



**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**HEMEN HEMEN ARTAN DİZİLERİN  
UYGULAMALARI**

**Hazırlayan  
Ayşegül KETEN**

**Danışman  
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Haziran 2012  
KAYSERİ**



**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**HEMEN HEMEN ARTAN DİZİLERİN  
UYGULAMALARI**

**Hazırlayan  
Ayşegül KETEN**

**Danışman  
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Haziran 2012  
KAYSERİ**

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı: Ayşegül KETEN

İmza: 

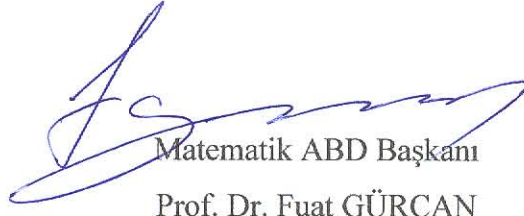
**“Hemen Hemen Artan Dizilerin Uygulamaları”** adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.



Tezi Hazırlayan  
Ayşegül KETEN



Danışman  
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN



Matematik ABD Başkanı  
Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN danışmanlığında Ayşegül KETEN tarafından hazırlanan “Hemen Hemen Artan Dizilerin Uygulamaları” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

27 /06 / 2012

**JÜRİ:**

Başkan: Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

**ONAY:**

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun **18/07/2012** tarih ve **2012/31-02** sayılı kararı ile onaylanmıştır.

**18 / 07 / 2012**

**Enstitü Müdürü**

**Prof. Dr. Necmettin MARAŞLI**

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgilerinden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ayrıca bilgi ve tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam Sayın Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Maddi desteklerinden dolayı **TÜBİTAK'** a teşekkür ederim.

Ayşegül KETEN  
Kayseri, Haziran 2012

## HEMEN HEMEN ARTAN DİZİLERİN UYGULAMALARI

Ayşegül KETEN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2012

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

### ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışma boyunca kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde,  $k \geq 1$  olmak üzere toplanabilme çarpanı kullanılarak elde edilen sonsuz bir serinin  $|\bar{N}, p_n|_k$  toplanabilmesi ile ilgili üç teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Üçüncü bölümde, bilinen  $|A, p_n|_k$  toplanabilirlik tanımını genelleştiren bir tanım verilmiştir ve ikinci bölümde ispatlanan teoremler hemen hemen artan dizi kavramı kullanılarak daha zayıf şartlar altında bu tanıma genelleştirilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, yapılan çalışmalar ile ilgili sonuçlar verilerek çalışmanın amacı desteklenmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Mutlak matris toplanabilme, Toplanabilme çarpanı, Hemen hemen artan dizi, Sonsuz seri.

## APPLICATIONS OF ALMOST INCREASING SEQUENCES

Ayşegül KETEN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, June 2012

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

### ABSTRACT

This study consists of four chapters.

In the first chapter, basic definitions and the theorems that will be used throughout the study have been given.

In the second chapter, for  $k \geq 1$  three theorems dealing with  $|\bar{N}, p_n|_k$  summability of an infinite series obtained by using summability factor are stated and proved.

In the third chapter, a definition which generalizes the definition of the known  $|A, p_n|_k$  summability is given and theorems, which are proved in the second chapter have been generalized to this definition under weaker conditions by using an almost increasing sequence.

In the fourth chapter, the aim of the study is supported by giving corollaries related to studies.

**Keywords:** Absolute matrix summability, Summability factor, Almost increasing sequence, Infinite series.

## İÇİNDEKİLER

### HEMEN HEMEN ARTAN DİZİLERİN UYGULAMALARI

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI.....	i
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI.....	ii
KABUL VE ONAY SAYFASI.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER LİSTESİ.....	ix
<b>GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>

## 1. BÖLÜM

### TEMEL TANIM VE TEOREMLER

<b>1.1. Temel Tanım ve Teoremler.....</b>	<b>3</b>
---	----------

## 2. BÖLÜM

### SONSUZ SERİLERİN $|\bar{N}, p_n|_k$ TOPLANABİLİRLİĞİ

<b>2.1. <math>\sum a_n \lambda_n</math> Serisinin <math> \bar{N}, p_n _k</math> Toplanabilirliği İle İlgili Teoremler.....</b>	<b>12</b>
<b>2.3. <math>\sum a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}</math> Serisinin <math> \bar{N}, p_n _k</math> Toplanabilirliği İle İlgili Teorem.....</b>	<b>19</b>

### 3. BÖLÜM

#### HEMEN HEMEN ARTAN DİZİLERİN $\varphi - |A, p_n|_k$ TOPLANABİLİRLİĞİ

3.1. $\sum a_n \lambda_n$ Serisinin $\varphi -  A, p_n _k$ Toplanabilirliği İle İlgili Teoremler.....	25
3.3. $\sum a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$ Serisinin $\varphi -  A, p_n _k$ Toplanabilirliği İle İlgili Teorem.....	34

### 4. BÖLÜM

#### TARTIŞMA-SONUÇ VE ÖNERİLER

4.1. Sonuçlar.....	39
KAYNAKLAR.....	42
ÖZGEÇMİŞ.....	44

## SİMGELER LİSTESİ

Simgeler	Anlamı
$\sum a_n$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi
$(s_n)$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz serisinin kısmi toplamlar dizisi
$BV$	Sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
$s_n = O(1)$	$(s_n)$ dizisi sınırlı
$\Delta r_n$	Herhangi bir $(r_n)$ dizisi için $r_n - r_{n+1}$
$\bar{\Delta}A_n(s)$	$(A_n(s))$ dönüşüm dizisi için $A_n(s) - A_{n-1}(s)$

## GİRİŞ

Toplanabilme teorisi veya kısaca toplanabilme, en geniş anlamda Analiz ve Topolojide temel konu olan limitlerin bulunması teorisidir. Toplanabilme, yakınsaklık kavramının bir genişlemesi olduğu gibi, mutlak toplanabilme de mutlak yakınsaklık kavramının bir genişlemesidir.

Genel olarak seriler yakınsak ve ıraksak seriler olmak üzere iki ana grup altında incelenirler. ıraksak seriler de kendi aralarında belirsiz ıraksak seriler ve belirli ıraksak seriler olmak üzere iki ana grup altında incelenir. Burada belirli ıraksak seri adını

verdiğimiz seriler  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$  veya  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$  şeklindeki serilerdir. Belirsiz ıraksak

seriler ise  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  veya  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  şeklindeki serilerdir.

Herhangi bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serinin kısmi toplamlar dizisinin yakınsak olmasıdır ve ayrıca yakınsak dizilerin yığılma noktası tektir. Fakat belirsiz ıraksak serilerin kısmi toplamlar dizisinin en az iki yığılma noktası vardır. Bu şekilde birden fazla yığılma noktası olan dizilere salınım yapan diziler denir. Bu türdeki dizilere en iyi bir değerin nasıl karşılık getirilebileceğini araştırmak amacıyla çeşitli toplanabilme metotları tanımlanmıştır.

Toplanabilmenin önemli yükselişi 19. yüzyılın sonlarında başlamıştır. Euler, Abel, Riemann, Re Loy, Hausdorff, Borel, Nörlund, Cesàro ve Riesz gibi matematikçiler özel toplanabilme metotları tanımlayarak diğer matematikçilerin bu alanda çalışabilmesi için olanak sağlamışlardır. Günümüzde toplanabilme metotları üzerinde çalışan matematiklerin çoğu, bu özel toplanabilme metotları arasındaki ilişkileri incelemektedir.

Biliyoruz ki,  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  serisi ıraksak bir seri olduğundan bu seriye karşılık gelen bir değer yoktur. Ancak bu serinin kısmi toplamlar dizisinin aritmetik ortalaması olan  $(t_n)$ ,  $\frac{1}{2}$  değerine yakınsaktır. Bunun anlamı ise, Cesàro ortalaması Tanım 1.14 de verilen  $(\bar{N}, p_n)$  Riesz toplanabilme metodunun  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $p_n = 1$  alınması halinde elde edilen ve sembolik olarak  $(C,1)$  ile gösterilen özel bir Riesz toplanabilme metodudur. O halde Riesz toplanabilme metodu yardımıyla ıraksak bir seriye karşılık gelen bir değer bulunur. Bu nedenle Riesz toplanabilme metodunun Analizdeki uygulaması oldukça geniştir.

1969 yılında Das [1] tarafından mutlak A toplanabilirlik kavramı verilmiştir. Daha sonra 1970 yılında Kishore and Hotta [2] toplanabilme çarpanı kavramını tanımladılar. 1979 yılında alt üçgensel matrisler yardımıyla  $|A|_k$  toplanabilirlik tanımı Tanovic-Miller [3] tarafından yapıldı. 1985 yılında da Bor [4],  $|\bar{N}, p_n|_k$  toplanabilirlik kavramını tanımladı.

Çalışmalarımıza temel teşkil eden alt üçgensel matrisler yardımıyla  $|A, p_n|_k$  toplanabilirlik tanımı, 2003 yılında Sulaiman [5] tarafından yapılmıştır. 2012 yılında Özarслан ve Keten [6] tarafından daha genel olan  $\varphi - |A, p_n|_k$  toplanabilirlik tanımı verilmiştir.

Bu çalışmada ilk olarak toplanabilme çarpanı kullanılarak elde edilen sonsuz bir serinin  $|\bar{N}, p_n|_k$  toplanabilirliği ile ilgili üç teorem ifade ve ispat edilecektir. Daha sonra verilen bu üç teorem hemen hemen artan dizi kavramı kullanılarak daha zayıf şartlar altında  $\varphi - |A, p_n|_k$  toplanabilirliği için ifade ve ispat edilip bazı sonuçlar elde edilecektir.

# 1. BÖLÜM

## TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, ilk olarak konumuzla ilgili olan bazı tanım, teorem ve notasyonları vererek işe başlayacağız.

### 1.1. Temel Tanım ve Teoremler

**Tanım 1.1.**  $F$  reel veya kompleks sayıların bir cismi ve kısmi toplamlar dizisi  $(s_n)$  olan bir  $\sum a_n$  serisi verilmiş olsun.  $n, k = 0, 1, 2, \dots$  için  $a_{nk} \in F$  olmak üzere bir  $A = (a_{nk})$  sonsuz matrisi verilsin. Bu takdirde  $(s_n)$  dizisinden  $(t_n)$  dizisine bir dönüşüm

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \quad (1.1)$$

olarak tanımlansın.  $(t_n)$  dizisine,  $(s_n)$  dizisinin  $A$  dönüşüm dizisi ve  $A$  ya da diziden diziye dönüşüm denir. Bu dönüşümün var olması için (1.1) deki toplamın  $\forall n$  için yakınsak olması gerekir [7].

