.

2.3.23. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $f: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için, $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ koşulunu sağlayan bir $\alpha > 0$ reel sayısı varsa, f dönüşümüne Lipschitz koşulunu sağlıyor denir. Burada $\alpha < 1$ ise, f ye büzülme dönüşümü ya da daralma dönüşümü; $\alpha = 1$ ise f ye genişlemeyen dönüşüm denir. Her $x, y \in X$ için $(x \neq y)$ $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ ise, f ye büzülebilir dönüşüm (zayıf büzülme dönüşümü) denir.

2.3.24 Teorem *(Banach Sabit Nokta Teoremi)*

(X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise, f dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır.

2.4. Vektör Uzayları

2.4.1. Tanım

E boş olmayan bir küme olsun. Her $u,v\in E$ ve $\alpha\in\mathbb{F}$ için $E\times E$ den E ye tanımlı

$$+:(u,v)\to u+v$$

fonksiyonu (işlemi) ve $\mathbb{F}\times E$ den E ye tanımlı

$$\cdot:(\alpha,u)\to\alpha.u$$

fonksiyonu (işlemi) aşağıdaki aksiyomları sağlarsa E kümesine $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı denir ($\alpha.u$ yerine kısaca αu yazılabilir).

Her $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ve her $u,v,w\in E$ için

i) $u+v=v+u$, $u+(v+w)=(u+v)+w$;

ii) $u+0=u$ olacak şekilde (u dan bağımsız) bir tek $0\in E$ vardır;

iii) $u+(-u)=0$ olacak şekilde bir tek $-u\in E$ vardır;

iv) $1u=u$, $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$;

v) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$, $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

Eğer $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ (ya da $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) ise o zaman E ye reel (ya da kompleks) vektör uzayı denir. $\mathbb{F}$ nin elemanlarına skaler ve E nin elemanlarına vektör denir. αu işlemine skaler çarpım, $u+v$ işlemine vektör toplamı denir.

Eğer E bir vektör uzay $u\in E$, $A,B\subset E$ ve $\alpha\in\mathbb{F}$ ise

$$u + A = \{u + a : a \in A\}$$
$$A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$$
$$\beta A = \{\beta a : a \in A\}$$

notasyonlarını kullanacağız.

2.4.2. Örnek

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere $\mathbb{F}^n$ sıralı n'lilerin kümesi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$ için

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

ve

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

işlemleriyle bir vektör uzayıdır.

2.4.3. Örnek

$s = \{(x_n) : n \in \mathbb{N},\, \alpha_n \in \mathbb{F}\}$ yani s kümesi bütün skaler dizilerin koleksiyonu olsun. s üzerinde toplama $(+)$ ve skalerle çarpma $(\cdot)$ işlemleri $u = (\alpha_n)$, $v = (\beta_n) \in s$ ve $\lambda \in \mathbb{F}$ olmak üzere

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n, \ldots)$$

ve

$$\lambda \cdot u = (\lambda \cdot \alpha_1, \lambda \cdot \alpha_2, \ldots, \lambda \cdot \alpha_n, \ldots)$$

olarak tanımlanırsa s bir vektör uzayıdır. s'ye bütün dizilerin uzayı denir. s uzayının vektörlerin toplama işlemine göre birim elemanı $\theta=(0,0,...,0,...)$ dizisidir. $u=(\alpha_n)\in s$ için u'nun toplamsal tersi $-u=(-\alpha_n)\in s$ dır.

2.4.4. Tanım

E bir vektör uzayı ve $W\subset E$ olsun. Eğer W, E'den kısıtlanan vektörlerin toplamı ve skalerle çarpma işlemleri altında bir vektör uzayı oluyorsa W ya E nin *alt vektör uzayı* denir.

2.4.5. Teorem

E, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı ve $W\subset E$ olsun. Her $u,v\in W$ ve her $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ için $\alpha u+\beta v\in W$ oluyorsa (yani W vektörlerin toplamı ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalıysa) W, E nin alt vektör uzayıdır.

2.4.6. Örnek

a. Skalerlerin bütün sınırlı dizilerinin koleksiyonu ℓ_∞ ile gösterilir. Yani $\ell_\infty=\{(x_n): \forall n\in\mathbb{N}\ i\c{c}in\ x_n\in\mathbb{F}, \sup_n|x_n|<\infty\}$ dır. ℓ_∞, s nin alt vektör uzayıdır. $x=(x_n)$, $y=(y_n)\in\ell_\infty$ için $x+y=(x_n+y_n)\in\ell_\infty$
$x=(x_n)\in\ell_\infty$, $\alpha\in\mathbb{F}$ için $\alpha\cdot x=(\alpha\cdot x_n)\in\ell_\infty$

b. Skalerlerin sıfıra yakınsak dizilerinin koleksiyonu c_0 ile gösterilir. Yani $c_0=\left\{x=(x_n): x_n\in\mathbb{F} \text{ ve } \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\theta\right\}$ dır. c_0, s deki vektörlerin toplam ve skalerle çarpım işlemleriyle birlikte bir vektör uzayıdır. c_0'daki toplamanın birimi $\theta=(0,0,...,0,...)$ ve $x=(x_n)\in c_0$'in toplamsal tersi $-x=(-x_n)$ dizisidir.

2.5. Normlu Uzaylar

2.5.1. Tanım

X bir vektör uzayı olsun. $\|\ \|: X \to \mathbb{R}^{+}$ dönüşümünün x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu dönüşüm aşağıdaki şartları sağlarsa, $\|\ \|$ a X üzerinde bir norm denir. $(X, \|\ \|)$ ikilisine de normlu uzay adı verilir.

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2) $\alpha \in \mathbb{F}$ olmak üzere $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

$(X, \|\ \|)$ normlu uzay olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}^{+}$, $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan d dönüşümü bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Dolayısıyla her normlu uzay bir metrik uzaydır.

2.5.2. Tanım

X normlu vektör uzayı olsun. Eğer X norm metriğine göre tam ise X uzayına Banach uzayı denir.

2.6. Topolojik Uzaylar

2.6.1. Tanım

X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\tau \subset P(X)$ ailesine X üzerinde bir topoloji denir.

T1) $\varnothing, X \in \tau$

T2) Her $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$

T3) Her $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \in \tau$, (Burada Λ herhangi bir indis kümesidir).

Üzerinde bir topoloji tanımlanmış olan her X kümesine bir *topolojik uzay* denir ve (X,τ) ile gösterilir. Bu durumda X 'in elemanlarına bu topolojik uzayın noktaları ve τ 'nun elemanlarına da bu topolojik uzayın açık kümeleri adı verilir.

2.6.2. Tanım

(X,d) metrik uzay olsun. Bu uzaydaki açık kümelerin

$$\tau_d = \left\{ G \subset X : \forall x \in G \ \ i\c{c}in \, \exists \varepsilon_x > 0 \ni B(x,\varepsilon_x) \subset G \right\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerinde d metriği ile üretilen *metrik topoloji* denir. Bu durumda her metrik uzay, metrik topoloji ile bir topolojik uzaydır.

2.6.3. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X üzerinde $\tau_d = \tau$ olacak şekilde bir d metriği varsa, bu (X,τ) topolojik uzayına *metriklenebilir topolojik uzay* denir.

2.6.4. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay olsun ve $A \subset X$ olsun. Eğer A 'nın bütünleyeni açık ise A kümesine bu uzayda kapalıdır denir.

2.6.5. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $U \subset X$ olsun. Eğer $x \in G \subset U$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ varsa, bu U altkümesine bu uzayda x noktasının bir komşuluğu denir. $x \in X$ noktasına τ topolojisine göre bütün komşuluklarında oluşan aile $\mathfrak{U}_\tau(x)$, veya bu topolojiyi belirtmenin gerekmediği durumlarda $\mathfrak{U}(x)$ ile gösterilir ve buna x in *komşuluk ailesi* ya da *komşuluk sistemi* denir.

2.6.6. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay, $M \subset X$ ve $U \subset X$ olsun. Eğer $M \subset G \subset U$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ varsa, bu U altkümesine bu uzayda M kümesinin bir komşuluğu denir.

2.6.7. Teorem

(X,τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ ise, $\mathfrak{U}_\tau(x)$ komşuluk ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. a) $U \in \mathfrak{U}_\tau(x)$ ise $x \in U$

   b) $U \in \mathfrak{U}_\tau(x)$ ve $U \subset V$ ise $V \in \mathfrak{U}_\tau(x)$

   c) $U, V \in \mathfrak{U}_\tau(x)$ ise $U \cap V \in \mathfrak{U}_\tau(x)$

   d) $U \in \mathfrak{U}_\tau(x)$ ise, öyle bir $V \in \mathfrak{U}_\tau(x)$ vardır ki, her $y \in V$ için $U \in \mathfrak{U}_\tau(y)$

2. $G \subset X$ ise,

$$G \in \tau \Leftrightarrow \forall x \in G \;\; \exists U_x \in \mathfrak{U}_\tau(x) \ni x \in U_x \subset G$$

sağlanır.

Tersine olarak, $X \neq \varnothing$ bir küme ve her $x \in X$ için bir $\mathfrak{U}_x \subset P(X)$ altküme ailesi, 1.a), b), c), d) koşullarını sağlayacak şekilde verilmiş olsun. Bu durumda X kümesi üzerinde öyle bir topoloji vardır ki her $x \in X$ için bu $\mathfrak{U}_x$ ailesi, o topoloji için, x noktasındaki komşuluk ailesini oluşturur.

2.6.8. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun.

a. Eğer x'in her komşuluğun A ile arakesiti boş değilse bu x noktasına A'nın bir değme noktası denir.

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall U \in \mathfrak{U}_\tau(x) \ \ i\c{c}in \ \ U \cap A \neq \varnothing\}$$

kümesine de A'nın kapanışı adı verilir.

b. Eğer x'in uygun bir komşuluğu A'nın içinde kalıyorsa bu x noktasına A'nın iç noktası denir.

$$A^0 = \{x \in X : \exists U \in \mathfrak{U}_\tau(x) \ni \ x \in U \subset A\}$$

kümesine de A'nın içi adı verilir.

2.6.9. Teorem

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

a. A kapalıdır $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$

b. A açıktır $\Leftrightarrow$ $A = A^0$

2.6.10. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau\}$$

ailesi A kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye τ 'nun A altkümesi üzerinde ürettiği *alt uzay topolojisi* ve bu topoloji ile A altkümesine, yani (A,τ_A) topolojik uzayına da (X,τ)'nun bir alt uzayı denir.

2.6.11. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $\mathfrak{B}(x) \subset \mathfrak{U}_\tau(x)$ olsun. Eğer

$$\forall U \in \mathfrak{U}_\tau(x) \text{ } i\c{c}in \text{ } \exists V \in \mathfrak{B}(x) \ni V \subset U$$

sağlanıyorsa, bu $\mathfrak{B}(x)$ ailesine bu topolojik uzayda x noktasının bir *komşuluk tabanı* denir. Bir topolojik uzayda bir noktanın komşuluk ailesi ve bir noktanın bütün açık komşuluklarının ailesi o noktada birer komşuluk tabanıdır.

2.6.12. Tanım

Bir topolojik uzayın her noktasında sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa bu topolojik uzaya *birinci sayılabilir uzay* veya A_1- *uzay* denir. Her metrik uzay metrik topoloji ile birinci sayılabilir bir topolojik uzaydır.

2.6.13. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay, (x_n) X 'de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun.

a. Eğer her $U \in \mathfrak{U}_\tau(x_0)$ komşuluğu için, buna bağlı bir $n_0 = n_0(U) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı; her $n \geq n_0$ için $x_n \in U$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine, (X,τ) topolojik uzayında x_0 noktasına yakınsar denir. Böyle bir diziye *yakınsak dizi* denir. Eğer (x_n), (X,τ) da bir x_0 noktasına yakınsıyor ise $x_n \xrightarrow{\tau} x$ şeklinde yazılır.

b. Eğer her $U \in \mathfrak{U}_\tau(x_0)$ komşuluğu ve her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için, en az bir $m \geq n$ doğal sayısı, $x_m \in U$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, x_0 noktasına bu (x_n) dizisinin bir *yığılma noktası* denir.

2.6.14. Teorem

(X,τ) bir A_1-uzay ise

a. $G \subset X$ açıktır $\Leftrightarrow$ $x_n \to x$ ve $x \in G$ koşulunu sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0 \text{ için } x_n \in G \text{ dir.}$$

b. $F \subset X$ kapalıdır $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in F$ ve $x_n \to x$ koşulunu sağlayan her

$$(x_n) \text{ dizisi için } x \in F \text{ dir.}$$

2.6.15. Tanım

a. X bir küme ve $A \subset X$ olsun. Eğer bir $\mathcal{U} \subset P(X)$ ailesi için

$$A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

sağlanıyorsa, bu $\mathcal{U}$ ailesine A altkümesinin bir *örtüsü* denir. Eğer $A = X$ ise $\mathcal{U}$, X'in bir örtüsü olur.

b. X bir küme ve $\mathcal{U}=\{U_i : i \in \mathrm{I}\}$, ($\mathrm{I}$ bir indis kümesi) X 'in bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{U}$ 'nun bir $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ alt ailesi, yani $\mathrm{I}' \subset \mathrm{I}$ olmak üzere $\mathcal{U}'=\{U_i \in \mathcal{U} : i \in \mathrm{I}'\}$, X 'in tine bir örtüsü oluyorsa bu $\mathcal{U}'$ ailesine $\mathcal{U}$ 'nun bir alt örtüsü denir.

c. Bir örtünün eleman sayısı sonlu veya sayılabilir ise bu örtüye sırasıyla sonlu örtü veya sayılabilir örtü denir.

d. X bir küme ve $\mathcal{A} \subset P(X)$ olsun. Eğer $\mathcal{A}$ 'nın her sonlu alt ailesinin elemanlarının arakesiti boştan farklı ise, bu $\mathcal{A}$ ailesine sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir.

2.6.16. Tanım

a. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$, X 'in bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{U}$ 'nun her elemanı bu uzayda açık ise, $\mathcal{U}$ ya bir açık örtü; eğer $\mathcal{U}$ 'nun her elemanı bu uzayda kapalı ise $\mathcal{U}$ ya bir kapalı örtü denir.

b. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu topolojik uzaya *kompakt topolojik uzay* denir.

c. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ bir alt küme olsun. Eğer (A,τ_A) alt uzayı kompakt ise A kümesi bu topolojik uzayda kompakttır denir.

2.6.17. Teorem

Kompakt bir topolojik uzayın her kapalı alt kümesi de kompakttır.

İspat

(X,τ) kompakt ve $K \subset X$ kapalı bir alt küme olsun. $\mathcal{U}$, K 'nın bir açık örtüsü olsun. O halde $\mathcal{U} \cup \{X-K\}$, X 'in bir açık örtüsüdür. (X,τ) kompakt olduğundan

$\exists\ U_1, U_2, U_3, ..., U_n \in \mathcal{U}$ öyle ki $X = \bigcup_{i=1}^{n} \left(U_i \cup \left(X - K \right) \right)$ yazılabilir. Buradan

$$K = X \cap K = \bigcup_{i=1}^{n} \left(U_i \cap K \right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

elde edilir. Şu halde $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$, $\mathcal{U}$ 'nun sonlu bir alt örtüsüdür ve dolayısıyla K kompakttır.

2.7. Topolojik Vektör Uzayları

2.7.1. Tanım

E bir vektör uzayı ve $A \subset E$ olsun.

A konveks $\Leftrightarrow$ $\forall\, a, b \in A$ ve $\lambda + \mu = 1\ \left(\lambda, \mu \geq 0 \right)$ iken $\lambda a + \mu b \in A$.

$\mathbb{R}$ nin konveks kümeleri aralıklardır.

2.7.2. Teorem

A konveks ise $x \in E$ için $x + A$ konvekstir, $\lambda \in \mathbb{F}$ iken λA da konvekstir. Konveks kümelerin kesişimi de konvekstir.

2.7.3. Tanım

$\varnothing \neq A \subset E$ olmak üzere

$$co\left(A\right) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,:\, \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \ x_i \in A \right\}$$

kümesine A'nın ürettiği konveks küme veya A'nın konveks zarfı denir. A'nın ürettiği konveks küme A'yı içinde bulunduran konveks kümelerin kesişimidir.

2.7.4. Tanım

E bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\oplus : E \times E \to E$$
$$(x,y) \to \oplus(x,y) = x+y$$

$$\odot : \mathbb{F} \times E \to E$$
$$(\lambda,x) \to \odot(\lambda,x) = \lambda x$$

vektör uzayı ile ilgili toplama ve skalerle çarpma işlemleri olsunlar. Eğer E üzerinde bu iki işlemi sürekli yapacak bir topoloji varsa E vektör uzayına *topolojik vektör uzayı* denir.

2.7.5. Teorem

$\mathfrak{P}$, sıfırın komşuluklar tabanı ise bu taktirde her $W \in \mathfrak{P}$ için $V+V \subset W$ olacak şekilde en az bir $V \in \mathfrak{P}$ vardır.

İspat

$\oplus : E \times E \to E$ sürekli olduğundan özel olarak $\theta = (0,0)$ da da süreklidir. $U \in \mathfrak{P}(\theta)$ için $\exists\, V_1 \in \mathfrak{P}(\theta)$, $\exists\, V_2 \in \mathfrak{P}(\theta)$, $V_1 \times V_2 \in \mathfrak{P}(0,0)$ vardır öyle ki $\oplus(V_1 \times V_2) \subseteq U$ $\Rightarrow V_1 + V_2 \subseteq U$ dır. $W = V_1 \cap V_2$ alınırsa $W \in \mathfrak{P}(\theta)$ dır. $W+W \subseteq V_1 + V_2 \subseteq U$ dır. En az bir $V \in \mathfrak{P}(\theta)$ vardır öyle ki $V \subset W$ dır. Bu durumda $V+V \subset U$ dır.

2.7.6. Tanım

Bir topolojik vektör uzayı konveks komşuluklar tabanına sahipse bu uzaya lokal konveks topolojik uzay veya konveks uzay denir.

2.7.7. Tanım

A bir küme ve $\wp$, A nın boştan farklı sonlu alt kümelerinin ailesi olsun.

- Her tek nokta kümesi $\{\alpha\} \in \wp$, $\wp$ nın *vertex (köşe)*
- Her iki nokta kümesi $\{\alpha, \beta\} \in \wp$, $\wp$ nın *parçası (kenarı, edge, segment)*
- Her (n+1) nokta kümesi $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n\} \in \wp$, $\wp$ nın *n- boyutlu simpleksi (n-simplex)*

olarak adlandırılır.

$\lambda_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ olacak şekilde $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ elemanlarının alt kümesine *simpleks* denir ve $S^m = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : 1 \leq i \leq m \;\; için \;\; \lambda_i \geq 0 \;\; ve \; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$ olarak gösterilir. S^m nin baz kümesi $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ dır.

Burada $e_1 = (1,0,0,...,0), e_2 = (0,1,0,...,0), \ldots, e_m = (0,0,0,...,1)$ dır.

3. YARI SÜREKLİLİK

3.1. Tek Değerli Fonksiyonlar İçin Yarı-Süreklilik ve Bazı Teoremler

3.1.1. Alttan yarı-sürekli fonksiyonlar

X bir topolojik uzay olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $x \in U$ olduğunda $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ olacak şekilde ε sayısına bağlı olarak bir x_0 noktasının bir U komşuluğu bulunabiliyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında alttan yarı süreklidir denir. X in her noktasında alttan yarı sürekli fonksiyona X üzerinde alttan yarı sürekli fonksiyon denir [45].

3.1.1.1. Teorem

Bir f fonksiyonunun X üzerinde alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(t, +\infty)$ ters görüntü kümesinin X de açık olmasıdır [45].

İspat

Önce f fonksiyonunun X üzerinde alttan yarı sürekli olduğunu kabul edelim. Her $t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(t, +\infty)$ ters görüntü kümesinin X de açık küme olduğunu göstereceğiz. $f^{-1}(t, +\infty)$ ters görüntü kümesinin X de açık küme olduğunu göstermek için her noktasının komşuluğu olduğunu göstereceğiz. $f^{-1}(t, +\infty)$ ters görüntü kümesinin herhangi bir z elemanını alalım. Bu takdirde $z \in f^{-1}(t, +\infty)$ olduğundan dolayı, $f(z) > t$ ve dolayısıyla, $f(z) - t > 0$ dır. f fonksiyonu X üzerinde alttan yarı sürekli olduğundan, X in her noktasında alttan yarı süreklidir, dolayısıyla z noktasında da alttan yarı süreklidir. Dolayısıyla, her $\varepsilon > 0$ için $x \in U$ olduğunda $f(z) - \varepsilon < f(x)$ olacak şekilde ε sayısına bağlı olarak z noktasının bir $U = U(\varepsilon)$ komşuluğu bulunabilir. Özel olarak, $\varepsilon = f(z) - t$ alalım. Bu durumda bu

$\varepsilon = f(z) - t > 0$ sayısı için de $x \in U$ olduğunda $f(z) - \varepsilon < f(x)$ olacak şekilde bu özel ε sayısına bağlı olarak z noktasının bir $U = U(f(z) - t)$ komşuluğu bulunabilir.

$\Rightarrow$ $x \in U$ olduğunda $f(z) - (f(z) - t) < f(x)$

$\Rightarrow$ $x \in U$ olduğunda $f(z) - f(z) + t < f(x)$

$\Rightarrow$ $x \in U$ olduğunda $t < f(x)$

$\Rightarrow$ $x \in U$ olduğunda $f(x) > t$

olur. Böylece $U \subset f^{-1}(t, +\infty)$ bulunur. U kümesi z noktasının bir komşuluğu olduğundan ve bir komşuluğu kapsayan küme de komşuluk olacağından dolayı $f^{-1}(t, +\infty)$ kümesi z noktasının bir komşuluğu olur. z noktası kümesinin herhangi bir elemanı olduğundan, $f^{-1}(t, +\infty)$ kümesi her noktasının komşuluğu olur. Dolayısıyla $f^{-1}(t, +\infty)$ kümesi açık küme olur. Her $t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(t, +\infty)$ ters görüntü kümesinin X de açık olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi de her $t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(t, +\infty)$ ters görüntü kümesinin X de açık olduğunu kabul edelim. $x_0 \in X$ verilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

Özel olarak, $t = f(x_0) - \varepsilon$ alırsak $f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, +\infty))$ ters görüntü kümesi X de açık olur. Açık küme her noktasının komşuluğu olduğundan dolayı, $f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, +\infty))$ kümesi x_0 noktasını içerdiğinden, $f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, +\infty))$ kümesi x_0 noktasının bir komşuluğudur. Dolayısıyla $U \subset f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, +\infty))$ olacak şekilde x_0 noktasının bir U açık komşuluğu vardır.

$\Rightarrow \; x \in U$ olduğunda $\quad x \in f^{-1}\left(\left(f\left(x_0\right)-\varepsilon,+\infty\right)\right)$

$\Rightarrow \; x \in U$ olduğunda $\; f\left(x_0\right)-\varepsilon < f\left(x\right)$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu x_0 noktasında alttan yarı sürekli olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.1.2. Üstten yarı-sürekli fonksiyonlar

X bir topolojik uzay olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $x \in U$ olduğunda $f\left(x\right) < f\left(x_0\right)+\varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı olarak bir x_0 noktasının bir U komşuluğu bulunabiliyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında üstten yarı süreklidir denir. X in her noktasında üstten yarı sürekli fonksiyona X üzerinde üstten yarı sürekli fonksiyon denir [45].

3.1.2.1. Teorem

Bir f fonksiyonunun X üzerinde üstten yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}\left(-\infty,t\right)$ ters görüntü kümesinin X de açık olmasıdır [45].

İspat

Önce f fonksiyonunun X üzerinde üstten yarı sürekli olduğunu kabul edelim. Her $t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}\left(-\infty,t\right)$ ters görüntü kümesinin X de açık küme olduğunu göstereceğiz. $f^{-1}\left(-\infty,t\right)$ ters görüntü kümesinin X de açık küme olduğunu göstermek için her noktasının komşuluğu olduğunu göstereceğiz. $f^{-1}\left(-\infty,t\right)$ ters görüntü kümesinin herhangi bir z elemanını alalım. Bu takdirde $z \in f^{-1}\left(-\infty,t\right)$ olduğundan dolayı, $f\left(z\right) < t$ ve dolayısıyla, $t - f\left(z\right) > 0$ dır. f fonksiyonu X üzerinde üstten yarı sürekli olduğundan, X in her noktasında üstten yarı süreklidir, dolayısıyla z noktasında da üstten yarı süreklidir. Dolayısıyla, her $\varepsilon > 0$ için $x \in U$ olduğunda $f(x) < f(z) + \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı olarak z noktasının bir $U = U(\varepsilon)$ komşuluğu bulunabilir. Özel olarak, $\varepsilon = t - f(z)$ alalım. Bu durumda bu $\varepsilon = t - f(z) > 0$ sayısı için de $x \in U$ olduğunda $f(x) < f(z) + \varepsilon$ olacak şekilde bu özel ε sayısına bağlı olarak z noktasının bir $U = U(t - f(z))$ komşuluğu bulunabilir.

