

**BAZI FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYONLAR
İÇİN OSTROWSKI VE HERMITE-HADAMARD
TIPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Havva KAVURMACI

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR
Doç. Dr. M. Zeki SARIKAYA
2012**

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**BAZI FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
OSTROWSKI VE HERMITE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER**

Havva KAVURMACI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

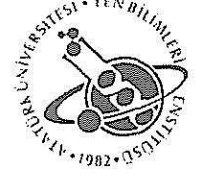
ERZURUM

2012

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

BAZI FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI VE HERMITE HADAMARD
TIPLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Prof.Dr.M.Emin ÖZDEMİR danışmanlığında ve Doç.Dr. M.Zeki SARIKAYA ortak danışmanlığında,,Havva KAVURMACI tarafından hazırlanan bu çalışma 09/04/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından MATEMATİK Anabilim Dalı'nda DOKTORA tezi olarak ~~oybirliği/oy~~ **çöklüğü** (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.M.Emin ÖZDEMİR

İmza

:

Üye : Prof.Dr.Ekrem KADIOĞLU

İmza

:

Üye : Prof.Dr. Murat ÖZDEMİR

İmza

:

Üye : Prof.Dr. S.Uğur KIRMACI

İmza

:

Üye : Prof.Dr.Sezgin AKBULUT

İmza

:

Üye : Doç.Dr. M.Zeki SARIKAYA

İmza

:

Üye : Doç.Dr. Nesip AKTAN

İmza

:

(imza)

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Prof.Dr. İhsan EFEOĞLU

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI VE HERMITE-HADAMARD TIPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Havva KAVURMACI

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

Ortak Danışman : Doç. Dr. M. Zeki SARIKAYA

Bu tezde, bazı farklı türden konveks fonksiyonlar kullanılarak yeni tanımlamalar, örneklemeler yapılmış olup bu türden konveks fonksiyonlar ve literatürde bulunan bazı konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. İlk bölüm giriş niteliğinde olup, bu bölümde konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler ile günümüze kadar yapılan çalışmalarla ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan konveks fonksiyon kavramları, bunlar arasındaki hiyerarşi, temel teoremler ve pozitif reel sayıların bazı özel ortalamaları verilmiştir. Üçüncü bölümde, farklı türden konveks fonksiyonlar için literatürde bulunan Hermite-Hadamard tipli ve Ostrowski tipli integral eşitsizlikler verilmiştir. Bu bölümün son kısmında ise lemmalar ve bu lemmalara bağlı olarak elde edilen eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise farklı türden konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni baskın konveks fonksiyon kavramları tanımlanmış, bu yeni fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Daha sonra sırasıyla konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli; s -konveks ve m -konveks fonksiyonlar için yeni Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlardan birçoğunun literatürü desteklediği gözlemlenmiştir.

2012, 104 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ostrowski tipli eşitsizlikler, Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler, konvekslik, baskın konveks fonksiyon, m -konveks fonksiyon, (α, m) -konveks fonksiyon, s -konveks fonksiyon, r -konveks fonksiyon.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

OSTROWSKI AND HERMITE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR SOME DIFFERENT TYPES OF CONVEX FUNCTIONS

Havva KAVURMACI

Atatürk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

Co-supervisor : Assoc. Prof. Dr. M. Zeki SARIKAYA

In this thesis, new definitions, and exemplifications are provided by using several different convex functions, and for those types of convex functions and for some convex functions in the literature, integral inequalities were obtained. The first section is the introduction section that includes information about the convex functions, inequalities, and the studies has been carried out until now. In the second section, the information related to convex function concepts which were used in the thesis, the hierarchy among them, basic theorems, and some special means of positive real numbers were provided. In the third section, Hermite-Hadamard type and Ostrowski type integral inequalities in the literature were given for different kinds of convex functions. In the last part of this section, lemmas, and inequalities acquired from those lemmas were presented. In the fourth section, new convex-dominated function concepts were defined by using different types of convex functions, and for those new classes of functions Hermite-Hadamard type, integral inequalities were obtained. Then, new Hermite-Hadamard type integral inequalities were obtained for convex functions, new Ostrowski type integral inequalities were obtained for s -convex and m -convex functions, respectively. Most of the results obtained from the research were observed supporting the literature.

2012, 104 pages

Keywords: Ostrowski type inequalities, Hermite-Hadamard type inequalities, convexity, convex-dominated function, m -convex function, (α, m) -convex function, s -convex function, r -convex function.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu alışma Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakóltesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Doktora çalışmam boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan ve beni yönlendiren saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR'e;

ikinci danışmanlığımı üstlenerek, değerli bilgileriyle bana yardımcı olan ve yol gösteren, iten desteğini her zaman yanımda hissettiğim,

Sayın Doç. Dr. M. Zeki SARIKAYA'ya

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Doktoraya başladığım günden itibaren yanımda olan değerli arkadaşlarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Erhan SET'e, Sayın Arş. Gör. Merve AVCI'ya, Sayın Öğr. Gör. Ahmet Ocak AKDEMİR'e, Sayın Arş. Gör. Mustafa GÜRBÜZ'e, Sayın Uzm. etin YILDIZ'a, Sayın Arş. Gör. Alper EKİNCİ'ye ve değerli arkadaşım Sayın Matematik Öğretmeni Yasemin YÖNDEM'e teşekkür ederim.

Doktora çalışmalarım boyunca bana maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Havva KAVURMACI

Nisan 2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Genel Kavramlar	5
2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi.....	19
2.3. İki Pozitif Reel Sayı İçin Bazı Ortalamalar	22
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	24
3.1. Hermite-Hadamard Tipli Temel Eşitsizlikler.....	24
3.2. Ostrowski Tipli Temel Eşitsizlikler	33
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	38
4.1. g, m -Baskın Konveks Fonksiyon.....	38
4.2. g, s -Baskın Konveks Fonksiyon	45
4.3. g, h -Baskın Konveks Fonksiyon	51
4.4. g, α, m -Baskın Konveks Fonksiyon.....	56
4.5. g, r -Baskın Konveks Fonksiyon	62
4.6. g, QI -Baskın Konveks Fonksiyon.....	65
4.7. g, PI -Baskın Konveks Fonksiyon	69
4.8. h, α, m -Konveks Fonksiyon ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler.....	71
4.9. Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Yeni İntegral Eşitsizlikler.....	79
4.10. İkinci Anlamda s - Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski Tipli Yeni İntegral Eşitsizlikler	83
4.10.1. Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar	89

4.11. m- Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski Tipli Yeni İntegral Eşitsizlikler	90
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	99
KAYNAKLAR	100
ÖZGEÇMİŞ	105

SİMGELER DİZİNİ

$C(I)$	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
I	\mathbb{R} 'de Bir Aralık
I°	I 'nın İçi
$J(I)$	Jensen-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$JQC(I)$	Jensen-Quasi-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m(b)$	m –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	(α, m) –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_n(b)$	n –konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$L(I)$	Log-Konveks Fonksiyonlar sınıfı
$L_1[a, b]$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$\mathcal{L}_r(x, y)$	Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalama
Max	Maksimum
Min	Minimum
\mathbb{N}	Doğal Sayılar Kümesi
$P(I)$	P –Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	Godunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(I)$	Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
\mathbb{R}	Reel Sayılar Kümesi
\mathbb{R}^n	n –boyutlu Euclidean Uzay
$SV(h, I)$	h –Konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h, I)$	h –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$S^*(b)$	Starshaped Fonksiyonlar Sınıfı
$W(I)$	Wright-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$WQC(I)$	Wright-Quasi-Konveks Fonksiyonların Sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks fonksiyon	6
Şekil 2.2. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = x$).....	9
Şekil 2.3. Quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyon	11
Şekil 2.4. Aralıkta quasi-konveks fonksiyon	11
Şekil 2.5. Godunova-Levin fonksiyon, P-fonksiyon, Quasi-konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon ve Log-konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi	19
Şekil 2.6. Quasi-konveks fonksiyon, Wright-quasi-konveks fonksiyon ve Jensen-quasi-konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi.....	20
Şekil 2.7. Konveks fonksiyon, Wright -konveks fonksiyon ve Jensen -konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi	20
Şekil 2.8. Konveks fonksiyon, m-konveks fonksiyon, n-konveks fonksiyon ve Starshaped fonksiyon sınıflarının ilişkisi	21

1. GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Buna rağmen matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. "Konvekslik" kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881'de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Hadamard'ın 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başlar.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Pólya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi'ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar yazmışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır (Hardy *et al.* 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961'de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine "Inequalities" adı verilen kitaptır. Bunu Mitrinović'in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip eder. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise "Convex Functions: Inequalities" başlığıyla 1987 yılında Pečarić tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" (Mitrinović *et al.* 1991), "Classical and New Inequalities in Analysis" (Mitrinović *et al.* 1993), "Mathematical Inequalities" (Pachpatte 2005b) ve "Convex Functions and Their Applications" (Niculescu and Perssons 2006) literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan Eşitsizlik Teorisi ise C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Čebyšev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy'da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir.

Bunların en önemlileri 1981 yılında Hermite tarafından elde edilen, bu tezdeki çalışmaların da temelini oluşturacak olan Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” isimli kitapta; Ostrowski eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı da S.S. Dragomir ve Themistocles M. Rassias tarafından 2002 yılında yazılmış olan “Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration” isimli kitapta bir araya getirilmiştir. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine çalışan diğer matematikçiler Ravi Agarwal, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, Roberts and Varberg, N.S. Barnett, M.E. Özdemir, U.S. Kırmacı, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen ve P. Cerone şeklinde sıralanabilir.

Bu konu üzerine yazılan birçok kitabın dışında literatürde doktora ve yüksek lisans çalışmalarına da rastlanmaktadır.

“Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı doktora tezinde E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar ile birlikte farklı türden E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ve diğer bazı farklı türden konveks fonksiyonlar olan m –konveks, (α, m) –konveks, \log –konveks, $quasi$ –konveks, s –konveks, r –konveks ve h –konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bunların yanı sıra bazı genelleştirmeler de elde edilmiştir (Set 2010).

“Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” başlıklı doktora tezinde konveks ve farklı tip konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Tunç 2010).

“Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” başlıklı yüksek lisans tezinde $quasi$ –konveks fonksiyonlar için yapılan geniş bir literatür taramasının

yanısıra, *quasi* –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için sonuçlar ve bu sonuçlara bağlı özel uygulamalar verilmiştir (Çetin 2011).

“Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski And Simpson Type For s –Convex, *Quasi* –Convex And r –Convex Mappings And Applications” başlıklı doktora tezinde s –konveks, *quasi* –konveks ve r –konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve bu eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Alomari 2011).

Neden Matematiksel Eşitsizlikler?

1978 yılında Richard Bellman, Almanya’da 2. Uluslararası Matematik Eşitsizlikler Konferansı’nda bu soruya şu şekilde cevap vermiştir:

Eşitsizlik çalışmak için üç neden vardır. Bunlar:

1. Pratik Nedenler
2. Teorik Nedenler
3. Estetik Nedenler

dir. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Örneğin, negatif olmayan bir niceliğin ne zaman bir değerini kapsadığı sorulabilir ve bu basit soru ile Pozitif Operatörler Teorisi ve Diferansiyel Eşitsizlikler Teorisi kurulur. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

Bu çalışmada, farklı türden konveks fonksiyonlar detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla çalışmanın ikinci bölümünde matematikte yer alan bazı temel tanım ve teoremler, bazı konveks fonksiyon sınıfları arasındaki hiyerarşi ve son olarak pozitif reel sayıların özel ortalamaları verilmiştir. Üçüncü bölümde ise farklı türden konveks fonksiyonlar için bazı temel Hermite-Hadamard ve Ostrowski tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde (g, m) –baskın konveks fonksiyon, (g, s) –baskın konveks fonksiyon, (g, h) –baskın konveks fonksiyon, $(g, (\alpha, m))$ –baskın konveks fonksiyon, (g, r) –baskın konveks fonksiyon, $(g, Q(I))$ –baskın konveks fonksiyon, $(g, P(I))$ –baskın konveks fonksiyon ve $(h, ((\alpha, m)))$ –konveks fonksiyon kavramları tanımlanarak bu türden konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Daha sonra sırasıyla konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli; s –konveks ve m –konveks fonksiyonlar için yeni Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Yeni fonksiyon sınıfları konveks baskın fonksiyon tanımı göz önünde bulundurularak yapılmış ve yapılan tanımlardan hareketle eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca verilen lemmalarda integraller için mutlak değer özelliği, Hölder ve Power-mean eşitsizlikleri kullanılarak teoremler ispatlanmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlardan birçoğunun literatürü desteklediği gözlemlenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, araştırmada kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1 - \alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).

Tanım 2.1.2. (J –Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R}' de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

řartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Kesin J – Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R}' de bir aralık ve $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (2.1)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir (Pečarić *et al.* 1992).

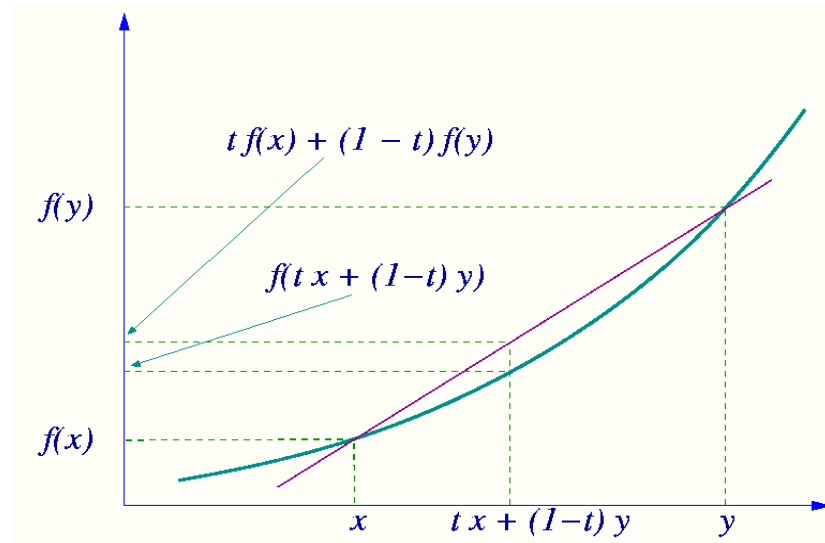
Sonuç 2.1.1. Her konveks fonksiyon J –konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I 'da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f 'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bakınız Şekil 2.1.



Şekil 2.1. Konveks fonksiyon

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için

$$f(x) - f(x_0) \geq (\leq) f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.2)$$

eşitsizliği yazılır. Yani (a, b) aralığında diferensiyellenebilen konveks fonksiyon (2.2) eşitsizliğini sağlar.

Tanım 2.1.5. (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 'da süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.6. (Düzenli Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.

$$|x_1 - x_2| < \delta \text{ şartını sağlayan her } x_1, x_2 \in S \text{ için } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S 'de düzenli süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.7. (Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S 'de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.3. f, S 'de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S 'de düzenli süreklidir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.8. (Mutlak Süreklilik): I, \mathbb{R} 'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Şayet $\forall \varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Carter and Brunt 2000).

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teoremlerde verilecektir.

Teorem 2.1.1. $[a, b] \subseteq I^\circ$ olsun. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak f , $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I° 'de süreklidir (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.2. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

- a. f , (a, b) aralığında süreklidir ve
- b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.9. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I 'da iki nokta olsun. Bu durumda

- (a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
- (b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
- (c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
- (d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır denir (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.3. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f , I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

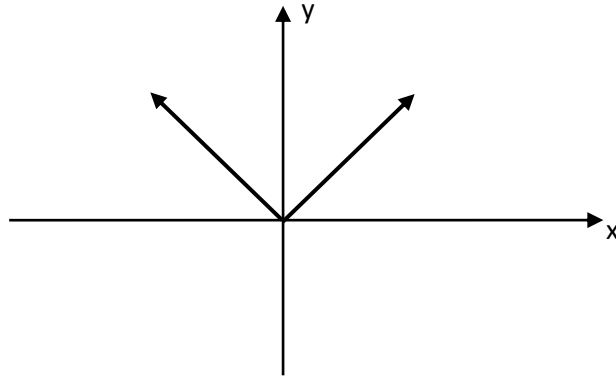
- (a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
- (b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
- (c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
- (d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır. (Adams and Essex 2010).

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.1.4. f, g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvekstir (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.4. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyon I 'de artandır (kesin artandır) (Pečarić *et al.* 1992).

Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.2. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Teorem 2.1.5. f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' 'nin artan (kesin artan) olmasıdır (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.6. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Çeşitli konveks fonksiyon türleri vardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde bu konuda çalışanlar tarafından sık kullanılan konveks fonksiyon türleri şunlardır:

Tanım 2.1.10. (Quasi-Konveks Fonksiyon): $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye strictly *quasi* –konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye strictly *quasi* –konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

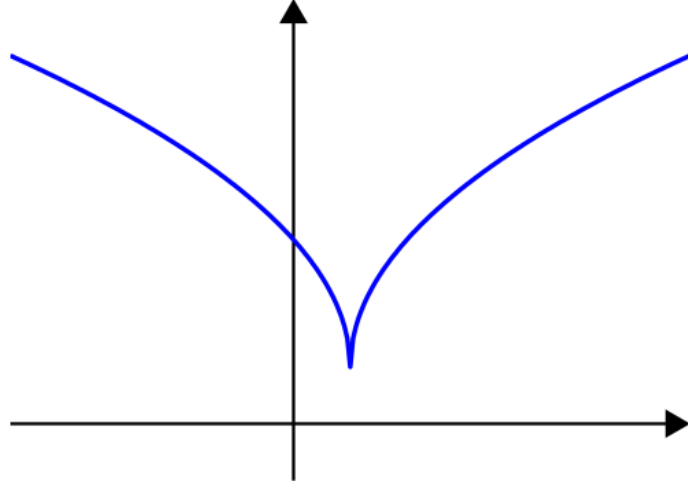
Tanım 2.1.11. f hem *quasi* –konveks hem de *quasi* –konkav ise f 'ye *quasi* –monotonik denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 2.1.5. Herhangi bir konveks fonksiyon *quasi* –konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani *quasi* –konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır. Örneğin $g: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2, -1] \\ t^2, & t \in (-1, 2] \end{cases}$$

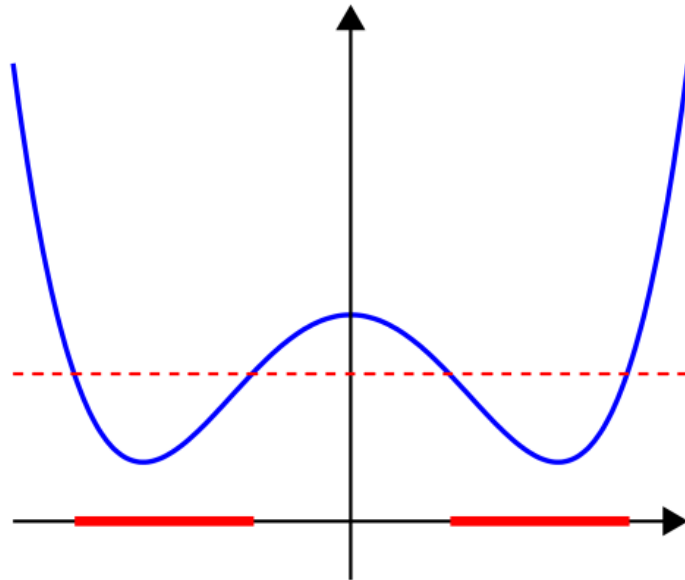
fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyondur (Ion 2007).

