T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY RİESZ UZAYLARINDA AĞLARIN YAKINSAKLIKLARININ İNCELENMESİ

Ali Harun DALDALLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
ŞUBAT - 2025

T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY RİESZ UZAYLARINDA AĞLARIN YAKINSAKLIKLARININ İNCELENMESİ

Ali Harun DALDALLI
ORCID:0000-0002-7048-4130

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet VURAL
ORCID: 0000- 0002-0977-7479

HATAY
ŞUBAT - 2025

T.C.

HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY RİESZ UZAYLARINDA AĞLARIN YAKINSAKLIKLARININ İNCELENMESİ

Ali Harun DALDALLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet VURAL danışmanlığında hazırlanan bu tez **06/02/2025** tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet VURAL
Başkan

Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ
Üye

Doç. Dr. Ali KURT
Üye

Kod No:

Prof. Dr. Cengiz KARACA
Enstitü Müdürü

06/02/2025

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

İmzası

Ali Harun DALDALLI

ÖZET

FUZZY RİESZ UZAYLARINDA AĞLARIN YAKINSAKLIKLARININ İNCELENMESİ

Bu tez, fuzzy Riesz uzaylarında ağların yakınsaklık özelliklerini incelemeyi amaçlamaktadır. Klasik matematiksel yapılarla fuzzy kavramlar arasındaki ilişkiyi ele alarak, fuzzy Riesz uzaylarının temel özellikleri detaylandırılmış ve bu yapılarda yakınsaklık kavramının nasıl tanımlandığı ve analiz edildiği ortaya konulmuştur. Çalışmada, klasik Riesz uzaylarındaki temel yakınsaklık teorileri incelenmiş, ardından bu teorilerin fuzzy yapılar içindeki karşılıkları araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, fuzzy sistemlerdeki analiz yöntemlerini daha iyi anlamak ve klasik matematik ile fuzzy matematik arasındaki bağlantıyı güçlendirmek adına yeni bir perspektif sunmaktadır.

2025, 35 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Riesz Uzayları, Ağlar, Yakınsaklık

ABSTRACT

A STUDY of NETS' CONVERGENCE in FUZZY RIESZ SPACES

This thesis aims to study the convergence properties of nets in fuzzy Riesz spaces. By considering the relationship between classical mathematical structures and fuzzy concepts, the basic properties of fuzzy Riesz spaces are elaborated and how the concept of convergence is defined and analyzed in these structures is revealed. In the study, the basic convergence theories in classical Riesz spaces are examined, and then the equivalents of these theories in fuzzy structures are investigated. The results obtained provide a new perspective to better understand the analysis methods in fuzzy systems and to strengthen the connection between classical mathematics and fuzzy mathematics.

2025, 35 pages

Key Words: Fuzzy Riesz Spaces, Nets, Convergence

TEŞEKKÜR

Akademik yolculuğumun her adımında bana yol gösteren, bilgisi ve tecrübesiyle hem mesleki hem de kişisel gelişimime katkıda bulunan değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mehmet VURAL ’a sonsuz saygı, minnet ve şükranlarımı sunuyorum. Yüksek lisans tez sürecimde bana verdiği destekle, yalnızca akademik bilgimin değil, aynı zamanda araştırmacı kimliğimin de şekillenmesine öncülük etmiştir.

Hayatımın her döneminde maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, bana duydukları sınırsız güven ve sevgiyle her zaman arkamda duran canım aileme derin ve içten teşekkürlerimi iletiyorum. Onların fedakârlıkları ve inançları, bugünlere gelmemde en büyük itici güç olmuştur.

Akademik gelişimime katkıda bulunan tüm saygıdeğer hocalarıma da şükranlarımı ve saygılarımı en içten duygularımla sunuyorum.

Ayrıca, bu süreçte sağladığı imkanlar ve destekleyici akademik ortam için Fen Bilimleri Enstitüsü'ne teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\mathcal{X}_A$	: $\mathcal{X}_A$
A^c	: A kümesinin tümleyeni
$A \times B$	:A ve B kümesinin kartezyen çarpımı
$\vee$	: Supremum
$\wedge$	: İnfimum
$\mathrm{Graf}(f)$	: f fonksiyonun grafik kümesi
$\mathbb{F}$	: Cisim
$V_{\mathbb{F}}$	: F cismi üzerinde tanımlı V vektör uzayı
$\mathrm{span}(S)$	: S kümesinin germe kümesi

1. GİRİŞ

Matematik, tarihsel süreçte başlangıçta günlük hayat problemlerimizin çözümüne yarayan önemli bir araçtı. Ancak, zamanla değişen ihtiyaçlar ve insanlığın bilgiye olan tutkusuyla, matematik sistematik ve en tutarlı bilim dallarından birine evrildi. Bu süreçte, matematiğe birçok bilim insanının katkıları oldu ve bu çabalar, matematiği daha soyut, katı kurallara sahip ve evrenin anlaşılması için vazgeçilmez bir alan haline getirdi. Tüm bilim dallarında olduğu gibi matematik de zamanla çeşitli alt dallara ayrıldı. Analiz, cebir ve topoloji gibi ana dallar, matematiğin temel taşlarını oluştururken, bu alanların her biri içinde bir takım alt konular ortaya çıktı.

Bu alt konular genellikle yalnızca bir matematik dalına özgü değil, birden fazla dalın bir arada incelenmesini gerektiriyordu. Örneğin, yakınsaklık kavramı çoğunlukla topoloji ve analiz bağlamında ele alınsa da birçok problemin yaklaşık çözümlerinin bulunmasının önemi nedeniyle, uygulamalı matematiğin de bir çalışma konusu olmuştur. Yakınsaklık, özellikle iteratif yöntemler ve sayısal analizdeki kullanımı ile çeşitli mühendislik ve fizik problemlerinde de karşımıza çıkar (Edelsbruner, 2010; Oudot, 2015).

Matematiğin farklı alt dallarının birleşimi, soyut yapıların daha farklı özelliklerinin keşfedilmesine katkıda bulunmaktadır. Bu soyut yapılardan biri olan Riesz uzayları, özelleşmiş lineer uzayların sıkça çalışılan bir sınıfını temsil eder. Hem teorik matematikte hem de uygulamalı alanlarda önemli bir yere sahiptir. İlk kez Frigyes Riesz tarafından tanımlanan bu uzaylar, pozitiflik, sıralama ve yakınsaklık gibi kavramların bir arada incelenmesine imkan tanımış ve analizden optimizasyona kadar pek çok alanda uygulama alanı bulmuştur (Munkes, 2000; Rotman, 2013).

Riesz uzaylarının temel özelliklerinden biri, fonksiyonel analiz ve sıralı yapıların kesişim noktasında yer almasıdır. Dolayısıyla, Riesz uzaylarının özelliklerinin derinlemesine anlaşılması için yakınsaklık kavramı kritik bir öneme sahiptir. Yakınsaklık sayesinde, bu uzayların soyut yapısının ötesinde daha geniş uygulamalı alanlara hitap eden çözümler elde etmek mümkün hale gelir.

Matematiğin hangi alt alanında çalışma yapılırsa yapılsın değişmeyen temel bir özellik, yapıların mümkün olduğunca kesin ve belirli bir çerçevede incelenmesidir. Ancak gerçek hayatta pek çok olayın modellenmesinde bu düzeyde kesinlik sağlanamaz.

Doğada ve insan yaşamında yalnızca siyah ve beyazın bulunmadığı, arada sayısız grinin olduğu bir dünyada belirsizlik, başka bir deyişle bulanıklık, kaçınılmazdır. İşte bu bağlamda, Lotfi A. Zadeh tarafından 1965 yılında önerilen fuzzy mantık ve fuzzy kümeler, belirsizlik içeren durumların matematiksel olarak modellenmesini mümkün kılmıştır. Bununla birlikte, daha gerçekçi ve esnek çözümlerin elde edilmesini sağlamış, matematiğe ve diğer bilim dallarına yeni bir perspektif kazandırmıştır (Wasserman,2018; Klir,2015; Chakraborty,2019; Zhang,2017 ve Belmonte, 2021).

Klasik matematiksel yapıların en temellerinden biri olan kümeler üzerinde yapılan küçük bir değişiklik, matematiğin çok daha farklı yorumlanabileceğini bizlere göstermiştir. Klasik küme teorisinde, bir kümenin temel yapı taşlarını, o kümeye ait olan veya olmayan ögeler oluşturur. Bu ilişkinin belirlenmesini sağlayan karakteristik fonksiyon, herhangi bir elemanın bir kümeye ait olması durumunda 1, ait olmaması durumunda ise 0 değerini alı. Ancak fuzzy yaklaşımla birlikte, karakteristik fonksiyonun yerini üyelik fonksiyonu ya da aidiyet derecesi dediğimiz ve $[0,1]$ arasında değerler alan bir fonksiyon alır.

Bu ufak değişiklik, klasik anlamda bildiğimiz tüm yapıların korunmasını sağlarken, aynı zamanda fark edilmemiş pek çok özelliğin keşfedilmesine ve yeni tanımlamaların ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır. Üyelik fonksiyonu sayesinde, bir elemanın bir kümeye tam olarak ait olması veya olmaması gibi ikili bir ayrımdan çıkarak, o kümeye kısmen ait olabilmesi gibi daha esnek bir durum ifade edilebilir hale gelmiştir. Bu durum, bulanıklığın modellenmesi gereken pek çok alanda daha geniş anlamlar ve çözümler üretilmesine olanak tanımıştır.

Fuzzy mantık ve fuzzy kümelerin sunduğu bu esnek yaklaşım, 1965'ten sonra hızla gelişmiş ve birçok matematiksel yapının yeniden yorumlanmasına ve genelleştirilmesine yol açmıştır. Sadece kümeler teorisinde değil, aynı zamanda analiz, cebir, topoloji ve optimizasyon gibi matematiğin pek çok farklı dalında uygulanabilir hale gelmiştir. Bunun sonucunda, belirsizliğin matematiksel bir dille ifade edilmesi ve çözüm süreçlerine dahil edilmesi mümkün olmuştur.

Fuzzy teorinin Riesz uzaylarına uygulanması, bu yapıların bulanık çerçevede nasıl yeniden tanımlanıp yorumlanabileceğine dair önemli bir araştırma alanı oluşturmuştur. Fuzzy Riesz uzayları, klasik Riesz uzaylarının fuzzy yaklaşım çerçevesinde daha genişletilmiş bir versiyonu olarak tanımlanır. Bu yeni yapı, yakınsaklık gibi temel kavramların daha esnek bir şekilde ele alınmasını sağlar. Örneğin, bir ağın yakınsaklığı, klasik matematikte kesin tanımlara dayanırken, fuzzy yaklaşımla bu tanımlar belirsizlik içeren durumlara da uyarlanabilir hale gelmiştir.