**Tanım 1.2.** Bir  $A = (a_{nk})$ ,  $n, k = 0, 1, 2, \dots$  matrisi verilmiş olsun. Eğer  $A$  matrisi yardımıyla oluşturulan dönüşüm yakınsak her diziyi yakınsak bir diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti de koruyorsa,  $A$  matrisine regülerdir denir [8].

Aşağıdaki teorem, verilen bir  $A$  matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartları verir.

**Teorem 1.3.** Bir  $A = (a_{nk})$ ,  $n, k = 0, 1, 2, \dots$  matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \forall k \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \\ \text{(ii)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1 \\ \text{(iii)} \quad & \forall n \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq M \end{aligned} \tag{1.2}$$

olacak şekilde  $n$  den bağımsız bir  $M$  pozitif reel sayısının var olmasıdır [9].

Toplanabilme teorisinde çok önemli yer teşkil eden bu teorem, Silverman-Toeplitz teoremi olarak bilinir.

**Tanım 1.4.** Reel ya da kompleks terimli bir  $B = (b_{nk})$  sonsuz matrisi ve  $\sum a_n$  serisi verilmiş olsun.

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} a_k \tag{1.3}$$

olacak şekilde tanımlanan  $(t_n)$  dizisine,  $\sum a_n$  serisinin B dönüşüm dizisi denir ve B ye seriden diziye bir dönüşüm adı verilir. Bu dönüşümün tanımlı olması için (1.3) deki toplamın  $\forall n$  için yakınsak olması gerekir [7].

**Tanım 1.5.** Reel ya da kompleks terimli bir  $C = (c_{nk})$  sonsuz matrisi ve  $\sum a_n$  serisi verilmiş olsun.

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} a_k \tag{1.4}$$

mevcut ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = s$$

ise, C ye seriden seriye dönüşüm, s sayısına da  $\sum a_n$  serisinin C dönüşümü ile genelleştirilmiş toplamı denir [7].

**Tanım 1.6.** Kısmi toplamlar dizisi  $(s_n)$  olan bir  $\sum a_n$  serisi verilmiş olsun. Ayrıca  $(s_n)$  dizisinin  $A = (a_{nk})$  matrisi yardımıyla oluşturulan  $(t_n)$  dönüşüm dizisi, (1.1) deki şekilde tanımlansın. Eğer  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s$  ise,  $\sum a_n$  serisine veya  $(s_n)$  dizisine  $s$  değerine  $A$  toplanabilir denir [9].

**Tanım 1.7.** Kısmi toplamlar dizisi  $(s_n)$  olan bir  $\sum a_n$  serisi verilmiş olsun.  $(s_n)$  dizisinin  $A = (a_{nk})$  matrisi yardımıyla verilen  $(t_n)$  dönüşüm dizisi, (1.1) deki şekilde tanımlansın. Eğer  $(t_n) \in BV$  ise,  $\sum a_n$  serisine veya  $(s_n)$  dizisine mutlak  $A$  toplanabilir ya da  $|A|$  toplanabilir denir. Eğer  $\sum a_n$  serisi  $|A|$  toplanabilir ise  $\sum a_n \in |A|$  veya  $(s_n) \in |A|$  sembollerinden biri ile gösterilir [1].

**Tanım 1.8.**  $A = (a_{nk})$  matrisinin esas köşegen üstünde kalan elemanları "0", altında kalan elemanlarından en az biri "0" dan farklı ise, bu matrise alt üçgensel matris denir. Yani

$$A = (a_{nk}) = \begin{cases} \exists a_{nk} \neq 0, n > k \text{ ise} \\ \forall a_{nk} = 0, n < k \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matrise alt üçgensel matris denir [10].

**Tanım 1.9.** Köşegen üzerindeki terimleri sıfırdan farklı olan alt üçgensel matrise normal matris denir.

**Tanım 1.10.** Kısmi toplamlar dizisi  $(s_n)$  olan bir  $\sum a_n$  serisi verilmiş olsun.  $(s_n)$  dizisinin  $A = (a_{nk})$  normal matrisi yardımıyla tanımlanan  $(A_n(s))$  dönüşüm dizisi

$$A_n(s) = \sum_{k=0}^n a_{nk} s_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde olsun.

$$\bar{\Delta} A_n(s) = A_n(s) - A_{n-1}(s)$$

olmak üzere,  $k \geq 1$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\bar{\Delta}A_n(s)|^k < \infty \quad (1.5)$$

ise,  $\sum a_n$  serisi  $|A|_k$  toplanabilirdir denir [3].

**Tanım 1.11.** Kısmi toplamlar dizisi  $(s_n)$  olan bir  $\sum a_n$  serisi verilmiş olsun.  $\sum a_n$  serisinin veya  $(s_n)$  dizisinin matris elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & v \leq n \text{ için} \\ 0, & v > n \text{ için} \end{cases} \quad (1.6)$$

ile verilen  $A = (a_{nv})$  matrisi yardımıyla elde edilen  $(\sigma_n)$  dönüşüm dizisi

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n s_v \quad (1.7)$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan ortalamaya Cesàro ortalaması veya kısaca (C,1) ortalaması denir [9]. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$$

ise,  $\sum a_n$  serisi  $s$  değerine (C,1) toplanabilirdir denir.

**Tanım 1.12.**  $(\sigma_n)$ , (1,7) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n - \sigma_{n-1}| < \infty \quad (1.8)$$

ise,  $\sum a_n$  serisi  $|C,1|$  toplanabilirdir denir [11].

**Tanım 1.13.**  $k \geq 1$  olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^k < \infty \quad (1.9)$$

ise,  $\sum a_n$  serisi  $|C,1|_k$  toplanabilirdir denir [12].

Özel olarak, (1.9) da  $k = 1$  alırsak,  $|C,1|$  toplanabilmeyi elde ederiz.

Aksi bir şey söylenmedikçe bu çalışmamızda baştan sona kadar  $(s_n)$ ,  $\sum a_n$  serisinin kısmi toplamlar dizisini ve  $(p_n)$ ,

$$P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (P_{-i} = p_{-i} = 0, \quad i \geq 1) \quad (1.10)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini gösterecektir.

**Tanım 1.14.**  $(p_n)$ , (1.10) şartını sağlayacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere  $(s_n)$  dizisinden  $(u_n)$  dizisine

$$u_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v \quad (1.11)$$

ile verilen dönüşüme Riesz ortalaması ya da Riesz dönüşümü denir veya kısaca  $(\bar{N}, p_n)$  ortalaması ya da  $(\bar{N}, p_n)$  dönüşümü denir [13].

(1.11) ile tanımlanan dönüşümün matris elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \frac{p_v}{P_n}, & v \leq n \text{ için} \\ 0, & v > n \text{ için} \end{cases} \quad (1.12)$$

şeklinde ifade edilir [9].

**Teorem 1.15.**  $(\bar{N}, p_n)$  metodu regüler bir metottur. Bu metodun regüler olması için gerek ve yeter şart  $n \rightarrow \infty$  için  $P_n \rightarrow \infty$  olmasıdır [9].

**Tanım 1.16.**  $(u_n)$ , (1.11) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = s$$

ise,  $\sum a_n$  serisi s değerine  $(\bar{N}, p_n)$  toplanabilir denir [13].

**Tanım 1.17.** Kısmi toplamlar dizisi  $(s_n)$  olan bir  $\sum a_n$  serisi ve bu serinin (1.11) ile verilen  $(u_n)$  Riesz dönüşümü verilmiş olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n-1}| < \infty \quad (1.13)$$

ise,  $\sum a_n$  serisi mutlak  $(\bar{N}, p_n)$  veya kısaca  $|\bar{N}, p_n|$  toplanabilirdir denir [14].

**Tanım 1.18.**  $k \geq 1$  olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |u_n - u_{n-1}|^k < \infty \quad (1.14)$$

ise,  $\sum a_n$  serisi  $k$  indisli mutlak  $(\bar{N}, p_n)$  toplanabilir veya kısaca  $|\bar{N}, p_n|_k$  toplanabilirdir denir [4].

(1.14) de  $\forall n \in N$  için  $p_n = 1$  alırsak,  $|C, 1|_k$  toplanabilmeyi elde ederiz.

**Tanım 1.19.**  $(p_n)$ , (1.10) daki gibi bir dizi,  $A = (a_{nk})$  da normal matris olsun. Eğer  $k \geq 1$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\bar{\Delta}A_n(s)|^k < \infty \quad (1.15)$$

ise,  $\sum a_n$  serisi  $|A, p_n|_k$  toplanabilirdir denir [15].

Burada özel olarak  $a_{nv} = \frac{P_v}{P_n}$  alınır,  $|A, p_n|_k$  toplanabilirliği  $|\bar{N}, p_n|_k$  toplanabilirliğe denktir.

**Tanım 1.20.**  $A$  ve  $B$  verilen iki toplanabilme metodu olsun.  $A$  toplanabilen her dizi, aynı değere  $B$  toplanabiliyorsa,  $A$  ya  $B$  yi gerektiriyor denir ve  $A \subseteq B$  ile gösterilir. Eğer  $A \subseteq B$  ve  $B \subseteq A$  ise,  $A$  metodu  $B$  metoduna denktir denir [9].

**Tanım 1.21.** Bir  $\sum a_n$  serisi verilmiş olsun.  $\sum a_n \lambda_n$  serisi bir  $B$  toplanabilme metodu yardımıyla toplanabiliyorsa,  $(\lambda_n)$  dizisine  $\sum a_n$  serisinin  $B$  metodu için bir toplanabilme çarpanı denir [2].

**Tanım 1.22.** A ve B herhangi iki pozitif sabit ve  $(c_n)$  dizisi pozitif artan bir dizi olmak üzere

$$Ac_n \leq b_n \leq Bc_n$$

şartını sağlayan pozitif  $(b_n)$  dizisine hemen hemen artan bir dizi denir [16].

**Tanım 1.23. (Hölder Eşitsizliği)**

$p > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ve  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ,  $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$  olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.16)$$

dir [7].

**Tanım 1.24. (Minkowski Eşitsizliği)**

$p > 1$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  ve  $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$  olsun. Bu takdirde

$$\left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.17)$$

dir [7].

Şimdi, birinci bölümün son kısmında konumuzla ilgili teoremlerin ve lemmaların sadece ifadelerini vermekle yetineceğiz.

**Teorem 1.25.**  $(X_n)$  pozitif monoton azalmayan bir dizi,  $(\lambda_n)$  dizisi de

$$|\lambda_m| X_m = O(1), \quad m \rightarrow \infty, \quad (1.18)$$

$$\sum_{n=1}^m n X_n |\Delta^2 \lambda_n| = O(1) \quad (1.19)$$

olacak şekilde bir dizi olsun.  $(na_n)$  dizisinin 1-inci mertebeden Cesàro ortalaması  $(t_n)$  olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} |t_n|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (1.20)$$

şartı sağlanıyorsa,  $\sum a_n \lambda_n$  serisi  $k \geq 1$  için  $|C, 1|_k$  toplanabilirdir denir [17].