Aşağıdaki grafikte *quasi* –konveks olup konveks olmayan bir fonksiyon verilmiştir:



Şekil 2.3. Quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyon

Aşağıdaki grafikte, kırmızı ile gösterilen aralıklarda fonksiyon *quasi* –konvekstir. Ama eğrinin tamamı düşünülürse bu fonksiyon *quasi* –konveks değildir.



Şekil 2.4. Aralıkta *quasi* –konveks fonksiyon

Tanım 2.1.12. (Wright-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta, x \in I$ için

$$f(x + \delta) - f(x) \leq f(y + \delta) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.13. (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x, \delta > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \delta \in I$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(\alpha x + (1 - \alpha)y) + f((1 - \alpha)x + \alpha y)] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x + \delta)] \leq \max\{f(x), f(y + \delta)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.14. (J –Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $J - quasi -konveks$ denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.15. (Log-Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R} 'de bir aralık $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq f^\alpha(x)f^{1-\alpha}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konveks denir (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.1.16. (Godunova-Levin Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \frac{f(x)}{\alpha} + \frac{f(y)}{1 - \alpha}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x - y)(x - z) + f(y)(y - x)(y - z) + f(z)(z - x)(z - y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.1.17. (P –Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I, \alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P –fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir *et al.* 1995).

x, y pozitif sayıların r . kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1 - \lambda)y^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ x^\lambda y^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.18. (r –Konveks Fonksiyon): f pozitif bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in [a, b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq M_r(f(x), f(y); \alpha)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında r –konveks fonksiyon denir (Gill *et al.* 1997).

Bu tanımdan 0 –konveks fonksiyonların \log –konveks fonksiyonlar ve 1 –konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılır.

r –konvekslik tanımı

$$f^r(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \begin{cases} \lambda f^r(x) + (1 - \lambda)f^r(y), & r \neq 0 \\ [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Pearce *et al.* 1998).

Tanım 2.1.19. (Birinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir (Orlicz 1961).

Tanım 2.1.20. (İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki s –konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.1.1. $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

(i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.1.21. (h –Konveks Fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y) \quad (2.3)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h -konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec 2007).

(2.3)'nin eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h -konkav fonksiyon denir yani $f \in SV(h, I)$ 'dir (Varošanec 2007).

Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha) = \alpha$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ise $SX(h, I) = Q(I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = 1$ ise $SX(h, I) \supseteq P(I)$ 'dir; $s \in (0, 1)$ olmak üzere $h(\alpha) = \alpha^s$ ise $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ 'dir.

Tanım 2.1.22. (Starshaped Fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in [0, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx) \leq tf(x)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna starshaped fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.23. (m -Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $m \in [0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m -konvektir denir (Toader 1984).

$-f$ fonksiyonu m -konveks ise bu takdirde f fonksiyonu m -konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m -konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir.

Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde m –konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.1.24. ((α, m) –Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $t \in [0, 1]$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ için

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1 - t^\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna (α, m) –konveks fonksiyon denir (Miheşan 1993).

$f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm (α, m) –konveks fonksiyonların sınıfı $K_m^\alpha(b)$ ile gösterilir. Ayrıca, $(\alpha, m) \in \{(0, 0), (1, 0), (1, m), (1, 1)\}$ için sırasıyla artan, starshaped, m –konveks ve konveks fonksiyon sınıfları elde edilir. $f(0) \leq 0$ olmak üzere $K_1^1(b)$ sınıfında sadece $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonlar yer alır, yani $K_1^1(b)$, $[0, b]$ üzerinde tanımlı tüm konveks fonksiyonlar sınıfının uygun bir alt sınıfıdır.

Tanım 2.1.25. (g – Baskın Konveks Fonksiyon): $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ reel bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için f ve g fonksiyonları

$$\begin{aligned} |\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)| & \quad (2.4) \\ & \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna g – baskın konveks fonksiyon denir (Dragomir and Ionescu 1990).

Lemma 2.1.1. $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) f fonksiyonu I üzerinde g –baskın konveks fonksiyondur.
- 2) $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları I üzerinde konveks fonksiyonlardır.
- 3) $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şartlarını sağlayan I üzerinde tanımlı h, k gibi iki konveks fonksiyon vardır (Dragomir *et al.* 2002).

Tanım 2.1.26. ((h, m) –Konveks Fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [0, b]$, $m \in [0, 1]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olacak şekilde $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan f fonksiyonu

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + mh(1 - \alpha)f(y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(h - m)$ –konveks fonksiyon denir (Özdemir *et al.* 2011).

Teorem 2.1.7. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.8. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power-mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.1.6. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Reel ve kompleks sayılar için temel eşitsizliklerden bir tanesi de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 2.1.9. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.10. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f , $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

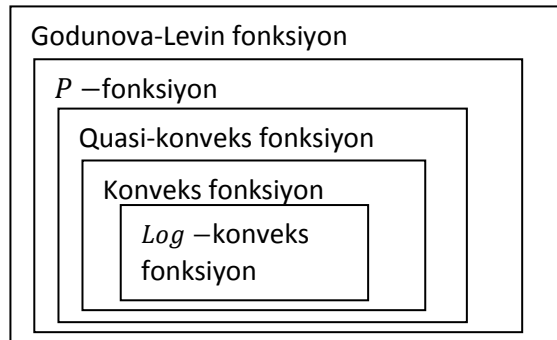
2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi

Fonksiyonlar teorisi çalışmalarında yeni sonuçlar ve genelleştirmeler elde etmek için kimi zaman fonksiyonun şartlarında bazı kısıtlamalar yapmak gerekirken kimi zaman da fonksiyona ek özellikler katmak gerekir. Çünkü fonksiyonlar aynı anda birçok özelliği sağlayabilir veya bir fonksiyon sınıfı başka bir fonksiyon sınıfıyla bazı özellikleri itibariyle benzerlik gösterebilir. Yapılan çalışmalarda farklı türden konveks fonksiyonlar için çeşitli integral eşitsizlikleri ispatlanırken, bu eşitsizliklerin belli özel durumlarda başka konveks fonksiyonlar için de geçerli olduğu görülür. Bu noktadan hareket edilirse konveks fonksiyonlar arasında özellikleri açısından bir hiyerarşi olduğu gerçeğine ulaşılır. Fakat bu hiyerarşide tüm konvekslik sınıflarını beraber değerlendirmek oldukça güç olduğu için aralarındaki ilişki, tanımları ve özellikleri yardımıyla aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

Teorem 2.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, Log-konveks fonksiyonlar sınıfı, Konveks fonksiyonlar sınıfı, Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, P –fonksiyonlar sınıfı ve Godunova-Levin fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $L(I)$, $C(I)$, $QC(I)$, $P(I)$, $Q(I)$ ile gösterilirse;

$$L(I) \subset C(I) \subset QC(I) \subset P(I) \subset Q(I)$$

olduğu görülür.

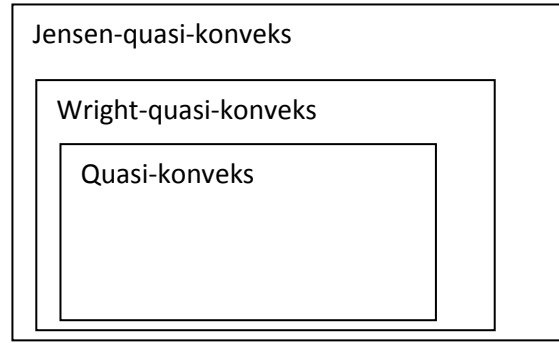


Şekil 2.5. Godunova-Levin fonksiyon, P –fonksiyon, Quasi-konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon ve Log –konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

Teorem 2.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, Wright-quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı ve Jensen-quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $QC(I)$, $WQC(I)$, $JQC(I)$ ile gösterilirse,

$$QC(I) \subset WQC(I) \subset JQC(I)$$

olduğu görülür (Dragomir and Pearce 1998).

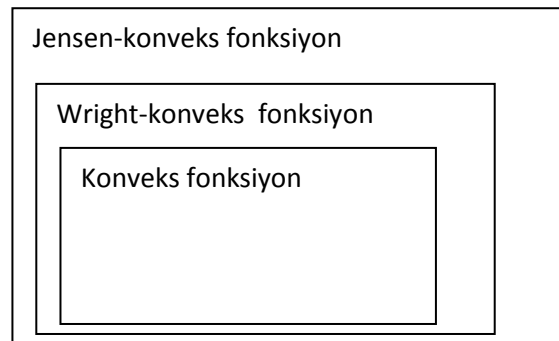


Şekil 2.6. Quasi-konveks fonksiyon, Wright-quasi-konveks fonksiyon ve Jensen-quasi-konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

Teorem 2.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere konveks fonksiyonlar sınıfı, Wright-konveks fonksiyonlar sınıfı ve Jensen-konveks fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $C(I)$, $W(I)$, $J(I)$ ile gösterilirse;

$$C(I) \subset W(I) \subset J(I)$$

olduğu görülür (Wright 1954).



Şekil 2.7. Konveks fonksiyon, Wright -konveks fonksiyon ve Jensen -konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

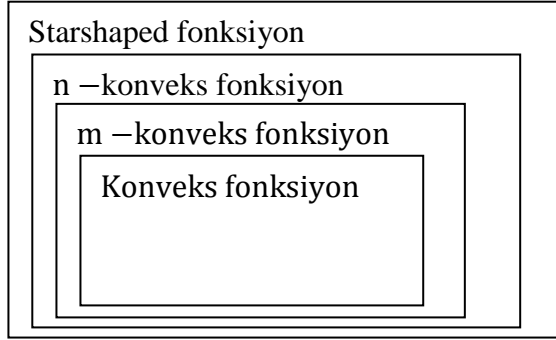
Lemma 2.2.1. Eğer f fonksiyonu m -konveks fonksiyonlar sınıfına ait ise f fonksiyonu starshaped fonksiyondur (Toader 1988).

Lemma 2.2.2. Eğer f fonksiyonu m -konveks fonksiyon ve $0 \leq n < m \leq 1$ ise f fonksiyonu n -konveks fonksiyondur (Toader 1988).

Yukarıdaki lemmalar yardımıyla; $0 \leq n < m \leq 1$ olmak üzere, konveks fonksiyonlar sınıfı, m -konveks fonksiyonlar sınıfı, n -konveks fonksiyonlar sınıfı ve starshaped fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $K(b)$, $K_m(b)$, $K_n(b)$, $S^*(b)$ ile gösterilirse;

$$K(b) \subset K_m(b) \subset K_n(b) \subset S^*(b)$$

olduğu görülür.



Şekil 2.8. Konveks fonksiyon, m -konveks fonksiyon, n -konveks fonksiyon ve Starshaped fonksiyon sınıflarının ilişkisi

h -konveks fonksiyon tanımından açıkça görülebilir ki eğer $h(t) = t$ seçilirse negatif olmayan konveks fonksiyonlar veya eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda negatif olmayan konkav fonksiyonlar; $h(t) = \frac{1}{t}$ seçilirse $Q(I)$ sınıfına ait fonksiyonlar; $h(t) = 1$ seçilirse $P(I)$ sınıfına ait fonksiyonlar ve eğer $h(t) = t^s$ seçilirse, $s \in (0,1)$ olmak üzere, K_s^2 sınıfına ait fonksiyonlar elde edilir. Bu bilgiler ışığında $h(t)$ fonksiyonunun bazı özel değerleri için;

$$C(I) \subset SX(h, I), \quad P(I) \subset SX(h, I), \quad K_s^2 \subset SX(h, I)$$

yazılabilir. Burada h fonksiyonu negatif olmayan fonksiyon olduğu için negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfının alt kümesidir.

2.3. İki Pozitif Reel Sayı İçin Bazı Ortalamalar

Bu bölümde a, b gibi pozitif iki reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir (Bullen *et al.* 1988; Bullen 2003);

(1) Aritmetik ortalama:

$$A = A(a, b) := \frac{a + b}{2},$$

(2) Geometrik ortalama:

$$G = G(a, b) := \sqrt{ab},$$

(3) Harmonik ortalama:

$$H = H(a, b) := \frac{2ab}{a + b},$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(a, b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \frac{b - a}{\ln b - \ln a}, & a \neq b \end{cases}$$

(5) Identric ortalama:

$$I = I(a, b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \frac{1}{e \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}}}, & a \neq b \end{cases}$$

(6) p – logaritmik ortalama:

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(a, b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right]^{\frac{1}{p}}, & a \neq b \end{cases}$$

ortalamları vardır.

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere \mathcal{L}_p 'nin monoton artan olduğu bilinir ve $\mathcal{L}_0 = I$, $\mathcal{L}_{-1} = \mathcal{L}$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi literatürde yer almaktadır:

$$H \leq G \leq \mathcal{L} \leq I \leq A.$$

Son olarak, x, y pozitif sayıların r . kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik ortalaması

$$\mathcal{L}_r(x, y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r}, & r \neq 0, -1, x \neq y \\ \frac{x-y}{\ln x - \ln y}, & r = 0, x \neq y \\ xy \frac{\ln x - \ln y}{x-y}, & r = -1, x \neq y \\ x, & x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın temel kısmında kullanılacak olan bazı temel teoremler verilecektir.

3.1. Hermite-Hadamard Tipli Temel Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): I, \mathbb{R} 'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (3.1)$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al.* 1992).

Aşağıda diğer konveks fonksiyon çeşitleri için elde edilmiş ve literatürde mevcut olan diğer Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 3.1.2. f fonksiyonu $a, b \in I$, $a < b$ ve $f \in L_1[a, b]$ için Godunova-Levin sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x \in [a, b]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{4}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ve

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b p(x) f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $p(x) = \frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^2}$ şeklinde tanımlanmıştır (Dragomir *et al.* 1995).

Teorem 3.1.3. f fonksiyonu $a, b \in I$, $a < b$ ve $f \in L_1[a, b]$ için $P(I)$ –sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x \in [a, b]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq 2[f(a) + f(b)]$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir *et al.* 1995).

Teorem 3.1.4. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde pozitif r –konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq L_r(f(a), f(b)) \quad (3.2)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer f pozitif r –konkav bir fonksiyon ise (3.2) eşitsizliğinin tersi doğrudur (Gill *et al.* 1997).

Teorem 3.1.5. f fonksiyonu $s \in (0,1)$ ve $a, b \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ikinci anlamda s – konveks bir fonksiyon ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}$$

eşitsizliği literatürde ikinci anlamda s –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Dragomir and Fitzpatrick 1999).

Teorem 3.1.6. f fonksiyonu $m \in (0,1]$ ve $0 \leq a < b$ için $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ m – konveks bir fonksiyon ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{f(a) + mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2} + m \frac{f\left(\frac{b}{m}\right) + mf\left(\frac{b}{m^2}\right)}{2} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği literatürde m –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Dragomir 2002).

Teorem 3.1.7. $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ g –baskın konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $a, b \in I$, $a < b$ için

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir ki bu eşitsizlikler de literatürde baskın konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Dragomir *et al.* 2002).

Teorem 3.1.8. $(0,1) \subseteq J$ olacak şekilde I ve J , \mathbb{R} 'nin iki alt aralığı, h ve f fonksiyonları sırası ile J ve I üzerinde tanımlı negatif olmayan iki reel fonksiyon olmak üzere $a, b \in I$, $a < b$, $f \in L_1[a, b]$ ve $f \in SX(h, I)$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(\alpha) d\alpha$$

eşitsizliği literatürde h –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Sarıkaya *et al.* 2008).

Teorem 3.1.9. f ve g fonksiyonları $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b]$ olmak üzere $f, g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ şeklinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer $\alpha_1, m_1, \alpha_2, m_2 \in (0,1]^2$ için f fonksiyonu (α_1, m_1) –konveks ve g fonksiyonu (α_2, m_2) –konveks fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \min\{N_1, N_2\}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada N_1, N_2 ifadeleri

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{f(a)g(a)}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1} + m_2 \left[\frac{1}{\alpha_1 + 1} - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1} \right] f(a)g\left(\frac{b}{m_2}\right) \\ &\quad + m_1 \left[\frac{1}{\alpha_2 + 1} - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1} \right] f\left(\frac{b}{m_1}\right)g(a) \\ &\quad + m_1 m_2 \left[1 - \frac{1}{\alpha_1 + 1} - \frac{1}{\alpha_2 + 1} + \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1} \right] f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{f(b)g(b)}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1} + m_2 \left[\frac{1}{\alpha_1 + 1} - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1} \right] f(b)g\left(\frac{a}{m_2}\right) \\ &\quad + m_1 \left[\frac{1}{\alpha_2 + 1} - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1} \right] f\left(\frac{a}{m_1}\right)g(b) \\ &\quad + m_1 m_2 \left[1 - \frac{1}{\alpha_1 + 1} - \frac{1}{\alpha_2 + 1} + \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1} \right] f\left(\frac{a}{m_1}\right)g\left(\frac{a}{m_2}\right) \end{aligned}$$

dir (Bakula *et al.* 2008).

Teorem 3.1.10. f fonksiyonu $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}(\alpha, m)$ – konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b] \cap L_1\left[\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right]$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + m(2^\alpha - 1)f\left(\frac{x}{m}\right)}{2^\alpha} dx$$

eşitsizliği literatürde (α, m) –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı olarak bilinir (Set *et al.* 2011).

Teorem 3.1.11. f fonksiyonu $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}(\alpha, m)$ – konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{2} \left[\frac{f(a) + f(b) + \alpha m \left[f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) \right]}{\alpha + 1} \right]$$

eşitsizliği literatürde (α, m) –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı olarak bilinir (Set *et al.* 2011).

Teorem 3.1.12. f fonksiyonu $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (α, m) –konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \min \left\{ \frac{f(a) + \alpha m f\left(\frac{b}{m}\right)}{\alpha + 1}, \frac{f(b) + \alpha m f\left(\frac{a}{m}\right)}{\alpha + 1} \right\}$$

eşitsizliği literatürde (α, m) –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı olarak bilinir (Set *et al.* 2011).

Teorem 3.1.13. f fonksiyonu $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (α, m) –konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\frac{1}{mb-a} \int_a^{mb} f(x) dx + \frac{1}{b-ma} \int_{ma}^b f(x) dx \leq \frac{\alpha m + 1}{\alpha + 1} [f(a) + f(b)]$$

eşitsizliği literatürde (α, m) –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli bir eşitsizlik olarak bilinir (Set *et al.* 2011).

Teorem 3.1.14. $m \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ olacak şekilde $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (h, m) –konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \min \left\{ f(a) \int_0^1 h(t) dt + m f\left(\frac{b}{m}\right) \int_0^1 h(1-t) dt, \right. \\ \left. f(b) \int_0^1 h(t) dt + m f\left(\frac{a}{m}\right) \int_0^1 h(1-t) dt \right\}$$

eşitsizliği literatürde (h, m) –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı olarak bilinir (Özdemir *et al.* 2011).

Teorem 3.1.15. $m \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ olacak şekilde $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (h, m) –konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\frac{1}{m+1} \left[\frac{1}{mb-a} \int_a^{mb} f(x) dx + \frac{1}{b-ma} \int_{ma}^b f(x) dx \right] \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(t) dt$$

eşitsizliği literatürde (h, m) –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik olarak bilinir (Özdemir *et al.* 2011).