Bu çalışmada, klasik matematikteki temel kavramların hatırlatılmasıyla başlanarak, Riesz uzaylarındaki ağ yakınsaklıklarının tanıtımı yapılacak ve buradan fuzzy çerçevesine uzanan bir yaklaşım ortaya konulacaktır. Çalışmanın ilk aşamasında, klasik matematikte sıralama, yakınsaklık ve ağlar gibi kavramlar ele alınacaktır. Bu temel kavramların ardından, klasik Riesz uzaylarının özellikleri ve bu uzaylardaki ağların yakınsaklık türleri tanıtılacaktır. Bir sonraki aşamada klasik kavramların üyelik fonksiyonu aracılığıyla nasıl genişletildiği, özellikle sıralama ve yakınsaklık gibi temel kavramların bu yeni çerçevedeki karşılıkları tartışılacaktır.

Bu çalışma, yalnızca klasik matematik ile fuzzy teoriyi birleştiren bir köprü oluşturmakla kalmamakta, aynı zamanda ağ yakınsaklıkların fuzzy çerçevesindeki rolünü ve önemini de vurgulamaktadır. Sonuç olarak, fuzzy Riesz uzayları üzerine yapılan bu çalışma hem teorik matematiğe hem de disiplinler arası problemlerin çözümüne ışık tutmayı hedeflemektedir. Bu kapsamda, temel kavramlar, genellemeler ve uygulamalar sistematik bir şekilde aktarılacak ve çalışmanın sonunda fuzzy matematiğin klasik yapılar üzerindeki genişletici etkisi somut bir şekilde ortaya konulacaktır.

Kümeler kavramı, matematikte belirli bir tanıma sahip olmayan, ancak belirli özelliklere sahip nesnelerin (elemanların) bir koleksiyonu olarak kabul edilir. Bir kümenin elemanlarının tekrarlanmaması, kümenin büyük harflerle gösterilmesi ve çeşitli şekillerde ifade edilmesi gibi özellikler herkes tarafından bilinmektedir. Fuzzy yaklaşımı daha net bir şekilde anlayabilmek için önce klasik küme teorisinin temel bir aracı olan karakteristik fonksiyon kavramını tanıtalım.

A bir küme olmak üzere, herhangi bir x nesnesinin bu A kümesinin elemanı olup olmadığını belirlemeye yarayan, aşağıdaki şekilde tanımıı $\mathcal{X}_A$ fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir:

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : x \notin A \end{cases}$$

Karakteristik fonksiyon, bir elemanın bir kümeye ait olup olmadığını kesin olarak belirler. Bu yaklaşımı kullanarak tanımları aşağıdaki gibi olan küme kavramları da karakteristik fonksiyonla ifade edilebilirler.

A, B birer küme ve $\mathbb{X}$ tüm kümeleri içeren evrensel bir küme olmak üzere, aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir:

A kümesinin B kümesini kapsaması, yani B kümesini oluşturan bütün x elemanlarının aynı anda A kümesine ait olması,

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

şeklinde tanımlanır. Burada B kümesi A kümesinin alt kümesidir şeklinde ifade edilir. Bu tanım, karakteristik fonksiyonlar kullanılarak,

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \text{ için } \mathcal{X}_B(x) \leq \mathcal{X}_A(x)$$

şeklinde ifade edilebilir.

A kümesinin B kümesiyle eşit olması, yani A ve B kümesini oluşturan bütün x elemanlarının her iki kümeye de aynı anda ait olması

$$A = B \Leftrightarrow x \in B \Leftrightarrow x \in A$$

şeklinde tanımlanır. Burada A kümesi B kümesinin alt kümesi, aynı zamanda B kümesi A kümesinin alt kümesidir şeklinde ifade edilir. Bu tanım, karakteristik fonksiyonlar kullanılarak,

$$B = A \Leftrightarrow \forall x \text{ için } \mathcal{X}_A(x) = \mathcal{X}_B(x)$$

şeklinde ifade edilebilir.

A kümesine ait olmayan elemanlardan oluşan kümeye, A kümesinin tümleyeni denir ve şu şekilde tanımlanır:

$$A^c = \{x \in \mathbb{X}: x \notin A\}$$

Tümleyenin karakteristik fonksiyonu,

$$\mathcal{X}_{A^c}(x) = 1 - \mathcal{X}_A(x)$$

şeklinde ifade edilir.

A kümesinin elemanı olup B kümesinin elemanı olmayan elemanlardan oluşan kümeye, A kümesinin B kümesinden farkı denir ve şu şekilde tanımlanır:

$$A \setminus B = \{x \in A: x \notin B\}.$$

Bu tanım, karakteristik fonksiyonlar kullanılarak,

$$\mathcal{X}_{A \setminus B}(x) = \max\{\mathcal{X}_A(x), 1 - \mathcal{X}_B(x)\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}.$$

Bu tanım, karakteristik fonksiyonlar kullanılarak,

$$\mathcal{X}_{A\cap B}(x) = \min\{\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x)\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

A ve B kümelerinin elemanlarının bir araya getirilmesiyle oluşan kümeye, Aile B kümelerinin birleşim kümesi denir ve şu şekilde tanımlanır:

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{X}: x \in A \vee x \in B\}$$

Bu tanım, karakteristik fonksiyonlar kullanılarak,

$$\mathcal{X}_{A\cup B}(x) = \max\{\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x)\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

A ve B herhangi iki küme olmak üzere, A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı, her bir elemanının birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden olan sıralı ikililerden oluşan bir küme olarak tanımlanır

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

ve bu tanım, karakteristik fonksiyonlar kullanılarak,

$$\mathcal{X}_{A\times B}(x, y) = \min\{\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(xy)\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Kartezyen çarpım n-adet küme ve daha fazlası için genelleştirilebilir. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı, sıralı n lilerden oluşan bir küme olup şu şekilde tanımlanır:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \in A_i, i = 1,2, \ldots, n\}$$

burada karakteristik fonksiyonlar kullanılarak,

$$\mathcal{X}_{(A_1\times A_2\times\cdots\times A_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min_{1\leq i\leq n}\{\mathcal{X}_{A_i}(xi)\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$\mathbb{X}$ evrensel küme A, B, C ve D birer küme olmak üzere kartezyen çarpım için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $A \neq B$ ise $A \times B \neq B \times A$

ii. $A \times \emptyset = \emptyset$ ve $\emptyset \times B = \emptyset$

iii. $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D$ ise $A \times C \subseteq B \times D$

iv. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

v. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

vi. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

vii. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

viii. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

ix. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

x. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

n-li Kartezyen çarpımın bazı özellikleri şunlardır:

i. $A_1 \times \cdots \times A_i \times \emptyset \times A_{i+2} \times \cdots \times A_n = \emptyset$.

ii. $(A_1 \cup B_1) \times A_2 \times .. \times A_n = (A_1 \times A_2 \times .. \times A_n) \cup (B_1 \times B_2 \times .. \times B_n)$

iii. $(A_1 \cap B_1) \times A_2 \times .. \times A_n = (A_1 \times A_2 \times .. \times A_n) \cap (B_1 \times A_2 \times .. \times A_n)$.

$\mathcal{J}$ bir küme ve her $i \in \mathcal{J}$ için bir A_i kümesi tanımlanmış olsun. Bu durumda $\{A_i : i \in \mathcal{J}\}$ kümesine, $\mathcal{J}$ indis kümesi ve $\{A_i\}$ kümesine kümeler ailesi denir. $\mathcal{J}$ kümesi sonlu ya da sonsuz olabilir. Eğer $\mathcal{J} = \{1,2, \dots, n\}$ gibi sonlu bir küme ise bu aileye sonlu küme ailesi denir.

$\mathcal{A} = \{A_i : i \in \mathcal{J}\}$ küme ailesi için karakteristik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \exists i \in I \text{ için } x \in A_i \\ 0, & \text{eğer } \forall i \in I \text{ için } x \notin A_i \end{cases}$$

Buna göre bir elemanın herhangi bir kümeye ait olup olmadığı karakteristik fonksiyonların incelenmesiyle hesaplanır:

$$\chi_{\bigcup_{i \in \mathcal{J}} A_i}(x) = \max_{i \in \mathcal{J}} \chi_{A_i}(x), \; \chi_{\bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i}(x) = \min_{i \in \mathcal{J}} \chi_{A_i}(x)$$

$A \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, $A \times A$ Kartezyen çarpım kümesinin her bir alt kümesine A üzerinde bir bağıntı denir. Eğer A üzerindeki β bağıntısı için $(a, b) \in \beta$ ise bu durum a βb şeklinde gösterilebilir.

$A \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{R}, A$ üzerinde bir bağıntı olmak üzere, $\mathcal{R}$ bağıntısının özellikleri karakteristik fonksiyonlar cinsinden şu şekilde tanımlanır:

i. Yansıma: $\forall a \in A, a\mathcal{R}a$ eşdeğer olarak $\chi_{\mathcal{R}}(a, a) = 1$

ii. Simetri: $\forall a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ ise $b\mathcal{R}a$, yani $\chi_{\mathcal{R}}(a, b) = \chi_{\mathcal{R}}(b, a)$.

iii. Ters-Simetri: $\forall a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ ve $b\mathcal{R}a$ ise $a = b$, bu da

$\chi_{\mathcal{R}}(a, b)$+ $\chi_{\mathcal{R}}(b, a) > 1$ ise $a = b$ ile ifade edilebilir.

iv. Geçişme: $\forall a, b, c \in A, a\mathcal{R}b$ ve $b\mathcal{R}c$ ise $a\mathcal{R}c$, yani

$\chi_{\mathcal{R}}(a, b) \cdot \chi_{\mathcal{R}}(b, c) \leq \chi_{\mathcal{R}}(a, c)$.

Bir bağıntı, i, ii ve iv özelliklerini sağlıyorsa denklik bağıntısı, i, iii ve iv özelliklerini sağlıyorsa kısmi sıralama bağıntısı adını alır. Kısmi sıralama bağıntısına sahip $(A, \mathcal{R})$ kümesine kısmi sıralı küme ya da poset denir

$(A, \leq)$ bir poset ve $x, y \in A$ olmak üzere:

i. Her $x, y \in A$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ koşulu sağlanıyorsa A kümesine tam sıralı küme denir.

ii. Tam sıralı bir kümenin herhangi bir altkümesine zincir denir.

$(X, \leq)$ bir poset ve $y \in X$ olmak üzere:

i. Eğer $x \leq y$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $x = y$ ise, y elemanına X'in bir minimal elemanı denir.

ii. Eğer $z \leq x$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $z = x$ ise, z elemanına X 'in bir maksimal elemanı denir.

$(A, \leq)$ bir poset ve $\emptyset \neq X \subseteq A$ kümesi verilsin.

i. Eğer her $x \in X$ için $x \leq a$ sağlanıyorsa, a elemanına bir üstsınır denir.

ii. Eğer her $x \in X$ için $b \leq x$ sağlanıyorsa, b elemanına bir altsınır denir.

iii. a bir üstsınır olup her c üstsınırı ıçin $a \leq c$ sağlanıyorsa, a elemanına supremum (en küçük üstsınır) denir ve $\sup(X) = a$ şeklinde gösterilir.

iv. b bir altsınır olup her d altsınırı için $d \leq b$ sağlanıyorsa, b elemanına infimum (en büyük altsınır) denir ve $\inf(X) = b$ şeklinde gösterilir.

Bir A kümesinin kuvvet kümesinin her elemanının yani A kümesinin alt kümelerinin en küçük elemanı varsa A kümesine iyi sıralı küme denir.

