ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Didem ÜCAL

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN BAZLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2012

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN BAZLARI

Didem ÜCAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 28/09/2012 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....	.....	.....
Prof.Dr. Naime EKİCİ	Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL	Doç.Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Selahattin SERİN
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Tübitak-Bideb Tarafından Desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN BAZLARI

Didem ÜCAL

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Naime EKİCİ
Yıl : 2012, Sayfa: 47
Jüri : Prof. Dr. Naime EKİCİ
: Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
: Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

Bu çalışmanın amacı Chibrikov'un (2006), serbest Lie cebirlerinin sağ normlu bazları ile ilgili çalışmasını inceleyerek bazların yapısını araştırmaktır. Bu çalışmada bir serbest Lie cebirinin sağ normlu kelimelerden oluşan bir bazı incelenmiş ve $1 \leq p \leq t$ için a_{i_p} ler serbest üreteçler olmak üzere $[a_{i_1}[a_{i_2}[\ldots[a_{i_{t-1}}a_{i_t}]\ldots]]]$ formundaki tüm kelimelerin kümesinin bir baz olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Serbest Lie cebirleri , Lineer baz , Sağ normlu baz , Lyndon-Shirshov kelimeleri

ABSTRACT

MSc. THESIS

BASIS OF FREE LİE ALGEBRAS

Didem ÜCAL

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Naime EKİCİ
Year : 2012, Pages: 47
Jury : Prof. Dr. Naime EKİCİ
: Assoc. Prof. Dr. Zerrin ESMERLİGİL
: Assoc. Prof. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

The purpose of this work is to investigate the structure of the bases by examining Chibrikov's (2006) study about the right normed basis for free Lie algebras. In this work, a basis of a free Lie algebra that consists of right normed words is examined and a set of all words in the form $[a_{i_1}[a_{i_2}[\ldots[a_{i_{t-1}}a_{i_t}]\ldots]]]$ is shown to be a base where a_{i_p} are free generators for $1\leq p \leq t$.

Keywords: Free Lie algebras, Linear basis, Right normed basis, Lyndon-Shirshov words

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Naime EKİCİ'ye sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yardımlarından dolayı tüm Matematik Bölümü akademik personeline ve bana her konuda yardımcı olan sevgili arkadaşım Arş. Gör. Gülistan KAYA GÖK'e yardım ve teşviklerinden dolayı teşekkür ederim.

Bugüne kadar desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme, nişanlım Yücel GÜLER'e ve tezimin yazım aşamasındaki desteklerinden dolayı arkadaşım Göynüm AKÇA'ya sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim süresince verdiği burstan dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Dairesi Başkanlığına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIMLAR 3
3. SERBEST LİE CEBİRLERİNİN BAZLARI 9
3.1. Temel Bilgiler 9
3.2. Serbest Lie Cebirinin Sağ Normlu Bir Bazı 18
3.3. Lyndon-Shirshov Kelimelerinde Diğer Bir Braketleme 36
KAYNAKLAR 45
ÖZGEÇMİŞ 47

1. GİRİŞ

Bir serbest Lie cebirinin bazı ilk olarak M. Hall (1950) tarafından bulunmuştur. A. I. Shirshov (1958) ve R. C. Lyndon (1958) , bir serbest Lie cebirinin Lyndon-Shirshov kelimelerinden oluşan bir bazını inşa etmişlerdir. Bu bazın tanımlanması, Lie cebirlerinde kompozisyon yönteminin (Shirshov , 1962) gelişmesini sağlamıştır. Bu yöntem L.A. Bokut'ın (1972) çalışmasıyla son şeklini alarak bugünlerde Gröbner-Shirshov bazı denilen yöntemin bulunmasına yol açmıştır.

Lyndon-Shirshov bazı serbest Lie cebirleri teorisinde oldukça önemli bir rol oynar. A.I. Shirshov, serbest Lie cebirleri için baz seçerken, Hall ve Lyndon-Shirshov bazını kullanmanın yararlı olduğunu söylemiştir. Serbest Lie cebirleri için birçok baz kümesi L.A. Bokut (1963), C. Reutenauer (1990), D. Blessenohl ve H. Laue (1993), R. M. Bryant, L. G. Kovacs ve R. Stöhr (2002), S. Guilfoyle ve R. Stöhr (1998) tarafından bulunmuştur.

Son yıllarda birçok alanda yoğun bir şekilde kullanılan Gröbner bazına, Lie cebirlerinde temel teşkil eden Lyndon-Shirshov kelimelerini içeren bir bazın inşası E. S. Chibrikov (2006) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmanın amacı Chibrikov'un (2006) çalışmasını Türkçe'ye kazandırarak geniş kitlelerin yararlanmasını sağlamak ve Lie cebirleri için yeni baz kümelerinin inşasına yol açmaktır. Chibrikov'un çalışması eklediğimiz örneklerle zenginleştirilmiş ve inşa edilen bazın daha kolay anlaşılması sağlanmıştır.

Tezin 2. Bölümünde tez boyunca kullanılan temel tanımlara yer verilmiştir.

Tezin 3. Bölümünde, $1 \leq p \leq t$ için a_{i_p} ler serbest üreteçler olmak üzere $[a_{i_1}[a_{i_2}[\ldots[a_{i_{t-1}}a_{i_t}]\ldots]]]$ formundaki tüm kelimelerin kümesinin bir serbest Lie cebiri için bir baz oluşturduğu gösterilmiştir. Bunun için, belli özelliklere sahip sağ normlu kelimelerin kümesi ile Lyndon-Shirshov kelimelerinin kümesi arasında kelimelerin içeriğini değiştirmeyen bir bijeksiyon tanımlanmıştır. Bu bölümde, asosyatif Lyndon-Shirshov kelimeleri üzerinde bir parantezleme tanımlanarak birim elemanlı, asosyatif ve değişmeli halkalar üzerindeki serbest Lie cebirleri için bir lineer baz inşa edilmiş ve bu baz kullanılarak herhangi bir cisim üzerindeki serbest

Lie cebirleri için bir bazın nasıl inşa edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca asosyatif Lyndon-Shirshov kelimelerindeki parantezleme ile inşa edilen baz için Kompozisyon-Diamond Önermesi ispatlanmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR

Tanım 2.1. G boş olmayan bir küme olsun. G üzerinde tanımlı bir ikili işlem aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) Her $a,b,c \in G$ için, $(ab)c = a(bc)$ ise, G ye bir yarıgrup (semigrup) denir.

ii) Eğer bir G yarıgrubunda, her $g \in G$ için, $eg = g\,e = g$ olacak biçimde bir $e \in G$ varsa, G ye bir monoid denir.

iii) Eğer bir G monoidinde, her $a \in G$ için, $aa' = a'a = e$ olacak biçimde bir $a' \in G$ varsa, G ye bir grup denir.

Tanım 2.2. A boş olmayan bir küme (alfabe) olsun. $a_1,..., a_n \in A$ için $w = a_1 \dots a_n$ ise w ya A üzerinde uzunluğu n olan bir kelime denir.

A boş olmayan bir küme ve A^+ da A üzerinde boş olmayan tüm sonlu kelimelerin ($w \in A^+$ için w nun uzunluğu n olmak üzere $n < \infty$ ise w sonlu kelimedir.) bir kümesi olsun. Yani ,

$$A^+ = \{\, a_1 \dots a_n \mid a_i \in A \,,\, n \in \mathrm{Z} \,\}$$

Her $a_1 \dots a_m \in A^+$ ve $b_1 \dots b_n \in A^+$ için ,

$$(a_1 \dots a_m)\,(b_1 \dots b_n) = a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n$$

ikili işlemi ile A^+ bir yarıgrup olup buna A üzerinde serbest yarıgrup denir. A^+ ya 1 boş kelimesi (birim eleman) eklenerek elde edilen monoide serbest monoid denir ve A^+ ile gösterilir.

Tanım 2.3. $\langle X \rangle$ ile, X üzerindeki bütün asosyatif kelimelerin serbest monoidini gösterelim

.

Tanım 2.4. F bir cisim ve A , F üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir $m : A \times A \to A$ fonksiyonu, her a_i , $b_i \in A$ ve $r \in F$ için ;

$$m(a_1+a_2 , b) = m(a_1,b) + m(a_2,b)$$

$$m(a , b_1+b_2) = m(a, b_1) + m(a,b_2)$$

$$m(ra,b) = rm(a,b) = m(a,rb)$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyonla A ya bir cebir ve tanımdaki m bilineer dönüşümüne bir çarpım denir. Eğer A bir cebir ve x , $y \in A$ ise $m(x,y)$ yerine xy yazalım.

Tanım 2.5. A, bir cebir olsun. Eğer her $x, y, z \in A$ için

$$x (yz) =(xy)z$$

ise A ya bir *birleşmeli (asosyatif) cebir* denir.

Tanım 2.6. X boş olmayan sayılabilir bir küme olsun. X in elemanlarını alfabedeki bir harf olarak ilişkilendirelim. Tüm kelimeleri bu harflerle oluştururuz. n –uzunluklu bir kelime X'in elemanlarının sıralı n-lileridir.

n-uzunluklu tüm kelimelerin kümesine X^n diyelim. $|X| = r$ ise r^n tane n-uzunluklu kelime vardır.

Sonlu uzunluklu tüm kelimelerin kümesine X^* diyelim.

$$X^* = \bigcup_{n\geq 1} X^n$$

($u,v \in X^*$ ise bu iki kelimenin çarpımı yan yanadır. Örneğin , *aab* ile *bab* nin çarpımı *aabbab* şeklindedir.)

A , F üzerinde X^* tabanıyla bir vektör uzayı olsun. X^* daki çarpımı A ya genişletebiliriz.

$$(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i)(\sum_{j\in J} \beta_j w_j) = \sum_{i\in I, j\in J} \alpha_i\beta_j v_i w_j$$

Bu çarpımla, A birimsiz bir birleşmeli cebir olur.
Eğer $|X| = r$ ise ($X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$) A , F cismi üzerinde serbest birleşmeli cebir olarak isimlendirilir.

Tanım 2.7. F bir cisim ve L , F üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer L üzerinde aşağıdakiler sağlanacak şekilde bilineer bir [,] : $L \times L \to L$, (x,y) → [x,y] ikili işlemi tanımlıysa L ye bu işlemle birlikte (Lie çarpımı veya braket çarpımı) bir Lie cebiri denir.

L1 : Her x ∈ L için [x,x] = 0

L2 : Her x,y,z ∈ L için [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 (Jacobi Özdeşliği)

Tanım 2.8. L ve M aynı k cismi üzerinde iki Lie cebiri olsun. Bir $\alpha : L \to M$ lineer dönüşümü $x, y \in L$ için;

$$\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)]$$

oluyorsa α ya bir Lie homomorfizmi denir. Eğer bu dönüşüm birebir ve örten ise izomorfizm denir. Eğer α , L üzerinde bir izomorfizm ise o zaman α ya L nin otomorfizmi denir.

Genellikle homomorfizm teoremleri Lie cebiri homomorfizmleri için de doğrudur.

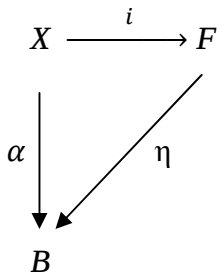
Tanım 2.9. Bir F Lie cebiri herhangi bir $X \neq \emptyset$ kümesi verildiğinde her B Lie cebiri için $\alpha : X \to B$ bir dönüşüm olmak üzere, $i : X \to F$ dönüşümü için

$$\alpha = \eta . i$$

olacak şekilde bir tek

$$\eta : F \to B$$

Lie homomorfizmi varsa (F,i) çiftine X üzerinde serbest Lie cebiri , X kümesine F nin serbest üreteç kümesi denir. $\alpha = \eta.i$ olduğundan aşağıdaki diagram değişmelidir:



Tanım 2.10. Bir X kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebirini *Lie(X)* ile gösterelim.

Tanım 2.11. X kümesindeki elemanların Lie çarpımlarından oluşan bir kelimeye Lie monomiali denir. ($x_{i_j} \in X$ için $u = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ şeklinde ise) Lie monomiallerinin herhangi bir lineer toplamına da bir Lie polinomu denir. p Lie polinomunun en büyük uzunluğa sahip teriminin (baş monomiali) katsayısı 1 ise , p ye monik Lie polinomu denir.

Tanım 2.12. $w = a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_t} \in$ <X> olsun. *Lie(X)* in sağ normlu $[w]$ kelimesini $[w] = [a_{i_1}[a_{i_2}[\dots[a_{i_{t-1}}a_{i_t}]\dots]]]$ ile gösteririz.

Tanım 2.13. Verilen her boş olmayan X kümesi üzerinde bir serbest Lie cebiri tanımlanabilir. Serbest Lie cebirleri için baz kümesi ilk defa Hall tarafından tanımlanmıştır. Serbest Lie cebirleri için Hall bazı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. X kümesine bir tam sıralama verilir. X in elemanları dereceleri 1 olan monomiallerdir.

   $H_1 = X$ diyelim.

2. Uzunluğu 2 olan monomialler $w = x_\alpha x_\beta$ şeklindedir öyle ki $x_\alpha > x_\beta$ dır ve $x_\alpha, x_\beta \in X$ dir.

$H_2 = \{ x_\alpha x_\beta \mid x_\alpha > x_\beta , x_\alpha, x_\beta \in H_1 \}$ diyelim.

3. Uzunluğu 3,4,…,m olan monomialler tanımlanmış ve uzunluğu koruyan bir sıralama verilmiş olsun :
q , q' monomialleri için q nın uzunluğu ($l(q)$) , q' nın uzunluğundan ($l(q')$) dan büyük ise yani $l(q) > l(q')$ ise $q > q'$ olsun.
Eğer $l(q) = l(q') > 1$ ve $q = q_1 q_2$, $q' = q_1' q_2'$ ise $q_1 > q_1'$ veya $q_1 = q_1'$ ve $q_2 > q_2'$ ise $q > q'$ olsun.

$H_n = \{h = ((uv)w) \mid u,v,w,uv \in \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i , u > v , v \leq w , uv > w , l(h) = n\}$

diyelim.

$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ kümesi *Lie(X)* in bir bazı olup bu baza Hall bazı denir.

Tanım 2.14. Bir X kümesi tarafından üretilen serbest asosyatif cebiri $k\langle X\rangle$ ile gösterelim. *Id(S),* $k\langle X\rangle$ in S tarafından üretilen ideali olsun.

