

**HOMOJEN OLMAYAN ZAYIF SÖNÜMLÜ KORTEWEG-DE VRIES
DENKLEMİNİN ZAMANDAN BAĞIMSIZ ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

MİNE UZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MART 2011

ANKARA

Mine UZ tarafından hazırlanan “HOMOJEN OLMAYAN ZAYIF SÖNÜMLÜ KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN ZAMANDAN BAĞIMSIZ ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE” adlı bu tezin yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ
Tez danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç.Dr. Meryem KAYA
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Tarih: 03/03/2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mine UZ

**HOMOJEN OLMAYAN ZAYIF SÖNÜMLÜ KORTEWEG-DE VRIES
DENKLEMİNİN ZAMANDAN BAĞIMSIZ ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE
(Yüksek Lisans Tezi)**

Mine UZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mart 2011

ÖZET

Bu tezde periyodik sınır değer şartlarıyla verilmiş zayıf sönümlü Korteweg-de Vries denkleminin zamandan bağımsız çözümlerinin varlık ve teklifi incelenmiştir. Zayıf sönümlü Korteweg-de Vries denklemlerinin her çözümünün $t \rightarrow \infty$ için zamandan bağımsız çözüme yakınsadığı gösterilmiştir. Bunun yanında, lineer olmayan dalga denklemlerinin yerel olmayan çekicisinin varlığı üzerine çalışılmıştır. Birinci bölümde, ele alınan periyodik sınır değer problemi tanımlanmış ve bu alanda yapılmış çalışmalar belirtilmiştir. İkinci bölümde, temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, problemin çözümünün varlık ve teklifi incelenmiştir. Dördüncü bölümde, bu problemin yutan kümeye sahip olduğu ispatlanmış ve son bölümde, bu problem için yerel olmayan çekicilerin varlığı gösterilmiştir. Çalışma, literatürde bilinen sonuçlar araştırılarak oluşturulmuştur.

Bilim Kodu :204.1.138

Anahtar Kelimeler :KdV denklemi, zamandan bağımsız (kararlı)çözüm, yutan küme, yerel olmayan çekici

Sayfa Adedi :51

Tez Yöneticisi :Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ

STEADY STATE SOLUTION FOR THE WEAKLY DAMPED FORCED**KORTEWEG-DE VRIES****(M. Sc. Thesis)****Mine UZ****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****March 2011****ABSTRACT**

In this thesis, the existence and uniqueness of steady state solution for the weakly damped forced Korteweg-de Vries equation with a periodic boundary value problem is examined. The every solution of the weakly damped forced Korteweg-de Vries equation converges to the steady state solution as time $t \rightarrow \infty$. The existence of the global attractor of the nonlinear wave equation is studied. In this first chapter, the periodic boundary value problem is defined and some of the works on this subject are mentioned. In the second, basic terms are given. In the third, existence and uniqueness of the solution of the problem are shown. In the fourth, it is proved that the problem has an absorbing set and in the last chapter, existence of the global attractor of the problem is shown. The work is consist of the common results in the litterateur.

Bilim Kodu :204.1.138**Anahtar Kelimeler :KdV equation, steady state solution, absorbing set, global attractor****Sayfa Adedi :51****Tez Yöneticisi :Assist. Prof. Dr. Ülkü DİNLEMEZ**

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla bu tezi oluőturmamda yardımcı olan ve beni yönlendiren değerli hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ' e ve çalıőmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen aileme teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNBİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Bazı Fonksiyon Uzayları.....	4
2.2 Temel Tanımlar.....	5
2.3 Bazı kullanılan Teorem, Lemma ve Sonuçlar.....	6
2.4 Kullanılan Eşitsizlikler	8
3. VARLIK VE TEKLİK.....	11
4. YUTAN KÜMENİN ELDE EDİLMESİ.....	22
5. LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİNİN YEREL OLMAYAN ÇEKİCİSİNİN VARLIĞININ GÖSTERİLMESİ.....	43
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	51

1. GİRİŞ

Bu tezde esas amaç, $\gamma > 0$ ve β reel sabitler olmak üzere

$$u_t + u_{xxx} + \gamma u + \beta u u_x = f(x) \quad (1.1)$$

Korteweg-de Vries denklemlerinin zamandan bağımsız çözümlerinin varlık ve tekliği gösterilerek, bu denklemin yerel olmayan çekicilerinin varlığını incelemektir.

Eş. 1.1'in kararlı durum çözümünü, yani:

$$u''' + \gamma u + \beta u u' = f(x) \quad (1.2)$$

$$u(0) = u(1), u'(0) = u'(1), u''(0) = u''(1) \quad (1.3)$$

lineer olmayan periyodik sınır değer problemini göz önüne alalım. $\Omega = [0,1]$ olsun.

Yukarıda:

$H^3(\Omega) = \{u \in C(\Omega, R) : j = 0,1,2 \text{ için } \frac{d^j u}{dx^j} \text{ } \Omega \text{ üzerinde mutlak sürekli ve}$

$$\frac{d^3 u}{dx^3} \in L^2(\Omega)\}$$

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \|u\| = \left(\int_{\Omega} u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ ve}$$

$$D(L) = \{u \in H^3(\Omega) : u, u(0) = u(1), u'(0) = u'(1), u''(0) = u''(1) \text{ sağlar}\}$$

$L: D(L) \subset C^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ lineer operatör olmak üzere

$$u \in D(L) \text{ için } Lu = \frac{d^3 u}{dx^3} + \gamma u \text{ biçiminde tanımlanır.}$$

Eş 1.1 ile belirtilen denklem 75 yıl önce D.J.Korteweg ve G.de Vries tarafından bir kanaldaki geniş su dalgalarının yayılımını göstermek amacıyla ortaya çıkarılmıştır. Daha sonra bu denklem Lamb tarafından yetersiz tanımlarla hidrodinamikler üzerindeki muazzam bilimsel bir çalışma ile kopya edildi. Aynı denklem farklı fizik

sistemlerindeki dalgalar için bir temel model olarak kullanılmaya başlandı. Birçok fizikçi ve matematikçinin ilgisini çekti. Eş.1.1 denklemi ya da ona benzer denklemler, genel olarak Korteweg-de Vries denklemi olarak bilinmeye başladı. Lineer olmayan dağıtıcı ortamdaki yönü olmayan geniş dalgaların davranışı hakkında bilgi sahibi olmak için uygulandı [1].

Benjamin (1974) [2] , Jeffrey&Kakutani (1972) [3] , Miura (1974) [4] ve Scott, Chu&McLaughlin [5] in makalelerinde bu denklemin daha zenginleştirilmiş şekli yer aldı.

Sjöberg (1967) [6] tarafından Uppsala Üniversitesi Bilgisayar Bilim bölümünde KdV için titiz bir varlık teoremi başlatıldı. Sjöberg(1970) [7] periyodik veri için, L_2 de üçüncü mertebeden türevlere sahip KdV denkleminin çözümlerinin varlığını ispatladı. Aynı problem için Temam (1969) L_2 de bir yada ikinci mertebeden türevler ile periyodik başlangıç değerine karşılık gelen zayıf çözümlerin varlığını gösterdi [8].

Kametaka (1969) bu başlangıç değer probleminin çözümlerinin L_2 de üçüncü mertebeden daha küçük türevlere sahip olduğunu açıkladı [9].

Tsutsumi&Mukasa (1971) KdV konusunda uzmanlaşarak, $m \geq 1$ olmak üzere L_2 de m. mertebeden türevlere karşılık gelen başlangıç verisi ile çözümlerin varlığını göstermiştir [10].

Tsutsumi&Mukasa&Iino (1970) bu başlangıç değer problemini göz önüne alarak genelleştirilmiş bir KdV için sonuçlar ortaya koymuştur ve $m \geq 1$ olmak üzere L_2 de m. mertebeden türevlere karşılık gelen başlangıç verisi ile çözümlerin varlığını göstermiştir [11].

Menikoff (1972) KdV nin sınırlı olmayan çözümlerinin varlığını ispatladı [12].

Bu çalışma ise literatürde varolan çalışmalar araştırılarak oluşturulmuştur. Lineer olmayan dalga denkleminin yapısal kararlılığı araştırılmıştır. Yani homojen olmayan zayıf sönümlü Korteweg-de Vries denkleminin varlık ve tekliği araştırılmış, bu

denklemin yutan kümesinin nasıl oluşturulduğu bulunmuştur. En son olarak da Eş.1.1 de verilen denklemin yerel olmayan çekicisinin varlığı üzerinde çalışılmıştır.

2. ÖNBİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Bazı Fonksiyon Uzayları

2.1. Tanım

Bir $(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayı içinde alınan her Cauchy dizisi norma göre yakınsak ise bu normlu uzaya bir Banach uzayı denir [15].

2.2. Tanım

$p \geq 1$ gerçel sayı olmak üzere \mathbb{R}^n üzerinde

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir u fonksiyonlarının sınıfına, $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı denir. Bu uzay üzerindeki normu da

$$\|u\|_p = \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır [14].

2.3. Tanım

$m > 0$ tamsayı, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere kendisi ve m. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına ait olan fonksiyonlar uzayına $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ Sobolev Uzayı denir. Yani

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L_p(\mathbb{R}^n) \mid \forall |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L_p(\mathbb{R}^n) \right\}$$

dır. Bu uzay üzerindeki norm ise $\|u\|_{m,p,\mathbb{R}^n} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ şeklinde tanımlanır [13].

2.2. Temel Tanımlar

2.4. Tanım

V Banach Uzayı $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, V üzerinde tanımlı operatörler ailesi olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın,

I. $S(0) = I$

II. $S(t+s) = S(t) \cdot S(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+$

III. $S(t)x_0$, x_0 ve t ye göre süreklidir.

Bu durumda $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ailesine sürekli yarıgrup denir [16].

2.5. Tanım

Eğer A , H 'nin sınırlı kümelerini çeken bir kompakt çeken ise, bu durumda $A \subset H$ atraktörüne $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ yarıgrubu için bir yerel olmayan çekici denir [16].

2.6. Tanım

B , H nin bir altkümesi ve U , B yi içeren bir açık küme olsun. Eğer; belli bir zaman sonra, $\forall B_0 \subset U$, (B_0 sınırlı) olmak üzere $\forall t \geq t_1(B_0)$ için $S(t)B_0 \subset B$ olacak şekilde $\exists t_1(B_0)$ varsa B ye U da yutan küme denir [16].

2.7. Tanım

$\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ var öyle ki $\sum_{i=1}^n |x_i - x'_i| < \delta$ ile $\{(x_i, x'_i)\}$ ayrık aralıklarının her sonlu toplamı için $\sum_{i=1}^n |f(x'_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ oluyorsa, $[a, b]$ üzerinde tanımlı reel değerli f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli fonksiyon denir [26].

2.8. Tanım

Bir X topolojik uzayının bir A alt uzayının kendisi kompakt olmadığı halde \bar{A} kapanışı kompakt ise bu alt uzaya göreceli kompakt uzay denir [15].

2.3. Bazı kullanılan Teoremler, Lemmalar ve Sonuçlar

2.1. Teorem (Peona-Varlık)

$g(t,u)$ fonksiyonu $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, $|u| < \infty$ bölgesinde sürekli ve sınırlı olsun. Bu durumda

$$u' = g(t, u)$$

$$u(t_0) = u_0$$

başlangıç değer problemi, $[t_0, t_0 + a]$ aralık üzerinde tanımlı en az bir $u(t)$ çözümüne sahiptir.

2.2. Teorem

$\gamma \in \mathbb{R}$ ve $f \in H_{per}^k(\Omega)$, $k \geq 2$ olsun. Bu durumda $u_0 \in H_{per}^k(\Omega)$ için,

$$u_t + u_{xxx} + \gamma u + uu_x = f$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

denkleminin $[-T, T]$ ye kısıtlanmış $u = u(t)$ çözümü tüm $\forall T > 0$ için $\varphi([-T, T], H_{per}^k(\Omega))$ ya aittir.

$$u_t + u_{xxx} + \gamma u + uu_x = f$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

denkleminin t zamanındaki çözümü $u(t)$ olduğunda tüm $u_0 \in H_{per}^k(\Omega)$ için $H_{per}^k(\Omega)$ üzerindeki $\{S^{(k)}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ grubunu $S^{(k)}(t)u_0 = u(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ olarak tanımlayabiliriz. Herbir $t \in \mathbb{R}$ için, $S^{(k)}(t)$, $H_{per}^k(\Omega)$ üzerinde zayıf ve güçlü süreklidir ve $C(R, T)$, R ve T ye bağlı bir sabit olmak üzere :

$$\sup_{\substack{|t| \leq T \\ \|u_0\|_k \leq R}} \|S^{(k)}(t)u_0\|_k \leq C(R, T), \quad \forall T, R > 0$$

sağlanır [16].

2.3. Teorem

H bir metrik uzay olsun ve $S(t)$ sürekli yarı grubu verilsin. $t_1 > 0$ için $S(t_1)$ kompakt olsun. Ayrıca bir U açık kümesi ve B , U da yutan küme olmak üzere U nun bir sınırlı kümesinin B olduğunu kabul edelim. Bu durumda B nin w -limit kümesi $A = w(B)$, U nun sınırlı kümelerini çeken bir kompakt atraktördür [16].