$(X, \leq)$ bir kısmi sirali kümesi her $x, y \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa:

i. $x \vee y = \sup(x, y)$ kümesinde mevcut,

ii. $x \wedge y = \inf(x, y)$, X kümesinde vardır

o zaman X kümesi, $(X, \leq, \vee, \wedge)$ işlemleri ile tanımlı bir latis olarak adlandırillr. Burada $\vee$ işlemine join veya supremum $\wedge$ işlemine meet ya da infimum adı verilir.

$X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ olmak üzere $f \subseteq X \times Y$ bir bağıntı olsun. f aşağıdaki özellikleri sağıyorsa bir fonksiyon olarak adlandırılır:

i. Her $x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır.

ii. $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ ise $y = z$.

$f: X \to Y$ biçiminde tanımlanan, f fonksiyonu genellikle $f(x) = y$ gösterimiyle ifade edilir.

Ayrıca $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $(x, y) \in X \times Y$ için:

$$\chi_f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } y = f(x) \\ 0, & \text{eğer } y \neq f(x) \end{cases}.$$

Bu durumda f'nin grafik kümesi:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \chi_f(x, y) = 1\}$$

Fonksiyonların bazı özel türleri karakteristik fonksiyon yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

i. $f: X \to Y$ birebir ise $\chi_f(x_1, y) \cdot \chi_f(x_2, y) = 0 (x_1 \neq x_2)$

ii. f örten ise $\forall y \in Y, \exists x \in X$ için $\chi_f(x, y) = 1$

iii. f birebir ve örten ise ters fonksiyon $f^{-1}: Y \to X$ şu şekilde tanımlanır:

$$\chi_{f^{-1}}(y, x) = \chi_f(x, y)$$

$f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq X, \{B_i\}_{i \in I} \subseteq Y$ birer küme ailesi olmak üzere aşağıdaki eşitlik ve kapsama ilişkileri sağlanır:

i. $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

ii. $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

iii. $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ (Eşitlik, f birebir ise sağlanır)

iv. $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

$f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X, B \subset Y$ olmak üzere:

i. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$. (Eğer f birebir ve örten ise)

ii. $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$

iii. ii) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. (Eğer f birebir ise)

iv. $A = f^{-1}(f(A))$

v. iii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.(Eğer f örten ise)

vi. $f(f^{-1}(B)) = B$

$(X, \preceq)$ ve $(Y, \preceq)$ iki poset olmak üzere $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_1, x_2 \in X$ verilsin:

i. Eğer $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \preceq f(x_2)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna artan (azalmayan) denir.

ii. Eğer $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \succeq f(x_2)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna azalan (artmayan) denir.

iii. Eğer $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \prec f(x_2)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna kesin artan denir.

iv. Eğer $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \succ f(x_2)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna kesin azalan denir.

Bu özellikler keyfi $x_1, x_2 \in X$ için sağlanıyorsa, f monoton olarak adlandırılır.

X bir küme ve $*: X \times X \to X$ bir fonksiyon olsun.

i. * fonksiyonu iyi tanımlıdır: Eğer $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ise $x_1 * y_1 = x_2 * y_2$ sağlanır.

ii. * fonksiyonu kapalıdır: $\forall x, y \in X$ için $x * y \in X$.

Bu koşulları sağlayan * fonksiyonuna X üzerinde bir ikili işlem denir.

G bir küme ve $*: G \times G \to G$ bir işlem olsun. $(G,*)$ çifti aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bir grup olarak adlandırılır:

i. İşlem birleşmelidir: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$.

ii. G'de birim eleman vardır: $\exists e \in G$ öyle ki $a * e = e * a = a, \forall a \in G$.

iii. Her elemanın bir tersi vardı: $\forall a \in G, \exists b \in G$ öyle ki $a * b = b * a = e$.

Eğer işlem ayrıca değişmeli ise yani $x * y = y * x, \forall x, y \in G$ sağlanıyorsa, ($G,*$) çifti bir Abel grubu olarak adlandırılır.

R bir küme ve üzerinde tanımlı iki işlem $+: R \times R \to R$ ve - : $R \times R \to R$ olsun. $(R, +,\cdot)$ üçüsü, aşağıdaki koşulları sağıorsa bir halka olarak adlandırılır:

i. $(R, +)$ bir Abel grubudur.

ii. Çarpma işlemi birleşmelidir: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in R$.

iii. Çarpma, toplama işlemi üzerinde dağılmalıdır: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a), \forall a, b, c \in R$.

Eğer çarpma işlemi değişmeli ise $(R, +,\cdot)$ bir değişmeli halka olarak adlandırılır.

F bir küme ve üzerinde tanımlı iki işlem $+: F \times F \to F$ ve $\cdot: F \times F \to F$ olsun. ($F, +,\cdot$) üçlüsü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir cisim olarak adlandırılır:

i. $(F, +)$ bir Abel grubudur.

ii. $(F \setminus \{0\},\cdot)$ bir Abel grubudur (burada 0 , toplama işleminin birim elemandır).

iii. Çarpma, toplama işlemi üzerinde dağılmalıdır:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c),\ \forall a, b, c \in F$$

$V \neq \emptyset$ küme ve $(\mathbb{F}, +,\cdot)$ bir cisim olmak üzere aşağıdaki;

$$\oplus: V \times V \to V,\ (a,b) \mapsto a \oplus b \text{ ve } \odot: F \times V \to V,\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \odot v$$

işlemleriyle donatılmış olsun. Eğer $(V,\oplus)$ abel grup ve;

i. $\lambda \odot (v \oplus u) = \lambda \odot v + \lambda \odot u$ her $u, v \in V$ ve her $\lambda \in \mathbb{F}$ için

ii. $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot u = \lambda_1 \odot u \oplus \lambda_2 \odot u$ her $v \in V$ ve her $\lambda_1, \lambda_1 \in \mathbb{F}$ için

iii. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \odot u = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot u)$ her $v \in V$ ve her $\lambda_1, \lambda_1 \in \mathbb{F}$ için

iv. $\mathbb{F}$ cismin birimi $1_{\mathbb{F}}$ her $v \in V$ için $1_{\mathbb{F}} \odot v = v$ sağlanır

bu özellikleri sağlıyorsa V'ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı denir $V_{\mathbb{F}}$ ile gösterilir.

$(V_{\mathbb{F}},\oplus,\odot)$ bir vektör uzayı olsun. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ vektörleri için:

$$\lambda_1 \odot v_1 \oplus \lambda_2 \odot v_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \odot v_n = 0_V \ (\lambda_i \in \mathbb{F})$$

eşitliği, yalnızca $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{F}}$ durumunda sağlanıyorsa, bu vektörler lineer bağımsızdır. Aksi halde, lineer bağımlıdır.

$(V_{\mathbb{F}},\oplus,\odot)$ bir vektör uzayı ve $S \subseteq V$ bir altküme olsun. S kümesinden elde edilebilecek tüm lineer birleşimlerin kümesi:

$$\operatorname{span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \odot v_i : v_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

olarak tanımlanır. Eğer span $(S) = V$ sağlanıyorsa, S kümesine V'yi geren bir küme denir.

$(V_{\mathbb{F}},\oplus,\odot)$ bir vektör uzayı olsun. $B \subseteq V$ bir küme:

i. B kümesindeki vektörler lineer bağımsızdır

ii. B kümesi V uzayını gerer $(\operatorname{span}(B) = V)$,

özelliklerini sağlıyorsa, B kümesine V'nin bir cebirsel tabanı ya da Hammel tabanı denilir.

$(V_{\mathbb{F}},\oplus,\odot)$ bir vektör uzayı olsun. Eğer V'nin bir tabanı sonlu elemanlıysa, V'nin boyutu, tabandaki eleman sayısıdır ve $\dim(V)$ ile gösterilir. V'nin bir tabanı yoksa veya sonsuz elemanlıssa, V sonsuz boyutludur.

$(V_{\mathbb{F}},\oplus,\odot)$ bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu:

i. $\|v\| \geq 0 \forall v \in V$ ve $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$

ii. $\|\lambda \odot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \forall \lambda \in \mathbb{F}, v \in V$

iii. $\|v \oplus w\| \leq \|v\| + \|w\|, \forall v, w \in V$ (Üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa, $\|\cdot\||$ fonksiyonuna bir norm denir ve $(V, \|.\|)$$çiftine$ normlu vektör uzayı denir.

$(V_{\mathbb{F}},\oplus,\odot)$ ve $(W_{\mathbb{F}'},\ominus,\otimes)$ vektör uzayları olsun. $T: V \to W$ fonksiyonu:

i. $T(v_1 \oplus v_2) = T(v_1) \ominus T(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$

ii. $T(\lambda \odot v) = \lambda \otimes T(v), \forall \lambda \in \mathbb{F}, v \in V,$

özelliklerini sağlıyorsa, T fonksiyonuna lineer operatör denir.

$(V, \|\cdot\|_V)$ ve $(W, \|\cdot\|_W)$ normlu vektör uzayları olsun. $T: V \to$ W bir lineer operatör (lineer dönüşüm) olsun. Eğer:

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} < \infty$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, T operatörüne sınırı operatör denir. Başka bir deyişle, her $v \in V$ için $T(v) \in W$ ve T sürekli bir fonksiyondur.

$(V, \|\cdot\|_V)$ ve $(W, \|\cdot\|_W)$ normlu vektör uzayları ve $T: V \to W$ sınırlı bir lineer operatör olsun. T'nin normu (operatör normu):

$$\|T\| = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|T(v)\|_W$$

olarak tanımlanır. Bu norm, T'nin V'den W' ye olan etkisini ölçer ve şu eşitliklerle de ifade edilebilir:

$$\|T\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}.$$

Eğer T sınırlı bir operatör ise, $\|T\|$ sonlu bir reel sayıdır.

V bir vektör uzayı ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. V'nin dual uzayı, V üzerindeki tüm lineer fonksiyonellerin (V den V ye tanımıı lineer operatörlerin) oluşturduğu uzaydır ve V' ile gösterilir:

$$V' = \{f: V \to \mathbb{F} \mid f \text{ lineer operatör } \}$$

V' bir vektör uzayıdır ve bu uzaydaki elemanlara lineer fonksiyonel denir.

$\emptyset \neq X$ bir küme ve $\tau \subseteq P(X)$ bir küme ailesi olsun. Eğer τ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa τ bir topolojidir ve (X, τ) çiftine topolojik uzay denir:

i. $\emptyset, X \in \tau$

ii. $U_1, U_2 \in \tau \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$

iii. I bir indis kümesi ve $U_i \in \tau \forall i \in I$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Bir $O \in \tau$ ise O kümesine τ-açık ya da sadece açık küme denir. Eğer $X \setminus U \in \tau$ ise U kümesine τ-kapalı ya da sadece kapalı küme denir.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere:

$$\mathcal{N}_\tau(x_0) = \{G \subseteq X \mid \exists U \in \tau \text{ öyle ki } x_0 \in U \text{ ve } U \subseteq G\}$$

$\mathcal{N}_\tau(x_0)$ ailesine x_0 noktasının τ-komşulukları ya da sadece komşulukları denir.