3.SERBEST LİE CEBİRLERİNİN BAZLARI

Bu bölümde bir serbest Lie cebirinin sağ normlu kelimelerden oluşan bir bazını inceleyeceğiz. $1 \leq p \leq t$ için a_{i_p} ler serbest üreteçler olmak üzere $[a_{i_1}[a_{i_2}[\ldots[a_{i_{t-1}}a_{i_t}]\ldots]]]$ formundaki tüm kelimelerin kümesinin bir baz olduğunu göstereceğiz.

3.1. Temel Bilgiler

$X = \{ a_i \mid i \in I \}$ lineer sıralı küme, k bir cisim ve *Lie(X)*, k üzerinde X tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. $\langle X \rangle$ ile , X üzerindeki bütün asosyatif kelimelerin serbest monoidini gösterelim. $\langle X \rangle$ monoidinin 1 kelimesini içerdiğini varsayalım. $\langle X \rangle$ üzerinde aşağıdaki lineer sıralamaları düşüneceğiz.

i. Alfabetik sıralama : Boş olmayan bütün u kelimeleri için $u < 1$ dir ve tümevarımla , eğer $u = a_i u'$, $v = a_j v'$ için $a_i < a_j$ ya da $a_i = a_j$ ve $u' < v'$ ise $u < v$ dir.

ii. der-alf sıralaması : Eğer $|u| < |v|$ veya $|u| = |v|$ ve $u < v$ ise u **p** v dir. Burada $|w|$ ile w kelimesinin derecesi anlaşılacaktır.

Tanım 3.1.1. Bazı z, v_1, u_1 kelimeleri ve $b < a$ olacak şekildeki bazı *a,b* harfleri için $v = zbv_1$, $u = zau_1$ ise v , u kelimesinden alfabetik olarak kuvvetli küçüktür denir.

$w = a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_t} \in \langle X \rangle$ olsun. w 'nun tersini $w^* = a_{i_t}\ldots a_{i_2}a_{i_1}$ ile , *Lie(X)* in bir sağ normlu [w] kelimesini $[a_{i_1}[a_{i_2}[\ldots[a_{i_{t-1}}a_{i_t}]\ldots]]]$ ile gösterelim. Eğer her $1 \leq j \leq t$ için $a \geq a_{i_j}$ ve bazı $1 \leq p \leq t$ için $a = a_{i_p}$ ise a ya baş harf denir.

X tarafından üretilen serbest asosyatif cebiri k$\langle X \rangle$ ile gösterelim. k$\langle X \rangle$, $[\, xy \,] = xy - yx$ çarpımı ile bir Lie cebiridir. Bu nedenle *Lie(X)* in k$\langle X \rangle$ cebirinin bir alt uzayı olduğunu kabul edebiliriz. Verilen bir $f \in$ k$\langle X \rangle$ için , (ii)deki sıralama altında f nin maksimal asosyatif kelimesini $\bar{f}$ ile gösterelim . Eğer $\alpha_i \in$ k , $v_i \in \langle X \rangle$

ve v_i **p** $\bar{f}$ için $f = \bar{f} + \sum \alpha_i v_i$ ise f moniktir.

Tanım 3.1.2. *w* bir asosyatif kelime olsun. Boş olmayan keyfi *u* ve *v* için *w* =*uv* olmak üzere *w* > *vu* oluyorsa *w* ya asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesi denir.

Her $f \in Lie(X)$ için $\bar{f}$ nin bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesi olduğu tanımdan açıkça görülmektedir. Bunu aşağıdaki örnekle açıklayabiliriz.

Örnek: $f = a_1a_2+a_1a_3a_5$ olsun.

$\bar{f} = a_1a_3a_5$ dir.

$a_1a_3a_5 > a_3a_5a_1$ ve $a_1a_3a_5 > a_5a_1a_3$ olduğundan $\bar{f}$ bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesidir. ($\bar{f}$, f nin maksimal asosyatif kelimesidir.)

Tanım 3.1.3. Aşağıdakilerin sağlanması durumunda asosyatif olmayan bir $[u]$ kelimesine Lyndon-Shirshov kelimesi denir :

1. u bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesidir.
2. Eğer $[u] = [[u_1][u_2]]$ ise $[u_1]$ ve $[u_2]$ Lyndon-Shirshov kelimeleridir . (Bu durumda (1) den $u_1 > u_2$ olduğu görülür)
3. Eğer $[u] = [[[\, u_{11}] [u_{12}]] [u_2]]$ ise $u_{12} \leq u_2$ dir.

Örnek: $X = \{x_1 , x_2, x_3 \}$ için $x_1 > x_2 > x_3$ olsun.

$[f_1] = [[x_1x_3] x_2]$ olsun.

$f_1=x_1x_3x_2$ dir.

$f_1=\underbrace{x_1}_{u}\ \underbrace{x_3\ x_2}_{v}$ için $vu = x_3\ x_2x_1$ dir ve $x_1x_3x_2 > x_3\ x_2x_1$ olduğundan $uv>vu$ dır.

$f_1=\underbrace{x_1x_3}_{u}\ \underbrace{x_2}_{v}$ için $vu = x_2x_1x_3$ dir ve $x_1x_3x_2 > x_2x_1x_3$ olduğundan $uv>vu$ dır.

Bu durumda f_1 bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesidir.

Burada $[f_1] = [[x_1x_3] x_2]$ için $[u_1]= [x_1x_3]$ ve $[u_2]= [x_2]$ dir.

$x_1x_3 > x_3x_1$ olduğundan $u_1= x_1x_3$ ve $u_2= x_2$ Lyndon Shirshov kelimeleridir.

O halde

$[u_1]$ ve $[u_2]$ Lyndon-Shirshov kelimeleridir.

$[f_1] = [[x_1x_3]\, x_2]$ için

$u_{11} = x_1$ $u_{12} = x_3$ $u_2 = x_2$ olarak alınırsa

$x_3 < x_2$ olduğundan $u_{12} \leq u_2$ dir.

O halde Tanım 3.1.3 deki bütün koşullar sağlandığından

$[f_1] = [[x_1x_3]\, x_2]$ bir Lyndon-Shirshov kelimesidir.

Örnek: $[f_2] = [x_2x_3]$ olsun.

$f_2 = x_2x_3$ dir.

$x_2x_3 > x_3x_2$ olduğundan f_2 asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesidir.

x_2 ve x_3 Lyndon-Shirshov kelimeleridir. Dolayısıyla

$[f_2] = [x_2x_3]$ Lyndon-Shirshov kelimesidir.

Örnek: $[f_2] = [[[x_2x_3]\ x_1]\ x_1]$ olsun

$f_2 = x_2x_3\ {x_1}^2$ dir.

$f_2 = \underbrace{x_2x_3}_{u}\ \underbrace{{x_1}^2}_{v}$ için $vu = {x_1}^2x_2x_3$ dır ve $x_2 < x_1$ olduğundan $f_2 < vu$ dır. Bu durumda

f_2 , Lyndon-Shirshov kelimesi değildir.

$a \in X$ için $[a] = a$ olsun. w bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesi ve v , w nun en uzun asosyatif Lyndon-Shirshov sonu olmak üzere $[w] = [[u][v]]$ olsun. (böylece u da bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesidir.) O zaman , $[w]$ bir (asosyatif olmayan) Lyndon-Shirshov kelimesidir.

Örnek: $X = \{x_1 , x_2, x_3\}$ için $x_1 > x_2 > x_3$ olsun.

$w = x_1x_2x_1x_3$ kelimesini düşünelim.

$x_1x_2x_1x_3 > x_2x_1x_3x_1$, $x_1x_2x_1x_3 > x_1x_3x_1x_2$, $x_1x_2x_1x_3 > x_3x_1x_2x_1$ olduğundan seçtiğimiz bütün u ve v için $w = uv$ olmak üzere $w > vu$ olduğundan w bir Lyndon-Shirshov kelimesidir.

Şimdi $u = x_1$ ve $v = x_2x_1x_3$ olsun. $a = x_2$, $b = x_1x_3$ diyelim. $v = ab$ olup $ba = x_1x_3x_2$ dir. $x_2 < x_1$ olduğundan $v < ba$ dır. Dolayısıyla v bir Lyndon-Shirshov kelimesi değildir.

$u = x_1x_2$ ve $v = x_1x_3$ olsun. $a = x_1$, $b = x_3$ diyelim. O zaman $v = ab$ olup $ba = x_3x_1$ dir.

$x_1 > x_3$ olduğundan $v > ba$ dır. Dolayısıyla v bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesidir.

Aynı zamanda , $u = x_1x_2 > x_2x_1$ olduğundan u da bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesidir. $[u] = [x_1x_2]$ ve $[v] = [x_1x_3]$ olup $[w] = [[u][v]] = [[x_1x_2][x_1x_3]]$ kelimesi bir Lyndon-Shirshov kelimesidir.

Şimdi sabit asosyatif Lyndon-Shirshov altkelimeli (Shirshov, 1958) bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesinin parantezlemesini tanımlayalım.

w ve h asosyatif Lyndon-Shrishov kelimeleri olmak üzere $w = uhv$ olsun. $[w]$ nun h yi kapsayan ve asosyatif olmayan minimal altkelimesinin $[hc]$ formunda olduğu kolayca görülebilir. Burada $c \in \langle X \rangle$ dir.

Örnek: $X = \{x_1 , x_2, x_3 \}$ için $x_1 > x_2 > x_3$ olsun.

$h = x_1x_3$, $u = x_1$, $v = x_2x_3$ diyelim.

$w = x_1x_1x_3x_2x_3$ dir. w bir Lyndon-Shirshov kelimesidir.

$[w] = [x_1[x_1[x_3[x_2x_3]]]]$ dir.

$[w] = [x_1 \underbrace{[x_1[x_3[x_2x_3]]]}_{minimal}]$ olmak üzere $[w]$'nun h yi kapsayan minimal altkelimesi

$c = x_2x_3$ için $[hc] = [x_1[x_3c]]$ formundadır.

$m \geq 1$ olmak üzere $c = c_1c_2 \ldots c_m$ olsun. Burada herbir c_i asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesi ve $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_m$ dir. $[w]$ da $[hc]$ altkelimesini $(\ldots(([h][c_1])[c_2])\ldots[c_m])$ ile değiştirerek elde edilen asosyatif olmayan kelimeyi $[uhv]_h$ ile gösterelim.

$\overline{[uhv]}_h = w$ dır. $w = u\overline{f}v$ için f , $\overline{f} = h$ w 'nun altkelimesi olacak şekildeki bir monik Lie polinomu olsun. $[uhv]_h$ dan $[h]$ yi f ile değiştirerek elde edilen Lie polinomunu $[ufv]_f$ ile gösterelim.

Örnek: $c_1 = x_1$ ve $c_2 = x_1x_3$ olsun.

$c = x_1x_1x_3$ dir.

$h=x_1x_3$ olsun. $hc=x_1x_3x_1{}^2x_3$ dir.

$[hc]=[x_1[x_3[x_1[x_1x_3]]]]$ dir.

$w=x_1x_2x_1x_3x_1{}^2x_3$ diyelim. $[w]=[x_1[x_2[x_1[x_3[x_1[x_1x_3]]]]]]$ dir.

$[w] = [x_1[x_2[\underbrace{x_1[x_3}_{h}[\underbrace{x_1}_{c_1}\underbrace{[x_1x_3]}_{c_2}]]]]]$ olmak üzere

$[uhv]_h = [x_1[x_2\left[\,[[x_1x_3]x_1][x_1x_3]\right]]$ dir.

Tanım 3.1.4. f ve g monik Lie polinomları ve $w \in \langle X\rangle$ olmak üzere $u,v \in \langle X\rangle$ ve $|\overline{f}| + |\overline{g}| > |w|$ için $w = \overline{f}u = v\overline{g}$ olsun. f ve g nin w ya göre kesişme kompozisyonu,

$$(f,g)_w = [fu]_f - [vg]_g$$

şeklinde tanımlanır. Burada $[vg]_g = [vg]$ dir.

Örnek: $[f] = [[x_1x_2]x_3] + [x_1x_3]$ ve

$[g] = [x_2x_3] + x_3$ olsun.

$f = x_1x_2x_3 + x_1x_3$, $g = x_2x_3 + x_3$

$\overline{f} = x_1x_2x_3$ ve $\overline{g} = [x_2x_3]$ dir.

$w = \overline{f}u = v\overline{g}$ olacağından $w = x_1x_2x_3$, $u=1$ ve $v = x_1$ alabiliriz.

$[fu] = [x_1[x_2x_3]] + [x_1x_3] = [fu]_f$ ve

$[vg]= [x_1[x_2x_3]] + [x_1x_3] = [vg]_g$ olduğundan $(f,g)_w = 0$ dır.

Örnek: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ için $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$ olsun.

$p=x_1{}^2x_3 - x_2x_4$ ve $q= x_3{}^2x_2 + x_1$ olmak üzere $S = \{p,q\}$ olsun.

$\overline{p} = x_1{}^2x_3$ ve $\overline{q} = x_3{}^2x_2$ dir.

p ve q nın w'ya göre kesişme kompozisyonunu hesaplayalım :

$w = x_1{}^2x_3{}^2x_2 = \overline{p}u = v\overline{q}$ olduğundan $u = x_3x_2$ ve $v = x_1{}^2$ dir.

Ayrıca $|\overline{p}| + |\overline{q}| = 3+3 = 6 > 5 = |w|$ dır.

$pu = (x_1{}^2 x_3 - x_2 x_4)\, x_3 x_2$ olup

$[pu]_p = [[x_1[x_1x_3] - [x_2x_4]][x_3x_2]] = [[\, x_1[x_1x_3]][x_3x_2]] - [[x_2x_4][x_3x_2]]$ ve

$vq = x_1{}^2(x_3{}^2 x_2 + x_1)$ olup

$[vq]_q = [x_1[x_1[[x_3[x_3x_2]] + x_1]]]$ dir.

O halde

$(p,q)_w = [[\, x_1[x_1x_3]][x_3x_2]] - [[x_2x_4][x_3x_2]] - [x_1[x_1[[x_3[x_3x_2]] + x_1]]]$

dır.