**Teorem 1.26.**  $(X_n)$  pozitif azalmayan bir dizi,  $(\beta_n)$ ,  $(\lambda_n)$  dizileri de (1.18) ve

$$|\Delta \lambda_n| \leq \beta_n, \quad (1.21)$$

$$\beta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |\Delta \beta_n| X_n < \infty \quad (1.23)$$

şartlarını sağlayan diziler olsunlar. Eğer

$$\sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |s_v|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (1.24)$$

şartı sağlanıyorsa,  $\sum a_n \lambda_n$  serisi  $k \geq 1$  için  $|C, 1|_k$  toplanabilirdir denir [18].

**Teorem 1.27.**  $(X_n)$  pozitif azalmayan bir dizi,  $(\beta_n)$ ,  $(\lambda_n)$  dizileri de (1.21) - (1.23)

ve (1.18) şartlarını sağlayan diziler olsunlar. Ayrıca

$$\sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |s_v| = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (1.25)$$

şartı ve  $(p_n)$  pozitif sayı dizisi için

$$P_n = O(np_n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.26)$$

$$P_n \Delta p_n = O(p_n p_{n+1}) \quad (1.27)$$

şartları sağlanıyorsa,  $\sum a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$  serisi  $k \geq 1$  için  $|\bar{N}, p_n|$  toplanabilirdir denir [19].

**Lemma 1.28.**  $(X_n)$  pozitif monoton azalmayan bir dizi,  $(\lambda_n)$  dizisi de Teorem 1.25 in

şartlarını sağlayan bir dizi ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n |\Delta \lambda_n| < \infty, \quad (1.28)$$

$$nX_n |\Delta \lambda_n| = O(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (1.29)$$

şartları sağlanır [20].

**Lemma 1.29.**  $(X_n)$  pozitif azalmayan bir dizi,  $(\beta_n)$  ve  $(\lambda_n)$  dizileri de Teorem 1.26'nın şartlarını sağlayan diziler ise

$$n\beta_n X_n = O(1), \quad (1.30)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n < \infty \quad (1.31)$$

şartları sağlanır [18].

**Lemma 1.30.**  $(p_n)$  pozitif sayı dizisi (1.26) - (1.27) şartlarını sağlasın. Bu takdirde

$$\Delta\left(\frac{P_n}{np_n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.32)$$

eşitliği sağlanır [19].

**Lemma 1.31.**  $(X_n)$  hemen hemen artan bir dizi olmak üzere  $(\lambda_n)$  dizisi Teorem 1.25'in şartlarını sağlıyorsa, (1.28) ve (1.29) şartları sağlanır [21].

**Lemma 1.32.**  $(X_n)$  hemen hemen artan bir olmak üzere  $(\beta_n)$  ve  $(\lambda_n)$  dizileri için Teorem 1.26'nın şartları sağlanıyorsa, (1.30) - (1.31) şartları sağlanır [22].

## 2. BÖLÜM

### SONSUZ SERİLERİN $|\bar{N}, p_n|_k$ TOPLANABİLİRLİĞİ İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde, birinci bölümde ifade edilen teoremleri  $|\bar{N}, p_n|_k$  toplanabilirliğe genelleştiren üç teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

#### 2.1. $\sum a_n \lambda_n$ Serisinin $|\bar{N}, p_n|_k$ Toplanabilirliği İle İlgili Teoremler

**Teorem 2.1.**  $(X_n)$  pozitif monoton azalmayan bir dizi,  $(\lambda_n)$  dizisi de (1.18) ve (1.19) şartlarını sağlayan bir dizi olsun.  $(p_n)$  pozitif sayı dizisi için (1.26) ve

$$\sum_{n=1}^m \frac{p_n}{P_n} |t_n|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.1)$$

şartı sağlanıyorsa,  $\sum a_n \lambda_n$  serisi  $k \geq 1$  için  $|\bar{N}, p_n|_k$  toplanabilirdir denir [20].

**İspat:**  $\sum a_n \lambda_n$  serisinin  $(\bar{N}, p_n)$  ortalaması  $(T_n)$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n P_v \sum_{r=0}^v a_r \lambda_r = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n a_v \lambda_v \sum_{r=v}^n p_r \\ &= \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n (P_n - P_{v-1}) a_v \lambda_v \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre  $n \geq 1$  için  $T_n - T_{n-1}$  farkını teşkil edersek

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v \lambda_v = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n \frac{P_{v-1} \lambda_v}{v} v a_v$$

elde ederiz. Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
T_n - T_{n-1} &= \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \Delta \left( \frac{P_{v-1} \lambda_v}{v} \right) \sum_{r=1}^v r a_r + \frac{P_n \lambda_n}{n P_n} \sum_{v=1}^n v a_v \\
&= \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \Delta \left( \frac{P_{v-1} \lambda_v}{v} \right) (v+1) t_v + \frac{(n+1)}{n P_n} P_n \lambda_n t_n
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\Delta \left( \frac{P_{v-1} \lambda_v}{v} \right) &= \frac{P_{v-1} \lambda_v}{v} - \frac{P_v \lambda_{v+1}}{v+1} \\
&= \frac{P_{v-1} \lambda_v}{v} - \frac{P_v \lambda_v}{v} + \frac{P_v \lambda_v}{v} - \frac{P_v \lambda_{v+1}}{v} + \frac{P_v \lambda_{v+1}}{v} - \frac{P_v \lambda_{v+1}}{v+1} \\
&= \frac{(P_{v-1} - P_v) \lambda_v}{v} + \frac{P_v (\lambda_v - \lambda_{v+1})}{v} + \frac{P_v \lambda_{v+1}}{v(v+1)} \\
&= -\frac{P_v \lambda_v}{v} + \frac{P_v \Delta \lambda_v}{v} + \frac{P_v \lambda_{v+1}}{v(v+1)}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} T_n &= \frac{(n+1)}{n P_n} P_n \lambda_n t_n - \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} P_v t_v \lambda_v \\
&\quad + \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} P_v \Delta \lambda_v t_v + \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} P_v \lambda_{v+1} t_v \\
&= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}
\end{aligned}$$

bulunur. Teoremi ispatlamak için

$$|T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}|^k \leq 4^k \left( |T_{n,1}|^k + |T_{n,2}|^k + |T_{n,3}|^k + |T_{n,4}|^k \right)$$

eşitsizliğinden faydalanarak,  $r = 1, 2, 3, 4$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,r}|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak  $T_{n,1}$  ifadesi için (1.18) den dolayı

$|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,1}|^k &= \sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \frac{(n+1) P_n \lambda_n t_n}{n P_n} \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| \frac{P_n}{P_n} |t_n|^k
\end{aligned}$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^m |\lambda_n| \frac{P_n}{P_n} |t_n|^k$$

bulunur. Bu ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygular ve (2.1), (1.18), (1.28) şartlarını da dikkate alırsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta |\lambda_n| \sum_{v=1}^n \frac{P_v}{P_v} |t_v|^k + O(1) |\lambda_m| \sum_{r=1}^m \frac{P_r}{P_r} |t_r|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta \lambda_n| X_n + O(1) |\lambda_m| X_m \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde ederiz.  $T_{n,2}$  için  $k > 1$  ve  $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$  olmak üzere  $k$  ve  $k'$  indisleri için Hölder

eşitsizliğini uygulayarak  $T_{n,1}$  deki gibi işlemi devam ettirirsek

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,2}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} P_v t_v \lambda_v \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} P_v |t_v| |\lambda_v| \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left( \sum_{v=1}^{n-1} P_v |t_v|^k |\lambda_v|^k \right) \times \left( \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v \right)^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left( \sum_{v=1}^{n-1} P_v |t_v|^k |\lambda_v|^k \right) \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^k P_v |t_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^k \frac{P_v}{P_v} |t_v|^k \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde ederiz.  $T_{n,3}$  için (1.26) şartını kullanarak,  $k > 1$  olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,3}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} P_v \Delta \lambda_v t_v \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} P_v |\Delta \lambda_v| |t_v| \right)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} v p_v |\Delta \lambda_v| |t_v| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} (v |\Delta \lambda_v|)^k p_v |t_v|^k \right) \times \left( \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

elde ederiz. (1.29) şartından dolayı  $v |\Delta \lambda_v| = O(1/X_v) = O(1)$  olup bu şart kullanılarak Abel kısmi toplam formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |T_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^m (v |\Delta \lambda_v|)^{k-1} v |\Delta \lambda_v| p_v |t_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v |\Delta \lambda_v| \frac{P_v}{P_v} |t_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta (v |\Delta \lambda_v|) \sum_{r=1}^v \frac{P_r}{P_r} |t_r|^k + O(1) m |\Delta \lambda_m| \sum_{v=1}^m \frac{P_v}{P_v} |t_v|^k
\end{aligned}$$

bulunur. (2.1), (1.19), (1.28) ve (1.29) şartlarından

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |T_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta (v |\Delta \lambda_v|)| X_v + O(1) m |\Delta \lambda_m| X_m \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v X_v |\Delta^2 \lambda_v| + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta \lambda_{v+1}| X_v + O(1) m |\Delta \lambda_m| X_m \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak  $T_{n,4}$  için (1.26) şartı,  $k > 1$  olmak üzere Hölder eşitsizliği ve (1.18) den dolayı  $|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  şartı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |T_{n,4}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} \left| \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} P_v \lambda_{v+1} t_v \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} v p_v |\lambda_{v+1}| |t_v| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} p_v |\lambda_{v+1}|^k |t_v|^k \right) \times \left( \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} p_v |\lambda_{v+1}|^k |t_v|^k \right) \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_{v+1}|^{k-1} |\lambda_{v+1}| p_v |t_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k}
\end{aligned}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_{v+1}| \frac{P_v}{P} |t_v|^k$$

bulunur.  $T_{n,1}$  deki gibi bu ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygulayarak (2.1),

(1.18) ve (1.28) şartlarını kullanırsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta \lambda_{n+1}| X_n + O(1) |\lambda_{m+1}| X_m \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece  $r=1, 2, 3, 4$  için

$$\sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,r}|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.2.**  $(X_n)$  pozitif azalmayan bir dizi,  $(\beta_n)$ ,  $(\lambda_n)$  dizileri de (1.18) ve (1.21) - (1.23) şartlarını sağlayan diziler olsun.  $(p_n)$  pozitif sayı dizisi için (1.26) ve

$$\sum_{n=1}^m \frac{P_n}{P} |s_n|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

şartı sağlanıyorsa,  $\sum a_n \lambda_n$  serisi  $k \geq 1$  için  $|\bar{N}, p_n|_k$  toplanabilirdir denir [23].