Teorem 3.1.16. $m \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ olacak şekilde $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (h, m) –konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{b-a} \int_a^b \left[f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right) \right] dx \\ &\leq h\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 h(t) dt \left[f(a) + mf\left(\frac{a}{m}\right) + mf\left(\frac{b}{m}\right) + m^2 f\left(\frac{b}{m^2}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği literatürde (h, m) –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Özdemir *et al.* 2011).

Burada literatürde bulunan bir lemma ve bu lemmanın kullanılmasıyla konveks fonksiyonlar için elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir.

Lemma 3.1.1. $a, b \in I, a < b$ olacak şekilde $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferensiyellenebilir, f'' integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ = (b-a)^2 \int_0^1 k(t) f''(ta + (1-t)b) dt \end{aligned}$$

eşitliği

$$k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t(t-\lambda), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-t)(1-\lambda-t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu için doğrudur (Sarıkaya and Aktan 2011).

Teorem 3.1.17. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $a, b \in I, a < b$ olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferensiyellenebilir, f'' integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| (\lambda - 1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (3.3) \\ & \leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{12} \left[\left(\lambda^4 + (1+\lambda)(1-\lambda)^3 + \frac{5\lambda-3}{4} \right) |f''(a)| \right. \\ \quad \left. + \left(\lambda^4 + (2-\lambda)\lambda^3 + \frac{1-3\lambda}{4} \right) |f''(b)| \right], & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \frac{(b-a)^2(3\lambda-1)}{48} [|f''(a)| + |f''(b)|], & \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

dir (Sarıkaya and Aktan 2011).

Sonuç 3.1.1. (3.3)'de, $\lambda = 0$ seçilirse

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{24} \left[\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right]$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.2. (3.3)'de, $\lambda = 1$ seçilirse

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{12} \left[\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right]$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.3. (3.3)'de, $\lambda = \frac{1}{2}$ seçilirse

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2} \right] \right| \leq \frac{(b-a)^2}{48} \left[\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right]$$

elde edilir.

Teorem 3.1.18. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $a, b \in I, a < b$ olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferensiyellenebilir, f'' integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. $q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f''|^q, [a, b]$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon ise

$$\left| (\lambda - 1) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (3.4)$$

$$\leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{2} \left[\frac{\lambda^3}{3} + \frac{1-3\lambda}{24} \right]^{(q-1)/q} \\ \times \left\{ \left(\left[\frac{\lambda^4}{6} + \frac{3-8\lambda}{3 \cdot 2^6} \right] |f''(a)|^q + \left[\frac{(2-\lambda)\lambda^3}{6} + \frac{5-16\lambda}{3 \cdot 2^6} \right] |f''(b)|^q \right)^{1/q} \right. \\ \left. + \left(\left[\frac{1+\lambda}{6} (1-\lambda)^3 + \frac{48\lambda-27}{3 \cdot 2^6} \right] |f''(a)|^q + \left[\frac{\lambda^4}{6} + \frac{3-8\lambda}{3 \cdot 2^6} \right] |f''(b)|^q \right)^{1/q} \right\}, \quad \lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{3\lambda-1}{24} \right)^{(q-1)/q} \left\{ \left(\frac{8\lambda-3}{3 \cdot 2^6} |f''(a)|^q + \frac{16\lambda-5}{3 \cdot 2^6} |f''(b)|^q \right)^{1/q} \right. \\ \left. + \left(\frac{16\lambda-5}{3 \cdot 2^6} |f''(a)|^q + \frac{8\lambda-3}{3 \cdot 2^6} |f''(b)|^q \right)^{1/q} \right\}, \quad \lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

dir (Sarıkaya and Aktan 2011).

Sonuç 3.1.4. (3.4)'de, $\lambda = 0$ seçilirse

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{48} \left[\left(\frac{3|f''(a)|^q + 5|f''(b)|^q}{8} \right)^{1/q} + \left(\frac{5|f''(a)|^q + 3|f''(b)|^q}{8} \right)^{1/q} \right]$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.5. (3.4)'de $\lambda = 1$ seçilirse

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{24} \left[\left(\frac{5|f''(a)|^q + 11|f''(b)|^q}{16} \right)^{1/q} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{11|f''(a)|^q + 5|f''(b)|^q}{16} \right)^{1/q} \right]$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.6. (3.4)'de $\lambda = \frac{1}{3}$ seçilirse

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{162} \left[\left(\frac{59|f''(a)|^q + 133|f''(b)|^q}{3 \cdot 2^6} \right)^{1/q} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{133|f''(a)|^q + 59|f''(b)|^q}{3 \cdot 2^6} \right)^{1/q} \right]$$

elde edilir.

Literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Bu eşitsizlikle ilgili genelleştirmeler ve yeni sonuçlar Dragomir and Toader (1993); Dragomir and Agarwal (1998); Pearce and Pečarić (2000); Özdemir (2003); Kırmacı and Özdemir (2004); Pachpatte (2004a); Yang *et al.* (2004); Kırmacı (2008); Bombardelli and Varošanec (2009); Ngoc *et al.* (2009); Özdemir *et al.* (2010); Sarıkaya *et al.* (2010); Set (2010); Set *et al.* (2010); Tunç (2010); Alomari (2011); Yıldız (2011) ve Sarıkaya *et al.* (2012) çalışmalarında bulunabilir.

3.2. Ostrowski Tipli Temel Eşitsizlikler

Teorem 3.2.1. (Ostrowski Eşitsizliği): $a, b \in I, a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olacak şekilde $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right] \\ &= M(b-a) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştiremez (Ostrowski 1938).

Teorem 3.2.2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $|f(t) - f(s)| \leq M \cdot |t - s|$ şartını sağlayan yani Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. $\forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ için

$$\left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq M(b-a) \left[\frac{1}{8} + 2 \left(\frac{x - \frac{3a+b}{4}}{b-a} \right)^2 \right]$$

dir. Buradaki $\frac{1}{8}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştiremez (Guessab and Schmeisser 2002).

Burada literatürde bulunan bir lemma ve bu lemmanın kullanılmasıyla konveks fonksiyonlar için elde edilen Ostrowski tipli eşitsizlikler verilecektir.

Lemma 3.2.1. $a, b \in I, a < b$ olacak şekilde $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon ve $f' \in L_1[a, b]$ olsun. Bu durumda

$$p(x, t) = \begin{cases} t - a, & t \in [a, x] \\ t - \frac{a+b}{2}, & t \in (x, a+b-x] \\ t - b, & t \in (a+b-x, b] \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu kullanılarak her $x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ için

$$\frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b p(x, t) f'(t) dt \quad (3.5)$$

eşitliği elde edilir (Dragomir 2005).

Teorem 3.2.3. $a, b \in I, a < b$ olacak şekilde $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de mutlak sürekli bir fonksiyon ve $f' \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ aralığında konveks ise $\forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{6(b-a)} [|f'(a)| + |f'(b)|] \\ & \quad + \frac{8(x-a)^2 + 3(a+b-2x)^2}{24(b-a)} (|f'(x)| + |f'(a+b-x)|) \end{aligned}$$

dir (Alomari *et al.* 2011).

Teorem 3.2.4. $a, b \in I, a < b$ olacak şekilde $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de mutlak sürekli bir fonksiyon ve $f' \in L_1[a, b]$ olsun. $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ise $\forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{2^{1/q}(b-a)(p+1)^{1/p}} \left\{ (x-a)^2 (|f'(x)|^q + |f'(a)|^q)^{1/q} \right. \\
& \quad + \frac{(a+b-2x)^2}{2} (|f'(x)|^q + |f'(a+b-x)|^q)^{1/q} \\
& \quad \left. + (x-a)^2 (|f'(b)|^q + |f'(a+b-x)|^q)^{1/q} \right\}
\end{aligned}$$

dir (Alomari *et al.* 2011).

Teorem 3.2.5. $a, b \in I, a < b$ olacak şekilde $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de mutlak sürekli bir fonksiyon ve $f' \in L_1[a, b]$ olsun. $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere eğer $|f'|^q, [a, b]$ aralığında konkav ise $\forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{(b-a)(p+1)^{1/p}} \left\{ (x-a)^2 \left(\left| f' \left(\frac{a+x}{2} \right) \right| + \left| f' \left(\frac{2b+a-x}{2} \right) \right| \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{(a+b-2x)^2}{2} \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right\}
\end{aligned}$$

dir (Alomari *et al.* 2011).

Burada literatürde bulunan bir lemma ve bu lemmanın kullanılmasıyla konveks fonksiyonlar için elde edilen Ostrowski tipli eşitsizlikler verilecektir.

Lemma 3.2.2. $a, b \in I, a < b$ ve I, \mathbb{R} 'de açık bir aralık olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\lambda \in [0,1], x \in [a, b]$ ve $f' \in L_1[a, b]$ ise

$$h(t, \lambda) = \begin{cases} t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right), & t \in \left[0, \frac{b-x}{b-a} \right) \\ t - 1 + \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right), & t \in \left(\frac{b-x}{b-a}, 1 \right] \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-x)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(b)] + (x-a)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)]}{b-a} \\ &= (b-a) \int_0^1 h(t, \lambda) f'(ta + (1-t)b) dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir (Özdemir *et al.* 2012).

Teorem 3.2.6. I, \mathbb{R} 'de açık bir aralık, $a, b \in I$, $a < b$ olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q \in [1, \infty)$ olacak şekilde $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-x)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(b)] + (x-a)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)]}{b-a} \right| \\ & \leq (b-a) \left(\frac{(2\lambda^2 - 2\lambda + 1)}{2} \right)^{(q-1)/q} \\ & \times \left\{ \left[\left(\frac{2\lambda^3 - 3\lambda + 2}{6} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{2q+1} |f'(a)|^q \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{[6\lambda^2 - 6\lambda + 3] - [2\lambda^3 + 2 - 3\lambda] \left(\frac{b-x}{b-a} \right)}{6} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{2q} |f'(b)|^q \right]^{1/q} \right. \\ & \left. + \left(\frac{[6\lambda^2 - 6\lambda + 3] - [2\lambda^3 + 2 - 3\lambda] \left(\frac{x-a}{b-a} \right)}{6} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{2q} |f'(a)|^q \right. \\ & \left. + \left(\frac{2\lambda^3 - 3\lambda + 2}{6} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{2q+1} |f'(b)|^q \right]^{1/q} \Big\} \end{aligned}$$

dir (Özdemir *et al.* 2012).

Teorem 3.2.7. I, \mathbb{R}' 'de açık bir aralık, $a, b \in I$, $a < b$ olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q \in (1, \infty)$ olacak şekilde $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-x)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(b)] + (x-a)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)]}{b-a} \right| \\ & \leq (b-a) \left(\frac{\lambda^{p+1} + (1-\lambda)^{p+1}}{p+1} \right)^{1/p} \left\{ \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{(p+1)/p} \right. \\ & \quad \times \left(\left(\frac{(b-x)^2}{b-a} |f'(a)|^q + \left(\frac{1}{2} - \frac{(x-a)^2}{b-a} \right) |f'(b)|^q \right)^{1/q} + \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{(p+1)/p} \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{(b-x)^2}{b-a} \right) |f'(a)|^q + \left(\frac{(x-a)^2}{b-a} \right) |f'(b)|^q \right)^{1/q} \right\} \end{aligned}$$

dir (Özdemir *et al.* 2012).

Literatürde Ostrowski eşitsizliği ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Bu eşitsizlikle ilgili genelleştirmeler ve yeni sonuçlar Dragomir (1997); Dragomir and Wang (1997, 1998); Cerone *et al.* (1998); Dragomir *et al.* (2000); Barnett and Dragomir (2001); Barnett *et al.* (2003) ; Ujević (2004); Pachpatte (2004b, 2005a, 2005b); Dragomir (2005); Barnett and Dragomir (2006); Pachpatte (2007); Liu (2009); Sarıkaya (2009); Alomari *et al.* (2010); Alomari (2011); Yıldız (2011) ve Sarıkaya (2012) çalışmalarında bulunabilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, araştırmada elde edilen bazı bulgulara yer verilecektir.

İlk olarak literatürde mevcut olan m –konveks fonksiyon, ikinci anlamda s –konveks fonksiyon, h –konveks fonksiyon, (α, m) –konveks fonksiyon, r –konveks fonksiyon, Godunova-Levin fonksiyon ve P –fonksiyon kavramları ile baskın konveks fonksiyon kavramından faydalanılarak yeni fonksiyon sınıfları tanımlanmış, bu fonksiyon sınıflarına örnekler verilmiş ve daha sonra bu fonksiyon sınıfları için yeni Hermite-Hadamard tipli teoremler elde edilmiştir. Daha sonra bazı lemmalar kullanılarak konveks, ikinci anlamda s –konveks ve m –konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli ve Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

4.1. (g, m) –Baskın Konveks Fonksiyon

Tanım 4.1.1. $g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ m –konveks fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in [0, b], \lambda \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ için $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$|\lambda f(x) + m(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y)| \quad (4.1)$$

$$\leq \lambda g(x) + m(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (g, m) –baskın konveks fonksiyon denir.

Aşağıdaki öncüller (g, m) –baskın konveks fonksiyonlar için doğrudur.

Lemma 4.1.1. $g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ m –konveks fonksiyon ve $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) f fonksiyonu $[0, b]$ üzerinde (g, m) – baskın konveks fonksiyondur.
- 2) $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları $[0, b]$ üzerinde m –konveks fonksiyonlardır.

3) $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şartlarını sağlayan $[0, b]$ üzerinde tanımlı h, k gibi m -konveks iki fonksiyon vardır.

İspat: $1 \Rightarrow 2$ (4.1) tanımından hareketle

$$\begin{aligned} g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) - \lambda g(x) - m(1 - \lambda)g(y) & \quad (4.2) \\ & \leq \lambda f(x) + m(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda g(x) + m(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

ifadesi yazılır. (4.2)'nin birinci kısmı yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} & g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) - \lambda g(x) - m(1 - \lambda)g(y) \\ & \leq \lambda f(x) + m(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y), \\ & \quad g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) + f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda[f(x) + g(x)] + m(1 - \lambda)[f(y) + g(y)], \\ & \quad (g + f)(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda(g + f)(x) + m(1 - \lambda)(g + f)(y) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $g + f$ fonksiyonunun m -konveks fonksiyon olduğu ispatlanmış olur. Benzer şekilde (4.2)'nin ikinci kısmı düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \lambda f(x) + m(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda g(x) + m(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y), \\ & \quad g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda[g(x) - f(x)] + m(1 - \lambda)[g(y) - f(y)], \\ & \quad (g - f)(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda(g - f)(x) + m(1 - \lambda)(g - f)(y) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $g - f$ fonksiyonunun m -konveks fonksiyon olduğu ispatlanmış olur.

$2 \Rightarrow 1$ $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları $[0, b]$ üzerinde m -konveks fonksiyonlar olduğundan

$$\begin{aligned} & (g + f)(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda(g + f)(x) + m(1 - \lambda)(g + f)(y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & (g - f)(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda(g - f)(x) + m(1 - \lambda)(g - f)(y) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler kullanılarak sırasıyla

$$\begin{aligned} & -[\lambda g(x) + m(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y)] \\ & \leq \lambda f(x) + m(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \lambda f(x) + m(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda g(x) + m(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak elde edilen iki eşitsizlik birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} & -[\lambda g(x) + m(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y)] \\ & \leq \lambda f(x) + m(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda g(x) + m(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{aligned} & |\lambda f(x) + m(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y)| \\ & \leq \lambda g(x) + m(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

$2 \Rightarrow 3$ f ve g , $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şeklinde iki fonksiyon olsun. Eğer f ve g fonksiyonları sırasıyla toplanır ve çıkarılırsa $g + f = h$ ve $g - f = k$ fonksiyonları elde edilir. Lemma 4.1.1'in 2) öncülünden hareketle $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonları $[0, b]$

üzerinde m -konveks fonksiyonlar olduğundan h ve k fonksiyonlarının da $[0, b]$ üzerinde m -konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

$3 \Rightarrow 2$ $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şeklinde yazılabilen $[0, b]$ üzerinde tanımlı h, k gibi iki m -konveks fonksiyon var ise bu ifadeler $g + f = h$ ve $g - f = k$ şeklinde yeniden düzenlenebilir. Lemma 4.1.1'in 3) öncülünden hareketle h ve k , m -konveks iki fonksiyon olduğundan $g + f$ ve $g - f$ de m -konveks iki fonksiyon olur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.1. $m \in (0, 1]$ için $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ m -konveks fonksiyon ve $0 \leq a < b$ için $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (g, m) -baskın konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{g(x) + mg\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\left| \frac{1}{2} \left[\frac{f(a) + mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2} + m \frac{f\left(\frac{b}{m}\right) + mf\left(\frac{b}{m^2}\right)}{2} \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx \right| \\ \leq \frac{1}{2} \left[\frac{g(a) + mg\left(\frac{a}{m}\right)}{2} + m \frac{g\left(\frac{b}{m}\right) + mg\left(\frac{b}{m^2}\right)}{2} \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{g(x) + mg\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx$$

dir.

1. İspat: f fonksiyonu (g, m) -baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.1.1'de $\lambda = \frac{1}{2}$ alındığında

$$\left| \frac{f(x) + mf(y)}{2} - f\left(\frac{x+my}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{g(x) + mg(y)}{2} - g\left(\frac{x + my}{2}\right)$$

elde edilir. Eğer $\forall x, y \in [0, \infty)$, $m \in (0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ için $x = ta + (1 - t)b$ ve $y = (1 - t)\frac{a}{m} + t\frac{b}{m}$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(ta + (1 - t)b) + mf\left(\frac{(1-t)a+tb}{m}\right)}{2} - f\left(\frac{a + b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{g(ta + (1 - t)b) + mg\left(\frac{(1-t)a+tb}{m}\right)}{2} - g\left(\frac{a + b}{2}\right) \end{aligned}$$

yazılır. Elde edilen ifadenin $[0, 1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alındığında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\int_0^1 f(ta + (1 - t)b) dt + m \int_0^1 f\left(\frac{(1-t)a+tb}{m}\right) dt}{2} - f\left(\frac{a + b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\int_0^1 g(ta + (1 - t)b) dt + m \int_0^1 g\left(\frac{(1-t)a+tb}{m}\right) dt}{2} - g\left(\frac{a + b}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli hesaplamalar yapıldığında teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Teoremin ikinci kısmının ispatlanması için f 'nin, (g, m) – baskın konveks fonksiyon olduğu kullanılarak Tanım 4.1.1'den

$$\begin{aligned} & |tf(x) + m(1 - t)f(y) - f(tx + m(1 - t)y)| \\ & \leq tg(x) + m(1 - t)g(y) - g(tx + m(1 - t)y) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte $x = a$ ve $y = \frac{b}{m}$ olacak şekilde $x, y \in [0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} & \left| tf(a) + m(1 - t)f\left(\frac{b}{m}\right) - f\left(ta + m(1 - t)\frac{b}{m}\right) \right| \tag{4.3} \\ & \leq tg(a) + m(1 - t)g\left(\frac{b}{m}\right) - g\left(ta + m(1 - t)\frac{b}{m}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği ve $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m^2}$ olacak şekilde $x, y \in [0, \infty)$ için elde edilen eşitsizlik m ile çarpıldığında

$$\begin{aligned}
& \left| tmf\left(\frac{a}{m}\right) + m^2(1-t)f\left(\frac{b}{m^2}\right) - mf\left(t\frac{a}{m} + (1-t)\frac{b}{m}\right) \right| \\
& \leq tmg\left(\frac{a}{m}\right) + m^2(1-t)g\left(\frac{b}{m^2}\right) - mg\left(t\frac{a}{m} + (1-t)\frac{b}{m}\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitsizliği yazılır. (4.3) ve (4.4) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıp üçgen eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \left| t \left[f(a) + mf\left(\frac{a}{m}\right) \right] + m(1-t) \left[f\left(\frac{b}{m}\right) + mf\left(\frac{b}{m^2}\right) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[f\left(ta + m(1-t)\frac{b}{m}\right) + mf\left(t\frac{a}{m} + (1-t)\frac{b}{m}\right) \right] \right| \\
& \leq t \left[g(a) + mg\left(\frac{a}{m}\right) \right] + m(1-t) \left[g\left(\frac{b}{m}\right) + mg\left(\frac{b}{m^2}\right) \right] \\
& \quad - \left[g\left(ta + m(1-t)\frac{b}{m}\right) + mg\left(t\frac{a}{m} + (1-t)\frac{b}{m}\right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında teoremin ikinci kısmı ispatlanmış olur.