Tanım 3.1.5. f ve g monik Lie polinomları ve $w \in \langle X \rangle$ olmak üzere $u,v \in \langle X \rangle$ için $w = \overline{f} = u\overline{g}v$ olsun. f ve g nin w ya göre içerme kompozisyonu,

$$(f,g)_w = f - [ugv]_g$$

şeklinde tanımlanır.

Bu kompozisyonun önemli özellikleri

$(f,g)_w \in Id(f,g)$ ve $\overline{(f,g)_w}$ **p** w olmasıdır.

Örnek: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ için $x_1 > x_2 > x_3$ olsun.

$\overline{g} = x_1x_2$, $u = x_1$, $v = x_2x_3$ diyelim.

$w = \overline{f} = u\overline{g}v = x_1x_1x_2x_2x_3$ bir Lyndon-Shirshov kelimesidir.

$f = x_1{}^2 x_2{}^2 x_3$ ve $g = x_1x_2$ olsun.

$[ugv] = [x_1[x_1[x_2[x_2x_3]]]]$ ve $[ugv]_g = [x_1[\,[x_1x_2][x_2x_3]]]$ dir.

O halde

$(f,g)_w = [x_1[x_1[x_2[x_2x_3]]]] - [x_1[\,[x_1x_2][x_2x_3]]]$ dir.

Örnek: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ için $x_1 > x_2 > x_3$ olsun.

$\overline{g} = x_1x_2$, $u = x_1x_3$, $v = x_1{}^2x_3$ diyelim.

$w = \overline{f} = u\overline{g}v = x_1x_3x_1x_2x_1{}^2x_3$ dır.

$f = x_1x_3x_1x_2x_1{}^2x_3 + x_1x_2x_3$ ve $g = x_1x_2 + x_3$ olsun.

$ugv = x_1x_3(x_1x_2 + x_3)\ x_1{}^2x_3$ olup

$[ugv] = [x_1[x_3\left[\left[[x_1x_2] + x_3\right][x_1[x_1x_3]]\right]] = [x_1[x_3[\underbrace{[[x_1x_2] + x_3]}_{g}[\underbrace{x_1}_{u_1}\ \underbrace{[x_1x_3]}_{u_2}]]]]$

dır. $c = u_1u_2$ olduğunu göz önüne alırsak

$[ugv]_g = [x_1[x_3\left[\left[[x_1x_2] + x_3\right]x_1\right][x_1x_3]\right]]$ ve

$(f,g)_w = f - [ugv]_g = [x_1[x_3\left[x_1\left[x_2[x_1[x_1x_3]]\right]\right]]] + [x_1[x_2x_3]]$

$- [x_1[x_3[\left[\left[[x_1x_2] + x_3\right]x_1\right][x_1x_3]\right]]$

olur.

Tanım 3.1.6. S , monik Lie polinomların bir kümesi olsun. Eğer , f ve g nin $(f,g)_w$ kompozisyonu $\alpha_i \in$ k , $u_i, v_i \in$ <X> , $s_i \in S$ ve $u_i\bar{s}_iv_i$ **p** w için $(f,g)_w = \sum_i \alpha_i[u_is_iv_i]_{s_i}$ formunda ise $(f,g)_w$ kompozisyonuna S ye göre aşikardır denir.

ÖRNEK: $S = \{ x_1x_3 , x_2 \}$ olsun.

$u_1 = x_1$, $u_2 = x_2$, $v_1 = x_2$, $v_2 = x_1$ için

$u_1s_1v_1 = x_1x_1x_3x_2$ ve $u_2s_2v_2 = x_2x_2x_1$ dir.

$[u_1s_1v_1] = [x_1[x_1[x_3x_2]]]$ ve $[u_2s_2v_2] = [x_2[x_2x_1]]$ olup

$[u_1s_1v_1]_{s_1} = [x_1\ [[x_1x_3]x_2]]$ ve $[u_2s_2v_2]_{s_2} = [x_2[x_2x_1]]$ dir. O halde

$(f,g)_w = [x_1\ [[x_1x_3]x_2]] + [x_2[x_2x_1]]$ dir.

Tanım 3.1.7. S , monik Lie polinomların bir kümesi olsun. Eğer S'nin herhangi iki elemanının her kompozisyonu S'ye göre aşikar ise , S'ye Gröbner-Shirshov bazı denir.

Eğer herhangi bir $s \in S$ ve $u,v \in$ <X> için $w \neq u\bar{s}v$ ise, [w] Lyndon-Shirshov kelimesine S-indirgenebilir denir.

Örnek: $S = \{x_1x_2 , x_2x_3 , x_2\}$ olsun.

$f = x_1x_2$, $g = x_2x_3$, $h = x_2$ olarak adlandıralım.

f ve g için kesişme kompozisyonunu hesaplayalım:

$w = x_1x_2x_3 \in \langle X \rangle$ olmak üzere $|f| + |g| = 2+2 = 4 > 3 = |w|$ dır ve

$u = x_3$ ve $v = x_1$ için $w = \overline{f}u = v\overline{g}$ dır. Buna göre

$fu = x_1x_2x_3$ ve $[fu] = [x_1[x_2x_3]]$ olup $[fu]_f = [[x_1x_2]x_3]$ dır.

Ayrıca

$vg = x_1x_2x_3$ ve $[vg] = [vg]_g = [x_1[x_2x_3]]$ dır.

O halde

$$(f,g)_w = [[x_1x_2]x_3] - [x_1[x_2x_3]] \text{ dır.}$$

Burada

$u_1 = 1$, $s_1 = x_1x_2$, $v_1 = x_3$ olarak seçilirse $[[x_1x_2]x_3] = [u_1s_1v_1]_{s_1}$

ve

$u_2 = x_1$, $s_2 = [x_2x_3]$, $v_2 = 1$ olarak seçilirse $[x_1[x_2x_3]] = [u_2s_2v_2]_{s_2}$ formunda olup

$(f,g)_w = \sum_i \alpha_i [u_i s_i v_i]_{s_i}$ dir .Yani $(f,g)_w$ S'ye göre aşikardır.

f ve h için kesişme (içerme) kompozisyonunu hesaplayalım:

$w = x_1x_2$ olmak üzere $|f| + |h| = 2+1 = 3 > 2 = |w|$ dır ve

$u = 1$ ve $v = x_1$ olarak alınırsa $w = \overline{f}u = v\overline{g}$ olur. Ayrıca

$fu = x_1x_2$, $[fu] = [x_1x_2]$ ve $[fu]_f = [x_1x_2]$ dır.

Aynı şekilde $vh = x_1x_2$ ve $[vh] = [vh]_h = [x_1x_2]$ olup

$(f,h)_w = 0$ dır . Yani $(f,h)_w$ S'ye göre aşikardır.

g ve h için içerme (kesişme) kompozisyonunu hesaplayalım :

$w = x_2x_3 = g = u\overline{h}v$ olarak alalım.

$h = x_2$ olduğundan $u = 1$ ve $v = x_3$ dır. Buna göre

$uhv = x_2x_3$ ve $[uhv]_h = [x_2x_3]$ dır. O halde

$$(g,h)_w = g - [uhv]_h = 0 \text{ dır. Yani } (g,h)_w \text{ } S\text{'ye göre aşikardır.}$$

O halde S'nin tüm elemanlarının kompozisyonları S'ye göre aşikar olduğundan, S Gröbner-Shirshov bazıdır.

Örnek: $S = \{x_1x_2x_3 + x_1x_3, x_2\}$ olsun.

$f = x_1x_2x_3 + x_1x_3$

$h = x_2$ olarak adlandıralım.

f ve h için içerme kompozisyonunu hesaplayalım :

$\overline{f} = x_1x_2x_3$ve $\overline{h} = x_2$ olup

$w = x_1x_2x_3 = \overline{f} = u\overline{h}v$ olduğundan $u = x_1$, $v = x_3$ ve $[uhv]=[x_1[x_2x_3]]=[uhv]_h$ dır. Buradan

$$(f,h)_w=[x_1[x_2x_3]] +[x_1x_3]- [x_1[x_2x_3]]= [x_1x_3]$$

elde edilir.

$u_1 = 1$, $v_1 = 1$ ve $s_1 = f = x_1x_2x_3 + x_1x_3$ için $[u_1 f\ s_1]_f = [x_1[x_2x_3]] + [x_1x_3]$

ve

$u_2 = x_1$, $v_2 = x_3$ ve $s_2 = h = x_2$ için $[u_2 h\ s_2]_h = [x_1[x_2x_3]]$

olmak üzere

$[x_1x_3] = [u_1 f\ s_1]_f - [u_2 h\ s_2]_h = \sum_i \alpha_i [u_i s_i v_i]_{s_i}$ şeklinde tek bir gösterime sahiptir.

$u_i\overline{s}_i v_i$ **p** w sağlanmadığından, $(f,h)_w$ kompozisyonu S'ye göre aşikar değildir. O halde ,

S , Gröbner-Shirshov bazıdır.

Bir w Lyndon-Shirshov kelimesinin indirgenebilirliği ile ilgili önemli bir sonuç Shirshov'un kompozisyon önermesidir (Bokut, 1972) .

Kompozisyon Önermesi (Bokut, 1972) : X , iyi sıralı bir küme olsun. Eğer S bir Gröbner-Shirshov bazı ve $f \in Id(S)$ ise bazı $s \in S$ ve $u,v \in \langle X \rangle$ için $\overline{f} = u\overline{s}v$ dir.

Bu önermenin önemli bir uygulaması aşağıdaki şekildedir.

Kompozisyon-Diamond Önermesi (Bokut, 1972) : X , iyi sıralı bir küme olsun. S nin Gröbner-Shirshov bazı olması için gerek ve yeter koşul bütün S-indirgenmiş Lyndon-Shirshov kelimelerinin kümesinin $Lie(X)/Id(S)=Lie(X|S)$ için bir lineer baz olmasıdır.

3.2. Serbest Lie Cebirinin Sağ Normlu Bir Bazı

Bu kısımda özel olarak tanımlanan sağ normlu kelimelerin, serbest Lie cebirleri için bir baz oluşturduğu gösterilmiştir.

Önerme 3.2.1. $w_1 = (av)^{m_1} au_1$ ve $w_2 = (av)^{m_2} au_2 \in \langle X \rangle$ olsun. Burada v , u_j , w_j nin a baş harfini içermez, $m_j \geq 0$ ve $u_j < v$ dir öyle ki bazı $\hat{u}_j \geq v$ kelimeleri ve bazı a_j (j =1,2) harfleri için $u_j = \hat{u}_j a_j$ dir. O zaman , eğer

$w_1 > w_2$ ise w_1 , w_2 den alfabetik olarak kuvvetli büyüktür.

İspat: w_1 ve w_2 kelimelerinin yazılışından w_1'in w_2'nin öneki olmadığı açıktır. Dolayısıyla , w_1 , w_2'den alfabetik olarak kuvvetli büyüktür.
İspat için diğer bir yol :

$\underline{m_1 < m_2}$ ise:

$$w_1 = \underbrace{avavav \dots . av}_{m_1} au_1$$

$$w_2 = \underbrace{avavav \dots . avavav \dots av}_{m_2} au_2$$

olup $u_1 < v$ olduğundan $w_1 < w_2$ dir. Bu bir çelişkidir.

$\underline{m_1 = m_2}$ ise:

$$w_1 = \underbrace{avav \dots av}_{m_1} au_1$$

$$w_2 = \underbrace{avav \dots av}_{m_2} au_2$$

olup $w_1 > w_2$ olduğundan $u_1 > u_2$ dir. Dolayısıyla w_1, w_2 den alfabetik olarak kuvvetli büyüktür.

$m_1 > m_2$ ise:

$w_1 = \underbrace{avav \dots avav \dots av}_{m_1} au_1$

$w_2 = \underbrace{avav \dots av}_{m_2} au_2$

olup $w_1 > w_2$ olduğundan $v > u_2$ dir. Dolayısıyla w_1, w_2 den alfabetik olarak kuvvetli büyüktür.

Önerme 3.2.2.

i. <*X*> in her *w* asosyatif Lyndon- Shirshov kelimesi aşağıdaki formda tek bir gösterime sahiptir :

$$w = (av)(av)^{n_1} au_1 u_1' (av)^{n_2} au_2 u_2' \dots (av)^{n_t} au_t u_t' \quad (1)$$

Burada , v, $u_j\, u_j'$, w'nun a baş harfini içermez, $n_j \geq 0$, $u_j < v$ dir öyle ki bazı $\hat{u}_j \geq v$ kelimeleri ve bazı a_j $(\forall\ 1 \leq j \leq t)$ harfleri için $u_j = \hat{u}_j a_j$ dir.

ii. $$w^{(1)} = A_{(av)^{n_1+1} au_1} u_1'^{(1)} A_{(av)^{n_2} au_2} u_2'^{(1)} \dots A_{(av)^{n_t} au_t} u_t'^{(1)} \quad (2)$$

(1) de bütün $(av)^{n_j} au_j$ alt kelimelerini $A_{(av)^{n_j} au_j}$ ile $(n_1 := n_1 + 1)$ ve boş olmayan bütün $u_j' = a_{j_1} \dots a_{j_k}$ $(a_{j_s} \in X)$ için a_{j_s} yi $A_{a_{j_s}}$ ile değiştirerek elde edilen kelime olsun.

$Y = \{A_z \mid z \in \{(av)^{n_j} au_j,\ a_{j_s}\}\}$ kümesini aşağıdaki şekilde sıralayalım :

$A_{z_1} \geq A_{z_2}$ ancak ve ancak $z_1 \geq z_2$ ise.

O zaman $w^{(1)}$ kelimesi, *Y* alfabesinde bir asosyatif Lyndon – Shirshov kelimesidir.

iii. $u^{(1)} = A_{x_1}A_{x_2} \dots A_{x_k}$, Y alfabesinde bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesi olsun. O zaman, $u = x_1x_2 \dots x_k$ kelimesi X alfabesinde bir asosyatif Lyndon- Shirshov kelimesidir.

İspat : Z alfabesindeki bütün asosyatif Lyndon – Shirshov kelimelerin kümesini S_Z ile gösterelim. Eğer S_X teki w kelimesinde a baş harfi bir kere bulunuyorsa, Tanım 3.1.2. den , bazı $v \in <X>$ ve (1) de $t = 0$ için $w = av$ dir.

w , S_X in içinde baş harfi birden fazla bulunduran bir kelime olsun. Ozaman, Tanım 3.1.2 den,

$$w = (av)^{n_1+1}aw_1(av)^{n_2}aw_2 \dots (av)^{n_t}aw_t$$

dır.