$\Rightarrow$ $x \in U$ olduğunda $f(x) < f(z) + (t - f(z))$

$\Rightarrow$ $x \in U$ olduğunda $f(x) < f(z) + t - f(z)$

$\Rightarrow$ $x \in U$ olduğunda $f(x) < t$

olur. Böylece $U \subset f^{-1}(-\infty, t)$ bulunur. U kümesi z noktasının bir komşuluğu olduğundan ve bir komşuluğu kapsayan küme de komşuluk olacağından dolayı $f^{-1}(-\infty, t)$ kümesi z noktasının bir komşuluğu olur. z noktası $f^{-1}(-\infty, t)$ kümesinin herhangi bir elemanı olduğundan, $f^{-1}(-\infty, t)$ kümesi her noktasının komşuluğu olur. Dolayısıyla $f^{-1}(-\infty, t)$ kümesi açık küme olur. Her $t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(-\infty, t)$ ters görüntü kümesinin X de açık olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi de her $t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(-\infty, t)$ ters görüntü kümesinin X de açık olduğunu kabul edelim. $x_0 \in X$ verilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

Özel olarak, $t = f(x_0) + \varepsilon$ alırsak, $f^{-1}((-\infty, f(x_0) + \varepsilon))$ ters görüntü kümesi X de açık olur. Açık küme her noktasının komşuluğu olduğundan dolayı, $f^{-1}((-\infty, f(x_0) + \varepsilon))$ kümesi x_0 noktasını içerdiğinden, $f^{-1}((-\infty, f(x_0) + \varepsilon))$ kümesi x_0 noktasının bir komşuluğudur. Dolayısıyla

$U \subset f^{-1}\left(\left(-\infty, f\left(x_0\right)+\varepsilon\right)\right)$ olacak şekilde x_0 noktasının bir U açık komşuluğu vardır.

$\Rightarrow$ $x \in U$ olduğunda $x \in f^{-1}\left(\left(-\infty, f\left(x_0\right)+\varepsilon\right)\right)$

$\Rightarrow$ $x \in U$ olduğunda $f\left(x\right) < f\left(x_0\right)+\varepsilon$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu x_0 noktasında üstten yarı sürekli olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.1.2.2. Teorem

X bir topolojik uzay olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ ve her bir n pozitif tamsayısı için $f_n : X \to \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

i. f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul hem alttan yarı sürekli hem de üstten yarı sürekli olmasıdır.

ii. a) f ve g alttan yarı sürekli iki fonksiyon ise $f+g$ de alttan yarı süreklidir.

b) f ve g üstten yarı sürekli iki fonksiyon ise $f+g$ de üstten yarı süreklidir.

iii. Her bir n pozitif tamsayısı f_n fonksiyonu üstten yarı sürekli ve $\left(f_n\right)$ fonksiyon dizisi X üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonu da üstten yarı süreklidir.

iv. Her bir n pozitif tamsayısı için f_n fonksiyonu alttan yarı sürekli ve $\left(f_n\right)$ fonksiyon dizisi X üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonu da alttan yarı süreklidir.

İspat

i. f fonksiyonunun sürekli olduğunu kabul edelim.

Bir fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter koşul her açık kümenin ters görüntüsünün açık olması olduğundan, her t reel sayısı için $(-\infty, t)$ açık kümesinin ters görüntüsü olan $f^{-1}(-\infty, t)$ kümesi X topolojik uzayında açıktır, dolayısıyla f fonksiyonu X de üstten yarı sürekli olur. Her t reel sayısı için (t, ∞) açık kümesinin ters görüntüsü olan $f^{-1}(t, \infty)$ kümesi X topolojik uzayında açıktır, dolayısıyla f fonksiyonu X de alttan yarı sürekli olur.

Şimdi de f fonksiyonunun X de hem üstten yarı sürekli hem de alttan yarı sürekli olduğunu kabul edelim. f fonksiyonunun X de sürekli olduğunu göstereceğiz. Bir fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter koşul her açık kümenin ters görüntüsünün açık olması olduğundan ve $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesinin mutlak değerden elde edilen alışılmış topolojisi için bütün açık aralıkların kümesi bir baz olduğundan dolayı, $a < b$ eşitsizliğini sağlayan her a ve b reel sayıları için (a, b) açık aralığının f altında ters görüntü kümesi $f^{-1}((a, b))$ nin X de açık olduğunu göstermemiz yeterlidir. f fonksiyonu X de üstten yarı sürekli olduğundan dolayı, $f^{-1}((-\infty, b))$ ters görüntü kümesi X de açık bir kümedir ve f fonksiyonu X de alttan yarı sürekli olduğundan dolayı, $f^{-1}((a, \infty))$ ters görüntü kümesi X de açık bir kümedir. Açık iki kümenin birleşimi X de açık bir küme olacağından dolayı,

$$f^{-1}((a,b)) = f^{-1}((a,\infty) \cap (-\infty, b)) = f^{-1}((a,\infty)) \cap f^{-1}((-\infty, b))$$

kümesi X de açık bir küme olacaktır. Böylece bu şıkkın ispatı tamamlanmış olur.

ii. a) f ve g alttan yarı sürekli iki fonksiyon olsun.

$f+g$ nin alttan yarı sürekli olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $x_0 \in X$ verilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. f fonksiyonu x_0 noktasında alttan yarı sürekli olduğundan dolayı, her $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için $x \in U$ olduğunda $f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x)$ olacak şekilde $\frac{\varepsilon}{2}$ sayısına bağlı olarak x_0 noktasının bir açık U komşuluğu bulunabilir. g fonksiyonu x_0 noktasında alttan yarı sürekli olduğundan dolayı, her $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için $x \in V$ olduğunda $g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < g(x)$ olacak şekilde $\frac{\varepsilon}{2}$ sayısına bağlı olarak x_0 noktasının bir V komşuluğu bulunabilir. $W = U \cap V$ yazalım. Bir noktanın iki komşuluğunun arakesiti de o noktanın bir komşuluğu olduğundan dolayı, W kümesi x_0 noktasının bir komşuluğudur. Bu takdirde her $x \in W$ için $f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x)$ ve $g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < g(x)$ olacaktır.

Bu eşitsizlikleri alt alta toplarsak,

$$f(x_0) + g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) + g(x) \Rightarrow f(x_0) + g(x_0) - \varepsilon < f(x) + g(x)$$
$$\Rightarrow (f+g)(x_0) - \varepsilon < (f+g)(x)$$

olur. O halde $f+g$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olur.

b) f ve g üstten yarı sürekli iki fonksiyon olsun. $f+g$ nin üstten yarı sürekli olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $x_0 \in X$ verilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. f fonksiyonu x_0 noktasında üstten yarı sürekli olduğundan dolayı, her $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için $x \in U$ olduğunda $f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\frac{\varepsilon}{2}$ sayısına bağlı olarak x_0

noktasının bir U komşuluğu bulunabilir. g fonksiyonu x_0 noktasında üstten yarı sürekli olduğundan dolayı, her $\frac{\varepsilon}{2}>0$ için $x\in V$ olduğunda $g(x)<g(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\frac{\varepsilon}{2}$ sayısına bağlı olarak x_0 noktasının bir V komşuluğu bulunabilir. $W=U\cap V$ yazalım. Bir noktanın iki komşuluğunun arakesiti de o noktanın bir komşuluğu olduğundan dolayı, W kümesi x_0 noktasının bir komşuluğudur.

Bu takdirde her $x\in W$ için $f(x)<f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$ ve $g(x)<g(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$ olacaktır.

Bu eşitsizlikleri alt alta toplarsak,

$$
\begin{aligned}
f(x)+g(x)<f(x_0)+g(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} &\Rightarrow f(x)+g(x)<f(x_0)+g(x_0)+\varepsilon \\
&\Rightarrow (f+g)(x)<(f+g)(x_0)+\varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. O halde $f+g$ fonksiyonu üstten yarı sürekli olur. Böylece bu şıkkın ispatı tamamlanmış olur.

iii. Her bir n pozitif tamsayısı için f_n fonksiyonunun üstten yarı sürekli olduğunu ve (f_n) fonksiyon dizisinin X üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu kabul edelim.

f fonksiyonunun da üstten yarı sürekli olduğunu göstereceğiz. Bunu yapmak için herhangi bir $x_0\in X$ alalım. Herhangi bir $\varepsilon>0$ verilsin. (f_n) fonksiyon dizisi X üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan dolayı, $\frac{\varepsilon}{3}>0$ için $n\geq n_0$ olduğunda $\forall x\in X$ için $\left|f(x)-f_{n_0}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ ve dolayısıyla, $-\frac{\varepsilon}{3}<f(x)-f_{n_0}(x)<\frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. f_n ler üstten yarı sürekli olduğundan dolayı, $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall x \in U$ için $f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde x_0 noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buna göre $\forall x \in U$ için

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0) \\
&= \left[f(x) - f_{n_0}(x)\right] + \left[f_{n_o}(x) - f_{n_0}(x_0)\right] + \left[f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right] < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. O halde f fonksiyonu da x_0 noktasında üstten yarı süreklidir. Her $x_0 \in X$ için bu yapılabileceğinden dolayı, f fonksiyonu X üzerinde üstten yarı süreklidir.

iv. Her bir n pozitif tamsayısı için f_n fonksiyonunun alttan yarı sürekli olduğunu ve (f_n) fonksiyon dizisinin X üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu kabul edelim. f fonksiyonunun da alttan yarı sürekli olduğunu göstereceğiz.

Her n pozitif tamsayısı için $g_n = -f_n$ yazalım yani her $\forall x \in X$ için $g_n(x) = -f_n(x)$ şeklinde g_n leri tanımlayalım. f_n fonksiyonları alttan yarı sürekli olduğundan dolayı g_n fonksiyonları üstten yarı sürekli olurlar. (f_n) fonksiyon dizisi X üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan dolayı, $(-f_n)$ fonksiyon dizisi yani (g_n) fonksiyon dizisi X üzerinde $-f = g$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olur. Bir önceki şıktan dolayı $-f = g$ fonksiyonu da üstten yarı sürekli olur. Dolayısıyla $-g = f$ fonksiyonu da X de alttan yarı sürekli olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.1.2.3. Teorem

f fonksiyonu X topolojik uzayı üzerinde alttan yarı süreklidir ancak ve ancak $x \in X$ noktasına yakınsayan her bir $\{x_n\}$ ağı için $\liminf_n f(x_n) \geq f(x)$ dir.

Burada $\liminf_n f(x_n) = \sup_n \inf_{k \geq n} f(x_k)$ dır.

f üstten yarı süreklidir $\Leftrightarrow$ $x_n \to x$ iken $\limsup_n f(x_n) \leq f(x)$ dır.

İspat

f alttan yarı sürekli olsun. Eğer $x_n \to x$ ve $b < f(x)$ ise $x \in f^{-1}(b,\infty]$, X in açık altkümesidir. Buradan $x_n \in f^{-1}(b,\infty]$ yani $f(x_n) > b$ dır. Sonuç olarak $\liminf_n f(x_n) \geq f(x)$ dır.

Tersine $x_n \to x$ için $\liminf_n f(x_n) \geq f(x)$ olsun. Gösterelim ki $V = \{x : f(x) > \alpha\}$ açıktır. $x_n \to x$ olsun. Burada $f(x) > \alpha$ dır. Bu durumda $\liminf_n f(x_n) \geq f(x) > \alpha$ olup $f(x_n) > \alpha$ yani $x_n \in V$ dır. Teorem 2.6.14. den dolayı V açıktır.

3.1.2.4. Teorem

f fonksiyonu X kompakt topolojik uzayı üzerinde alttan yarı sürekli olsun. Bu durumda f infimuma sahiptir.

İspat

$b = \inf f$ ve $f(x_n) \to b$ olacak şekildeki $x_n \in X$ noktalarının dizisi olsun. X kompakt topolojik uzay olduğundan $x_{n_k} \to x$ olacak şekilde $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ alt ağı vardır. f alttan yarı sürekli olduğundan $\liminf_k f\left(x_{n_k}\right) \geq f(x)$ dır. Fakat $f\left(x_{n_k}\right) \to b$ olup $f(x) \leq b$ dır. Sonuç olarak $f(x) = b$ dir.

3.1.2.5. Teorem

Eğer $i \in \mathrm{I}$ için f_i ler X üzerinde alttan yarı sürekli ise $\sup_i f_i$ alttan yarı süreklidir. Eğer I sonlu ise $\min_i f_i$ alttan yarı süreklidir.(Eğer $i \in \mathrm{I}$ için f_i ler X üzerinde üstten yarı sürekli ise $\inf_i f_i$ üstten yarı süreklidir. Eğer I sonlu ise $\max_i f_i$ üstten yarı süreklidir).

İspat

$f = \sup_i f_i$ olsun. Bu durumda $\{x : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \{x : f_i(x) > \alpha\}$ dır. Böylece $\{x : f(x) > \alpha\}$ açıktır. Çünkü $i \in \mathrm{I}$ için $\{x : f_i(x) > \alpha\}$ açık ve açık kümelerin herhangi sayıda birleşimi de açık kümedir. Eğer $g = \min(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ ise $\{x : g(x) > \alpha\} = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \{x : f_i(x) > \alpha\}$ olup $\{x : g(x) > \alpha\}$ açıktır.

3.1.3. Metrik uzaylarda yarı süreklilik

Eğer X bir metrik uzay ise alttan yarı süreklilik ve üstten yarı süreklilik tanımları aşağıdaki şekillere dönüşür.

X bir metrik uzay olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $x \in B(x_0, \delta)$ olduğunda $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ olacak şekilde ε sayısına bağlı olarak bir δ pozitif sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında alttan yarı süreklidir denir. Bu da her $\varepsilon > 0$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$

olacak şekilde ε sayısına bağlı olarak bir δ pozitif sayısı bulunabiliyor demeye eşdeğerdir. X bir metrik uzay olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $x \in B(x_0, \delta)$ olduğunda $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı olarak bir δ pozitif sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında üstten yarı süreklidir denir. Bu da her $\varepsilon > 0$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı olarak bir δ pozitif sayısı bulunabiliyor demeye eşdeğerdir [45].

3.1.3.1. Örnek

$X = \ell_\infty$ olsun. $f : \ell_\infty \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n+1}|$$

şeklinde tanımlansın. Bu f fonksiyonunun ℓ_∞ da alttan yarı sürekli olduğunu gösteriniz [45].

Çözüm

$x = (x_n) = \left((-1)^n\right)$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n - (-1)^{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n - (-1)(-1)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \left[1 - (-1)\right]\right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n 2\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n\right| 2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2 = \infty \end{aligned}$$

olduğundan, f fonksiyonu $+\infty$ değerini de alabilmektedir. Eğer $\overline{x} \in \ell_\infty$ ve $f(\overline{x}) = \infty$ oluyorsa bu durumda alttan yarı sürekliliği, her M pozitif sayısı için

$x \in U$ olduğunda $f(x) > M$ olacak şekilde $\overline{x}$ nin bir U komşuluğunun var olması durumunda f fonksiyonuna $\overline{x}$ noktasında alttan yarı sürekli diyerek tanımlarız. Herhangi bir M pozitif sayısı verilsin. $f\left(\overline{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\overline{x}_n - \overline{x}_{n+1}\right| = \infty$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{N} \left|\overline{x}_n - \overline{x}_{n+1}\right| > 2M$ olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır.

Her n pozitif tamsayısı için

$$
\begin{aligned}
\left|x_n - x_{n+1}\right| &= \left|x_n - \overline{x}_n + \overline{x}_n - \overline{x}_{n+1} + \overline{x}_{n+1} - x_{n+1}\right| \\
&= \left|\left(\overline{x}_n - \overline{x}_{n+1}\right) + \left(x_n - \overline{x}_n\right) + \left(\overline{x}_{n+1} - x_{n+1}\right)\right| \\
&\geq \left|\overline{x}_n - \overline{x}_{n+1}\right| - \left|x_n - \overline{x}_n\right| - \left|\overline{x}_{n+1} - x_{n+1}\right|
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$
\sum_{n=1}^{N} \left|x_n - x_{n+1}\right| \geq \sum_{n=1}^{N} \left|\overline{x}_n - \overline{x}_{n+1}\right| - \sum_{n=1}^{N} \left|x_n - \overline{x}_n\right| - \sum_{n=1}^{N} \left|\overline{x}_{n+1} - x_{n+1}\right|
$$

yazılabilir. Şimdi $\delta = \frac{M}{2N}$ alalım, $x \in \mathrm{B}\left(\overline{x}, \frac{M}{2N}\right)$ yani $d\left(x, \overline{x}\right) < \frac{M}{2N}$ olsun. Bu takdirde,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \left|x_n - x_{n+1}\right| &\geq \sum_{n=1}^{N} \left|\overline{x}_n - \overline{x}_{n+1}\right| - \sum_{n=1}^{N} \left|x_n - \overline{x}_n\right| - \sum_{n=1}^{N} \left|\overline{x}_{n+1} - x_{n+1}\right| \\
&\geq 2\mathrm{M} - \sum_{n=1}^{N} \sup_i \left|x_i - \overline{x}_i\right| - \sum_{n=1}^{N} \sup_i \left|\overline{x}_{i+1} - x_{i+1}\right| \\
&\geq 2\mathrm{M} - \sum_{n=1}^{N} d\left(x, \overline{x}\right) - \sum_{n=1}^{N} d\left(x, \overline{x}\right) \geq 2\mathrm{M} - \mathrm{N}d\left(x, \overline{x}\right) - Ndd\left(x, \overline{x}\right) \\
&\geq 2\mathrm{M} - \mathrm{N}\frac{\mathrm{M}}{2\mathrm{N}} - N\frac{M}{2N} = 2\mathrm{M} - \frac{\mathrm{M}}{2} - \frac{M}{2} = 2M - M = M
\end{aligned}
$$

yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n - x_{n+1}\right| \geq \sum_{n=1}^{N}\left|x_n - x_{n+1}\right| > M$$

bulunur. O halde $f\left(\overline{x}\right)=\infty$ ise f fonksiyonu $\overline{x}$ noktasında alttan yarı süreklidir. Şimdi de $\overline{x}\in \ell_{\infty}$ ve $f\left(\overline{x}\right)<\infty$ olması halini göz önüne alalım. $f\left(\overline{x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n - x_{n+1}\right| < \infty$ olsun. Bu takdirde $\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n - x_{n+1}\right|$ serisi yakınsak olduğundan, kalan terim sıfıra yakınsayacaktır dolayısıyla, her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|x_n - x_{n+1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı vardır.

$$f\left(\overline{x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n - x_{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{N}\left|x_n - x_{n+1}\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left|x_n - x_{n+1}\right| < \sum_{n=1}^{N}\left|\overline{x}_n - \overline{x}_{n+1}\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buradan

$$f\left(\overline{x}\right)-\frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=1}^{N}\left|\overline{x}_n - \overline{x}_{n+1}\right|$$

elde edilir.

Şimdi $\delta = \frac{\varepsilon}{4N}$ alalım ve $\mathrm{B}\left(\overline{x},\delta\right)$ açık yuvarını göz önüne alalım. $\mathrm{B}\left(\overline{x},\delta\right)$ kümesinin herhangi bir x elemanını alalım. Bu takdirde $d\left(x,\overline{x}\right)<\delta$ olur. Bu takdirde $d\left(x,\overline{x}\right)<\delta$ olduğunda

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\overline{x_n}-\overline{x_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{N}\left|\overline{x_n}-\overline{x_{n+1}}-x_n+x_n-x_{n+1}+x_{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{N}\left|\left(\overline{x_n}-x_n\right)+\left(x_{n+1}-\overline{x_{n+1}}\right)+\left(x_n-x_{n+1}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N}\left(\left|\overline{x_n}-x_n\right|+\left|x_{n+1}-\overline{x_{n+1}}\right|+\left|x_n-x_{n+1}\right|\right) = \sum_{n=1}^{N}\left|\overline{x_n}-x_n\right|+\sum_{n=1}^{N}\left|x_{n+1}-\overline{x_{n+1}}\right|+\sum_{n=1}^{N}\left|x_n-x_{n+1}\right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N}\left(\sup_k\left|\overline{x_k}-x_k\right|\right)+\sum_{n=1}^{N}\left(\sup_k\left|x_{k+1}-\overline{x_{k+1}}\right|\right)+\sum_{n=1}^{N}\left|x_n-x_{n+1}\right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N}d\left(x,\overline{x}\right)+\sum_{n=1}^{N}d\left(x,\overline{x}\right)+\sum_{n=1}^{N}\left|x_n-x_{n+1}\right| \leq Nd\left(x,\overline{x}\right)+Nd\left(x,\overline{x}\right)+\sum_{n=1}^{N}\left|x_n-x_{n+1}\right|$$

$$\leq N\frac{\varepsilon}{4N}+N\frac{\varepsilon}{4N}+\sum_{n=1}^{N}\left|x_n-x_{n+1}\right| = \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\sum_{n=1}^{N}\left|x_n-x_{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{N}\left|x_n-x_{n+1}\right|+\frac{\varepsilon}{2}$$

Diğer taraftan, $f\left(\overline{x}\right)-\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{n=1}^{N}\left|\overline{x_n}-\overline{x_{n+1}}\right|$ olduğundan dolayı $d\left(x,\overline{x}\right)<\delta$ olduğunda,

$$f\left(\overline{x}\right)-\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{n=1}^{N}\left|\overline{x_n}-\overline{x_{n+1}}\right| \leq \sum_{n=1}^{N}\left|x_n-x_{n+1}\right|+\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Buradan da $d\left(x,\overline{x}\right)<\delta$ olduğunda

$$f\left(\overline{x}\right)-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{n=1}^{N}\left|x_n-x_{n+1}\right|$$

$$\Rightarrow\ f\left(\overline{x}\right)-\varepsilon<\sum_{n=1}^{N}\left|x_n-x_{n+1}\right|$$

$$\Rightarrow\ f\left(\overline{x}\right)-\varepsilon<\sum_{n=1}^{N}\left|x_n-x_{n+1}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n-x_{n+1}\right| = f\left(x\right)$$

$$\Rightarrow\ f\left(\overline{x}\right)-\varepsilon<f\left(x\right)$$

$\Rightarrow d\left(x,\overline{x}\right)<\delta$ olduğunda $f\left(\overline{x}\right)-\varepsilon<f\left(x\right)$ elde edilmiş olur ki bu da f fonksiyonunun $\overline{x}$ noktasında alttan yarı sürekli olması demektir. Burada $\overline{x}$ noktası $f\left(\overline{x}\right)<\infty$ şeklindeki herhangi bir eleman olduğundan f fonksiyonu $f\left(\overline{x}\right)<\infty$

özelliğini sağlayan her $\overline{x}$ noktasında alttan yarı sürekli olur. $f\left(\overline{x}\right)=\infty$ olacak şekildeki her $\overline{x}$ noktasındaki alttan yarı sürekliliğini yukarıda göstermiştik. Böylece f fonksiyonu ℓ_∞ nin her noktasında alttan yarı sürekli olur. Dolayısıyla f fonksiyonu ℓ_∞ üzerinde alttan yarı sürekli olur. Böylece de ispat tamamlanmış olur.

3.1.3.2. Not

Alt veya üst yarı sürekli bir fonksiyon sürekli olmak zorunda değildir.

3.1.3.3. Örnek

$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n-x_{n+1}\right|$ şeklinde tanımlanan $f:\ell_\infty\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ fonksiyonu ℓ_∞ da sürekli değildir.