**İspat.**  $\sum a_n \lambda_n$  serisinin  $(\bar{N}, p_n)$  ortalaması  $(t_n)$  olsun. Bu durumda

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v \sum_{r=0}^v a_r \lambda_r = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n (P_n - P_{v-1}) a_v \lambda_v$$

bulunur. Böylece  $n \geq 1$  için  $t_n - t_{n-1}$  farkını teşkil edersek

$$t_n - t_{n-1} = \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v \lambda_v$$

elde ederiz. Bu eşitliğe Abel kısmi toplam formülünü uygulayarak

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \Delta(P_{v-1} \lambda_v) \sum_{r=1}^v a_r + \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} P_{n-1} \lambda_n \sum_{v=1}^n a_v \\ &= \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} (P_{v-1} \lambda_v - P_v \lambda_v + P_v \lambda_v - P_v \lambda_{v+1}) s_v + \frac{P_n}{P_n} \lambda_n s_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \lambda_v s_v + \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v \Delta \lambda_v s_v + \frac{P_n}{P_n} \lambda_n s_n \\
&= t_{n,1} + t_{n,2} + t_{n,3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Teoremi ispatlamak için

$$|t_{n,1} + t_{n,2} + t_{n,3}|^k \leq 3^k \left( |t_{n,1}|^k + |t_{n,2}|^k + |t_{n,3}|^k \right)$$

eşitsizliğinden faydalanarak,  $r = 1, 2, 3$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |t_{n,r}|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak  $t_{n,1}$  için Hölder eşitsizliğini uygulayarak

(1.18) den dolayı  $|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  şartını kullanırsak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |t_{n,1}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} \left| -\frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \lambda_v s_v \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} p_v |\lambda_v| |s_v| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left( \sum_{v=1}^{n-1} p_v |\lambda_v|^k |s_v|^k \right) \times \left( \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left( \sum_{v=1}^{n-1} p_v |\lambda_v|^k |s_v|^k \right) \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m p_v |\lambda_v|^k |s_v|^k \left( \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \right) \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \frac{p_v}{P_v} |\lambda_v| |\lambda_v|^{k-1} |s_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \frac{p_v}{P_v} |\lambda_v| |s_v|^k
\end{aligned}$$

elde ederiz. Son ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygular ve (2.2), (1.21), (1.18) ve (1.31) şartlarını dikkate alırsak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |t_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta |\lambda_v| \sum_{r=1}^v \frac{p_r}{P_r} |s_r|^k + O(1) |\lambda_m| \sum_{v=1}^m \frac{p_v}{P_v} |s_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta \lambda_v| X_v + O(1) |\lambda_m| X_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_v X_v + O(1) |\lambda_m| X_m \\
&= O(1), m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi  $t_{n,2}$  için (1.21) ve (1.26) şartlarını kullanarak Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |t_{n,2}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} \left| \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v \Delta \lambda_v s_v \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left( \sum_{v=1}^{n-1} P_v |\Delta \lambda_v| |s_v| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left( \sum_{v=1}^{n-1} v \beta_v P_v |s_v| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left( \sum_{v=1}^{n-1} (v \beta_v)^k P_v |s_v|^k \right) \times \left( \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m (v \beta_v)^k P_v |s_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m (v \beta_v)^k \frac{P_v}{P_v} |s_v|^k
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (1.30) şartından dolayı  $v \beta_v = O(1/X_v) = O(1)$  olup bu şart son ifade de kullanılarak Abel kısmi toplam formülü uygulanır ve (2.2), (1.23), (1.30), (1.31) şartları da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |t_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^m (v \beta_v)^{k-1} (v \beta_v) \frac{P_v}{P_v} |s_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m (v \beta_v) \frac{P_v}{P_v} |s_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta(v \beta_v) \sum_{r=1}^v \frac{P_r}{P_r} |s_r|^k + O(1) m \beta_m \sum_{v=1}^m \frac{P_v}{P_v} |s_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta(v \beta_v)| X_v + O(1) m \beta_m X_m \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v |\Delta \beta_v| X_v + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_{v+1} X_v + O(1) m \beta_m X_m \\
&= O(1), m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak  $t_{n,3}$  ifadesi için

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |t_{n,3}|^k &= \sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \frac{P_n}{p_n} s_n \lambda_n \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \frac{P_n}{p_n} |s_n|^k |\lambda_n|^k \end{aligned}$$

elde ederiz. Son eşitlikte (1.18) den dolayı  $|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  şartı kullanılarak  $t_{n,1}$  deki gibi işleme devam edilirse

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |t_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m \frac{P_n}{p_n} |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| |s_n|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \frac{P_n}{p_n} |\lambda_n| |s_n|^k \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece  $r = 1, 2, 3$  için

$$\sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |t_{n,r}|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

olup ispat tamamlanmış olur.

### 2.3. $\sum a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$ serisinin $|\bar{N}, p_n|_k$ Toplanabilirliği İle İlgili Teorem

**Teorem 2.3.**  $(X_n)$  pozitif azalmayan bir dizi olsun. Teorem 1.27 nin şartları ve (1.25) şartının yerine

$$\sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |s_v|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

şartı sağlanıyorsa,  $\sum a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$  serisi  $k \geq 1$  için  $|\bar{N}, p_n|_k$  toplanabilirdir denir [24].

Ayrıca teoremin hipotezlerinden  $(\lambda_n)$  dizisinin sınırlı ve  $\Delta \lambda_n = O(1/n)$  olduğu söylenebilir [24].

**İspat.**  $\sum a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$  serisinin  $(\bar{N}, p_n)$  ortalaması  $(m_n)$  olsun. Bu durumda

$$m_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n P_v \sum_{r=0}^v \frac{a_r P_r \lambda_r}{r p_r} = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n (P_n - P_{v-1}) \frac{a_v P_v \lambda_v}{v p_v}$$

bulunur. Böylece  $n \geq 1$  için  $m_n - m_{n-1}$  farkını teşkil edersek

$$m_n - m_{n-1} = \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n \frac{P_{v-1} P_v a_v \lambda_v}{v p_v}$$

elde ederiz. Bu ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygularsak

$$m_n - m_{n-1} = \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \Delta \left( \frac{P_{v-1} P_v \lambda_v}{v p_v} \right) \sum_{r=1}^v a_r + \frac{\lambda_n}{n} \sum_{v=1}^n a_v$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{P_{v-1} P_v \lambda_v}{v p_v} \right) &= \frac{P_{v-1} P_v \lambda_v}{v p_v} - \frac{P_v P_{v+1} \lambda_{v+1}}{(v+1) p_{v+1}} \\ &= \frac{P_{v-1} P_v \lambda_v}{v p_v} - \frac{P_v P_v \lambda_v}{v p_v} + \frac{P_v P_v \lambda_v}{v p_v} \\ &\quad - \frac{P_v P_{v+1} \lambda_v}{(v+1) p_{v+1}} + \frac{P_v P_{v+1} \lambda_v}{(v+1) p_{v+1}} - \frac{P_v P_{v+1} \lambda_{v+1}}{(v+1) p_{v+1}} \\ &= \frac{P_{v+1} P_v \Delta \lambda_v}{(v+1) p_{v+1}} + P_v \lambda_v \Delta \left( \frac{P_v}{v p_v} \right) - P_v \lambda_v \frac{1}{v} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} m_n - m_{n-1} &= \frac{s_n \lambda_n}{n} + \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} s_v \frac{P_{v+1} P_v \Delta \lambda_v}{(v+1) p_{v+1}} \\ &\quad + \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v s_v \lambda_v \Delta \left( \frac{P_v}{v p_v} \right) - \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} s_v P_v \lambda_v \frac{1}{v} \\ &= m_{n,1} + m_{n,2} + m_{n,3} + m_{n,4} \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremi ispatlamak için

$$\left| m_{n,1} + m_{n,2} + m_{n,3} + m_{n,4} \right|^k \leq 4^k \left( \left| m_{n,1} \right|^k + \left| m_{n,2} \right|^k + \left| m_{n,3} \right|^k + \left| m_{n,4} \right|^k \right)$$

eşitsizliğinden yararlanarak,  $r = 1, 2, 3, 4$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| m_{n,r} \right|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak  $m_{n,1}$  için (1.26) şartı, (1.18) den dolayı

$|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  şartını kullanarak Abel kısmi toplam formülünü uygularsak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |m_{n,1}|^k &= \sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \frac{s_n \lambda_n}{n} \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{np_n} \right)^{k-1} |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| \frac{|s_n|^k}{n} \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m |\lambda_n| \frac{|s_n|^k}{n} \\
&= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta \lambda_n| \sum_{v=1}^n \frac{|s_v|^k}{v} + O(1) |\lambda_m| \sum_{r=1}^m \frac{|s_r|^k}{r}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitlikte (2.3), (1.21), (1.18), (1.31) şartlarını kullanırsak,  $m \rightarrow \infty$  için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |m_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n X_n + O(1) |\lambda_m| X_m \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

elde ederiz.  $m_{n,2}$  için (1.26) şartını kullanarak Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |m_{n,2}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} s_v \frac{P_{v+1} P_v \Delta \lambda_v}{(v+1) p_{v+1}} \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} |s_v| p_v |\Delta \lambda_v| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left( \sum_{v=1}^{n-1} \left( \frac{P_v}{p_v} \right)^k |s_v|^k p_v |\Delta \lambda_v|^k \right) \times \left( \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left( \frac{P_v}{p_v} \right)^k |s_v|^k p_v |\Delta \lambda_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left( \frac{P_v |\Delta \lambda_v|}{p_v} \right)^{k-1} |s_v|^k |\Delta \lambda_v|
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu son eşitlikte  $|\Delta \lambda_v| = O(1/v)$  ifadesini, (1.21) ve (1.26) şartlarını kullanırsak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |m_{n,2}|^k = O(1) \sum_{v=1}^m \left( \frac{P_v}{vp_v} \right)^{k-1} |s_v|^k \beta_v$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^m v \beta_v \frac{|s_v|^k}{v}$$

elde ederiz. Bu ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygulayarak (2.3), (1.23), (1.30) ve (1.31) şartlarını kullanırsak,  $m \rightarrow \infty$  için