2. İspat: f fonksiyonu (g, m) – baskın konveks fonksiyon ve g fonksiyonu m –konveks fonksiyon olduğundan Lemma 4.1.1'in 2) öncülü yardımıyla $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonlarının m –konveks fonksiyon olduğu sonucuna varılır. Bu takdirde m –konveks fonksiyonlar için geçerli olan Teorem 3.1.6 eşitsizliği, $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
(g + f)\left(\frac{a+b}{2}\right) & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{(g+f)(x) + m(g+f)\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx \\
& \leq \frac{1}{2} \left[\frac{(g+f)(a) + m(g+f)\left(\frac{a}{m}\right)}{2} + m \frac{(g+f)\left(\frac{b}{m}\right) + m(g+f)\left(\frac{b}{m^2}\right)}{2} \right]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ve

$$(g - f)\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{(g-f)(x) + m(g-f)\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx \tag{4.6}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\frac{(g-f)(a) + m(g-f)\left(\frac{a}{m}\right)}{2} + m \frac{(g-f)\left(\frac{b}{m}\right) + m(g-f)\left(\frac{b}{m^2}\right)}{2} \right]$$

şeklinde uygulanır. (4.5) ve (4.6) eşitsizliklerinin birinci kısmı kullanılarak

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{g(x) + mg\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{g(x) + mg\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılır. Elde edilen eşitsizlikler birlikte düşünüldüğünde Teorem 4.1.1'in birinci kısmı ispatlanmış olur.

Benzer şekilde (4.5) ve (4.6) eşitsizliklerinin ikinci kısmı kullanılarak

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{1}{2} \left[\frac{g(a) + mg\left(\frac{a}{m}\right)}{2} + m \frac{g\left(\frac{b}{m}\right) + mg\left(\frac{b}{m^2}\right)}{2} \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{g(x) + mg\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{f(a) + mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2} + m \frac{f\left(\frac{b}{m}\right) + mf\left(\frac{b}{m^2}\right)}{2} \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx \end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{2} \left[\frac{f(a) + mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2} + m \frac{f\left(\frac{b}{m}\right) + mf\left(\frac{b}{m^2}\right)}{2} \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\frac{g(a) + mg\left(\frac{a}{m}\right)}{2} + m \frac{g\left(\frac{b}{m}\right) + mg\left(\frac{b}{m^2}\right)}{2} \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{g(x) + mg\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx$$

eşitsizlikleri elde edilir. Elde edilen bu iki eşitsizlik birlikte düşünüldüğünde Teorem 4.1.1'in ikinci kısmı ispatlanmış olur.

Sonuç 4.1.1. Teorem 4.1.1'de $m = 1$ seçildiğinde Teorem 3.1.7 elde edilir.

Örnek 4.1.1. $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2$ şeklinde bir fonksiyon ve $g(x) = bx^2$ şeklinde bir m –konveks fonksiyon olsun. $b > 0$, $|a| \leq b$ şartları altında f fonksiyonu (g, m) – baskın konveks fonksiyondur.

4.2. (g, s) – Baskın Konveks Fonksiyon

Tanım 4.2.1. $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci anlamda s –konveks fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in [0, 1]$ ve $s \in (0, 1]$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} |\lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)| \\ \leq \lambda^s g(x) + (1 - \lambda)^s g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned} \quad (4.7)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (g, s) – baskın konveks fonksiyon denir.

Aşağıdaki öncüller (g, s) – baskın konveks fonksiyonlar için doğrudur.

Lemma 4.2.1. $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci anlamda s –konveks fonksiyon ve $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) f fonksiyonu \mathbb{R}_+ üzerinde (g, s) – baskın konveks fonksiyondur.
- 2) $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları \mathbb{R}_+ üzerinde ikinci anlamda s –konveks fonksiyonlardır.
- 3) $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şartlarını sağlayan \mathbb{R}_+ üzerinde tanımlı h, k gibi ikinci anlamda s –konveks iki fonksiyon vardır.

İspat: $1 \Rightarrow 2$ (4.7) tanımından hareketle

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda^s g(x) - (1 - \lambda)^s g(y) & \quad (4.8) \\ & \leq \lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^s g(x) + (1 - \lambda)^s g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. (4.8)'in birinci kısmı yeniden düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} & g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda^s g(x) - (1 - \lambda)^s g(y) \\ & \leq \lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y), \\ & \quad g(\lambda x + (1 - \lambda)y) + f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^s [f(x) + g(x)] + (1 - \lambda)^s [f(y) + g(y)], \\ & \quad (g + f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^s (g + f)(x) + (1 - \lambda)^s (g + f)(y) \end{aligned}$$

yazılır ve buradan $g + f$ fonksiyonunun ikinci anlamda s -konveks fonksiyon olduğu sonucuna varılır. Benzer şekilde (4.8)'in ikinci kısmı düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} & \lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^s g(x) + (1 - \lambda)^s g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y), \\ & \quad g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^s [g(x) - f(x)] + (1 - \lambda)^s [g(x) - f(y)], \\ & \quad (g - f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^s (g - f)(x) + (1 - \lambda)^s (g - f)(y) \end{aligned}$$

yazılır ve buradan $g - f$ fonksiyonunun ikinci anlamda s -konveks fonksiyon olduğu sonucuna varılır.

$2 \Rightarrow 1$ $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları \mathbb{R}_+ üzerinde ikinci anlamda s -konveks fonksiyonlar olduğundan

$$\begin{aligned} & (g + f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^s (g + f)(x) + (1 - \lambda)^s (g + f)(y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & (g - f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^s(g - f)(x) + (1 - \lambda)^s(g - f)(y) \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlikler kullanılarak sırasıyla

$$\begin{aligned} & -[\lambda^s g(x) + (1 - \lambda)^s g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y)] \\ & \leq \lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^s g(x) + (1 - \lambda)^s g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak elde edilen iki eşitsizlik birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} & -[\lambda^s g(x) + (1 - \lambda)^s g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y)] \\ & \leq \lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^s g(x) + (1 - \lambda)^s g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{aligned} & |\lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)| \\ & \leq \lambda^s g(x) + (1 - \lambda)^s g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

$2 \Rightarrow 3$ f ve g , $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şeklinde iki fonksiyon olsun. Eğer f ve g fonksiyonları sırasıyla toplanıp çıkarılırsa $g + f = h$ ve $g - f = k$ fonksiyonları elde edilir. Lemma 4.2.1'in 2) öncülünden hareketle $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonları \mathbb{R}_+ üzerinde ikinci anlamda s -konveks fonksiyonlar olduğundan h ve k fonksiyonlarının da \mathbb{R}_+ üzerinde ikinci anlamda s -konveks fonksiyonlar olduğu görülür.

$3 \Rightarrow 2$ $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şeklinde yazılabilen \mathbb{R}_+ üzerinde tanımlı h, k gibi ikinci anlamda s -konveks iki fonksiyon var ise buradan bu iki fonksiyon $g + f =$

h ve $g - f = k$ şeklinde yeniden düzenlenebilir. Lemma 4.2.1'in 3) öncülünden hareketle h ve k ikinci anlamda s -konveks iki fonksiyon olduğundan $g + f$ ve $g - f$ de ikinci anlamda s -konveks iki fonksiyon olur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.1. $s \in (0,1]$ için $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci anlamda s -konveks fonksiyon ve $a, b \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (g, s) -baskın konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx - 2^{s-1} g\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{s+1} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{g(a) + g(b)}{s+1} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

dir.

1. İspat: f fonksiyonu (g, s) -baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.2.1'de $\lambda = \frac{1}{2}$ alındığında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x) + f(y)}{2^s} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{g(x) + g(y)}{2^s} - g\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için $x = ta + (1-t)b$ ve $y = (1-t)a + tb$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)}{2^s} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{g(ta + (1-t)b) + g((1-t)a + tb)}{2^s} - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra elde edilen eşitsizliğin $[0,1]$ aralığı üzerinden t 'ye göre integrali alındığında teoremin birinci kısmı ispat edilmiş olur.

Teoremin ikinci kısmının ispatlanması için f fonksiyonunun (g, s) – baskın konveks fonksiyon olduğu gerçeğinden yola çıkılarak

$$\begin{aligned} & |t^s f(a) + (1-t)^s f(b) - f(ta + (1-t)b)| \\ & \leq t^s g(a) + (1-t)^s g(b) - g(ta + (1-t)b) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Daha sonra bu eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integre edilirse Teorem 4.2.1'in ikinci kısmı kolayca elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

2. İspat: f fonksiyonu (g, s) – baskın konveks fonksiyon ve g fonksiyonu ikinci anlamda s –konveks fonksiyon olduğundan Lemma 4.2.1'in 2) öncülü yardımıyla $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonlarının ikinci anlamda s –konveks fonksiyon olduğu sonucuna varılır. Bu takdirde s –konveks fonksiyonlar için geçerli olan Teorem 3.1.5'teki eşitsizlik $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} 2^{s-1}(g + f)\left(\frac{a+b}{2}\right) & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (g + f)(x) dx & (4.9) \\ & \leq \frac{(g + f)(a) + (g + f)(b)}{s + 1} \end{aligned}$$

ve

$$2^{s-1}(g - f)\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (g - f)(x) dx \quad (4.10)$$

$$\leq \frac{(g-f)(a) + (g-f)(b)}{s+1}$$

şeklinde uygulanır. (4.9) ve (4.10) eşitsizliklerinin birinci kısmı kullanılarak

$$-\left[\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx - 2^{s-1} g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx - 2^{s-1} g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizlikleri yazılır. Elde edilen eşitsizlikler birlikte düşünüldüğünde teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Benzer şekilde (4.9) ve (4.10) eşitsizliklerinin ikinci kısmı kullanılarak

$$-\left[\frac{g(a) + g(b)}{s+1} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right] \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ve

$$\frac{f(a) + f(b)}{s+1} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{g(a) + g(b)}{s+1} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu iki eşitsizlik birlikte düşünüldüğünde teoremin ikinci kısmı ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2.1. Teorem 4.2.1'de $s = 1$ alındığında Teorem 3.1.7 elde edilir.

Örnek 4.2.1. $f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon, $g(x) = x^l$ şeklinde tanımlı ikinci anlamda s -konveks fonksiyon ve $k, l, s \in (0,1]$, $k \leq l$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu (g, s) -baskın konveks fonksiyondur.

Örnek 4.2.1. $f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^k}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon, $g(x) = x^l$ şeklinde tanımlı ikinci anlamda s –konveks fonksiyon ve $k, l, s \in (0,1]$, $k \leq l$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu (g, s) –baskın konveks fonksiyondur.

4.3. (g, h) – Baskın Konveks Fonksiyon

Tanım 4.3.1. $h \neq 0, h: J \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1]$ olacak şekilde $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ h –konveks fonksiyon olsun. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} |h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)| \\ \leq h(\lambda)g(x) + h(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned} \quad (4.11)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (g, h) – baskın konveks fonksiyon denir.

Aşağıdaki öncüller (g, h) – baskın konveks fonksiyonlar için doğrudur.

Lemma 4.3.1. $h \neq 0, h: J \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1]$ olacak şekilde $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ h –konveks fonksiyon ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) f fonksiyonu I üzerinde (g, h) – baskın konveks fonksiyondur.
- 2) $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları I üzerinde h –konveks fonksiyonlardır.
- 3) $f = \frac{1}{2}(l - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(l + k)$ şartlarını sağlayan I üzerinde tanımlı l, k gibi h –konveks iki fonksiyon vardır.

İspat: $1 \Rightarrow 2$ (4.11) tanımından hareketle

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - h(\lambda)g(x) - h(1 - \lambda)g(y) \\ \leq h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ \leq h(\lambda)g(x) + h(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned} \quad (4.12)$$

ifadesi yazılabilir. (4.12)'nin birinci kısmı yeniden düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
& g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - h(\lambda)g(x) - h(1 - \lambda)g(y) \\
& \leq h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y), \\
& g(\lambda x + (1 - \lambda)y) + f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
& \leq h(\lambda)[f(x) + g(x)] + h(1 - \lambda)[f(y) + g(y)], \\
& (g + f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
& \leq h(\lambda)(g + f)(x) + h(1 - \lambda)(g + f)(y)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve buradan $g + f$ fonksiyonunun h -konveks fonksiyon olduğu sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde (4.12)'nin ikinci kısmı düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
& h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
& \leq h(\lambda)g(x) + h(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y), \\
& g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
& \leq h(\lambda)[g(x) - f(x)] + h(1 - \lambda)[g(y) - f(y)], \\
& (g - f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
& \leq h(\lambda)(g - f)(x) + h(1 - \lambda)(g - f)(y)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve buradan $g - f$ fonksiyonunun h -konveks fonksiyon olduğu sonucuna ulaşılır.

$2 \Rightarrow 1$ $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları I üzerinde h -konveks fonksiyonlar olduğundan

$$\begin{aligned}
& (g + f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
& \leq h(\lambda)(g + f)(x) + h(1 - \lambda)(g + f)(y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& (g - f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
& \leq h(\lambda)(g - f)(x) + h(1 - \lambda)(g - f)(y)
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlikler kullanılarak sırasıyla

$$\begin{aligned}
& -[h(\lambda)g(x) + h(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y)] \\
& \leq h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq h(\lambda)g(x) + h(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak elde edilen iki eşitsizlik birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} & -[h(\lambda)g(x) + h(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y)] \\ & \leq h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq h(\lambda)g(x) + h(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{aligned} & |h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)| \\ & \leq h(\lambda)g(x) + h(1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

$2 \Rightarrow 3$ f ve g , $f = \frac{1}{2}(l - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(l + k)$ şeklinde iki fonksiyon olsun. Eğer f ve g fonksiyonları sırasıyla toplanıp çıkarılırsa $g + f = l$ ve $g - f = k$ fonksiyonları elde edilir. Lemma 4.3.1'in 2) öncülünden hareketle $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonları I üzerinde h -konveks fonksiyonlar olduğundan l ve k fonksiyonlarının da I üzerinde h -konveks fonksiyonlar olduğu görülür.

$3 \Rightarrow 2$ $f = \frac{1}{2}(l - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(l + k)$ şeklinde yazılabilen I üzerinde tanımlı l, k gibi h -konveks iki fonksiyon var ise buradan bu iki fonksiyon $g + f = l$ ve $g - f = k$ şeklinde yeniden düzenlenebilir. Lemma 4.3.1'in 3) öncülünden hareketle l ve k h -konveks iki fonksiyon olduğundan $g + f$ ve $g - f$ de h -konveks iki fonksiyon olur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.1. $h \neq 0, h: J \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0, 1]$ olacak şekilde $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ h -konveks fonksiyon ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (g, h) -baskın konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx - \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\left| [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\leq [g(a) + g(b)] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$$

dir.

1. İspat: f fonksiyonu, (g, h) – baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.3.1’de $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = ta + (1-t)b$ ve $y = (1-t)a + tb$ alındığında

$$\left| h\left(\frac{1}{2}\right) [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right) [g(ta + (1-t)b) + g((1-t)a + tb)] - g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

yazılır. Daha sonra elde edilen eşitsizliğin $[0,1]$ aralığı üzerinden t 'ye göre integrali alındığında

$$\left| h\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 [g(ta + (1-t)b) + g((1-t)a + tb)] dt - g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen eşitsizlikte gerekli hesaplamalar yapıldığında teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Teoremin ikinci kısmının ispatlanması için Tanım 4.3.1’de $x = a$ ve $y = b$ seçilirse

$$\begin{aligned} & |h(t)f(a) + h(1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b)| \\ & \leq h(t)g(a) + h(1-t)g(b) - g(ta + (1-t)b) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Daha sonra bu eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integre edilip düzenlendiğinde Teorem 4.3.1’in ikinci kısmı kolayca elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

2. İspat: f fonksiyonu (g, h) – baskın konveks fonksiyon ve g fonksiyonu h –konveks fonksiyon olduğundan Lemma 4.3.1’in 2) öncülü yardımıyla $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonlarının h –konveks fonksiyon olduğu sonucuna varılır. Bu takdirde h –konveks fonksiyonlar için geçerli olan Teorem 3.1.8’deki eşitsizlik $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}(g + f)\left(\frac{a + b}{2}\right) & \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b (g + f)(x) dx \\ & \leq [(g + f)(a) + (g + f)(b)] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (4.13)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}(g - f)\left(\frac{a + b}{2}\right) & \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b (g - f)(x) dx \\ & \leq [(g - f)(a) + (g - f)(b)] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklinde uygulanır. (4.13) ve (4.14) eşitsizliklerinin birinci kısmı kullanılarak

$$\left[\frac{1}{b - a} \int_a^b g(x) dx - \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} g\left(\frac{a + b}{2}\right) \right] \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

ve

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx - \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizlikleri yazılır. Elde edilen eşitsizlikler birlikte düşünüldüğünde teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Benzer şekilde (4.13) ve (4.14) eşitsizliklerinin ikinci kısmı kullanılarak

$$\begin{aligned} & - \left[[g(a) + g(b)] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right] \\ & \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ & \leq [g(a) + g(b)] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu iki eşitsizlik birlikte düşünüldüğünde teoremin ikinci kısmı ispatlanmış olur.

4.4. $(g, (\alpha, m))$ – Baskın Konveks Fonksiyon

Tanım 4.4.1. $g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (α, m) –konveks fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in [0, b]$, $\lambda \in [0, 1]$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ için $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} & |\lambda^\alpha f(x) + m(1 - \lambda^\alpha) f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y)| \\ & \leq \lambda^\alpha g(x) + m(1 - \lambda^\alpha) g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \end{aligned} \quad (4.15)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(g - (\alpha, m))$ –baskın konveks fonksiyon denir.

Aşağıdaki öncüller $(g - (\alpha, m))$ –baskın konveks fonksiyonlar için doğrudur.

Lemma 4.4.1. $g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (α, m) –konveks fonksiyon ve $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) f fonksiyonu $[0, b]$ üzerinde $(g - (\alpha, m))$ – baskın konveks fonksiyondur.
- 2) $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları $[0, b]$ üzerinde (α, m) –konveks fonksiyonlardır.
- 3) $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şartlarını sağlayan $[0, b]$ üzerinde tanımlı h, k gibi iki (α, m) –konveks fonksiyon vardır.