Çözüm

Her i pozitif tamsayısı için $x^{(i)}=\left(\frac{-1}{i},\frac{+1}{i},\frac{-1}{i},\frac{+1}{i},...,\frac{\left(-1\right)^i}{i},...\right)$ dizisini göz önüne alalım. Her i pozitif tamsayısı için $x^{(i)}$ elemanı ℓ_∞ un bir elemanıdır. $\left(x^{(i)}\right)$ dizisi her bir terimi ℓ_∞ un bir elemanı olan bir dizidir. Çünkü her i pozitif tamsayısı için

$$\sup_k\left|x_k^{(i)}\right|=\sup\left\{\frac{1}{i},\frac{1}{i},...,\frac{1}{i},0,0,...\right\}=\frac{1}{i}<\infty$$

dir. $\theta=\left(0,0,0,...,0,0,0,...\right)$ olmak üzere her i pozitif tamsayısı için

$$d\left(x_k^{(i)},\theta\right)=\sup_k\left|x_k^{(i)}-0\right|=\sup_k\left|x_k^{(i)}\right|=\sup\left\{\frac{1}{i},\frac{1}{i},...,\frac{1}{i},0,0,...\right\}=\frac{1}{i}$$

olduğundan, $\lim_{i\to\infty} d\left(x_k^{(i)},\theta\right)=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{i}=0$ dır. Dolayısıyla $\left(x^{(i)}\right)$ dizisi ℓ_∞ da $\theta=(0,0,0,...,0,0,0,...)$ noktasına yakınsar.

Ancak bu dizinin f altında görüntü dizisi $\left(f\left(x^{(i)}\right)\right)$ dizisi $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ de $f(\theta)=f(0,0,0,...,0,0,...)=\sum_{n=1}^{\infty}|0-0|=\sum_{n=1}^{\infty}|0|=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$ noktasına yakınsamaz.

Gerçekten;

$$f\left(x^{(i)}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(i)}-x_{k+1}^{(i)}\right|=\sum_{k=1}^{i}\left|\frac{(-1)^k}{i}-\frac{(-1)^{k+1}}{i}\right|=\sum_{k=1}^{i}\left|\frac{(-1)^k}{i}-(-1)\frac{(-1)^k}{i}\right|=\sum_{k=1}^{i}\left|\frac{(-1)^k}{i}\left[1-(-1)\right]\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{i}\left|\frac{(-1)^k}{i}(1+1)\right|=\sum_{k=1}^{i}\left|\frac{(-1)^k}{i}2\right|=\sum_{k=1}^{i}\left|\frac{(-1)^k}{i}\right|2=2\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{i}=2i.\frac{1}{i}=2$$

olduğundan dolayı $\left(f\left(x^{(i)}\right)\right)$ dizisi $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ da $f(\theta)=0$ noktasına yakınsamaz. O halde f fonksiyonu ℓ_∞ da $\theta=(0,0,0,...,0,0,0,...)$ noktasında dizisel sürekli değildir. Metrik uzaylarda dizisel süreklilik sürekliliğe eşdeğer olduğundan dolayı, f fonksiyonu ℓ_∞ da $\theta=(0,0,0,...,0,0,0,...)$ noktasında sürekli değildir.

3.2. Çoğul Değerli Dönüşümler İçin Yarı-Süreklilik ve Bazı Teoremler

X,Y boş olmayan kümeler ve $P(Y)=2^Y$ de Y' nin tüm alt kümelerinin ailesi olsun. Bir $F:X\to P(Y)-\{\varnothing\}$ fonksiyonuna, X kümesinden Y kümesine bir *çoğul değerli dönüşüm* denir ve $F:X\to 2^Y$ ile gösterilir. Bir $x\in X$ için $F(x)$, Y nin boş olmayan bir alt kümesidir. Eğer $F:X\to X$ bir çoğul değerli dönüşüm ve bir $x\in X$ için $x\in F(x)$ ise x noktasına F nin bir *sabit noktası* denir.

3.2.1. Tanım

Her $x \in X$ için $f(x) \in F(x)$ olacak şekilde $f : X \to Y$ tek değerli dönüşümü, $F : X \to 2^Y$ çoğul değerli dönüşümünün bir seçimi (kısmı, selection) olarak adlandırılır. Eğer f sürekli ise f ye F nin sürekli seçimi (continous selection) denir.

3.2.2. Tanım

X , Y iki topolojik uzay ve $F : X \to 2^Y$ çoğul değerli dönüşüm olsun.

- Eğer $B \subset Y$ kapalı kümesi için $F^-(B) = \{x \in X : T(x) \cap B \neq \varnothing\} \subseteq X$ kapalı ise F ye *üst yarı süreklidir* denir ve kısaca u.s.c ile gösterilir.
- Eğer $B \subset Y$ açık kümesi için $F^-(B) = \{x \in X : T(x) \cap B \neq \varnothing\} \subseteq X$ açık ise F ye *alt yarı süreklidir* denir ve kısaca l.s.c ile gösterilir.
- Eğer $\overline{F(X)}$, Y nin bir kompakt alt kümesi ise F ye *kompakttır* denir.
- Eğer F nin grafiği $G_r(F) = \{(x, y) : y \in F(x),\ x \in X\} \subseteq X \times Y$ kapalı küme ise F ye *kapalıdır* denir.

3.2.3. Teorem

X ve Y topolojik uzaylar ve $F : X \to 2^Y$ çoğul değerli bir dönüşüm olsun [4].

a. Eğer X kompakt ve F kompakt değerli olacak şekilde u.s.c ise $F(X)$ kompakttır.

b. Eğer F kapalı değerli olacak şekilde u.s.c ise F kapalıdır.

c. X topolojik uzay, Y kompakt uzay ve F kapalı ise F u.s.c dır.

İspat

a. Gösterelim ki $F(X)$ in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır.

$\{V_t\}$, $F(X)$ bir açık örtüsü olsun. F kompakt değerli olduğundan her $x \in X$ için $F(x)$ kompakttır. Her $x \in X$ için $F(x)$ kompakt olduğundan $F(x) \subset W_x$ olacak şekilde V_t nin sonlu sayıda alt örtüsü vardır. Burada $W_x = \bigcup_{i\ sonlu} V_{t_i}$ yani W_x her $x \in X$ için V_t kümelerinin birleşimidir. Bu da gösterir ki $\{W_x\}_{x\in X}$, $F(X)$ in bir açık örtüsüdür. Her $x \in X$ için $U_x = F^-(W_x)$ olsun. F u.s.c olduğundan $\{U_x\}_{x\in X}$, X in bir açık örtüsüdür. X kompakt uzay olduğundan U_x in $U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}$ şeklinde sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu durumda $W_{x_1}, W_{x_2}, ..., W_{x_n}$ ise $F(X)$ i örter ve $\forall W_{x_i}$, $\{V_t\}$ kümelerinin sonlu birleşimi olduğundan $\{V_t\}$ nin $V_{t_1}, V_{t_2}, ..., V_{t_n}$ sonlu alt örtüsü vardır ki buda ispatı tamamlar.

b. Gösterelim ki $G_r(F) = \{(x,y) : y \in F(x),\ x \in X\} \subseteq X \times Y$ kapalıdır.
Teorem 2.6.14 ü kullanarak ispatlayalım.
$\forall n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, y_n) \in G_r(F)$ ve $(x_n, y_n) \to (x,y)$ olsun. Gösterelim ki

$$(x,y) \in G_r(F) \ yani \ y \in F(x)$$

dir.

$$\begin{aligned}(x_n, y_n) \to (x,y) &\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \ için \ (x_n, y_n) \in N(x,y)\\ &\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \ için \ x_n \in N(x) \ ve \ y_n \in N(y)\\ &\Leftrightarrow x_n \to x \ ve \ y_n \to y\end{aligned}$$

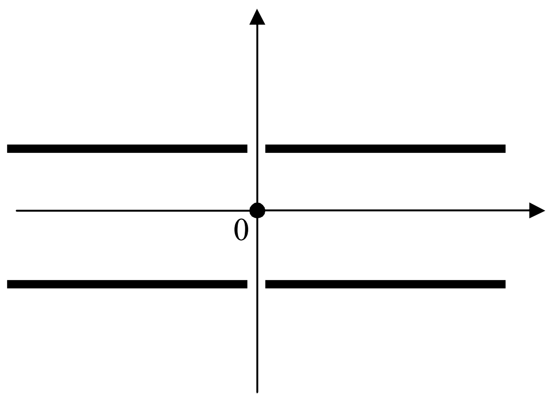
$y_n \in F(x_n)$ olduğundan $y \in F(x)$ olup $(x,y) \in G_r(F)$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

c. Varsayalım ki F u.s.c olmasın. Bu durumda x in her U_x açık komşuluğu için $F(U_x) \not\subset V_{F(x)}$ olacak şekilde $F(x)$ in bir $V_{F(x)}$ açık komşuluğu vardır. $n = 1, 2, \ldots$ için $U_x = \mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$ seçelim. Bu durumda her n için $F(U_x) \not\subset V_{F(x)}$ olacak şekilde $x_n \in \mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$ vardır. $y_n \notin V_{F(x_n)}$ ve $y_n \in F(x_n)$ olacak şekilde $y_n \in Y$ olsun. Bu durumda $x_n \to x$ ve $\{y_n\} \subset Y$ dir. Y kompakt olduğundan $\lim y_n = y \in Y$ olup $y \notin V_{F(x)}$ dir. Her n için $(x_n, y_n) \in G_r(F)$ ve $\{(x_n, y_n)\} \to (x, y)$ dir. F kapalı olduğundan $G_r(F)$ kapalı ve $(x, y) \in G_r(F)$ dir. Yani $y \in F(x)$ olup bu da $y \notin V_{F(x)}$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak F u.s.c dır.

3.2.4. *Örnek*

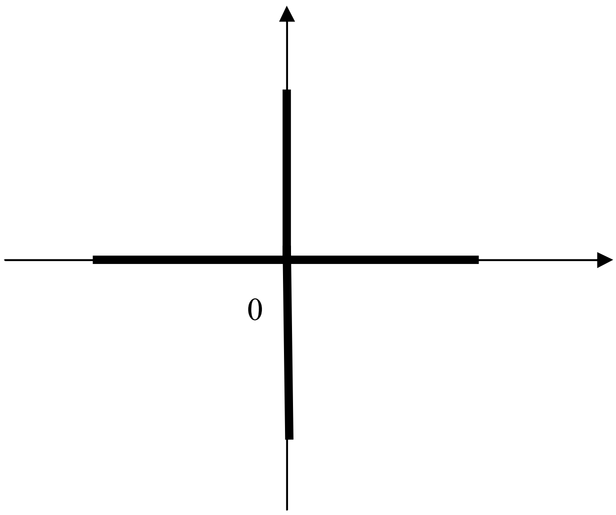
$$F_1(x) = \begin{cases} [-1, 1] & , x \neq 0 \\ \{0\} & , x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F_1 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ küme değerli dönüşümü $x = 0$ noktasında alttan yarı sürekli fakat üstten yarı sürekli değildir.



$$F_2(x)=\begin{cases}[-1,1] & ,x=0\\ \{0\} & ,x\neq 0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F_2:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{R}}$ küme değerli dönüşümü $x=0$ noktasında üstten yarı sürekli fakat alttan yarı sürekli değildir.



4. KKM DÖNÜŞÜMLERİ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde topolojik vektör uzaylarında KKM dönüşümlerini ve bazı uygulamalarını inceleyeceğiz [19].

4.1. Tanım

E, X topolojik vektör uzayının bir alt kümesi ve $G : E \to 2^X$ olsun.
Eğer $i = 1, 2, ..., n$ $x_i \in E$ için

$$co\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)$$

oluyorsa G dönüşümüne *KKM dönüşümü* denir [19].

4.2. Tanım

E bir küme ve X topolojik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir Y topolojik vektör uzayı mevcutsa $G : E \to 2^X$ dönüşümüne *KKM özellikli dönüşüm* denir [19].
$\forall \{x_i : i = 1, 2, ..., n\} \subseteq E$ için

a. $F = \{y_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq Y$

b. $L : X \to Y$ *ya da* 2^Y ye kapalı dönüşüm

c. $i = 1, 2, ..., n$ için $G'(y_i) \subseteq G(x_i)$ olacak şekilde $G' : F \to 2^X$ dönüşümü vardır öyleki $f \in F$ için $LG'(f) = \bigcup_{x \in G'(f)} L(x)$ ile tanımlı $LG' : F \to 2^Y$ dönüşümü KKM dönüşümüdür.

d. $\bigcap_{i=1}^{n} LG'(y_i) \neq \varnothing$ iken $\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) \neq \varnothing$

4.3. *Örnek*

$E=[0,1]$, $\mathbb{R}$ nin bir kapalı aralığı, $X=\mathbb{R}$ ve $G:E\to 2^X$, $x\in E$ için $G(x)=(1,2+x)$ olsun. $Y=\mathbb{R}$ alınırsa $G:E\to 2^X$ dönüşümü KKM özellikli bir dönüşümdür. Gerçekten;

$\forall(x_i)\subset[0,1]$, $i=1,2,...,n$ için

a. $y_i=\dfrac{3}{2}+x_i$ olmak üzere $F=\{y_1,y_2,...,y_n\}\subseteq Y=\mathbb{R}$

b. $L:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{R}}$ kapalı birim dönüşüm

c. $i=1,2,...,n$ için $G'(y_i)\subseteq G(x_i)$ olacak şekilde $G':F\to 2^Y$,

$G'(y_i)=\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{4}+x_i\right]$ olsun.

- $i=1$ için $G'(y_1)\subseteq G(x_1)$ mi?

$y_1=\dfrac{3}{2}+x_1$ ve $x_i\geq 0$ olduğundan $y_i\geq 0$ dır.

$G'(y_1)=\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{4}+x_1\right]\subseteq G(x_1)=(1,2+x_1)$ dır. Dönüşümlerimiz artan olduğundan $i=1,2,...,n$ için eşitsizlik her daim sağlanır.

- Şimdi gösterelim ki $LG'=G':F\to 2^{\mathbb{R}}$ dönüşümü KKM dönüşümüdür.

$$co\{y_1,y_2,...,y_n\}=\left[\min\{y_i\},\max\{y_i\}\right]$$
$$=\left[\frac{3}{2},\frac{3}{2}+\max\{x_i\}\right]$$

ve

$$\bigcup_{i=1}^{n}G'(y_i)=\bigcup_{i=1}^{n}\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}+x_i\right]=\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}+\max\{x_i\}\right]_{1\leq i\leq n}$$

olmak üzere $coF \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G'(y_i)$ olup $G' : F \to 2^{\mathbb{R}}$ KKM dönüşümüdür.

d. $\bigcap_{i=1}^{n} LG'(y_i) = \bigcap_{i=1}^{n} G'(y_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4} + x_i\right] = \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4} + \min\{x_i\}\right]_{1 \le i \le n} \neq \varnothing$ ve

$i = 1, 2, ..., n$ için $G'(y_i) \subseteq G(x_i)$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (1, 2 + x_i) =$ $(1, 2 + \min\{x_i\})_{1 \le i \le n} \neq \varnothing$ dır.

4.4. Teorem

X topolojik uzay ve E bir küme olsun. Eğer $G : E \to 2^X$ KKM özelliği ile kapalı değerli bir dönüşüm ise $\{G(x)\}_{x \in E}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir [19].

İspat

$G : E \to 2^X$ KKM özelliği ile kapalı değerli dönüşüm ve $\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) = \varnothing$ olsun. $L = span\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ve $S = co\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ seçelim. Bu durumda $S \subseteq L$ dir. $i = 1, 2, ..., n$ için d, L içinde Öklid metriği olmak üzere G kapalı değerli olduğundan $L \cap G(x_i)$, L içinde kapalıdır.

$$d(x, L \cap G(x_i)) > 0 \Leftrightarrow x \notin L \cap G(x_i) \tag{4.1}$$

$f : S \to [0, +\infty)$, $f(c) = \sum_{i=1}^{n} d(c, L \cap G(x_i))$, $c \in S$ şeklinde tanımlayalım.

Eş 4.1 den ve $\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) = \varnothing$ olduğundan $c \in S$ için $f(c) > 0$ dır.

$$F : S \to S,\ F(c) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f(c)} . d(c, L \cap G(x_i)) . x_i \tag{4.2}$$

F sürekli bir fonksiyondur. L sonlu boyutlu vektör uzayı, $S \subseteq L$ sınırlı kapalı konveks alt küme ve $F(S) \subseteq S$ olup Brouwer sabit nokta teoreminden[1] $c_* \in S$

$$c_* = F(c_*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f(c_*)}.d\left(c_*, L \cap G(x_i)\right).x_i$$

olacak şekilde vardır. $I = \left\{ i \in \{1,2,...,n\} : d\left(c_*, L \cap G(x_i)\right) > 0 \right\}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $i \in I$ için $c_* \notin L \cap G(x_i)$ dir. $c_* \in L$ olduğundan $\forall i \in I$ için $c_* \notin G(x_i)$ dir. Sonuç olarak

$$c_* \notin \bigcup_{i \in I} G(x_i) \tag{4.3}$$

$$c_* = F(c_*) = \sum_{i \in I} \frac{1}{f(c_*)}.d\left(c_*, L \cap G(x_i)\right).x_i \in co\{x_i : i \in I\} \text{ ve } G : E \to 2^X \text{ KKM}$$

özellikli olduğundan $c_* \in co\{x_i : i \in I\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G(x_i)$ olup bu da Eş 4.3 ile çelişir. Sonuç olarak $\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) \neq \varnothing$ dir.

4.5. Teorem *(Ky Fan Teoremi*)

X topolojik uzay ve E, X in bir alt kümesi olsun. Eğer $G : E \to 2^X$ KKM özelliği ile kapalı değerli dönüşüm ve $G(x_0)$ kompakt olacak şekilde $x_0 \in E$ noktası varsa $\bigcap_{i=1}^{n} G(x) \neq \varnothing$ dir [19].

---

[1] **Brouwer sabit nokta teoremi:** X sonlu boyutlu vektör uzayı, $D \subseteq X$ sınırlı kapalı konveks alt küme olsun. $f : D \to X$ sürekli ve $f(D) \subseteq D$ ise f, D üzerinde sabit noktaya sahiptir.

İspat

Bir önceki teoremden dolayı $\{G(x)\}_{x\in E}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir ve bundan dolayı $\{G(x)\cap G(x_0): x\in E\}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir. $(\forall x\in E \text{ } için \text{ } G(x) \text{ } kapalı)$ $\{G(x)\cap G(x_0): x\in E\}$, $G(x_0)$ içindeki kompakt kümelerin ailesi olduğundan kompakt kümelerin özelliğinden dolayı

$$\varnothing \neq \bigcap_{x\in E}\{G(x)\cap G(x_0)\} = G(x_0)\cap\bigcap_{x\in E}G(x) = \bigcap_{x\in E}G(x)$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

4.6. Tanım

E, X topolojik vektör uzayının boştan farklı konveks alt kümesi ve $F: E\to 2^X$ çoğul değerli dönüşüm olsun. Eğer;
$\forall\{x_1,x_2,...,x_n\}\subseteq E$ ve $1\le k\le n$ olmak üzere $\{y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k}\}\subseteq\{y_1,y_2,...,y_n\}$ için

$$co\{y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k}\}\subseteq\bigcup_{j=1}^{k}F\left(x_{i_j}\right)$$

olacak şekilde $\{y_1,y_2,...,y_n\}$ varsa F dönüşümüne *genelleştirilmiş KKM dönüşümü* denir.
Genelleştirilmiş KKM dönüşümünde $\forall\{x_1,x_2,...,x_n\}\subseteq E$ ve $i=1,2,...,n$ için $y_i=x_i$ alınırsa KKM dönüşümü elde edilir [11].

4.7. Tanım

X, E topolojik vektör uzayının bir konveks altkümesi, Y topolojik uzay, $T,F: X\to 2^Y$ çoğul değerli iki dönüşüm olsun. Eğer $\forall A\in\langle X\rangle$ için

$T\left(coA\right)\subseteq F\left(A\right)$ oluyorsa *F dönüşümüne* T *ye göre genelleştirilmiş KKM dönüşümü* denir. $F:X\to 2^{Y}$, T ye genelleştirilmiş KKM dönüşümü ve $\left\{\overline{F\left(x\right)}:x\in X\right\}$ sonlu arakesit özelliğine sahip ise T ye KKM özelliğine sahiptir denir [12].

$$KKM\left(X,Y\right)=\left\{T:X\to 2^{Y}:T,\ KKM\ \textit{özelliğine sahip}\right\}$$

4.8. Önerme

X, E topolojik vektör uzayının boştan farklı altkümesi Y ve Z iki topolojik uzay olsun [20].

a. $T\in KKM\left(X,Y\right)$ ve $f\in C\left(Y,Z\right)$ ise $fT\in KKM\left(X,Z\right)$

b. $T\in KKM\left(X,Y\right)$ ve $D\subseteq X$ ise $T\big|_{D}\in KKM\left(D,Y\right)$

İspat

a. $F:X\to 2^{Z}$, $\forall x\in X$ için Fx kapalı olacak şekilde fT ye göre genelleştirilmiş KKM dönüşümü olsun. Bu durumda $\forall\left\{x_1,x_2,...,x_n\right\}\subseteq\left\langle X\right\rangle$ için $fT\left(co\left\{x_1,x_2,...,x_n\right\}\right)\subseteq\bigcup_{i=}^{n}F\left(x_i\right)$ vardır. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $T\left(co\left\{x_1,x_2,...,x_n\right\}\right)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}F\left(x_i\right)$ olur ki bu durumda $f^{-1}F$, T ye göre genelleştirilmiş KKM dönüşümü olur. $T\in KKM\left(X,Y\right)$ olduğundan $\left\{f^{-1}Fx:x\in X\right\}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir. Böylece $\left\{F\left(x\right):x\in X\right\}$ de sonlu arakesit özelliğine sahiptir. Sonuç olarak $fT\in KKM\left(X,Z\right)$ dir.

b. $F : D \to 2^Y$, $T|_D$ ye göre genelleştirilmiş KKM dönüşümü olsun. Bu durumda $\forall A \in \langle D \rangle$ için $T|_D(coA) \subseteq F(A)$ dır. $F' : X \to 2^Y$ dönüşümünü

$$F'(x) = \begin{cases} F(x) & ; x \in D \\ Y & ; x \notin D \end{cases}$$ şeklinde tanımlayalım.

$\forall B \in \langle X \rangle$ için $T(coB) \subseteq F'(B)$ dir. Gerçekten;

- Eğer $B \not\subset D$ ise bazı $x \in B - D$ vardır öyle ki $F'(x) = Y$ dir (F''nün tanımından).
- Eğer $B \subseteq D$ ise bütün $x \in B$ için $F(x) = F'(x)$ dir ve F, $T|_D$ ye göre genelleştirilmiş KKM dönüşümü olduğundan şart sağlanır.

Bundan dolayı F', T ye göre genelleştirilmiş KKM dönüşümüdür. $T \in KKM(X,Y)$ olduğundan $\left\{ \overline{F'(x)} : x \in X \right\}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir ve böylece $\left\{ \overline{F(x)} = \overline{F'(x)} : x \in D \right\}$ de sonlu arakesit özelliğine sahip olur. Sonuç olarak $T|_D \in KKM(D,Y)$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

4.9. Lemma

X, E topolojik vektör uzayının konveks alt kümesi ve V, E içinde sıfırın açık simetrik konveks komşuluğu olsun. Eğer $T \in KKM(X,X)$ kompakt ise

$$(x_V + V) \cap Tx_V \neq \varnothing$$

olacak şekilde $x_V \in X$ vardır [12].

İspat

Varsayalım ki $\forall x \in X$ için $(x+V) \cap Tx = \varnothing$ ve $X_1 = \overline{T(X)}$ olsun. T kompakt olduğundan $\overline{T(X)}$, X in kompakt alt kümesidir.

$F : X \to 2^X$ dönüşümünü $\forall x \in X$ için $Fx = X_1 - \left(x + \frac{1}{4}V\right)$ şeklinde tanımlayalım.

- $\forall x \in X$ için Fx, X içinde kapalıdır. Çünkü $x + \frac{1}{4}V$ açık küme olup $X_1 - \left(x + \frac{1}{4}V\right)$ kapalıdır.
- F, T ye göre genelleştirilmiş KKM dönüşümüdür.

Gösterelim ki $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in \langle X \rangle$ için $T(coA) \subset F(A)$ dır.

i. Eğer $2 \le i \le n$ için $\left(x_i + \frac{1}{4}V\right) \cap \left(x_1 + \frac{1}{4}V\right) = \varnothing$ olacak şekilde bazı i ler varsa

$$T(coA) \subset \overline{T(X)} = X_1 = Fx_i \cup Fx_1 \subset F(A)$$

dır. Burada $Fx_i \cup Fx_1 = X_1 - \left[\underbrace{\left(x_i + \frac{1}{4}V\right) \cap \left(x_1 + \frac{1}{4}V\right)}_{\varnothing}\right] = X_1$ dır.

ii. Her $2 \le i \le n$ $\left(x_i + \frac{1}{4}V\right) \cap \left(x_1 + \frac{1}{4}V\right) \neq \varnothing$ olsun.