Bir (X, τ) topolojik uzayında $\mathcal{B}$, τ olmak üzere eğer her açık O kümesi $\mathcal{B}$ ailesinin bazı elemanlarıın birleşimi olarak ifade edilebiliyorsa yani $O = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$ şeklinde ise $\mathcal{B}$ ailesine τ topolojisinin bir tabanı denir.

(X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{N}_\tau(x)$ olsun. Eğer her $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ için en az bir $V \in \mathcal{B}(x)$ bulunup $V \subseteq U$ sağlanıyorsa $\mathcal{B}(x)$ ailesine τ' daki bir komşuluk tabanı denir.

X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ bir altküme olmak üzere:

i. A kümesinin içi A°, A'nın içinde bulunan tüm açık noktaların kümesi olarak tanımlanır:

$$A^\circ = \bigcup \{U \subseteq X: U \text{ açık ve } U \subseteq A\}$$

ii. A kümesinin kapanışı $\bar{A}$, A'yı içeren en küçük kapalı küme olarak tanımlanır:

$$\bar{A} = \bigcap \{C \subseteq X: C \text{ kapalı ve } A \subseteq C\}$$

iii. A kümesinin sınırı ∂A, A'nın kapanışı ile A'nın içinin farkı olarak tanımlanır:

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ.$$

iv. $x \in X$, A kümesinin bir yığılma noktasıdır eğer her U_x komşuluğu için:

$$(U_x \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ bir aile, $A \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ sağlıyorsa $\mathcal{B}$, A'nın bir örtüsüdür. Eğer $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ ve $A \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ sağlanıyorsa C'ye A'nın bir alt örtüsü denir.

(X, τ) bir topolojik uzay eğer X 'in her açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına kompakt topolojik uzay denir. Benzer şekilde, $A \subseteq X$ bir altkümenin her açık örtüsü bir sonlu alt örtüye sahipse, A kümesine kompakt (tıkız) küme denir.

Bir topolojik uzayın her noktasında sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa, bu topolojik uzaya birinci sayılabilir uzay veya kısaca C1-uzayı denir.

Bir topolojik uzayın (yani topolojisinin) sayılabilir bir tabanı varsa, bu topolojik uzaya ikinci sayılabilir uzay veya kısaca C2-uzayı denir.

$\emptyset \neq X$ bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$bir fonksiyon olmak üzere, d fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa d, X üzerinde bir metriktir ve (X, d) çiftine bir metrik uzay denir:

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
ii. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri)
iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Üçgen eşitsizliği)

(X, d) bir metrik uzay ve $x \in X$ ile $\varepsilon > 0$ olmak üzere:

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

kümesine x merkezli, ε yarıçaplı açık yuvar denir. (X, d) bir metrik uzay. $B_d(x, \varepsilon)$ kümeleri yardımıyla oluşturulan:

$$\tau_d = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ öyle ki } B_d(x, \varepsilon) \subseteq U\}$$

ailesine d metriği tarafından üretilen topoloji denir.

(X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ bir altküme. Eğer bir $M > 0$ bulunup. $A \subseteq B_d(0, M)$ sağlanıyorsa A kümesi sınırıdır. Reel sayılarda bir küme sınırlıdır eğer her $x \in A$ için $|x| \leq M$ olacak bir $M > 0$ bulunabilir.

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $f: \mathbb{N} \to X$ bir fonksiyon. $f(n) = x_n$ olarak gösterilir ve bu X üzerinde bir dizidir. Dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ veya kısaca (x_n) şeklinde ifade edilir.

$X \neq \emptyset$ bir kümesinde $f: \mathbb{N} \to X$ dizi olmak üzere kesin monoton artan $\psi: \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu için $f \circ \psi: \mathbb{N} \to X$ şeklinde tanımlanan bileşke fonksiyonuna f nin bir alt dizisi denir ve $\psi(k) = n_k$ olmak üzere $(f \circ \psi)(k) = x_{n_k}$ olup f ile tanımlı $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir alt dizisi $\left(x_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ biçiminde gösterilir.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\{x_n\}$ bir dizisi olsun. Bir $x_0 \in X$ elemanı için $\{x_n\}$ dizisinin x_0 noktasına yakınsaması şu şekilde tanımlanır:

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x_0), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in U$$

Burada $\mathcal{N}_\tau(x_0), x_0$ noktasının komşuluklarının kümesidir ve bir dizinin $x_0{}'$ a yakınsaması, dizinin üyelerinin sonlu bir n'den sonra her komşuluğa girmesiyle sağlanır. Bu durumda $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir.

(X, d) bir metrik uzayda tanımlı (x_n) dizisi verilsin. Eğer bir $x_0 \in X$ için şu sağlanıyorsa:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

bu durumda (x_n) dizisi $x_0\,'$ a yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \to x_0$ veya $x_n \xrightarrow{d} x_0$ ile gösterilir.

(X,τ) bir topolojik uzayda tanımlı (x_n) dizisi için, bir $x_0 \in X$ noktas:

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x_0), \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n, x_m \in U$$

şartını sağlıyorsa x_0, (x_n) dizisinin bir limit (yığılma) noktasıdır.

Limit noktası olan her dizinin, o limit noktasına yakınsayan bir alt dizisi vardır.

$(V, \|\cdot\|)$ bir normlu vektör uzayı ve $\{x_n\}$ bir V dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

sağlanıyorsa, $\{x_n\}$ dizisi x 'e yakınsar denir. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ya da $x_n \to x$ ile gösterilir.

$(V, \|.\|)$ bir normlu vektör uzayı ve $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Eğer

$$\sup_{m,n\geq N} \|x_m - x_n\| \to 0 \; (N \to \infty)$$

sağlanıyorsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir. Cauchy dizileri (X,d) bir metrik uzayında aşağıdaki şekilde ifade edilirler:

$$\sup_{m,n\geq N} d(x_m, x_n) \to 0 \; (N \to \infty),$$

$(V, \|\,.\,\|)$ bir normlu vektör uzayı olsun eğer V deki her cauchy dizisi V'nin bir elemanına yakınsıyorsa, $(V, \|\cdot\|)$ uzayına bir Banach uzayı denir.

(X,d) bir metrik uzayı, eğer her Cauchy dizisi X'in bir elemanına yakınsıyorsa, (X,d) uzayı bir tam metrik uzayı olarak adlandırılır.

$(V, \|\,.\,\|)$ bir normu vektör uzayı ve $A \subseteq V$ bir altküme olsun. Eğer:

$$\|x_n - x\| \to 0 \Longrightarrow x \in A, \; \forall x_n \in A,$$

sağlanıyorsa, A kümesine kapalı küme denir.

Bir topolojik uzayındaki bir fonksiyon $f: X \to Y$, her açık kümenin $f^{-1}(O)$ 'nun açık olduğu koşuluyla sürekli denir. Yani, bir fonksiyon sürekli olduğunda, her Y uzayındaki açık küme, X uzayında açık bir küme ile karşllk gelir.

X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ noktası için, f fonksiyonu x_0 noktasında dizisel sürekli denir, eğer:

$$\text{Eğer } x_n \to x_0 \text{ ve } x_n \in X \text{ için } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Yani, fonksiyonun dizisel sürekliliği, X uzayındaki bir dizinin yakınsaması durumunda, bu dizinin görüntüsünün de yakınsamaya devam etmesidir. Sürekli fonksiyonlar dizisel süreklidir fakat C_1 uzay olmadıkça dizisel sürekli fonksiyonlar sürekli olmayabilirler.

X ve Y birer topolojik uzay ve $f_n: X \to Y, n = 1,2, \cdots$ şeklinde tanımlı fonksiyonlara fonksiyon dizisi denir ve (f_n) şeklinde gösterilir.

X bir küme, Y bir metrik uzay ve $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} X$ 'te tanımlı bir fonksiyonlar dizisi olsun:

i. Noktasal Yakınsaklık: Eğer $f: X \to Y$ için her $x \in X$ 'te $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ sağlanıyorsa, (f_n) dizisinin f noktadan noktasal yakınsadığı söylenir.

ii. Düzgün Yakınsaklık: Eğer $f: X \to Y$ için

$$\sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f(x)) \to 0 \ (n \to \infty)$$

sağlanıyorsa, (f_n) dizisinin f'ye düzgün yakınsadığı söylenir.

Noktasal yakınsaklık ile düzgün yakınsaklık arasındaki fark, noktasal yakınsaklıkta x sabit alınırken düzgün yakınsaklıkta yakınsama, tüm $x \in X$ için noktadan bağımsız bir şekilde gerçekleşir.

V bir normlu vektör uzayı, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} V$ içinde bir dizi ve $x \in V$ olsun. Eğer her f lineer fonksiyoneli için

$$f(x_n) \to f(x) \ \text{ her } f \in V^* \text{ için}$$

sağlanıyorsa, $x_n \to x$ yakınsamasına zayıf yakınsama denir ve şu şekilde gösterilir:

$$x_n \overset{w}{\to} x.$$

V bir normlu vektör uzayı ve V' onun dual uzayı olsun. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ V' içinde bir dizi ve $f \in V'$ olsun. Eğer

$$f_n(x) \to f(x) \ \text{ her } x \in V \text{ için}$$

sağlanıyorsa, $f_n \to f$ yakınsamasına zayıf* yakınsama denir ve şu şekilde gösterilir:

$$f_n \overset{w^*}{\to} f.$$

Zayıf ve zayıf* yakınsamalar, genellikle norm yakınsamalarından daha zayıf bir anlamda yakınsamayı ifade eder. Zayıf yakınsama V'nin fonksiyonelleri üzerinde tanımlanırken, zayıf* yakınsama dual uzayın fonksiyonelleri üzerinde tanımlanır.

$\mathcal{D}$ bir küme ve $\preceq$ bir kısmi sıralama bağıntısı olmak üzere:

$\forall d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ için $\exists d_3 \in \mathcal{D}, d_1 \preceq d_3$ ve $d_2 \preceq d_3$ sağlanıyorsa, ($\mathcal{D}, \preceq$) bir yönlendirilmiş küme olarak adlandırılır.

$\{A_d : d \in \mathcal{D}\}$ bir küme ailesi ve ($\mathcal{D}, \preceq$) bir yönlendirilmiş küme olmak üzere, A_d 'lar aşağıdaki özelliklere sahip olabilir:

$\forall d_1, d_2 \in \mathcal{D}, d_1 \preceq d_2 \Longrightarrow A_{d_1} \supseteq A_{d_2}$ (Azalan bir yönlendirme),

$\forall d_1, d_2 \in \mathcal{D}, d_1 \preceq d_2 \Longrightarrow A_{d_1} \subseteq A_{d_2}$ (Artan bir yönlendirme).

Küme ailelerinin bu şekilde tanımlanması, infimum ve supremum hesaplarında kullanılabilir.

$X \neq \emptyset$ ve bir I yönlendirilmiş kümesi verilsin. $f: I \to X$ bir fonksiyon olmak üzere, f'ye bir ağ (net) denir. Moore-Smith dizileri olarak da bilinen bu tür ağlar, dizilerin genellemesi olarak düşünülebilir. Diziler gibi $i \in I$ elemanları $f(i) = x_i \in X$ şeklinde gösterilir ve ağlar $(x_i)_{i \in I}$ ya da (x_i) ile gösterilir.