Burada v , w_j , w 'nun a baş harfini içermez. $n_j \geq 0$, bütün $1 \leq j \leq t$ için $w_j < v$ dir. $w_j = u_ju_j'$ yazarak, w kelimesi için (1) deki gösterimi elde ederiz.

($u_j < v$ öyle ki bazı $\hat{u}_j \geq v$ kelimeleri ve bazı a_j harfleri için $u_j = \hat{u}_ja_j$)

$w^{(1)} = A_{z_1}A_{z_2} \dots \dots A_{z_d}$ olduğunu varsayalım. Eğer $w^{(1)} \notin S_Y$ ise, o zaman bazı $2 \leq q \leq k$ için $w^{(1)} \leq A_{z_q} \dots A_{z_d}A_{z_1} \dots A_{z_{q-1}}$ dir. $w = z_1z_2 \dots z_d$ olduğundan ve Önerme 3.2.1 ile $A_{z_i} < A_{z_j}$ koşulu $z_i < z_j$, z_i nin z_j den alfabetik olarak kuvvetli küçük olduğunu gösterdiğinden,

$$w \leq z_q \dots z_d\, z_1 \dots z_{q-1}$$

elde ederiz. (w asosyatif Lyndon – Shirshov kelimesi)

Bu bir çelişki olduğundan , $w^{(1)} \in S_Y$ dir.

Şimdi (iii) ü ispatlayalım. Tanım 3.1.2 den, Y'deki A_{x_1}harfi $u^{(1)}$ in baş harfidir. Eğer x_1 , X'in bir harfi ise, $u \in S_X$ olur.

Bazı $1 \leq j \leq t$ için ($n_1 := n_1 + 1$) $x_1 = (av)^{n_j}au_j$ olduğunu varsayalım. $u^{(1)} \in S_Y$ olduğundan, herhangi $2 \leq p \leq k$ için

$u^{(1)} > A_{x_p} \dots A_{x_k} A_{x_1} \dots A_{x_{p-1}}$ elde ederiz.

Önerme 3.2.1. ile $A_{x_i} > A_{x_j}$ koşulu $x_i > x_j$ (alfabetik olarak kuvvetli büyük) olduğunu gösterir. Dolayısıyla bütün $2 \leq p \leq k$ için,

$u > x_p \dots x_k\, x_1 \dots x_{p-1}$ dir.

x_1 in , bütün $1 \leq i \leq k$ için x_i nin herhangi uygun son ekinden alfabetik olarak kuvvetli büyük olduğunu göz önüne alalım. O zaman $u = \tau_1 \tau_2$ olacak şekildeki boş olmayan keyfi τ_1 ve τ_2 için $u > \tau_1 \tau_2$ dir. Sonuç olarak $u \in S_X$ dir.

Örnek: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ için $x_1 > x_2 > x_3$ olsun.

$Y = \{ \{A_z | z \in \{(av)^{n_j} a\, u_j, \ a_{j_s}\}\}$ kümesini açık bir şekilde yazalım.

$Y = \{ A_{x_1}, A_{x_2}, A_{x_3}, A_{(av)^{n_1} a u_1}, A_{(av)^{n_2} a u_2}, \dots, A_{(av)^{n_t} a u_t} \}$

$w = x_1 x_2 x_3$ bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesidir. Bu kelimeyi

$w = (av)^{n_1+1} a u_1 u_1' (av)^{n_2} a u_2 u_2' \dots (av)^{n_t} a u_t u_t'$

formunda yazmak istersek

$a = x_1$, $v = x_2 x_3$, $n_1 = 0$ dir.

$Y = \{A_z \mid z \in \{x_1 x_2 x_3\}\} = \{ A_{x_1 x_2 x_3} \}$ olup

$w^{(1)} = A_{x_1 x_2 x_3}$ Y alfabesinde bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesidir.

$w = x_1 x_2 x_3^{\,2} x_1 x_3^{\,2} x_2$ kelimesi de bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesidir. Bu kelimeyi

$w = (av)^{n_1+1} a u_1 u_1' (av)^{n_2} a u_2 u_2' \dots (av)^{n_t} a u_t u_t'$ formunda yazmak istersek

$a = x_1$, $v = x_2 x_3^{\,2}$, $n_1 = 0$, $u_1 = x_3$, $u_1' = x_3 x_2$ dir.

$Y = \{A_z \mid z \in \{x_1 x_2 x_3^{\,2} x_1 x_3 , x_2 , x_3 \}\}$ kümesi açık olarak yazılırsa

$Y = \{A_{x_2} , A_{x_3} , A_{x_1 x_2 x_3^{\,2} x_1 x_3} \}$ şeklindedir.

$w^{(1)} = A_{x_1 x_2 x_3^{\,2} x_1 x_3} A_{x_3} A_{x_2}$ kelimesini düşünelim.

$x_1 x_2 x_3^{\,2} x_1 x_3 > x_3$ olup $A_{x_1 x_2 x_3^{\,2} x_1 x_3} > A_{x_3}$,

$x_1 x_2 x_3^{\,2} x_1 x_3 > x_2$ olup $A_{x_1 x_2 x_3^{\,2} x_1 x_3} > A_{x_2}$,

dır. O halde $w^{(1)}$ kelimesi Y alfabesinde bir asosyatif Lyndon-Shirshov kelimesidir.

Şimdi $w^* = a_{i_t} \dots a_{i_2} a_{i_1}$ kelimesine $w = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_t}$ kelimesinin tersi diyelim.

Tanım 3.2.1. $<X>$ in bir w asosyatif kelimesi için eğer

$|w|$ çift iken $w^* > w$

ve

$|w|$ tek iken $w^* \geq w$

ise w kelimesine düzenli kelime denir.

Önerme 3.2.3. w, $<X>$ in bir düzenli kelimesi olsun. O zaman, w

$$w = u_1 v^* \tag{3}$$

formunda bir gösterime sahiptir. Burada $u_1 <$ v dir , öyle ki bazı $\hat{u}_1 \geq v$ kelimeleri ve bazı a_1 harfleri için $u_1 = \hat{u}_1 a_1$ dır.

İspat : w 'nun bir düzenli kelime olduğunu varsayalım. $w^* = w$ ise o zaman $|w|$ tektir. Bazı $\hat{u}_1 \in <X>$ ve bazı $a_1 \in X$ için $w = \hat{u}_1 a_1 \hat{u}_1^*$ dır. Dolayısıyla, $u_1 = \hat{u}_1 a_1$ ve $v = \hat{u}_1$ için, w 'nun belirtilen formdaki gösterimini elde ederiz.
Şimdi $w^* > w$ olsun.
Bazı $\rho, \tau_1 , \tau_2 \in <X>$ ve $a_2 > a_1$ olacak şekildeki $a_1, a_2 \in X$ için $w = \rho\, a_1 \tau_1$ ve $w^* = \rho\, a_2 \tau_2$ dir. Eğer $|\rho| < |\tau_1|$ ise, $u_1 = \rho a_1$ ve $v = \tau_1^*$ için ispatlanmış olur. $(u_1 < v)$
$|\rho| \geq |\tau_1|$ olduğunu varsayalım.
$w^* = \tau_1^*\, a_1\, \rho^*$ olduğundan, bazı $\rho_1 \in < X >$ için $\rho = \tau_1^*\, \rho_1$ elde ederiz.
Dolayısıyla,
$w^* = \tau_1^*\, a_1\, \rho_1^*\, \tau_1 = \tau_1^*\, \rho_1\ a_2\ \tau_2$ dir.
$|\tau_1| = |\tau_2|$ olduğundan, $a_1\, \rho_1^* = \rho_1 a_2$ dir, dolayısıyla $a_1 = a_2$ dir. Bu bir çelişkidir.
$w = u_1\, v^*$ (3) olsun. O zaman $\hat{u}_1 = v$ veya $\hat{u}_1$, v 'nin ön ekidir.

Buradan, w düzenli bir kelimedir.

Not 3.2.1. u_1 üzerindeki koşullar , (3) gösterimini tek olarak belirler.

Tanım 3.2.2. $<X>$, X üzerindeki alfabetik sıralamayla X alfabesindeki bütün kelimelerin serbest monoidi olsun. Kelimelerde baş harfin bulunma sayısı üzerinde tümevarım kullanarak, $<X>$ in T_X altkümesini aşağıdaki şekilde tanımlarız:
Eğer $<X>$ in w kelimesinde, a baş harfi bir defa bulunuyorsa ve bir u kelimesi için $w = ua$ ise, w , T_X e aittir.
w , $<X>$ in , a baş harfi birden fazla bulunduran bir kelimesi olsun. w aşağıdaki formda gösterilebilir:

$$w = w_{t+1}\,(av)^{n_t}\,a\,u_t\,u_t'\ \ldots(av)^{n_2}\,a\,u_2\,u_2'\,(av)^{n_1}\,a\,u_1\,v^*a \qquad (4)$$

w_{t+1} , v, $u_j\,u_j'$, w 'nun a baş harfini içermez, $n_j \geq 0$, $u_j < v$ dir , öyle ki bazı $\hat{u}_j \geq v$ kelimeleri ve bazı a_j $(1 \leq j \leq t)$ harfleri için $u_j = \hat{u}_j\,a_j$ dir. Özellikle, $u_1\,v^*$ bir düzenli kelimedir.

u_j lerin durumu, (4) ün gösterimini tek olarak belirler. $<X>$ in (4) teki gösterimine sahip olmayan hiçbir kelimesi, T_X e ait değildir.

Herhangi bir Z alfabesi için, baş harfin bulunma sayısının w 'dakinden az olması ile T_z'nin bütün kelimelerini tanımlamış olduğumuzu varsayalım.

$$\widetilde{w} = w_{t+1}\,(av)^{n_t}a\,u_t\,u_t'\ \ldots\,(av)^{n_2}\,a\,u_2\,u_2'\,(av)^{n_1+1}\,a\,u_1$$

olsun. Bütün $(av)^{n_j}au_j$ altkelimelerini $A_{(av)^{n_j}au_j}$ ile , boş olmayan bütün $u_j' = a_{j_1} \ldots a_{j_k}$ ve $w_{t+1} = a_{t+1_1} \ldots a_{t+1_p}$ için $(a_{i_s} \in \mathrm{X})$ a_{i_s} yi $A_{a_{i_s}}$ ile değiştirerek $\widetilde{w}$ yi yeniden yazalım.
O zaman, $Y = \{A_z \mid z \in \{(av)^{n_j}\,a\,u_j\,,\ a_{i_s}\}\}$ alfabesinin yeni $w^{(1)}$ kelimesini elde ederiz.

$$w^{(1)} = w_{t+1}\,{}^{(1)}A_{(av)^{n_t}au_t}\,u_t'^{(1)} \dots A_{(av)^{n_2}au_2}\,u_2'^{(1)}A_{(av)^{n_1+1}au_1} \qquad (5)$$

Y kümesini şu şekilde sıralarız:

$A_{z_1} \geq A_{z_2}$ ancak ve ancak $z_1 \geq z_2$ ise.

Dolayısıyla, baş harfin $w^{(1)}$de bulunma sayısı w 'da bulunma sayısından azdır. Böylece " w , T_X'e aittir ancak ve ancak $w^{(1)}, T_Y$'ye ait ise" tanımlamasını yapabiliriz.

Örneğin, (4) tipindeki $w_2(av)^{n_1}\,a\,u_1v^*a$ kelimesi T_X e aittir. $w_2(av)^{n_1}\,a\,u_1v^*a$ kelimesi için $\widetilde{w} = w_2(av)^{n_1+1}au_1$ ve $w^{(1)} = w_2^{(1)}A_{(av)^{n_1+1}au_1}$ olup $w^{(1)} \in T_Y$ ise $w \in T_X$ dir.

t = 2 için $w = w_3(av)^{n_2}\,a\,u_2\,u_2'\,(av)^{n_1}\,a\,u_1\,v^*a$ (4) tipinde bir kelime olsun. O zaman, w, T_X'e aittir ancak ve ancak $(av)^{n_1+1}\,a\,u_1 > (av)^{n_2}\,a\,u_2$ veya $(av)^{n_1+1}\,a\,u_1 = (av)^{n_2}\,a\,u_2$ ve u_2' düzenli bir kelime ise.

$w = w_3(av)^{n_2}\,a\,u_2\,u_2'\,(av)^{n_1}\,a\,u_1\,v^*a$ için $\widetilde{w} = w_3(av)^{n_2}\,a\,u_2\,u_2'(av)^{n_1+1}\,a\,u_1$ ve $w^{(1)} = w_3^{(1)}A_{(av)^{n_2}a\,u_2}\,u_2'^{(1)}\,A_{(av)^{n_1+1}a\,u_1}$ olup

$A_{(av)^{n_1+1}\,a\,u_1} > A_{(av)^{n_2}au_2}$ ise $(av)^{n_1+1}\,a\,u_1 > (av)^{n_2}\,a\,u_2$ dir.

$A_{(av)^{n_1+1}\,a\,u_1} = A_{(av)^{n_2}au_2}$ ise (4) formunda olması gerektiğinden

$w^{(1)} = w_3\,a\,u_1\,v^*a$ olmak durumundadır, dolayısıyla $u_2' = u_1\,v^*$ formundadır, yani u_2' düzenli bir kelimedir.

Önerme 3.2.4. S_X , X alfabesindeki bütün asosyatif Lyndon-Shirshov kelimelerin kümesi ve T_X, Tanım 3.2.2 deki kelimelerin kümesi olsun. Kelimelerin içeriğini değiştirmeyen $\phi : T_X \to S_X$ bijektif dönüşümü vardır.

İspat: Önermenin ispatında, Tanım 3.2.2 ve Önerme 3.2.2 yi kullanalım. T_X teki kelimelerde baş harfin bulunma sayısı üzerinde tümevarımla $\phi : T_X \to S_X$ bijektif dönüşümünü inşa edelim.

Eğer, T_X teki w kelimesinde a baş harfi bir kere bulunuyorsa, o zaman Tanım 3.2.2 den bir $u \in < X >$ için $w = ua$ dır ve

$$\phi(w) = a\, u^*$$

olarak tanımlayalım.

İçinde baş harfi birden çok bulunduran $w \in T_X$ alalım. O halde, Tanım 3.2.2 den, w (4) formunda yazılabilir.