2.1. Lemma

H daki her sınırlı $\{x_k\}$ dizisi için $t_k \rightarrow \infty$ iken $\{S(t_k)x_k\}_k$ dizisi H da yerel kompakt olduğunda, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ yarı grubu asimptotik kompakt olur [16].

2.2. Lemma

Her sınırlı B kümesi için B ya bağlı bir t_0 mevcuttur öyle ki $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B$, H da yerel kompakt olduğunda $S(t)$ operatörleri büyük t ler için düzgün kompakttır [16].

2.4. Lemma

Bir $\rho_k = \rho_k(\gamma, L, \|f\|_k)$ sabiti ve $\forall R > 0$ için $T_k = T_k(R, \gamma, L, \|f\|_k)$ mevcuttur öyle ki;

$$\|S^{(k)}(t)u_0\|_k \leq \rho_k, \quad \forall t \geq T_k, \quad \forall u_0 \in H_{per}^k(\Omega), \quad \|u_0\|_k \leq R.$$

Buradan $H_{per}^k(\Omega)$ nin orijin merkezli ρ_k yarıçaplı B_k yuvarı, $\{S^{(k)}(t)\}_{t \geq 0}$ yarıgrubu için $H_{per}^k(\Omega)$ de yutandır [16].

2.1. Sonuç

$k \geq 2$ için $t \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $f \in H_{per}^k(\Omega)$ ve $u_0 \in H_{per}^k(\Omega)$ olmak üzere $u = u(t) = S^{(k)}(t)u_0$ çözümü $m=0, 1, 2, \dots$ için $D = \partial/\partial x$,

$$I_m(u) = \int_{\Omega} \left[(D^m u)^2 - \alpha_m u (D^{m-1} u)^2 + \varphi_m(u, Du, \dots, D^{m-2} u) \right] dx,$$

$$\frac{d}{dt} I_m(u) = \int_{\Omega} \left[2(-1)^m D^{2m} u - \alpha_m (D^{m-1} u)^2 + 2\alpha_m (-1)^m D^{m-1} (uD^{m-1} u) \right] u_t dx$$

$$+ \int_{\Omega} \left[\sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j D^j \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_j}(u, Du, \dots, D^{m-2} u) \right) \right] u_t dx,$$

$$L_m(u) = 2(-1)^m D^{2m} u - \alpha_m (D^{m-1} u)^2 + 2\alpha_m (-1)^m D^{m-1} (uD^{m-1} u)$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j D^j \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_j}(u, Du, \dots, D^{m-2} u) \right) \text{ ve,}$$

$$\frac{d}{dt} I_m(u) = \int_{\Omega} L_m(u) u_t dx \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{d}{dt} I_m(u) + \gamma(u, L_m(u))_{L^2} = (f, L_m(u))_{L^2}, \text{ enerji denklemini sağlar [16].}$$

2.4. Kullanılan Eşitsizlikler

2.1. Young Eşitsizliği

$p, q \leq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{\varepsilon^q q} \quad (a, b > 0) \quad (\varepsilon > 0)$$

olur [15].

2.2. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} üzerindeki iç çarpım ve \mathbb{R} üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış norm:

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}} \text{ dir [15].}$$

2.3. Bir Boyutlu Uzayda Agmon Eşitsizliği

\mathbb{R} deki kompakt destekli herhangi bir düzgün g fonksiyonu ile,

$$|g(x)|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |g(\varepsilon)|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g'(\varepsilon)|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

olarak tanımlanır [16].

2.4. Gagliardo-Nirenberg Eşitsizliği

j, m $0 \leq j < m$ şartını sağlayan herhangi birer tamsayı ve $1 \leq q, r < \infty$ olsun ve

$$p \in \mathbb{R}, \quad \frac{j}{m} \leq a \leq 1 \text{ öyle ki;}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = a \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1-a) \frac{1}{q},$$

dır. Bu durumda herhangi bir $u \in W^{m,r}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ için n, m, j, q, r, a ya bağlı bir pozitif C sabiti vardır öyle ki;

$$|D^j u|_p \leq C |D^m u|_r^a |u|_q^{1-a} \text{ eşitsizliğini sağlar.}$$

Eğer $1 < r < \infty$ ve $m - j - \frac{n}{r}$ negatif olmayan bir tamsayı ise bu durumda yukarıdaki eşitsizlik $\frac{j}{m} \leq a \leq 1$ için sağlanır [16].

2.5. Wirtinger Eşitsizliği

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, \mathbb{R} üzerinde sürekli ve sürekli türevlere sahip periyodik bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^a |f|^2 \leq \frac{a^2}{\pi^2} \int_0^a |f'|^2$$

olur. Burada $f \in C^1$. Öyle ki $f(0) = f(a) = 0$ dır [16].

2.6. Hölder Eşitsizliği

$1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$ ise,

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}$$

olur [15].

2.7. Gronwall Lemması

$\eta(\cdot)$, $[0, T]$ aralığında sürekli, negatif olmayan bir fonksiyon, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$, $[0, T]$

aralığında integrallenebilen, negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği geçerli ise, her $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right] \text{ olur [16].}$$

3. VARLIK VE TEKLİK

Burada Eş.1.1 ile verilen denklemin çözümünün varlık ve tekliğini aşağıdaki teoremler yardımıyla göstereceğiz:

3.1. Teorem

$f \in L^2(\Omega)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Eş.1.2-Eş.1.3 sınır değer problemi en az bir çözüme sahiptir.

İspat

Eş.1.2-Eş.1.3 sınır değer probleminin en az bir çözümünün varlığını elde etmek için 2.1.Teoremini kullanarak aşağıdaki denklemlerin mümkün olan çözümlerinin $\lambda \in [0,1]$ deki bağımsız sabiti ile, $C^2(\Omega)$ da düzgün sınırlı olduğunu göstermek için yeterli olacaktır.

$$u''' + \gamma u + \lambda \beta u u' = \lambda f(x) \quad (3.1)$$

$$u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1), \quad u''(0) = u''(1) \quad (3.2)$$

$u''' + \gamma u + \lambda \beta u u' = \lambda f(x)$ denklemini $L^2(\Omega)$ anlamında u ile çarpalım.

$$(u''', u) + \gamma(u, u) + \lambda \beta(u u', u) = (\lambda f(x), u) \quad (3.3)$$

Eş.3.3 denklemindeki iç çarpımları teker teker sırayla elde edersek:

$$\begin{aligned} (u_{xxx}, u) &= \int_{\Omega} u_{xxx} u dx = \int_{\Omega} ((u_{xx} u)_x - u_{xx} u_x) dx \\ &= \int_0^1 (u_{xx} u)_x dx - \int_0^1 u_{xx} u_x dx \\ &= u_{xx}(1)u(1) - u_{xx}(0)u(0) - \int_0^1 u_{xx} u_x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^1 u_{xx} u_x dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 (u_x^2)_x dx \\
&= -\frac{1}{2} [u_x^2(1) - u_x^2(0)] = 0
\end{aligned}$$

$$(\gamma u, u) = \gamma \int_{\Omega} u u dx = \gamma \int_0^1 u^2 dx = \gamma \|u\|^2$$

$$(u u_x, u) = \int_{\Omega} u^2 u' dx = \frac{1}{3} \int_{\Omega} (u^3)_x dx = \frac{1}{3} [u^3(1) - u^3(0)] = 0$$

$$(f(x), u) = \int_{\Omega} f u dx \leq \int_{\Omega} |f u| dx = \int_{\Omega} |f| |u| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\| \|u\|$$

bulunur. Bunlar Eş.3.3 de yerine yazılırsa,

$$\Rightarrow \gamma \|u\|^2 \leq \|f\| \|u\|$$

$$\Rightarrow \|u\| \leq \frac{\|f\|}{\gamma}$$

(3.4)

elde ederiz.

Şimdi de $u''' + \gamma u + \lambda \beta u u' = \lambda f(x)$ denklemini u' ile çarpıp Ω üzerinden integralini alırsak,

$$(u_{xxx}, u_x) = \int_{\Omega} u_{xxx} u_x dx = \int_{\Omega} ((u_{xx} u_x)_x - (u_{xx})^2) dx = \int_{\Omega} (u_{xx} u_x)_x dx - \int_{\Omega} (u_{xx})^2 dx = -\|u''\|^2,$$

$$(u, u_x) = \int_{\Omega} u u_x dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^2)_x dx = \frac{1}{2} [u^2(1) - u^2(0)] = 0,$$

$$\begin{aligned}
(\lambda\beta uu_x, u_x) &\Rightarrow \left| \lambda\beta \int_{\Omega} uu_x^2 dx \right| = \lambda\beta \left| \int_{\Omega} uu_x^2 dx \right| \leq \lambda\beta \int_{\Omega} |uu_x^2| dx = \lambda\beta \int_{\Omega} |u| |u_x|^2 dx \\
&\leq \lambda\beta \left(\int_{\Omega} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_x|^4 \right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}} \\
&= \lambda\beta \|u\| \left[\left(\int_{\Omega} |u_x|^4 \right)^{\frac{1}{4}} \right]^2 \\
&= \lambda\beta \|u\| (\|u_x\|_{L^4}^2)
\end{aligned}$$

$$\left| \lambda \int_{\Omega} fu_x dx \right| \leq \left| \lambda \int_{\Omega} |f| |u_x| dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx = \|f\| \|u_x\|$$

elde edilir.

Yukarıda 2.2 tanımı ve 2.2 eşitsizliği kullanıldı.

Sonuçta;

$$-\|u_x\|^2 + \lambda\beta \int_{\Omega} uu_x^2 dx = \lambda \int_{\Omega} fu_x dx \tag{3.5}$$

Şimdi 2.4 eşitsizliği kullanılırsa;

Bu eşitsizlikte $u \in W^{2,2} \cap L^2$ olmak üzere $C > 0$ sabiti var, öyle ki; L^4 de çalıştığımız için $p=4, j=1, n=1, r=2, m=2, q=2$ dir. Ayrıca burada $0 \leq j < m$ ve $1 \leq q, r < \infty$ ve

$p \in \mathbb{R}, \frac{j}{m} \leq a \leq 1$ dir. Burada;

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = a \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1-a) \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{1} = a \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{1} \right) + (1-a) \frac{1}{q}$$

$$-\frac{3}{4} = -\frac{3a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{5}{8}$$

elde ederiz.

$$|D^j u|_p \leq C |D^m u|_r^a |u|_q^{1-a}$$

$$\|u'\|_{L^4} \leq C \|u''\|_{L^8}^{\frac{5}{8}} \|u\|_{L^8}^{\frac{3}{8}}$$

$$\|u'\|_{L^4}^2 \leq C \|u''\|_{L^4}^{\frac{5}{4}} \|u\|_{L^4}^{\frac{3}{4}}$$

$$\|u'\|_{L^4}^2 \|u\| \leq C \|u''\|_{L^4}^{\frac{5}{4}} \|u\|_{L^4}^{\frac{7}{4}}.$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \left| \lambda \beta \int_{\Omega} uu'^2 \right| &\leq |\beta| \|u\| \|u'\|_{L^4}^2 \leq |\beta| \|u''\|_{L^4}^{\frac{5}{4}} \|u\|_{L^4}^{\frac{7}{4}} \\ &\leq \frac{\varepsilon^{\frac{8}{5}} (\|u''\|_{L^4}^{\frac{5}{4}})^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + \frac{(|\beta| \|u\|_{L^4}^{\frac{7}{4}})^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3} \varepsilon^{\frac{8}{3}}} \\ &\leq \frac{1}{4} \|u''\|^2 + \frac{3 |\beta|^{\frac{8}{3}} \|u\|_{L^4}^{\frac{14}{3}}}{8 \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}}} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda 2.1 eşitsizliğinde $p = \frac{8}{5}$, $q = \frac{8}{3}$ alınmıştır

$$\left| \lambda \beta \int_{\Omega} uu'^2 dx \right| \leq \frac{1}{4} \|u''\|^2 + \frac{3 |\beta|^{\frac{8}{3}} \|u\|_{L^4}^{\frac{14}{3}}}{8 \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}}} \quad (3.6)$$

$$\left| \lambda \int_{\Omega} fu' dx \right| \leq \|u'\| \|f\| \leq \|f\| \|u''\|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^4}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon^4 \left(\|u''\|_{\frac{1}{2}} \right)^4}{4} + \frac{\left(\|f\| \|u\|_{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3} \varepsilon^{\frac{4}{3}}}$$

elde edilir. Burada 2.1 eşitsizliğinde $p=4$, $q = \frac{4}{3}$ alınmıştır. Böylece

$$\left| \lambda \int_{\Omega} f u' dx \right| \leq \frac{1}{4} \|u''\|^2 + \frac{3}{4} \|f\|_{\frac{4}{3}} \|u\|_{\frac{2}{3}}^2. \quad (3.7)$$

Eş.3.3, Eş.3.4, Eş.3.5, Eş.3.6 leri aşağıdaki ifadelerde kullanılırsa;

Eş.3.1 de $\|u''\|^2$ ifadesi:

$$\|u''\|^2 = \lambda \beta \int_{\Omega} u u'^2 dx - \lambda \int_{\Omega} f u' dx = \lambda \left(\beta \int_{\Omega} u u'^2 dx - \int_{\Omega} f u' dx \right)$$

$$\|u''\|^2 \leq \frac{1}{4} \|u''\|^2 + \frac{3}{8} \frac{|\beta|^{\frac{8}{3}} \|u\|_{\frac{14}{3}}^{\frac{14}{3}}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{4} \|u''\|^2 + \frac{3}{4} \|f\|_{\frac{4}{3}} \|u\|_{\frac{2}{3}}^2$$

$$\frac{\|u''\|^2}{2} \leq \frac{3}{8} |\beta|^{\frac{8}{3}} \left(\frac{\|f\|}{\gamma}\right)^{\frac{14}{3}} \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}}} + \frac{3}{4} \|f\|_{\frac{4}{3}} \left(\frac{\|f\|}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\|u''\|^2 \leq \frac{3}{4} |\beta|^{\frac{8}{3}} \left(\frac{\|f\|}{\gamma}\right)^{\frac{14}{3}} \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}}} + \frac{3}{2} \frac{\|f\|^2}{\gamma^{\frac{2}{3}}}$$

Daha sonra bu eşitsizliğin karekökünü alalım:

$$\left(\|u''\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} |\beta|^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{6}}} \left(\frac{\|f\|}{\gamma}\right)^{\frac{7}{3}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\|f\|}{\gamma^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$$M_0 = 2^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} |\beta|^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{6}}} \left(\frac{\|f\|}{\gamma}\right)^{\frac{7}{3}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\|f\|}{\gamma^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$$\|u''\| \leq M_0. \quad (3.8)$$

Böylece λ dan bağımsız bir M_0 sabiti vardır.