X bir küme, Λ ve M yönlendirilmiş iki küme olsun. $f: \Lambda \to X$ bir ağ ve $f(\lambda) = x_\lambda \in X$ olacak şekilde tanımlansın.

Ayrıca $\phi: M \to \Lambda$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:
(i) $\mu_1 \preceq \mu_2 \Longrightarrow \phi(\mu_1) \preceq \phi(\mu_2)$,
(ii) Her $\lambda \in \Lambda$ için, $\exists \mu \in M$ öyle ki $\lambda \preceq \phi(\mu)$.

Bu koşulları sağlayan her ϕ fonksiyonu için $f \circ \phi: M \to X$ bileşke fonksiyonuna f ağının bir alt ağı denir. $x_{\phi(\mu)} \in X$ noktası genellikle $\mu \mapsto x_\mu$ biçiminde yazılır ve f ağının alt ağı x_μ veya kısaca (x_μ) ile gösterilir.

(X, τ) bir topolojik uzay, $(x_\lambda) X$ 'te bir ağ ve $x \in X$ olsun:

i. Eğer her $U \in \tau(x)$ komşuluğu için, buna bağlı bir $\lambda_0 = \lambda_0(U) \in \Lambda$ elemanı bulunup, her $\lambda \succeq \lambda_0$ için $x_\lambda \in U$ sağlanıyorsa, (x_λ) ağı x noktasına yakınsar denir ve $x_\lambda \to x$ biçiminde gösterilir. Bu durumda x, ağın bir limit noktası veya limiti olarak adlandırılır.

ii. Eğer her $U \in \tau(x)$ komşuluğu ve her $\lambda \in \Lambda$ için en az bir $\lambda_0 \succeq \lambda$ bulunup $x_{\lambda_0} \in U$ sağlanıyorsa, x noktası (x_λ) ağının bir yığılma noktası olarak adlandırılır.

$X \neq \emptyset$ bir küme, * bir ikili işlem ve $X \leq$ bir sıralama bağıntısı olmak üzere:

i. $(X, *)$ değişmeli bir grup
ii. $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme
iii. $\forall x, y, z \in X, x \leq y \Longrightarrow x * z \leq y * z$

koşulları sağlanıyorsa $(X,*,\leq)$ üç/üsüne kısmi sıralı grup denir.

$(X,*,\leq)$ kısmi sıralı bir grup ve $x \in X$ bir eleman olmak üzere:

i. Eğer $e \leq x$ (burada e, grubun birim elemanı) sağlanıyorsa, x'e pozitif eleman denir.

ii. X grubundaki tüm pozitif elemanların kümesine pozitif koni denir ve X_+ile gösterilir.

iii. Bir kısmi sıralı grubun pozitif konisi, sıralamayı tanımlamak için kullanılabilir. Ayrıca, her koni $Y \subseteq X, x \leq y \Leftrightarrow y - x \in Y$ bağıntısıyla kısmi sıralı bir grup oluşturur.

Bir $(X,*,\leq)$ kısmi sıralı grup için aşağıdaki tanımlar yapılır:

i. Eğer $nx \leq y (\forall x, y \in X, \forall n \in \mathbb{N})$ sağlanıyorsa ve bu yalnızca $x = e$ için doğruysa, X grubuna Arşimedyan kısmi sıralı grup denir.

ii. Eğer $(X,\leq)$ bir latis ise $(X,*,\leq)$ üçlüsüne latis sıralı grup denir.

$(X,*,\leq)$ bir latis sıralı grup ve $x \in X$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler ile tanımlanan elemanlar sırasıyla, x'in pozitif kısmı, negatif kısmı ve modülü olarak adlandırılır:

i. $x_+ = x \vee 0$ (pozitif kısmı)

ii. $x_- = x \wedge 0$ (negatif kısmı)

iii. $\|x\| = x_+ - x_-$(modülü).

$(X,*,\leq)$ bir latis sıralı grup ve $Y \subseteq X$ bir altküme olsun.

i. Eğer $|x| \leq |y|$ ve $y \in Y$ koşulundan $x \in Y$ sonucu çıkıyorsa, Y kümesine solid küme denir.

ii. Solid olmayan bir Y kümesini kapsayan en küçük solid küme:

$$\mathrm{Sol}(Y) = \{x \in X : |x| \leq y, y \in Y\}$$

olarak tanımlanır ve Y'nin solid tamlayışı olarak adlandırılır.

$(X,*,\leq)$ bir latis sıralı grup ve $Y \subseteq X$ bir latis sıralı altgrup olsun. Eğer $e < x \in X$ için her zaman $e < y \leq x$ olacak biçimde bir $y \in Y$ bulunabiliyorsa, Y altgrubunun X te sıra yoğun olduğu söylenir.

$(X,*,\leq)$ bir latis sıralı grup ve $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ bir X-değerli ağ olsun.

i. Eğer $\alpha, \beta \in A$ için $\beta \leq \alpha$ olduğunda $x_\alpha \leq x_\beta$ sağlanıyorsa, $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağına azalan ağ denir.

Eğer $x_\alpha \downarrow x$ sembolü kullanıııyorsa, bu (x_α) ağının azaldığını ve

$x = \inf\{x_\alpha : \alpha \in A\} = \bigwedge_{\alpha\in A} x_\alpha$ olduğunu belirtir.

ii. Eğer $\alpha, \beta \in A$ için $\beta \leq \alpha$ olduğunda $x_\beta \leq x_\alpha$ sağlanıyorsa, $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ağına artan ağ denir. Eğer $x_\alpha \uparrow x$ sembolü kullanılıyorsa, bu (x_α) ağının arttığını ve

$x = sup\{x_\beta : \beta \in B\} = \bigvee_{\alpha\in A} x_\alpha$ olduğunu belirtir.

X sıralı bir vektör uzayı olmak üzere, her $x, y \in X$ için aşağıdaki koşul sağlanıyorsa, X'e Riesz uzayı denir: $x \vee y = \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ her $x, y \in X$ için tanımlıdır.

X uzayı normlu ve sıralamaya sahip latis olsun ve üzerindeki norm aşağıdaki özellikleri sağlasın:

i. $x \leq y$ olduğu takdirde, her $x, y \in X^+$için $\|x\| \leq \|y\|$

ii. $|x| = \|x\|$ her $x \in X$ için sağlanır.

Bu kriterleri sağlayan bir norm, latis normu olarak adlandırılır ve X Banach latisi olarak tanımlanır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

A bir küme ve x herhangi bir eleman olmak üzere, x'in A kümesine olan aidiyetini fuzzy bir şekilde belirleyen aşağıdaki biçimde tanımıı μ_A fonksiyonuna üyelik fonksiyonu denir:

$$\mu_A(x) \in I = [0,1]$$

burada $\mu_A(x)$, x elemanının A kümesine üyelik derecesini ifade eder.

i. Eğer $\mu_A(x) = 1$ ise, x kesin olarak A kümesine aittir.

ii. Eğer $\mu_A(x) = 0$ ise, x kesin olarak A kümesine ait değildir.

iii. Eğer $0 < \mu_A(x) < 1$ ise, x'in A kümesine aitliği belirli bir derecededir.

A ve B birer fuzzy küme ve $\mathbb{X}$ evrensel küme olmak üzere, fuzzy kümelerin özellikleri aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

A fuzzy kümesinin B fuzzy kümesini kapsaması, yani B kümesindeki her elemanın A kümesine üyelik derecesinin B'deki üyelik derecesine eşit veya daha büyük olmasıdır.

$$B \sqsubseteq A \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{X}, \mu_B(x) \leq \mu_A(x).$$

A ve B fuzzy kümelerinin eşit olması, bu iki kümede her $x \in \mathbb{X}$ için aynı üyelik derecesine sahip olmalarıdır:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{X}, \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

A fuzzy kümesine ait olmayan elemanların üyelik derecelerinden oluşan kümeye, A fuzzy kümesinin tümleyeni denir. Tümleyen şu şekilde tanımlanır:

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x), \ \forall x \in \mathbb{X}$$

A fuzzy kümesinin elemanı olup B fuzzy kümesinin elemanı olmayan elemanlardan oluşan kümeye, A fuzzy kümesinin B fuzzy kümesinden farkı denir:

$$\mu_{A \setminus B}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}, \ \forall x \in \mathbb{X}$$

A ve B fuzzy kümelerinin her ikisine de aynı anda ait olan elemanlardan oluşan kümeye, A ile B kümelerinin kesişim kümesi denir:

$$\mu_{A \sqcap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \ \forall x \in \mathbb{X}.$$

A ve B fuzzy kümelerinin elemanlarının bir araya getirilmesiyle oluşan kümeye, A ile B kümelerinin birleşim kümesi denir:

$$\mu_{A \sqcup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \ \forall x \in \mathbb{X}$$

$\mathbb{X}$, evrensel küme olmak üzere, A ve B fuzzy kümeleri için aşağıdaki özellikler her zaman sağlanmaz.

i. $A \sqcup A^c = \mathbb{X}$

ii. $A \sqcap A^c = \emptyset$

Örneğin herhangi bir $x \in \mathbb{X}$ için $\mu_A(x) = 0.4$ olsun $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) = 0.6$ olup $\mu_{A \sqcup A^c} = \max\{\mu_A(x), \mu_{A^c}(x)\} = 0.6 \neq 1$ oldu yani evrensel kümeye olmadı benzer şekilde $\mu_{A \sqcap A^c} = \min\{\mu_A(x), \mu_{A^c}(x)\} = 0.4 \neq 0$ oldu yani kesişimleri boş olmadı.

$\mathbb{X}$, evrensel küme olmak üzere, A ve B fuzzy kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $A \sqcup \emptyset = A$ ve $A \sqcap \mathbb{X} = A$

ii. $A \sqcup \mathbb{X} = \mathbb{X}$ ve $A \sqcap \emptyset = \emptyset$

iii. $A \sqcup B = B \cup A$ ve $A \sqcap B = B \sqcap A$ (Değişme Özelliği)

iv. $A \sqcup (B \sqcup C) = (A \sqcup B) \sqcup C$ ve $A \sqcap (B \sqcap C) = (A \sqcap B) \sqcap C$ (Birleşme Özelliği)

v. $\left.\begin{aligned} A \sqcap (B \sqcup C) &= (A \sqcap B) \sqcup (A \sqcap C) \\ A \sqcup (B \sqcap C) &= (A \sqcup B) \sqcap (A \sqcup C) \end{aligned}\right\}$ (Dağılma Özelliği)

$\mathbb{X}$, evrensel küme olmak üzere, A ve B fuzzy kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $A \sqsubseteq B$ ve $B \sqsubseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

ii. $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

iii. $(A^c)^c = A$

iv. $A \setminus B = A \cap B^c$

v. $(A \sqcup B)^c = A^c \sqcap B^c$(De Morgan Kuralı)

vi. $(A \sqcap B)^c = A^c \sqcup B^c$ (De Morgan Kuralı)

vii. $A \setminus (B \sqcup C) = (A \setminus B) \sqcap (A \setminus C)$

viii. $A \setminus (B \sqcap C) = (A \setminus B) \sqcup (A \setminus C)$

A ve B birer fuzzy küme olmak üzere, A ve B kümelerinin bulanık Kartezyen çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\},\ \forall x, y \in \mathbb{X}$$