İspat: $1 \Rightarrow 2$ (4.15) tanımından hareketle

$$\begin{aligned} g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) - \lambda^\alpha g(x) - m(1 - \lambda^\alpha)g(y) & \quad (4.16) \\ & \leq \lambda^\alpha f(x) + m(1 - \lambda^\alpha)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^\alpha g(x) + m(1 - \lambda^\alpha)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

ifadesi yazılır. (4.16)'nın birinci kısmı yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} & g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) - \lambda^\alpha g(x) - m(1 - \lambda^\alpha)g(y) \\ & \leq \lambda^\alpha f(x) + m(1 - \lambda^\alpha)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y), \\ & \quad g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) + f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^\alpha [f(x) + g(x)] + m(1 - \lambda^\alpha)[f(y) + g(y)], \\ & \quad (g + f)(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^\alpha (g + f)(x) + m(1 - \lambda^\alpha)(g + f)(y) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $g + f$ fonksiyonunun (α, m) –konveks fonksiyon olduğu ispatlanmış olur. Benzer şekilde (4.16)'nın ikinci kısmı düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \lambda^\alpha f(x) + m(1 - \lambda^\alpha)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^\alpha g(x) + m(1 - \lambda^\alpha)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y), \\ & \quad g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^\alpha [g(x) - f(x)] + m(1 - \lambda^\alpha)[g(y) - f(y)], \\ & \quad (g - f)(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^\alpha (g - f)(x) + m(1 - \lambda^\alpha)(g - f)(y) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $g - f$ fonksiyonunun (α, m) -konveks fonksiyon olduğu ispatlanmış olur.

$2 \Rightarrow 1$ $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları $[0, b]$ üzerinde (α, m) -konveks fonksiyonlar olduğundan

$$\begin{aligned} & (g + f)(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^\alpha (g + f)(x) + m(1 - \lambda^\alpha)(g + f)(y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & (g - f)(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^\alpha (g - f)(x) + m(1 - \lambda^\alpha)(g - f)(y) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler kullanılarak sırasıyla

$$\begin{aligned} & -[\lambda^\alpha g(x) + m(1 - \lambda^\alpha)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y)] \\ & \leq \lambda^\alpha f(x) + m(1 - \lambda^\alpha)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \lambda^\alpha f(x) + m(1 - \lambda^\alpha)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^\alpha g(x) + m(1 - \lambda^\alpha)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak elde edilen iki eşitsizlik birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} & -[\lambda^\alpha g(x) + m(1 - \lambda^\alpha)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y)] \\ & \leq \lambda^\alpha f(x) + m(1 - \lambda^\alpha)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \\ & \leq \lambda^\alpha g(x) + m(1 - \lambda^\alpha)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{aligned} & |\lambda^\alpha f(x) + m(1 - \lambda^\alpha)f(y) - f(\lambda x + m(1 - \lambda)y)| \\ & \leq \lambda^\alpha g(x) + m(1 - \lambda^\alpha)g(y) - g(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

$2 \Rightarrow 3$ f ve g , $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şeklinde iki fonksiyon olsun. Eğer f ve g fonksiyonları sırasıyla toplanır ve çıkarılırsa $g + f = h$ ve $g - f = k$ fonksiyonları elde edilir. Lemma 4.4.1'in 2) öncülünden hareketle $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonları $[0, b]$ üzerinde (α, m) –konveks fonksiyonlar olduğundan h ve k fonksiyonlarının da $[0, b]$ üzerinde (α, m) –konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

$3 \Rightarrow 2$ $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şeklinde yazılabilen $[0, b]$ üzerinde tanımlı h, k gibi iki (α, m) –konveks fonksiyon var ise bu ifadeler $g + f = h$ ve $g - f = k$ şeklinde yeniden düzenlenebilir. Lemma 4.4.1' in 3) öncülünden hareketle h ve k , (α, m) –konveks iki fonksiyon olduğundan $g + f$ ve $g - f$ de (α, m) –konveks iki fonksiyon olur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.1. $(\alpha, m) \in [0, 1] \times (0, 1]$ için $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (α, m) –konveks fonksiyon ve $0 \leq a < b < \infty$ için $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $(g - (\alpha, m))$ –baskın konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L_1 \left[\frac{a}{m}, \frac{b}{m} \right]$ ise

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + m(2^\alpha - 1)f\left(\frac{x}{m}\right)}{2^\alpha} dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{g(x) + m(2^\alpha - 1)g\left(\frac{x}{m}\right)}{2^\alpha} dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\left| \frac{1}{2} \left[\frac{f(a) + mf\left(\frac{a}{m}\right)}{\alpha + 1} + \alpha m \frac{f\left(\frac{b}{m}\right) + mf\left(\frac{b}{m^2}\right)}{\alpha + 1} \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\frac{g(a) + mg\left(\frac{a}{m}\right)}{\alpha + 1} + \alpha m \frac{g\left(\frac{b}{m}\right) + mg\left(\frac{b}{m^2}\right)}{\alpha + 1} \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{g(x) + mg\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx$$

dir.

İspat: f fonksiyonu $(g - (\alpha, m))$ – baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.4.1’de $\lambda = \frac{1}{2}$ alındığında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x) + m(2^\alpha - 1)f(y)}{2^\alpha} - f\left(\frac{x + my}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{g(x) + m(2^\alpha - 1)g(y)}{2^\alpha} - g\left(\frac{x + my}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $\forall x, y \in [0, \infty)$, $(\alpha, m) \in [0, 1] \times (0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ için $x = ta + (1 - t)b$ ve $y = (1 - t)\frac{a}{m} + t\frac{b}{m}$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(ta + (1 - t)b) + m(2^\alpha - 1)f\left(\frac{(1-t)a+tb}{m}\right)}{2^\alpha} - f\left(\frac{a + b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{g(ta + (1 - t)b) + m(2^\alpha - 1)g\left(\frac{(1-t)a+tb}{m}\right)}{2^\alpha} - g\left(\frac{a + b}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen ifadenin $[0, 1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alındığında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\int_0^1 f(ta + (1 - t)b) dt + m(2^\alpha - 1) \int_0^1 f\left(\frac{(1-t)a+tb}{m}\right) dt}{2^\alpha} - f\left(\frac{a + b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\int_0^1 g(ta + (1 - t)b) dt + m(2^\alpha - 1) \int_0^1 g\left(\frac{(1-t)a+tb}{m}\right) dt}{2^\alpha} - g\left(\frac{a + b}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır ve gerekli hesaplamalar yapıldığında teoremin birinci kısmı elde edilmiş olur.

Teoremin ikinci kısmının elde edilmesi için f 'nin $(g - (\alpha, m))$ – baskın konveks fonksiyon olduğu kullanılarak Tanım 4.4.1’den $\forall x, y > 0$ için

$$\begin{aligned} & |t^\alpha f(x) + m(1 - t^\alpha)f(y) - f(tx + m(1 - t)y)| \\ & \leq t^\alpha g(x) + m(1 - t^\alpha)g(y) - g(tx + m(1 - t)y) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte $x = a$ ve $y = \frac{b}{m}$ alındığında

$$\left| t^\alpha f(a) + m(1 - t^\alpha)f\left(\frac{b}{m}\right) - f\left(ta + m(1 - t)\frac{b}{m}\right) \right| \quad (4.17)$$

$$\leq t^\alpha g(a) + m(1 - t^\alpha)g\left(\frac{b}{m}\right) - g\left(ta + m(1 - t)\frac{b}{m}\right)$$

eşitsizliği; $x = \frac{a}{m}$ ve $y = \frac{b}{m^2}$ alınıp elde edilen eşitsizlik m ile çarpıldığında

$$\left| mt^\alpha f\left(\frac{a}{m}\right) + m^2(1 - t^\alpha)f\left(\frac{b}{m^2}\right) - mf\left(t\frac{a}{m} + (1 - t)\frac{b}{m}\right) \right| \quad (4.18)$$

$$\leq mt^\alpha g\left(\frac{a}{m}\right) + m^2(1 - t^\alpha)g\left(\frac{b}{m^2}\right) - mg\left(t\frac{a}{m} + (1 - t)\frac{b}{m}\right)$$

eşitsizliği yazılır. (4.17) ve (4.18) eşitsizlikleri taraf tarafa mutlak değer özelliği kullanılarak toplandığında

$$\begin{aligned} & \left| t^\alpha \left[f(a) + mf\left(\frac{a}{m}\right) \right] + m(1 - t^\alpha) \left[f\left(\frac{b}{m}\right) + mf\left(\frac{b}{m^2}\right) \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[f\left(ta + m(1 - t)\frac{b}{m}\right) + mf\left(t\frac{a}{m} + (1 - t)\frac{b}{m}\right) \right] \right| \\ & \leq t^\alpha \left[g(a) + mg\left(\frac{a}{m}\right) \right] + m(1 - t^\alpha) \left[g\left(\frac{b}{m}\right) + mg\left(\frac{b}{m^2}\right) \right] \\ & \quad - \left[g\left(ta + m(1 - t)\frac{b}{m}\right) + mg\left(t\frac{a}{m} + (1 - t)\frac{b}{m}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alınıp gerekli hesaplamalar yapıldığında teoremin ikinci kısmı ispatlanmış olur.

Teorem 4.4.2. $(\alpha, m) \in [0,1] \times (0,1]$ için $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (α, m) –konveks fonksiyon ve $0 \leq a < b < \infty$ için $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $(g - (\alpha, m))$ – baskın konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \left[\frac{f(a) + f(b) + \alpha m \left[f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) \right]}{\alpha + 1} \right] - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{g(a) + g(b) + \alpha m \left[g\left(\frac{a}{m}\right) + g\left(\frac{b}{m}\right) \right]}{\alpha + 1} \right] - \frac{1}{b - a} \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

dir.

İspat: $f, (g - (\alpha, m))$ – baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.4.1’de $\lambda = t, x = a$ ve $y = \frac{b}{m}$ için

$$\begin{aligned} & \left| t^\alpha f(a) + m(1 - t^\alpha) f\left(\frac{b}{m}\right) - f\left(ta + m(1 - t)\frac{b}{m}\right) \right| & (4.19) \\ & \leq t^\alpha t g(a) + m(1 - t^\alpha) g\left(\frac{b}{m}\right) - g\left(ta + m(1 - t)\frac{b}{m}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği ve $\lambda = t, x = b$ ve $y = \frac{a}{m}$ için

$$\begin{aligned} & \left| t^\alpha f(b) + m(1 - t^\alpha) f\left(\frac{a}{m}\right) - f\left(tb + m(1 - t)\frac{a}{m}\right) \right| & (4.20) \\ & \leq t^\alpha g(b) + m(1 - t^\alpha) g\left(\frac{a}{m}\right) - g\left(tb + m(1 - t)\frac{a}{m}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. (4.19) ve (4.20) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıp üçgen eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \left| t^\alpha [f(a) + f(b)] + m(1 - t^\alpha) \left[f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) \right] \right. \\ & \quad \left. - f\left(ta + m(1 - t)\frac{b}{m}\right) - f\left(tb + m(1 - t)\frac{a}{m}\right) \right| \\ & \leq t^\alpha [g(a) + g(b)] + m(1 - t^\alpha) \left[g\left(\frac{a}{m}\right) + g\left(\frac{b}{m}\right) \right] \\ & \quad - g\left(ta + m(1 - t)\frac{b}{m}\right) - g\left(tb + (1 - t)\frac{a}{m}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alınıp eşitsizliğin her iki tarafı 2 ile bölündüğünde teoremin ifadesine ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

4.5. (g, r) – Baskın Konveks Fonksiyon

Tanım 4.5.1. $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif r –konveks fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in [a, b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} & |M_r(f(x), f(y); \lambda) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)| & (4.21) \\ & \leq M_r(g(x), g(y); \lambda) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (g, r) –baskın konveks fonksiyon denir.

Teorem 4.5.1. $0 \leq a < b, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif r –konveks fonksiyon ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif (g, r) – baskın konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\left| \mathcal{L}_r(f(a), f(b)) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \mathcal{L}_r(g(a), g(b)) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$$

dir.

İspat: 1. Durum ($r = 0$ ve $f(a) \neq f(b)$): f fonksiyonu r – baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.5.1’de $x = a$ ve $y = b$ seçilip $M_r(x, y; \lambda)$ ortalaması kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \left| f^\lambda(a) f^{1-\lambda}(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b) \right| \\ & \leq g^\lambda(a) g^{1-\lambda}(b) - g(\lambda a + (1-\lambda)b) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen ifadenin $[0,1]$ üzerinden λ 'ya göre integrali alındığında

$$\begin{aligned} & \left| f(b) \int_0^1 \left[\frac{f(a)}{f(b)} \right]^\lambda d\lambda - \int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b) d\lambda \right| \\ & \leq g(b) \int_0^1 \left[\frac{g(a)}{g(b)} \right]^\lambda d\lambda - \int_0^1 g(\lambda a + (1-\lambda)b) d\lambda \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(b) - f(a)}{\ln f(b) - \ln f(a)} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{g(b) - g(a)}{\ln g(b) - \ln g(a)} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir ve burada $\mathcal{L}_r(x, y)$ ortalaması göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapıldığında 1. Durum için ispat tamamlanmış olur.

2. Durum ($r = 0$ ve $f(a) = f(b)$): f fonksiyonu r – baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.5.1’de $x = a$ ve $y = b$ seçilip $M_r(x, y; \lambda)$ ortalaması kullanıldığında

$$\begin{aligned} & |f(a) - f(\lambda a + (1 - \lambda)b)| \\ & \leq g(a) - g(\lambda a + (1 - \lambda)b) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen ifadenin $[0,1]$ üzerinden λ ’ya göre integrali alınıp $\mathcal{L}_r(x, y)$ ortalaması göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapıldığında 2. Durum için ispat tamamlanmış olur.

3. Durum ($r \neq 0, -1$ ve $f(a) \neq f(b)$): f fonksiyonu r – baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.5.1’de $x = a$ ve $y = b$ seçilip $M_r(x, y; \lambda)$ ortalaması kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \left| (\lambda f^r(a) + (1 - \lambda)f^r(b))^{\frac{1}{r}} - f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \right| \\ & \leq (\lambda g^r(a) + (1 - \lambda)g^r(b))^{\frac{1}{r}} - g(\lambda a + (1 - \lambda)b) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden λ ’ya göre integrali alındığında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{r}{r+1} \frac{f^{r+1}(a) - f^{r+1}(b)}{f^r(a) - f^r(b)} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{r}{r+1} \frac{g^{r+1}(a) - g^{r+1}(b)}{g^r(a) - g^r(b)} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir ve burada $\mathcal{L}_r(x, y)$ ortalaması göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapıldığında 3. Durum için ispat tamamlanmış olur.

4. Durum ($r \neq 0$ ve $f(a) = f(b)$): f fonksiyonu r – baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.5.1’de $x = a$ ve $y = b$ seçilip $M_r(x, y; \lambda)$ ortalaması kullanıldığında

$$\left| (f^r(a))^{\frac{1}{r}} - f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \right|$$

$$\leq (g^r(a))^{\frac{1}{r}} - g(\lambda a + (1 - \lambda)b)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden λ 'ya göre integrali alınıp $\mathcal{L}_r(x, y)$ ortalaması göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapıldığında 4. Durum için ispat tamamlanmış olur.

5. Durum ($r = -1$ ve $f(a) \neq f(b)$): f fonksiyonu r – baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.5.1'de $x = a$ ve $y = b$ seçilip $M_r(x, y; \lambda)$ ortalaması kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \left| (\lambda f^{-1}(a) + (1 - \lambda)f^{-1}(b))^{-1} - f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \right| \\ & \leq (\lambda g^{-1}(a) + (1 - \lambda)g^{-1}(b))^{-1} - g(\lambda a + (1 - \lambda)b) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden λ 'ya göre integrali alındığında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a)f(b)}{f(b) - f(a)} \int_{\frac{1}{f(a)}}^{\frac{1}{f(b)}} \lambda^{-1} d\lambda - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{g(a)g(b)}{g(b) - g(a)} \int_{\frac{1}{g(a)}}^{\frac{1}{g(b)}} \lambda^{-1} d\lambda - \frac{1}{b - a} \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir ve burada $\mathcal{L}_r(x, y)$ ortalaması göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapıldığında 5. Durum için ispat tamamlanmış olur.

4.6. $(g, Q(I))$ – Baskın Konveks Fonksiyon

Tanım 4.6.1. Negatif olmayan g fonksiyonu $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $Q(I)$ –sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\left| \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1 - \lambda} - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \right| \quad (4.22)$$

$$\leq \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{g(y)}{1 - \lambda} - g(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(g, Q(I))$ –baskın konveks fonksiyon denir.

Aşağıdaki öncüller $(g, Q(I))$ –baskın konveks fonksiyonlar için doğrudur.

Lemma 4.6.1. Negatif olmayan g fonksiyonu $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $Q(I)$ –sınıfına ait bir fonksiyon ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) f fonksiyonu I üzerinde $(g, Q(I))$ – baskın konveks fonksiyondur.
- 2) $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları I üzerinde $Q(I)$ – sınıfına ait fonksiyonlardır.
- 3) $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şartlarını sağlayan I üzerinde tanımlı h, k gibi $Q(I)$ – sınıfına ait iki fonksiyon vardır.

İspat: $1 \Leftrightarrow 2$ (4.22) tanımından hareketle

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \frac{g(x)}{\lambda} - \frac{g(y)}{1 - \lambda} & \quad (4.23) \\ & \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1 - \lambda} - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{g(y)}{1 - \lambda} - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

ifadesi yazılır. (4.23)'ün birinci kısmı yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} & g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \frac{g(x)}{\lambda} - \frac{g(y)}{1 - \lambda} \\ & \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1 - \lambda} - f(\lambda x + (1 - \lambda)y), \\ & g(\lambda x + (1 - \lambda)y) + f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \frac{[f(x) + g(x)]}{\lambda} + \frac{[f(y) + g(y)]}{1 - \lambda}, \\ & \quad (g + f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq \frac{(g + f)(x)}{\lambda} + \frac{(g + f)(y)}{1 - \lambda} \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $g + f$ fonksiyonunun $Q(I)$ – sınıfına ait fonksiyon olduğu ispatlanmış olur. Benzer şekilde (4.23)'ün ikinci kısmı düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda} - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
& \leq \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{g(y)}{1-\lambda} - g(\lambda x + (1-\lambda)y), \\
& g(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
& \leq \frac{[g(x) - f(x)]}{\lambda} + \frac{[g(y) - f(y)]}{1-\lambda}, \\
& \quad (g - f)(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
& \leq \frac{(g - f)(x)}{\lambda} + \frac{(g - f)(y)}{1-\lambda}
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $g - f$ fonksiyonunun $Q(I)$ – sınıfına ait fonksiyon olduğu ispatlanmış olur.

2 \Leftrightarrow 3 f ve g , $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şeklinde iki fonksiyon olsun. Eğer f ve g fonksiyonları sırasıyla toplanır ve çıkarılırsa $g + f = h$ ve $g - f = k$ fonksiyonları elde edilir. Lemma 4.6.1'in 2) öncülünden hareketle $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonları I üzerinde $Q(I)$ – sınıfına ait fonksiyon olduğundan h ve k fonksiyonlarının da I üzerinde $Q(I)$ – sınıfına ait fonksiyon olduğu sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6.1. $a < b$, $\forall a, b \in I$ olmak üzere negatif olmayan g fonksiyonu $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $Q(I)$ – sınıfına ait bir fonksiyon ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($g, Q(I)$) – baskın konveks fonksiyon olsun. Eğer $f, g \in L_1[a, b]$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{4}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{4}{b-a} \int_a^b g(x) dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b p(x)f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b p(x)g(x) dx \end{aligned}$$

dir. Burada $p(x)$ ifadesi Teorem 3.1.2'de tanımlandığı gibidir.