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |m_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta(v\beta_v) \sum_{r=1}^v \frac{|s_r|^k}{r} + O(1) m \beta_m \sum_{v=1}^m \frac{|s_v|^k}{v} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta(v\beta_v)| X_v + O(1) m \beta_m X_m \\ &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v |\Delta\beta_v| X_v + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_{v+1} X_v + O(1) m \beta_m X_m \\ &= O(1) \end{aligned}$$

elde ederiz.  $m_{n,3}$  için Lemma 1.30 un  $\Delta(P_n / np_n) = O(1/n)$  ifadesini kullanarak Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |m_{n,3}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} \left| \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v s_v \lambda_v \Delta \left( \frac{P_v}{v P_v} \right) \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{P_v} p_v |s_v| |\lambda_v| \frac{1}{v} \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left( \sum_{v=1}^{n-1} \left( \frac{P_v}{v P_v} \right)^k p_v |s_v|^k |\lambda_v|^k \right) \times \left( \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right)^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \left( \frac{P_v}{v P_v} \right)^k |s_v|^k p_v |\lambda_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \left( \frac{P_v}{v P_v} \right)^k p_v |s_v|^k |\lambda_v|^k \frac{1}{P_v} v \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \left( \frac{P_v}{v P_v} \right)^{k-1} |\lambda_v|^k \frac{|s_v|^k}{v} \end{aligned}$$

elde ederiz. Son ifade de (1.26) şartını ve (1.18) den dolayı  $|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  şartını kullanırsak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |m_{n,3}|^k = O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^{k-1} |\lambda_v| \frac{|s_v|^k}{v}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v| \frac{|s_v|^k}{v}$$

elde ederiz. İşlemi  $m_{n,1}$  deki gibi devam ettirirsek,  $m \rightarrow \infty$  için

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |m_{n,3}|^k = O(1)$$

elde ederiz. Son olarak  $m_{n,4}$  için Hölder eşitsizliğini uygulayarak (1.26) şartını kullanırsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |m_{n,4}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} \left| -\frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} s_v P_v \lambda_v \frac{1}{v} \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |s_v| \frac{P_v}{v} |\lambda_v| \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |s_v| \frac{P_v}{v P_v} p_v |\lambda_v| \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |s_v|^k \left( \frac{P_v}{v P_v} \right)^k p_v |\lambda_v|^k \right) \times \left( \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right)^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \left( \frac{P_v}{v P_v} \right)^k p_v |s_v|^k |\lambda_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \left( \frac{P_v}{v P_v} \right)^k \frac{v p_v |s_v|^k}{P_v v} |\lambda_v|^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^k \frac{|s_v|^k}{v} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. İşleme  $m_{n,3}$  deki gibi devam edilirse,  $m \rightarrow \infty$  için

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |m_{n,4}|^k = O(1)$$

bulunur. Böylece  $r = 1, 2, 3, 4$  için

$$\sum_{n=1}^m \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |m_{n,r}|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

### 3. BÖLÜM

#### SONSUZ SERİLERİN $\varphi$ - $|A, p_n|_k$ TOPLANABİLİRLİĞİ

Bu bölümde, birinci bölümde verilen  $|A, p_n|_k$  toplanabilme tanımını genelleştiren yeni bir tanım vereceğiz ve daha sonra bu tanıma kullanmak suretiyle ikinci bölümde ifade ve ispat edilen üç teoremi pozitif azalmayan dizinin yerine hemen hemen artan diziyi kullanarak daha zayıf şartlar altında  $\varphi$ - $|A, p_n|_k$  toplanabilirliğe genelleştireceğiz.

**Tanım 3.1.**  $(\varphi_n)$  pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{k-1} |\bar{\Delta}A_n(s)|^k < \infty \quad (3.1)$$

ise,  $\sum a_n$  serisi  $\varphi$ - $|A, p_n|_k$  toplanabilirdir denir [6].

Burada özel olarak  $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$  alırsak,  $\varphi$ - $|A, p_n|_k$  toplanabilirliği  $|A, p_n|_k$  toplanabilirliğe

indirgenir. Ayrıca  $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$  ve  $a_{nv} = \frac{p_v}{P_n}$  alırsak,  $\varphi$ - $|A, p_n|_k$  toplanabilirliği  $|\bar{N}, p_n|_k$

toplabilirliğe indirgenir. Aynı zamanda  $\varphi_n = n$ ,  $a_{nv} = \frac{p_v}{P_n}$  ve  $\forall n \in N$  için  $p_n = 1$

alırsak,  $\varphi$ - $|A, p_n|_k$  toplanabilirliği  $|C, 1|_k$  toplanabilirliğe indirgenir.

Bir  $A = (a_{nv})$  normal matrisi verilsin. Bu durumda  $\bar{A} = (\bar{a}_{nv})$  ve  $\hat{A} = (\hat{a}_{nv})$  alt yarı matrislerini

$$\bar{a}_{nv} = \sum_{i=v}^n a_{ni}, \quad n, v = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

$$\text{ve } \hat{a}_{nv} = \bar{a}_{nv} - \bar{a}_{n-1,v}, \quad \hat{a}_{00} = \bar{a}_{00} = a_{00}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

şeklinde oluşturabiliriz. A matrisi normal ise

$$\begin{aligned} A_n(s) &= \sum_{v=0}^n a_{nv} s_v = \sum_{v=0}^n a_{nv} \sum_{r=0}^v a_r \\ &= \sum_{r=0}^n a_r \sum_{v=r}^n a_{nv} = \sum_{r=0}^n a_r \bar{a}_{nr} = \sum_{v=0}^n \bar{a}_{nv} a_v \end{aligned} \quad (3.4)$$

ve  $\bar{a}_{n-1,n} = \sum_{i=n}^{n-1} a_{n-1,i} = 0$  olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}A_n(s) &= A_n(s) - A_{n-1}(s) = \sum_{v=0}^n \bar{a}_{nv} a_v - \sum_{v=0}^{n-1} \bar{a}_{n-1,v} a_v \\ &= \sum_{v=0}^n (\bar{a}_{nv} - \bar{a}_{n-1,v}) a_v + \bar{a}_{n-1,n} a_n = \sum_{v=0}^n \hat{a}_{nv} a_v \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. Sırasıyla,  $\bar{A}$  ve  $\hat{A}$ , seriden diziye ve seriden seriye dönüşüm matrisleridir.

### 3.1. $\sum a_n \lambda_n$ Serisinin $\varphi - |A, p_n|_k$ Toplanabilirliği ile İlgili Teoremler

**Teorem 3.1.**  $A = (a_{nv})$  pozitif normal matris olmak üzere

$$\bar{a}_{n0} = 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

$$a_{n-1,v} \geq a_{nv}, \quad n \geq v+1, \quad (3.7)$$

$$a_{mm} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right), \quad (3.8)$$

$$|\hat{a}_{n,v+1}| = O(v |\Delta_v \hat{a}_{nv}|) \quad (3.9)$$

şartlarını sağlasın.  $(X_n)$  hemen hemen artan bir dizi ve  $\left(\frac{\varphi_n p_n}{P_n}\right)$  artmayan bir dizi

olsun. Teorem 2.1 in şartları ve (2.1) şartının yerine

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left(\frac{p_n}{P_n}\right)^k |t_n|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

şartı sağlanıyorsa,  $\sum a_n \lambda_n$  serisi  $k \geq 1$  için  $\varphi - |A, p_n|_k$  toplanabilirdir denir [6].

**İspat.**  $\sum a_n \lambda_n$  serisinin  $(A, p_n)$  ortalamasını  $(u_n)$  ile gösterelim. O halde (3.4) den

$$u_n = \sum_{v=0}^n \bar{a}_{nv} a_v \lambda_v$$

yazabiliriz. Buna göre (3.5) şartını kullanarak  $u_n - u_{n-1}$  farkını teşkil edersek

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \sum_{v=0}^n \bar{a}_{nv} a_v \lambda_v - \sum_{v=0}^{n-1} \bar{a}_{n-1,v} a_v \lambda_v \\ &= \sum_{v=0}^n \hat{a}_{nv} a_v \lambda_v \end{aligned}$$

buluruz.  $\hat{a}_{n0} = \bar{a}_{n0} - \bar{a}_{n-1,0}$  eşitliği ve (3.6) şartı göz önüne alınırsa  $\hat{a}_{n0} = 0$  elde edilir.

$$u_n - u_{n-1} = \sum_{v=0}^n \hat{a}_{nv} a_v \lambda_v = \sum_{v=1}^n \hat{a}_{nv} a_v \lambda_v = \sum_{v=1}^n \frac{\hat{a}_{nv} \lambda_v}{v} v a_v$$

şeklindedir. Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \sum_{v=1}^{n-1} \Delta_v \left( \frac{\hat{a}_{nv} \lambda_v}{v} \right) \sum_{r=1}^v r a_r + \frac{\hat{a}_{nn} \lambda_n}{n} \sum_{v=1}^n v a_v \\ &= \sum_{v=1}^{n-1} \left( \frac{\hat{a}_{nv} \lambda_v}{v} - \frac{\hat{a}_{n,v+1} \lambda_{v+1}}{v+1} \right) (v+1) t_v + \frac{\hat{a}_{nn} \lambda_n}{n} (n+1) t_n \\ &= \frac{n+1}{n} a_{nn} \lambda_n t_n + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} \Delta_v (\hat{a}_{nv}) \lambda_v t_v \\ &\quad + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} \hat{a}_{n,v+1} \Delta \lambda_v t_v + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} \hat{a}_{n,v+1} \lambda_{v+1} t_v \\ &= u_{n,1} + u_{n,2} + u_{n,3} + u_{n,4} \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin ispatı için

$$\left| u_{n,1} + u_{n,2} + u_{n,3} + u_{n,4} \right|^k \leq 4^k \left( |u_{n,1}|^k + |u_{n,2}|^k + |u_{n,3}|^k + |u_{n,4}|^k \right)$$

eşitsizliğinden faydalanarak  $i = 1, 2, 3, 4$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{k-1} |u_{n,i}|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (1.18) den dolayı  $|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  ifadesini ve