$n=1 < p=2$ olmak üzere

2.3 eşitsizliğinden $\|u\|_{\infty} \leq \|u\|^{\frac{1}{2}} (2\|u'\| + \|u\|)^{\frac{1}{2}}$ olur.

2.5 eşitsizliğinden

$$\|u\| \leq \frac{1}{2\pi} \|u'\|$$

$$\|u'\| \leq \frac{1}{2\pi} \|u''\| \quad (3.9)$$

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \|u''\|^{\frac{1}{2}} \left(\|u''\| + \frac{1}{4\pi^2} \|u''\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u\|_{\infty} \leq M_0 \quad (3.10)$$

elde edildi.

$$\text{Aynı şekilde } \|u'\|_{\infty} \leq M_0 \text{ elde edilir} \quad (3.11)$$

$$u''' = -\gamma u - \beta u u' + f(x)$$

$$\int_{\Omega} u''' dx = \int_{\Omega} -\gamma u dx - \int_{\Omega} \beta u u' dx + \int_{\Omega} f(x) dx$$

$$\|u'''\|_{L_1} \leq \gamma \|u\| + |\beta| \|u\| \|u'\| + \|f\|$$

Sonuç olarak λ dan bağımsız bir $M_1 = |\beta| \frac{M_0 \|f\|}{2\pi\gamma} + 2\|f\|$ sabiti vardır öyle ki;

$$\|u'''\|_{L_1} \leq M_1 \text{ dir.} \quad (3.12)$$

$u'(0) = u'(1)$, bu durumda $y \in (0,1)$ mevcuttur. Öyle ki $u''(y) = 0$ dir. Böylece,

$$u''(x) = \int_y^x u'''(t) dt .$$

Bu dolaylı olarak şunu gösterir:

$$u''(x) = \int_y^x u'''(t) dt \leq \int_{\Omega} u'''(t) dt = \|u'''\|_{L_1} .$$

Daha sonra bu eşitsizliğin her iki tarafında supremum alınırsa

$$\sup_{x \in \Omega} u''(x) = \sup_{x \in \Omega} \int_y^x u'''(t) dt \leq \|u'''\|_{L_1}$$

$$\|u''\|_{\infty} \leq \|u'''\|_{L_1}$$

$$\|u''\|_{\infty} \leq \|u'''\|_{L_1} \leq M_1 . \quad (3.13)$$

Eş.3.11-Eş.3.13 den bir $\lambda \in [0,1]$ bağımsız sabiti ile Eş.1.4 ün $C^2(\Omega)$ daki olası çözümlerinin sınırlı olduğu sonucunu çıkarırız. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.2. Teorem

3.1 Teoreminin varsayımı altında kabul edelim ki;

$$|\beta| < \frac{2\pi^2}{M_0} \quad (3.14)$$

olsun. Bu durumda Eş.1.2-Eş.1.3 problemi bir tek çözüme sahiptir .

İspat

3.1 Teoremi ile varsayalım ki Eş.1.2-1.3 ün $[\|u_i\|_\infty, \|u_i'\|] \leq M_0$ ($i = 1, 2$) ile]

iki çözümü u_1, u_2 olsun.

$u = u_1 - u_2$ olsun. Bu durumda u , Eş.1.15 i sağlar.

$$u''' + \gamma u + \beta u_1' u + \beta u_2' u = 0 \quad (3.15)$$

Eş.3.15 , u' ile çarpılıp, Ω üzerinden integral alınırsa,

$$\begin{aligned} (u''', u') &= \int_{\Omega} u''' u' dx = \int_{\Omega} ((u_{xx} u_x)_x - u_{xx} u_{xx}) dx \\ &= \int_{\Omega} (u_{xx} u_x)_x dx - \int_{\Omega} (u_{xx})^2 dx \\ &= u_{xx} u_x - \|u''\|^2 \\ &= u''(1)u'(1) - u''(0)u'(0) - \|u''\|^2 \\ &= -\|u''\|^2 \\ (\gamma u, u') &= \int_{\Omega} \gamma u u' dx = \gamma \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^2)_x dx = \gamma \frac{1}{2} [u^2(1) - u^2(0)] = 0 \end{aligned}$$

$$(\beta u_1' u, u') = \int_{\Omega} \beta u_1' u u' dx \leq \left| \int_{\Omega} \beta u_1' u u' dx \right|$$

$$(\beta u_2' u, u') = \int_{\Omega} \beta u_2' u u' dx \leq \left| \int_{\Omega} \beta u_2' u u' dx \right|$$

elde edilir.

$$\bullet \|u''\|^2 \leq |\beta| \left| \int_{\Omega} (u_1' uu' + u_2 u'^2) dx \right|.$$

şimdi de $\left| \int_{\Omega} (u_1' uu' + u_2 u'^2) dx \right|$ kısmını düzenlersek ve yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazarsak:

$$\bullet \int_{\Omega} |u_1' uu'| dx \leq \left(\int_{\Omega} |u_1'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |uu'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u_1'\| \|uu'\| \leq M_0 \|uu'\|$$

$$\|uu'\|^2 = \int_{\Omega} |uu'|^2 dx = \int_{\Omega} |u|^2 |u'|^2 dx \leq \sup_{x \in \Omega} |u|^2 \int_{\Omega} |u'|^2 dx = \|u\|_{\infty}^2 \int_{\Omega} |u'|^2 dx.$$

$$\Rightarrow \left(\int_{\Omega} |uu'|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{\infty} \left(\int_{\Omega} |u'|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{\infty} \|u'\|$$

olur ki burada da sonsuz norm tanımını ve 2.2 tanımını kullandık.

$$\bullet \int_{\Omega} |u_2 u'^2| dx = \int_{\Omega} |u_2| |u'|^2 dx \leq \sup |u_2| \int_{\Omega} |u'|^2 dx \leq M_0 \|u'\|^2$$

Yine yukarıda supremum tanımını kullanıldı.

$$\bullet \|u''\|^2 \leq |\beta| \left| \int_{\Omega} (u_1' uu' + u_2 u'^2) dx \right| \leq |\beta| M_0 (\|u\|_{\infty} \|u'\| + \|u'\|^2) \quad (3.16)$$

$$2.5 \text{ eşitsizliği ile } \|u'\| \leq \frac{1}{2\pi} \|u''\| \text{ dır.} \quad (3.17)$$

ve gerçekten $u(0)=u(1)$ olduğunda $u(y)=0$ olacak şekilde bir $y \in (0,1)$ mevcuttur öyle

$$\text{ki; } u(x) = \int_y^x u'(t) dt.$$

$$\sup_{x \in (0,1)} |u(x)| = \sup_{x \in (0,1)} \int_y^x |u'(t)| dt \leq \int_{\Omega} |u'(t)| dt = \|u'\|_1$$

$$\Rightarrow \|u\|_{\infty} \leq \|u'\| \leq \|u'\|_1 \quad (3.18)$$

Eş.3.14, Eş.3.16, Eş.3.17 ve Eş.3.18 i kombine edilirse;

$$\|u''\|^2 \leq |\beta| M_0 (\|u\|_{\infty} \|u'\| + \|u'\|^2),$$

$$\|u'\| \leq \frac{1}{2\pi} \|u''\|,$$

$$\|u\|_{\infty} \leq \|u'\|,$$

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \|u''\|,$$

$$\|u''\|^2 \leq |\beta| M_0 \left(\frac{1}{4\pi^2} \|u''\| \|u''\| + \|u'\|^2 \right) \leq |\beta| M_0 \left(\frac{1}{4\pi^2} \|u''\|^2 + \frac{1}{4\pi^2} \|u''\|^2 \right),$$

$$\|u''\|^2 \leq \frac{1}{2\pi^2} |\beta| M_0 \|u''\|^2,$$

$$\|u''\|^2 \left(1 - \frac{1}{2\pi^2} |\beta| M_0 \right) \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2\pi^2} |\beta| M_0 > 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow |\beta| < \frac{2\pi^2}{M_0}$$

olması şartı altında $\|u''\|^2 = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $\|u''\| = 0$ olur.

Burada 2.3 eşitsizliğini kullanırsak;

$$\|u\|_{\infty} \leq \|u\|^{\frac{1}{2}} (2\|u'\| + \|u\|)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\| \leq \frac{1}{2\pi} \|u'\| \leq \frac{1}{4\pi^2} \|u''\|,$$

$$\|u'\| \leq \frac{1}{2\pi} \|u''\|,$$

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \|u''\|^{\frac{1}{2}} \left(\|u''\| + \frac{1}{4\pi^2} \|u''\| \right)^{\frac{1}{2}},$$

$u = u_1 - u_2$ olduğundan $\|u_1 - u_2\|_{\infty} = 0$ olur. Buradan $u_1 = u_2$ olduğu yani çözümün tek olduğu ispatlanmış olur.

4. YUTAN KÜMENİN ELDE EDİLMESİ

Burada amaç Eş.1.1 in enerji denklemlerini elde ederek enerji denklemleri yardımıyla yutan kümeyi elde etmektir.

Enerji denklemlerini elde etmek için de Eş.1.1 denklemini sırasıyla:

$$M_0(u) = 2u$$

$$M_1(u) = 2u_{xx} + u^2$$

$$M_2(u) = \frac{18}{5}u_{xxxx} + 6uu_{xx} + 3u_x^2 + u^3$$

ile çarpalım.

• $u_t + \beta uu_x + u_{xxx} + \gamma u = f$ denklemini $2u$ ile çarpalım:

$$2 \int_{\Omega} u_t u dx + 2\beta \int_{\Omega} u^2 u_x dx + 2 \int_{\Omega} uu_{xxx} dx + 2\gamma \int_{\Omega} u^2 dx = 2 \int_{\Omega} f u dx$$

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2\beta \frac{1}{3} \int_{\Omega} (u^3)_x dx + 2 \int_{\Omega} (uu_{xx})_x dx - 2 \int_{\Omega} u_x u_{xx} dx + 2\gamma \int_{\Omega} u^2 dx = 2 \int_{\Omega} f u dx$$

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 - \int_{\Omega} (u_x)_x^2 dx + 2\gamma \int_{\Omega} u^2 dx = 2 \int_{\Omega} f u dx$$

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2\gamma \int_{\Omega} u^2 dx = 2 \int_{\Omega} f u dx \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2\gamma \|u\|^2 = 2 \int_{\Omega} f u dx \leq 2 \|f\| \|u\|$$

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2\gamma \|u\|^2 \leq 2 \|f\| \|u\| \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2\gamma \|u\|^2 \leq 2 \|f\| \|u\| \leq 2 \cdot \frac{1}{2} \|f\|^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \|u\|^2$$

yukarıdaki işlemlerde 2.2 eşitsizliği kullanıldı. Buradan

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + (2\gamma - 1) \|u\|^2 \leq \|f\|^2$$

elde edilir.

$\gamma > \frac{1}{2}$ olsun. $k = \min\{1, 2\gamma - 1\}$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + k \|u\|^2 \leq \|f\|^2$$

Şimdi 2.7 eşitsizliği kullanılırsa:

$$\frac{d}{dt} (\|u\|^2 e^{kt}) \leq e^{kt} \|f\|^2$$

$$\|u(x, t)\|^2 e^{kt} - \|u(x, 0)\|^2 \leq \|f\|^2 \frac{1}{k} (e^{kt} - 1)$$

bulunur.