Herhangi bir Z alfabesi için $\phi : T_z \to S_z$ dönüşümünün, baş harfi bulundurma sayısının w'dakinden küçük olan kelimeler için tanımlı olduğunu ve ϕ'nin içerik-koruyan dönüşüm olduğunu varsayalım.

$w^{(1)}$, $Y = \{ A_z \mid z \in \{(av)^{n_j}\, a\, u_{j,}\, a_{i_s}\} \}$ alfabesinin (5) tipindeki kelimesi olsun. $w^{(1)} \in T_Y$ olduğundan, $A_{(av)^{n_1+1}au_1}$, $w^{(1)}$ in baş harfidir. Dolayısıyla, $w^{(1)}$ de baş harfin bulunma sayısı w 'dakinden azdır. Tümevarım hipoteziyle S_Y nin $\phi\left(w^{(1)}\right)$ elemanı tanımlanır.

$\phi\left(w^{(1)}\right) = A_{z_1} A_{z_2} \ldots A_{z_k}$ ($A_{z_i} \in Y$ bütün $1 \le i \le k$ için) olsun.

$\phi\left(w^{(1)}\right) \in S_Y$ koşulu gösterir ki A_{z_1}, $\phi\left(w^{(1)}\right)$ in baş harfidir.

Dolayısıyla $z_1 = (av)^{n_1+1} au_1$dir.

$\phi(w) = z_1 z_2 \ldots z_k$ olarak tanımlayalım.

ϕ, içerik koruyan dönüşümdür ve Önerme 3.2.2 (iii) ile $\phi(w) \in S_X$ dir.

Örneğin eğer $w_2\,(av)^{n_1}\, au_1 v^* a \in T_X$ ise o zaman,

$$\phi(w_2\,(av)^{n_1}\, a\, u_1\, v^*\, a) = (av)^{n_1+1}\, a\, u_1 w_2^* \text{ dır.}$$

$w_3\,(av)^{n_2}\, a\, u_2\, u_2'\,(av)^{n_1}\, a\, u_1\, v^*\, a \in T_X$ için , eğer $(av)^{n_1+1} au_1 > (av)^{n_2} au_2$ ise

$\phi(w_3\,(av)^{n_2}\, a\, u_2\, u_2'\,(av)^{n_1}\, a\, u_1\, v^*\, a) = (av)^{n_1+1}\, a\, u_1 u_2'^*\,(av)^{n_2}\, a\, u_2\, w_3^*$ dır ;

eğer $(av)^{n_1+1}\, a\, u_1 = (av)^{n_2}\, a\, u_2$ ve $u_2' = \tilde{u}_2\, \tilde{v}^*$ Önerme 3.2.3 deki gibi yazılan bir düzenli kelime ise

$\phi(w_3\,(av)^{n_2}\, a\, u_2\, u_2'\,(av)^{n_1} au_1 v^* a) = (av)^{n_1+1}\, a\, u_1 \tilde{v}\,(av)^{n_2}\, a\, u_2\, \tilde{u}_2\, w_3^*$ dır.

ϕ'nın injektif dönüşüm olduğunu ispatlayalım.

$w_1, w_2 \in T_X$ alalım ve $w_1 \neq w_2$ olsun. ϕ, içerik-koruyan dönüşüm olduğundan, w_1 in içeriğinin w_2 nin içeriğine eşit olduğunu varsayabiliriz.

$w_1^{(1)} \neq w_2^{(1)}$ dir ve ,tümevarım hipotezini kullanarak,

$$\phi\left(w_1^{(1)}\right) \neq \phi\left(w_2^{(1)}\right) \text{ elde ederiz.}$$

Bütün $1 \leq i \leq d-1$ için $A_{f_i} = A_{g_i}$ ve $A_{f_d} \neq A_{g_d}$ ($A_{f_d} > A_{g_d}$ alalım) olmak üzere

$$\phi\left(w_1^{(1)}\right) = A_{f_1} \dots A_{f_{d-1}} A_{f_d} A_{f_{d+1}} \dots A_{f_n},$$
$$\phi\left(w_2^{(1)}\right) = A_{g_1} \dots A_{g_{d-1}} A_{g_d} A_{g_{d+1}} \dots A_{g_m}$$

olsun.

O zaman ϕ'nın tanımından , bazı $v, \tilde{v}, u_1, \tilde{u}_1 \in \langle X \rangle$ için $f_1 = (av)^{n_1+1} au_1$ ve $g_1 = (a\tilde{v})^{m_1+1} a\, \tilde{u}_1$ olmak üzere

$$\phi(w_1) = f_1 \dots f_{d-1}\, f_d\, f_{d+1} \dots f_n \ ,$$
$$\phi(w_2) = g_1 \dots g_{d-1}\, g_d\, g_{d+1} \dots g_m$$

dir.

Eğer $v \neq \tilde{v}$ ise, o zaman $\phi(w_1) \neq \phi(w_2)$ dir.

$v = \tilde{v}$ olsun. Önerme 3.2.1 ile, $A_{f_d} > A_{g_d}$ koşulu gösterir ki $f_d > g_d$ alfabetik olarak kuvvetli büyüktür. Dolayısıyla, $\phi(w_1) \neq \phi(w_2)$ dir.

ϕ'nin sürjektifliğini ispatlayalım. w , S_X in (1) formunda yazılan kelimesi ve $w^{(1)}$, (2) tipinde bir kelime olsun. $w^{(1)}$ de $A_{(av)^{n_1+1}au_1}$ baş harfinin bulunma sayısı, w 'da baş harfin bulunma sayısından azdır ve Önerme 3.2.2 (ii) ile $w^{(1)} \in S_Y$ dir.

Tümevarım hipotezinden , T_Y nin $u^{(1)}$ kelimesi vardır öyle ki

$\phi\left(u^{(1)}\right) = w^{(1)}$ dir.

$u^{(1)} = A_{x_1}A_{x_2} \dots A_{x_k}\, A_{(av)^{n_1+1}\, au_1}$ olsun.

$u = x_1x_2 \dots . x_k\, (av)^{n_1}\, a\, u_1\, v^*\, a$ tanımlayalım.

$u \in T_X$ ve $\phi(u) = w$ olduğu açıktır.

Not 3.2.2. $\emptyset^{-1}$ dönüşümünü inşa edip T_X kümesini $T_X = \emptyset^{-1}(S_X)$ şeklinde tanımlayabiliriz.

Önerme 3.2.5. *Lie(X)* , k üzerinde *X* tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. O zaman $a_{i_j} \in X$ olmak üzere $[a_{i_1}\,[a_{i_2}\,[\dots\,[a_{i_{t-1}}\,a_{i_t}]\,\dots\,]]]$ kelimeleri *Lie(X)* lineer uzayını üretir.

İspat : $[w] \in$ *Lie(X)* bir monomial olsun. $|w|$ üzerinde tümevarım kullanalım.$|w| = 1$ için sonuç hemen elde edilir. $[u]$ ve $[v]$ sağ normlu kelimeler için $[w] = [[u][v]]$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer $|u| = 1$ ise , o zaman $[w]$ bir sağ normlu kelimedir ve ispatlanmış olur. Dolayısıyla $|u| > 1$ olsun. O zaman Jacobi özdeşliği ve anti-komütatiflik özelliğinden,

$[u] = [a[u_1]]$ ve $\left[[a[u_1]][v]\right] = \left[a[[\,u_1][v]]\right] - [[u_1][a[v]]]$ dir.

Böylece tümevarım hipotezinden sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.1. *Lie(X),* k üzerinde *X* tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve T_X , Tanım 3.2.2 deki kelimelerin kümesi olsun. O zaman, $a_{i_1}\,a_{i_2} \dots a_{i_t}$, T_X e ait olmak üzere

$[a_{i_1}\,[a_{i_2}\,[\dots\,[a_{i_{t-1}}\,a_{i_t}]\,\dots\,]]]$ kelimeleri ,

Lie(X) in bir lineer bazını oluştururlar.

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki sonuçlara ihtiyacımız olacaktır.

$w \in \langle X \rangle$ için **[**w**]**'nun *Lie(X)*'in bir sağ normlu kelimesi olduğunu hatırlayalım. $u = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_t} \in \langle X \rangle$ için , $[u]$, u nun herhangi bir parantezlemesine göre *Lie(X)* in asosyatif olmayan bir kelimesi olmak üzere sol normlu

$$\{u\} = \Big[\big[\dots \big[a_{i_1} a_{i_2}\big] \dots a_{i_{t-1}}\big] a_{i_t}\Big]$$

kelimesini tanımlayalım.

" $[w_1] \equiv [w_2]$ (mod w)

ancak ve ancak $\alpha_i \in$ k , $v_i \in \langle X \rangle$ ve $v_i < w$ için $[w_1] - [w_2] = \sum_i \alpha_i$ **[**v_i**]** ise " bağıntısını göz önüne alalım.

Önerme 3.2.6. **[**w**]** = **[**$w_{t+1}\, a\, w_t\, a\, w_{t-1} a \dots a\, w_1\, a\, w_0$**]** *Lie(X)* in bir sağ normlu kelimesi olsun, bütün $0 \le i \le t+1$ için w_i, w 'nun a baş harfini içermesin. $\langle X \rangle$ in $w_j = w_j' w_j''$ (bütün $0 \le j \le t$ için) olacak şekildeki keyfi w_j' *ve* w_j'' kelimeleri için,

[w**]** ≡ **[** $w_{t+1}\{aw_t'\}\, w_t''\, \{aw_{t-1}'\}\, w_{t-1}'' \dots \{aw_0'\}\, w_0''$ **]** (mod w) dır.

İspat: t üzerinde tümevarım kullanalım. Bazı $b_1, \dots, b_k \in X$ için $w_t' = b_1 \dots b_k$ olsun. O zaman, Jacobi özdeşliğini ve anti-komutatifliği kullanarak,

[w**]** = **[**$w_{t+1}\, ab_1 \dots b_k w_t'' \widetilde{w}_{t-1}$**]**

= **[**$w_{t+1} b_1 ab_2 \dots b_k w_t'' \widetilde{w}_{t-1}$**]** + **[**$w_{t+1}\, [ab_1] b_2 \dots b_k w_t'' \widetilde{w}_{t-1}$**]**

≡ **[**$w_{t+1}\, [a\, b_1] b_2 \dots b_k w_t'' \widetilde{w}_{t-1}$**]**

= **[**$w_{t+1}\, b_2\, [ab_1] b_3 \dots\ b_k w_t'' \widetilde{w}_{t-1}$**]** + **[**$w_{t+1}\, \{ab_1 b_2\} b_3\ \dots b_k w_t'' \widetilde{w}_{t-1}$**]** (mod w)

elde ederiz. Burada $\widetilde{w}_{t-1} = aw_{t-1}\, a \dots a\, w_0$ dır.

[$w_{t+1}\, b_2\, [ab_1] b_3 \dots\ b_k w_t'' \widetilde{w}_{t-1}$**]**

= **[** $w_{t+1}\, b_2\, ab_1 b_3 \dots\ b_k w_t'' \widetilde{w}_{t-1}$ **]** − **[**$w_{t+1}\, b_2\, b_1 ab_3 \dots\ b_k w_t'' \widetilde{w}_{t-1}$**]** ≡ 0 (mod w)

olduğundan

$$[w] \equiv [w_{t+1}\{ab_1b_2\}b_3 \ldots b_k w_t'' \widetilde{w}_{t-1}] \quad (\text{mod} w)$$

dır.

Buradan ,

$$[w] \equiv [w_{t+1}\{aw_t'\}\, w_t'' \widetilde{w}_{t-1}] \quad (\text{mod} w)$$

ve tümevarım hipotezinden ,

$$[\widetilde{w}_{t-1}] \equiv [\{aw_{t-1}'\}\, w_{t-1}''\, \{aw_{t-2}'\}\, w_{t-2}'' \ldots \{aw_0'\}\, w_0''] \quad (\text{mod } \widetilde{w}_{t-1})$$

elde edilir. Bu ise , $\rho_i < \widetilde{w}_{t-1}$ ve $\alpha_i \in k$ için

$$[\widetilde{w}_{t-1}] = [\{aw_{t-1}'\}\, w_{t-1}''\, \{aw_{t-2}'\}\, w_{t-2}'' \ldots \{aw_0'\}\, w_0''] + \sum_i \alpha_i [\rho_i]$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla,

$$[w] \equiv [w_{t+1}\{aw_t'\}\, w_t''\, \{aw_{t-1}'\}\, w_{t-1}'' \ldots \{aw_0'\}\, w_0''] + \sum_i \alpha_i [w_{t+1}\{aw_t'\}\, w_t'' \rho_i] \quad (\text{mod} w)$$

yazabiliriz.

Lie(X) teki özdeşliklerin homojenliği gösterir ki, ρ_i nin içeriği $\widetilde{w}_{t-1}$ nin içeriğine eşittir.

$$[w_{t+1} a w_t' w_t'' \rho_i] \equiv [w_{t+1}\{aw_t'\}\, w_t'' \rho_i] \quad (\text{mod } w_{t+1} a w_t' w_t'' \rho_i)$$

olduğunu ispatladığımız için ve $\rho_i < \widetilde{w}_{t-1}$ koşulu

$$w_{t+1}\, a\, w_t'\ w_t''\ \rho_i < w_{t+1}\, a\, w_t'\ w_t''\ \widetilde{w}_{t-1} = w$$

olduğunu gösterdiğinden,

$$[w] \equiv [w_{t+1}\{aw_t'\}\, w_t''\, \{aw_{t-1}'\}\, w_{t-1}'' \ldots \{aw_0'\}\, w_0''] \quad (\text{mod } [w])$$

elde ederiz.

Önerme 3.2.7. w_i ler her $1 \leq i \leq t+1$ için a baş harfini içermeyen kelimeler olmak üzere

$$[w_{t+1} a w_t a \ldots a w_1 a] \quad (6)$$

formundaki kelimeler *Lie(X)* uzayını bir lineer uzay olarak üretirler.

İspat: $w \in \langle X \rangle$ olmak üzere, Önerme 3.2.5 den $[w]$, *Lie(X)* i üretir. w 'nun a baş harfini içermeyen ve boş olmayan bir u kelimesi ve bir $\tilde{w}$ kelimesi için $[w] = [\tilde{w}au]$ olsun. Önerme 3.2.6 ile

$$[w] \equiv [\tilde{w}\{au\}] = (-1)^{|u|}\,[\tilde{w}u^{*}a] \equiv 0 \pmod{w}$$

elde edilir.