Bu durumda $2 \le i \le n$ için $x_1 \in x_i + \frac{1}{2}V$ dir.

Gerçekten V simetrik olduğundan $-V = V$ olup $z \in \left(x_i + \frac{1}{4}V\right) \cap \left(x_1 + \frac{1}{4}V\right)$ için

$$\left.\begin{array}{l} z \in x_i + \frac{1}{4}V \Rightarrow z - x_i \in \frac{1}{4}V \\ z \in x_1 + \frac{1}{4}V \Rightarrow x_1 - z \in \frac{1}{4}V \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \in x_i + \frac{1}{2}V$$

dır. Bu durumda $i = 1,2,...,n$ $için$ $\lambda_i \geq 0,\ x_i \in A$ ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olmak üzere her bir $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in coA$ için $x_1 \in x + \frac{1}{2}V$ dir. Her iki tarafa da $\frac{1}{2}V$ eklenirse her bir $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in coA$ için $x_1 + \frac{1}{2}V \in x + V$ olup $x_1 + \frac{1}{2}V \subset \bigcap_{x \in coA} (x + V)$ dır. Böylece $T(coA) \subset Fx_1 \subset F(A)$ olup F, T ye göre genelleştirilmiş KKM dönüşümüdür.

$T \in KKM(X,X)$ ve F kompakt değerli olduğundan $\{F(x) : x \in X\}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir ve $\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \varnothing$ dır. $x_0 \in \bigcap_{x \in X} F(x)$ seçelim.

$$x_0 \in \bigcap_{x \in X} F(x) = X_1 - \left(\bigcup_{x \in X} \left(x + \frac{1}{4}V \right) \right) \Rightarrow x_0 \notin x_0 + \frac{1}{4}V$$

olup bu da bir çelişkidir. Böylece $(x_V + V) \cap T(x_V) \neq \varnothing$ olacak şekilde $x_V \in X$ vardır.

4.10. Teorem

X, E lokal konveks uzayının bir konveks altkümesi ve $T \in KKM(X,X)$ olsun. Eğer T kompakt ve kapalı ise T, X içinde sabit noktaya sahiptir [12].

İspat

$\forall \alpha \in \Lambda$ için V_α simetrik, açık ve konveks olacak şekilde $\{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, E nin lokal tabanı olsun. Lemma 4.9 dan dolayı, $\forall \alpha \in \Lambda$ için $(x_\alpha + V) \cap T(x_\alpha) \neq \varnothing$ olacak şekilde $x_\alpha \in X$ vardır. Bu durumda $\forall \alpha \in \Lambda$ için $y_\alpha \in x_\alpha + V_\alpha$ olacak şekilde $y_\alpha \in Tx_\alpha$ vardır. T kompakt olduğundan yani $\overline{T(X)}$, X in kompakt alt kümesi olmak üzere bazı $y \in Y$ ler için $y_\alpha \to y$ dir. $0 \in V_\alpha$ olduğundan $x_\alpha \to y$ dir ve T nin kapalılığından $y \in T(y)$ dir. Gerçekten; $y_\alpha \in Tx_\alpha$ ise $(x_\alpha, y_\alpha) \in G_r(T)$ dir. $x_\alpha \to y$ *ve* $y_\alpha \to y$ olduğundan T nin kapalılığından $(y,y) \in G_r(T)$ yani $y \in T(y)$ dir.

4.11. Teorem *(Fan-Browder sabit nokta teoremi*)

E, X vektör uzayının konveks altkümesi ve $G : E \to 2^E$ çoğul değerli dönüşüm olsun. Eğer G dönüşümü,

a. $co\{y_i : 1 \le i \le n\}$ kümesi Öklid topolojisi ile donatılmak üzere;

$co\{y_i : 1 \le i \le n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G^{-1}(y_i)$ ve $G^{-1}(y_i) \cap co\{y_i : 1 \le i \le n\}$ kümeleri, $co\{y_i : 1 \le i \le n\}$ de açık olacak şekilde $\{y_i : 1 \le i \le n\} \subseteq E$ var

b. $\forall y \in E$ için $G(y)$ konveks

şartlarını sağlıyorsa G dönüşümü sabit noktaya sahiptir [19].

İspat

$F = \{y_i : 1 \le i \le n\}$ ve $i = 1,2,...,n$ için

$$K(y_i) = coF - \left(G^{-1}(y_i) \cap coF\right) \tag{4.4}$$

olacak şekilde $K : F \to 2^{coF}$ bir dönüşüm olsun. Varsayalım ki $i = 1,2,...,n$ için $K(y_i) \ne \varnothing$ dır. (Aksi taktirde bazı i ler için $K(y_i) = \varnothing$ olur ve buradan $coF \subseteq G^{-1}(y_i)$ elde edilir. Böylece y_i, G nin sabit noktası sonucunu elde ederiz.)

$$
\begin{aligned}
K\left(y_i\right)=\varnothing &\Rightarrow coF-\left(G^{-1}\left(y_i\right)\cap coF\right)=\varnothing\\
&\Rightarrow G^{-1}\left(y_i\right)\cap coF=coF\\
&\Rightarrow coF\subseteq G^{-1}\left(y_i\right)
\end{aligned}
$$

Eş 4.4 ün her iki tarafının da $i=1,2,...,n$ için sonlu arakesitini alalım.

$$
\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{n}K\left(y_i\right)&=\bigcap_{i=1}^{n}\left[coF-\left(G^{-1}\left(y_i\right)\cap coF\right)\right]\\
&=coF-\bigcup_{i=1}^{n}\left[G^{-1}\left(y_i\right)\cap coF\right]
\end{aligned}
$$

$$
\bigcap_{i=1}^{n}K\left(y_i\right)=coF-\left[coF\cap\bigcup_{i=1}^{n}G^{-1}\left(y_i\right)\right]\qquad(4.5)
$$

a) hipotezinden $coF\subseteq G^{-1}\left(y_i\right)$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n}K\left(y_i\right)=coF-coF=\varnothing$ dir. Yine (a) hipotezinden $G^{-1}\left(y_i\right)\cap coF$, coF içinde Öklid topolojisine göre açık olduğundan $i=1,2,...,n$ için $K\left(y_i\right)$ kapalıdır. Bu durumda $i=1,2,...,n$ için K, $F=\left\{y_i:1\le i\le n\right\}$ üzerinde sonlu arakesit özelliğine sahip olmadığından K, $F=\left\{y_i:1\le i\le n\right\}$ üzerinde KKM dönüşümü olamaz.

K, $F=\left\{y_i:1\le i\le n\right\}$ üzerinde KKM dönüşümü olmadığından $co\left\{y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k}\right\}\not\subset\bigcup_{j=1}^{k}K\left(y_{i_j}\right)$ olacak şekilde $\left\{y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k}\right\}\in\left\langle F\right\rangle$ vardır. Yani, $j=1,2,...,k$ için $y\notin K\left(y_{i_j}\right)$ olacak şekilde $y\in co\left\{y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k}\right\}$ vardır. $j=1,2,...,k$ için $y\notin K\left(y_{i_j}\right)\Rightarrow y\in G^{-1}\left(y_{i_j}\right)\cap coF\Rightarrow y\in G^{-1}\left(y_{i_j}\right)$ dir.

Sonuç olarak $j=1,2,...,k$ için $y_{i_j}\in G(y)$ dir. (b) hipotezinden $\forall y\in E$ için $G(y)$ konveks olduğundan $y=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j y_{i_j}$, $\lambda_j\geq 0$ ve $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1$ olmak üzere $y\in G(y)$ dir. Bu da ispatı tamamlar.■

4.12. *Örnek*

$E=(0,1)$ ve $T:E\to 2^E$ dönüşümü $T(x)=\begin{cases}\left(x,x+\frac{1}{2}\right) & ;x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\\ \left(\frac{1}{3},x+\frac{1}{4}\right) & ;x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\\ \left(x-\frac{1}{2},x\right) & ;x\in\left(\frac{3}{4},1\right)\end{cases}$ şeklinde tanımlansın.

$\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojisine göre açık aralıklar kompakt olmadığından $E=(0,1)$ kompakt değildir. $\forall x\in E$ için $T(x)$ konvekstir.

Gösterelim ki $\forall x\in E$ için $\lambda,\beta\geq 0,$ $\lambda+\beta=1$, $a,b\in T(x)$ olmak üzere $\lambda a+\beta b\in T(x)$ dir.

- $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ için $a=\left(x,x+\frac{1}{2}\right)$, $b=\left(x,x+\frac{1}{2}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\lambda a+\beta b&=\lambda\left(x,x+\frac{1}{2}\right)+\beta\left(x,x+\frac{1}{2}\right)\\&=\left(\lambda x+\beta x,\lambda x+\beta x+\frac{\lambda+\beta}{2}\right)\\&=\left(x,x+\frac{1}{2}\right)\in T(x)\end{aligned}$$

- $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ için $a=\left(\frac{1}{3},x+\frac{1}{4}\right)$, $b=\left(\frac{1}{3},x+\frac{1}{4}\right)$ olmak üzere

$$\lambda a+\beta b=\lambda\left(\frac{1}{3},x+\frac{1}{4}\right)+\beta\left(\frac{1}{3},x+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{\lambda+\beta}{3},\lambda x+\beta x+\frac{\lambda+\beta}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3},x+\frac{1}{4}\right)\in T(x)$$

- $x\in\left(\frac{3}{4},1\right)$ için $a=\left(x-\frac{1}{2},x\right)$, $b=\left(x-\frac{1}{2},x\right)$ olmak üzere

$$\lambda a+\beta b=\lambda\left(x-\frac{1}{2},x\right)+\beta\left(x-\frac{1}{2},x\right)$$
$$=\left(\lambda x+\beta x-\frac{\lambda+\beta}{2},\lambda x+\beta x\right)$$
$$=\left(x-\frac{1}{2},x\right)\in T(x)$$

Yani $\forall x\in E$ için $T(x)$ konvekstir.

$y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{3}{4}$ seçelim bu durumda $F=\{y_i : i=1,2\}\subseteq(0,1)$ dir.

$T^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $T^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ ters görüntülerini bulalım.

$$\frac{1}{2}\in T(x)\Rightarrow x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\ \textit{olmak üzere}\ x<\frac{1}{2}<x+\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\ \textit{olmak üzere}\ \frac{1}{2}<x+\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{1}{4}<x\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$$
$$\Rightarrow x\in\left(\frac{3}{4},1\right)\ \textit{olmak üzere}\ x-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}<x\Rightarrow \frac{1}{2}<x<1\Rightarrow x\in\left(\frac{3}{4},1\right)$$

olup böylece $T^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\cup\left(\frac{3}{4},1\right)=(0,1)$ dir.

$$\frac{3}{4} \in T(x) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ } olmak \text{ } üzere \text{ } x < \frac{3}{4} < x + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \text{ } olmak \text{ } üzere \text{ } \frac{3}{4} < x + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < x \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$$

$$\Rightarrow x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \text{ } olmak \text{ } üzere \text{ } x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < x \Rightarrow \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4} \Rightarrow x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$$

olup böylece $T^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right) = \left(\frac{1}{4}, 1\right) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir.

$$coF = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \subseteq T^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cup T^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = (0,1)$$

$$T^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cap \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] = (0,1) \cap \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$$

$$T^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \cap \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] = \left[\left(\frac{1}{4}, 1\right) - \left\{\frac{1}{2}\right\}\right] \cap \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$$

olmak üzere

$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \cap \left(\frac{1}{4}, 1\right) \ldots\ldots \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, $\mathbb{R}$ de açık

$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \cap \left(\frac{1}{2}, 1\right) \ldots\ldots \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\mathbb{R}$ de açık

olduğundan $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ ve $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ içinde alt uzay topolojisine göre açıktır. T dönüşümü Teorem 4.11. Fan-Browder sabit nokta teoreminin tüm koşullarını sağladığından T nin bir sabit noktası vardır.

4.13. Sonuç

C, E topolojik vektör uzayının boştan farklı bir konveks altkümesi ve V, sıfırı içeren açık konveks bir küme olsun. $T:C\to E$ sürekli bir dönüşüm ve $i=1,2,...,n$ için $y_i\in C$ olmak üzere $T(C)\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{y_i+V\}$ ise $Tx_0\in x_0+V$ olacak şekilde $x_0\in C$ vardır [19].

İspat

$G:C\to 2^C$ dönüşümünü $G(x)=\{y\in C: Tx-y\in V\}$ şeklinde tanımlayalım. V konveks olduğundan $\forall x\in C$ için $G(x)$ konvekstir. Gösterelim ki $\lambda,\beta\geq 0,\ \lambda+\beta=1\ u,v\in G(x)$ *olmak üzere* $\lambda u+\beta v\in G(x)$ dir.
$u\in G(x)\Rightarrow Tx-u\in V$ ve $v\in G(x)\Rightarrow Tx-v\in V$ olmak üzere

$$\lambda(Tx-u)+\beta(Tx-v)\in\lambda V+\beta V=V\text{......}(V\ \textit{konveks olduğundan})$$
$$Tx-(\lambda u+\beta v)\in V$$

$\lambda u+\beta v\in G(x)$ olup $G(x)$ konvekstir.

- $G^{-1}(y_i)=\{x\in C: G(x)=y_i\}$
- $G(x)=\{y\in C: Tx-y\in V\}=\{y_i\}$

$$\Rightarrow Tx-y_i\in V$$
$$\Rightarrow Tx\in y_i+V$$
$$\Rightarrow x\in T^{-1}(y_i+V)$$

olup $G^{-1}(y_i)=T^{-1}(y_i+V)$, T sürekli ve y_i+V açık küme olduğundan $T^{-1}(y_i+V)$ açıktır. Bu durumda $G^{-1}(y_i)$ de açıktır.

$$C \subseteq T^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(y_i+V)\right)=\bigcup_{i=1}^{n}T^{-1}(y_i+V)=\bigcup_{i=1}^{n}G^{-1}(y_i)\subseteq C$$

olup $\bigcup_{i=1}^{n}G^{-1}(y_i)=C$ dir. $y_1,y_2,...,y_n \in C$ olmak üzere $co\{y_1,y_2,...,y_n\}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G^{-1}(y_i)=C$ olup G^{-1} dönüşümü bir KKM dönüşümüdür. Sonuç olarak Teorem 4.11. Fan-Browder sabit nokta teoreminin tüm koşulları sağlandığından $x_0 \in G(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in C$ vardır. Yani,

$$x_0 \in G(x_0) \Rightarrow Tx_0 - x_0 \in V \Rightarrow Tx_0 \in x_0 + V$$

olacak şekilde $x_0 \in C$ vardır.

4.14. Sonuç

C, E lokal konveks uzayının boştan farklı bir konveks altkümesi ve K, E nin konveks kompakt bir altkümesi olsun. Eğer $T: C \to E$ sürekli bir dönüşüm ve $i=1,2,...,n$ için $y_i \in C$ olmak üzere $T(C)\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{y_i+K\}$ ise $Tx_0 \in x_0 + K$ olacak şekilde $x_0 \in C$ vardır [19].

4.1. Çakışma Teoremi ve Minimaks Teoremi

4.1.1. Teorem (*Ky Fan çakışma teoremi*)

X ve Y, sırasıyla E ve F topolojik vektör uzaylarının konveks altkümeleri ve $A,B: X \to 2^Y$ çoğul değerli iki dönüşüm olsun. A,B dönüşümleri

a. $i=1,2,...,n$ için $Ax_i \subset Y$ açık olacak şekilde $x_i \in X$ vardır öyleki $Y=\bigcup_{i=1}^{n} Ax_i$ ve $\forall\, y \in Y$ için $A^{-1}y$ konveks

b. $j=1,2,...,m$ için $B^{-1}y_j \subset X$ açık olacak şekilde $y_j \in Y$ vardır öyleki $X=\bigcup_{j=1}^{m} B^{-1}y_j$ ve $\forall\, x \in X$ için Bx konveks

şartlarını sağlıyorlarsa $Ax_0 \cap Bx_0 \neq \varnothing$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır [19].

İspat

$\forall (x,y) \in X \times Y$ için $K(x,y) = X \times Y - \left(\left(B^{-1}y\right) \times (Ax)\right)$ şeklinde tanımlanan $K: X \times Y \to 2^{X\times Y}$ dönüşümünü tanımlayalım.

Hipotezden dolayı $X=\bigcup_{j=1}^{m} B^{-1}y_j$ ve $Y=\bigcup_{i=1}^{n} Ax_i$ olmak üzere $X \times Y = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\left(\left(B^{-1}y_j\right)\times(Ax_i)\right)$ dır.

Bu durumda

$$K(x,y) = \left[\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\left(\left(B^{-1}y_j\right)\times(Ax_i)\right)\right] - \left(\left(B^{-1}y\right)\times(Ax)\right) \tag{4.6}$$

dir. $(x_i, y_j) \in X \times Y$, $i=1,2,...,n$ ve $j=1,2,...,m$ için Eş 4.6 nın her iki tarafının da sonlu arakesiti alınırsa

$$\bigcap_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m} K(x_i,y_j) = \bigcap_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}\left[\left[\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\left(\left(B^{-1}y_j\right)\times(Ax_i)\right)\right] - \left(\left(B^{-1}y_j\right)\times(Ax_i)\right)\right] = \varnothing$$

dır . $i=1,2,...,n$ için Ax_i açık ve $j=1,2,...,m$ için $B^{-1}y_j$ açık olduğundan $K(x_i,y_j)$ kapalıdır. Böylece K dönüşümü $\{x_i:1\le i\le n\}\times\{y_j:1\le j\le m\}$ üzerinde KKM dönüşümü olamaz. Çünkü K, $\{x_i:1\le i\le n\}\times\{y_j:1\le j\le m\}$ üzerinde kapalı değerli iken sonlu arakesit özelliğine sahip değildir.

K, KKM dönüşümü olmadığından $x_0\in co\left(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_r}\right), y_0\in co\left(y_{j_1},y_{j_2},...,y_{j_k}\right)$ ve $(x_0,y_0)\notin\bigcup_{s=1}^{r}\bigcup_{t=1}^{k}K\left(x_{i_s},y_{j_t}\right)$ olacak şekilde $x_0,x_{i_1},...,x_{i_r}\in X$ ve $y_0,y_{j_1},...,y_{j_k}\in Y$ vardır. $s=1,2,...,r$ ve $t=1,2,...,k$ için $\Rightarrow(x_0,y_0)\notin\bigcup_{s=1}^{r}\bigcup_{t=1}^{k}K\left(x_{i_s},y_{j_t}\right)\Rightarrow(x_0,y_0)\in\left(B^{-1}y_{j_t}\times Ax_{i_s}\right)$ dir. $s=1,2,...,r$ ve $t=1,2,...,k$ için $x_0\in B^{-1}y_{j_t}$ ve $y_0\in Ax_{i_s}$ olduğundan $y_{j_t}\in Bx_0$ ve $x_{i_s}\in A^{-1}y_0$ dir. Hipotezden $A^{-1}y$ ve Bx konveks olduğundan $x_0\in A^{-1}y_0$ ve $y_0\in Bx_0$ dır. Böylece $y_0\in Ax_0\cap Bx_0$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

4.1.2. Tanım

X bir topolojik uzay ve $f:X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

a. Eğer $x_t\to x_0$ olacak şekildeki her $(x_t)_{t\in T}$ ağı, $t'\ge t$ için $f(x_{t'})\le f(x_t)$ iken $f(x_0)\le\lim_t f(x_t)$ oluyorsa f ye x_0 noktasında yukarıdan alt yarı sürekli denir.
b. Eğer $x_t\to x_0$ olacak şekildeki her $(x_t)_{t\in T}$ ağı, $t'\ge t$ için $f(x_{t'})\ge f(x_t)$ iken $f(x_0)\le\lim_t f(x_t)$ oluyorsa f ye x_0 noktasında aşağıdan üst yarı sürekli denir [19].

4.1.3. Not

Her üst (alt) yarı sürekli fonksiyon aşağıdan üst (yukarıdan alt) yarı süreklidir. Ama tersi doğru değildir.

4.1.4. *Örnek*

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1 & ;x\geq 0 \\ x & ;x<0 \end{cases}$ olsun.

$\mathbb{R}$ metrik uzay olduğundan $f(x_1)\geq f(x_2)\geq\ldots\geq f(x_n)\geq\ldots$ iken $x_n\to 0$ olacak şekilde (x_n) dizisi seçebiliriz. $f(x)$ in tanımlanışından $n\geq 1$ için $x_n\geq 0$ dır.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+1=\lim_{n\to\infty} x_n+\lim_{n\to\infty} 1=1=f(0)$$

olduğundan f, 0 da yukarıdan alt yarı süreklidir.

Eğer $x_n=\dfrac{-1}{n}$ alınırsa $n\geq 1$ için $x_n\leq 0$ dır. $x_n\to 0$ olup

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_n=0<f(0)=1$$

olup f, 0 da alt yarı sürekli değildir.

4.1.5. Lemma

X kompakt topolojik uzay ve $f:X\to\mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun.

a. Eğer f yukarıdan alt yarı sürekli ise $f(x_0)=\min_{x\in X} f(x)$ olacak şekilde $x_0\in X$ vardır.

b. Eğer f aşağıdan üst yarı sürekli ise $f(x_0) = \max_{x \in X} f(x)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır [19].

İspat

a. f, X üzerinde yukarıdan alt yarı sürekli ve $C \subseteq X$ kompakt bir altküme olsun. Bu durumda $t' \geq t$ için $f(y_{t'}) \leq f(y_t)$ ve $f(y_t) \to \inf_{y \in C} f(y)$ olacak şekilde $(y_t) \subseteq C$ ağı vardır. C kompakt olduğundan genelliği bozmadan $y_t \to y_0$ kabul edelim. $f(y)$ yukarıdan alt yarı sürekli olduğundan $f(y_0) \leq \lim_t f(y_t)$ dır. $f(y_0) \leq \lim_t f(y_t)$ ve $y_t \to y_0$ ise $f(y_t) \to f(y_0) = \inf_{y \in C} f(y)$ dır.

b. f, X üzerinde aşağıdan üst yarı sürekli ve $C \subseteq X$ kompakt bir altküme olsun. Bu durumda $t' \geq t$ için $f(y_{t'}) \geq f(y_t)$ ve $f(y_t) \to \sup_{y \in C} f(y)$ olacak şekilde $(y_t) \subseteq C$ ağı vardır. C kompakt olduğundan genelliği bozmadan $y_t \to y_0$ kabul edelim. $f(y)$ aşağıdan üst yarı sürekli olduğundan $f(y_0) \leq \lim_t f(y_t)$ dır. $f(y_0) \leq \lim_t f(y_t)$ ve $y_t \to y_0$ ise $f(y_t) \to f(y_0) = \sup_{y \in C} f(y)$ dır.

4.1.6. Teorem (*Von Neumann minimaks prensibi*)

X ve Y sırasıyla E ve F topolojik vektör uzaylarının boştan farklı kompakt konveks altkümeleri olsun. Eğer $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

a. Her bir $x \in X$ için $y \to f(x,y)$ yukarıdan alt yarı sürekli ve quasi-konveks ise yani her $x \in X$ için $\{y : f(x,y) < r\}$ konveks

b. Her bir $y \in Y$ için $x \to f(x,y)$ aşağıdan üst yarı sürekli ve quasi-konkav ise yani her $y \in Y$ için $\{x : f(x,y) > r\}$ konveks

c. $r \in \mathbb{R}$ ve $i = 1,2,...,n$ için $A_i = \{y : f(x_i, y) > r\}$ açık ve $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ olacak şekilde x_i var

d. $r \in \mathbb{R}$ ve $j = 1,2,...,m$ için $B_j = \{x : f(x, y_j) < r\}$ açık ve $X = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ olacak şekilde y_j var

şarlarını sağlıyorsa $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y)$ dir [19].

İspat

a) , b) ve Lemma 4.1.5. den dolayı $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y)$ ve $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y)$ vardır. Açıkça görülür ki $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y) \le \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y)$ dır.

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y) \tag{4.7}$$

olduğunu göstermek için varsayalım ki eşitlik sağlanmasın. Bu durumda

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y) < r < \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y)$$

olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R}$ vardır. $x \in X$ için $Ax = \{y : f(x,y) > r\}$ ve $Bx = \{y : f(x,y) < r\}$ olacak şekilde $A, B : X \to 2^Y$ dönüşümlerini tanımlayalım.

c) ve d) den $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Ax_i$ ve $X = \bigcup_{j=1}^{m} B^{-1} y_j$ olur.