Daha genel olarak, n-adet fuzzy küme için Kartezyen çarpım:

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min_{1 \leq i \leq n} \{\mu_{A_i}(x_i)\},\ \forall x_i \in \mathbb{X}$$

I bir indis kümesi ve her $i \in \mathcal{J}$ için A_i bir fuzzy küme olsun. Bu durumda, fuzzy kümeler ailesi için birleşim ve kesişim karakteristik fonksiyonları şu şekilde tanımlanır:

$$\mu_{\bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i}(x) = \max_{i\in\mathcal{J}} \mu_{A_i}(x),\ \mu_{\bigcap_{i\in\mathcal{J}} A_i}(x) = \min_{i\in\mathcal{J}} \mu_{A_i}(x),\ \forall x \in \mathbb{X}$$

$\mathbb{X}$ evrensel küme A, B, C ve D birer fuzzy küme olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $A \neq B$ ise $A \times B \neq B \times A$.
ii. $A \times \emptyset = \emptyset$ ve $\emptyset \times B = \emptyset$.
iii. $A \sqsubseteq B$ ve $C \sqsubseteq D$ ise $A \times C \subseteq B \times D$
iv. $A \times (B \sqcup C) = (A \times B) \sqcup (A \times C)$.
v. $A \times (B \sqcap C) = (A \times B) \sqcap (A \times C)$.
vi. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
vii. $(A \sqcup B) \times C = (A \times C) \sqcup (B \times C)$.
viii. $(A \sqcap B) \times C = (A \times C) \sqcap (B \times C)$.
ix. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
x. $(A \sqcap B) \times (C \sqcap D) = (A \times C) \sqcap (B \times D)$.

n-li kartezyen çarpımın bazı özelliklerinin fuzzy kümeler için sağlanır:

i. $A_1 \times \cdots \times A_i \times \emptyset \times A_{i+2} \times \cdots \times A_n = \emptyset$.
ii. $(A_1 \sqcap B_1) \times A_2 \times .. \times A_n = (A_1 \times A_2 \times .. \times A_n) \sqcup (B_1 \times B_2 \times .. \times B_n)$
iii. $(A_1 \sqcap B_1) \times A_2 \times .. \times A_n = (A_1 \times A_2 \times .. \times A_n) \sqcap (B_1 \times A_2 \times .. \times A_n)$.

$\mathbb{X}$ evrensel küme, A bir fuzzy küme ve $\alpha \in I = [0,1]$ olmak üzere:

i. $\text{Supp}(A) = \{x \in \mathbb{X}: \mu_A(x) > 0\}$ kümesine A kümesinin dayanağı denir.
ii. $\text{Core}(A) = \{x \in \mathbb{X}: \mu_A(x) = 1\}$ kümesine A kümesinin çekirdeği denir. Eğer Core $(A) \neq \emptyset$ ise A kümesine normal-fuzzy küme Core $(A) = \emptyset$ alt normal-fuzzy küme adı verilir.
iii. $Hgt(A) = \sup\{\mu_A(x)\}$ sayısına A kümesinin yüksekliği denir.
iv. $A_{\bar{\alpha}} = \{x \in \mathbb{X}: \mu_A(x) > \alpha\}$ kümesine A kümesinin kesin alfa kesimi $A_\alpha = \{x \in \mathbb{X}: \mu_A(x) \geq \alpha\}$ kümesineyse alfa kesimi denilir.

X ve Y kümeleri boştan farklı olmak üzere $X \times Y$ kümesinin her bir fuzzy alt kümesine X kümesinden Y kümesine fuzzy bağıntı adı verilir.

$$\mu_R: X \times Y \to I = [0,1], \mu_R(x,y) = \alpha \in I$$

X ten Y kümesine R fuzzy bağıntıdır ve $R \in F(X,Y)$ şeklinde gösterilir.

$A \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{R}$, A üzerinde bir fuzzy bağıntı olmak üzere, $\mathcal{R}$ bağıntısının özellikleri karakteristik fonksiyonlar cinsinden şu şekilde tanımlanır:

i. Yansıma: $\forall a \in A, a\mathcal{R}a$ eşdeğer olarak $\mu_{\mathcal{R}}(a,a) = 1$.

ii. Simetri: $\forall a,b \in A, a\mathcal{R}b$ ise $b\mathcal{R}a$, yani $\mu_{\mathcal{R}}(a,b) = \mu_{\mathcal{R}}(b,a)$.

iii. Ters-Simetri: $\forall a,b \in A, a\mathcal{R}b$ ve $b\mathcal{R}a$ olduğunda, bu durum yalnızca $a = b$ için mümkün olur. Bu, $\mu_{\mathcal{R}}(a,b) + \mu_{\mathcal{R}}(b,a) > 1$ ise $a = b$ olmasıdır.

iv. Geçişme: $\forall a,b,c \in A, a\mathcal{R}b$ ve $b\mathcal{R}c$ ise $a\mathcal{R}c$, yani $\min\{\mu_{\mathcal{R}}(a,b), \mu_{\mathcal{R}}(b,c)\} \leq \mu_{\mathcal{R}}(a,c)$.

Bir fuzzy bağıntı, i, ii ve iv özelliklerini sağlıyorsa fuzzy denklik bağıntısı, i, iii ve iv özelliklerini sağlıyorsa fuzzy kısmi sıralama bağıntısı adını alır. Fuzzy kısmi sıralama bağıntısına sahip $(A,\mathcal{R})$ kümesine fuzzy kısmi sıralı küme, fuzzy poset ya da foset denir.

$(X, \leq)$ bir fuzzy kısmi sıralı küme olsun. $x,y \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa:

i. $x \vee y = \sup\{x,y\}$ fuzzy kümesinde mevcut,

ii. $x \wedge y = \inf\{x,y\}$ fuzzy kümesinde vardır,

o zaman X kümesi, $(X, \leq, \vee, \wedge)$ işlemleri ile tanımlı bir fuzzy latis olarak adlandirilir.

$\emptyset \neq X$ bir küme ve $\tau \subseteq F(X,I)$ bir fuzzy küme ailesi olsun. Eğer τ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, τ bir fuzzy topoloji olarak adlandırııı ve (X,τ) çiftine fuzzy topolojik uzay denir:

i. $\emptyset, X \in \tau$

ii. $U_1, U_2 \in \tau \Longrightarrow U_1 \sqcap U_2 \in \tau$

iii. I bir indis kümesi ve $U_i \in \tau \forall i \in I$ ise $\bigsqcup_{i \in I} U_i \in \tau$

Bir $O \in \tau$ ise O kümesine τ-açık ya da sadece açık fuzzy küme denir. Eğer $X \setminus U \in \tau$ ise U kümesine τ-kapalı ya da sadece fuzzy kapalı küme denir.

(X,τ) bir fuzzy topolojik uzay ve A bir fuzzy küme olmak üzere:

$$\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(A) = \{G: B \in \tau \text{ öyle ki } A \sqsubseteq B \sqsubseteq G\},$$

burada $\mathcal{N}_\tau(A)$ ailesine A 'nın τ-komşulukları ya da sadece fuzzy komşulukları denir.

Bir (X,τ) fuzzy topolojik uzayında $\mathcal{B} \sqsubseteq \tau$ olmak üzere eğer her açık fuzzy O kümesi $\mathcal{B}$ ailesinin bazı elemanlarının birleşimi olarak ifade edilebiliyorsa yani

$$O = \left\{ \bigsqcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \sqsubseteq \mathcal{B} \right\},$$

o zaman $\mathcal{B}$ ailesine τ fuzzy topolojisinin bir tabanı denir.

(X, τ) bir fuzzy topolojik uzay, A bir fuzzy küme ve $\mathcal{B}(A) \sqsubseteq \mathcal{N}_\tau(A)$ olsun. Eğer her $U \in \mathcal{N}_\tau(A)$ için en az bir $V \in \mathcal{B}(A)$ bulunup $V \sqsubseteq U$ sağlanıyorsa, $\mathcal{B}(A)$ ailesine τ 'daki bir fuzzy komşuluk tabanı denir.

X bir fuzzy topolojik uzay ve $A \sqsubseteq X$ bir altküme olmak üzere: A kümesinin içi $A°$A'nın içinde bulunan tüm açık fuzzy noktaların kümesi olarak tanımlanır:

$$A° = \sqcup \{U \sqsubseteq X : U \text{ açık ve } U \sqsubseteq A\}$$

A kümesinin kapanışı $\bar{A}$, A'yı içeren en küçük fuzzy kapalı küme olarak tanımlanır:

$$\bar{A} = \sqcap \{C \sqsubseteq X : C \text{ kapalı ve } A \sqsubseteq C\}.$$

A kümesinin sınırı ∂A, A'nın kapanışı ile A'nın içinin farkı olarak tanımlanır:

$$\partial A = \bar{A} \setminus A°(A)$$

B fuzzy kümesi, A kümesinin bir yığılma noktasıdır eğer her U_B fuzzy komşuluğu için:

$$(U_B \sqcap A) \setminus \{B\} \neq \emptyset$$

Bir fuzzy topolojik uzayın her fuzzy noktasında sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa, bu fuzzy topolojik uzaya birinci sayılabilir fuzzy uzay veya kısaca C1-uzayı denir.

Bir topolojik uzayın (yani topolojisinin) sayılabilir bir tabanı varsa, bu fuzzy topolojik uzaya ikinci sayılabilir fuzzy uzay veya kısaca C2-uzayı denir.

Fuzzy uzaylar üzerinde tanımlanan birçok farklı metrik mevcuttur buna göre dizi ve yakınsama tanımları da değişebilmektedir bunlardan birkaç tanesi verilecektir.

* : $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemi için

i. * işlemi değişmeli ve birleşmeli olmalıdır.
ii. * işlemi süreklidir.
iii. Her $a \in I = [0,1]$ için $a * 1 = a$
iv. $a \leq c$ ve $b \leq d$ olan her $a, b, c, d \in [0,1]$ için $a * b \leq c * d$.

Bu koşullar sağlanıyorsa, * ikili işlemine sürekli t-norm denir.

$X \neq \emptyset$, * işlemi sürekli birt-norm ve $M; X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde bir fuzzy küme olsun. M fonksiyonu, her $a, b, c \in X$ ve $p, q > 0$ için aşağıdaki koşulları sağıyorsa:

i. $M(a,b,p) > 0$

ii.

$M(a,b,p) = 1 \Leftrightarrow x = y$

iii. $M(a,b,p) = M(b,a,p)$

iv. Her $p,q > 0$ için $M(a,b,p) * M(b,c,q) \leq M(a,c,p+q)$

v. $M(a,b,\cdot): (0,\infty) \to [0,1]$ süreklidir.

Bu koşulları sağıyorsa, M fonksiyonu X üzerinde bir fuzzy metrik olarak tanımlanır ve $(X,M,*)$ üçlüsüne de bir fuzzy metrik uzay denir.

Örnek 2.1.

$X = \mathbb{N}$ ve $*: X \times X \to X; a * b = \min\{a,b\}$ ve $t > 0$ için

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{1+t^2} & : x \neq y \\ 1 & : x = y \end{cases}$$

ile $(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

i. Her $t > 0$ için tanımdan $M(x,y,t) > 0$ sağlanır.

ii. $M(x,y,t) = 1$ ise $x = y$ olduğu tanımdan açıktır.

iii. $M(x,y,t) = M(y,x,t)$ olacağı görülebilir.

iv.