Burada $t = 0$ anındaki $u(x, t)$ çözümü $u(x, 0) = u_0(x)$ olmak üzere,

$$\|u\|^2 - \|u_0(x)\|^2 e^{-kt} \leq \|f\|^2 \frac{1}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$\|u\|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{k} (1 - e^{-kt}) + \|u_0(x)\|^2 e^{-kt} \quad (4.3)$$

eşitsizliğin her iki tarafının karekökü alınırsa,

$$\|u\| = \|S(t)u_0\| \leq \sqrt{2} \left(\frac{\|f\|}{k^{\frac{1}{2}}} (1 - e^{-kt})^{\frac{1}{2}} + \|u_0(x)\| e^{-\frac{kt}{2}} \right),$$

$$\|S(t)u_0\| \leq \sqrt{2} \left(\frac{\|f\|}{k^{\frac{1}{2}}} \sqrt{2} (1 + e^{-\frac{kt}{2}}) + \sqrt{2} \|u_0(x)\| e^{-\frac{kt}{2}} \right),$$

$$\|S(t)u_o\| \leq 2 \left(\frac{\|f\|}{k^{\frac{1}{2}}} (1 + e^{-\frac{kt}{2}}) + \|u_o(x)\| e^{-\frac{kt}{2}} \right)$$

elde edilir.

$$\frac{2\|f\|}{k^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\|f\|}{k^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{kt}{2}} + 2\|u_o(x)\| e^{-\frac{kt}{2}} \leq \frac{3\|f\|}{k^{\frac{1}{2}}} \text{ alınır}$$

$$t = \frac{1}{k} \cdot \ln \left(\frac{2(\|f\| + k^{\frac{1}{2}} \|u_o(x)\|)}{\|f\|} \right)^2 = T_0 = T_0(u_o, k, \|f\|) \quad t \geq T_0(u_o, k, \|f\|)$$

bulunur. Böylece $\|S(t)u_o\| = \|u(t)\| \leq \frac{3\|f\|}{k^{\frac{1}{2}}}$ alınmış olur.

• $u_t + \beta uu_x + u_{xxx} + \gamma u = f$ denklemini $2u_{xx} + u^2$ ile çarpalım.

$$\Rightarrow 2 \int_{\Omega} u_t u_{xx} dx + \int_{\Omega} u_t u^2 dx + 2\beta \int_{\Omega} uu_x u_{xx} dx + \beta \int_{\Omega} u^3 u_x dx + 2 \int_{\Omega} u_{xx} u_{xxx} dx + \int_{\Omega} u_{xxx} u^2 dx$$

$$+ 2\gamma \int_{\Omega} u_{xx} u dx + \gamma \int_{\Omega} u^3 dx = 2 \int_{\Omega} f u_{xx} dx + \int_{\Omega} f u^2 dx,$$

$$\Rightarrow 2 \int_{\Omega} (u_t u_x)_x dx - 2 \int_{\Omega} u_{tx} u_x dx + \int_{\Omega} u_t u^2 dx + \beta \int_{\Omega} u [(u_x)^2]_x dx + \frac{\beta}{4} \int_{\Omega} (u^4)_x dx + \frac{2}{2} \int_{\Omega} (u_{xx})_x^2 dx$$

$$+ \int_{\Omega} (u_{xx} u^2)_x dx - 2 \int_{\Omega} uu_x u_{xx} dx + 2\gamma \int_{\Omega} (u_x u)_x dx - 2\gamma \int_{\Omega} (u_x)^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u^3 dx = 2 \int_{\Omega} f u_{xx} dx + \int_{\Omega} f u^2 dx$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_x)^2 dx + \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^3 dx + \beta \int_{\Omega} ((uu_x)_x - u^3) dx - 2 \int_{\Omega} uu_x u_{xx} dx - 2\gamma \int_{\Omega} u_x^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u^3 dx$$

$$= 2 \int_{\Omega} f u_{xx} dx + \int_{\Omega} f u^2 dx,$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^3 dx - \beta \int_{\Omega} u_x^3 dx - \int_{\Omega} (uu_x^2)_x dx + \int_{\Omega} u_x^3 - 2\gamma \int_{\Omega} u_x^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u^3 dx \\
&= 2 \int_{\Omega} ((fu_x)_x - f_x u_x) dx + \int_{\Omega} fu^2 dx, \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(u_x^2 - \frac{u^3}{3} \right) dx + \int_{\Omega} \left([(\beta-1)u_x^3] + [-2\gamma u_x^2 + \gamma u^3] + [2f_x u_x - fu^2] \right) dx = 0 \quad (4.4)
\end{aligned}$$

elde edilir.

1.Basamak:

Şimdi $|u(t)|_1$ in orijin merkezli ρ_1 yarıçaplı bir yuvar tarafından kapsandığını gösterelim. Yani $|u(t)|_1 \leq \rho_1$ olduğunu gösterelim.

$$\bullet I_1(u) = \int_{\Omega} \left[(Du)^2 - \frac{1}{3} u^3 \right] dx = \|u_x\|^2 - \frac{1}{3} \int_{\Omega} u^3 dx \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} u^3 dx \right| &\leq |u|_0^2 \|u\|_{\infty} \\
&\leq |u|_0^{\frac{5}{2}} \left(2|u|_1 + \frac{1}{L} |u|_0 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2} |u|_0^{\frac{5}{2}} |u|_1^{\frac{1}{2}} + L^{-\frac{1}{2}} |u|_0^3 \\
&\leq |u|_1^2 + \frac{3}{4} |u|_0^{\frac{10}{3}} + L^{-\frac{1}{2}} |u|_0^3 \quad (4.6)
\end{aligned}$$

yukarıda 2.1 ve 2.3 eşitsizlikleri kullanıldı.

Eş.4.5 ve Eş.4.6 dan:

$$|u|_1^2 \leq \frac{3}{2} I_1(u) + \frac{3}{8} |u|_0^{\frac{10}{3}} + \frac{1}{2L^{\frac{1}{2}}} |u|_0^3 \quad (4.7)$$

olur. Buradan $I_1(u)$ yu çekersek;

$$I_1(u) \leq \frac{4}{3}|u|_1^2 + \frac{1}{4}|u|_0^{\frac{10}{3}} + \frac{1}{3L^2}|u|_0^3 \quad (4.8)$$

elde edilir.

$$\bullet \frac{d}{dt} I_1(u) + 2\mathcal{A}_1(u) = \frac{\gamma}{3} \int_{\Omega} u^3 dx + \int_{\Omega} (2DfDu - fu^2) dx \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{dt} I_1(u) + 2\mathcal{A}_1(u) \leq \frac{\gamma}{3} \left[|u|_1^2 + \frac{3}{4}|u|_0^{\frac{10}{3}} + \frac{1}{L^2}|u|_0^3 \right] + 2|f|_1 |u|_1 + \int_{\Omega} fu^2 dx$$

$$\left| \int_{\Omega} fu^2 dx \right| \leq \int_{\Omega} |fu^2| dx = \int_{\Omega} |f| |u|^2 dx \leq \sup |f| \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq \|f\|_{\infty} |u|_0^2$$

Böylece Eş.4.9 tekrar düzenlenirse;

$$\frac{d}{dt} I_1(u) + 2\mathcal{A}_1(u) \leq \frac{\gamma}{3} \left[|u|_1^2 + \frac{3}{4}|u|_0^{\frac{10}{3}} + \frac{1}{L^2}|u|_0^3 \right] + 2|f|_1 |u|_1 + \|f\|_{\infty} |u|_0^2 \quad (4.10)$$

elde edilir. $2|f|_1 |u|_1$ ifadesi:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\gamma}{3}}, \quad p=2, \quad q=2 \text{ alınırsa ve 2.1 eşitsizliği uygulanırsa}$$

$$|u|_1 |f|_1 \leq \frac{|u|_1^2 \frac{\gamma}{3}}{2} + \frac{|f|_1^2}{\frac{\gamma}{3} \cdot 2} = |u|_1^2 \frac{\gamma}{6} + \frac{3|f|_1^2}{2\gamma}$$

$$2|f|_1 |u|_1 \leq \frac{\gamma}{3}|u|_1^2 + \frac{3}{\gamma}|f|_1^2$$

elde edilir. Bu ifadeler Eş.4.10 da yerine yazılırsa:

$$\frac{d}{dt} I_1(u) + 2\mathcal{A}_1(u) \leq \frac{2\gamma}{3}|u|_1^2 + \frac{\gamma}{4}|u|_0^{\frac{10}{3}} + \frac{\gamma}{3L^2}|u|_0^3 + \frac{3}{\gamma}|f|_1^2 + \|f\|_{\infty} |u|_0^2 \quad (4.11)$$

eşitsizliği bulunur.

Daha sonra Eş.4.11 de , Eş.4.6 tekrar kullanılırsa;

Böylece;

$$\frac{d}{dt} I_1(u) + \mathfrak{A}_1(u) \leq \frac{\gamma}{2} |u|_0^{\frac{10}{3}} + \frac{2\gamma}{3L^2} |u|_0^3 + \frac{3}{\gamma} |f|_1^2 + \|f\|_\infty |u|_0^2 \quad (4.12)$$

olur.

Eş.4.3 ve Eş.4.12 kullanılırsa;

$$|u_t|_0^2 \leq |u_0|_0^2 e^{-\gamma t} + \frac{|f|_0^2}{\gamma^2} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.13)$$

elde edilir.

Eş.4.13 den faydalanılırsa:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(|u_t|_0^2 \right)^{\frac{5}{3}} &\leq \left[|u_0|_0^2 e^{-\gamma t} + \frac{|f|_0^2}{\gamma^2} \right]^{\frac{5}{3}} \\ \Rightarrow |u_t|_0^{\frac{10}{3}} &\leq \left(2^{\frac{5}{3}} |u_0|_0^{\frac{10}{3}} e^{-\frac{5}{3}\gamma t} + \frac{|f|_0^{\frac{10}{3}}}{\gamma^{\frac{10}{3}}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Aynı şekilde } |u_t|_0^3 \leq 2^{\frac{3}{2}} \left(|u_0|_0^3 e^{-\frac{3}{2}\gamma t} + \frac{|f|_0^3}{\gamma^3} \right) \text{ olur.}$$

Buna göre $c > 0$ ve $\forall t \geq 0$ için;

$$\bullet \frac{d}{dt} I_1(u) + \mathfrak{A}_1(u) \leq c\gamma \left[|u_0|_0^{\frac{10}{3}} e^{-\frac{5}{3}\gamma t} + \frac{|f|_0^{\frac{10}{3}}}{\gamma^{\frac{10}{3}}} \right] + \frac{c\gamma}{L^2} \left[|u_0|_0^3 e^{-\frac{3}{2}\gamma t} + \frac{|f|_0^3}{\gamma^3} \right] + \frac{3}{\gamma} |f|_1^2$$

$$+ \|f\|_{\infty} \left[|u_0|^2 e^{-\gamma t} + \frac{|f|_0^2}{\gamma^2} \right] \quad (4.14)$$

bulunur.

Eş.4.14 den şu sonuç çıkarılır: $\forall t \geq 0$ için;

$$\bullet \frac{d}{dt} I_1(u) + \mathfrak{A}_1(u) \leq c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + c_2 \quad \forall t \geq 0 \quad (4.15)$$

$$c_1 = c \left[\gamma |u_0|_0^{\frac{10}{3}} + \gamma L^{-\frac{1}{2}} |u_0|_0^3 + \|f\|_{\infty} |u_0|_0^2 \right]$$

$$c_2 = c \left[\gamma^{-\frac{7}{3}} |f|_0^{\frac{10}{3}} + \gamma^{-2} L^{-\frac{1}{2}} |f|_0^3 + \gamma^{-1} |f|_1^2 + \gamma^{-2} \|f\|_{\infty} |f|_0^2 \right].$$

2.7 eşitsizliği kullanılırsa;

$$I_1(u(t)) \leq I_1(u_0) e^{-\gamma t} + \frac{2c_1}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \frac{c_2}{\gamma} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.16)$$

Eş.4.7, Eş.4.8, Eş.4.3 ; Eş.4.16 da kullanılırsa;

$$|u(t)|_0^2 \leq |u_0|_0^2 e^{-\gamma t} + \frac{|f|_0^2}{\gamma^2}.$$

$$\bullet |u|_1^2 \leq \frac{3}{2} I_1(u) + \frac{3}{8} |u|_0^{\frac{10}{3}} + \frac{1}{2L^2} |u|_0^3$$

$$I_1(u) \leq \frac{4}{3} |u|_1^2 + \frac{1}{4} |u|_0^{\frac{10}{3}} + \frac{1}{3L^2} |u|_0^3.$$

$$\bullet |u(t)|_1^2 \leq \frac{3}{2} I_1(u(t)) + \frac{3}{8} |u(t)|_0^{\frac{10}{3}} + \frac{1}{2L^2} |u(t)|_0^3$$

$$\leq \frac{3}{2} I_1(u_0) e^{-\gamma t} + \frac{3c_1}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \frac{3c_2}{2\gamma} + c \left[|u_0|_0^{\frac{10}{3}} e^{-\frac{5}{3}\gamma t} + \frac{|f|_0^{\frac{10}{3}}}{\gamma^{\frac{10}{3}}} \right] + cL^{-\frac{1}{2}} \left[|u_0|_0^3 e^{-\frac{3}{2}\gamma t} + \frac{|f|_0^3}{\gamma^3} \right]$$