$\forall\, x \in X$ için Bx ve $\forall\, y \in Y$ için $A^{-1}y$ konveks olduğundan Ky Fan çakışma teoreminden $y_0 \in Ax_0 \cap Bx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $y_0 \in Y$ vardır. Bu durumda

$$\left.\begin{array}{l} y_0 \in Ax_0 \Rightarrow f\left(x_0, y_0\right) > r \\ y_0 \in Bx_0 \Rightarrow f\left(x_0, y_0\right) < r \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(x_0, y_0\right) < r < f\left(x_0, y_0\right)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak Eş 4.7 doğrudur. Bu da ispatı tamamlar.

5. SOYUT KONVEKS VE KKM UZAYLARINDA KKM DÖNÜŞÜMÜ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde soyut konveks uzaylar ve KKM uzaylarını tanıtıp bu uzaylar üzerindeki KKM dönüşümleri için bazı denklikleri vereceğiz [53].

5.1. Soyut Konveks Uzaylar ve KKM Uzaylar

5.1.1. Tanım

$(E, D; \Gamma)$ soyut konveks uzayında E topolojik uzay, $D \neq \varnothing$ bir küme ve $\Gamma : \langle D \rangle \to 2^E$ ise $A \in \langle D \rangle$ için $\Gamma_A = \Gamma(A)$ boştan farklı olacak şekilde çoğul değerli bir dönüşümdür.
Her $D' \subset D$ için D' nün $\Gamma - convex\ zarfi$ nı

$$co_\Gamma D' = \bigcup \{ \Gamma_A : A \in \langle D' \rangle \} \subset E$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer her $N \in \langle D' \rangle$ için $\Gamma_N \subset X$ yani $co_\Gamma D' \subset X$ oluyorsa $X \subset E$ kümesine D' ne göre $(E, D; \Gamma)$ nin $\Gamma - convex$ altkümesi denir. Eğer $D \subset E$ ise $(E, D; \Gamma)$ uzayını $(E \supset D; \Gamma)$, $E = D$ ise $(E; \Gamma) = (E, E; \Gamma)$ şeklinde göstereceğiz. Eğer $co_\Gamma (X \cap D) \subset X$ ise $X \subset E$ altkümesine $\Gamma - convex$ denir. Özel olarak $D' = X \cap D$ alınırsa $X \subset E$ altkümesine D' ne göre $\Gamma - convex$ denir [53].

5.1.2. *Örnek*

Sıfırın $\mathfrak{U}$ komşuluklar sistemi ile E topolojik vektör uzayı olsun. Eğer her $V \in \mathfrak{U}$ ve her sonlu $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$ altkümesi için

- $coB \subset X$
- $i = 1, 2, ..., n$ için $y_i - x_i \in V$

olacak şekilde $B=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ kümesi varsa $X\subset E$ altkümesine *hemen hemen konveks küme* denir. Her bir $A\in\langle X\rangle$ için $\Gamma_A=B$ seçilirse $(X;\Gamma)$ soyut konveks uzaydır.

5.1.3. *Örnek*

Orijinal KKM teoremindeki Δ_n standart n - simpleks V, $\{e_i\}_{i=0}^n$ köşelerinin kümesi ve $co:\langle V\rangle\to 2^{\Delta_n}$ konveks zarf operatörü ile $(\Delta_n,V;co)$ soyut konveks uzaydır.

5.1.4. Tanım

$(E,D;\Gamma)$ soyut konveks uzay olsun. Eğer $G:D\to 2^E$ dönüşümü $\forall\ A\in\langle D\rangle$ için $\Gamma_A\subset G(A)=\bigcup_{y\in A}G(y)$ ise G ye *KKM dönüşümü* denir [53].

5.1.5. Tanım

$(E,D;\Gamma)$ soyut konveks uzayda *kısmi KKM prensibi* ifadesi, her kapalı değerli $G:D\to 2^E$ KKM dönüşümü için $\{G(y)\}_{y\in D}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olmasıdır. Eğer aynı şart aynı zamanda açık değerli KKM dönüşümleri içinde sağlanıyorsa bu ifadeye *KKM prensibi* denir.

Eğer soyut konveks uzay KKM prensibini sağlıyorsa bu uzaya *KKM UZAYI* denir [53].

5.1.6. Tanım

$(X,D;\Gamma)$ soyut konveks uzayında

a. X topolojik uzay

b. $D\neq\varnothing$ bir küme

c. Kardinalitesi $n+1$ olan $A \in \langle D \rangle$ için $\Gamma : \langle D \rangle \to X$ dönüşümü olmak üzere $J \in \langle A \rangle$ için $\phi_A(\Delta_J) \subset \Gamma(J)$ olacak şekilde $\phi_A : \Delta_n \to \Gamma(A)$ sürekli dönüşümü varsa bu $(X, D; \Gamma)$ uzayına *genelleştirilmiş konveks uzay* veya *G-konveks uzay* denir [53].

Burada Δ_n, $\{e_i\}_{i=0}^{n}$ köşeleri ile standart n- simpleks ve Δ_J, $J \in \langle A \rangle$ için Δ_n nin yüzeyine karşılıktır. Eğer $A = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ ve $J = \{a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_k}\} \subset A$ ise $\Delta_J = co\{e_{i_0}, e_{i_1}, ..., e_{i_k}\}$ dır.

5.1.7. *Örnek*

a. Her $G-konveks$ uzay KKM uzaydır [54].

b. $(X, \leq)$ bağlantılı lineer sıralı uzayı KKM uzayıdır [55].

$$\begin{aligned} &Simpleks \Rightarrow t.v.s\ nin\ konveks\ altkümesi \Leftrightarrow Lassonde\ tip\ konveks\ uzay \\ &\Rightarrow H-uzay \Rightarrow G-konveks\ uzay \Leftrightarrow \phi_A-uzay \Rightarrow KKM\ uzay \\ &\Rightarrow Kısmi\ KKM\ prensibini\ sağlayan\ uzay \\ &\Rightarrow Soyut\ konveks\ uzay \end{aligned}$$

0. *KKM Prensibi*

Her kapalı değerli (açık değerli) $G:D\to 2^E$ KKM dönüşümü için $\{G(y)\}_{y\in D}$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahiptir.

I. *Fan eşleştirme özelliği*

$S:D\to 2^E$ dönüşümü

(1-1) Her bir $z\in D$ için $S(z)$ açık (kapalı)

(1-2) Bazı $M\in\langle D\rangle$ ler için $E=\bigcup_{z\in M} S(z)$

şartlarını sağlıyorsa

$$\Gamma_N\cap\bigcap_{z\in N} S(z)\neq\varnothing$$

olacak şekilde $N\in\langle M\rangle$ vardır.

II. *Başka bir sonlu arakesit özelliği*

$S:D\to 2^E$, $T:E\to 2^E$ dönüşümleri

(2-1) S kapalı (açık) değere sahip

(2-2) Her bir $y\in E$ için $co_\Gamma\left(D-S^-(y)\right)\subset E-T^-(y)$

(2-3) Her bir $x\in E$ için $x\in T(x)$

şartlarını sağlıyorsa $\{S(z)\}_{z\in D}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir.

III. *Geometrik özellik veya section (kısım, kesit) özelliği*

$A \subset D \times E$, $B \subset E \times E$ dönüşümleri

(3-1) Her bir $z \in D$ için $\{y \in E : (z, y) \in A\}$ açık (kapalı)

(3-2) Her bir $y \in E$ için $co_\Gamma \{z \in D : (z, y) \notin A\} \subset \{x \in E : (x, y) \notin B\}$

(3-3) Her bir $x \in E$ için $(x, x) \in B$

şartlarını sağlıyorsa her bir $N \in \langle D \rangle$ için $N \times \{x_N\} \subset A$ olacak şekilde $x_N \in E$ vardır.

IV. *Başka bir geometrik özellik*

Her $A \subset D \times E$, $B \subset E \times E$ kümeleri

(4-1) Her bir $z \in D$ için $\{y \in E : (z, y) \in A\}$ açık (kapalı)

(4-2) Her bir $y \in E$ için $co_\Gamma \{z \in D : (z, y) \in A\} \subset \{x \in E : (x, y) \in B\}$

(4-3) Her $y \in E$ ve bazı $z \in M$ için $(z, y) \in A$ olacak şekilde $M \in \langle D \rangle$ var

şartlarını sağlıyorsa $(x_0, x_0) \in B$ olacak şekilde $x_0 \in E$ vardır.

V. *Fan- Browder sabit nokta özelliği*

$S : E \to 2^D$, $T : E \to 2^E$ dönüşümleri

(5-1) Her bir $z \in D$ için $S^-(z)$ açık (kapalı)

(5-2) Her bir $x \in E$ için $co_\Gamma S(x) \subset T(x)$

(5-3) Bazı $M \in \langle D \rangle$ için $E = \bigcup_{z \in M} S^-(z)$

şartlarını sağlıyorsa T dönüşümü bir $x_0 \in E$ sabit noktasına sahiptir yani $x_0 \in T(x_0)$ dır.

5.1.8. Tanım

$(E, D; \Gamma)$ soyut konveks uzay ve X topolojik uzay olsun. Eğer

(1) Her bir $x \in X$ için $co_{\Gamma} S(x) \subset T(x)$

(2) Her bir $z \in D$ için $S^{-}(z)$ açık

şartlarını sağlayacak şekilde bir $S : X \to 2^{D}$ dönüşümü varsa $T : X \to 2^{E}$ dönüşümüne $\phi - dönüşümü$ veya $Fan - Browder\ dönüşümü$ denir [53].

VI. *Maksimal elemanın varlığı*

$S : E \to 2^{D}$, $T : E \to 2^{E}$ dönüşümleri

(6-1) Her bir $z \in D$ için $S^{-}(z)$ açık (kapalı)

(6-2) Her bir $x \in E$ için $co_{\Gamma} S(x) \subset T(x)$

(6-3) Her bir $x \in E$ için $x \notin T(x)$

şartlarını sağlıyorsa $S(x) = \varnothing$ olacak şekilde $x \in E$ vardır.

VII. *Analitik formülasyon*

(7-1) Her bir $N \in \langle D \rangle$ ve $y \in \Gamma_{N}$ için $\phi(z, y) \in A$ olacak şekilde $z \in N$ var

(7-2) Her bir $z \in D$ için $\{ y \in E : \phi(z, y) \in A \}$ kümesi açık (kapalı)

olacak şekilde $A \subset C$ kümeleri ve $\phi : D \to C$ fonksiyonu olsun. Bu durumda her bir $N \in \langle D \rangle$ ve her $z \in N$ için $\phi(z, y_{N}) \in A$ olacak şekilde $y_{N} \in E$ vardır.

VIII. *Minimaks eşitsizliği*

(8-1) Her bir $N \in \langle D \rangle$ ve $y \in \Gamma_N$ için $\min\{\phi(z,y) : z \in N\} \leq \gamma$

(8-2) Her bir $z \in D$ için $\{y \in E : \phi(z,y) \leq \gamma\}$ açık (kapalı)

olacak şekilde $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ ve $\phi : D \times E \to \overline{\mathbb{R}}$ genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her bir $N \in \langle D \rangle$ için

i. Her $z \in N$ için $\phi(z, y_N) \leq \gamma$ olacak şekilde $y_N \in E$ var

ii. Eğer $E = D$ ve $\gamma = \sup\{\phi(x,x) : x \in E\}$ ise $\inf_{y \in E} \max_{z \in N} \phi(z,y) \leq \sup_{x \in E} \phi(x,x)$ minimaks eşitsizliği vardır.

IX. *Analitik alternatif*

$A, B \subset C$ kümeler ve $f : D \times E \to C$, $g : E \times E \to C$ birer fonksiyon olsun. Eğer

(9-1) Her bir $y \in E$ için $co_\Gamma\{z \in D : f(z,y) \in A\} \subset \{x \in E : g(x,y) \in B\}$

(9-2) Her bir $z \in D$ için $\{y \in E : f(z,y) \in A\}$ kümesi açık (kapalı)

ise

a) Her bir $N \in \langle D \rangle$ ve her $z \in N$ için $f(z, y_N) \notin A$ olacak şekilde $y_N \in E$ vardır

veya

b) $g(\hat{x}, \hat{x}) \in B$ olacak şekilde $\hat{x} \in E$ vardır

şartlarının ikisinden biri sağlanır.

X. *Analitik alternatif*

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f : D \times E \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : E \times E \to \overline{\mathbb{R}}$ genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar olsun. Eğer

(10-1) Her bir $y \in E$ için $co_{\Gamma}\{z \in D : f(z, y) > \alpha\} \subset \{x \in E : g(x, y) > \beta\}$

(10-2) Her bir $z \in D$ için $\{y \in E : f(z, y) > \alpha\}$ kümesi açık (kapalı)

ise

a) Her bir $N \in \langle D \rangle$ ve her $z \in N$ için $f(z, y_N) \leq \alpha$ olacak şekilde $y_N \in E$ vardır

veya

b) $g(\hat{x}, \hat{x}) > \beta$ olacak şekilde $\hat{x} \in E$ vardır

şartlarının ikisinden biri sağlanır.

XI. *Minimaks eşitsizliği*

(X) in hipotezi altında eğer $\alpha = \beta = \sup\{g(x, x) : x \in E\}$ ise her bir $N \in \langle D \rangle$ için

c) Her $z \in N$ için $f(z, y_N) \leq \sup\limits_{x \in E} g(x, x)$ olacak şekilde $y_N \in E$ vardır

d) $\inf\limits_{y \in E} \max\limits_{z \in N} f(z, y) \leq \sup\limits_{x \in E} g(x, x)$ minimaks eşitsizliği vardır.

Şimdi bu özelliklerin birbirlerine karşılıklı denk olduklarını aşağıdaki teoremle inceleyelim.

5.1.9. Teorem *(KKM uzayının karakteristiği)*

$(E, D; \Gamma)$ KKM uzayı için (0) - (XI) durumları birbirlerine karşılıklı denktir [53].

İspat

$(0)\Rightarrow(I)$:

$G:D\to 2^E$ dönüşümünü $z\in D$ için $G(z)=E-S(z)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda G kapalı (açık) değerlidir çünkü (1-1) de her bir $z\in D$ için $S(z)$ kapalı (açık) dır. Varsayalım ki sonuç doğru olmasın yani her $N\in\langle M\rangle$ için $\Gamma_N\cap\bigcap\limits_{z\in N}S(z)\neq\varnothing$ olup $\Gamma_N\subset E-\bigcap_{z\in N}S(z)=\bigcup_{z\in N}(E-S(z))=G(N)$ dır. Bu durumda $G|_M:M\to 2^E$ KKM dönüşümüdür. Kolayca görülür ki $\left(E,M;\Gamma|_{\langle M\rangle}\right)$ (0) KKM prensibini sağlar. (0) den dolayı $\bigcap_{z\in N}G(z)\neq\varnothing$ dır.

Her $z\in N$ için $\hat{y}\in\bigcap_{z\in N}G(z)=\bigcap_{z\in N}(E-S(z))$ olup $\hat{y}\in E,\ \hat{y}\notin S(z)$ dir. (1-2) koşulunda bazı $N\in\langle M\rangle$ için $E=\bigcup_{z\in N}S(z)$ olduğundan $\hat{y}\notin S(z)$ olamaz. Sonuç olarak $\Gamma_N\cap\bigcap\limits_{z\in N}S(z)\neq\varnothing$ dır.

$(I)\Rightarrow(II)$:

Varsayalım ki $\bigcap_{z\in M}S(z)=\varnothing$ olacak şekilde $M\in\langle D\rangle$ var olsun.

$E=E-\bigcap_{z\in M}S(z)=\bigcup_{z\in M}(E-S(z))$ dir. (I) den dolayı $N\in\langle M\rangle$ ve $y_0\in\Gamma_N\cap\bigcap\limits_{z\in N}(E-S(z))\neq\varnothing$ vardır. Bu durumda her $z\in N$ için $y_0\in E-S(z)\Leftrightarrow y_0\notin S(z)\Leftrightarrow z\notin S^{-}(y_0)$ olup $N\subset D-S^{-}(y_0)$ dır. (2.2) den dolayı $y_0\in\Gamma_N\subset co_\Gamma\left(D-S^{-}(y_0)\right)\subset E-T^{-}(y_0)$ dır. Böylece $y_0\notin T^{-}(y_0)$ veya $y_0\notin T(y_0)$ dır. $y_0\notin T(y_0)$ olması (2.3) koşulu ile çelişir. [(2.3) her $x\in E$ için $x\in T(x)$ dir.] Sonuç olarak $\{S(z)\}_{z\in D}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir.

$(II) \Rightarrow (III)$:

Her bir $z \in D$ için $S(z) = \{y \in E : (z,y) \in A\}$ olsun. (3.1) de her bir $z \in D$ için $\{y \in E : (z,y) \in A\}$ açık (kapalı) olduğundan S açık (kapalı) dır. Her bir $x \in E$ için $T(x) = \{y \in E : (x,y) \in B\}$ olsun.

(3.2) de $co_\Gamma \{z \in D : (z,y) \notin A\} \subset \{x \in E : (x,y) \notin B\}$ olup $co_\Gamma \left(D - S^-(y)\right)$ $\subset E - T^-(y)$ dir. Sonuç olarak (3.3) $\Rightarrow$ (2.3) olup (II) ifadesinin tüm koşulları sağlanmıştır. (II) den dolayı her bir $N \in \langle D \rangle$ için

$$\bigcap_{z \in N} S(z) = \bigcap_{z \in N} \{y \in E : (z,y) \in A\} \neq \varnothing$$

dır. Bu durumda her $z \in N$ için $(z, x_N) \in A$ olacak şekilde $x_N \in E$ olup $N \times \{x_N\} \subset A$ dır.

$(III) \Rightarrow (IV)$:

(III) de (A,B) yerine kendi tümleyenleri olan (A^c, B^c) alalım. Bu durumda (4.1) ve (4.2) tarafından (3.1) ve (3.2) sağlanır. (4.3) şıkkı (III) ün sonucunun değili olduğundan her $x \in E$ için $(x,x) \in B^c$ sağlanmaz. Bu durumda $(x_0, x_0) \in B$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in E$ vardır.

$(IV) \Rightarrow (V)$:

A ve B sırasıyla S^{-} ve T^{-} nin grafiği olsun. (5.1)-(5.2) den (4.1)-(4.2) sağlanır. (5.3) de bazı $M \in \langle D \rangle$ için $E = \bigcup_{z \in M} S^{-}(z)$ dır. Bu durumda bazı $z \in M$ ve her $y \in E$ için $y \in S^{-}(z)$ dır. Burada A nın tanımlanışından $(z, y) \in A$ olup (IV) ün tüm şartları sağlandığından dolayı $(x_0, x_0) \in B$ olacak şekilde $x_0 \in E$ vardır. B, T^{-} nin grafiği olduğundan $x_0 \in T^{-}(x_0) \Leftrightarrow x_0 \in T(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in E$ vardır.

$(V) \Rightarrow (VI)$:

Varsayalım ki $z \in D$ için E, sonlu sayıda $S^{-}(z)$ tarafından örtülsün. (V) in tüm şartları sağlandığından $x_0 \in T(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in E$ vardır. Bu ise (6.3) durumunu bozduğundan bu bir çelişkidir. Yani her $x \in E$ için $x \notin \bigcup_{z \in D} S^{-}(z)$ olup her $z \in D$ için $z \notin S(x)$ dır. S nin tanımından dolayı $S(x) = \varnothing$ dır.

$(VI) \Rightarrow (0)$:

$G : D \to 2^{E}$ açık (kapalı) değerli KKM dönüşümü olsun. Varsayalım ki $\{G(z)\}_{z \in D}$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahip olmasın yani $\bigcap_{z \in M} G(z) = \varnothing$ olacak şekilde $M \in \langle D \rangle$ vardır. $z \in D,\ x \in E$ için $S : E \to 2^{D}$ ve $T : E \to 2^{E}$ dönüşümlerini sırasıyla $S^{-}(z) = G^{c}(z) = E - G(z)$, $T(x) = co_{\Gamma} S(x)$ olarak tanımlayalım.

$G : D \to 2^{E}$ açık (kapalı) değerli bir dönüşüm ve S nin tanımından dolayı $S^{-}(z)$ açık (kapalı) olup (6.1) sağlanır. T nin tanımlanışından dolayı ise her bir $x \in E$ için $co_{\Gamma} S(x) = T(x) \subset T(x)$ olup (6.2) sağlanır. $\bigcap_{z \in M} G(z) = \varnothing$ olduğundan $E = \bigcup_{z \in M} G^{c}(z) = \bigcup_{z \in M} S^{-}(z)$ dır ki bu da (VI) nın sonucunu bozar.

Bu yüzden (6.3) sağlanmaz yani $x_0 \in T(x_0) = co_\Gamma S(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in E$ vardır. $x_0 \in \Gamma_N \subset co_\Gamma S(x_0)$ olacak şekilde $N \in \langle S(x_0) \rangle$ vardır. Bu durumda her bir $z \in N$ için $x_0 \in S^-(z)$ veya $x_0 \notin G(z)$ yani $\Gamma_N \not\subset G(N)$ dır. Bu da $G : D \to 2^E$ dönüşümünün KKM olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $(E, D; \Gamma)$, (0) KKM prensibini sağlar.

$(VII) \Rightarrow (VIII)$:

$A = [-\infty, \gamma]$ ve $C = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ olsun.

(VII) den dolayı $\phi : D \times E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

(7.1) Her bir $N \in \langle D \rangle$ için $y \in \Gamma_N$ için $\phi(z, y) \in A = [-\infty, \gamma]$ o.ş $z \in N$ vardır.

(7.2) Her bir $z \in D$ için $\{y \in E : \phi(z, y) \in [-\infty, \gamma]\}$ açık (kapalı)

koşullarını sağlar.

(7.1) den her bir $N \in \langle D \rangle$ ve $y \in \Gamma_N$ için $\min\{\phi(z, y) : z \in N\} \le \gamma$ olup (8.1) sağlanır. (7.2) den her bir $z \in D$ için $\{y \in E : \phi(z, y) \le \gamma\}$ açık (kapalı) olup (8.2) sağlanır. Bu durumda (VII) nin sonucundan her bir $N \in \langle D \rangle$ ve her $z \in N$ için $\phi(z, y_N) \in [-\infty, \gamma]$ olacak şekilde $y_N \in E$ vardır. Yani;

i) Her $z \in N$ için $\phi(z, y_N) \le \gamma$ olacak şekilde $y_N \in E$ vardır.

ii) Eğer $E = D$ ve $\sup\{\phi(x, x) : x \in E\} = \gamma$ olursa

$$\inf_{y \in E} \max_{z \in N} \phi(z, y) \le \sup_{x \in E} \phi(x, x)$$

eşitsizliği sağlanır.

$(VIII) \Rightarrow (0)$:

(VIII) de $\phi : D \times E \to \overline{\mathbb{R}}$ dönüşümünü $(z,y) \in D \times E$ için

$$\phi(z,y) = \begin{cases} 0 & ,y \in G(z) \\ 1 & ,diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. (VIII) de $\gamma = 0$ alalım. G KKM dönüşümü olduğundan $\Gamma_N \subset G(N)$ dir. $N \in \langle D \rangle$ ve $y \in \Gamma_N$ için ϕ fonksiyonunun tanımından dolayı $\min\{\phi(z,y) : z \in N\} = 0 \le \gamma = 0$ olup (8.1) sağlanır. Varsayalım ki $\min\{\phi(z,y) : z \in N\} > 0$ olacak şekilde $N \in \langle D \rangle$ ve $y \in \Gamma_N$ var olsun. Bu durumda her $z \in N$ için $y \notin G(z)$ olup $\Gamma_N \not\subset G(N)$ dır. Bu G dönüşümünün KKM dönüşümü olmasıyla çelişir. (0) da G dönüşümünün tanımından dolayı $\{y \in E : \phi(z,y) \le \gamma\}$ açık (kapalı) dır. Böylece (VIII) nin tüm şartları sağlanır. Sonuç olarak $N \in \langle D \rangle$ ve $z \in N$ için $\phi(z,y_N) = 0 \Leftrightarrow y_N \in G(z)$ olacak şekilde $y_N \in E$ var olup $y_N \in \bigcap\{G(z) : z \in N\}$ dır.