$t,s > 0$ için $x = y, y = z$ veya $x = z$ iken

$$M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$$

olacağı görülebilir. $x \neq y \neq z$ olsun:

$$\min\{M(x,y,t), M(y,z,s)\} \leq M(x,z,t+s)$$
$$\min\left\{\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{(t+s)^2}{1+(t+s)^2}\right\} < \frac{(t+s)^2}{1+(t+s)^2}$$
$$\min\left\{\frac{s^2}{1+s^2}, \frac{(t+s)^2}{1+(t+s)^2}\right\} < \frac{(t+s)^2}{1+(t+s)^2}$$

olup eşitsizlik sağlanır.

v. $\lim_{t\to t_0} M(x,y,t) = \frac{t_0^2}{1+t_0^2} = M(x,y,t_0)$ yani M fonksiyonu t'ye göre süreklidir.

Buradan metrik uzay olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 2.2.

(X, d) bir metrik uzay ve $x * y = x$.y olsun. Her $p, q, r \in \mathbb{R}^+$ için

$$M_d(x, y, t) = \frac{p^t}{p^t + q \cdot d(x, y)^s}$$

olarak tanımlanan $(X, M_d, *)$ fuzzy metrik uzaydır.

Yukarıdaki teoremden klasik metrik uzaylardan fuzzy metrikler elde edebileceğimizi anlarken her fuzzy metriğin klasik metrik belirtmeyeceğini aşağıdaki örnekle gözlemleyebiliriz. $X = \mathbb{N}$ ve $a * b = a.b$ olsun M fuzzy metrik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$M(x, y, t) = \begin{cases} e^{-\frac{|x-y|}{t}}, & \text{eğer } t > 0, \\ 0, & \text{eğer } t \leq 0 \end{cases}$$

Bu tanımın bir fuzzy metrik olduğunu aşağıdaki gibi görebiliriz:

i. $M(x, y, t) > 0$ her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için.

ii. $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$

iii. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

iv. Her $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için

$$M(x, z, t + s) \geq M(x, y, t) * M(y, z, s)$$

v. $M(x, y, t)$, t parametresine göre sürekli bir fonksiyondur ve $t \to \infty$ iken $M(x, y, t) \to 1$

fakat X üzerinde

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

olacak biçimde $d(x, y)$ metriği yoktur

V, $\mathbb{F}$ cismi üzerine tanımlı vektör uzayı ve $*$ sürekli bir t-norm olsun. Eğer $N, V \times \mathbb{R}$ üzerinde bir fuzzy alt küme ve $u, v \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki:

i. Her $s \in \mathbb{R}$ ile $s \leq 0$ için $N(u, s) = 0$.

ii. Her $s \in \mathbb{R}$ ile $s > 0$ için $N(u, s) = 1$ ise ve ancak $u = 0$

iii. Her $s \in \mathbb{R}$ ile $s > 0$ için,

$$N(\alpha u, s) = N\left(u, \frac{s}{\alpha}\right) \text{ eğer } \alpha \neq 0.$$

iv. Her $s, t \in \mathbb{R}$ ile $s, t > 0$ için,

$$N(u+v, s+t) \geq N(u,s) \cdot N(v,t)$$

v. $\lim_{s\to\infty} N(u,s) = 1.$

koşulları sağlanıyorsa ($V, N,*$) üçlüsü fuzzy normlu uzay adını alır.

$(X, N,*)$ bir fuzzy normlu uzay ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi, $x \in X$ 'ye yakınsar denir ve $x_n \xrightarrow{f_n} x$ şeklinde gösterilir, eğer her $\alpha \in (0,1)$ ve $t > 0$ için, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_0$ için

$$N(x_n - x, t) > 1 - \alpha.$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi, fuzzy Cauchy dizisi olarak adlandırııı, eğer her $\alpha \in (0,1)$ ve $t > 0$ için, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n, m > n_0$ için

$$N(x_n - x_m, t) > 1 - \alpha.$$

$\mathbb{X}$ evrensel, A fuzzy küme olmak üzere her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ için üyelik derecesi

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

eşitsizliğini sağlayan A fuzzy kümesine konvekstir denir.

$\mathbb{R}$ 'nin konveks ve normal bir fuzzy alt kümesine fuzzy kapalı aralık denir. A'nın bir fuzzy kapalı aralık olması demek her $\alpha \in I$ için A_α 'nın $[a(\alpha), b(\alpha)]$ biçiminde bir kapalı olması demektir.

Çekirdeği tek bir noktadan oluşan fuzzy kapalı aralığa fuzzy sayı denir yani $\text{Core}(A) = \{x \in \mathbb{X}: \mu_A(x) = 1\} = \{x_0\}$ şeklindedir. Bu $x_o\,'$ a A'nın model değeri adı verilir.

$\mathbb{R}'$ deki tüm fuzzy sayıların ailesi $\mathbb{R}_\mathcal{F}$, olmak üzere $u, v \in \mathbb{R}_\mathcal{F}, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq r \leq 1$ olmak üzere $[u]^r = \{x \in \mathbb{R} : \mu_u(x) \geq r\}$ olup $[u \oplus v]^r = [u]^r \oplus [v]^r$ ve $[\lambda \odot v]^r = \lambda \odot [u]^r$ tanımlanan işlemler fuzzy toplama ve fuzzy skaler çarpım işlemidir. A, B fuzzy sayıları arasındaki uzaklığı belirlemek için

$$\bar{d}: \mathbb{R}_\mathcal{F} \times \mathbb{R}_\mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

$$\bar{d}(A,B) = \sup_{\alpha\in[0,1]} d_H(A_\alpha, B_\alpha) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\{|a_1^\alpha - b_1^\alpha|, |a_2^\alpha - b_2^\alpha|\}$$

metriği tanımlanabilir.

$u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$ fonksiyonuna fuzzy sayı dizisi denir ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere u_n ile fuzzy sayı dizisinin n.terimi ifade edilir.

Her $\varepsilon > 0$ için, $n > N_0$ iken $\bar{d}(u_n, u_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_0 = N_0(\varepsilon)$ sayısı mevcutsa, (u_n) fuzzy sayı dizisi bir u_0 fuzzy sayısına yakınsaktır denir ve $u_n \overset{\bar{d}}{\rightarrow} u_0$ şeklinde gösterilir.

Her $\varepsilon > 0$ için, $n > m > N_0$ iken $\bar{d}(u_n, u_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_0 = N_0(\varepsilon)$ sayısı mevcutsa, (u_n) fuzzy sayı dizisi bir fuzzy cauchy dizisi denir.

X bir foset ve $(a_\alpha)_{\alpha \in A} X$ 'in bir ağı olsun, eğer $\alpha \leq \beta$ iken $\mu_X(a_\alpha, a_\beta) > \frac{1}{2}$, o zaman (a_α) ağına artan denir ve $(a_\alpha) \uparrow$ şeklinde gösterilir. Ayrıca,

$$a = \sup\{a_\alpha : \alpha \in A\} \text{ mevcutsa, } a_\alpha \uparrow a$$

yazılır. Benzer şekilde, azalan ağda tanımlanır ve böyle bir ağ için $(a_\alpha) \downarrow$ yazillr. Ayrıca,

$$a = \inf\{a_\alpha : \alpha \in A\} \text{ mevcutsa, } a_\alpha \downarrow a$$

şeklinde gösterilir.

X vektör uzayı üzerinde $x_1, x_2 \in X$ için $\mu_R(x_1, x_2) > \frac{1}{2}$ iken aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X fuzzy sıralı vektör uzayı adını alır.

i. $\lambda \in \mathbb{R}^+ iç$ in $\mu_R(x_1, x_2) \leq \mu_R(\lambda x_1, \lambda x_2)$

ii. Her $x \in X$ için $\mu_R(x_1, x_2) \leq \mu_R(x_1 + x, x_2 + x)$

Ayrıca $x \in X$ elemanı için $\mu_R(0, x) > \frac{1}{2}$ ise, x elemanı fuzzy pozitif olarak adlandırılır. Aynı şekilde, eğer $\mu_R(x, 0) < \frac{1}{2}$ ise, x elemanı fuzzy negatif olarak tanımlanır. X'in tüm fuzzy pozitif elemanlarının kümesi X^+ve fuzzy negatif elemanlarının kümesi ise X^-ile gösterilir.

X fuzzy sıralı vektör uzayının sonlu her alt kümesinin supremumu ve infumumu mevcutsa ve bu infumum ve supremum X kümesinde ise X fuzzy Riesz uzayı adını alır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, klasik ve fuzzy Riesz uzaylarındaki ağ yakınsamaları ve bu yakınsamaların birbirleriyle olan ilişkileri incelenecektir.

X bir Riesz uzayı ve $A \subseteq X$ olsun.

i. A kümesi, bir $M \in X$ elemanı için $x \leq M, \forall x \in A$ koşulunu sağlıyorsa sıra üst sınırlı denir.

ii. A kümesi, bir $m \in X$ elemanı için $m \leq x, \forall x \in A$ koşulunu sağlıyorsa sıra alt sınırlı denir.

iii. A kümesi, eğer hem sıra üst sınırıı hem de sıra alt sınırıı ise sıra sınırıı denir. Yani, bir $m, M \in X$ vardır ve $m \leq x \leq M, \forall x \in A$ koşulu sağlanır.

X bir Riesz uzayı ve $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ bu uzayda bir ağ ve $x \in X$ olsun. Eğer $y_\beta \downarrow 0$ ve $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ şartını sağlayan bir $\left(y_\beta\right)_{\beta \in B} \subseteq X$ ağı varsa $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ dizisi x noktasına sıra yakınsar denir ve $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ biçiminde gösterilir.

Sonlu boyutlu topolojik Riesz uzaylarında $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıyla $x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ olması denktir fakat sonsuz boyutta denk gelmeyebilir.

X bir Riesz uzayı ve $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ bu uzayda bir ağ ve $y \in X^+$olsun. $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağı x noktasına sınırsız sıra yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ şeklinde gösterilir.

(X, τ) bir yerel solid topolojik Riesz uzayı ve $A \subseteq X$ bir ideal olsun. Eğer bir (x_α) ağı

$$|x_\alpha - x| \wedge |a| \xrightarrow{\tau} 0 \ \forall a \in A$$

sağlıyorsa bu ağa x noktasına sınırsız topolojik yakınsama ile yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{u\tau} x$ şeklinde gösterilir

$(X, \|\cdot\|)$ bir Banach latisi ve (x_α) bu latiste bir ağ olsun. Eğer her $y \in X^+ için$

$$|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

sağlanıyorsa (x_α) ağı x noktasına sınırsız norm yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{\text{un}} x$ şeklinde gösterilir.

$(X, \|\cdot\|)$ bir Banach latisi ve (x_α) bu latiste bir ağ olsun. Eğer her $y \in X^+ için$

$$|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{w} 0$$

sağlanıyorsa (x_α) ağı x noktasına sınırsız mutlak zayıf yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uw} x$ şeklinde gösterilir.