Önerme 3.2.8. $[w_1 a]$, $[w_{t+1}aw_t a \ldots aw_2 a u_1 v^{*} a]$ (7)
kelimeleri , *Lie(X)* i lineer uzay olarak üretir. Burada w_1 , w_{t+1} , w_j , $u_1 v^{*}$, a baş harfi içermez ve bütün $2 \leq j \leq t$ için $w_j \leq v$ dir, $u_1 < v$ dir öyle ki bazı $\hat{u}_1 \geq v$ kelimeleri ve bazı a_1 harfleri için $u_1 = \hat{u}_1 a_1$ dir.

İspat: Baş harfin bir defa bulunduğu kelimeler için önerme daha önce ispatlanmıştı.(Önerme 3.2.7.)
$t \geq 1$ için $[w] = [w_{t+1}aw_t a \ldots aw_1 a]$ (6) tipinde bir kelime olsun. Eğer $w_1{}^{*} < w_1$ ise, Önerme 3.2.6 yı kullanarak

$$[w] \equiv [w_{t+1}aw_t a \ldots \{aw_1\}a] = (-1)^{|w_1|+1}\,[w_{t+1}aw_t a \ldots aw_1{}^{*}a] \equiv 0 \pmod{w}$$

yazabiliriz.
($w_1{}^{*} < w_1$ olduğundan $w_{t+1}aw_t a \ldots aw_1{}^{*}a < w_{t+1}aw_t a \ldots aw_1 a = w$ dır.)
Eğer $w_1{}^{*} = w_1$ ve $|w_1|$ çift ise , bazı $\tau \in \langle X \rangle$ için $w_1 = \tau\tau^{*}$ olduğundan ,

$$[w] \equiv [w_{t+1}aw_t a \ldots \{a\tau\}\tau^{*}a] = (-1)^{|\tau|}[w_{t+1}aw_t a \ldots \{a\tau\}\{a\tau\}] = 0 \pmod{w}$$

elde ederiz.
Dolayısıyla , (6) daki w_1 kelimesinin bir düzenli kelime olduğunu varsayabiliriz. Önerme 3.2.3 den $w_1 = u_1 v^{*}$ dır.
$[w] = [w_{t+1}aw_t a \ldots aw_2 a u_1 v^{*} a]$, $w_1 = u_1 v^{*}$ olmak üzere, (6) formunda bir kelime olsun. Bazı $2 \leq p \leq t$ için $w_p > v$ ve bütün $i < p$ için $w_i \leq v$ olduğunu varsayalım.
$[\tilde{w}_p] = [aw_p aw_{p-1} a \ldots aw_2 a u_1 v^{*} a]$ olsun. Yani $\tilde{w}_p$, w 'nun sonekidir. Önerme 3.2.6 ile,

$$[\tilde{w}_p] \equiv [\{aw_p\}\{aw_{p-1}\}\ldots\{au_1\}v^{*}a]$$

$$= (-1)^{|v|+1}\,[\{aw_p\}\{aw_{p-1}\}\ldots\{aw_2\}\{av\}\{au_1\}] \pmod{\widetilde{w}_p}$$

yazabiliriz.

O halde , Jacobi özdeşliğini ve anti-komutatifliği kullanarak,

$$[\widetilde{w}_p] \equiv (-1)^{|v|+1}\,[\{aw_{p-1}\}[\{aw_p\}\{aw_{p-2}\}\ldots\{av\}\{au_1\}]]$$
$$+ (-1)^{|v|+1}\,[[\{aw_p\}\{aw_{p-1}\}][\{aw_{p-2}\}\ldots\{av\}\{au_1\}]] \pmod{\widetilde{w}_p}$$

elde ederiz.

Önerme 3.2.6. ile

$$[aw_{p-1}aw_paw_{p-2}\ldots au_1v^*a] \equiv (-1)^{|v|+1}\,[\{aw_{p-1}\}\{aw_p\}\{aw_{p-2}\}\ldots\{av\}\{au_1\}] \pmod{aw_{p-1}aw_paw_{p-2}\ldots au_1v^*a}$$

dır.

$w_{p-1}<w_p$ olduğundan, ($aw_{p-1}aw_paw_{p-2}\ldots au_1v^*a < aw_paw_{p-1}aw_{p-2}\ldots au_1v^*a$)

$$[\widetilde{w}_p] \equiv (-1)^{|v|+1}\,[[\{aw_p\}\{aw_{p-1}\}][\{aw_{p-2}\}\ldots\{av\}\{au_1\}]] \pmod{\widetilde{w}_p}$$

dır.

Benzer şekilde,

$$[\widetilde{w}_p] \equiv (-1)^{|v|+1}[[[\{aw_p\}\{aw_{p-1}\}]\{aw_{p-2}\}][\{aw_{p-3}\}\ldots\{av\}\{au_1\}]] \pmod{\widetilde{w}_p}$$

elde ederiz ve devam edersek,

$$[\widetilde{w}_p] \equiv (-1)^{|v|+1}\,\{\{aw_p\}\{aw_{p-1}\}\ldots\{aw_2\}\{av\}\{au_1\}\} \pmod{\widetilde{w}_p}$$

elde ederiz. Dolayısıyla ,

$$[\widetilde{w}_p] \equiv (-1)^{|v|+p+1}\,[\{au_1\}\{av\}\{aw_2\}\ldots\{aw_{p-1}\}\{aw_p\}]$$
$$= (-1)^{|v|+p+|w_p|+1}[\{au_1\}\{av\}\{aw_2\}\ldots\{aw_{p-1}\}[w_p{}^*a]] \pmod{\widetilde{w}_p}$$

Önerme 3.2.6. dan

$$[au_1avaw_2\ldots aw_{p-1}w_p{}^*a] \equiv [\{au_1\}\{av\}\{aw_2\}\ldots\{aw_{p-1}\}w_p{}^*a] \pmod{au_1avaw_2\ldots aw_{p-1}w_p{}^*a}$$

olup $au_1avaw_2\ldots aw_{p-1}w_p{}^*a < \widetilde{w}_p$ olduğundan

$$[\widetilde{w}_p] \equiv 0 \pmod{\widetilde{w}_p}$$

elde ederiz. O halde $\rho_i < \widetilde{w}_p$ ve $\alpha_i \in$ k olmak üzere

$$[\widetilde{w}_p] = \sum_i \alpha_i[\rho_i]$$

dir. Dolayısıyla

$$[w] = [w_{t+1}aw_t a \dots aw_{p+1}\widetilde{w}_p] = \sum_i \alpha_i [w_{t+1}aw_t a \dots aw_{p+1}\rho_i]$$

yazabiliriz. $\rho_i < \widetilde{w}_p$ olduğundan,

$$w_{t+1}aw_t a \dots aw_{p+1}\rho_i < w_{t+1}aw_t a \dots aw_{p+1}\widetilde{w}_p$$

elde ederiz . Dolayısıyla

$$[w] \equiv 0 \pmod{w}$$

dır.

Bu nedenle, bütün $2 \leq i \leq t$ için $w_i \leq v$ olduğunu varsayabiliriz.

Not 3.2.3. Önerme 3.2.8 in ispatı gösterir ki (7) formunda olmayan herhangi $[u]$ kelimesi için $[u] \equiv 0 \pmod{u}$ dır.

Önerme 3.2.9. $[w] = [w_{t+1}(av)^{n_t}au_t\, u_t' \dots (av)^{n_2}au_2\, u_2'\, (av)^{n_1}au_1\, v^*a]$

Lie(X) in sağ normlu bir kelimesi olsun. Burada w_{t+1} , v , $u_j\, u_j'$, w'nun a baş harfini içermez, $n_j \geq 0$,$u_j < v$ dir öyle ki bazı $\hat{u}_j \geq v$ kelimeleri ve bazı a_j ($\forall\ 1 \leq j \leq t$) harfleri için $u_j = \hat{u}_j a_j$ dir. O zaman ,

$$[w] \equiv (-1)^{|v|+1}[w_{t+1}[(\{av\})^{n_t}\{au_t\}]u_t' \dots [(\{av\})^{n_2}\{au_2\}]u_2'\,[(\{av\})^{n_1+1}\{au_1\}]] \pmod{w} \quad (8)$$

dır.

İspat: Önerme 3.2.6. dan

$$[w] \equiv [w_{t+1}\,(\{av\})^{n_t}\{au_t\}u_t' \dots (av)^{n_2}au_2\, u_2'\, (av)^{n_1}au_1\, v^*a] \pmod{w}$$

dır.

$t = 1$ ise , o zaman

$$[w] \equiv (-1)^{|v|+1}\,[w_{t+1}(\{av\})^{n_1+1}\{au_1\}] \pmod{w}$$

$t > 1$ olsun. Jacobi özdeşliği ve anti-komutatiflikten ,

$$[w] \equiv [w_{t+1}\,(\{av\})^{n_t}\{au_t\}\widetilde{w}_{t-1}]$$

$$= [w_{t+1}\,(\{av\})^{n_t-1}\,\{au_t\}\{av\}\widetilde{w}_{t-1}] + [\,w_{t+1}\,(\{av\})^{n_t-1}[\{av\}\{au_t\}]\widetilde{w}_{t-1}] \pmod{w}$$

dır. Burada

$[\widetilde{w}_{t-1}]=[u_t'(av)^{n_t-1}au_{t-1}\,u_{t-1}'(av)^{n_t-2}au_{t-2}\,u_{t-2}'\dots(av)^{n_2}au_2\,u_2'(av)^{n_1}au_1\,v^*a]$

dır.

Önerme 3.2.6 dan ,

$$[w_{t+1}\,(av)^{n_t-1}au_tav\widetilde{w}_{t-1}] \equiv [w_{t+1}\,(\{av\})^{n_t-1}\,\{au_t\}\{av\}\widetilde{w}_{t-1}] \pmod{w_{t+1}\,(av)^{n_t-1}au_tav\widetilde{w}_{t-1}}$$

elde edilir.

$u_t < v$ koşulu , $w_{t+1}\,(av)^{n_t-1}au_tav\widetilde{w}_{t-1} < w_{t+1}\,(av)^{n_t}\,au_t\widetilde{w}_{t-1} = w$ olduğunu gösterdiğinden,

$$[w] \equiv [w_{t+1}\,(\{av\})^{n_{t-1}}[\{av\}\,\{au_t\}]\widetilde{w}_{t-1}] \pmod{w}$$

dır. Benzer şekilde,

$$[w] \equiv [w_{t+1}\,(\{av\})^{n_t-2}\,[\{av\}[\{av\}\{au_t\}]]\widetilde{w}_{t-1}] \pmod{w}$$

dır ve ,

$$[w] \equiv [w_{t+1}[\,(\{av\})^{n_t}\,\{au_t\}]\widetilde{w}_{t-1}\,] \pmod{w}$$

elde ederiz.

Son formülün elde edilişinde $\widetilde{w}_{t-1}$ nın formunu kullanmadığımızı not edelim. *t* üzerinde tümevarım kullanarak ,

$$[\widetilde{w}_{t-1}] \equiv (-1)^{|v|+1}\,[u_t'[\,(\{av\})^{n_{t-1}}\,\{au_{t-1}\}]u_{t-1}'\dots \dots\;[\,(\{av\})^{n_2}\,\{au_2\}]u_2'[\,(\{av\})^{n_1+1}\,\{au_1\}]] \pmod{\widetilde{w}_{t-1}}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla ,

$$[w] \equiv (-1)^{|v|+1}[w_{t+1}[(\{av\})^{n_t}\{au_t\}]u_t'\dots[(\{av\})^{n_2}\{au_2\}]u_2'[(\{av\})^{n_1+1}\{au_1\}]] + \sum \alpha_i[w_{t+1}[(\{av\})^{n_t}\{au_t\}]\rho_i] \pmod{[w]}$$

dır. Öyle ki,

$\rho_i < \widetilde{w}_{t-1}$, $\alpha_i \in k$ ve ρ_i nin içeriği $\widetilde{w}_{t-1}$ nın içeriğine eşittir.

Yukarıda olduğu gibi,

$$[\,w_{t+1}\,(av)^{n_t}au_t\rho_i] \equiv [w_{t+1}[(\{av\})^{n_t}\{au_t\}]\rho_i] \pmod{w_{t+1}(av)^{n_t}au_t\rho_i}$$

olduğunu ispatlayabiliriz.

$w_{t+1}\,(av)^{n_t}au_t\rho_i < w_{t+1}\,(av)^{n_t}au_t\widetilde{w}_{t-1} = w$ olduğundan,

$$[w] \equiv (-1)^{|v|+1}[w_{t+1}[(\{av\})^{n_t}\{au_t\}]u_t'\ldots[(\{av\})^{n_2}\{au_2\}]u_2'[(\{av\})^{n_1+1}\{au_1\}]] \pmod{w}$$

elde ederiz.

Şimdi Teorem 3.2.1. in ispatını yapalım.

Teoremin ispatı : Önerme 3.2.4. den , $w \in T_X$ olmak üzere **[***w***]** nun *Lie(X)* i lineer uzay olarak ürettiğini göstermemiz yeterlidir.
$w \in T_X$ için **[***w***]** nun *Lie(X)* i ürettiğini ve bazı $v_1, \ldots, v_N \in T_X$ için

$$\alpha_1[v_1] + \ldots + \alpha_N[v_N] = 0 \qquad (9)$$

olduğunu varsayalım.($0 \neq \alpha_i \in$ k , $1 \leq i \leq N$)
Lie(X) teki özdeşlikler homojen olduğundan , bütün $1 \leq j \leq N$ için v_j kelimelerinin aynı içeriğe sahip olduğunu varsayabiliriz.

L' , *Lie(X)* in , v_j ile aynı içeriğe sahip kelimeler tarafından üretilen lineer altuzayı olsun. O zaman, L' nün boyutu , v_j ile aynı içeriğe sahip bütün Lyndon-Shirshov kelimelerin sonlu M sayısına eşittir. Fakat Önerme 3.2.4 ve (9) bağıntısı L' nün boyutunun *M* den küçük olduğunu gösterir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla,$w \in T_X$ için **[***w***]** kelimeleri lineer bağımsızdır.