$(VI) \Rightarrow (IX)$:

(VI) da her bir $y \in E$ için $S : E \to 2^D$, $T : E \to 2^E$ dönüşümlerini

$$S(y) = \{z \in D : f(z,y) \in A\} \text{ ve } T(y) = \{x \in E : g(x,y) \in B\}$$

olarak tanımlayalım. (9.1) de her bir $y \in E$ için $co_\Gamma S(y) \subseteq T(y)$ olup (6.2) sağlanır. (9.2) de her bir $z \in D$ için $\{y \in E : f(z,y) \in A\} = S^-(z)$ olup $S^-(z)$ açık (kapalı) olup (6.1) sağlanır. Varsayalım ki (IX) da (b) şartı sağlanmasın bu durumda tüm $x \in E$ için $g(x,x) \notin B \Leftrightarrow x \notin T(x)$ dır ki böylece (6.3) sağlanır. (VI) nın tüm şartları sağlandığından dolayı $S(x)=\varnothing$ olacak şekilde $x\in E$ vardır yani E, $z\in D$ için $S^{-}(z)$ nin sonlu tanesi tarafından örtülemez. Sonuç olarak her bir $N\in\langle D\rangle$ ve her $z\in N$ için $f(z,y_N)\notin A$ olacak şekilde $y_N\in E$ vardır yani (a) sağlanır.

$(IX)\Rightarrow(X)$:

(IX) da $C=\overline{\mathbb{R}}$, $A=(\alpha,\infty]$, $B=(\beta,\infty]$ olsun.

(9.1) de her bir $y\in E$ için

$$
\begin{aligned}
&co_{\Gamma}\{z\in D: f(z,y)\in A\}\subset\{x\in E: g(x,y)\in B\}\\
\Rightarrow\ &co_{\Gamma}\{z\in D: f(z,y)\in(\alpha,\infty]\}\subset\{x\in E: g(x,y)\in(\beta,\infty]\}\\
\Rightarrow\ &co_{\Gamma}\{z\in D: f(z,y)>\alpha\}\subset\{x\in E: g(x,y)>\beta\}
\end{aligned}
$$

olup (10.1) sağlanır. (9.2) de her bir $z\in D$ için

$$
\begin{aligned}
&\{y\in E: f(z,y)\in A\}\\
\Rightarrow\ &\{y\in E: f(z,y)>\alpha\}
\end{aligned}
$$

olup (10.2) sağlanır. Sonuç olarak (a) ve (b) şartları sağlanır.

$(X)\Rightarrow(XI)$:

(X) nun hipotezi altında $\alpha=\beta=\sup\{g(x,x): x\in E\}$ seçilirse a) şıkkından dolayı her bir $N\in\langle D\rangle$ ve her $z\in N$ için $f(z,y_N)\leq\alpha=\sup\{g(x,x): x\in E\}$ olacak şekilde $y_N\in E$ vardır. Böylece c) seçeneği elde edilir. Her $z\in N$ için $f(z,y_N)\leq\sup\{g(x,x): x\in E\}$ olduğundan $\max_{z\in N} f(z,y_N)\leq\sup\{g(x,x): x\in E\}$ dır. Bu durumda $\inf_{y\in E}\max_{z\in N} f(z,y_N)\leq\sup g(x,x)$ dır.

$(XI) \Rightarrow (II)$:

(XI) de $(x,y) \in E \times E$ ve $(z,y) \in D \times E$ için $f : D \times E \to \mathbb{R}$, $g : E \times E \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlarını

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & , y \in T(x) \\ 1 & , diğer\ durumlarda \end{cases} , f(z,y) = \begin{cases} 0 & , y \in S(z) \\ 1 & , diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olarak tanımlayalım ve $\alpha = \beta = 0$ seçelim.

Böylece $y \in E$ için $S^{-}(y) = \{z \in D : f(z,y) = 0\}$ ve $T^{-}(y) = \{x \in E : g(x,y) = 0\}$ olup (2.2) den (10.1) sağlanır.

$M \in \langle \{z \in D : f(z,y) > 0\} = \{z \in D : f(z,y) = 1\} \rangle = \langle D - S^{-}(y) \rangle$ iken $\Gamma_M \subset E - T^{-}(y) = \{x \in E : g(x,y) > 0\} = \{x \in E : g(x,y) = 1\}$ dır. (2.3) den her bir $x \in E$ için $x \in T(x)$ olup $g(x,x) = 0$ dır.

(2.2) den $\sup\{g(x,x) : x \in E\} \le \sup\{g(x,y) : (x,y) \in T\} = 0$ ve g nin tanımından dolayı $\sup\{g(x,x) : x \in E\} = 0$ dır. Bu durumda (XI) in tüm şartları sağlandığından her bir $N \in \langle D \rangle$ ve her $z \in N$ için $f(z, y_N) \le \sup\{g(x,x) : x \in E\} = 0$ olacak şekilde $y_N \in E$ vardır. Bu yüzden her $z \in N$ için $f(z, y_N) = 0 \Leftrightarrow y_N \in S(z)$ olup $y_N \in \bigcap \{S(z) : z \in N\}$ dır. Bu da ispatı tamamlar.■

5.2. Genelleştirilmiş Kısmi KKM Prensibinin Denklikleri

$(E,D;\Gamma)$ soyut konveks uzayı için (0) koşulunun yerine

$(0)'$ *Kısmi KKM prensibi*

Her kapalı-değerli $G:D\to 2^E$ KKM dönüşümü için $\{G(y)\}_{y\in D}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir.

5.2.1. Teorem (*Kısmi KKM Prensibini Sağlayan Uzayların Karakterizasyonu*)

$(E,D;\Gamma)$ kısmi KKM prensibini sağlayan soyut konveks uzay olsun. Bu durumda $(0)'-(XI)'$ koşulları denktir [53].

5.2.2. Tanım

$(E,D;\Gamma)$ soyut konveks uzay, $\varnothing\neq D'\subset D$ bir altküme X, D' ne göre E nin $\Gamma-konveks$ alt kümesi ve $A\in\langle D'\rangle$ için $\Gamma':\langle D'\rangle\to 2^X$ dönüşümü $\Gamma'_A=\Gamma_A\subset X$ olsun. Bu durumda $(X,D';\Gamma')$ soyut konveks uzayı D' ne göre alt uzay olarak adlandırılır.

5.2.3. Önerme

$(E,D;\Gamma)$ soyut konveks uzay ve $(X,D';\Gamma')$ alt uzay olsun. Eğer $(E,D;\Gamma)$ kısmi KKM prensibini sağlıyorsa $(X,D';\Gamma')$ de sağlar.

İspat

Varsayalım ki kapalı-değerli $G' : D' \to 2^X$ dönüşümü her $A \in \langle D' \rangle$ için $\Gamma'(A) \subset G'(A)$ yı sağlasın.

$G : D \to 2^E$ dönüşümünü $G(y) = \begin{cases} G'(y) & , y \in D' \\ \overline{X} & , Aksi\ taktirde \end{cases}$ olarak tanımlayalım.

Bu durumda $A \in \langle D' \rangle$ için $\Gamma_A = \Gamma'(A) \subset G'(A) = G(A)$ ve $A \cap (D - D') \neq \varnothing$ iken $A \in \langle D \rangle$ için $\Gamma_A \subset \overline{X} = G(A)$ dır. $(E, D; \Gamma)$ kısmi KKM prensibini sağladığından ve G kapalı-değerli bir dönüşüm olduğundan $\{G(y)\}_{y \in D}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir ve bundan dolayı $\{G'(y)\}_{y \in D'}$ alt ailesi de sonlu arakesit özelliğine sahiptir. Sonuç olarak $(X, D'; \Gamma')$ alt uzayı da kısmi KKM prensibine sahiptir.

5.2.4. Teorem *(Genelleştirilmiş Kısmi KKM Prensibi)*

$(E, D; \Gamma)$ kısmi KKM prensibini sağlayan soyut konveks uzay olsun. $G : D \to 2^E$ dönüşümü

1. G kapalı
2. G KKM dönüşümüdür yani $\forall\ A \in \langle D \rangle$ için $\Gamma_A \subset G_A$ dır.
3. i) $K = E$

   ii) Bazı $M \in \langle D \rangle$ için $K = \bigcap \{G(z) : z \in M\}$

   iii) $N \in \langle D \rangle$ için $N \subset D'$ ve $L_N \cap \bigcap_{z \in D'} G(z) \subset K$ olacak şekilde bazı

   $D' \subset D$ ne göre E'nin L_N kompakt $\Gamma - konveks$ alt kümesi vardır.

şartlarını sağlıyorsa $K \cap \bigcap \{G(z) : z \in D\} \neq \varnothing$ dır [53].

İspat

Durum (i): Her $G(y)$ kompakttır. Bu yüzden (i) durumu (ii) ye indirgenir.

Durum (ii): $\{G(z): z \in D\}$ sonlu arakesit özelliğine sahip olduğundan $\{K \cap G(z): z \in D\}$, K içinde kompakttır. Bundan dolayı $\{K \cap G(z): z \in D\}$ arakesit özelliğine sahiptir.

Durum (iii): Varsayalım ki $K \cap \bigcap\{G(z): z \in D\} = \varnothing$ olsun yani bazı $N \in \langle D \rangle$ için $K \subset \bigcup\{X - G(z): z \in N\}$ dir. (iii) den dolayı E nin L_N kompakt $\Gamma - konveks$ alt kümesi vardır. $z \in D'$ için $G': D' \to 2^{L_N}$ dönüşümünü $G'(z) = G(z) \cap L_N$ şeklinde tanımlayalım. (2) den dolayı $A \in \langle D' \rangle$ için $\Gamma'_A = \Gamma_A \cap L_N \subset G(A) \cap L_N = G'(A)$ olup $G': D' \to 2^{L_N}$ dönüşümü $(L_N, D'; \Gamma')$ üzerinde kapalı değerli olacak şekilde KKM dönüşümüdür. $(X, D; \Gamma)$ kısmi KKM prensibini sağlandığından Önerme 5.2.3. den dolayı $(L_N, D'; \Gamma')$ de sağlar. Bu durumda $\{G'(z): z \in D'\}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir. L_N nin kompaktlığından ve case (i) den $\bigcap\{G'(z): z \in D'\} \neq \varnothing$ dır. (ii) den dolayı her $y \in \bigcap\{G'(z): z \in D'\}$ ise $y \in K$ dır. $y \in K \subset \bigcup\{X - G(z): z \in N\}$ olduğundan bazı $z \in N \subset D'$ için $y \notin G(z)$ dır. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $K \cap \bigcap\{G(z): z \in D\} \neq \varnothing$ dır.

Teorem 5.2.4. deki (i)-(iii) koşulları genellikle kompaktlık koşulları veya coercivity koşulları olarak adlandırılır.

5.2.5. Tanım

$(E,D;\Gamma)$ soyut konveks uzay ve $G:D\to 2^E$ kapalı-değerli dönüşüm olsun. G için *coercivity* koşulu, $\{G(y)\}_{y\in D}$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahipse $\{G(y)\}_{y\in D}$ ailesinin arakesit özelliğini garantiler [53].

5.2.6. Tanım

$(E,D;\Gamma)$ soyut konveks uzayı üzerinde $G:D\to 2^E$ kapalı-değerli KKM dönüşümü *coercivity* koşuluna sahipse bu dönüşüme *Fan dönüşümü* denir [53].

Şimdi KKM dönüşümü ile Fan dönüşümü arasındaki ilişkiyi bir alıştırmayla inceleyelim.

5.2.7. Alıştırma

$(\mathbb{R},co)$ uzayında $co:\langle\mathbb{R}\rangle\to 2^{\mathbb{R}}$ konveks zarf operatörüdür. Bu durumda $(\mathbb{R},co)$ KKM uzaydır. $x\in\mathbb{R}$ için $G(x)=[x,\infty)$ olacak şekilde $G:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{R}}$ dönüşümünü tanımlayalım. G KKM dönüşümüdür fakat *Fan dönüşümü* değildir.

Gerçekten;
$y\in co\{x_1,x_2,...,x_n\}$ olsun. Bu durumda $n_0\in\mathbb{N}$ olmak üzere $x_{n_0}=\min\{x_1,x_2,...,x_n\}$ vardır. $y\in co\{x_1,x_2,...,x_n\}$ olduğundan $y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ olacak şekilde $\lambda_i\geq 0$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ vardır. $x_{n_0}=\min\{x_1,x_2,...,x_n\}$ olmak üzere $y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=x_{n_0}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(x_i-x_{n_0}\right)$ yazılır. Böylece $y>x_{n_0}$ olup $y\in\left[x_{n_0},\infty\right)=\bigcup_{i=1}^{n}G(x_i)$ dır. Sonuç olarak $co\{x_1,x_2,...,x_n\}$ $\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G(x_i)$ olup G KKM dönüşümüdür.

Gösterelim ki G, *Fan dönüşümü* değildir yani $\bigcap_{x\in\mathbb{R}} G(x)=\varnothing$ dır. $\bigcap_{x\in\mathbb{R}} G(x)\neq\varnothing$ olsun. Bu durumda en az bir $y\in\bigcap_{x\in\mathbb{R}} G(x)=\left[\max x,\infty\right)$ olup $\max_{x\in\mathbb{R}} x\leq y<\infty$ dır $\max_{x\in\mathbb{R}} x=\infty$ olduğundan $\max_{x\in\mathbb{R}} x=\infty\leq y<\infty$ olacak şekilde böyle bir y yoktur. Bu da bir çelişkidir. Sonuç olarak $\bigcap_{x\in\mathbb{R}} G(x)=\varnothing$ dır.

5.2.8. Teorem *(Minimaks eşitsizliği)*

$(E,D;\Gamma)$ kısmi KKM prensibini sağlayan soyut konveks uzay olsun. $f:D\times X\to\overline{\mathbb{R}}$, $g:X\times X\to\overline{\mathbb{R}}$ genişletilmiş reel değerli fonksiyonları ve $\gamma\in\overline{\mathbb{R}}$ aşağıdaki koşulları sağlasın.

1) Her bir $z\in D$ için $\{y\in X:f(z,y)\leq\gamma\}$ kapalı

2) Her bir $y\in E$ için $co_\Gamma\{z\in D:f(z,y)>\gamma\}\subset\{x\in X:g(x,x)>\gamma\}$

3) $G(z)=\{y\in X:\,f(z,y)\leq\gamma\}$ şeklinde tanımlanan $G:D\to 2^E$ dönüşümü *coercivity* koşuluna sahiptir.

Bu durumda

i) $\forall z\in D$ için $f(z,y_0)\leq\gamma$ olacak şekilde $y_0\in E$ vardır.

ii) Eğer $\gamma=\sup_{x\in X} g(x,x)$ ise $\inf_{y\in X}\sup_{z\in D} f(x,y)\leq\sup_{x\in X} g(x,x)$ vardır.

İspat

$G:D\multimap X$ dönüşümünü $z\in D$ için $G(z)=\{y\in X:\,f(z,y)\leq\gamma\}$ şeklinde tanımlayalım. (1) den dolayı $G(z)$ kapalıdır. (2) den dolayı $G:D\to 2^X$ dönüşümü KKM dönüşümüdür. Bu durumda $\{G(z)\}_{z\in D}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir. (3)

den dolayı $G:D\to 2^X$ Fan dönüşümüdür ve $\bigcap_{z\in D} G(z)\neq\varnothing$ dır. Teorem 5.2.4. ün tüm şartları sağlandığından $E\cap\bigcap\{G(z): z\in D\}\neq\varnothing$ dır. Böylece tüm $z\in D$ için $y_0\in G(z)$ olacak şekilde $y_0\in E$ vardır. G nin tanımından dolayı tüm $z\in D$ için $f(z,y_0)\leq\gamma$ olacak şekilde $y_0\in E$ vardır. ■

5.3. Kompakt Uzaylardaki Kısmi KKM Prensibinin Uygulamaları

$(E,D;\Gamma)$ soyut konveks uzayı eğer E kompakt topolojik uzay ise kompakttır. Sadelik için kısmi KKM prensibini sağlayan kompakt soyut konveks uzayı $(X;\Gamma)$ şeklinde gösterelim [53].

X topolojik uzay olmak üzere $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ genişletilmiş reel değerli fonksiyonu için

- Her bir $r\in\overline{\mathbb{R}}$ için eğer $\{x\in X: f(x)>r\}$ açık ise f fonksiyonuna alttan yarı sürekli denir.
- Her bir $r\in\overline{\mathbb{R}}$ için eğer $\{x\in X: f(x)<r\}$ açık ise f fonksiyonuna üstten yarı sürekli denir.

$(E\supset D;\Gamma)$ soyut konveks uzay ve $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon olsun.

- Eğer her bir $r\in\overline{\mathbb{R}}$ için $\{x\in X: f(x)>r\}$ kümesi $\Gamma-konveks$ ise f ye *quasiconcave* denir.
- Eğer her bir $r\in\overline{\mathbb{R}}$ için $\{x\in X: f(x)<r\}$ kümesi $\Gamma-konveks$ ise f ye *quasiconvex* denir.

Kısmi KKM prensibini sağlayan $(X;\Gamma)$ kompakt soyut konveks uzayı için aşağıdaki ifadeleri dikkate alalım.

XII. *Minimaks eşitsizliği*

$X=E=D$ özel durumunda Teorem 5.2.8 kompakttır.

XIII. *Minimaks eşitsizliği*

$\gamma \in \mathbb{R}$ ve $f, g : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

(13.1) Her $x, y \in X$ için $f(x,y) \leq g(x,y)$ ve $g(x,x) \leq \gamma$

(13.2) Her bir $x \in X$ için $\{y \in X : f(x,y) > \gamma\}$ kümesi X içinde açık

(13.3) her bir $y \in X$ için $\{x \in X : g(x,y) > \gamma\}$, X üzerinde $\Gamma - konveks$

şartlarını sağlayacak şekilde olsun. Bu durumda

(i) Her $x \in X$ için $f(x, y_0) \leq \gamma$ olacak şekilde $y_0 \in X$ vardır.

(ii) Eğer $\gamma = \sup_{x \in X} g(x,x)$ ise $\inf_{y \in X} \sup_{x \in X} f(x,y) \leq \sup_{x \in X} g(x,x)$ dır.

XIV. *Minimaks eşitsizliği*

$f, g : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

(14.1) Her bir $(x,y) \in X \times X$ için $f(x,y) \leq g(x,y)$

(14.2) Her bir $x \in X$ için $f(x,\cdot)$, X üzerinde alttan yarı süreklidir.

(14.3) Her bir $y \in X$ için $g(\cdot, y)$, E üzerinde quasiconcave dır.

şartlarını sağlayacak şekilde olsun.Bu durumda

$$\min_{y \in X} \sup_{x \in X} f(x,y) \leq \sup_{x \in X} g(x,x)$$

vardır.

XV. *Değişim Eşitsizliği*

$p,q: X\times X \to \mathbb{R}$ ve $h: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

(15.1) Her bir $(x,y)\in X\times X$ için $p(x,y)\le q(x,y)$ ve her $x\in X$ için $q(x,x)\le 0$

(15.2) Her bir $x\in X$ için $p(x,\cdot)+h(\cdot)$, X üzerinde alttan yarı sürekli

(15.3) Her bir $y\in X$ için $q(\cdot,y)-h(\cdot)$, X üzerinde quasiconcave dır.

şartlarını sağlayacak şekilde olsun. Bu durumda her $x\in X$ için $p(x,y_0)+h(y_0)\le h(x)$ olacak şekilde $y_0\in X$ vardır.

XVI. *Değişim eşitsizliği*

$f,g: X\times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

(16.1) Her $x,y\in X$ için $f(x,y)\le g(x,y)$

(16.2) Her bir $x\in X$ için $\{y\in X : f(x,y)<f(y,y)\}$ kümesi açık

(16.3) Her bir $y\in X$ için $\{x\in X : g(x,y)<g(y,y)\}$ kümesi $\Gamma-convex$

şartlarını sağlıyorsa

i) Her $x\in X$ için $f(x,y_0)\ge f(y_0,y_0)$ olacak şekilde $y_0\in X$ vardır.

ii) $\sup\limits_{y\in X}\inf\limits_{x\in X} f(x,y)\ge \inf\limits_{x\in X} f(x,x)$ eşitsizliği vardır.

XVII. *Değişim eşitsizliği*

$f,g: X\times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

(17.1) $\Delta=\{(x,x): x\in X\}$ üzerinde $f\le g$ ve $(X\times X)-\Delta$ üzerinde $g\le f$

(17.2) Her bir $y \in X$ için $x \mapsto f(x,y)$, X üzerinde alttan yarı sürekli

(17.3) Her bir $x \in X$ için $y \mapsto g(y,y) - g(x,y)$, X üzerinde quasiconcave

şartlarını sağlıyorsa her $x \in X$ için $f(y_0, y_0) \leq f(x, y_0)$ olacak şekilde $y_0 \in X$ vardır.

Şimdi bu özelliklerin birbirlerine karşılıklı denk olduklarını aşağıdaki teoremle inceleyelim.

5.3.1. Teorem 5

Kısmi KKM prensibini sağlayan $(X;\Gamma)$ kompakt soyut konveks uzayı için (XII)-(XVII) ifadeleri sağlanır [53].

İspat

$(XII) \Rightarrow (XIII)$:

(13.1) ve (13.3), Teorem 5.2.8. in (2) koşulunu sağlar. Bu durumda (XII) den dolayı $(XIII)-(i)$ koşulu sağlanır. Gerçekten $X = E = D$ durumunda $\forall\ x \in X$ için $f(x, y_0) \leq \gamma$ olacak şekilde $y_0 \in X$ vardır. Eğer $\gamma = \sup_{x \in X} g(x,x) = +\infty$ ise (ii) eşitsizliği otomatik olarak sağlanır. Eğer $\gamma = \sup_{x \in X} g(x,x) < +\infty$ ise (XII) den dolayı eşitsizlik sağlanır.

$(XIII) \Rightarrow (XIV)$:

(14.2) de her bir $x \in X$ için $f(x,\cdot)$, X üzerinde alttan yarı sürekli olduğundan X kompakt uzayı üzerinde $\sup_{x \in E} f(x,y)$ de alttan yarı süreklidir ve bir minimuma sahiptir. (ii) den dolayı $\min\limits_{y \in X} \sup\limits_{x \in X} f(x,y) \leq \sup\limits_{x \in X} g(x,x)$ eşitsizliği vardır.

$(XIV) \Rightarrow (XV)$:

$(x,y) \in X \times Y$ için $f(x,y) = p(x,y) + h(y) - h(x)$, $g(x,y) = q(x,y) + h(y) - h(x)$ şeklinde tanımlayalım. (15.1) de $(x,y) \in X \times Y$ için $p(x,y) \le q(x,y)$ olup $f(x,y) \le g(x,y)$ dır böylece (14.1) sağlanır. (15.2) den her bir $x \in X$ için $p(x,\cdot) + h(\cdot)$, X üzerinde alttan yarı sürekli olduğundan $f(x,\cdot)$, X alttan yarı süreklidir (f nin tanımından). (15.3) den her bir $y \in X$ için $q(\cdot,y) - h(\cdot)$, X üzerinde quasiconcave olduğundan $g(\cdot,y)$, X üzerinde quasiconcave dır (g nin tanımından). (15.1) den her $x \in X$ için $g(x,x) = q(x,x) \le 0$ dır. (XIV) ün tüm şartları sağlandığından $\min\limits_{y \in X} \sup\limits_{x \in X} f(x,y) \le \sup\limits_{x \in X} g(x,x) = 0$ vardır. Bu durumda en azından bir $y_0 \in X$ vardır öyle ki $p(x,y_0) + h(y_0) - h(x) \le 0$ dır. Sonuç olarak $p(x,y_0) + h(y_0) \le h(x)$ olacak şekilde $y_0 \in X$ vardır.

$(XIII) \Rightarrow (XVI)$:

$(XIII)$ de $\gamma = 0$, $f(x,y)$ yerine $f(y,y) - f(x,y)$ ve $g(x,y)$ yerine $g(y,y) - g(x,y)$ alalım. Bu durumda (16.1)–(16.3) şartları sağlanır. $(XIII)$ den dolayı her $x \in X$ için $f(x,y_0) \le \gamma$ olacak şekilde $y_0 \in X$ vardır. $f(x,y)$ yerine $f(y,y) - f(x,y)$ aldığımızda her $x \in X$ için $f(y_0,y_0) \le f(x,y_0)$ olacak şekilde $y_0 \in X$ vardır.

$(XVI) \Rightarrow (XVII)$:

$p,q : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını sırasıyla $p(x,y) = f(y,y) - f(x,y)$ ve $q(x,y) = g(y,y) - g(x,y)$ şeklinde tanımlayalım.

1) (17.1) den $x, y \in X$ için $f(y,y) \leq g(y,y)$ ve $g(x,y) \leq f(x,y)$ olup $p(x,y) \leq q(x,y)$ dır ve $q(x,x) = g(x,x) - g(x,x) = 0$ dır.