(3.8) şartını kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |u_{n,1}|^k &= \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left| \frac{n+1}{n} a_{nn} \lambda_n t_n \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left( \frac{p_n}{P_n} \right)^k |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| |t_n|^k \end{aligned}$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left( \frac{P_n}{P} \right)^k |\lambda_n| |t_n|^k$$

buluruz. Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygular (3.10), (1.18) şartlarını ve Lemma 1.31 i göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |u_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta |\lambda_n| \sum_{r=1}^n \varphi_r^{k-1} \left( \frac{P_r}{P} \right)^k |t_r|^k \\ &\quad + O(1) |\lambda_m| \sum_{v=1}^m \varphi_v^{k-1} \left( \frac{P_v}{P} \right)^k |t_v|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta \lambda_n| X_n + O(1) |\lambda_m| X_m \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde ederiz.  $u_{n,2}$  için  $k > 1$ ,  $1/k + 1/k' = 1$  olacak şekildeki  $k$  ve  $k'$  indisleri için Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |u_{n,2}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} \Delta_v(\hat{a}_{nv}) \lambda_v t_v \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\lambda_v| |t_v| \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\lambda_v|^k |t_v|^k \right) \times \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \right)^{k-1} \end{aligned}$$

elde ederiz.  $\bar{A}$  ve  $\hat{A}$  matrislerinin tanımından

$$\begin{aligned} \Delta_v(\hat{a}_{nv}) &= \hat{a}_{nv} - \hat{a}_{n,v+1} = \bar{a}_{nv} - \bar{a}_{n-1,v} - \bar{a}_{n,v+1} + \bar{a}_{n-1,v+1} \\ &= \sum_{i=v}^n a_{ni} - \sum_{i=v}^{n-1} a_{n-1,i} - \sum_{i=v+1}^n a_{ni} + \sum_{i=v+1}^{n-1} a_{n-1,i} \\ &= a_{nv} - a_{n-1,v} \end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.7) den dolayı  $a_{n-1,v} \geq a_{nv}$  ve (3.6) dan dolayı  $\bar{a}_{n0} = 1$  olduğundan

$$\sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| = \sum_{v=1}^{n-1} (a_{n-1,v} - a_{nv}) = 1 - a_{n-1,0} - 1 + a_{n0} + a_m \leq a_m \tag{3.12}$$

bulunur. (3.12) ve (3.8) şartlarını kullanarak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |u_{n,2}|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{\varphi_n P_n}{P} \right)^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\lambda_v|^k |t_v|^k \right)$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^{k-1} |\lambda_v| |t_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \left( \frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)^{k-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})|$$

ifadesi elde edilir. (1.18) den dolayı  $|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  şartı ve  $\left( \frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)$  dizisinin artmayan dizi olma şartı kullanılarak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |u_{n,2}|^k = O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v| |t_v|^k \left( \frac{\varphi_v P_v}{P_v} \right)^{k-1} \sum_{n=v+1}^{m+1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})|$$

elde ederiz. (3.11) deki  $\Delta_v(\hat{a}_{nv}) = a_{nv} - a_{n-1,v}$  eşitliğini ve (3.7) şartını kullanarak

$$\sum_{n=v+1}^{m+1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| = \sum_{n=v+1}^{m+1} (a_{n-1,v} - a_{nv}) = \sum_{n=v}^m a_{nv} - \sum_{n=v+1}^{m+1} a_{nv} = a_{vv} - a_{m+1,v} \leq a_{vv} \quad (3.13)$$

bulunur. Böylece (3.13) ve (3.8) şartları kullanılarak  $u_{n,1}$  deki gibi işleme devam edersek

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |u_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v| |t_v|^k \left( \frac{\varphi_v P_v}{P_v} \right)^{k-1} \left( \frac{P_v}{P_v} \right) \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v| |t_v|^k \varphi_v^{k-1} \left( \frac{P_v}{P_v} \right)^k \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Yine  $\bar{A}$  ve  $\hat{A}$  matrislerinin tanımı ve (3.6), (3.7) şartlarından

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n,v+1} &= \bar{a}_{n,v+1} - \bar{a}_{n-1,v+1} = \sum_{i=v+1}^n a_{ni} - \sum_{i=v+1}^{n-1} a_{n-1,i} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^v a_{ni} - 1 + \sum_{i=0}^v a_{n-1,i} = \sum_{i=0}^v (a_{n-1,i} - a_{ni}) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

yazabiliriz. Şimdi de  $u_{n,3}$  için Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |u_{n,3}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} \hat{a}_{n,v+1} \Delta \lambda_v t_v \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\hat{a}_{n,v+1}| |\Delta \lambda_v| |t_v|^k \right) \times \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\hat{a}_{n,v+1}| |\Delta \lambda_v| \right)^{k-1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Lemma 1.31 den dolayı  $v |\Delta \lambda_v| = O(1/X_v) = O(1)$  olup, (3.9) ve (3.12) ifadelerini de dikkate alırsak

$$\sum_{v=1}^{n-1} |\hat{a}_{n,v+1}| |\Delta \lambda_v| = O(1) \sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\Delta \lambda_v| = O(1) \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| = O(a_{nm})$$

buluruz. (3.8) şartı ve  $\left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)$  dizisinin artmayan dizi olma şartı göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |u_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)^{k-1} \left(\sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\Delta \lambda_v| |t_v|^k\right) \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m v |\Delta \lambda_v| |t_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)^{k-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m v |\Delta \lambda_v| |t_v|^k \left(\frac{\varphi_v P_v}{P_v}\right)^{k-1} \sum_{n=v+1}^{m+1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi (3.13) eşitsizliğini ve (3.8) şartını kullanarak Abel kısmi toplam formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |u_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^m v |\Delta \lambda_v| |t_v|^k \left(\frac{\varphi_v P_v}{P_v}\right)^{k-1} \left(\frac{P_v}{P_v}\right) \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m v |\Delta \lambda_v| |t_v|^k \varphi_v^{k-1} \left(\frac{P_v}{P_v}\right)^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta(v|\Delta \lambda_v)| \sum_{r=1}^v \varphi_r^{k-1} \left(\frac{P_r}{P_r}\right)^{k-1} |t_r|^k \\ &\quad + O(1) m |\Delta \lambda_m| \sum_{v=1}^m \varphi_v^{k-1} \left(\frac{P_v}{P_v}\right)^{k-1} |t_v|^k \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Bu son eşitlikte (3.10), (1.19) şartları ve Lemma 1.31 kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |u_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v X_v |\Delta^2 \lambda_v| + O(1) \sum_{r=1}^{m-1} X_v |\Delta \lambda_{v+1}| + O(1) m |\Delta \lambda_m| X_m \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak  $u_{n,4}$  için Hölder eşitsizliğini uygulayarak (3.9), (3.12), (3.8)

şartlarını ve  $\left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)$  dizisinin artmayan dizi olma şartını göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |u_{n,4}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} \hat{a}_{n,v+1} \lambda_{v+1} t_v \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} |\hat{a}_{n,v+1}| |\lambda_{v+1}|^k |t_v|^k \right) \times \left( \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} |\hat{a}_{n,v+1}| \right)^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} |\hat{a}_{n,v+1}| |\lambda_{v+1}|^k |t_v|^k \right) \times \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} |\hat{a}_{n,v+1}| |\lambda_{v+1}|^k |t_v|^k \right) \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |\lambda_{v+1}|^k |t_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \left( \frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)^{k-1} |\hat{a}_{n,v+1}| \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |\lambda_{v+1}|^k |t_v|^k \left( \frac{\varphi_v P_v}{P_v} \right)^{k-1} \sum_{n=v+1}^{m+1} |\hat{a}_{n,v+1}|
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi ise (3.14) deki ifadeyi kullanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=v+1}^{m+1} |\hat{a}_{n,v+1}| &= \sum_{n=v+1}^{m+1} \sum_{i=0}^v (a_{n-1,i} - a_{ni}) = \sum_{i=0}^v \sum_{n=v+1}^{m+1} (a_{n-1,i} - a_{ni}) \\
&= \sum_{i=0}^v (a_{vi} - a_{m+1,i}) \leq \sum_{i=0}^v a_{vi} = 1
\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde ederiz. (1.26) dan dolayı  $P_n = O(np_n)$  ve (1.18) den dolayı  $|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |u_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_{v+1}|^{k-1} |\lambda_{v+1}| |t_v|^k \varphi_v^{k-1} \left( \frac{P_v}{vP_v} \right) \left( \frac{P_v}{P_v} \right)^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_{v+1}| |t_v|^k \varphi_v^{k-1} \left( \frac{P_v}{P_v} \right)^k
\end{aligned}$$

elde ederiz.  $u_{n,1}$  deki gibi işlemi devam ettirirsek

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |u_{n,4}|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde edilir. Böylece  $r = 1, 2, 3, 4$  için

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |u_{n,r}|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

olduğu gösterilmiş olur ki bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 3.2.**  $A = (a_{nv})$  pozitif normal matrisi için (3.6) – (3.9) şartları sağlansın.  $(X_n)$

hemen hemen artan bir dizi ve  $\left( \frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)$  artmayan bir dizi olsun. Teorem 2.2 nin şartları

ve (2.2) şartının yerine

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left( \frac{p_n}{P_n} \right)^k |s_n|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

şartı sağlanıyorsa,  $\sum a_n \lambda_n$  serisi  $k \geq 1$  için  $\varphi - |A, p_n|_k$  toplanabilirdir denir.

**İspat.**  $\sum a_n \lambda_n$  serisinin  $(A, p_n)$  ortalamasını  $(h_n)$  ile gösterelim. (3.4) ve (3.5) eşitliklerinden

$$\bar{\Delta}h_n = \sum_{v=0}^n \hat{a}_{nv} \lambda_v a_v = \sum_{v=1}^n \hat{a}_{nv} \lambda_v a_v$$

elde ederiz. Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}h_n &= \sum_{v=1}^{n-1} \Delta_v(\hat{a}_{nv} \lambda_v) \sum_{r=1}^v a_r + \hat{a}_{nn} \lambda_n \sum_{v=1}^n a_v \\ &= \sum_{v=1}^{n-1} (\hat{a}_{nv} \lambda_v - \hat{a}_{n,v+1} \lambda_v + \hat{a}_{n,v+1} \lambda_v - \hat{a}_{n,v+1} \lambda_{v+1}) s_v + \hat{a}_{nn} \lambda_n s_n \\ &= \sum_{v=1}^{n-1} \Delta_v(\hat{a}_{nv}) \lambda_v s_v + \sum_{v=1}^{n-1} \hat{a}_{n,v+1} \Delta \lambda_v s_v + \hat{a}_{nn} \lambda_n s_n \\ &= h_{n,1} + h_{n,2} + h_{n,3} \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremi ispatlamak için

$$|h_{n,1} + h_{n,2} + h_{n,3}|^k \leq 3^k (|h_{n,1}|^k + |h_{n,2}|^k + |h_{n,3}|^k)$$

eşitsizliğinden yararlanarak  $r = 1, 2, 3$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{k-1} |h_{n,r}|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak  $h_{n,1}$  için  $k > 1$ ,  $1/k + 1/k' = 1$  olmak üzere  $k$  ve  $k'$  indisleri için Hölder eşitsizliğini uygulayarak, (3.12) ve (3.8) şartlarını kullanırsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |h_{n,1}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \Delta_v(\hat{a}_{nv}) \lambda_v s_v \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\lambda_v| |s_v| \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\lambda_v|^k |s_v|^k \right) \times \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \right)^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\lambda_v|^k |s_v|^k \right) \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^k |s_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \left( \frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)^{k-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})|
\end{aligned}$$

elde ederiz.  $\left( \frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)$  dizisinin artmayan dizi olma şartı, (3.13) şartı ve (1.18) den dolayı