4.1. Not

$$c_1 = c \left[\gamma |u_0|_0^{\frac{10}{3}} + \gamma L^{-\frac{1}{2}} |u_0|_0^3 + \|f\|_\infty |u_0|_0^2 \right]$$

$$\frac{3c_1}{\gamma} = \frac{3c}{\gamma} \left[\gamma |u_0|_0^{\frac{10}{3}} + \gamma L^{-\frac{1}{2}} |u_0|_0^3 + \|f\|_\infty |u_0|_0^2 \right] = 3c |u_0|_0^{\frac{10}{3}} + 3cL^{-\frac{1}{2}} |u_0|_0^3 + \frac{3c}{\gamma} \|f\|_\infty |u_0|_0^2$$

Buna göre c nümerik bir sabit ve $\forall t \geq 0$ için ifadeyi yeniden düzenlersek;

$$\begin{aligned} \bullet |u(t)|_1^2 &\leq \frac{3}{2} \left[\frac{4}{3} |u_0|_1^2 + \frac{1}{4} |u_0|_0^{\frac{10}{3}} + \frac{1}{3L^{\frac{1}{2}}} |u_0|_0^3 \right] + \frac{3c_1}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \frac{3c_2}{2\gamma} + c \left[|u_0|_0^{\frac{10}{3}} e^{-\frac{5}{3}\gamma t} + \frac{|f|_0^{\frac{10}{3}}}{\gamma^{\frac{10}{3}}} \right] \\ &\quad + cL^{-\frac{1}{2}} \left[|u_0|_0^3 e^{-\frac{3}{2}\gamma t} + \frac{|f|_0^3}{\gamma^3} \right] \end{aligned}$$

Böylece,

$$|u(t)|_1^2 \leq \chi_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \overline{\chi}_1 \quad \forall t \geq 0 \text{ olur.} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \bullet \chi_1 &= 2|u_0|_1^2 + c|u_0|_0^{\frac{10}{3}} + cL^{-\frac{1}{2}} |u_0|_0^3 + \frac{3c_1}{\gamma} \\ &\leq c(|u_0|_1^2 + |u_0|_0^{\frac{10}{3}} + L^{-\frac{1}{2}} |u_0|_0^3 \gamma^{-1} \|f\|_\infty |u_0|_0^2) . \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \bullet \overline{\chi}_1 &= \frac{3c_2}{\gamma} + c\gamma^{-\frac{10}{3}} |f|_0^{\frac{10}{3}} + cL^{-\frac{1}{2}} \gamma^{-3} |f|_0^3 \\ &\leq c \left(\gamma^{-2} |f|_1^2 + \gamma^{-3} \|f\|_\infty |f|_0^2 + \gamma^{-\frac{10}{3}} |f|_0^{\frac{10}{3}} + \gamma^{-3} L^{-\frac{1}{2}} |f|_0^3 \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Eş.4.15 ve Eş.4.16 daki “c” bir nümerik sabittir.

Dolayısıyla Eş.4.14 den $T_1 = T_1(\gamma, L, |f|_0, |f|_1, \|f\|_\infty, |u_0|_0, |u_0|_1)$ olmak üzere,

$$|u(t)|_1 \leq \rho_1 = \rho_1(\gamma, L, |f|_0, |f|_1, \|f\|_\infty) \quad \forall t \geq T_1 \text{ elde ederiz.} \quad (4.20)$$

2. Basamak:

Şimdi de $|u(t)|_2$ nin bir yuvar tarafından kapsandığını gösterelim

• $u_t + u_{xxx} + \gamma u + \beta u u_x = f(x)$ ifadesini $\frac{18}{5} u_{xxxx} + 6 u u_{xx} + 3 u_x^2 + u^3$ ile çarpalım:

$$\Rightarrow \frac{18}{5} \int_{\Omega} u_t u_{xxxx} dx + 6 \int_{\Omega} u_t u u_{xx} dx + 3 \int_{\Omega} u_t u_x^2 dx + \int_{\Omega} u^3 u_t dx + \frac{18}{5} \int_{\Omega} u_{xxx} u_{xxxx} dx + 6 \int_{\Omega} u u_{xx} u_{xxx} dx$$

$$+ 3 \int_{\Omega} u_x^2 u_{xxx} dx + \int_{\Omega} u^3 u_{xxx} dx + \frac{18\gamma}{5} \int_{\Omega} u u_{xxx} dx + 6\gamma \int_{\Omega} u^2 u_{xx} dx + 3\gamma \int_{\Omega} u u_x^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u^4 dx$$

$$+ \frac{18\beta}{5} \int_{\Omega} u u_x u_{xxx} dx + 6\beta \int_{\Omega} u^2 u_x u_{xx} dx + 3\beta \int_{\Omega} u u_x^3 dx + \beta \int_{\Omega} u^4 u_x dx$$

$$= \frac{18}{5} \int_{\Omega} f u_{xxxx} dx + 6 \int_{\Omega} f u u_{xx} dx + 3 \int_{\Omega} f u_x^2 dx + \int_{\Omega} f u^3 dx$$

$$\Rightarrow \frac{18}{5} \int_{\Omega} ((u_t u_{xxx})_x - u_{tx} u_{xxx}) dx - 3 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u u_x^2 dx - 3 \int_{\Omega} u_t u_x^2 dx + 3 \int_{\Omega} u_t u_x^2 dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{u^4}{4} dx$$

$$+ \frac{18}{5} \cdot \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{xxx}^2)_x dx + 6 \cdot \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((u u_x^2)_x - u_x u_{xx}^2) dx + 3 \int_{\Omega} ((u_x^2 u_{xx})_x - 2 u_x u_{xx}^2) dx$$

$$+ \int_{\Omega} ((u^3 u_{xx})_x - 3 u^2 u_x u_{xx}) dx + \frac{18\gamma}{5} \int_{\Omega} ((u u_{xxx})_x - u_x u_{xxx}) dx + 6\gamma \int_{\Omega} u^2 u_{xx} dx + 3\gamma \int_{\Omega} u u_x^2 dx$$

$$+ \gamma \int_{\Omega} u^4 dx + \frac{18\beta}{5} \int_{\Omega} ((u u_x u_{xxx})_x - u_x^2 u_{xxx} - u u_{xx} u_{xxx}) dx + \frac{6\beta}{2} \int_{\Omega} ((u^2 u_x^2)_x - 2 u u_x^3) dx$$

$$\begin{aligned}
& +3\beta \int_{\Omega} uu_x^3 dx + \frac{\beta}{5} \int_{\Omega} (u^5)_x dx = \frac{18}{5} \int_{\Omega} ((fu_{xxx})_x - f_x u_{xxx}) dx + 6 \int_{\Omega} fuu_{xx} dx + 3 \int_{\Omega} fu_x^2 dx + \int_{\Omega} fu^3 dx \\
& \Rightarrow -\frac{18}{5} \int_{\Omega} u_x u_{xxx} dx - 3 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} uu_x^2 dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{u^4}{4} dx - 3 \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx - 6 \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx - 3 \int_{\Omega} u^2 u_x u_{xx} dx \\
& -\frac{18\gamma}{5} \int_{\Omega} u_x u_{xxx} dx + 6\gamma \int_{\Omega} u^2 u_{xx} dx + 3\gamma \int_{\Omega} uu_x^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u^4 dx - \frac{18\beta}{5} \int_{\Omega} ((u_x^2 u_{xx})_x - 2u_x u_{xx}^2) dx \\
& -\frac{18\beta}{5} \cdot \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((uu_{xx}^2)_x - u_x u_{xx}^2) dx - 6\beta \int_{\Omega} uu_x^3 dx + 3\beta \int_{\Omega} uu_x^3 dx \\
& = -\frac{18}{5} \int_{\Omega} f_x u_{xxx} dx + 6 \int_{\Omega} fuu_{xx} dx + 3 \int_{\Omega} fu_x^2 dx + \int_{\Omega} fu^3 dx \\
& \Rightarrow -\frac{18}{5} \int_{\Omega} u_x u_{xxx} dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(-3uu_x^2 + \frac{u^4}{4} \right) dx - 9 \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx - 3 \int_{\Omega} u^2 u_x u_{xx} dx - \frac{18\gamma}{5} \int_{\Omega} u_x u_{xxx} dx \\
& + 6\gamma \int_{\Omega} u^2 u_{xx} dx + 3\gamma \int_{\Omega} uu_x^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u^4 dx + 9\beta \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx - 3\beta \int_{\Omega} uu_x^3 dx \\
& = -\frac{18}{5} \int_{\Omega} ((f_x u_{xx})_x - f_{xx} u_{xx}) dx + 6 \int_{\Omega} fuu_{xx} dx + 3 \int_{\Omega} fu_x^2 dx + \int_{\Omega} fu^3 dx \\
& \Rightarrow -\frac{18}{5} \int_{\Omega} u_x u_{xxx} dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(-3uu_x^2 + \frac{u^4}{4} \right) dx + (9\beta - 9) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx - \frac{3}{2} \int_{\Omega} ((u^2 u_x^2)_x - 2uu_x^3) dx \\
& -\frac{18\gamma}{5} \int_{\Omega} ((u_x u_{xx})_x - u_{xx}^2) dx + 6\gamma \int_{\Omega} u^2 u_{xx} dx + 3\gamma \int_{\Omega} uu_x^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u^4 dx - 3\beta \int_{\Omega} uu_x^3 dx \\
& = \frac{18}{5} \int_{\Omega} f_{xx} u_{xx} dx + 6 \int_{\Omega} fuu_{xx} dx + 3 \int_{\Omega} fu_x^2 dx + \int_{\Omega} fu^3 dx \\
& \Rightarrow -\frac{18}{5} \int_{\Omega} u_x u_{xxx} dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(-3uu_x^2 + \frac{u^4}{4} \right) dx + (9\beta - 9) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + (3 - 3\beta) \int_{\Omega} uu_x^3 dx \\
& + \frac{18\gamma}{5} \int_{\Omega} u_{xx}^2 dx + 6\gamma \int_{\Omega} u^2 u_{xx} dx + 3\gamma \int_{\Omega} uu_x^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u^4 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{18}{5} \int_{\Omega} f_{xx} u_{xx} dx + 6 \int_{\Omega} f u u_{xx} dx + 3 \int_{\Omega} f u_x^2 dx + \int_{\Omega} f u^3 dx \\
&\Rightarrow -\frac{18}{5} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|u_{xx}\|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(-3u u_x^2 + \frac{u^4}{4} \right) dx + (9\beta - 9) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + (3 - 3\beta) \int_{\Omega} u u_x^3 dx \\
&+ \frac{18\gamma}{5} \int_{\Omega} u_{xx}^2 dx + 6\gamma \int_{\Omega} u^2 u_{xx} dx + 3\gamma \int_{\Omega} u u_x^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u^4 dx \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left\{ \frac{9}{5} u_{xx}^2 - 3u u_x^2 + \frac{u^4}{4} \right\} dx + \int_{\Omega} \left\{ \gamma \left(\frac{18}{5} u_{xx}^2 + 6u^2 u_{xx} + 3u u_x^2 + u^4 \right) \right\} dx \\
&+ (9\beta - 9) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + (3 - 3\beta) \int_{\Omega} u u_x^3 dx - \frac{18}{5} \int_{\Omega} f_{xx} u_{xx} dx - 6 \int_{\Omega} f u u_{xx} dx \\
&- 3 \int_{\Omega} f u_x^2 dx - \int_{\Omega} f u^3 dx = 0 \tag{4.21}
\end{aligned}$$