2) (17.2) de her bir $y \in X$ için $x \mapsto f(x,y)$ alttan yarı sürekli olduğundan her $r \in \mathbb{R}$ için $\{x, y \in X : f(x,y) > r\}$ açıktır. $r = f(y,y)$ alınırsa her bir $x \in X$

$$\begin{aligned}\{y \in X : p(x,y) \leq p(y,y)\} &= \{y \in X : f(y,y) - f(x,y) < f(y,y) - f(y,y)\} \\ &= \{y \in X : f(y,y) - f(x,y) < 0\} \\ &= \{y \in X : f(y,y) < f(x,y)\}\end{aligned}$$

açıktır.

3) (17.3) de her bir $x \in X$ için $y \mapsto g(y,y) - g(x,y)$ quasiconcave olduğundan her $r \in \mathbb{R}$ için $\{x, y \in X : g(x,y) > r\}$, $\Gamma - convex$ dir. $r = g(y,y)$ alınırsa her bir $y \in X$ için

$$\begin{aligned}\{x \in X : q(x,y) \leq q(y,y)\} &= \{x \in X : g(y,y) - g(x,y) < g(y,y) - g(y,y)\} \\ &= \{x \in X : g(y,y) - g(x,y) < 0\} \\ &= \{x \in X : g(y,y) < g(x,y)\}\end{aligned}$$

$\Gamma - convex$ dir.

p ve q fonksiyonları (XVI) nın tüm şartlarını sağladığından (f,g) yerine (p,q) alınırsa her $x \in X$ için $p(x,y_0) \geq p(y_0,y_0)$ olacak şekilde $y_0 \in X$ vardır.

$$\begin{aligned}p(x,y_0) \geq p(y_0,y_0) &\Rightarrow f(x,y_0) - f(y_0,y_0) \geq f(y_0,y_0) - f(y_0,y_0) \\ &\Rightarrow f(x,y_0) - f(y_0,y_0) \geq 0 \\ &\Rightarrow f(x,y_0) \geq f(y_0,y_0)\end{aligned}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.■

5.4. Çarpım Uzayları Üzerindeki Kısmi KKM Prensibinin Uygulamaları

Bu bölümde kısmi KKM prensibini sağlayan kartezyen çarpımlar (soyut konveks uzayların) ile ilgileneceğiz. Sadelik için tüm uzayları kompakt kabul edeceğiz. Tabiî ki bu bölümdeki tüm sonuçlar ilgili KKM dönüşümleri için varsayılan coercivity koşulu ile nonkompaktlık durumuna da genelleştirebilir.

$(X;\Gamma_1)$ ve $(Y;\Gamma_2)$ soyut konveks uzaylar olsun.

Bunların kartezyen çarpımını $A \in \langle X \times Y \rangle$ için

$$\Gamma_{X\times Y}(A) = \Gamma_1(\pi_1(A)) \times \Gamma_2(\pi_2(A))$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\pi_1 : X \times Y \to X$ ve $\pi_2 : X \times Y \to Y$ projeksiyonlardır [53].

XVIII. *Temel Minimaks teoremi*

$(E;\Gamma) = (X \times Y;\Gamma_{X\times Y})$ çarpım soyut konveks uzay, $f,s,t,g : X \times Y \to \mathbb{R}$ dört fonksiyon $\mu = \inf\limits_{y\in Y} \sup\limits_{x\in X} f(x,y)$ ve $\nu = \sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} g(x,y)$ olsun.

Varsayalım ki

(18.1) Her bir $(x,y) \in X \times Y$ için $f(x,y) \le s(x,y) \le t(x,y) \le g(x,y)$

(18.2) $y \in Y$ ve $r < \mu$ için $\{x \in X : s(x,y) > r\}$, $\Gamma_1 - convex$, $x \in X$ ve $r > \nu$ için $\{y \in Y : t(x,y) < r\}$, $\Gamma_2 - convex$

(18.3) Her bir $r > \nu$ için $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{m} Int\{y \in Y : f(x_i,y) > r\}$ olacak şekilde $\{x_i\}_{i=1}^{m} \subset X$ sonlu kümesi vardır.

(18.4) Her bir $r < \mu$ için $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} Int\{x \in X : g(x,y_j) < r\}$ olacak şekilde $\{y_i\}_{j=1}^{n} \subset Y$ sonlu kümesi vardır.

şartları sağlansın. Eğer $(E;\Gamma)$ kısmi KKM prensibini sağlıyorsa

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)\le \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y)$$

eşitsizliği vardır.

XIX. *Genelleştirilmiş Von Neumann - Sion Minimaks Teoremi*

$(X;\Gamma_X)$ ve $(Y;\Gamma_Y)$ soyut konveks uzaylar, $(E;\Gamma)=(X\times Y;\Gamma_{X\times Y})$ çarpım soyut konveks uzay olsun. $f,s,t,g:X\times Y\to\mathbb{R}$ fonksiyonları

(19.1) Her bir $(x,y)\in X\times Y$ için $f(x,y)\le s(x,y)\le t(x,y)\le g(x,y)$

(19.2) Her bir $x\in X$ için Y üzerinde $f(x,\cdot)$ alttan yarı sürekli ve $t(x,\cdot)$ quasiconvex

(19.3) Her bir $y\in Y$ için X üzerinde $s(\cdot,y)$ quasiconcave ve $g(\cdot,y)$ üstten yarı sürekli

şartlarını sağlasın. Eğer $(E;\Gamma)$ kısmi KKM prensibini sağlıyorsa

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)\le \max_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y)$$

eşitsizliği vardır.

XX. *Von Neumann - Sion Minimaks Teoremi*

$(X;\Gamma_X)$ ve $(Y;\Gamma_Y)$ soyut konveks uzaylar, $(E;\Gamma)=(X\times Y;\Gamma_{X\times Y})$ çarpım soyut konveks uzay olsun.

$f,g:X\times Y\to\mathbb{R}$ fonksiyonları

(20.1) Her bir $(x,y)\in X\times Y$ için $f(x,y)\le g(x,y)$

(20.2) Her bir $x\in X$ için Y üzerinde $f(x,\cdot)$ alttan yarı sürekli ve $g(x,\cdot)$ quasiconvex

(20.3) Her bir $y\in Y$ için X üzerinde $f(\cdot,y)$ quasiconcave ve $g(\cdot,y)$ üstten yarı sürekli

şartlarını sağlasın. Eğer $(E;\Gamma)$ kısmi KKM prensibini sağlıyorsa

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)\le \max_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y)$$

eşitsizliği vardır.

$\{(X_i,D_i;\Gamma_i)\}_{i\in I}$ soyut konveks uzayların ailesi olsun. $E=\prod_{i\in I}X_i$ çarpım topolojisi ile donatılsın ve $D=\prod_{i\in I}D_i$ olsun. Her bir $i\in I$ için $\pi_i:D\to D_i$ projeksiyon olsun. Her bir $A\in\langle D\rangle$ için $\Gamma(A)=\prod_{i\in I}\Gamma_i(\pi_i(A))$ şeklinde tanımlayalım.

5.4.1. Lemma

(1) $(E,D;\Gamma)$ soyut konveks uzay

(2) Eğer $\{(X_i,D_i;\Gamma_i)\}_{i\in I}$ G-konveks uzayların ailesi ise $(E,D;\Gamma)$ G-konveks uzaydır.

(3) Eğer $\{(X_i;\Gamma_i)\}_{i\in I}$ G-konveks uzayların ailesi ise $\Gamma-convex$ altkümelerin çarpımı, çarpım G- konveks uzayın içinde $\Gamma-convex$ dir.

Sadelik için bundan sonra kompakt soyut konveks uzayların sonlu ailesinin çarpım uzayını dikkate alalım.

XXI. *Ortak Sabit Nokta Teoremi*

$\{(X_i;\Gamma_i)\}_{i\in I}$; $(E;\Gamma)=\left(\prod_{i\in I}X_i;\Gamma\right)$ kısmi KKM prensibini sağlayacak şekilde kompakt soyut konveks uzayların sonlu ailesi ve her bir $i\in I$ için $T_i:E\to X_i$ *$\phi-$dönüşümü* olsun. Bu durumda $x\in T(x)=\prod_{i\in I}T_i(x)$ olacak şekilde $x\in X$ noktası vardır. Yani her bir $i\in I$ için $x_i=\pi_i(x)\in T_i(x)$ dır.

$E=\prod_{i\in I}X_i$ kümelerin kartezyen çarpımı, $X^i=\prod_{i\neq j}X_j$ ve $\pi_i:E\to X_i$, $\pi^i:E\to X^i$ projeksiyonlar olsun. Burada $x,y\in X$ için $\pi_i(x)=x_i$, $\pi^i(x)=x^i$ ve $\left[y_i,x^i\right]=(x_1,...,x_{i-1},y_i,x_{i+1},...,x_n)$ dır.

XXII. *Von Neumann - Fan Arakesit Teoremi*

$\{(X_i;\Gamma_i)\}_{i\in I}$; $(E;\Gamma)=\left(\prod_{i\in I}X_i;\Gamma\right)$ kısmi KKM prensibini sağlayacak şekilde kompakt soyut konveks uzayların sonlu ailesi, her bir $i\in I$ için A_i ve B_i

(22.1) Her bir $x^i\in X^i$ için $\varnothing\neq co_{\Gamma}B_i(x^i)\subset A_i(x^i)$

(22.2) Her bir $y_i\in X_i$ için $B_i^-(y_i)$, X^i içinde açık

şartlarını sağlayacak şekilde E nin altkümeleri olsun. Bu durumda $\bigcap_{i\in I}A_i\neq\varnothing$ dır.

XXIII. *Fan Tipi Analitik Alternatif*

$\{(X_i;\Gamma_i)\}_{i\in I}$; $(E;\Gamma)=\left(\prod_{i\in I}X_i;\Gamma\right)$ kısmi KKM prensibini sağlayacak şekilde kompakt soyut konveks uzayların sonlu ailesi, her bir $i\in I$ için $f_i,g_i:E=X^i\times X_i\to\mathbb{R}$ reel fonksiyonları

(23.1) Her bir $x \in X$ için $f_i(x) \leq g_i(x)$

(23.2) Her bir $x^i \in X^i$ için $x_i \mapsto g_i\left[x^i, x_i\right]$, X_i üzerinde quasiconcave

(23.3) Her bir $x_i \in X_i$ için $x^i \mapsto f_i\left[x^i, x_i\right]$, X^i üzerinde alttan yarı sürekli

şartlarını sağlasın. $\{t_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ reel sayıların ailesi olsun. Bu durumda

a) Her $y_i \in X_i$ için $f_i\left[x^i, y_i\right] \leq t_i$ olacak şekilde $x^i \in X^i$ ve $i \in \mathrm{I}$ vardır.

veya

b) Her $i \in \mathrm{I}$ için $g_i(x) > t_i$ olacak şekilde $x \in E$ vardır.

XXIV. *Genelleştirilmiş Nash – Fan Tipi Equilibrium Teoremi*

$\{(X_i;\Gamma_i)\}_{i \in \mathrm{I}}$; $(E;\Gamma) = \left(\prod_{i \in \mathrm{I}} X_i;\Gamma\right)$ kısmi KKM prensibini sağlayacak şekilde kompakt soyut konveks uzayların sonlu ailesi, her bir $i \in \mathrm{I}$ için $f_i, g_i : E = X^i \times X_i \to \mathbb{R}$ reel fonksiyonları

(24.0) Her bir $x \in E$ için $f_i(x) \leq g_i(x)$

(24.1) Her bir $x^i \in X^i$ için $x_i \mapsto g_i\left[x^i, x_i\right]$, X_i üzerinde quasiconcave

(24.2) Her bir $x^i \in X^i$ için $x_i \mapsto f_i\left[x^i, x_i\right]$, X_i üzerinde üstten yarı sürekli

(24.3) Her bir $x_i \in X_i$ için $x^i \mapsto f_i\left[x^i, x_i\right]$, X^i üzerinde alttan yarı sürekli

şartlarını sağlasın. Bu durumda her $i \in \mathrm{I}$ için $g_i(\hat{x}) \geq \max_{y_i \in X_i} f_i\left[\hat{x}^i, y_i\right]$ olacak şekilde $\hat{x} \in X$ vardır.

XXV. *Genelleştirilmiş Nash – Fan Tipi Equilibrium Teoremi*

$\{(X_i;\Gamma_i)\}_{i\in \mathrm{I}}$; $(E;\Gamma)=\left(\prod_{i\in \mathrm{I}} X_i;\Gamma\right)$ kısmi KKM prensibini sağlayacak şekilde kompakt soyut konveks uzayların sonlu ailesi, her bir $i\in \mathrm{I}$ için $f_i : E\to \mathbb{R}$ reel fonksiyonu

(25.1) Her bir $x^i\in X^i$ için $x_i\mapsto f_i\left[x^i,x_i\right]$, X_i üzerinde quasiconcave

(25.2) Her bir $x^i\in X^i$ için $x_i\mapsto f_i\left[x^i,x_i\right]$, X_i üzerinde üstten yarı sürekli

(25.3) Her bir $x_i\in X_i$ için $x^i\mapsto f_i\left[x^i,x_i\right]$, X^i üzerinde alttan yarı sürekli

şartlarını sağlasın. Bu durumda her $i\in \mathrm{I}$ için $f_i(\hat{x})=\max_{y_i\in X_i} f_i\left[\hat{x}^i,y_i\right]$ olacak şekilde $\hat{x}\in X$ vardır.

XXVI. *Von Neumann – Sion Minimaks Teoremi*

$(X;\Gamma)$ ve $(Y;\Gamma')$ kompakt soyut konveks uzaylar olsun. $f : X\times Y\to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ reel fonksiyonu

(26.1) Her bir $x\in X$ için $f(x,\cdot)$, Y üzerinde alttan yarı sürekli ve quasiconvex

(26.2) Her bir $y\in Y$ için $f(\cdot,y)$, X üzerinde üstten yarı sürekli ve quasiconcave

şartlarını sağlasın. Eğer $(E;\Gamma)$ kısmi KKM prensibini sağlıyorsa

i) f , $(x_0,y_0)\in X\times Y$ eyer (semer) noktasına sahiptir.

ii) $\max_{x\in x}\min_{y\in Y} f(x,y)=\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$ eşitliği vardır.

Şimdi bu özelliklerin birbirlerine karşılıklı denk olduklarını aşağıdaki teoremle inceleyelim.

5.4.2. Teorem

Kısmi KKM prensibini sağlayan $(X;\Gamma)$ kompakt soyut konveks uzayı için (XVII)-(XXVI) ifadeleri sağlanır [53].

İspat

$(V') \Rightarrow (XVIII)$:

Varsayalım ki $\nu = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y) < c < \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y) = \mu$ olacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ vardır. $(E,D:\Gamma) = \left(X\times Y, \left\{(x_i,y_j)_{i,j}\right\} : \Gamma_{X\times Y}\right)$ soyut konveks uzay olmak üzere $(x_i,y_j)\in D$ ve $(x,y)\in E$ için $S: E \to 2^D$, $T: E\to 2^E$ dönüşümlerini sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$S^-(x_i,y_j) = Int\left\{x\in X : g(x,y_j) < c\right\} \times Int\left\{y \in Y : f(x_i,y) > c\right\}$$

$$T(x,y) = \left\{\overline{x}\in X : s(\overline{x},y) > c\right\} \times \left\{\overline{y}\in Y : t(x,\overline{y}) < c\right\}$$

$T(x,y)\neq\varnothing$ ve (18.2) den $T(x,y)$, $\Gamma - konveks$ tir. (18.3) ve (18.4) den dolayı E, $S^-(x_i,y_j)$ nin açık kümeleri tarafından örtülür.

$$S(x,y)\subset\left\{(x_i,y_j): g(x,y_j)<c,\ f(x_i,y)>c\right\}\subset\left\{(\overline{x},\overline{y}): s(\overline{x},y)<c,\ f(x,\overline{y})>c\right\}\subset T(x,y)$$

olur ki bu durumda $(x,y)\in E$ için $co_\Gamma S(x,y)\subset T(x,y)$ dir. (V') nün tüm şartları sağlandığından dolayı $(x_0,y_0)\in T(x_0,y_0)$ olacak şekilde $(x_0,y_0)\in X\times Y$ vardır. T dönüşümünün tanımlanışından ve (XVIII, 18.1) den $c < s(x_0,y_0) \le t(x_0,y_0) < c$ dır. Bu ise bir çelişkidir.

$(XVIII) \Rightarrow (XIX)$:

$y \to \sup_{x\in X} f(x,y)$, Y üzerinde alttan yarı süreklidir ve Teorem 3.1.2.5 den dolayı minimuma sahiptir. $x \to \inf_{y\in Y} g(x,y)$, X üzerinde üstten yarı süreklidir ve Teorem 3.1.2.5 den dolayı maksimuma sahiptir. (18.2) gereğince s,t fonksiyonları quasikonkavdır. (XVIII) in tüm şartları sağlandığından $\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$ $\le \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y)$ eşitsizliği vardır. Sonuç olarak $\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y) \le \max_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y)$ eşitsizliği elde edilir.

$(XIX) \Rightarrow (XX)$:

(XIX) da $t = g$ ve $f = s$ alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

$(V') \Rightarrow (XXI)$:

$S_i : E \to 2^{X_i}$ dönüşümleri T_i, $\phi-$dönüşümüne uygun birleşim dönüşümleri olsun. $S,T : E \to 2^E$ dönüşümlerini $x \in X$ için sırasıyla $S(x) = \prod_{i\in I} S_i(x)$ ve $T(x) = \prod_{i\in I} T_i(x)$ şeklinde tanımlayalım. Gösterelim ki T, S birleşim dönüşümü ile bir $\phi-$dönüşümüdür.

$i \in I$ için $x \in S^-(y) \Leftrightarrow y \in S(x) = \prod_{i\in I} S_i(x) \Leftrightarrow y_i \in S_i(x) \Leftrightarrow x \in S_i^-(y_i)$ dır. I sonlu ve T_i, $\phi-$dönüşümü olduğundan $S_i^-(y_i)$ ler açık olup;

i) $y \in X$ için $S^-(y) = \bigcap_{i\in I} S_i^-(y_i)$ açıktır.

$M \in \langle S(x)\rangle \Rightarrow \pi_i(M) \in \langle S_i(x)\rangle \Rightarrow \Gamma_i(\pi_i(M)) \subset T_i(x)$ olup böylece $\prod_{i\in I} \Gamma_i(\pi_i(M))$ $= \Gamma_M \subset \prod_{i\in I} T_i(x) = T(x)$ dır. Bundan dolayı $x \in X$ için

ii) $M \in \langle S(x) \rangle$ iken $\Gamma_M \subset T(x)$ dir.

Böylece T bir $\phi-$dönüşümüdür. $x \in X$ olsun. $S_i : E \to 2^{X_i}$ dönüşümleri T_i, $\phi-$dönüşümüne uygun birleşim dönüşümleri olduğundan $i \in I$ için $x \in S_i^-(y_{i,j}) \Rightarrow y_{i,j} \in S_i(x) \Rightarrow y \in \prod_{i \in I} S_i(x) \Rightarrow x \in S^-(y)$ olacak şekilde $j = j(i)$ vardır. Burada $y = (y_{1,j(1)}, y_{2,j(2)}, \dots, y_{n,j(n)})$ dır. X kompakt olduğundan

iii) $E = \bigcup_{z \in M} S^-(z)$ olacak şekilde bazı $M \in \langle S(x) \rangle$ vardır. $(E;\Gamma)$ kısmi KKM prensibini sağladığından (V') gereğince T, $\phi-$dönüşümü sabit noktaya sahiptir.

$(XXI) \Rightarrow (XXII)$:

$x \in X$ için $S_i(x) = B_i(x^i)$ ve $T_i(x) = A_i(x^i)$ şeklinde tanımlanan $S_i, T_i : X \to 2^{X_i}$ çoğul dönüşümleri (XXI)'e uygulayalım. $i \in I$ için

i) $x \in E$ için $\varnothing \neq co_{\Gamma_i} S_i(x) \subset T_i(x)$

ii) $y_i \in X_i$ için $x \in S_i^-(y_i) \Leftrightarrow y_i \in S_i(x) = B_i(x^i) \Leftrightarrow [x^i, y_i] \in B_i \subset X^i \times X_i = E$.

Bundan dolayı $S_i^-(y_i) = \{x = [x^i, x_i] : x^i \in B_i(y_i),\ x_i \in X_i\} = B_i(y_i) \times X_i$ dır. $E = X^i \times X_i$ içinde $S_i^-(y_i)$ açık ve T_i, $\phi-$dönüşümüdür. Bu durumda (XXI) den $i \in I$ için $\hat{x}_i \in T_i(\hat{x}) = A_i(\hat{x}^i)$ olacak şekilde $\hat{x} \in X$ vardır yani $\hat{x} = [\hat{x}^i, \hat{x}_i] \in \bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$ dır.

$(XXII) \Rightarrow (XXIII)$:

Varsayalım ki (a) doğru olmasın yani her $i \in I$ ve her $x^i \in X^i$ için $f_i\left[x^i, x_i\right] > t_i$ olacak şekilde $x_i \in X_i$ vardır. Her $i \in I$ için $A_i = \{x \in E : g_i(x) > t_i\}$ ve $B_i = \{x \in E : f_i(x) > t_i\}$ olsun.

(23.4) Her $x^i \in X^i$ için $\varnothing \neq B_i\left(x^i\right) \subset A_i\left(x^i\right)$

(23.5) Her $x^i \in X^i$ için $A_i\left(x^i\right)$, $\Gamma_i - konveks$

(23.6) Her $y_i \in X_i$ için $B_i\left(y_i\right)$, X^i içinde açıktır.

Bu durumda (XXII) nin tüm şartları sağlandığından $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ vardır yani $g_i(x) > t_i$ olacak şekilde $x \in E$ vardır bu ise (b) ye denktir.

$(XXIII) \Rightarrow (XXIV)$:

X_i kompakt olduğundan (24.2) den her $\varepsilon > 0$, $i \in I$ ve her $x^i \in X^i$ için $t_i = \max_{y_i \in X_i} f_i\left[x^i, y_i\right] - \varepsilon$ cardır. Bu durumda (a) sağlanmaz. (XXIII) den her $i \in I$ için $g_i(\hat{x}) > t_i = \max_{y_i \in X_i} f_i\left[\hat{x}^i, y_i\right] - \varepsilon$ olacak şekilde $\hat{x} \in E$ vardır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

$(XXIV) \Rightarrow (XXV)$:

(XXIV) de $f_i = g_i$ alınırsa sonuç elde edilir.

$(XXV) \Rightarrow (XXVI)$:

$f_1(x,y) = -f(x,y)$ ve $f_2(x,y) = f(x,y)$ olsun. Bu durumda (XXV) in tüm şartları sağlanır. (XX) den dolayı

$$f_1(x_0,y_0) = \max_{y\in Y} f_1(x_0,y) \text{ ve } f_2(x_0,y_0) = \max_{x\in x} f_2(x,y_0) \tag{5.1}$$

olacak şekilde $(x_0,y_0)\in X\times Y$ vardır. Bu durumda her $y\in Y$ ve $x\in X$ için sırasıyla

$$-f(x_0,y_0) = f_1(x_0,y_0) \geq f_1(x_0,y) = -f(x_0,y),$$
$$f(x_0,y_0) = f_2(x_0,y_0) \geq f_1(x,y_0) = f(x,y_0)$$

eşitsizlikleri vardır. Her $(x,y)\in X\times Y$ için $f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0) \leq f(x_0,y)$ olup $\max\limits_{x\in X} f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0) \leq \min\limits_{y\in X} f(x_0,y)$ eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\min_{y\in X}\max_{x\in X} f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0) \leq \max_{x\in X}\min_{y\in X} f(x_0,y) \tag{5.2}$$

vardır. Diğer taraftan Eş 5.1 den dolayı $\min\limits_{y\in X} f(x,y) < \max\limits_{x\in X} f(x,y)$ dir. Sonuç olarak

$$\max_{x\in X}\min_{y\in X} f(x,y) < \min_{y\in X}\max_{x\in X} f(x,y) \tag{5.3}$$

elde edilir. Eş 5.2 ve 5.3 den dolayı $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in X} f(x,y) = \min\limits_{y\in X}\max\limits_{x\in X} f(x,y)$ vardır. Bu da ispatı tamamlar.■

6. NORMLU UZAYLARDA KKM DÖNÜŞÜMÜNÜN BAZI UYGULAMARI

6.1. Tanım

Eğer $F : X \times X \to X$ dönüşümü için

$$F(x,y) = x\,,\quad F(y,x) = y$$

oluyorsa $(x,y) \in X \times X$ ikilisine F dönüşümünün *çift sabit noktası* denir [50].