$|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  şartı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |h_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^k |s_v|^k \left( \frac{\varphi_v p_v}{P_v} \right)^{k-1} \sum_{n=v+1}^{m+1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^{k-1} |\lambda_v| |s_v|^k \left( \frac{\varphi_v p_v}{P_v} \right)^{k-1} \frac{p_v}{P_v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v| \varphi_v^{k-1} \left( \frac{p_v}{P_v} \right)^k |s_v|^k
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygulayarak (3.16), (1.21), (1.18) şartları ve Lemma 1.32 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |h_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta \lambda_v| \sum_{r=1}^v \varphi_r^{k-1} \left( \frac{p_r}{P_r} \right)^k |s_r|^k \\
&\quad + O(1) |\lambda_m| \sum_{v=1}^m \varphi_v^{k-1} \left( \frac{p_v}{P_v} \right)^k |s_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_v X_v + O(1) |\lambda_m| X_m \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz.  $h_{n,2}$  için Hölder eşitsizliğini uygulayarak (1.21), (3.9) şartları ve Lemma 1.32 nin  $v\beta_v = O(1/X_v) = O(1)$  şartını kullanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |h_{n,2}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \hat{a}_{n,v+1} \Delta \lambda_v s_v \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\hat{a}_{n,v+1}| |\Delta \lambda_v| |s_v|^k \right) \times \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\hat{a}_{n,v+1}| |\Delta \lambda_v| \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \beta_v |s_v|^k \right) \times \left( \sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \beta_v \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \beta_v |s_v|^k \right) \times \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \right)^{k-1}$$

elde ederiz. Bu eşitlikte (3.12), (3.8), (3.13) ifadelerini ve  $\left( \frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)$  dizisinin artmayan

dizi olma şartını kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |h_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \beta_v |s_v|^k \right) \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m v \beta_v |s_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \left( \frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)^{k-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m v \beta_v |s_v|^k \left( \frac{\varphi_v p_v}{P_v} \right)^{k-1} \sum_{n=v+1}^{m+1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m v \beta_v |s_v|^k \varphi_v^{k-1} \left( \frac{P_v}{P_v} \right)^k \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygulayarak (3.16), (1.23) ve Lemma 1.32 nin şartlarını kullanırsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |h_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta(v \beta_v) \sum_{r=1}^v \varphi_r^{k-1} \left( \frac{p_r}{P_r} \right)^k |s_r|^k \\ &\quad + O(1) m \beta_m \sum_{v=1}^m \varphi_v^{k-1} \left( \frac{p_v}{P_v} \right)^k |s_v|^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta(v \beta_v)| X_v + O(1) m \beta_m X_m \\ &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v |\Delta \beta_v| X_v + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_{v+1} X_v + O(1) m \beta_m X_m \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak  $h_{n,3}$  için (1.18) den dolayı  $|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  ve (3.8)

şartlarını kullanarak  $h_{n,1}$  deki gibi işleme devam edersek

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |h_{n,3}|^k &= \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |a_{nm} \lambda_n s_n|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| \varphi_n^{k-1} \left( \frac{p_n}{P_n} \right)^k |s_n|^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=1}^m |\lambda_n| \varphi_n^{k-1} \left( \frac{p_n}{P_n} \right)^k |s_n|^k \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece  $r = 1, 2, 3$  için

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |h_{n,r}|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

gösterilmiş olur ki bu ise ispatı tamamlar.

### 3.3. $\sum a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$ Serisinin $\varphi - |A, p_n|_k$ Toplanabilirliği İle İlgili Teorem

**Teorem 3.3.**  $A = (a_{nv})$  pozitif normal matrisi için (3.6) – (3.9) şartları sağlansın.  $(X_n)$

hemen hemen artan bir dizi ve  $\left( \frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)$  de artmayan bir dizi olsun. Teorem 2.3 ün

şartları ve (2.3) şartının yerine (3.16) şartı sağlanıyorsa,  $\sum a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$  serisi  $k \geq 1$  için

$\varphi - |A, p_n|_k$  toplanabilirdir denir [25].

**İspat.**  $\sum a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$  serisinin  $(A, p_n)$  ortalamasını  $(z_n)$  ile gösterelim. (3.4) ve (3.5)

eşitliklerinden

$$\bar{\Delta} z_n = \sum_{v=1}^n \hat{a}_{nv} \frac{a_v P_v \lambda_v}{v p_v}$$

elde ederiz. Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplam formülünü uygularsak

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} z_n &= \sum_{v=1}^{n-1} \Delta_v \left( \hat{a}_{nv} \frac{P_v \lambda_v}{v p_v} \right) \sum_{r=1}^v a_r + \hat{a}_{nn} \frac{P_n \lambda_n}{n p_n} \sum_{v=1}^n a_v \\
&= \sum_{v=1}^{n-1} \Delta_v \left( \hat{a}_{nv} \frac{P_v \lambda_v}{v p_v} \right) s_v + \hat{a}_{nn} \frac{P_n \lambda_n}{n p_n} s_n
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\Delta_v \left( \hat{a}_{nv} \frac{P_v \lambda_v}{v p_v} \right) = \hat{a}_{nv} \frac{P_v \lambda_v}{v p_v} - \hat{a}_{n,v+1} \frac{P_{v+1} \lambda_{v+1}}{(v+1) p_{v+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{a}_{nv} \frac{P_v \lambda_v}{vp_v} - \hat{a}_{n,v+1} \frac{P_v \lambda_v}{vp_v} + \hat{a}_{n,v+1} \frac{P_v \lambda_v}{vp_v} - \hat{a}_{n,v+1} \frac{P_{v+1} \lambda_v}{(v+1)p_{v+1}} \\
&\quad + \hat{a}_{n,v+1} \frac{P_{v+1} \lambda_v}{(v+1)p_{v+1}} - \hat{a}_{n,v+1} \frac{P_{v+1} \lambda_{v+1}}{(v+1)p_{v+1}} \\
&= \hat{a}_{n,v+1} \frac{P_{v+1} \Delta \lambda_v}{(v+1)p_{v+1}} + \hat{a}_{n,v+1} \Delta \left( \frac{P_v}{vp_v} \right) \lambda_v + \frac{\Delta_v(\hat{a}_{nv}) P_v \lambda_v}{vp_v}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} z_n &= a_{nm} \frac{P_n \lambda_n}{np_n} s_n + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\hat{a}_{n,v+1} P_{v+1} \Delta \lambda_v}{(v+1)p_{v+1}} s_v \\
&\quad + \sum_{v=1}^{n-1} \hat{a}_{n,v+1} \Delta \left( \frac{P_v}{vp_v} \right) \lambda_v s_v + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta_v(\hat{a}_{nv}) P_v \lambda_v}{vp_v} s_v \\
&= z_{n,1} + z_{n,2} + z_{n,3} + z_{n,4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Teoremi ispatlamak için

$$|z_{n,1} + z_{n,2} + z_{n,3} + z_{n,4}|^k \leq 4^k \left( |z_{n,1}|^k + |z_{n,2}|^k + |z_{n,3}|^k + |z_{n,4}|^k \right)$$

eşitsizliğinden faydalanarak  $s = 1, 2, 3, 4$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{k-1} |z_{n,s}|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak  $z_{n,1}$  için (1.26), (3.8) şartları ve (1.18) den dolayı  $|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  şartını kullanırsak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |z_{n,1}|^k &= \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left| a_{nm} \frac{P_n \lambda_n}{np_n} s_n \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^k |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| |s_n|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left( \frac{P_n}{P_n} \right)^k |\lambda_n| |s_n|^k
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğe Abel kısmi toplam formülünü uygulayarak (1.18), (3.16) şartları ve Lemma 1.32 i kullanırsak,  $m \rightarrow \infty$  için

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |z_{n,1}|^k = \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta \lambda_n| \sum_{v=1}^n \varphi_v^{k-1} \left( \frac{P_v}{P_v} \right)^k |s_v|^k + O(1) |\lambda_m| \sum_{r=1}^m \varphi_r^{k-1} \left( \frac{P_r}{P_r} \right)^k |s_r|^k$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n X_n + O(1) |\lambda_m| X_m \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

elde ederiz.  $z_{n,2}$  için (1.26) dan dolayı  $P_{v+1} = (v+1) p_{v+1}$  şartı ve (3.9) şartını kullanarak Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |z_{n,2}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\hat{a}_{n,v+1} P_{v+1} \Delta \lambda_v}{(v+1) P_{v+1}} s_v \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\Delta \lambda_v| |s_v| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} (v |\Delta \lambda_v|)^k |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |s_v|^k \right) \times \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitlikte (3.12), (3.8), (3.13) şartları ve Lemma 1.32 den dolayı  $v\beta_v = O(1/X_v) = O(1)$  şartı ve  $\left( \frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)$  dizisinin artmayan dizi olma şartı kullanılarak

Abel kısmi toplam formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |z_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} (v |\Delta \lambda_v|)^k |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |s_v|^k \right) \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m (v\beta_v)^{k-1} (v\beta_v) |s_v|^k \left( \frac{\varphi_v P_v}{P_v} \right)^{k-1} \sum_{n=v+1}^{m+1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m (v\beta_v) |s_v|^k \varphi_v^{k-1} \left( \frac{P_v}{P_v} \right)^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta(v\beta_v)| \sum_{r=1}^v \varphi_r^{k-1} \left( \frac{P_r}{P_r} \right)^k |s_r|^k \\
&\quad + O(1) m\beta_m \sum_{v=1}^m \varphi_v^{k-1} \left( \frac{P_v}{P_v} \right)^k |s_v|^k
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.16), (1.23) şartları ve Lemma 1.32 kullanılırsa,  $m \rightarrow \infty$  için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |z_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v |\Delta \beta_v| X_v + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_{v+1} X_v + O(1) m\beta_m X_m \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

elde ederiz.  $z_{n,3}$  için Lemma 1.30 dan dolayı  $\Delta\left(\frac{P_v}{vp_v}\right) = O\left(\frac{1}{v}\right)$  ifadesini ve (3.9) şartını

kullanarak, Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |z_{n,3}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \hat{a}_{n,v+1} \Delta\left(\frac{P_v}{vp_v}\right) \lambda_v s_v \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} |\hat{a}_{n,v+1}| |\lambda_v| |s_v| \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\lambda_v|^k |s_v|^k \right) \times \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \right)^{k-1} \end{aligned}$$

elde ederiz. (3.12), (3.8), (3.13),  $\left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)$  dizisinin artmayan bir dizi olma şartları ve