İspat: f fonksiyonu $(g, Q(I))$ –baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.6.1'de $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$ ve $t \in [0,1]$ alındığında

$$\begin{aligned} & \left| 2[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq 2[g(ta + (1-t)b) + g((1-t)a + tb)] - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen ifadenin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alındığında teoremin birinci kısmı elde edilmiş olur.

Teoremin ikinci kısmının elde edilmesi için f 'nin $(g, Q(I))$ –baskın konveks fonksiyon olduğu kullanılarak Tanım 4.6.1'de $x = a$, $y = b$ seçilirse $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} & |(1-t)f(a) + tf(b) - t(1-t)f(ta + (1-t)b)| \\ & \leq (1-t)g(a) + tg(b) - t(1-t)g(ta + (1-t)b) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & |tf(a) + (1-t)f(b) - t(1-t)f((1-t)a + tb)| \\ & \leq tg(a) + (1-t)g(b) - t(1-t)g((1-t)a + tb) \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanıp üçgen eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} & |[f(a) + f(b)] - t(1-t)[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)]| \\ & \leq [g(a) + g(b)] - t(1-t)[g(ta + (1-t)b) + g((1-t)a + tb)] \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alındığında teoremin ikinci kısmı elde edilmiş olur.

4.7. $(g, P(I))$ – Baskın Konveks Fonksiyon

Tanım 4.7.1. Negatif olmayan g fonksiyonu $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $P(I)$ –sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} |[f(x) + f(y)] - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)| & \quad (4.24) \\ & \leq [g(x) + g(y)] - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(g, P(I))$ –baskın konveks fonksiyon denir.

Aşağıdaki öncüller $(g, P(I))$ –baskın konveks fonksiyonlar için doğrudur.

Lemma 4.7.1. Negatif olmayan g fonksiyonu $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $P(I)$ –sınıfına ait bir fonksiyon ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) f fonksiyonu I üzerinde $(g, P(I))$ – baskın konveks fonksiyondur.
- 2) $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları I üzerinde $P(I)$ – sınıfına ait fonksiyonlardır.
- 3) $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şartlarını sağlayan I üzerinde tanımlı h, k gibi $P(I)$ – sınıfına ait iki fonksiyon vardır.

İspat: $1 \Leftrightarrow 2$ (4.24) tanımından hareketle

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - [g(x) + g(y)] & \quad (4.25) \\ & \leq [f(x) + f(y)] - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq [g(x) + g(y)] - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

ifadesi yazılır. (4.25)'in birinci kısmı yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} & g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - [g(x) + g(y)] \\ & \leq [f(x) + f(y)] - f(\lambda x + (1 - \lambda)y), \\ & g(\lambda x + (1 - \lambda)y) + f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq [f(x) + g(x)] + [f(y) + g(y)], \\ & (g + f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned}$$

$$\leq (g + f)(x) + (g + f)(y)$$

elde edilir ve buradan $g + f$ fonksiyonunun $P(I)$ – sınıfına ait bir fonksiyon olduğu ispatlanmış olur. Benzer şekilde (4.25)'in ikinci kısmı düzenlenirse

$$\begin{aligned} & [f(x) + f(y)] - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq [g(x) + g(y)] - g(\lambda x + (1 - \lambda)y), \\ & g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq [g(x) + g(y)] - [f(x) + f(y)], \\ & (g - f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ & \leq (g - f)(x) + (g - f)(y) \end{aligned}$$

yazılır ve buradan $g - f$ fonksiyonunun $P(I)$ – sınıfına ait fonksiyon olduğu ispatlanmış olur.

2 \Leftrightarrow 3 f ve g , $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şeklinde iki fonksiyon olsun. Eğer f ve g fonksiyonları sırasıyla toplanır ve çıkarılırsa $g + f = h$ ve $g - f = k$ fonksiyonları elde edilir. Lemma 4.7.1'in 2) öncülünden hareketle $g + f$ ve $g - f$ fonksiyonları I üzerinde $P(I)$ – sınıfına ait fonksiyon olduğundan h ve k fonksiyonlarının da I üzerinde $P(I)$ – sınıfına ait fonksiyon olduğu sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.7.1. $a < b$, $\forall a, b \in I$ olmak üzere negatif olmayan g fonksiyonu $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $P(I)$ – sınıfına ait bir fonksiyon ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(g, P(I))$ – baskın konveks fonksiyon olsun. Eğer $f, g \in L_1[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| [f(a) + f(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq [g(a) + g(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

dir.

İspat: f fonksiyonu $(g, P(I))$ –baskın konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.7.1’de $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$ ve $t \in [0,1]$ alındığında

$$\begin{aligned} & \left| [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq [g(ta + (1-t)b) + g((1-t)a + tb)] - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

yazılır. Elde edilen ifadenin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alındığında teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Teoremin ikinci kısmının ispatlanması için f 'nin $(g, P(I))$ –baskın konveks fonksiyon olduğu kullanılarak Tanım 4.7.1’de $x = a$, $y = b$ seçilirse $t \in [0,1]$ için

$$|[f(a) + f(b)] - f(ta + (1-t)b)| \leq [g(a) + g(b)] - g(ta + (1-t)b)$$

yazılır. Daha sonra bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alınıp gerekli hesaplamalar yapıldığında teoremin ikinci kısmı elde edilmiş olur.

4.8. $(h, (\alpha, m))$ –Konveks Fonksiyon ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde $(0,1) \subseteq J$ olacak şekilde I ve $J \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde iki aralık, h ve f fonksiyonları sırasıyla J ve I üzerinde tanımlanan iki fonksiyon olarak düşünülecektir.

Tanım 4.8.1. $((h, (\alpha, m))$ –Konveks Fonksiyon): $h \neq 0, h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in [0, b]$, $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ ve $\lambda \in [0,1]$ olacak şekilde $f: [0, b] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan f fonksiyonu

$$f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \leq h(\lambda^\alpha)f(x) + mh(1 - \lambda^\alpha)f(y) \quad (4.26)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(h, (\alpha, m))$ –konveks fonksiyon denir.

(4.26) eşitsizliğinin tersi doğru ise bu durumda f fonksiyonuna $(h, (\alpha, m))$ –konkav fonksiyon denir.

Burada açıkça görülür ki $h(t) = t$ seçildiğinde (α, m) –konveks fonksiyonlar, $(\alpha, m) = (1, 1)$ seçildiğinde ise h –konveks fonksiyonlar elde edilir. Bu fonksiyon sınıfı hem (α, m) –konveks fonksiyonları hem de h –konveks fonksiyonları kapsamaktadır. Ayrıca $(\alpha, m) = (1, 1)$ ve $h(t) = \left\{1, \frac{1}{t}, t^s\right\}$ seçildiğinde sırasıyla negatif olmayan p –fonksiyon sınıfı, Godunova-Levin fonksiyon sınıfı ve ikinci anlamda s –konveks fonksiyon sınıfı elde edilir. Son olarak $\alpha = 1$ seçildiğinde (h, m) –konveks fonksiyon sınıfı elde edilir.

Teorem 4.8.1. $h \neq 0, h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $(\alpha, m) \in [0, 1] \times (0, 1], t \in [0, 1]$ olacak şekilde $f: [0, b] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $(h, (\alpha, m))$ –konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty, f \in L_1[a, b]$ ve $h \in L_1[0, 1]$ ise

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \min \left\{ f(a) \int_0^1 h(t^\alpha) dt + mf\left(\frac{b}{m}\right) \int_0^1 h(1-t^\alpha) dt, \right. \\ \left. f(b) \int_0^1 h(t^\alpha) dt + mf\left(\frac{a}{m}\right) \int_0^1 h(1-t^\alpha) dt \right\}$$

dir.

İspat: f fonksiyonu $(h, (\alpha, m))$ –konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.8.1’de $x = a$ ve $y = \frac{b}{m}$ seçildiğinde

$$f(ta + (1-t)b) \leq h(t^\alpha)f(a) + mh(1-t^\alpha)f\left(\frac{b}{m}\right)$$

eşitsizliği ve $x = b$ ve $y = \frac{a}{m}$ seçildiğinde

$$f(tb + (1 - t)a) \leq h(t^\alpha)f(b) + mh(1 - t^\alpha)f\left(\frac{a}{m}\right)$$

yazılır. Daha sonra elde edilen bu eşitsizliklerin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alındığında

$$\int_0^1 f(ta + (1 - t)b)dt \leq f(a) \int_0^1 h(t^\alpha) dt + mf\left(\frac{b}{m}\right) \int_0^1 h(1 - t^\alpha) dt$$

ve

$$\int_0^1 f(tb + (1 - t)a)dt \leq f(b) \int_0^1 h(t^\alpha) dt + mf\left(\frac{a}{m}\right) \int_0^1 h(1 - t^\alpha) dt$$

elde edilir. Burada $\int_0^1 f(ta + (1 - t)b)dt = \int_0^1 f(tb + (1 - t)a)dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ olduğundan teoremin ifadesine ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.8.1. Teorem 4.8.1'de $h(t) = t$ seçilirse, Teorem 4.8.1'deki eşitsizlik Teorem 3.1.12'deki eşitsizliğe indirgenir. Eğer Teorem 4.8.1'de $\alpha = 1$ seçilirse, Teorem 4.8.1'deki eşitsizlik Teorem 3.1.14'teki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.8.2. $h \neq 0, h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $(\alpha, m) \in [0,1] \times (0,1]$, $t \in [0,1]$ olacak şekilde $f: [0, b] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $(h, (\alpha, m))$ –konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$, $f \in L_1[ma, b]$ ve $h \in L_1[0,1]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{mb - a} \int_a^{mb} f(x)dx + \frac{1}{b - ma} \int_{ma}^b f(x)dx \\ & \leq [f(a) + f(b)] \left[\int_0^1 h(t^\alpha)dt + m \int_0^1 h(1 - t^\alpha) dt \right] \end{aligned}$$

dir.

İspat: f fonksiyonu $(h, (\alpha, m))$ -konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.8.1'de $x = a$ ve $y = b$ seçilirse

$$f(ta + m(1-t)b) \leq h(t^\alpha)f(a) + mh(1-t^\alpha)f(b),$$

eşitsizliği $x = b$ ve $y = a$ seçilirse

$$f(tb + (1-t)a) \leq h(t^\alpha)f(b) + mh(1-t^\alpha)f(a),$$

eşitsizliği $x = a$ ve $y = b$ seçilirse

$$f((1-t)a + m(1-(1-t))b) \leq h((1-t)^\alpha)f(a) + mh((1-(1-t)^\alpha))f(b)$$

eşitsizliği ve $x = b$ ve $y = a$ seçilirse

$$f((1-t)b + m(1-(1-t))a) \leq h((1-t)^\alpha)f(b) + mh((1-(1-t)^\alpha))f(a)$$

eşitsizliği yazılır. Daha sonra elde edilen bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & f(ta + m(1-t)b) + f(tb + m(1-t)a) + f((1-t)a + m(1-(1-t))b) \\ & + f((1-t)b + m(1-(1-t))a) \\ & \leq h(t^\alpha)[f(a) + f(b)] + mh(1-t^\alpha)[f(a) + f(b)] \\ & + h((1-t)^\alpha)[f(a) + f(b)] + mh(1-(1-t)^\alpha)[f(a) + f(b)] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alındığında

$$\begin{aligned} & \frac{2}{mb-a} \int_a^{mb} f(x)dx + \frac{2}{b-ma} \int_{ma}^b f(x)dx \leq [f(a) + f(b)] \\ & \times \left[\int_0^1 (h(t^\alpha) + h((1-t)^\alpha))dt + m \int_0^1 (h((1-t)^\alpha) + h(1-(1-t)^\alpha)) dt \right] \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\int_0^1 h(t^\alpha)dt = \int_0^1 h((1-t)^\alpha)dt$ ve $\int_0^1 h(1-t^\alpha)dt = \int_0^1 h(1-(1-t)^\alpha)dt$ olduğundan teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 4.8.2. Teorem 4.8.2’de $h(t) = t$ seçilirse, Teorem 4.8.2’deki eşitsizlik Teorem 3.1.13’teki eşitsizliğe indirgenir. Eğer Teorem 4.8.2’de $\alpha = 1$ seçilirse, Teorem 4.8.2’deki eşitsizlik Teorem 3.1.15’teki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.8.3. $h \neq 0, h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $(\alpha, m) \in [0,1] \times (0,1]$, $t \in [0,1]$ olacak şekilde $f: [0, b] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $(h, (\alpha, m))$ –konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$, $f \in L_1[a, b]$ ve $h \in L_1[0,1]$ ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[h\left(\frac{1}{2^\alpha}\right) f(x) + mh\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) f\left(\frac{x}{m}\right) \right] dx \\ &\leq \left[h\left(\frac{1}{2^\alpha}\right) f(a) + mh\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) f\left(\frac{a}{m}\right) \int_0^1 h(t^\alpha) dt \right] \\ &\quad + m \left[h\left(\frac{1}{2^\alpha}\right) f\left(\frac{b}{m}\right) + mh\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) f\left(\frac{b}{m^2}\right) \right] \int_0^1 h(1-t^\alpha) dt \end{aligned}$$

dir.

İspat: f fonksiyonu $x, y \in [0, \infty)$ için $(h, (\alpha, m))$ –konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.8.1’de $\lambda = \frac{1}{2}$ alındığında

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2^\alpha}\right) f(x) + mh\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) f\left(\frac{y}{m}\right)$$

yazılır. Burada $(\alpha, m) \in [0,1] \times (0,1]$, $t \in [0,1]$ ve $x = ta + (1-t)b$, $y = tb + (1-t)a$ alındığında

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2^\alpha}\right) f(ta + (1-t)b) + mh\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) f\left(\frac{tb + (1-t)a}{m}\right) \quad (4.27)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t ’ye göre integrali alındığında

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2^\alpha}\right) \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt + mh\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \int_0^1 f\left(\frac{tb + (1-t)a}{m}\right) dt$$

elde edilir ve burada $\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$, $\int_0^1 f\left(\frac{tb+(1-t)a}{m}\right) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(\frac{x}{m}\right) dx$ olduğundan teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Teoremin ikinci kısmını ispatlamak için (4.27) eşitsizliğinin sağ tarafında f 'nin $x, y \in [0, \infty)$ için $(h, (\alpha, m))$ –konveks fonksiyon olduğu kullanılarak Tanım 4.8.1'den

$$\begin{aligned} & h\left(\frac{1}{2^\alpha}\right) f(ta + (1-t)b) + mh\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) f\left(\frac{tb + (1-t)a}{m}\right) \\ & \leq h\left(\frac{1}{2^\alpha}\right) \left[h(t^\alpha) f(a) + mh(1-t^\alpha) f\left(\frac{b}{m}\right) \right] \\ & \quad + mh\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \left[h((1-t)^\alpha) f\left(\frac{a}{m}\right) + mh(1-(1-t)^\alpha) f\left(\frac{b}{m^2}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alındığında teoremin ikinci kısmı elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.8.3. Teorem 4.8.3'te $h(t) = t$ seçilirse, Teorem 4.8.3'teki eşitsizliğin ilk kısmı Teorem 3.1.10'daki eşitsizliğe indirgenir. Eğer Teorem 4.8.3'te $\alpha = 1$ seçilirse, Teorem 4.8.3'teki eşitsizlik Teorem 3.1.16'daki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.8.4. $h \neq 0, h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $(\alpha_1, m_1), (\alpha_2, m_2) \in [0,1] \times (0,1], t \in [0,1]$ olacak şekilde $f, g: [0, b] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f ve g fonksiyonları sırasıyla $(h_1, (\alpha_1, m_1))$ –konveks ve $(h_2, (\alpha_2, m_2))$ –konveks fonksiyonlar olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty, f, g \in L_1[a, b]$ ve $h_1 h_2 \in L_1[0,1]$ ise

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \min\{H_1, H_2\}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
H_1 &= f(a)g(a) \int_0^1 h_1(t^{\alpha_1})h_2(t^{\alpha_2})dt + m_2f(a)g\left(\frac{b}{m_2}\right) \int_0^1 h_1(t^{\alpha_1})h_2(1-t^{\alpha_2})dt \\
&\quad + m_1f\left(\frac{b}{m_1}\right)g(a) \int_0^1 h_1(1-t^{\alpha_1})h_2(t^{\alpha_2})dt \\
&\quad + m_1m_2f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right) \int_0^1 h_1(1-t^{\alpha_1})h_2(1-t^{\alpha_2})dt
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
H_2 &= f(b)g(b) \int_0^1 h_1(t^{\alpha_1})h_2(t^{\alpha_2})dt + m_2f(b)g\left(\frac{a}{m_2}\right) \int_0^1 h_1(t^{\alpha_1})h_2(1-t^{\alpha_2})dt \\
&\quad + m_1f\left(\frac{a}{m_1}\right)g(b) \int_0^1 h_1(1-t^{\alpha_1})h_2(t^{\alpha_2})dt \\
&\quad + m_1m_2f\left(\frac{a}{m_1}\right)g\left(\frac{a}{m_2}\right) \int_0^1 h_1(1-t^{\alpha_1})h_2(1-t^{\alpha_2})dt
\end{aligned}$$

dir.

İspat: f ve g fonksiyonları sırasıyla $(h_1, (\alpha_1, m_1))$ –konveks ve $(h_2, (\alpha_2, m_2))$ –konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.8.1’den

$$f(ta + (1-t)b) \leq h_1(t^{\alpha_1})f(a) + m_1h_1(1-t^{\alpha_1})f\left(\frac{b}{m_1}\right) \quad (4.28)$$

ve

$$g(ta + (1-t)b) \leq h_2(t^{\alpha_2})g(a) + m_2h_2(1-t^{\alpha_2})g\left(\frac{b}{m_2}\right) \quad (4.29)$$

yazılır. f ve g fonksiyonları negatif olmayan iki fonksiyon olduğundan (4.28) ve (4.29) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpıldığında

$$\begin{aligned}
& f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b) \\
& \leq h_1(t^{\alpha_1})h_2(t^{\alpha_2})f(a)g(a) + m_2f(a)g\left(\frac{b}{m_2}\right)h_1(t^{\alpha_1})h_2(1-t^{\alpha_2}) \\
& + m_1f\left(\frac{b}{m_1}\right)g(a)h_1(1-t^{\alpha_1})h_2(t^{\alpha_2}) \\
& + m_1m_2f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right)h_1(1-t^{\alpha_1})h_2(1-t^{\alpha_2})
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alındığında H_1 üst sınırı elde edilir. Benzer şekilde f ve g fonksiyonları sırasıyla $(h_1, (\alpha_1, m_1))$ –konveks ve $(h_2, (\alpha_2, m_2))$ –konveks fonksiyon olduğundan Tanım 4.8.1'den

$$f(tb + (1-t)a) \leq h_1(t^{\alpha_1})f(b) + m_1h_1(1-t^{\alpha_1})f\left(\frac{a}{m_1}\right) \quad (4.30)$$

ve

$$g(tb + (1-t)a) \leq h_2(t^{\alpha_2})g(b) + m_2h_2(1-t^{\alpha_2})g\left(\frac{a}{m_2}\right) \quad (4.31)$$

eşitsizlikleri elde edilir. f ve g fonksiyonları negatif olmayan iki fonksiyon olduğundan (4.30) ve (4.31) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpıldığında

$$\begin{aligned}
& f(tb + (1-t)a)g(tb + (1-t)a) \\
& \leq h_1(t^{\alpha_1})h_2(t^{\alpha_2})f(b)g(b) + m_2f(b)g\left(\frac{a}{m_2}\right)h_1(t^{\alpha_1})h_2(1-t^{\alpha_2}) \\
& + m_1f\left(\frac{a}{m_1}\right)g(b)h_1(1-t^{\alpha_1})h_2(t^{\alpha_2}) \\
& + m_1m_2f\left(\frac{a}{m_1}\right)g\left(\frac{a}{m_2}\right)h_1(1-t^{\alpha_1})h_2(1-t^{\alpha_2})
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integrali alındığında H_2 üst sınırı elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.8.4. Teorem 4.8.4'te $h_1(t) = h_2(t) = t$ seçilirse, Teorem 4.8.4'teki eşitsizlik Teorem 3.1.9'daki eşitsizliğe indirgenir.