6.2. Tanım

Eğer $F : X \times X \to X$ ve $g : X \to X$ dönüşümleri için

$$F(x,y) = g(x),\quad F(y,x) = g(y)$$

oluyorsa $(x,y) \in X \times X$ ikilisine F ve g dönüşümlerinin *çift çakışık noktası* denir [50].

6.3. Tanım

X normlu uzay K, X in boştan farklı konveks altkümesi ve $g : K \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $t \in X$ ve $r > 0$ için $\{u \in K : \|g(u) - t\| < r\}$ kümesi konveks ise g dönüşümüne *hemen hemen quasi konveks dönüşüm* denir [50].

Eğer $g : K \to X$ dönüşümü hemen hemen quasi konveks ise her $x_1, x_2 \in K$, $y \in X$ ve $0 < \lambda < 1$ için $\|g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\| \le \max\{\|g(x_1) - y\|, \|g(x_2) - y\|\}$ dir.

6.4. Tanım

X normlu uzay K ve C, X in boştan farklı konveks altkümeleri ve $g:K\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x_1,x_2\in K$, $y\in C$ ve $0<\lambda<1$ için

$$\left\|g\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\right\|\le \max\left\{\left\|g(x_1)-y\right\|,\left\|g(x_2)-y\right\|\right\}$$

ise g dönüşümüne C *ye göre hemen hemen quasi konveks dönüşüm* denir.
$F:K\times K\to X$ dönüşümü için $F(K\times K)$ ile $\{F(x,y):(x,y)\in K\times K\}$ kümesini göstereceğiz.

6.5. Lemma

K, X topolojik vektör uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $H:K\to 2^X$ kapalı değerli KKM dönüşümü olsun. Eğer en az bir $x\in X$ için $H(x)$ kompakt ise $\bigcap_{x\in K} H(x)\neq\varnothing$ dır.

6.6. Teorem

X normlu uzay K, X in boştan farklı kompakt konveks altkümesi, $F:K\times K\to X$ sürekli dönüşüm ve $g:K\to X$, $F(K\times K)$ ya göre sürekli hemen hemen quasi konveks bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\left\|g(x_0)-F(x_0,y_0)\right\|+\left\|g(y_0)-F(y_0,x_0)\right\|=\inf_{(x,y)\in K\times K}\left\{\left\|g(x)-F(x_0,y_0)\right\|+\left\|g(y)-F(y_0,x_0)\right\|\right\}$$

olacak şekilde $(x_0,y_0)\in K\times K$ vardır [50].

İspat

Her bir $(z,t)\in K\times K$ için

$$H(z,t)=\{(x,y)\in K\times K:\ \|g(x)-F(x,y)\|+\|g(y)-F(y,x)\|\le\|g(z)-F(x,y)\|+\|g(t)-F(y,x)\|\}$$

şeklinde $H:K\times K\to 2^{K\times K}$ dönüşümünü tanımlayalım. H ın tanımlanışından $(z,t)\in H(z,t)$ olup tüm $(z,t)\in K\times K$ için $H(z,t)$ boştan farklıdır. F ve g dönüşümleri sürekli olduğundan her bir $(z,t)\in K\times K$ için $H(z,t)$ kapalıdır. K kompakt ve kompakt bir kümenin kapalı her alt kümesi de kompakt olduğundan her bir $(z,t)\in K\times K$ için $H(z,t)$ kompakttır.

- Gösterelim ki H KKM dönüşümüdür.

Varsayalım ki $(i,j)\in I\times J$ ve $(z_i,t_j)\in K\times K$ için

$$(z_0,t_0)\notin\bigcup_{(i,j)\in K\times K}H(z_i,t_j) \qquad (6.1)$$

olacak şekilde

$$(z_0,t_0)\in\{(z_i,t_j):(i,j)\in K\times K\} \qquad (6.2)$$

vardır. Burada $I\times J$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ nin sonlu alt kümesidir. $(z_0,t_0)\in\{(z_i,t_j):(i,j)\in K\times K\}$ olduğundan dolayı

$$(z_0,t_0)=\sum_{(i,j)\in K\times K}\lambda_{ij}(z_i,t_j)\ \text{ve}\ \sum_{(i,j)\in K\times K}\lambda_{ij}=1$$

olacak şekilde $\lambda_{ij}\ge 0$ ve $(i,j)\in I\times J$ vardır.

Eğer

$$\lambda_i = \sum_{j\in J} \lambda_{ij}\,, \qquad \mu_j = \sum_{i\in I} \lambda_{ij}$$

olarak alınırsa

$$\sum_{i\in I} \lambda_i = 1, \qquad \sum_{j\in J} \mu_j = 1$$

ve

$$z_0 = \sum_{i\in I} \lambda_i z_i\,, \qquad t_0 = \sum_{j\in J} \mu_j t_j$$

dır. $g : K \to X$, $F(K\times K)$ ya göre sürekli hemen hemen quasi konveks bir dönüşüm olduğundan

$$\left\| g(z_0) - F(z_0,t_0) \right\| \le \max_{i\in I} \left\| g(z_i) - F(z_0,t_0) \right\|$$
$$\left\| g(t_0) - F(t_0,z_0) \right\| \le \max_{j\in J} \left\| g(t_j) - F(t_0,z_0) \right\|$$

olup

$$\left\| g(z_0) - F(z_0,t_0) \right\| + \left\| g(t_0) - F(t_0,z_0) \right\| \le \max_{(i,j)\in K\times K} \left\{ \left\| g(z_i) - F(z_0,t_0) \right\| + \left\| g(t_j) - F(t_0,z_0) \right\| \right\} \quad (6.3)$$

dır. Aynı zamanda $(z_0,t_0) \notin \bigcup_{(i,j)\in K\times K} H(z_i,t_j)$ olduğundan tüm $(i,j) \in I\times J$ ler için

$$\left\| g(z_0) - F(z_0,t_0) \right\| + \left\| g(t_0) - F(t_0,z_0) \right\| > \left\| g(z_i) - F(z_0,t_0) \right\| + \left\| g(t_j) - F(t_0,z_0) \right\|$$

dır. Bu ise Eş 6.3 ile çelişir. Yani H KKM dönüşümüdür. Lemmadan 6.5. dolayı tüm $(x,y) \in K \times K$ için $(x_0, y_0) \in H(x,y)$ olacak şekilde $(x_0, y_0) \in K \times K$ vardır. Sonuç olarak H nın tanımlanışından dolayı tüm $(x,y) \in K \times K$ için

$$\left\| g(x_0) - F(x_0, y_0) \right\| + \left\| g(y_0) - F(y_0, x_0) \right\| \leq \left\| g(x) - F(x_0, y_0) \right\| + \left\| g(y) - F(y_0, x_0) \right\|$$

dır. Bu da ispatı tamamlar.■

6.7. Teorem

X normlu uzay K, X in boştan farklı kompakt konveks altkümesi, $F : K \times K \to X$ sürekli dönüşüm ve $g : K \to X$, $F(K \times K) \subseteq g(K)$ olacak şekilde $F(K \times K)$ ya göre sürekli hemen hemen quasi konveks bir dönüşüm olsun. Bu durumda F ve g çift çakışık noktaya sahiptir [50].

İspat

Teorem 6.6 nın tüm şartları sağlandığından

$$\left\| g(x_0) - F(x_0, y_0) \right\| + \left\| g(y_0) - F(y_0, x_0) \right\| = \inf_{(x,y) \in K \in \times K} \left\{ \left\| g(x) - F(x_0, y_0) \right\| + \left\| g(y) - F(y_0, x_0) \right\| \right\}$$

olacak şekilde $(x_0, y_0) \in K \times K$ vardır. $F(K \times K) \subseteq g(K)$ olduğundan dolayı ise

$$\inf_{(x,y) \in K \in \times K} \left\{ \left\| g(x) - F(x_0, y_0) \right\| + \left\| g(y) - F(y_0, x_0) \right\| \right\} = 0$$

ve bundan dolayı

$$\left\| g(x_0) - F(x_0, y_0) \right\| + \left\| g(y_0) - F(y_0, x_0) \right\| = 0$$

dır. Sonuç olarak $F(x_0,y_0)=g(x_0)$, $F(y_0,x_0)=g(y_0)$ olup ispat tamamlanır.■

6.8. Teorem

X normlu uzay K, X in boştan farklı kompakt konveks altkümesi ve $F:K\times K\to X$ sürekli dönüşüm olsun. Bu durumda F çift sabit noktaya sahiptir [50].

İspat

$g(x)=x$ alınır ve Teorem 6.7 ye uygulanırsa istenilen elde edilir.

6.9. Lemma

X normlu uzay K, X in boştan farklı kompakt konveks altkümesi ve $F:K\times K\to X$ sürekli dönüşüm olsun. Bu durumda tüm $(x,y)\in K\times K$ için

$$0<\|x_0-F(x_0,y_0)\|+\|y_0-F(y_0,x_0)\|\le\|x-F(x_0,y_0)\|+\|y-F(y_0,x_0)\| \quad\text{...........(6.4)}$$

olacak şekilde $(x_0,y_0)\in(\partial K\times K\cup K\times\partial K)$ vardır veya F çift sabit noktaya sahiptir [50].

İspat

Varsayalım ki F çift sabit noktaya sahip olmasın. Teorem 6.6 dan Eş 6.4 ü sağlayacak şekilde $(x_0,y_0)\in K\times K$ vardır. Gösterelim ki $(x_0,y_0)\in(\partial K\times K\cup K\times\partial K)$ dır. Eş 6.4 den dolayı $F(x_0,y_0)\notin K$ veya $F(y_0,x_0)\notin K$ dır.

- $F(x_0, y_0) \notin K$ olması durumunda gösterelim ki $x_0 \in \partial K$ dır Varsayalım ki $x_0 \in K^0$ olsun.

Bu durumda $x = \lambda x_0 + (1-\lambda) F(x_0, y_0) \in K$ olacak şekilde $\lambda \in (0,1)$ vardır.

$$\begin{aligned} x = \lambda x_0 + (1-\lambda) F(x_0, y_0) &\Rightarrow x - F(x_0, y_0) = \lambda x_0 - \lambda F(x_0, y_0) \\ &\Rightarrow x - F(x_0, y_0) = \lambda (x_0 - F(x_0, y_0)) \\ &\Rightarrow \|x - F(x_0, y_0)\| = \lambda \|x_0 - F(x_0, y_0)\| \end{aligned}$$

olup

$$\inf_{x \in K} \|x - F(x_0, y_0)\| \leq \lambda \|x_0 - F(x_0, y_0)\| < \|x_0 - F(x_0, y_0)\|$$

dır. Bu ise Eş 6.4 ile çelişir.

- $F(y_0, x_0) \notin K$ olması durumunda gösterelim ki $y_0 \in \partial K$ dır Varsayalım ki $y_0 \in K^0$ olsun.

Bu durumda $y = \lambda y_0 + (1-\lambda) F(y_0, x_0) \in K$ olacak şekilde $\lambda \in (0,1)$ vardır.

$$\begin{aligned} y = \lambda y_0 + (1-\lambda) F(y_0, x_0) &\Rightarrow y - F(y_0, x_0) = \lambda y_0 - \lambda F(y_0, x_0) \\ &\Rightarrow y - F(y_0, x_0) = \lambda (y_0 - F(y_0, x_0)) \\ &\Rightarrow \|y - F(y_0, x_0)\| = \lambda \|y_0 - F(y_0, x_0)\| \end{aligned}$$

olup

$$\inf_{y \in K} \|y - F(y_0, x_0)\| \leq \lambda \|y_0 - F(y_0, x_0)\| < \|y_0 - F(y_0, x_0)\|$$

dır. Bu ise Eş 6.4 ile çelişir. Sonuç olarak $(x_0, y_0) \in (\partial K \times K \cup K \times \partial K)$ dir.■

KAYNAKLAR

1. Abbas, M., Jungck, G., "Common fixed point results for non commuting mappings without continuity in cone metric spaces", ***J. Math. Anal. Appl.,*** 341: 416-420 (2008).

2. Acharya, S.P., "Some results on fixed points in uniform spaces" ,***Yokohama Math. J.,*** 22(1-2): 105-116 (1974).

3. Assad, N.A., Kirk, W.A., "Fixed point theorems for set valued mappings of conractive type", ***Pasific J. Math.,*** 43: 553-562 (1972).

4. Aulin, J.P., Cellina, A., "Differential Inclusion", ***Springer.,*** Berlin, (1994)

5. Banach, S., "Sur les oprations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales", ***Fund. Math.,*** 3: 133-181 (1922).

6. Bardaro, C., Cepitelli, R., "Some further generalizations of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities", ***J. Math. Anal. Appl.,*** 132: 484–490 (1988).

7. Bardaro, C., Cepitelli, R., "Fixed point theorems and vector-valued minimax theorems", ***J. Math. Anal. Appl.,*** 146: 363–373 (1990).

8. Browder, F.E., "The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces", ***Math. Ann,.*** 177: 283–301 (1968).

9. Brouwer, L.E.J., "Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten", ***Math. Ann.,*** 71: 97-115 (1910).

10. Camaro, J.L.C., " An application of a fixed-point theorem of D.W. Boyd and J.S.W. Wong", ***Rev. Mat. Estalist.,*** 6: 25-29 (1988).

11. Chang, S.S., "Generalized KKM theorem and variational inequalities", ***J. Math. Anal. Appl.,*** 159: 208-223 (1991)

12. Chang, T.H., Yen, C.L., "KKM property and fixed point theorems, ***J. Math. Anal. Appl.,*** 203: 224-235 (1996)

13. Chang, S.S., Wu, X., Xiang, S.W., "A topological KKM theorem and minimax theorem", ***J. Math. Anal. Appl.,*** 182: 756–767 (1994).

14. Chang, S.S., Cho, Y.J., Wu, X. , Zhang, Y., "The topological versions of KKM theorems and Fan's matching theorem with applications", ***Top. Meth. Non. Anal.,*** 1: 231–245 (1993).

15. Chang, S.S., Huang, N.J., "Generalized strongly nonlinear quasi-complementarity problems in Hilbert spaces", ***J. Math. Anal. Appl.,*** 158: 194–202 (1991).

16. Chang, S.S., Huang, N.J., "Generalized multivalued implicit complementary problems in Hilbert spaces", ***Math. Japonica,*** 36: 1093–1100 (1991).

17. Chang, S.S., Ma, Y.H., "Generalized KKM theorem on H- space with applications", ***J. Math. Anal. Appl.,*** 163: 406–421 (1992).

18. Chatterjea, S.K., "Application of an extension of a theorem of Fisher on common fixed point", ***Pure Math Manuscript.,*** 6: 35-38 (1987).

19. Chen, Y.Q., Cho, Y.J., Kim, J.K., Lee, B.S., "Note on KKM maps and applications", ***Hindawi Publishing Corporation Fixed Point Theory and Applications,*** 1-9 (2006)

20. Chen, C.M., "KKM property and fixed point theorems in metric spaces", ***J. Math. Anal. Appl.,*** 323: 1231-1237

21. Ćirić, Lj.B., "Generalized contractions and fixed-point theorems", ***Publ. Inst. Math.,*** 12(26): 19-26 (1971).

22. Ćirić, Lj.B., "Fixed points for generalized multivalued mappings", ***Mat. Vesnik,*** 9(24): 265–272 (1972).

23. Ding, X.P., Tan, K.K., "Covering properties of H-spaces and applications", ***Applied. Math. Mech.,*** (English Ed.) 14: 1079–1088 (1993).

24. Ding, X.P., Kim, W.K., Tan, K.K., "Equilibria of non-compact generalized games with L*-majorized preference correspondences", ***J. Math. Anal. Appl.,*** 164: 508–517 (1992).

25. Ding, X.P., Kim, W.K., Tan, K.K., "A selection theorem and its applications", ***Bull. Austral. Math. Soc.,*** 46: 205–212 (1992).

26. Dube, L., Singh, S., "On multi-valued contraction mappings", ***Bull. Math. Soc. Sci. RSR,*** 14: 307–310 (1970).

27. Eilenberg, S., Montgomery, D., "Fixed point theorems for multivalued transformations", ***Amer. J. Math.,*** 68: 214–222 (1946).

28. Fan, K., "A generalization of Tychonoff's fixed point theorem", ***Math. Ann.,*** 142: 305–310 (1961).

29. Fan, K., "Simplicial maps from an orientable n- pseudomanifold into S^m with the octahedral triangulation", ***J. Comb. Theory,*** 2: 588–602 (1967).

30. Fan, K., “A covering property of simplexes”, ***Math. Scand.,*** 22: 17–20 (1968).

31. Fan, K., “Extensions of two fixed point theorems of F. E Browder”, ***Math. Z.,*** 112: 234–240 (1969).

32. Fan, K., “A combinatorial property of pseudoman folds and covering properties of simplexes”, ***J. Math. Anal. Appl.,*** 31: 68–80 (1970).

33. Fan, K., “A minimax inequality and its applications”, Inequalities III (O. Shisha, Ed.), ***Academic Pres.,*** 103–113 (1972).

34. Fan, K., “A survey of some results closely related to the Knaster-Kuratowski-Mazuriewicz theorem”, Game Theory and Applications, Econom. Theory Econometrics Math. Econom., ***Academic Pres.,*** 358–370 (1990).

35. Fisher, B., “Fixed points for set valued mappings on metric spaces”, ***Bull. Malaysian Math. Soc.,*** 4(2): 95-99 (1981).

36. Ganguly, A., “Fixed point theorems for three maps in uniform spaces”, ***Indian J. Pure Appl. Math.,*** 17(4): 476-480 (1986).

37. Horvath, C., “Points fixes et coincidences pour les applications multivoques sans convexite”, ***C. R. Acad. Sci.,*** Paris 296: 403–406 (1983).

38. Horvath, C., “Some results on multivalued mappings and inequalities without cenvexity”, Nonlinear and Convex Analysis (B. L. Lin and S. Simons, eds.), ***Marcel Dekker,*** 96–106 (1987).

39. Horvath, C., “Contractiblity anad generalized convexity”, ***J. Math. Anal. Appl.,*** 156: 341–357 (1991).

40. Huang, L.G., Zhang, X., “Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings”, ***J. Math. Anal. Appl.,*** 332: 1468-1476 (2007).

41. Ichiishi, T., “Alternative version of the Shapley’s theorem on closed coverings of sipmles”, ***Proc. Amer. Math. Soc.,*** 104: 759–763 (1988).

42. Ichiishi, T., Idzik, A., “Theorems on closed coverings of a simplex and their applications to cooperative game theory”, ***J. Math. Anal. Appl.,*** 146: 259–270 (1990).

43. Idzik, A., Tan, K.K., “Covering properties of simplexes”, ***J. Math. Anal. Appl.,*** 176: 608–616 (1993).

44. Ilić, D., Rakočević, V., “Common fixed points for maps on cone metric spaces”, ***J. Math. Anal. Appl.,*** 34: 876-882 (2008).

45. İnternet:“Yarı sürekli fonksiyonlar”, http://akademik.maltepe.edu.tr/~hcakalli/Fonksiyonel%20Analizden%20Konular/

46. Jeng, J.C., Hsu, H.C., Huang, Y.Y., “Fixed point theorems fos multifunctions having KKM property on almost convex sets”, ***J. Math. Anal. Appl.,*** 319: 187-198 (2006).

47. Knaster, B., Kuratowski, C., Mazurkiewicz, S., “Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n- dimensionale simplexe”, ***Fund. Math.,*** 14: 132–137 (1929).

48. Lan, K., “A generalization of H-space and some results on multivalued mappings without convexity”, ***J. Math. Anal. Appl.,*** 194: 511–528 (1995).

49. Mishra, S.N., Singh, S.L., “Fixed point of multi-valued mapping in uniform spaces”, ***Bull. Cal. Math. Soc.,*** 77:323-329 (1985).

50. Mitrović, Z.D., “A coupled best approximations theorem in normed spaces”, ***Nonlinear Analysis,*** 72: 4049-4052 (2010).

51. Nadler, S.B., “Multivalued contraction mappings”, ***Pasific J. Math.,*** 30: 475-488 (1969).

52. Neumann, J. von, “Zur theorie der gesellschaftsspiele”, ***Math. Ann.,*** 100: 295–320 (1928).

53. Park, S. “The KKM principle in abstract convex spaces: Equivalent formulations and applications”, ***Nonlinear Analysis,*** 73: 1028–1042 (2010).

54. Park, S., “Elements of the KKM theory for generalized convex spaces”, ***Korean J. Comput. Appl. Math.,*** 7: 1–28 (2000).

55. Park, S., “Equilibrium existence theorems in KKM spaces”, ***Nonlinear Analysis,*** 69: 4352–4364 (2008).

56. Rezapour, S., Halmbarani, R., “Some notes on paper cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings” , ***J. Math. Anal. Appl.,*** 345: 719-724 (2008).

57. Schauder, J., “Der fixpunktsatz in funktionalramen”, ***Studia Math.,*** 2: 171-180 (1930).

58. Shih, M.H., Tan, K.K., “Covering theorems of simplexes and systems of linear inequalities”, ***Linear and Multilinear Algebra,*** 19: 309–320 (1986).

59. Shih, M.H., Tan, K.K., “Covering theorems of convex sets related to fixed points theorems”, Nonlinear and Convex Analysis, proceeding in Honor of Ky Fan (B. L Lin and S. Simons, eds.), ***Marcel Dekker, Inc.,*** New York, 235–244 (1987).

60. Shih, M.H., Tan, K.K., “Shapley selections and covering theorems of simplexes”, Nonlinear anad Convex Analysis (B. L. Lin and S. Simons, eds.), ***Marcel Dekker, Inc.,*** 245–251 (1987).

61. Singh, S.L., “Approximating fixed points of multivalued maps”, ***J. Natur. Phys. Sci.,*** 2(1-2): 51-61 (1988).

62. Sperner, E., “Neuer Beweis für die invarianz der dimensionszahl und des gebietes, ***Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,*** 6: 265–272 (1928).

63. Şahin, D., Telci, M., “Fixed Points of Contractive mappings on complete cone metric spaces”, ***Hacettepe Journal of Mathematics and Statisticts*** Volume, 38 (1): 59-67 (2009).

64. Tan, K.K., Yu, J., Yuan, X.Z., “Some new minimax inequalities and applications to generalized games in H- spaces”, ***Nonlinear Anal. T. M. A.,*** 24: 1457–1470 (1995).

65. Tarafdar, E., “A fixed point theorem in H- space and related results”, ***Bull. Austral. Math. Soc.,*** 42: 133–140 (1990).

66. Türkoğlu, D., Abuloha, M., Abdeljawad, T., “KKM mappings in cone metric spaces and some fixed point theorems”, ***Nonlinear Analysis,*** 72: 348-353 (2010).

67. Türkoğlu, D., “Fixed point theorems on uniform spaces”, ***Indian J. Pure and Appl. Math.,*** 34(3): 453-459 (2003).

68. Türkoğlu, D., “Some common fixed point theorems for weakly compatible mappings in uniform spaces”, ***Acta Math. Hungar.,*** 128(1-2): 165-174 (2010).

69. Türkoğlu, D., Altun, İ., “A fixed point theorem for multivalued mappings and its applications to integral inclusions”, ***Appl. Math. Lett.,*** 20: 563-570 (2007).,

70. Türkoğlu, D., Aslan, H., “A fixed point theorem for two pairs of multivalued mappings on two complete uniform spaces”, ***Set Valued Mathematics and Applications***, 1(2): 183-195 (2008).

71. Türkoğlu, D., Özer, O., Fisher, B., “Some fixed point theorems for set valued mappings in uniform spaces”, ***Demonst. Math.,*** 32(2) : 395-400 (1999).

72. Türkoğlu, D., Abuloha, M., "Cone metric space and fixed point theorems in diametrically contractive mappings", ***Acta Math. Sinica English Series***, 26(3): 489–496 (2010).

73. Vetro, P., "Common fixed points in cone metric spaces", ***Rend. Circ. Mat. Palermo,*** 56: 464–468 (2007).

74. Xian, G., Yuan, Z., "KKM Theory and Applications in Nonlinear Analysis", ***Marcel Dekker, Inc.,*** New York, (1999).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: GÜNGÖR, Emrah
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 14.10.1986 Alaca
Medeni hali	: Bekâr
Telefon	: 0506 326 38 80
Email	: emrahgungor@msn.com

Eğitim

Derece	**Eğitim birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	: Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü	2008
Lise	: Aydınlıkevler İnönü Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2009-	Beşikkaya İlköğretim Okulu	Öğretmen