O halde;

$$\psi(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{9}{5} u_{xx}^2 - 3u u_x^2 + \frac{u^4}{4} \right) dx$$

$$\psi(u) \leq \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 + 3 \int_{\Omega} |u| |u_x|^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u| |u^3| dx$$

$$\psi(u) \leq \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 + 3 \|u\|_{\infty} \|u_x\|^2 + \frac{1}{4} \|u\|_{\infty} \int_{\Omega} |u|^3 dx$$

$$\psi(u) \leq \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 + 3 \|u\|_{\infty} \|u_x\|^2 + \frac{1}{4} \|u\|_{\infty} \left(|u|_1^2 + \frac{3}{4} |u|_0^{\frac{10}{3}} + L^{-\frac{1}{2}} |u|_0^3 \right)$$

$$\psi(u) \leq \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 + 3 \left(|u|_0^{\frac{1}{2}} (2|u|_1 + L^{-1} |u|)^{\frac{1}{2}} \|u_x\|^2 + \frac{1}{4} |u|_0^{\frac{1}{2}} (2|u|_1 + L^{-1} |u|)^{\frac{1}{2}} \left(|u|_1^2 + \frac{3}{4} |u|_0^{\frac{10}{3}} + L^{-\frac{1}{2}} |u|_0^3 \right) \right)$$

$$\psi(u) \leq \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 + 3 \left(M_0^{\frac{1}{2}} (2M_1 + L^{-1} M_0)^{\frac{1}{2}} \|u_x\|^2 + \frac{1}{4} \left(M_0^{\frac{1}{2}} (2M_1 + L^{-1} M_0)^{\frac{1}{2}} \right) \left(|u|_1^2 + \frac{3}{4} |u|_0^{\frac{10}{3}} + L^{-\frac{1}{2}} |u|_0^3 \right) \right)$$

$$\psi(u) \leq \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 + c$$

$$\Rightarrow \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 - c \leq \psi(u) \leq \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 + c \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left\{ \frac{9}{5} u_{xx}^2 - 3uu_x^2 + \frac{u^4}{4} \right\} dx + \int_{\Omega} \left\{ \gamma \left(\frac{18}{5} u_{xx}^2 + 6u^2 u_{xx} + 3uu_x^2 + u^4 \right) \right\} dx \\ & + \int_{\Omega} \left(\frac{18}{5} f_{xx} u_{xx} + 6ufu_{xx} + 3fu_x^2 + fu^3 \right) dx + (9\beta - 9) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + (3 - 3\beta) \int_{\Omega} uu_x^3 dx = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \psi(u) = \frac{9}{5} \|u\|_2^2 + \int_{\Omega} \left\{ \frac{u^4}{4} - 3uu_x^2 \right\} dx \text{ olduğundan}$$

$$\bullet \int_{\Omega} \left\{ \gamma \left(\frac{18}{5} u_{xx}^2 + 6u^2 u_{xx} + 3uu_x^2 + u^4 \right) \right\} dx \text{ ifadesi } \psi(u) \text{ ya göre düzenlenirse:}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \left\{ \gamma \left(\frac{18}{5} u_{xx}^2 + 6u^2 u_{xx} + 3uu_x^2 + u^4 \right) \right\} dx$$

$$= \int_{\Omega} \gamma \left(\frac{9}{5} u_{xx}^2 + \frac{9}{5} u_{xx}^2 + \frac{u^4}{4} + \frac{3u^4}{4} - 3uu_x^2 + 6uu_x^2 + 6u^2 u_{xx} \right) dx$$

$$= \gamma \int_{\Omega} \left(\frac{9}{5} u_{xx}^2 + \frac{u^4}{4} - 3uu_x^2 \right) dx + \gamma \int_{\Omega} \left(\frac{9}{5} u_{xx}^2 + \frac{3u^4}{4} + 6uu_x^2 + 6u^2 u_{xx} \right) dx$$

$$= \gamma \psi(u) + \gamma \int_{\Omega} \left(\frac{9}{5} u_{xx}^2 + \frac{3u^4}{4} + 6uu_x^2 + 6u^2 u_{xx} \right) dx$$

olur.

O halde Eş.4.21 tekrar düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \bullet \frac{d}{dt} \psi(u) + \gamma \psi(u) &= - \int_{\Omega} \frac{18}{5} f_{xx} u_{xx} - 6ufu_{xx} - 3fu_x^2 - fu^3 - \gamma \int_{\Omega} \left(\frac{9}{5} u_{xx}^2 + \frac{3u^4}{4} + 6uu_x^2 + 6u^2 u_{xx} \right) dx \\ &+ (9 - 9\beta) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + (3\beta - 3) \int_{\Omega} uu_x^3 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\psi(u) + 2\gamma \int_{\Omega} \left(\frac{9}{5}u_{xx}^2 + \frac{u^4}{4} - 3uu_x^2 \right) dx + \gamma \int_{\Omega} \left\{ 9uu_x^2 + 6u^2u_{xx} + \frac{u^4}{2} \right\} dx \\
&+ \int_{\Omega} \left(\frac{18}{5}f_{xx}u_{xx} + 6ufu_{xx} + 3fu_x^2 + fu^3 \right) dx + (9\beta - 9) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + (3 - 3\beta) \int_{\Omega} uu_x^3 dx = 0 \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\psi(u) + 2\gamma\psi(u) = -\gamma \int_{\Omega} \left\{ 9uu_x^2 + 6u^2u_{xx} + \frac{u^4}{2} \right\} dx - \int_{\Omega} \left(\frac{18}{5}f_{xx}u_{xx} + 6ufu_{xx} + 3fu_x^2 + fu^3 \right) dx \\
&\quad + (9 - 9\beta) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + (3\beta - 3) \int_{\Omega} uu_x^3 dx \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\psi(u) + 2\gamma\psi(u) \leq 9\gamma \int_{\Omega} |u||u_x|^2 dx + 6\gamma \int_{\Omega} |u|^2 |u_{xx}| dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |u|^4 dx + \frac{18}{5} \int_{\Omega} |f_{xx}| |u_{xx}| dx \\
&+ 6 \int_{\Omega} |u||f||u_{xx}| dx + 3 \int_{\Omega} |f||u_x|^2 dx + \int_{\Omega} |f||u|^3 dx + (9 - 9\beta) \int_{\Omega} |u_x||u_{xx}|^2 dx + (3\beta - 3) \int_{\Omega} |u||u_x|^3 dx
\end{aligned}$$

olur. (4.23)

4.2. Not

$$\begin{aligned}
*6 \int_{\Omega} ufu_{xx} dx &= 6 \int_{\Omega} (ufu_x)_x dx - 6 \int_{\Omega} (uf)_x u_x dx \\
&= -6 \int_{\Omega} u_x^2 f dx - 6 \int_{\Omega} uu_x f_x dx \leq 6 \|f\|_{\infty} \|u_x\|^2 + 6 \|u\|_{\infty} \|u_x\| \|f_x\| \\
*6\gamma \int_{\Omega} u^2 u_{xx} dx &= 6\gamma \int_{\Omega} \left((u^2 u_x)_x - 2uu_x^2 \right) dx = 6\gamma \int_{\Omega} (u^2 u_x)_x dx - 12\gamma \int_{\Omega} uu_x^2 dx \\
&\leq -12\gamma \|u\|_{\infty} \int_{\Omega} |u_x|^2 dx \\
&\leq +12\gamma \|u\|_{\infty} \|u_x\|^2 .
\end{aligned}$$

4.2. Notundaki ifadeler ve Eş.4.6 yukarıdaki Eş.4.23 de yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d}{dt} \psi(u) + 2\gamma \psi(u) &\leq 9\gamma \int_{\Omega} |u| |u_x|^2 dx + 6\gamma \int_{\Omega} |u|^2 |u_{xx}| dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |u|^4 dx + \frac{18}{5} \int_{\Omega} |f_{xx}| |u_{xx}| dx \\
&+ 6 \int_{\Omega} |u| |f| |u_{xx}| dx + 3 \int_{\Omega} |f| |u_x|^2 dx + \int_{\Omega} |f| (|u|_1^2 + \frac{3}{4} |u|_0^{\frac{10}{3}} + L^{\frac{1}{2}} |u|_0^3) \\
&+ (9-9\beta) \int_{\Omega} |u_x| |u_{xx}|^2 dx + (3\beta-3) \int_{\Omega} |u| |u_x|^3 dx
\end{aligned}$$

olur ve yine bu eşitsizlik düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d}{dt} \psi(u) + 2\gamma \psi(u) &\leq 9\gamma \|u\|_{\infty} |u_x|^2 + 6\gamma \int_{\Omega} |u|^2 |u_{xx}| + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |u| |u|^3 dx + \frac{18}{5} \int_{\Omega} |f_{xx}| |u_{xx}| dx \\
&+ 6 \int_{\Omega} |u| |f| |u_{xx}| dx + 3 \int_{\Omega} |f| |u_x|^2 + \int_{\Omega} |f| |u|_1^2 + \frac{3}{4} \int_{\Omega} |f| |u|_0^{\frac{10}{3}} dx \\
&+ \int_{\Omega} |f| L^{\frac{1}{2}} |u|_0^3 dx + (9-9\beta) \int_{\Omega} |u_x| |u_{xx}|^2 dx + (3\beta-3) \int_{\Omega} |u| |u_x|^3 dx \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \psi(u) + 2\gamma \psi(u) &\leq 9\gamma \|u\|_{\infty} |u|_1^2 + 12\gamma \|u\|_{\infty} \|u\|_1^2 + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |u| (|u|_1^2 + \frac{3}{4} |u|_0^{\frac{10}{3}} + L^{\frac{1}{2}} |u|_0^3) dx \\
&+ \frac{18}{5} \int_{\Omega} |f_{xx}| |u_{xx}| dx + 6 \|f\|_{\infty} \|u_x\|^2 + 6 \|u\|_{\infty} \|u_x\| \|f_x\| \\
&+ 3 \int_{\Omega} |f| |u_x|^2 dx + \int_{\Omega} |f| |u|_1 dx^2 + \frac{3}{4} \int_{\Omega} |f| |u|_0^{\frac{10}{3}} dx + \int_{\Omega} |f| L^{\frac{1}{2}} |u|_0^3 dx
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.3. Not

* j=0, 1 olmak üzere $|u(t)|_j \leq M_j$, $\forall t \geq T_j$, $T_j = T_j(\gamma, L, \|f\|_j, R)$, $\forall u_0 \in H_{per}^j(\Omega)$,

$$\|u_0\|_j \leq R .$$

4.4. Not

$$\begin{aligned}
* \|u(t)\|_{\infty} &\leq |u(t)|_0^{\frac{1}{2}} \left(2|u(t)|_1 + L^{-1}|u(t)|_0 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M_0^{\frac{1}{2}} \left(2M_1 + L^{-1}M_0 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \geq \max\{T_0, T_1\}.
\end{aligned}$$

4.5. Not

$$\begin{aligned}
* \|D^j u(t)\|_{\infty} &\leq c |u(t)|_j^{\frac{1}{2}} |u(t)|_{j+1}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c M_j^{\frac{1}{2}} M_{j+1}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

4.3.Not, 4.4.Not ve 4.5.Notu kullanılırsa;

$$\frac{d}{dt} \psi(u) + 2\gamma \psi(u) \leq \gamma |u|_2^2 + \frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c, \quad \forall t \geq T' \quad (4.24)$$

elde edilir.

4.6. Not

$$* \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 - c \leq \psi(u) \leq \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 + c, \quad \forall t \geq T'$$

olduğundan $|u|_2^2$ yerine $(\psi(u) + c) \frac{5}{9}$ ifadesi yazılırsa;

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \psi(u) + 2\gamma \psi(u) \leq \frac{5}{9} \gamma (\psi(u) + c) + \frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \psi(u) + \frac{13}{9} \gamma \psi(u) \leq \frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c, \quad \forall t \geq T' \quad (4.25)$$

2.7 eşitsizliği kullanıldığında: Eş.4.25, $e^{\frac{13}{9}\gamma t}$ ile çarpılıp sonrada $T' - t$ aralığında integrali alınırsa:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{13}{9}\gamma t} \frac{d}{dt} \psi(u) + \frac{13}{9} \gamma e^{\frac{13}{9}\gamma t} \psi(u) &\leq e^{\frac{13}{9}\gamma t} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right), \quad \forall t \geq \max\{T_0, T_1\} = T' \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{\frac{13}{9}\gamma t} \psi(u)) &\leq e^{\frac{13}{9}\gamma t} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right) \\
\Rightarrow \int_{T'}^t \frac{d}{dt} (e^{\frac{13}{9}\gamma t} \psi(u)) dt &\leq \int_{T'}^t e^{\frac{13}{9}\gamma t} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right) dt \\
\Rightarrow e^{\frac{13}{9}\gamma t} \psi(u(t)) - e^{\frac{13}{9}\gamma T'} \psi(u(T')) &\leq \frac{9}{13\gamma} e^{\frac{13}{9}\gamma t} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right) \\
\Rightarrow e^{\frac{13}{9}\gamma t} \psi(u(t)) - e^{\frac{13}{9}\gamma T'} \psi(u(T')) &\leq \frac{9}{13\gamma} e^{\frac{13}{9}\gamma t} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right) - \frac{9}{13\gamma} e^{\frac{13}{9}\gamma T'} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right) \\
\Rightarrow e^{\frac{13}{9}\gamma t} \psi(u(t)) &\leq e^{\frac{13}{9}\gamma T'} \psi(u(T')) + \frac{9}{13\gamma} e^{\frac{13}{9}\gamma t} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right) - \frac{9}{13\gamma} e^{\frac{13}{9}\gamma T'} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right) \\
\Rightarrow \psi(u(t)) &\leq e^{\frac{13}{9}\gamma(T'-t)} \psi(u(T')) + \frac{9}{13\gamma} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right) - \frac{9}{13\gamma} e^{\frac{13}{9}\gamma(T'-t)} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right), \quad \forall t \geq T' \quad (4.26)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eş.4.19 kullanılırsa,

$$\Rightarrow \frac{9}{5} |u(t)|_2^2 \leq \frac{9}{5} |u(T')|_2^2 e^{-\gamma(t-T')} + \frac{9}{13\gamma} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right) - \frac{9}{13\gamma} e^{-\frac{13}{9}\gamma(t-T')} \left(\frac{|f|_2^2}{\gamma} + c \right), \quad \forall t \geq T' \quad (4.27)$$

$c_1 = c(R, T')$ sabiti vardır öyle ki;

$$\|u(t)\|_2 \leq c_1, \quad \forall u_0 \in H_{per}^2(\Omega), \|u_0\| \leq R, \forall t \in [-T', T'] \quad (4.28)$$

Eş.4.26 ve Eş.4.27 den;

$$\Rightarrow |u(t)|_2^2 \leq c_1 e^{-\frac{13}{9}\gamma(t-T')} + \frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c, \quad \forall t \geq T' \quad (4.29)$$

C, sadece M_0 ve M_1 'e bağlıdır.

$$M_2^2 = 2 \left(\frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c \right) \text{ olarak tanımlansın.}$$

Buna göre;

$$\Rightarrow c_1 e^{-\gamma(t-T')} + \frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c = 2 \left(\frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c \right)$$

$$\Rightarrow c_1 e^{-\gamma(t-T')} = \frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c$$

$$\Rightarrow e^{-\gamma(t-T')} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c \right)$$

$$\Rightarrow -\gamma(t-T') = \ln \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c \right)$$

$$\Rightarrow -\gamma t + \gamma T' = \ln \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c \right)$$

$$\Rightarrow -t = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c \right) - T'$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{\gamma} |f|_2^2 + c \right) + T' \quad (\text{c, Eş.4.29 daki c dir.})$$

$M_2 = M_2(\gamma, L, \|f\|_2)$ ve $T_2 = T_2(\gamma, L, \|f\|_2, R)$ olduğuna dikkat edilsin.