4.9. Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Yeni İntegral Eşitsizlikler

Lemma 4.9.1. I, \mathbb{R} 'de açık bir aralık olmak üzere $a, b \in I, a < b, f: I \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferensiyellenebilir ve f'' integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$m(t, \lambda) = \begin{cases} t(t - 2\lambda), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ (1-t)(1-t-2\lambda), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} & \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 m(t, \lambda) f''(ta + (1-t)b) dt & (4.32) \\ & = (2\lambda - 1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda(f(a) + f(b)) + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

eşitliği yazılır.

İspat: Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned} & \int_0^1 m(t, \lambda) f''(ta + (1-t)b) dt \\ & = \int_0^{\frac{1}{2}} t(t - 2\lambda) f''(ta + (1-t)b) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)(1-t-2\lambda) f''(ta + (1-t)b) dt \\ & = (t^2 - 2\lambda t) \frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} (2t - 2\lambda) \frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \\ & \quad + (t^2 + (2\lambda - 2)t + 1 - 2\lambda) \frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\ & \quad - \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t + (2\lambda - 2)) \frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \\ & = -\frac{2}{(a-b)^2} \left[(1-2\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \lambda(f(a) + f(b)) \right] + \frac{2}{(b-a)^3} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\frac{(b-a)^2}{2}$ katsayısı ile çarpılırsa (4.32)'deki eşitlik elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.9.1. $a, b \in I, a < b$ olacak şekilde I, \mathbb{R}' 'de bir açık aralık $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve f'' integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $|f''|$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ise

$$\left| (2\lambda - 1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda(f(a) + f(b)) + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \quad (4.33)$$

$$\leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2(64\lambda^3 - 6\lambda + 1)}{48} [|f''(a)| + |f''(b)|], & \lambda \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{(b-a)^2(6\lambda - 1)}{48} [|f''(a)| + |f''(b)|], & \lambda \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

dir.

İspat: (4.32) eşitliğinin mutlak değeri alınır ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılırsa

$$\left| (2\lambda - 1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda(f(a) + f(b)) + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |t(t - 2\lambda)| |f''(ta + (1-t)b)| dt$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)(1-t - 2\lambda)| |f''(ta + (1-t)b)| dt$$

eşitsizliği elde edilir. Bu noktada $2\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olduğu düşünülerek $|f''|$ fonksiyonunun konveksliği ve kısmi integrasyon yardımıyla (4.33) eşitsizliğinin birinci kısmı elde edilir. Daha sonra benzer işlemler $2\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ olduğu düşünülerek tekrarlanır ve (4.33) eşitsizliğinin ikinci kısmı elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.9.1. Teorem 4.9.1’de $\lambda = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ seçildiğinde sırasıyla Sonuç 3.1.1, Sonuç 3.1.2 ve Sonuç 3.1.3 elde edilir.

Teorem 4.9.2. $a, b \in I, a < b$ olacak şekilde I, \mathbb{R} ’de bir açık aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve f'' integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f''|^q, [a, b]$ aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ise

$$\left| (2\lambda - 1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda(f(a) + f(b)) + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{8\lambda^3}{3} + \frac{1-6\lambda}{24} \right)^{(q-1)/q} \left[\left(\frac{3-16\lambda}{192} + \frac{8\lambda^4}{3} \right) |f''(a)|^q \right. \\ \left. + \left(\frac{8\lambda^3(1-\lambda)}{3} + \frac{5-32\lambda}{192} \right) |f''(b)|^q \right]^{1/q} \\ + \left(\frac{(1-2\lambda)^2(2\lambda+2)}{3} + \frac{14\lambda-5}{8} \right)^{(q-1)/q} \left[\left((1-2\lambda)^3 \left(\frac{2\lambda+1}{6} \right) + \frac{4\lambda-1}{8} - \frac{1}{64} \right) |f''(a)|^q \right. \\ \left. + \left((1-2\lambda)^2 \left(\frac{4\lambda^2+4\lambda+3}{6} \right) + \frac{5\lambda-2}{4} + \frac{1}{64} \right) |f''(b)|^q \right]^{1/q} \right\}, \quad 2\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{6\lambda-1}{24} \right)^{(q-1)/q} \left\{ \left[\frac{16\lambda-3}{192} |f''(a)|^q + \frac{32\lambda-5}{192} |f''(b)|^q \right]^{1/q} \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{4\lambda-1}{24} + \frac{1}{64} \right) |f''(a)|^q + \left(\frac{\lambda}{12} - \frac{1}{64} \right) |f''(b)|^q \right]^{1/q} \right\}, \quad 2\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{array} \right.$$

dir.

İspat: $q \geq 1$ için Power-mean eşitsizliği kullanılarak Lemma 4.9.1’den

$$\left| (2\lambda - 1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda(f(a) + f(b)) + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (4.34)$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t-2\lambda)| dt \right)^{(q-1)/q} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t-2\lambda)| |f''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \right.$$

$$+ \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)(1-t-2\lambda)| dt \right)^{(q-1)/q} \\ \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)(1-t-2\lambda)| |f''(ta + (1-t)b)| dt \right)^{1/q} \Bigg\}$$

elde edilir. $2\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olduğu düşünülerek elementer işlemlerle

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t-2\lambda)| dt = \frac{8\lambda^3}{3} + \frac{1-6\lambda}{24}, \quad (4.35)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)(1-t-2\lambda)| dt = \frac{(1-2\lambda)^2(2\lambda+2)}{3} + \frac{14\lambda-5}{8} \quad (4.36)$$

elde edilir. $|f''|^q$ konveks olduğundan

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t-2\lambda)| |f''(ta + (1-t)b)|^q dt \quad (4.37) \\ \leq \left(\frac{3-16\lambda}{192} + \frac{8\lambda^4}{3} \right) |f''(a)|^q + \left(\frac{8\lambda^3(1-\lambda)}{3} + \frac{5-32\lambda}{192} \right) |f''(b)|^q$$

ve

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)(1-t-2\lambda)| |f''(ta + (1-t)b)|^q dt \quad (4.38) \\ \leq \left((1-2\lambda)^3 \left(\frac{2\lambda+1}{6} \right) + \frac{4\lambda-1}{8} - \frac{1}{64} \right) |f''(a)|^q \\ + \left((1-2\lambda)^2 \left(\frac{4\lambda^2+4\lambda+3}{6} \right) + \frac{5\lambda-2}{4} + \frac{1}{64} \right) |f''(b)|^q$$

yazılır. Yukarıdaki (4.35) – (4.38) eşitsizlikleri (4.34)'de yerine yazılırsa Teorem 4.9.2'nin ilk kısmı elde edilir.

Benzer şekilde $2\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ olarak seçilip Power-mean eşitsizliğinden ve $|f''|^q$ fonksiyonunun konveksliğinden Teorem 4.9.2'nin ikinci kısmı elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.9.2. Teorem 4.9.2'de $\lambda = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ seçildiğinde sırasıyla Sonuç 3.1.4, Sonuç 3.1.5 ve Sonuç 3.1.6 elde edilir.

4.10. İkinci Anlamda s – Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski Tipli Yeni İntegral Eşitsizlikler

Teorem 4.10.1. $a, b \in I, a < b$ olacak şekilde $f: I \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve I° 'de mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. $s \in (0, 1]$ ve $x \in [a, b]$ olmak üzere eğer $|f'|$, ikinci anlamda s –konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \quad (4.39)$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{(s+1)(s+2)(b-a)} [|f'(a)| + |f'(b)|]$$

$$+ \frac{2^{s+1}(s+1)(x-a)^2 + (1+s \cdot 2^s)(a+b-2x)^2}{2^{s+1}(s+1)(s+2)(b-a)} (|f'(x)| + |f'(a+b-x)|)$$

dir.

İspat: Lemma 3.2.1 ve mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \quad (4.40) \\
& \leq \frac{1}{b-a} \left[\int_a^x |t-a| |f'(t)| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_x^{a+b-x} \left| t - \frac{a+b}{2} \right| |f'(t)| dt + \int_{a+b-x}^b |t-b| |f'(t)| dt \right]
\end{aligned}$$

yazılır. $|f'|$ fonksiyonunun ikinci anlamda s –konveks fonksiyon olmasından,

$$|f'(t)| \leq \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^s |f'(x)| + \left(\frac{x-t}{x-a} \right)^s |f'(a)| \quad (4.41)$$

$$|f'(t)| \leq \left(\frac{t-x}{a+b-2x} \right)^s |f'(a+b-x)| + \left(\frac{a+b-x-t}{a+b-2x} \right)^s |f'(x)| \quad (4.42)$$

$$|f'(t)| \leq \left(\frac{t-a-b+x}{x-a} \right)^s |f'(b)| + \left(\frac{b-t}{x-a} \right)^s |f'(a+b-x)| \quad (4.43)$$

eşitsizlikleri yazılır. (4.41)-(4.43) eşitsizlikleri (4.40)'da kullanılarak,

$$\left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a} \left[\int_a^x |t-a| \left[\left(\frac{t-a}{x-a} \right)^s |f'(x)| + \left(\frac{x-t}{x-a} \right)^s |f'(a)| \right] dt \right. \\
& \quad + \int_x^{a+b-x} \left| t - \frac{a+b}{2} \right| \left[\left(\frac{t-x}{a+b-2x} \right)^s |f'(a+b-x)| \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{a+b-x-t}{a+b-2x} \right)^s |f'(x)| \right] dt \\
& \quad + \int_{a+b-x}^b |t-b| \left[\left(\frac{t-a-b+x}{x-a} \right)^s |f'(b)| \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{b-t}{x-a} \right)^s |f'(a+b-x)| \right] dt \left. \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\int_a^x |t-a|(t-a)^s dt = \frac{(x-a)^{s+2}}{s+2},$$

$$\int_a^x |t-a|(x-t)^s dt = \frac{(x-a)^{s+2}}{(s+1)(s+2)},$$

$$\int_x^{a+b-x} \left| t - \frac{a+b}{2} \right| (t-x)^s dt = \frac{2+s2^{s+1}}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{a+b}{2} - x \right)^{s+2},$$

$$\int_x^{a+b-x} \left| t - \frac{a+b}{2} \right| (a+b-x-t)^s dt = \frac{2+s2^{s+1}}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{a+b}{2} - x \right)^{s+2},$$

$$\int_{a+b-x}^b |t-b|(t-a-b+x)^s dt = \frac{(x-a)^{s+2}}{(s+1)(s+2)}$$

ve

$$\int_{a+b-x}^b |t-b|(b-t)^s dt = \frac{(x-a)^{s+2}}{s+2}$$

olduğundan bu ifadeler (4.44)'de kullanılırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.10.1. Teorem 4.10.1'de $s = 1$ seçilirse, Teorem 4.10.1'deki eşitsizlik Teorem 3.2.3'teki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.10.2. $a, b \in I, a < b$ olacak şekilde $f: I \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve I° 'de mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $s \in (0, 1]$ ve $x \in [a, b]$ olacak şekilde $|f'|^q$ ikinci anlamda s -konveks fonksiyon ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, q > 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{(b-a)(p+1)^{1/p}(s+1)^{1/q}} \left\{ (x-a)^2 (|f'(x)|^q + |f'(a)|^q)^{1/q} \right. \\
& \quad + \frac{(a+b-2x)^2}{2} (|f'(x)|^q + |f'(a+b-x)|^q)^{1/q} \\
& \quad \left. + (x-a)^2 (|f'(b)|^q + |f'(a+b-x)|^q)^{1/q} \right\}
\end{aligned}$$

dir.

İspat: Mutlak değerin özelliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.2.1'den

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^x |t-a|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{1/q} \right. \\
& \quad + \left(\int_x^{a+b-x} \left| t - \frac{a+b}{2} \right|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_x^{a+b-x} |f'(t)|^q dt \right)^{1/q} \\
& \quad \left. + \left(\int_{a+b-x}^b |t-b|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{a+b-x}^b |f'(t)|^q dt \right)^{1/q} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.41)-(4.43)'e benzer olarak $|f'|^q$ ikinci anlamda s -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\frac{(x-a)^{p+1}}{p+1} \right)^{1/p} \left(\int_a^x \frac{(t-a)^s |f'(x)|^q + (x-t)^s |f'(a)|^q}{(x-a)^s} dt \right)^{1/q} \right. \\
& \quad + \left. \left(\frac{(a+b-2x)^{p+1}}{2^p(p+1)} \right)^{1/p} \left(\int_x^{a+b-x} \frac{(t-x)^s |f'(a+b-x)|^q + (a+b-x-t)^s |f'(x)|^q}{(a+b-2x)^s} dt \right)^{1/q} \right. \\
& \quad + \left. \left(\frac{(x-a)^{p+1}}{p+1} \right)^{1/p} \left(\int_{a+b-x}^b \frac{(t-a-b+x)^s |f'(b)|^q + (b-t)^s |f'(a+b-x)|^q}{(x-a)^s} dt \right)^{1/q} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \frac{(x-a)^2}{(p+1)^{1/p}} \left(\frac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{s+1} \right)^{1/q} \right. \\
& \quad + \frac{(a+b-2x)^2}{2(p+1)^{1/p}} \left(\frac{|f'(a+b-x)|^q + |f'(x)|^q}{s+1} \right)^{1/q} \\
& \quad + \left. \frac{(x-a)^2}{(p+1)^{1/p}} \left(\frac{|f'(a+b-x)|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \right)^{1/q} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.10.2. Teorem 4.10.2’de $s = 1$ seçilirse, Teorem 4.10.2’deki eşitsizlik Teorem 3.2.4’teki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.10.3. $a, b \in I, a < b$ olacak şekilde $f: I \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve I° ’de mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. $s \in (0, 1], x \in [a, b]$ olmak üzere $|f'|^q$ ikinci anlamda s –konkav bir fonksiyon ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, q > 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{2^{(s-1)/q}}{b-a} \left\{ \frac{(x-a)^2}{(p+1)^{1/p}} \left[\left| f' \left(\frac{a+x}{2} \right) \right| + \left| f' \left(\frac{a+2b-x}{2} \right) \right| \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{(a+b-2x)^2}{2(p+1)^{1/p}} \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right\}
\end{aligned}$$

dir.

İspat: Hölder eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.2.1'den

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \tag{4.45} \\
& \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^x |t-a|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^x \left| f' \left(\frac{t-a}{x-a} x + \frac{x-t}{x-a} a \right) \right|^q dt \right)^{1/q} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_x^{a+b-x} \left| t - \frac{a+b}{2} \right|^p dt \right)^{1/p} \right. \\
& \quad \times \left(\int_x^{a+b-x} \left| f' \left(\frac{t-x}{a+b-2x} (a+b-x) + \frac{a+b-x-t}{a+b-2x} x \right) \right|^q dt \right)^{1/q} \\
& \quad \left. + \left(\int_{a+b-x}^b |t-b|^p dt \right)^{1/p} \right. \\
& \quad \left. \times \left(\int_{a+b-x}^b \left| f' \left(\frac{t-a-b+x}{x-a} b + \frac{b-t}{x-a} (a+b-x) \right) \right|^q dt \right)^{1/q} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. İkinci anlamda s -konveks fonksiyonlar için geçerli olan Teorem 3.1.5'teki eşitsizliğin s -konkav fonksiyonlar için tersi geçerli olduğundan

$$\int_a^x \left| f' \left(\frac{t-a}{x-a}x + \frac{x-t}{x-a}a \right) \right|^q dt \leq 2^{s-1}(x-a) \left| f' \left(\frac{a+x}{2} \right) \right|^q \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \int_x^{a+b-x} \left| f' \left(\frac{t-x}{a+b-2x}(a+b-x) + \frac{a+b-x-t}{a+b-2x}x \right) \right|^q dt \\ \leq 2^{s-1}(a+b-2x) \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \int_{a+b-x}^b \left| f' \left(\frac{t-a-b+x}{x-a}b + \frac{b-t}{x-a}(a+b-x) \right) \right|^q dt \\ \leq 2^{s-1}(x-a) \left| f' \left(\frac{a+2b-x}{2} \right) \right|^q \end{aligned} \quad (4.48)$$

ifadeleri elde edilir. (4.46)-(4.48) eşitsizlikleri (4.45) eşitsizliğinde kullanılırsa ispat tamamlanmış olur.

4.10.1. Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar

Önerme 4.10.1.1. $0 < a < b$ ve $0 < s < 1$ olsun. Bu durumda

$$|A^s(a, b) - \mathcal{L}_s^s(a, b)| \leq \frac{s(b-a)}{4(s+1)(s+2)} [a^{s-1} + 2(s+1)A^{s-1}(a, b) + b^{s-1}]$$

olur.

İspat: Teorem 4.10.1'de $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $f(x) = x^s$ ikinci anlamda s -konveks fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 4.10.1.2. $0 < a < b$ ve $0 < s < 1$ olsun. Bu durumda $q > 1$ için

$$\begin{aligned} |A^s(a, b) - \mathcal{L}_s^s(a, b)| \\ \leq \frac{s(b-a)}{4(p+1)^{1/p}(s+1)^{1/q}} \left\{ [a^{(s-1)q} + A^{(s-1)q}(a, b)]^{1/q} \right. \\ \left. + [b^{(s-1)q} + A^{(s-1)q}(a, b)]^{1/q} \right\} \end{aligned}$$

olur.

İspat: Teorem 4.10.2’de $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $f(x) = x^s$ ikinci anlamda s –konveks fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

4.11. m – Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski Tipli Yeni İntegral Eşitsizlikler

Teorem 4.11.1. I, \mathbb{R} ’de açık bir aralık, $a, b \in I$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $m \in (0,1]$, $q \in [1, \infty)$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde m –konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-x)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(b)] + (x-a)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)]}{b-a} \right| \\ & \leq (b-a) \left(\frac{(2\lambda^2 - 2\lambda + 1)}{2} \right)^{(q-1)/q} \left\{ \left[\left(\frac{2\lambda^3 - 3\lambda + 2}{6} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{2q+1} |f'(a)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + m \left(\frac{3[\lambda^2 + (1-\lambda)^2] - [\lambda^3 + (1-\lambda)^2(2+\lambda)] \left(\frac{b-x}{b-a} \right)}{6} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{2q} \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right]^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(\frac{3[\lambda^2 + (1-\lambda)^2] - [\lambda^3 + (1-\lambda)^2(2+\lambda)] \left(\frac{x-a}{b-a} \right)}{6} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{2q} |f'(a)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + m \left(\frac{2\lambda^3 - 3\lambda + 2}{6} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{2q+1} \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right]^{1/q} \right\} \end{aligned}$$

dir.