[*w***]** = $[w_{q+1}aw_qa\ldots aw_2au_1v^*a]$ Önerme 3.2.8. in koşulunu sağlayan bir kelime olsun ve *w*, T_X e ait olmasın. Eğer bazı $2 \leq i \leq q$ için $w_i < v$ ise , o zaman bazı $\hat{u}_{i_1} \geq v$ kelimeleri ve bazı a_{i_1} harfleri için $u_{i_1}=\hat{u}_{i_1}a_{i_1}$ olmak üzere w_i yi $u_{i_1}u_{i_1}'$ şeklinde yazabiliriz.Dolayısıyla , bazı $1 \leq t \leq q$ için,

$$[w] = [w_{q+1}\,(av)^{n_t}\,a\,u_t\,u_t'\ \ldots(av)^{n_2}\,a\,u_2\,u_2'\,(av)^{n_1}\,a\,u_1\,v^*a]$$

elde ederiz, yani **[***w***]** kelimesi , Önerme 3.2.9 un koşulunu sağlar. Dolayısıyla ,

$$[w] \equiv (-1)^{|v|+1}[w_{q+1}[(\{av\})^{n_t}\{au_t\}]u_t'\ldots[(\{av\})^{n_2}\{au_2\}]u_2'[(\{av\})^{n_1+1}\{au_1\}]] \pmod{w}$$

dır.

Şimdi , bütün $[(\{av\})^{n_j}\{au_j\}]$ altkelimelerini $A_{[(\{av\})^{n_j}\{au_j\}]}$ ile $(n_1 := n_1+1)$, bütün boş olmayan $u_j' = a_{j_1} \dots \dots a_{j_k}$ $(a_{j_s} \in X)$ ve $w_{q+1}=a_{q+1_1}\dots a_{q+1_p}$ için a_{i_s} yi $A_{a_{i_s}}$ ile değiştirelim.

$Y = \left\{ \{ A_z \mid z \in \{[(\{av\})^{n_j}\{au_j\}], a_{i_s}\} \right\}$ alfabesinin

$[w^{(1)}] = [w_{q+1}{}^{(1)} A_{[(\{av\})^{n_t}\{au_t\}]} u_t'^{(1)} \dots A_{[(\{av\})^{n_2}\{au_2\}]} u_2'^{(1)} A_{[(\{av\})^{n_1+1}\{au_1\}]}]$ yeni sağ normlu kelimesini elde ederiz.

Y kümesini aşağıdaki şekilde sıralayalım :

$A_{z_1} \geq A_{z_2}$ ancak ve ancak $\dot{z_1} \geq \dot{z_2}$ ise .

Burada $\dot{z_1}$ ve $\dot{z_2}$ sırasıyla z_1 ve z_2 nin braketlerinin kaldırılmasıyla elde edilen kelimelerdir. O zaman , $w^{(1)}$ de baş harfin bulunma sayısı w dakinden azdır ve Tanım 3.2.2 ile $w^{(1)} \notin T_Y$ dir. Baş harfin bulunma sayısı üzerinde tümevarım kullanarak , $[w^{(1)}]$ in , T_Y nin $[w^{(1)}]$ den küçük sağ normlu kelimelerinin bir lineer toplamı olduğunu elde ederiz.

Bütün $1 \leq i \leq m$ için $A_{f_i} \in Y$ olmak üzere $[A_{f_1}A_{f_2}\dots A_{f_m}]$, sağ normlu kelimelerin toplamındaki kelimelerden birisi olsun. $A_{f_1}A_{f_2}\dots A_{f_m} \in T_Y$ olduğundan , A_{f_m} bu kelimenin baş harfidir.

Dolayısıyla $1 \leq p \leq t$ için $\dot{f_m}=(av)^{n_p}au_p$ dir, $n_1 := n_1+1$ olduğundan $n_p \geq 1$ dir.

A_{f_i} harflerini f_i kelimeleri ile ters yerleştirme yaparak , $[f_1 f_2 \dots f_m]$ kelimesini elde ederiz. Önerme 3.2.9 dan ,

$$[\dot{f_1}\dot{f_2}\dots\dot{f}_{m-1}(av)^{n_{p-1}}au_p v^* a] \equiv [f_1 f_2 \dots f_m] \pmod{\dot{f_1}\dot{f_2}\dots\dot{f}_{m-1}(av)^{n_{p-1}}au_p v^* a}$$

elde edilir.

$A_{f_1}A_{f_2}\dots A_{f_m}$ nin içeriği $w^{(1)}$ in içeriğine eşittir. Dolayısıyla ,

$$A_{f_1}A_{f_2}\dots A_{f_m} < w^{(1)} = A_{g_1}A_{g_2}\dots A_{g_m}$$

koşulu her $1 \leq i \leq s$-1 için $A_{f_i}=A_{g_i}$ olmak üzere bazı $1 \leq s \leq m$-1 için $A_{f_s}<A_{g_s}$ olduğunu gösterir. Bu nedenle , Önerme 3.2.1 den $\dot{f}_s<\dot{g}_s$ alfabetik olarak kuvvetli küçük ve

$$\dot{f}_1\dot{f}_2 \dots \dot{f}_{m-1}(av)^{n_{p-1}}au_pv^*a < \dot{g}_1 \dots \dot{g}_m = w$$

dır. Dolayısıyla

$$[f_1f_2 \dots f_m] \equiv 0 \pmod{w}$$

dır. Böylece

$$[w] \equiv 0 \pmod{w}$$

elde ederiz. Not 3.2.3 ün kullanılmasıyla teorem elde edilir.

NOT 3.2.4. Teorem 3.2.1 in ispatı , herhangi $u \notin T_X$ kelimesi için , $[u] \equiv 0 \pmod{u}$ olduğunu gösterir.

NOT 3.2.5. Teorem 3.2.1 den dolayı , eğer k , birimli asosyatif ve değişmeli bir halka ise , o zaman , $\{[w] \mid w \in T_X\}$ kümesi *Lie(X)* i k-modül olarak üretir.

3.3. Lyndon-Shirshov Kelimelerinde Diğer Bir Braketleme

Bu bölümde , *Lie(X)* in , $[xy] = xy-yx$ çarpımı ile X tarafından üretilen $k<X>$ serbest asosyatif cebirinin alt uzayı olduğunu varsayacağız.

Asosyatif Lyndon-Shirshov kelimelerinde " $[\![\ ]\!]$ " ile gösterilen bir braketleme tanımlayacağız.

S_X in herhangi bir kelimesi için (1) gösterimine sahibiz. Eğer S_X in w kelimesinde a baş harfi bir defa bulunuyorsa , bazı $v \in <X>$ için $w = av$ dır . Bu durumda $[\![w]\!]=\{av\}$ alalım.

w , S_X in içinde a baş harfini birden çok bulunduran (1) formundaki bir kelimesi ve $w^{(1)}$, S_Y nin (2) formundaki bir kelimesi olsun. Lyndon-Shirhov kelimelerinde baş harfin bulunma sayısı üzerinde tümevarım ile , $[\![w^{(1)}]\!]$ i tanımlayalım ve $[\![w]\!]$ nun , $[\![w^{(1)}]\!]$ deki bütün $A_{(av)^{n_j} au_j}$ harflerini **[**$(\{av\})^{n_j}\{au_j\}$**]** ile ($n_1 := n_1+1$) , $A_{a_{j_s}}$ harflerini a_{j_s} ile değiştirerek elde edilen kelime olduğunu varsayalım.

Dikkat edilirse $[\![\ ]\!]$ braketlemesi , Shirshov'un (Shirshov, 1958) de tanımladığı [ ] braketlemesine eşit değildir.

Örneğin , a , $b \in X$ ve $a > b$ olsun.

$w = aabbb \in S_X$ ve $[w] = [a[[[ab]b]b]] \neq [\![w]\!] = [[[a[ab]]b]b]$ dır.

Gerçekten de

$w = aabbb$ ise $w = (av)^{n_1+1}\, a\, u_1\, u_1'$ formunda yazmak istersek

$v=1$, $n_1=0$, $u_1=b$, $u_1'=bb$ seçilmesiyle istenilen form elde edilir. Böylece

$w^{(1)} = A_{aab}(bb)^{(1)} = A_{aab}A_bA_b$

olup

$[\![w^{(1)}]\!] = [[A_{aab}A_b]A_b]$ ve $[\![w]\!] = [[[\{a\}\{ab\}]b]b] = [[[a[ab]]b]b]$

elde edilir.

Herhangi $f \in k\langle X\rangle$ için , $\overline{f}$ ile , f 'nin (ii) sıralaması altında f 'nin maksimal asosyatif kelimesini gösterdiğimizi hatırlayalım.

Önerme 3.3.1. S_X in herhangi w kelimesi için , $\overline{[\![w]\!]} = w$ dır.

İspat: Eğer $(av)^{n_j}au_j$, S_X in bir kelimesi ise , $A_{(av)^{n_j}au_j} \in Y$ olmak üzere (bknz Lemma 3.2.2)

$$\overline{\textbf{[}(\{av\})^{n_j}\{au_j\}\textbf{]}} = (av)^{n_j}\, a\, u_j \qquad (10)$$

olduğunu görmek zor değildir. w , S_X in (1) formundaki kelimesi ve $w^{(1)}$, S_Y nin (2) formundaki bir kelimesi olsun. Kelimelerde baş harfin bulunma sayısı üzerinde tümevarım ile $\overline{[\![w^{(1)}]\!]} = w^{(1)}$ elde ederiz.

Yani ; $A_{(av)^{n_1+1}\, au_1}\, {u_1}'^{(1)} A_{(av)^{n_2}\, au_2}\, {u_2}'^{(1)} \dots A_{(av)^{n_t}\, au_t}\, {u_t}'^{(1)} > A_{z_{i_1}} A_{z_{i_2}} \dots A_{z_{i_q}}$ ve $\alpha_i \in$ k olmak üzere

$$[\![w^{(1)}]\!] = A_{(av)^{n_1+1}\, au_1}\, {u_1}'^{(1)} A_{(av)^{n_2}\, au_2}\, {u_2}'^{(1)} \dots A_{(av)^{n_t}\, au_t}\, {u_t}'^{(1)} + \sum_i \alpha_i A_{z_{i_1}} A_{z_{i_2}} \dots A_{z_{i_q}} \quad (11)$$

dır.

Önerme 3.2.1. den $A_{z_1} > A_{z_2}$ koşulu , $z_1 > z_2$ alfabetik olarak kuvvetli büyük olduğunu gösterir. Dolayısıyla ,

$$(av)^{n_1+1}\, au_1\, {u_1}'\, (av)^{n_2}\, au_2\, {u_2}' \dots (av)^{n_t}\, au_t\, {u_t}' > z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_q}$$

dır.

(11) de bütün $A_{(av)^{n_j}\, au_j}$ harflerini $\mathbf{[}(\{av\})^{n_j}\{au_j\}\mathbf{]}$ kelimeleri ile ve $A_{a_{i_p}}$ harflerini a_{i_p} ile değiştirerek,

$$[\![w]\!] = \mathbf{[}(\{av\})^{n_1+1}\{au_1\}\mathbf{]}\, {u_1}'\, \mathbf{[}(\{av\})^{n_2}\{au_2\}\mathbf{]}\, {u_2}' \dots \mathbf{[}(\{av\})^{n_t}\{au_t\}\mathbf{]}\, {u_t}' + \sum \alpha_i \tilde{z}_{i_1} \dots \tilde{z}_{i_q} \quad (12)$$

elde ederiz. Burada $\tilde{z}_{i_1}, \dots \tilde{z}_{i_q}$; $A_{z_{i_1}}, \dots, A_{z_{i_q}}$ da yer değiştirmeler sonucu elde edilen kelimelerdir. Dolayısıyla , (10) uncu denklemden ,

$$\overline{[\![w]\!]} = w$$

elde edilir.

Önerme 3.3.2. T_X , Tanım 3.2.2. deki kelimelerin kümesi ve $\phi : T_X \to S_X$ Önerme 3.2.4 de tanımlanan dönüşüm olsun. Herhangi bir $w \in T_X$ için ,

$$[w] \equiv \pm\, [\![\phi(w)]\!] \pmod{w}$$

dır.

İspat: Eğer T_X in w kelimesinde a baş harfi bir defa bulunuyorsa , o zaman Tanım 3.2.2 den bazı $v \in \langle X \rangle$ için $w = va$ dır. Dolayısıyla ,

$$[w] = [va] = (-1)^{|v|}\, \{av^*\} = \pm [\![\phi(w)]\!]$$

w , T_X de baş harfi birden fazla bulunduran bir kelime olsun. O zaman , w (4) formunda yazılabilir. Önerme 3.2.9 dan ,

$$[w] \equiv (-1)^{|v|+1}\, [w_{t+1}[(\{av\})^{n_t}\{au_t\}]u'_t \ldots [(\{av\})^{n_2}\{au_2\}]u'_2[(\{av\})^{n_1+1}\{au_1\}]] \pmod{w}$$

dır.

Bütün $[(\{av\})^{n_j}\{au_j\}]$ altkelimelerini $A_{[(\{av\})^{n_j}\{au_j\}]}$ ile $(n_1 := n_1 + 1)$, boş olmayan bütün $u'_j = a_{j_1} \ldots a_{j_k}$ $(a_{j_s} \in X)$ ve $w_{t+1}=a_{t+1_1}\ldots a_{t+1_p}$ için a_{j_s} harflerini $A_{a_{j_s}}$ ile değiştirelim.

$Y = \left\{ \{ A_z \mid z \in \{[(\{av\})^{n_j}\{au_j\}], a_{j_s}\} \right\}$ alfabesinin

$[w^{(1)}] = [w_{t+1}{}^{(1)} A_{[(\{av\})^{n_t}\{au_t\}]} u_t'^{(1)} \ldots A_{[(\{av\})^{n_2}\{au_2\}]} u_2'^{(1)} A_{[(\{av\})^{n_1+1}\{au_1\}]}]$

yeni sağ normlu kelimesini elde ederiz.

Y kümesini aşağıdaki şekilde sıralayalım :

$A_{z_1} \geq A_{z_2}$ ancak ve ancak $\dot{z_1} \geq \dot{z_2}$ ise .