Böylece Eş.4.29 dan;

$\forall t \geq T_m$ için $|u(t)|_2 \leq M_2$ olduğu sonucu ortaya çıkar.

$H^2(\Omega)$ daki yutan kümenin varlığı ile bir R_0 sabiti vardır.

$$R_0 = R_0 \left(\|f\|, \|f_x\|, \|f_{xx}\|, \frac{1}{\gamma} \right) > 0$$

ve bir $t_0 > 0$ var öyleki Eş.1.1 in $u(x, t)$ çözümü,

$$\|u\|_{H^2} \leq R_0, \quad t \geq t_0 \text{ sağlar.}$$

3.1. Teoremin ispatından , Eş.1.2 nin bu çözümleri

$$\frac{\|f\|}{\gamma} + M_0 + M_1 = R_1 = R_1 \left(\|f\|, \frac{1}{\gamma} \right) \text{ tarafından sınırlandırılır.}$$

$$R = R \left(\|f\|, \|f_x\|, \|f_{xx}\|, \frac{1}{\gamma} \right) = \max(R_0, R_1) \text{ alınır.}$$

Aynı asimptotik davranışı koruyan herhangi bir sonlu zaman için $u(t_0)$ başlangıç değeri ve $\|u\|_{H^2}, \|\bar{u}\|_{H^2} \leq R, t \geq t_0$ alınsın. Şimdi aşağıdaki teorem verilsin:

4.1. Teorem

Varsayalım ki $u(t_0) \in H^2(\Omega), f \in H^2(\Omega)$ ve $\gamma=1$ iken R nin değeri $R(\|f\|, \|f_x\|, \|f_{xx}\|, 1)$ olduğunda $\gamma > \max(1, \frac{5}{2}|\beta|R(\|f\|, \|f_x\|, \|f_{xx}\|, 1))$ olsun. Ve $p_0 = 2\gamma - 5|\beta|R > 0$ olduğunu kabul edelim. (1.1) in bir çözümü $u(x, t)$, (1.2) nin bir çözümü \bar{u} olsun. Bu durumda;

$$t \rightarrow \infty \text{ iken } \|u(x, t) - \bar{u}\|_{\infty} \rightarrow 0 \text{ olur.}$$

İspat

$w = u - \bar{u}$ olsun. Bu durumda

$$u_t + u_{xxx} + \gamma u + \beta u u_x = f(x) \tag{4.30}$$

$$\bar{u}_{xxx} + \gamma \bar{u} + \beta \bar{u} \bar{u}_x = f(x) \tag{4.31}$$

Eş.4.30 ve Eş.4.31 denklemlerini birbirinden çıkartırsak;

$$u_t + (u - \bar{u})_{xxx} + \gamma(u - \bar{u}) + \beta(uu_x - \bar{u}\bar{u}_x) = 0 \quad (4.32)$$

olur. Eş.4.32, w ya göre düzenlenirse;

$$w_t + w_{xxx} + \gamma w + \beta(\bar{u}\bar{u}_x - uu_x + \bar{u}u_x - \bar{u}\bar{u}_x)$$

$$w_t + w_{xxx} + \gamma w + \beta wu_x + \beta w_x \bar{u} = 0 \quad (4.33)$$

elde edilir. Eş.4.33 ile w çarpılırsa:

$$\int w_t w dx + \int w_{xxx} w dx + \gamma \int w^2 dx + \beta \int u_x w^2 dx + \beta \int w_x w \bar{u} dx = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \int (w w_{xx})_x dx - \int w_x w_{xx} dx + \gamma \int w^2 dx + \beta \int (u_x w + \bar{u} w_x) w dx = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w^2\| - \frac{1}{2} \int (w_x^2)_x dx + \gamma \int w^2 dx + \beta \int (u_x w + \bar{u} w_x) w dx = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \gamma \|w\|^2 + \beta \int_{\Omega} (u_x w + \bar{u} w_x) w dx = 0 \quad (4.34)$$

elde edilir.

Şimdi Eş.4.34 deki terimler düzenlenirse;

$$\int_{\Omega} (u_x w^2 + \bar{u} w_x w) dx = \int_{\Omega} \left(u_x w^2 + \frac{1}{2} \bar{u} (w^2)_x \right) dx = \int_{\Omega} u_x w^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{u} (w^2)_x dx$$

$$= \int_{\Omega} u_x w^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{u} w^2)_x dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{u}_x w^2 dx$$

$$\left| \beta \int_{\Omega} (u_x w + \bar{u} w_x) w dx \right| = \left| \beta \int_{\Omega} u_x w^2 dx - \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} \bar{u}_x w^2 dx \right|$$

$$\leq |\beta| \int_{\Omega} |u_x| |w|^2 dx + \frac{|\beta|}{2} \int_{\Omega} |\bar{u}_x| |w|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\beta| \sup_{\Omega} |u_x| \int_{\Omega} |w|^2 dx + \frac{|\beta|}{2} \sup_{\Omega} |\bar{u}_x| \int_{\Omega} |w|^2 dx \\
&= |\beta| (\|u_x\|_{\infty} + \frac{1}{2} \|\bar{u}_x\|_{\infty}) \|w\|^2 \leq \frac{3}{2} |\beta| R \|w\|^2
\end{aligned}$$

olur. Bunlar da Eş.4.34 de yerine yazılırsa;

Böylece

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 + (2\gamma - 3|\beta|R) \|w\|^2 \leq 0$$

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 + p_0 \|w\|^2 \leq 0$$

elde edilir.

2.7 eşitsizliği kullanılırsa;

$$\|w\|^2 \leq \|u(t_0) - \bar{u}\|^2 e^{-p_0(t-t_0)}, \quad t > t_0. \quad (4.35)$$

olur. Daha sonra Eş.4.33, $-w_{xx}$ ile çarpılırsa;

$$\int_{\Omega} w_t w_{xx} dx + \int_{\Omega} w_{xxx} w_{xx} dx + \gamma \int_{\Omega} w w_{xx} dx + \beta \int_{\Omega} w w_{xx} u_x dx + \beta \int_{\Omega} w_x w_{xx} \bar{u} dx = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_x\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w_{xx}^2)_x dx - \gamma \int_{\Omega} ((w w_x)_x - (w_x^2)) dx + \beta \int_{\Omega} (u_x w + \bar{u} w_x) w_{xx} dx = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_x\|^2 + \gamma \|w_x\|^2 + \beta \int_{\Omega} (u_x w + \bar{u} w_x) w_{xx} dx = 0 \quad (4.36)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (u_x w w_{xx} + \bar{u} w_x w_{xx}) dx &= \int_{\Omega} u_x w w_{xx} dx + \int_{\Omega} \bar{u} w_x w_{xx} dx \\
&= \int_{\Omega} (u_x (w w_x)_x - u_x w_x^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{u} (w_x)_x^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} u_x (w w_x)_x dx - \int_{\Omega} u_x w_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{u} (w_x)_x^2 dx \\
&= - \int_{\Omega} u_{xx} w w_x dx - \int_{\Omega} u_x w_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{u} w_x^2)_x dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{u}_x w_x^2 dx \\
&\left| \beta \int_{\Omega} (u_x w + \bar{u} w_x) w_{xx} dx \right| \leq \left| \beta \int_{\Omega} (u_x w_x^2 + u_{xx} w w_x + \frac{1}{2} \bar{u}_x w_x^2) dx \right| \\
&\leq |\beta| \sup |u_x| \int_{\Omega} |w_x|^2 dx + \frac{|\beta|}{2} \sup |\bar{u}_x| \int_{\Omega} |w_x|^2 dx + |\beta| \int_{\Omega} |u_{xx} w w_x| dx \\
&= |\beta| (\|u_x\|_{\infty} + \frac{1}{2} \|\bar{u}_x\|_{\infty}) \|w_x\|^2 + |\beta| \int_{\Omega} |u_{xx} w w_x| dx \\
&\leq \frac{5}{2} |\beta| R \|w_x\|^2
\end{aligned}$$

Buradan $\frac{d}{dt} \|w_x\|^2 + p_0 \|w_x\|^2 \leq 0$ elde edilir. (4.37)

Daha sonra 2.7 eşitsizliği kullanılırsa;

$$\|w_x\|^2 \leq \|u_x(t_0, x) - \bar{u}_x\|^2 e^{-p_0(t-t_0)}, t > t_0 \text{ elde edilir.} \quad (4.38)$$

Eş.4.35 ve Eş.4.38 den teorem ispatlanmış olur.

5. LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİNİN YEREL OLMAYAN ÇEKİCİSİNİN VARLIĞI

Şimdi yerel olmayan çekicinin varlığını ispatlamaya çalışalım:

Bunun için ilk önce $m = 0$ ve $m=2$ için bulduğumuz enerji denklemlerini yani Eş.4.2 ve Eş.4.21 i alt alta toplanırsa;

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \|u\|^2 + \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 \right\} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(-3uu_x^2 + \frac{u^4}{4} \right) dx + 2\gamma \left\{ \|u\|^2 + \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 \right\} \\
&+ 2\gamma \int_{\Omega} \left(3u^2 u_{xx} + \frac{3}{2} uu_x^2 + \frac{u^4}{2} \right) dx = 2 \int_{\Omega} f u dx - \frac{18}{5} \int_{\Omega} f_{xx} u_{xx} dx - 6 \int_{\Omega} f u u_{xx} dx \\
&- 3 \int_{\Omega} f u_x^2 dx - \int_{\Omega} f u^3 dx + (9-9\beta) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + (3\beta-3) \int_{\Omega} u u_x^3 dx \tag{5.1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

5.1. Not

$$* \int_{\Omega} u^2 u_{xx} dx = \int_{\Omega} (u^2 u_x)_x dx - \int_{\Omega} 2u u_x^2 dx = - \int_{\Omega} 2u u_x^2 dx$$

5.1.Notu, Eş.5.1 de yerine yazılıp yeniden düzenlenirse:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \|u\|^2 + \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 \right\} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(-3uu_x^2 + \frac{u^4}{4} \right) dx + 2\gamma \left\{ \|u\|^2 + \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 \right\} \\
&+ 2\gamma \int_{\Omega} \left(-\frac{9}{2} uu_x^2 + \frac{u^4}{2} \right) dx = 2 \int_{\Omega} f u dx - \frac{18}{5} \int_{\Omega} f_{xx} u_{xx} dx - 6 \int_{\Omega} f u u_{xx} dx - 3 \int_{\Omega} f u_x^2 dx \\
&- \int_{\Omega} f u^3 dx + (9-9\beta) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + (3\beta-3) \int_{\Omega} u u_x^3 dx \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \|u\|^2 + \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 \right\} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(-3uu_x^2 + \frac{u^4}{4} \right) dx + 2\gamma \int_{\Omega} \left\{ \|u\|^2 + \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\gamma \int_{\Omega} \left(-3uu_x^2 + \frac{u^4}{4} \right) dx = 3\gamma \int_{\Omega} uu_x^2 dx - \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u^4 dx + 2 \int_{\Omega} fudx - \frac{18}{5} \int_{\Omega} f_{xx} u_{xx} dx \\
& -6 \int_{\Omega} fuu_{xx} dx - 3 \int_{\Omega} fu_x^2 dx - \int_{\Omega} fu^3 dx + (9-9\beta) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + (3\beta-3) \int_{\Omega} uu_x^3 dx
\end{aligned}$$

Burada, $\forall u_0 \in H_{per}^k(\Omega)$ olmak üzere

$$\|S^{(k)}(t)u_0\|^2 = \|u\|^2 + \frac{9}{5} \|u_{xx}\|^2,$$

$$J_k(S^{(k)}(t)u_0) = \int_{\Omega} \left(-3uu_x^2 + \frac{u^4}{4} \right) dx,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_k(S^{(k)}(t)u_0) &= 3\gamma \int_{\Omega} uu_x^2 dx - \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u^4 dx - \frac{18}{5} \int_{\Omega} f_{xx} u_{xx} dx - 6 \int_{\Omega} fuu_{xx} dx - 3 \int_{\Omega} fu_x^2 dx \\
&\quad - \int_{\Omega} fu^3 dx + (9-9\beta) \int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + (3\beta-3) \int_{\Omega} uu_x^3 dx + 2 \int_{\Omega} fudx,
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \|S^{(k)}(t)u_0\|^2 + J_k(S^{(k)}(t)u_0) \right\} + 2\gamma \left(\|S^{(k)}(t)u_0\|^2 + J_k(S^{(k)}(t)u_0) \right) \\
& = \tilde{K}_k(S^{(k)}(t)u_0), \quad \forall u_0 \in H_{per}^k(\Omega)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir.