İspat: $q = 1$ olsun. Lemma 3.2.2 ve mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-x)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(b)] + (x-a)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)]}{b-a} \right|$$

$$\leq (b-a) \left\{ \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right. \\ \left. + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - 1 + \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right\}$$

elde edilir. $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde m -konveks bir fonksiyon olduğundan $t \in [0,1]$ ve $m \in (0,1]$ için

$$|f'(ta + (1-t)b)| \leq t|f'(a)| + m(1-t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-x)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(b)] + (x-a)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)]}{b-a} \right| \\ \leq (b-a) \left\{ \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right| \left[t|f'(a)| + m(1-t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt \right. \\ \left. + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - 1 + \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right| \left[t|f'(a)| + m(1-t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= (b-a) \left\{ |f'(a)| \left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right| t dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - 1 + \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right| t dt \right] \right. \\
&\quad + m \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right| (1-t) dt \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - 1 + \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right| (1-t) dt \right] \right\}
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right| t dt = \left(\frac{2\lambda^3 - 3\lambda + 2}{6} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^3,$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - 1 + \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right| t dt \\
&= \left(\frac{3[\lambda^2 + (1-\lambda)^2] - [\lambda^3 + (1-\lambda)^2(2+\lambda)] \left(\frac{x-a}{b-a} \right)}{6} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right| (1-t) dt \\
&= \left(\frac{3[\lambda^2 + (1-\lambda)^2] - [\lambda^3 + (1-\lambda)^2(2+\lambda)] \left(\frac{b-x}{b-a} \right)}{6} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2
\end{aligned}$$

ve

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - 1 + \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right| (1-t) dt = \left(\frac{2\lambda^3 - 3\lambda + 2}{6} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^3$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-x)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(b)] + (x-a)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)]}{b-a} \right| \\
& \leq (b-a) \left\{ \left[\left(\frac{2\lambda^3 - 3\lambda + 2}{6} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^3 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{3[\lambda^2 + (1-\lambda)^2] - [\lambda^3 + (1-\lambda)^2(2+\lambda)] \left(\frac{x-a}{b-a} \right)}{6} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2 \right] |f'(a)| \right. \\
& \quad \left. + m \left[\left(\frac{2\lambda^3 - 3\lambda + 2}{6} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^3 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{3[\lambda^2 + (1-\lambda)^2] - [\lambda^3 + (1-\lambda)^2(2+\lambda)] \left(\frac{b-x}{b-a} \right)}{6} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2 \right] \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right\}
\end{aligned}$$

bulunur ve $q = 1$ için ispat tamamlanır.

Şimdi $q > 1$ olduğu kabul edilsin. İntegraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.2.2'den

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-x)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(b)] + (x-a)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)]}{b-a} \right| \\
& \leq (b-a) \left\{ \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right|^{(q-1)/q} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right|^{1/q} |f'(ta + (1-t)b)| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - \left(1 - \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) \right|^{(q-1)/q} \left| t - \left(1 - \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) \right|^{1/q} |f'(ta + (1-t)b)| dt \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (b-a) \left\{ \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right| dt \right)^{(q-1)/q} \right. \\
&\quad \times \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - \left(1 - \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) \right| dt \right)^{(q-1)/q} \\
&\quad \left. \times \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - \left(1 - \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) \right| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \right\} \tag{4.49}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde m -konveks bir fonksiyon olduğundan, $t \in [0, 1]$ ve $m \in (0, 1]$ için

$$|f'(ta + (1-t)b)| \leq t|f'(a)| + m(1-t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right| dt = \left(\frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \\
& \leq \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right| \left[t|f'(a)|^q + m(1-t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right] dt \\
& = \left(\frac{2\lambda^3 - 3\lambda + 2}{6} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^3 |f'(a)|^q \\
& \quad + m \left(\frac{3[\lambda^2 + (1-\lambda)^2] - [\lambda^3 + (1-\lambda)^2(2+\lambda)] \left(\frac{b-x}{b-a} \right)}{6} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2 \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - \left(1 - \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) \right| dt = \left(\frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - \left(1 - \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) \right| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \\
& \leq \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - \left(1 - \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) \right| \left[t|f'(a)|^q + m(1-t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right] dt \\
& = \left(\frac{3[\lambda^2 + (1-\lambda)^2] - [\lambda^3 + (1-\lambda)^2(2+\lambda)] \left(\frac{x-a}{b-a} \right)}{6} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2 |f'(a)|^q \\
& \quad + m \left(\frac{2\lambda^3 - 3\lambda + 2}{6} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^3 \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q
\end{aligned}$$

olduğundan bu ifadeler (4.49)'da yerine yazılırsa $q > 1$ için ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.11.1. Teorem 4.11.1'de $m = 1$ seçilirse, Teorem 4.11.1'deki eşitsizlik Teorem 3.2.6'daki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.11.2. I, \mathbb{R} 'de açık bir aralık, $a, b \in I$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $m \in (0, 1]$, $q \in (1, \infty)$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde m -konveks bir fonksiyon ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q > 1$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-x)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(b)] + (x-a)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)]}{b-a} \right| \\ & \leq (b-a) \left(\frac{(\lambda^{p+1} + (1-\lambda)^{p+1})}{p+1} \right)^{1/p} \\ & \quad \times \left(\left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{p+1/p} \left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2}{2} |f'(a)|^q + m \left(\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2}{2} \right) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right)^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{p+1/p} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2}{2} \right) |f'(a)|^q + m \frac{\left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2}{2} \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right)^{1/q} \right) \end{aligned}$$

dir.

İspat: İntegraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.2.2'den

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-x)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(b)] + (x-a)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)]}{b-a} \right|$$

$$\leq (b-a) \left\{ \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right|^p dt \right)^{1/p} \times \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| f' \left(ta + m(1-t) \frac{b}{m} \right) \right|^q dt \right)^{1/q} \right. \\ \left. + \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - \left(1 - \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) \right|^p dt \right)^{1/p} \right. \\ \left. \times \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| f' \left(ta + m(1-t) \frac{b}{m} \right) \right|^q dt \right)^{1/q} \right\}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| t - \lambda \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right|^p dt = \left(\frac{\lambda^{p+1} + (1-\lambda)^{p+1}}{p+1} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{p+1}, \\ \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| t - \left(1 - \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) \right|^p dt = \left(\frac{\lambda^{p+1} + (1-\lambda)^{p+1}}{p+1} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{p+1},$$

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left| f' \left(ta + m(1-t) \frac{b}{m} \right) \right|^q dt \leq \frac{\left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2}{2} |f'(a)|^q + m \left(\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2}{2} \right) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q$$

ve

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left| f' \left(ta + m(1-t) \frac{b}{m} \right) \right|^q dt \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2}{2} \right) |f'(a)|^q + m \left(\frac{\left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2}{2} \right) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-x)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(b)] + (x-a)[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)]}{b-a} \right| \\
& \leq (b-a) \left\{ \left(\left(\frac{\lambda^{p+1} + (1-\lambda)^{p+1}}{p+1} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{p+1} \right)^{1/p} \right. \\
& \quad \times \left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2}{2} |f'(a)|^q + m \left(\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2}{2} \right) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right)^{1/q} \\
& \quad + \left(\left(\frac{\lambda^{p+1} + (1-\lambda)^{p+1}}{p+1} \right) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{p+1} \right)^{1/p} \\
& \quad \left. \times \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2}{2} \right) |f'(a)|^q + m \left(\frac{\left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2}{2} \right) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right)^{1/q} \right\}
\end{aligned}$$

yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.11.2. Teorem 4.11.2’de $m = 1$ seçilirse, Teorem 4.11.2’deki eşitsizlik Teorem 3.2.7’deki eşitsizliğe indirgenir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, Dragomir ve Ionescu'nun 1990 yılında tanımlamış oldukları baskın konveks fonksiyon kavramından faydalanılarak yeni baskın konveks fonksiyon türleri elde edilmiş olup bu fonksiyon türleri için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler yazılmıştır. Daha sonra bazı lemmalar kullanılarak Hermite-Hadamard ve Ostrowski tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca yazılan birkaç eşitsizlik için reel sayıların özel anlamlarına ilişkin uygulamalar verilmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, üçüncü bölümde Lemma 3.2.1, Lemma 3.2.2 ve dördüncü bölümde de Lemma 4.9.1'den faydalanarak Hermite-Hadamard tipli ve Ostrowski tipli yeni eşitsizlikler elde edebilirler. Ayrıca bu çalışmada elde edilmiş olan yeni baskın konveks fonksiyon türleri kullanılarak Hermite-Hadamard tipli, Fejér tipli birçok yeni eşitsizlik yazılabilir.

KAYNAKLAR

- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. *Calculus A Complete Course*. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S.S. and Cerone, P., 2010. Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s -convex in the second sense. *Applied Mathematics Letters*, 23, 1071-1076.
- Alomari, M., 2011. *Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type For s -Convex, Quasi-Convex And r -Convex Mappings And Applications*. Ph. D. Thesis. Faculty Of Science And Technology, Universiti Kebangsaan, Malaysia, Bangi.
- Alomari, M., Özdemir, M.E. and Kavurmacı, H., 2011. On companion of Ostrowski Inequality for mappings whose first derivatives absolute value are convex with applications. Submitted.
- Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. *Rev. Colombiana Mat.*, 28, 7-12.
- Bakula, M.K., Özdemir, M.E. and Pečarić, J., 2008. Hadamard type inequalities for m -convex and (α, m) -convex functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics.*, 9(4), Article 96, 12pp.
- Barnett, N.S. and Dragomir, S.S., 2001. An Ostrowski type inequality for double integrals and applications for cubature formulae. *Soochow Journal of Mathematics*, 27(1), 1-10.
- Barnett, N.S. and Dragomir, S.S., 2006. Applications of Ostrowski's version of the Grüss inequality for trapezoid type rules. *Tamkang Journal of Mathematics*, 37(2), 163-173.
- Barnett, N.S., Cerone, P., Dragomir, S.S., Pinheiro, M.R. & Sofo, A., 2003. Ostrowski type inequalities for functions whose modulus of the derivative are convex and applications. *Inequalities Theory & Applications*, Vol. 2, 19-32.
- Bayraktar, M., 2000. *Fonksiyonel Analiz*, ISBN 975-442-035-1.
- Bayraktar, M., 2010. *Analiz*, ISBN 978-605-395-412-5.
- Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. *Inequalities*. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin.
- Bombardelli, M. and Varošanec, S., 2009. Properties of h -convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejér inequalities. *Computers and Mathematics with Applications*, 58, 1869-1877.
- Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen räumen. *Publ. Inst. Math. (Beograd)* 23:13-20.
- Bullen, P.S., 2003. *Handbook of Means and Their Inequalities*. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.
- Bullen, P.S., Mitrinović, D.S. and Vasić, M., 1988. *Means and Their Inequalities*. Dordrecht: Kluwer Academic, 459 pp, Dordrecht-Boston.
- Carter, M. and van Brunt, B., 2000. *The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction*. Springer-Verlag, 228, New York.
- Cerone, P., Dragomir, S.S. and Roumeliotis, J., 1998. An inequality of Ostrowski type for mappings whose second derivatives are bounded and applications. *East Asian*

- Jour. of Math, 15(1), 1-9. Preprint. RGMIA Res. Rep. Coll., 1 (1) Article 4. [ONLINE] <http://rgmia.vu.edu.au/v1n1.html> (15.03.2012).
- Dragomir, S.S., Cerone, P. and Roumeliotis, J., 2000. A new generalization of Ostrowski's integral inequality for mappings whose derivatives are bounded and applications in numerical integration and for special means. *Applied Mathematics Letters*, 13(1), 19-25.
- Dragomir, S.S. and Ionescu N.M., 1990. On some inequalities for convex-dominated functions. *Anal. Num. Theor. Approx.*, 19, 21-28. MR 936: 26014 ZBL No.733: 26010.
- Dragomir, S.S. and Toader, G., 1993. Some inequalities for m -convex functions. *Studia Univ. Babeş-Bolyai. Mathematica*, 38(1), 21-28.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. *Soochow Journal of Mathematics*, 21(3), 335-341.
- Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, *Appl. Math. Lett.*, 11(5), 91-95.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 57, 377-385.
- Dragomir, S.S. and Wang, S., 1997. An inequality of Ostrowski-Grüss' type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules. *Computers Math. Applic.*, 33(11), 15-20.
- Dragomir, S.S. and Wang, S., 1998. Applications of Ostrowski's inequality to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules. *Appl. Math. Lett.*, 11, 105-109.
- Dragomir, S.S., 1997. The Ostrowski's integral inequality for Lipschitzian mappings and applications. *Computers and Mathematics with Applications*, 38, 33-37.
- Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S., 1999. The Hadamard's inequality for s -convex functions in the second sense. *Demonstratio Math.*, 32(4), 687-696.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html>(15.03.2012).
- Dragomir, S.S., 2002. On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for m -convex functions. *Tamkang Journal of Mathematics*, 33(1), 55-65.
- Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M and Pečarić J.E., 2002. Means, g -Convex Dominated & Hadamard-Type Inequalities. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 18(2), 161-173.
- Dragomir, S.S. and Sofo, A., 2002. Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are convex. RGMIA Res. Rep. Coll., 5, Supplement, Article 30. [ONLINE: [http://ajmaa.org/RGMIA/v5\(E\).php](http://ajmaa.org/RGMIA/v5(E).php)].
- Dragomir, S.S., 2005. Some companions of Ostrowski's inequality for absolutely continuous functions and applications. *Bull. Korean Math. Soc.*, 42(2), 213-230.
- Dragomir, S.S. & Rassias, T. M., 2002. Ostrowski type inequalities and applications in numerical integration. Boston: Kluwer Academic, 404 pp, Melbourne-Athens.
- Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pečarić, J.E., 1997. Hadamard's inequality for r -convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 215, 461-470.

- Godunova, E.K. and Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlja funkcii širokogo klasa, soderžaščego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii, Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from Operations Research, 19, 7.
- Guessab, A. and Schmeisser, G., 2002. Sharp integral inequalities of the Hermite-Hadamard type. J. Approx. Th., 115, 260-288.
- Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.
- Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on s -convex functions. Aequationes Math., 48, 100-111.
- Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.
- Kırmacı, U.S., 2008. Improvement and further generalization of inequalities for differentiable mappings and applications. Computers and Mathematics with Applications, 55, 485-493.
- Kırmacı, U.S. and Özdemir, M.E., 2004. On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. Applied Mathematics and Computation, 153, 361-368.
- Liu, Z., 2009. Some companions of an Ostrowski type inequality and applications. Journal Of Inequalities In Pure And Applied Mathematics., 10(2), Article 52, 12 pp.
- Miheşan, V.G., 1993. A generalization of the convexity. Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania.
- Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, 400, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1991. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740 pp, Dordrecht/Boston/London.
- Ngoc, N.P.N., Vinh, N.V. and Hien, P.T.T., 2009. Integral inequalities of Hadamard type for r -convex functions. International Mathematical Forum, 4(35), 1723-1728.
- Niculescu, C.P. and Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, 255 pp, Springer Science+Business Media, Inc.
- Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 9, 157-162.
- Ostrowski, A., 1938. Über die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert. Comment. Math. Helv., 10, 226-227.
- Özdemir, M.E., 2003. A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and means. Applied Mathematics and Computation, 138, 425-434.
- Özdemir, M.E., Akdemir, A.O. and Set, E., 2011. On $(h - m)$ -convexity and Hadamard-type inequalities. arXiv:1103.6163v1 [math.CA] 31 Mar 20.
- Özdemir, M.E., Avcı, M. and Set, E., 2010. On some inequalities of Hermite-Hadamard type via m -convexity. Appl. Math. Lett., 23, 1065-1070.

- Özdemir, M.E., Kavurmacı, H and Avcı, M., 2012. Ostrowski type inequalities for convex functions. Submitted.
- Pachpatte, B.G., 2004. A note on integral inequalities involving two log-convex functions. *Mathematical Inequalities & Applications*, 7(4), 511-515.
- Pachpatte, B.G., 2004. New inequalities of Ostrowski type for twice differentiable mappings. *Tamkang Journal of Mathematics*, 35(3), 219-226.
- Pachpatte, B.G., 2005. A note on Ostrowski like inequalities. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 6(4), Article 114, 4 pp.
- Pachpatte, B.G., 2005. *Mathematical Inequalities*. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.
- Pachpatte, B.G., 2007. Some new Ostrowski and Grüss type inequalities. *Tamkang Journal of Mathematics*, 38(2), 111-120.
- Pearce, C.E.M. and Pečarić, J., 2000. Inequalities for differentiable mappings with applications to special means and quadrature formulæ. *Applied Mathematics Letters*, 13, 51-55.
- Pearce, C.E.M. and Pečarić, J. and Šimić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, *J. Math. Anal. and Appl.*, 220, 99-109.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*. Academic Press, Inc., 469 pp, Boston.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. *Convex Functions*. Academic Press, 300pp, New York.
- Sarikaya, M.Z., 2009. On the Ostrowski type integral inequality. *Acta Math. Univ. Comenianae*, Vol.LXXIX(1), 129-134.
- Sarikaya, M.Z., 2012. On the Ostrowski type integral inequality for double integrals. *Demonstratio Mathematica*, 2 or 3(45).
- Sarikaya, M.Z., Sağlam, A. and Yıldırım, H., 2008. On some Hadamard-type inequalities for h -convex functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, 2(3), 335-341.
- Sarikaya, M.Z., Sağlam, A. and Yıldırım, H., 2012. New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex. *International Journal of Open Problems in Computer Sciences and Mathematics(IJOPCM)*, 5(3).
- Sarikaya, M.Z., Set, E. and Özdemir M.E., 2010. On some new inequalities of Hadamard type involving h -convex functions. *Acta Math. Univ. Comenianae*, Vol. LXXIX(2), 265-272.
- Sarikaya, M.Z. and Aktan, N., 2011. On the generalization some integral inequalities and their applications. *Mathematical and Computer Modelling*, 54, 2175-2182.
- Set, E., 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Set, E., Sardari, M., Özdemir, M.E. and Rooin, J., 2011. On generalizations of Hadamard inequality for (α, m) -convex functions, *Kyunpook Math. J.*, Accepted.
- Set, E., Özdemir, M.E. and Dragomir, S.S., 2010. On the Hermite-Hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions. *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 148102, 9pp.

- Toader, G., 1984. Some generalizations of the convexity. Proceedings of The Colloquium On Approximation and Optimization, Univ. Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 329-338.
- Toader, G.H., 1988. On a generalization of the convexity. *Mathematica*, 30(53), 83-87.
- Tunç, M., 2010. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Ujević, N., 2004. Sharp inequalities of Simpson type and Ostrowski type. *Computers and Mathematics with Applications*, 48, 145-151.
- Wright, E.M., 1954. An inequality for convex functions. *Amer. Math., Monthly* 61, 620-622.
- Varošanec, S., 2007. On h –convexity. *J. Math. Anal. Appl.*, 326, 303-311.
- Yang, G.S., Hwang, D.Y. and Tseng, K.L., 2004. Some inequalities for differentiable convex and concave mappings. *Computers and Mathematics with Applications*, 47, 207-216.
- Yıldız, Ç., 2011. Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Erzurum'un Alaca köyünde doğdu. İlköğrenimini Alaca Köyü'nde, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2003 yılında kayıt yaptırdığı Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalında doktora öğrenimine başlayıp 2010 güz döneminde yatay geçiş ile Matematik Anabilim dalına geçiş yapıp doktora öğrenimini burada tamamladı.