Burada $\dot{z_1}$ ve $\dot{z_2}$ sırasıyla z_1 ve z_2 nin braketlerinin kaldırılmasıyla elde edilen kelimelerdir. O zaman , $w^{(1)}$ de $A_{[(\{av\})^{n_1+1}\{au_1\}]}$ baş harfinin bulunma sayısı w dakinden azdır ve Tanım 3.2.2 den $w^{(1)} \in T_Y$ dir. T_X in kelimelerinde baş harfin bulunma sayısı üzerinde tümevarım kullanarak , $\alpha_i \in$ k ve $\tau_i{}^{(1)} < w^{(1)}$ olmak üzere

$$\mathbf{[}w^{(1)}\mathbf{]} = \pm \left[\!\left[\phi(w^{(1)})\right]\!\right] + \sum_i \alpha_i \mathbf{[}\tau_i{}^{(1)}\mathbf{]} \qquad (13)$$

olduğu gösterilebilir.

Not 3.2.4 den $\tau_i{}^{(1)} \in T_Y$ olduğunu varsayabiliriz. $\tau_i{}^{(1)} = A_{x_{i_1}} \dots A_{x_{i_q}}$ nın içeriği $w^{(1)} = A_{g_1} \dots A_{g_q}$ nın içeriğine eşittir. Dolayısıyla $\tau_i{}^{(1)} < w^{(1)}$ koşulu bazı $1 \leq s \leq q$-1 için $A_{x_{i_s}} < A_{g_s}$ olduğunu gösterir öyle ki bütün $1 \leq j \leq$ s-1 için $A_{x_{i_j}} = A_{g_j}$ dir.$\tau_i{}^{(1)} \in T_Y$ olduğundan $A_{x_{i_q}}$ bu kelimenin baş harfidir. Dolayısıyla , $\dot{x}_{i_q} = (av)^{n_{p_i}} au_{p_i}$ dir (bazı $n_{p_i} \geq 1$ için) .(13) de A_{z_j} harflerini z_j kelimeleri ile ters yerleştirme yaparak ve ϕ ile $[\![\ ]\!]$ in tanımlarını gözönünde bulundurarak $\mathbf{[}\tau_i\mathbf{]} = \mathbf{[}x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_q}\mathbf{]}$ olmak üzere

$$\mathbf{[}w\mathbf{]} \equiv \pm \left[\!\left[\phi(w)\right]\!\right] + \sum_i \alpha_i \mathbf{[}\tau_i\mathbf{]} \pmod{w}$$

elde ederiz. Önerme 3.2.9. dan ,

$$\mathbf{[}\dot{x}_{i_1} \dots \dot{x}_{i_{q-1}} (av)^{n_{p_i}-1} au_{p_i} v^* a\mathbf{]} \equiv \mathbf{[}x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_q}\mathbf{]} \pmod{\dot{x}_{i_1} \dots \dot{x}_{i_{q-1}} (av)^{n_{p_i}-1} au_{p_i} v^* a}$$

elde ederiz. Böylece , Önerme 3.2.1. den , $\dot{x}_{i_s} < \dot{g}_s$ (alfabetik olarak kuvvetli küçük) ($s \leq q$-1) ve

$$\dot{x}_{i_1} \dots \dot{x}_{i_{q-1}} (av)^{n_{p_i}-1} au_{p_i} v^* a < \dot{g}_1 \dots \dot{g}_q = w$$

dır. Dolayısıyla

$$\mathbf{[}x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_q}\mathbf{]} \equiv 0 \pmod{w}$$

ve

$$[w] \equiv \pm [\![\phi(w)]\!] \pmod{w}$$

dır.

Teorem 3.3.1. $\{[\![w]\!] \mid w \in S_X\}$ kümesi , *Lie(X)* serbest Lie cebiri için bir lineer baz oluşturur.

İspat : Önerme 3.3.1. den lineer bağımsızlık elde edilir. Teorem 3.2.1 , Önerme 3.3.2 ve Not 3.2.4 den de , $\{[\![w]\!] \mid w \in S_X\}$ kümesinin *Lie(X)* i lineer uzay olarak ürettiği görülür.

NOT 3.3.1. NOT 3.2.5. ve Önerme 3.3.2. nin ispatından , Teorem 3.3.1. in, birimli , asosyatif ve komutatif bir k halkası için de geçerli olduğu görülebilir.

Sonuç 3.3.1. *Lie(X)* , birimli , asosyatif ve komutatif bir k halkası üzerinde *X* tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve T_X , Tanım 3.2.2 deki kelimelerin kümesi olsun. O zaman , $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_t} \in T_X$ olmak üzere

$$[a_{i_1}[a_{i_2}[\dots[a_{i_{t-1}}a_{i_t}]\dots]]]$$

kelimeleri *Lie(X)* in k -modül olarak bir bazını oluştururlar.

İspat: NOT 3.2.5. den lineer bağımsızlığı göstermek yeterlidir. NOT 3.3.1. den $\{[\![w]\!] \mid w \in S_X\}$ kümesi *Lie(X)* in bir lineer bazıdır. Bu kümeyi aşağıdaki şekilde sıralayalım:

$$[\![w_1]\!] > [\![w_2]\!] \quad \Leftrightarrow \quad \phi^{-1}(w_1) > \phi^{-1}(w_2)$$

Bu sıralamanın lineer olduğu açıktır . $u \in T_X$ alalım ; u nun $\{[\![w]\!] \mid w \in S_X\}$ bazına göre yazılışındaki maksimal kelime $\pm [\![\phi(u)]\!]$ dır. ($>$ sıralaması altında) (Önerme 3.3.2.)

Tersine , $j \geq 2$ için $u_1 > u_j$ ve $\alpha_i \neq 0$ olmak üzere

$\alpha_1[u_1]+\ldots+\alpha_t[u_t]=0$ olduğunu varsayalım.

$\phi : T_X \to S_X$ dönüşümü bijektif olduğundan , $[\![\phi(u_1)]\!] > [\![w_s]\!]$ olmak üzere

$0 = \alpha_1[u_1]+\ldots+\alpha_t[u_t] = \pm [\![\phi(u_1)]\!] + \sum_s \beta_s [\![w_s]\!]$ elde ederiz.

Bu ise bir çelişkidir.

Teorem 3.3.2. *X* , iyi sıralanmış bir alfabe olsun. $S \subset$ *Lie(X)* kümesinin bir Gröbner-Shirshov bazı olması için gerek ve yeter koşul {[[w]] | *w* bir asosyatif *S*-indirgenmiş Lyndon-Shirshov kelimesi } kümesinin *Lie(X) / Id(S) = Lie* [*X/S*] için bir lineer baz olmasıdır.

İspat: [[ ]] braketlemesi ile bütün *S*-indirgenmiş Lyndon-Shirshov kelimelerin kümesini Q ile gösterelim. *S*'nin bir Gröbner-Shirshov bazı olduğunu varsayalım.

$s \in S$ ve $u,v \in \langle X \rangle$ için $w = u\bar{s}v$ olacak şekildeki $w \in S_X$ için $[\![w]\!]$, *Lie(X)* in bir kelimesi olsun.

$$[\![w]\!] = [\![w]\!] - [usv]_s + [usv]_s$$

dir. ([ ] , (Shirshov, 1958) de tanımlanan braketleme)

Önerme 3.3.1. ile $\overline{[\![w]\!]} = w$ ve $\overline{[usv]}_s = u\bar{s}v$ olduğundan, (Tanım 3.1.5 den)

$$\overline{[\![w]\!] - [usv]_s} \ \mathbf{p}\ w$$

elde ederiz. Dolayısıyla , Teorem 3.3.1 den , bütün $1 \le i \le t$ için $w_i' \ \mathbf{p}\ w$ olacak şekildeki bazı $w_i' \in S_X$ için

$$[\![w]\!] - [usv]_s = \alpha_1[\![w_1']\!] + \ldots + \alpha_t[\![w_t']\!]$$

dır .

w üzerinde tümevarım kullanarak $[\![w_i]\!] \in Q$ ve $\beta_i \in$ k olmak üzere

$$[\![w]\!] \equiv \sum_i \beta_i [\![w_i]\!] \pmod{Id(S)}$$

elde ederiz.

Böylece , Q kümesi *Lie(X)* i lineer uzay olarak üretir.

$\alpha_1[\![w_1]\!] + \ldots + \alpha_k[\![w_k]\!]$, bazı $[\![w_1]\!],\ldots,[\![w_k]\!] \in Q$ için *Lie(X)* in aşikar olmayan bir lineer toplamı olsun.Bütün $2 \leq i \leq k$ için w_i **p** w_1 ve $\alpha_1 \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. O zaman , bazı $\beta_i \in$ k ve $u_i \in S_X$, u_i **p** w_1 için

$$\alpha_1[\![w_1]\!] + \ldots + \alpha_k[\![w_k]\!] = \alpha_1[w_1]+\beta_1[u_1]+\ldots+ \beta_t[u_t]$$

dır.

Eğer $[u_q]$ *S*-indirgenmiş bir kelime değilse , o zaman $[u_q]$, *Lie(X) / Id(S)* nin **p** sıralaması altında $[u_q]$ dan küçük olan Lyndon-Shirshov *S*-indirgenmiş kelimelerinin lineer toplamıdır.

Dolayısıyla , $[v_i]$ *S*-indirgenmiş Lyndon-Shirshov kelimesi ve bütün $1\leq i \leq p$ için v_i **p** w_1 olmak üzere

$$\alpha_1[\![w_1]\!] + \ldots + \alpha_k[\![w_k]\!] \equiv \alpha_1[w_1] + \gamma_1[v_1] + \ldots + \gamma_p[v_p] \quad (\text{mod } Id(S))$$

elde ederiz .

Kompozisyon-Diamond önermesinden ,

$$\alpha_1[\![w_1]\!] + \ldots + \alpha_k[\![w_k]\!] \not\equiv 0 \quad (\text{mod } Id(S))$$

elde ederiz.

Şimdi Q kümesinin, *Lie(X)* in bir lineer bazını oluşturduğunu varsayalım.$0\neq \alpha_i \in$ k , $f_1 ,\ldots, f_k \in S_X$ ve bütün $2 \leq i \leq k$ için f_i **p** f_1 **p** w olmak üzere

$(f, g)_w = \alpha_1[f_1] + \ldots + \alpha_k[f_k]$, f ve g nin w ya göre bir kompozisyonu olsun.

$[f_1]$ in bir *S*-indirgenmiş kelime olduğunu kabul edelim. O zaman bazı $\beta_i \in$ k , $g_i \in S_X$ ve g_i **p** f_1 için (bütün $1 \leq i \leq t$ için)

$$\alpha_1[f_1] + \ldots + \alpha_k[f_k] = \alpha_1[\![f_1]\!] + \beta_1[\![g_1]\!] + \ldots + \beta_t[\![g_t]\!]$$

dır .

Eğer $[\![g_m]\!]$ *S*-indirgenmiş kelime değilse , o zaman , $[\![g_m]\!]$, Q nın *Lie(X) / Id(S)* teki **p** sıralaması altında $[\![g_m]\!]$ den küçük kelimelerin bir lineer toplamıdır. Böylece , f_1 , $h_i \in Q$ ve bütün $2 \leq i \leq p$ için h_i **p** f_1 olmak üzere,

$$0 \equiv \alpha_1[f_1] + \ldots + \alpha_k[f_k] \equiv \alpha_1[\![f_1]\!] + \gamma_1[\![h_1]\!] + \ldots + \gamma_p[\![h_p]\!] \quad (\text{mod } Id(S))$$

dır.

Bu bir çelişkidir. (*Q* kümesi *Lie(X)* in bir lineer bazıdır)

Dolayısıyla , bazı $s \in S$ ve $u,v \in \langle X \rangle$ için $f_1 = u\bar{s}v$ dir. $\overline{[usv]_s} = u\bar{s}v = f_1$ **p** w ve $\overline{(f,g)_w - [usv]_s}$ **p** f_1 olmak üzere

$$(f,g)_w = (f,g)_w - [usv]_s + [usv]_s$$

yazabiliriz . $((f,g)_w = h\ ,\ (h,s)_{f_1} = h - [usv]_s)$

f_1 üzerinde tümevarım kullanarak , $(f,g)_w$ nın *S*'ye göre aşikar olduğunu elde ederiz.

NOT 3.3.2. Aynı içerikteki kelimeler tarafından üretilen *Lie(X)* in alt uzaylarının boyutlarındaki değişmezlik nedeni ile , Teorem 3.3.1 ve 3.3.2 , Önerme 3.3.1 deki özelliğe sahip Lyndon-Shirshov kelimelerindeki herhangi bir braketleme için geçerlidir.

KAYNAKLAR

BOKUT, L. A., 1972. Unsolvability of the equality problem and subalgebras of finitely presented Lie algebras, Math. USSR Izv. 6, 1153-1199.

BOKUT, L. A., 1963. A basis for free polynilpotent Lie algebras, Algebra Logica 3, 13-20.

BLESSENOHL, D., LAUE, H., 1993. A basis construction for free Lie algebras, Exp. Math. 11, 145-152.

BRYANT, R. M., KOVACS, L. G., STÖHR, R., 2002. Invariant bases for free Lie rings, Quart J. Math. 53, 1-17.

CHEN, K. T., FOX, R. H., LYNDON, R. C., 1958. Free differential calculus. IV: The quotient groups of the lower central series, Ann. Math. 6 (2), 81-95.

CHIBRIKOV, E. S., 2006. A right normed basis for free Lie algebras and Lyndon-Shirshov words, J. Algebra 302, 593-612.

GUILFOYLE, S., STÖHR, R., 1998. Invariant bases for free Lie algebras, J. Algebra 204, 337-346.

HALL, M., 1950. A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups, Proc. Amer. Math. Soc. 1, 575-581.

REUTENAUER, C., 1990. Dimensions and characters of the derived series of the free Lie algebra, in:M. Lothaire (Ed.), Mots, Melanges Offerts a M.-P. Schützenberger, Hermes, Paris, 171-184.

SHIRSHOV, A. I., 1958. On free Lie rings, Mat. Sb. 45 (2), 113-122

SHIRSHOV, A. I., 1962. On bases for free Lie algebra, Algenra Logika 1 (1), 14-19.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Adana'nın Seyhan ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana'da tamamladıktan sonra 2004 yılında ODTÜ Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ç.Ü. Matematik bölümünde yüksek lisansa başladı. Şu an T.C. Merkez Bankası Adana Şubesinde çalışmaktadır.