Ayrıca $\tilde{K}_k(S^{(k)}(t)u_0) = \tilde{K}_k(u(t)) = K_k(u(t)) + K_0(u(t))$ dir.

Burada $K_0(u(t)) = 2 \int_{\Omega} fudx$ dir.

Şimdi 2.7 eşitsizliği kullanılırsa: $\forall u_0 \in H_{per}^k(\Omega)$ ve $t \geq 0$ olmak üzere,

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ e^{2\gamma t} \left(\|S^{(k)}(t)u_0\|^2 + J_k(S^{(k)}(t)u_0) \right) \right\} \leq e^{2\gamma t} \tilde{K}_k(S^{(k)}(t)u_0)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^t \left\{ e^{2\gamma t} \left(\|S^{(k)}(t)u_0\|^2 + J_k(S^{(k)}(t)u_0) \right) \right\} dt \leq \int_0^t e^{2\gamma t} \tilde{K}_k(S^{(k)}(t)u_0) dt \\
&\Rightarrow e^{2\gamma t} \left\{ \left(\|S^{(k)}(t)u_0\|^2 + J_k(S^{(k)}(t)u_0) \right) \right\} - \|u_0\|^2 - J_k(u_0) \leq \int_0^t e^{2\gamma s} \tilde{K}_k(S^{(k)}(s)u_0) ds \\
&\Rightarrow \|S^{(k)}(t)u_0\|^2 + J_k(S^{(k)}(t)u_0) \leq e^{-2\gamma t} \left\{ \|u_0\|^2 + J_k(u_0) \right\} + \int_0^t e^{-2\gamma(t-s)} \tilde{K}_k(S^{(k)}(s)u_0) ds.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Şimdi bu yarıgrupun asimptotik kompaktlığı 2.1.Lemmasından faydalanılarak gösterilsin:

$B \subset H_{per}^k(\Omega)$ sınırlı ve $\{u_n\}_n \subset B$ ve $\{t_n\}_n$, $t_n \geq 0$, $t_n \rightarrow \infty$ olsun.

2.4.Lemma ile, $H_{per}^k(\Omega)$ deki orijin merkezli ρ_k yarıçaplı B_k ile ifade edeceğimiz yuvar, $H_{per}^k(\Omega)$ deki sınırlı kümeleri $S^{(k)}(t)$ operatörü yardımıyla yutar.

Dolayısıyla B ye bağlı bir $T(B) > 0$ zamanı mevcuttur öyle ki,

$$\forall t \geq T(B) \text{ için } S^{(k)}(t)B \subset B_k.$$

Bu durumda yeterince büyük n için ($t_n \geq T(B)$),

$$S^{(k)}(t_n)u_n \in B_k. \tag{5.4}$$

Böylece $\{S^{(k)}(t_n)u_n\}_n$, $H_{per}^k(\Omega)$ da zayıf göreceli kompakttır ve bundan dolayı, bazı w alt dizisi ve $w \in B_k$ için $S^{(k)}(t_m)u_m$, $H_{per}^k(\Omega)$ da w ya zayıf yakınsar. Yani

$$S^{(k)}(t_m)u_m \rightarrow w. \tag{5.5}$$

Benzer şekilde her bir $T > 0$ ve $t_n \geq T + T(B)$ için

$$S^{(k)}(t_n - T)u_n \in B_k \text{ olur.} \quad (5.6)$$

Böylece $\{S^{(k)}(t_n - T)u_n\}_n$, $H_{per}^k(\Omega)$ da göreceli kompakttır.

Şimdi $\forall T \in \mathbb{N}$ için $w_T \in B_k$ ile $S^{(k)}(t_m - T)u_m$, $H_{per}^k(\Omega)$ da w_k ya zayıf yakınsar.

Yani

$$S^{(k)}(t_m - T)u_m \rightarrow w_T. \quad (5.7)$$

2.2. Teoreminde $S^{(k)}(t)$ zayıf süreklili ve $\lim_{H_w^k}$, $H_{per}^k(\Omega)$ in zayıf topolojisine göre,

$$\begin{aligned} w &= \lim_{H_w^k} S^{(k)}(t_m)u_m = \lim_{H_w^k} S^{(k)}(T)S^{(k)}(t_m - T)u_m \\ &= S^{(k)}(T) \lim_{H_w^k} (t_m - T)u_m = S^{(k)}(T)w_T \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$w = S^{(k)}(T)w_T, \quad \forall T \in \mathbb{N} \text{ olur.} \quad (5.8)$$

Şimdi $\limsup_m \|S^{(k)}(t_m)u_m\| \leq \|w\|$ olduğunu gösterelim:

$T \in \mathbb{N}$ ve $t_n > T$ için Eş.5.3 tarafından

$$\begin{aligned} \|S^{(k)}(t_m)u_m\|^2 + J_k(S^{(k)}(t_m)u_m) &= \|S^{(k)}(T)S^{(k)}(t_m - T)u_m\|^2 + J_k(S^{(k)}(T)S^{(k)}(t_m - T)u_m) \\ &= \left(\|S^{(k)}(t_m - T)u_m\|^2 + J_k(S^{(k)}(t_m - T)u_m) \right) e^{-2\gamma T} \\ &\quad + \int_0^T e^{-2\gamma(T-s)} \tilde{K}_k(S^{(k)}(s)S^{(k)}(t_m - T)u_m) ds \end{aligned} \quad (5.9)$$

olur ve Eş.5.7 den

$$\limsup_{n'} e^{-2\gamma T} \left(\|S^{(k)}(t_{n'} - T)u_{n'}\|^2 + J_k(S^{(k)}(t_{n'} - T)u_{n'}) \right) \leq ce^{-2\gamma T} \quad (5.10)$$

olur. Buradaki c sabiti T ve m den bağımsızdır.

Bu durumda Eş.5.5 ve Eş.5.7 zayıf sürekliliği ve J_k ve \tilde{K}_k operatörlerinin sürekliliği ile Eş.5.9 da m sonsuza giderken aşağıdaki limsup a geçilirse,

$$\limsup_{n'} \left\{ \|S^{(k)}(t_{n'})u_{n'}\|^2 \right\} + J_k(w) \leq ce^{-2\gamma T} + \int_0^T e^{-2\gamma(T-s)} \tilde{K}_k(S^{(k)}(s)w_T) ds . \quad (5.11)$$

Başka bir ifadeyle , Eş.5.3 de $w = S^{(k)}(T)w_T$ kullanılırsa ,

$$\begin{aligned} \|w\|^2 + J_k(w) &= \|S^{(k)}(T)w_T\|^2 + J_k(S^{(k)}(w_T)) \\ &= \left(\|w_T\|^2 + J_k(w_T) \right) e^{-2\gamma T} + \int_0^T e^{-2\gamma(T-s)} \tilde{K}_k(S^{(k)}(s)w_T) ds \end{aligned} \quad (5.12)$$

olur.

Eş.5.11 ve Eş.5.12 den

$$\begin{aligned} \limsup_{n'} \|S^{(k)}(t_{n'})u_{n'}\|^2 &\leq \|w\|^2 + \left(c - \|w_T\|^2 - J_k(w_T) \right) e^{-2\gamma T} \\ &\leq \|w\|^2 + c'e^{-2\gamma T} \quad , \quad \forall T \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (5.13)$$

olur. Burada c' , T den bağımsız bir diğer sabittir.

Eş.5.13 de $T \rightarrow \infty$ olsun. Bu durumda,

$$\limsup_m \|S^{(k)}(t_m)u_m\|^2 \leq \|w\|^2 \quad (5.14)$$

elde edilir.

$H_{per}^k(\Omega)$ bir Hilbert uzay olduğunda Eş.5.14 ve Eş.5.5 $S^{(k)}(t_m)u_m$ nün , $H_{per}^k(\Omega)$ da w ya güçlü yakınsadığını beraberinde getirir yani

$$S^{(k)}(t_m)u_m \rightarrow w \quad (5.15)$$

olur.

Bu durumda, $\{S^{(k)}(t_n)u_n\}_n$ nin $H_{per}^k(\Omega)$ da göreceli kompakt olduğu sonucu

çıkartılır. Böylece 2.1.Lemmadan $\{S^{(k)}(t)\}_{t \geq 0}$, $H_{per}^k(\Omega)$ da asimptotik kompakttır.

2.3.Teoremine göre $\{S^{(k)}(t)\}_{t \geq 0}$, $H_{per}^k(\Omega)$ da bir sınırlı B_k yutan kümesine sahip

olduğundan 2.5. Tanımından yerel olmayan çekicinin varlığı gösterilmiş olur.

KAYNAKLAR

1. Korteweg D.J and de Vries G., “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary wave”, *Phil. Mag*, 39,422 (1895)
2. Benjamin T.B, “Lectures on nonlinear wave motion”, In Lectures in applied mathematics, vol. 15. Providence, *Am. Math. Soc*, Rhode Island (1974)
3. Jeffrey A. and Kakutani T., “Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centred around the Korteweg-de Vries equation”, *S.I.A.M*, Rev. 14, 4: 582 (1972)
4. Miura R.M., “The Korteweg-de Vries equation: a model for nonlinear dispersive waves”, *Cornell University Pres*, ch.VIII, Ithaca. 212 (1974)
5. Scott A.C, Chu F.Y.F and McLaughlin D.W., “The solution: a new concept in applied science”, *Proc I.E.E.E.*, 61, 10, 1443 (1973)
6. Sjöberg A., “On the Korteweg-de Vries equation”, *Report, Department of Computer Science*, Uppsala University (1967)
7. Sjöberg A., “ On the Korteweg-de Vries equation: existence end uniqueness”, *J. Math. Anal. Appl.*, 29, 569 (1970)
8. Temam R., “Sur un probleme non lineaire”, *J. Math. Pures et Appl.*, 48, 159. (1969)
9. Kametaka Y. “Koteweg-de Vries equation I-IV”, *Proc. Japan. Acad.* 45, 552-558, 656-665 (1969)
10. Tsutsumi M., Mukasa T., “Parabolic regularization for the generalized Korteweg-de Vries equation”, *Funkcialaj Ekvacioj*, 14,89 (1971)
11. Tsutsumi M., Mukasa T., Iino R., “On the generalized Korteweg-de Vries equation”, *Proc. Japan. Acad.*, 46,921(1970)
12. Menikoff A., “Unbounded solutions of the Korteweg-de Vries equation” *Comm. Pure appl. Math.*, 25, 407 (1972)
13. Robert A. A, “Sobolev Spaces” ,*Academic Press, Inc*, Orlando, Florida, 1-265 (1975)
14. Sel G.R and You Y., “Dynamics of Evolutionary Equations”, *Springer*, 356-562 (2002)
15. Suhubi, E.S., “Fonksiyonel Analiz”, *İTÜ Vakfı Yayınları*, İstanbul, 1-638 (2001)

16. Temam R., "Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics". Applied Mathematical Science Volume 68, *Springer-Verlag*, New York, Inc. 15-28/ 256-269 (1997,1988)
17. Evans C.L., "Partial Differential Equations" *American Mathematical Society Providence*, Rhode Island. 239-292 (1998)
18. Zheng S., "Nonlinear Evolution Equations" *CHAPMAN and HALL/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, 21-255 (2004)
19. Aftabizadeh A.R., Xu J.M. and Gupta C.P., "Periodic Boundary Value Problems for third order ordinary differential Equations" *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, **14(1)**, 1-10, Great Britain (1990)
20. Georgiev V. And Todorova G., "Existence of Solution of the Wave Equation with Nonlinear Damping and Source Terms" *Journal of differential equations* , 109,295-308 (1994)
21. Aftabizadeh A.R., Xu J.M. and Gupta C.P., "Existence and Uniqueness Theorems for three-point Boundary Value Problems" *Siam J.Math Anal.* **20(3)**: 716-726, May 1989
22. Ghidaglia, J.M., "Weakly damped forced Korteweg-de Vries equations behave as a finite dimensional system in the long time" *J.Diff. Eqns*, 74:369-390 (1988)
23. Aftabizadeh, A. R , Jian-Ming Xu and Gupta, C.P., "Periodic boundary value problems for third order ordinary differential equations" *Nonlinear Analysis* **14(1)**,1-10 (1990)
24. Aftabizadeh, A. R., Jian-Ming Xu and Gupta, C. P., "Existence and uniqueness theorems for three-point boundary value problems" *SIAM J. Math :Anal.*, 20(3):716-726 (1989)
25. Granas,A., Guenthr, R. B. and Lee, J.W., "Existence principles for classical and caratheodory solutions of nonlinear systems and applications" *Proc. Int. Conf. Theory Appl. Diff. Eq.*, Athens, Ohio, 353-364 (1988)
26. H.L.Royden., "Real Analysis" *Macmillan Publishiy Company* ,Newyork, 108-109 (1988)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : UZ, Mine
Uyruđu : TC
Dođum Tarihi ve yeri : 06.05.1985 Ankara
Medeni Hali : Bekar
e-mail : mineuz85@gmail.com

Eđitim Derecesi	Eđitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	2008
Lise	Kurtuluş Süper Lisesi	2003

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okumak, Müzik dinlemek.