X bir Riesz uzayı ve (x_α) bu uzayda bir ağ olamak üzere eğer $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ de sağlanır. Fakat önermenin tersi her zaman doğru değildir. c_0 uzayındaki $e_n = (0,\cdots,1,\cdots)$ dizisiyle gözlemlenebilir.

X Riesz uzayında bir netin eğer sıra sınırıı ise sıra yakınsama ve sınırsız sıra yakınsama kavramları birbirine denk düşecektir.

X bir Riesz uzayı ve (x_α) bu uzayda bir ağ olamak üzere. Eğer $x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ ise, o zaman $x_\alpha \xrightarrow{u\tau} 0$ olur. Sıra sınırıı ağlar için bu yakınsamalar birbirine denktir.

$(X, \|\cdot\|)$ bir Banach latisi ve (x_α) bir latiste bir ağ olsun. Eğer $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ve (x_α) neredeyse sıralı sınırlı bir dizi ise, o zaman $x_\alpha \to x$ sağlanır.

X bir fuzzy sıralı küme ve $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ bu uzayda bir ağ ve $x \in X$ olsun. Eğer $y_\beta \downarrow 0$ ve bir $\beta_0 \in B$ vardır öyle ki her $\beta \geq \beta_0$ için $\mu_R(| \ x_\alpha - x \ |, y_\beta) > \frac{1}{2}$ şartını sağlayan bir $(y_\beta)_{\beta\in B} \subseteq X$ ağı varsa, $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ dizisi x noktasına fuzzy sıra yakınsar denir ve $x_\alpha \xrightarrow{fo} x$ biçiminde gösterilir.

X bir fuzzy sıralı küme ve $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ bu uzayda bir ağ ve $y \in X^+$ olsun. $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{fo} 0$ oluyorsa $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ağı x noktasına fuzzy sınırsız sıra yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{fuo} x$ şeklinde gösterilir.

(V, R) bir fuzzy Riesz uzayı ve N bu uzayda bir fuzzy norm olmak üzere, eğer her her $u, v \in V$ ve $s \in \mathbb{R}^+$için $\mu_R(|u|, |v|) > \frac{1}{2}$ iken $N(u, s) \geq N(v, s)$ sağlanıyorsa, N fuzzy Riesz normu olarak adlandırılır. Eğer N, V üzerinde bir fuzzy Riesz normu ise, (V, N, R) fuzzy normlu Riesz uzayı olarak tanımlanır. Fuzzy normlu Riesz uzayı, fuzzy Banach latisi olarak adlandırılır.

$(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy Banach latisi ve (x_α) bu latiste bir ağ olsun. Eğer her $y \in X^+$için

$$|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{fn} 0$$

sağlanıyorsa (x_α) ağı x noktasına fuzzy sınırsız norm yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ şeklinde gösterilir.

X bir fuzzy Riesz uzayı ve (x_α) bu uzayda bir ağ olmak üzere, eğer $x_\alpha \overset{fo}{\rightarrow} x$ ise, o zaman $x_\alpha \overset{\text{fuo}}{\rightarrow} x$ de sağlanır.

X fuzzy Riesz uzayında bir ağın eğer fuzzy sıra sınırlı ise, fuzzy sıra yakınsama ve fuzzy sınırsız sıra yakınsama kavramları birbirine denk düşecektir.

$(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy Banach latisi ve (x_α) bir fuzzy latiste bir ağ olsun. Eğer $x_\alpha \overset{\text{fun}}{\rightarrow} x$ ve (x_α) fuzzy neredeyse sıralı sınırlı bir dizi ise, o zaman $x_\alpha \rightarrow x$ sağlanır.

(X, N, R) bir fuzzy Banach latisi ve $(x_\lambda)X$ uzayında bir fuzzy sıralı sınırıı ağ olsun. O zaman, $x_\lambda \overset{fn}{\rightarrow} 0$ olmasıyla $x_\lambda \overset{\text{fun}}{\rightarrow} 0$ birbirlerine denktir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu çalışma boyunca, fuzzy Riesz uzaylarındaki ağların yakınsaklık özellikleri ile klasik Riesz uzaylarındaki yakınsaklık özellikleri arasındaki ilişki incelenmiş ve bu bağlamda birçok tanım, ve önerme sunulmuştur. Çalışmanın temel bulguları şu şekilde özetlenebilir:

i. **Yakınsaklık Türleri Arasındaki İlişkiler:**

Fuzzy Riesz uzaylarında tanımlanan fuzzy sıralı yakınsaklık ve fuzzy sınırsız sıralı yakınsaklık kavramlarının, klasik Riesz uzaylarındaki sıralı yakınsaklık ve sınırsız sıralı yakınsaklık kavramlarının genelleştirilmiş versiyonları olduğu gözlemlenmiştir.

ii. **Sınırlılık Koşullarının Önemi:**

Fuzzy Riesz uzaylarında, ağların fuzzy sıralı yakınsaklığının ve fuzzy sınırsız sıralı yakınsaklığının denk olduğu durumların, klasik Riesz uzaylarındaki sıralı sınırlılık ile uyumlu olduğu kanıtlanmıştır.

iii. **Fuzzy Normlu Riesz Uzaylarının Özellikleri:**

Fuzzy Banach latisleri bağlamında, fuzzy norm ve fuzzy Riesz norm kavramları tanımlanmış ve bu normların klasik normlarla uyumlu şekilde davrandığı gösterilmiştir. Özellikle, fuzzy Riesz normun monotonluk özelliği dikkate alınmıştır.

iv. **Genelleştirme ve Uygulama Alanları:**

Çalışmada fuzzy Riesz uzaylarının, klasik Riesz uzaylarına göre daha geniş bir bağlamda çalışmaya olanak sağladığı ve bu yapıların özellikle analitik ve uygulamalı matematikte potansiyel kullanım alanları olduğu vurgulanmıştır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Araştırma sonucunda fuzzy Riesz uzaylarındaki kavramların, klasik Riesz uzaylarındaki tanımların doğal bir genellemesi olduğu ve bu genellemelerin matematiksel analiz açısından tutarlı bir yapı sunduğu sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmanın temel çıkarımları ve önerileri şu şekilde ifade edilebilir:

i. Teorik Katkılar:

Fuzzy Riesz uzayları üzerine geliştirilen bu yaklaşımlar, özellikle fuzzy mantık ve bulanık kümeler teorisinin Riesz uzaylarına entegrasyonu açısından yeni bir bakış açısı sunmaktadır. Bu bağlamda, fuzzy Riesz uzaylarındaki ağların yakınsaklık kavramları daha geniş bir matematiksel çerçevede incelenebilir.

ii. Gelecek Çalışmalar için Öneriler:

Fuzzy Riesz uzaylarındaki yakınsaklık kavramlarının, diğer fuzzy yapıdaki uzaylar (örneğin, fuzzy Hilbert veya fuzzy Banach uzayları) ile olan ilişkisi araştırılabilir.

Fuzzy Riesz normların daha karmaşık sistemlerde uygulanabilirliği incelenerek, bu yapıların fizik, ekonomi ve mühendislik gibi alanlardaki olası uygulamaları değerlendirilebilir.

Çalışmada ele alınan genelleştirilmiş tanımların, sezgisel bulanık kümeler veya Pythagorean fuzzy sistemler gibi farklı bulanık yaklaşımlar ile uyumu araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D., 2002. **An Invitation to Operator Theory**. American Mathematical Society, Providence.

Abramovich, Y., Sirotkin, G., 2005. On order convergence of nets. **Positivity** 9(3), 287.

Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985. **Positive Operators**. Academic Press, New York & London.

Anguelov, R., van der Walt, J.H., 2005. Order convergence structure on C(X). **Quaestiones Mathematicae** 28(4), 425-457.

Bashir, Z., Iqbal, M., 2022. The unbounded fuzzy norm convergence in fuzzy Banach lattices. **Soft Computing** 26(1), 25-31.

Beg, I., Islam, M., 1994. Fuzzy riesz spaces. **J. Fuzzy Math** 2(1), 211-229.

Birkhoff, G., 1935. On the structure of abstract algebras. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society** 31(4), 433-454.

Birkhoff, G., 1937. Moore-Smith convergence in general topology. **Annals of Mathematics** 38(1), 39-56.

Birkhoff, G., 1940. **Lattice Theory**. American Mathematical Society, Vol. 25.

DeMarr, R., 1964. Partially ordered linear spaces and locally convex linear topological spaces. **Illinois Journal of Mathematics** 8(4), 601-606.

Kantorovitch, L.V., 1937. Lineare halbgeordnete Räume. **Mathematische Annalen** 2(1), 121-168.

Kaplan, S., 1997. On unbounded order convergence. **Real Analysis Exchange** 23(2), 175-184.

Lowig, H., 1941. Intrinsic topology and completion of Boolean rings. **Annals of Mathematics** 42(4), 1138-1196.

Luxemburg, W.A.J., Zaanen, A.C., 1971. **Riesz Spaces**. North-Holland Publishing.

Nakano, H., 1948. Ergodic theorems in semi-ordered linear spaces. **Annals of Mathematics** 49(2), 538-556.

O'Brien, M.J., 2016. Unbounded norm convergence in Banach lattices. **Positivity** 8, 165-178.

Rennie, B.C., 1950. Lattices. Proceedings of the London. **Mathematical Society** 2(1), 386-400.

Rudin, W., 1976. **Principles of Mathematical Analysis**. McGraw-Hill Education.

Schaefer, H.H., 1974. **Banach Lattices and Positive Operators**. Springer-Verlag, New York.

Schaefer, H.H., Wolff, M.P., 1999. **Topological Vector Spaces**. Springer.

Taylor, M.A., 2019. Unbounded topologies and uo-convergence in locally solid vector lattices. **Journal of Mathematical Analysis and Applications** 472(1), 981-1000.

Troitsky, V.G., 2004. Measures of non-compactness of operators on Banach lattices. **Positivity** 8, 165-178.

Urysohn, P., 1926. Sur les classes (L) de M. Fréchet. **Enseignement Mathématique** 25, 77-83.

Von Neumann, J., 1935. On complete topological spaces. **Transactions of the American Mathematical Society** 37(1), 1-20.

Vural, M., 2018. **Some generalizations of unbounded order convergence types in Riesz spaces and related topics**.

Wickstead, A.W., 1977. Weak and unbounded order convergence in Banach lattices. **Journal of the Australian Mathematical Society** 24(3), 312-319.

Zabeti, O., 2018. Unbounded absolute weak convergence in Banach lattices. **Positivity** 22, 501-505.

Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy Sets. **Information and Control** 8(3), 338-353.

Zadeh, L.A., 1973. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics** 3(1), 28-44.

Zadeh, L.A., 1975. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part I. **Information Sciences** 8(3), 199-249.

Zadeh, L.A., 1976. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part II. **Information Sciences** 9(3), 43-80.

Zadeh, L.A., 1983. Fuzzy Logic = Computing with Words. IEEE **Transactions on Fuzzy Systems** 4(2), 103-111.

ÖZGEÇMİŞ

Ali Harun DALDALLI, 2016 yılında Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başlamış ve 2021 yılında mezun olmuştur. 2023 yılında Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi'nde yüksek lisans eğitimine başlamıştır.