(1.18) den dolayı  $|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |z_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\lambda_v|^k |s_v|^k \right) \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^k |s_v|^k \left(\frac{\varphi_v P_v}{P_v}\right)^{k-1} \sum_{n=v+1}^{m+1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^{k-1} |\lambda_v| |s_v|^k \left(\frac{\varphi_v P_v}{P_v}\right)^{k-1} \left(\frac{P_v}{P_v}\right) \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v| |s_v|^k \varphi_v^{k-1} \left(\frac{P_v}{P_v}\right)^k \end{aligned}$$

elde edilir.  $z_{n,1}$  deki gibi işleme devam edersek,  $m \rightarrow \infty$  için

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |z_{n,3}|^k = O(1)$$

elde ederiz. Son olarak  $z_{n,4}$  için (1.26) şartını kullanarak Hölder eşitsizliğini uygularsak

ardından (3.12), (3.8), (3.13),  $\left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)$  dizisinin artmayan bir dizi olma şartları ve (1.18)

den dolayı  $|\lambda_n| = O(1/X_n) = O(1)$  şartını kullanırsak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |z_{n,4}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta_v(\hat{a}_{nv}) P_v \lambda_v}{vp_v} s_v \right|^k$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\lambda_v|^k |s_v|^k \right) \times \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left( \frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)^{k-1} \left( \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| |\lambda_v|^k |s_v|^k \right) \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^k |s_v|^k \left( \frac{\varphi_v P_v}{P_v} \right)^{k-1} \sum_{n=v+1}^{m+1} |\Delta_v(\hat{a}_{nv})| \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v|^{k-1} |\lambda_v| |s_v|^k \varphi_v^{k-1} \left( \frac{P_v}{P_v} \right)^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v| |s_v|^k \varphi_v^{k-1} \left( \frac{P_v}{P_v} \right)^k
\end{aligned}$$

elde ederiz.  $z_{n,3}$  deki gibi işleme devam edersek,  $m \rightarrow \infty$  için

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |z_{n,4}|^k = O(1)$$

elde ederiz. Böylece  $s = 1, 2, 3, 4$  için

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |z_{n,s}|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

gösterilmiş olur. Bu ise ispatı tamamlar.

## 4. BÖLÜM

### TARTIŞMA – SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde ikinci ve üçüncü bölümlerde ifade ve ispat edilen teoremler ile ilgili sonuçları vereceğiz.

#### 4.1. Sonuçlar

**Sonuç 4.1.** Teorem 2.1 de özel olarak her  $n$  değeri için  $p_n = 1$  alırsak, Teorem 1.25 i elde ederiz. Bu durumda (2.1) şartı (1.20) şartına indirgenir.

**Sonuç 4.2.** Teorem 2.2 de özel olarak her  $n$  değeri için  $p_n = 1$  alırsak, Teorem 1.26 i elde ederiz. Bu durumda (2.2) şartı (1.24) şartına indirgenir.

**Sonuç 4.3.** Teorem 3.1 de  $(X_n)$  pozitif azalmayan dizi,  $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$  ve  $a_{nv} = \frac{P_v}{P_n}$  alırsak, Teorem 2.1 i elde ederiz. Bu durumda (3.10) şartı (2.1) şartına indirgenir. Aynı zamanda  $\left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)$  artmayan dizi olma şartı otomatik olarak sağlanır.

**Sonuç 4.4.** Teorem 3.1 de  $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$  alırsak, hemen hemen artan bir dizinin  $|A, p_n|_k$  toplanabilirliği ile ilgili yeni bir sonuç elde ederiz.

**Sonuç 4.5.** Teorem 3.1 de  $(X_n)$  pozitif azalmayan dizi,  $\varphi_n = n$ ,  $a_{nv} = \frac{P_v}{P_n}$  ve  $\forall n \in N$  için  $p_n = 1$  alırsak, Teorem 1.25 i elde ederiz. Bu durumda (3.10) şartı (1.20) şartına

indirgenir. Ayrıca  $\left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)$  artmayan dizi olma şartı otomatik olarak sağlanır.

**Sonuç 4.6.** Teorem 3.2 de  $(X_n)$  pozitif azalmayan dizi,  $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$  ve  $a_{nv} = \frac{p_v}{P_n}$  alırsak, Teorem 2.2 i elde ederiz. Bu durumda (3.16) şartı (2.2) şartına indirgenir. Ayrıca  $\left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)$  artmayan dizi olma şartı otomatik olarak sağlanır.

**Sonuç 4.7.** Teorem 3.2 de  $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$  alırsak, hemen hemen artan bir dizinin  $|A, p_n|_k$  toplanabilirliği ile ilgili yeni bir sonuç elde ederiz.

**Sonuç 4.8.** Teorem 3.2 de  $(X_n)$  pozitif azalmayan dizi,  $\varphi_n = n$ ,  $a_{nv} = \frac{p_v}{P_n}$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $p_n = 1$  alırsak, Teorem 1.26 i elde ederiz. Bu durumda (3.16) şartı (1.24) şartına indirgenir. Ayrıca  $\left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)$  artmayan dizi olma şartı otomatik olarak sağlanır.

**Sonuç 4.9.** Teorem 3.3 de  $(X_n)$  pozitif azalmayan dizi,  $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$  ve  $a_{nv} = \frac{p_v}{P_n}$  alırsak ve (1.26) şartını birlikte düşünürsek, Teorem 2.3 i elde ederiz. Bu durumda (3.16) şartı (2.3) şartına indirgenir. Aynı zamanda  $\left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)$  artmayan dizi olma şartı otomatik olarak sağlanır.

**Sonuç 4.10.** Teorem 3.3 de  $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$  alırsak, hemen hemen artan bir dizinin  $|A, p_n|_k$  toplanabilirliği ile ilgili yeni bir sonuç elde ederiz.

**Sonuç 4.11.** Teorem 3.3 de  $k=1$  ve  $a_{nv} = \frac{P_v}{P_n}$  alırsak ve (1.26) şartını birlikte düşünürsek, hemen hemen artan bir dizinin  $|\bar{N}, p_n|$  toplanabilirliği ile ilgili yeni bir sonuç elde ederiz. Bu durumda  $\left(\frac{\varphi_n p_n}{P_n}\right)$  artmayan dizi olma şartı gerekmez ve (3.16) şartı (1.25) şartına indirgenir.

**Sonuç 4.12.** Teorem 3.3 de  $\varphi_n = n$ ,  $a_{nv} = \frac{P_v}{P_n}$  ve  $\forall n \in N$  için  $p_n = 1$  alırsak, hemen hemen artan bir dizinin  $|C, 1|_k$  toplanabilirliği ile ilgili yeni bir sonuç elde ederiz. Bu durumda  $\left(\frac{\varphi_n p_n}{P_n}\right)$  dizisinin artmayan dizi olma şartı otomatik olarak sağlanır.

## KAYNAKLAR

1. Das, G., 1969. Tauberian theorems for absolute Nörlund summability. **Proceedings of the London Mathematical Society**, **9** (3): 357–394.
2. Kishore, N., Hotta, G. C., 1970. On  $|\bar{N}, p_n|$  summability factors. **Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)**, **31**: 9–12.
3. Tanović - Miller, N., 1979. On strong summability. **Glasnik Mathematicki**, **34** (14): 87–97.
4. Bor, H., 1985. On two summability methods. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, **97**: 147–149.
5. Sulaiman, W. T., 2003. Inclusion theorems for absolute matrix summability methods of an infinite series (IV). **Indian Journal Pure and Applied Mathematics**, **34** (11): 1547–1557.
6. Özarıslan, H. S., Ketten A., 2012. A new application of almost increasing sequences. (incelemede)
7. Maddox, I. J., 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press.
8. Mc Fadden, L., 1942. Absolute Nörlund summability. **Duke Mathematical Journal**, **9**: 168–207.
9. Petersen, G. M., 1966. Regular Matrix Transformations. Mc Graw Hill Publishing Company Limited, London - New York - Toronto.
10. Ayres, F. Jr., 1962. Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrices. New York: Schaum, p. 10.
11. Fekete, M., 1911. Zur theorie der divergenten reihen. **Mathematical és Termesz Ertesitö (Budapest)**, **29**: 719–726.
12. Flett, T. M., 1957. On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley. **Proceedings of the London Mathematical Society**, **7**: 113–141.
13. Hardy, G. H., 1949. Divergent Series. Oxford University Press, Oxford.
14. Mazhar, S. M., 1966. On the summability factors of infinite series. **Publicationes Mathematicae Debrecen**, **13**: 229–236.
15. Sulaiman, W. T., 2003. Inclusion theorems for absolute matrix summability methods of an infinite series (IV). **Indian Journal Pure and Applied Mathematics**, **34** (11): 1547–1557.

16. Bari, N. K., Stećkin S. B., 1956. Best approximation and differential properties of two conjugate functions (in Russian). **Trudy Moskovskogo Matematičeskogo Obščestava**, **5**: 483–522.
17. Mazhar, S. M., 1972. On  $|C, 1|_k$  summability factors of infinite series. **Indian Journal of Mathematics**, **14**: 45–48.
18. Mishra, K. N., Srivastava, R. S. L., 1983-1984. On absolute Cesàro summability factors of infinite series. **Portugaliae Mathematica**, **42** (1): 53–61.
19. Mishra, K. N., Srivastava, R. S. L., 1984. On  $|\bar{N}, p_n|$  summability factors of infinite series. **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **15**: 651–656.
20. Bor, H., 1993. On absolute summability factors. **Proceedings of the American Mathematical Society**, **118** (1): 71–75.
21. Mazhar, S. M., 1998. A remark on a recent result on absolute summability factors. **Indian Journal of Mathematics**, **40** (2): 123–131.
22. Mazhar, S. M., 1997. A note on absolute summability factors. **Bulletin of the Institute of Mathematics. Academia Sinica**, **25** (3): 233–242.
23. Bor, H., 1994. A note on absolute summability factors. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, **17** (3): 479–482.
24. Bor, H., 1987. A note on  $|N, p_n|_k$  summability factors of infinite series. **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **18**: 330–336.
25. Özarıslan, H. S., Keten A., 2012. On generalized absolute matrix summability. (incelemede)

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Ayşegül KETEN

Uyruğu: Türkiye (TC)

Doğum Tarihi ve Yeri: 18 Haziran 1988, İstanbul

Medeni Durumu: Bekâr

Tel: +90 352 207 66 66 -33227

e-mail: [keten@erciyes.edu.tr](mailto:keten@erciyes.edu.tr)

Yazışma Adresi: Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 38039

Talas/KAYSERİ

### EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü	-----
Lisans	EÜ Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2010
Lise	Fatih Kız Lisesi, İstanbul	2005

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2011	Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	Araş. Gör.
2011-Halen	Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	Araş. Gör.

### YABANCI DİL

İngilizce