

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DENEME DENKLEM YÖNTEMİ İLE LİNEER OLMAYAN
MATEMATİKSEL MODELLERİN HAREKETLİ DALGA
ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

Sebahattin ERTAŞ

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2025

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

DENEME DENKLEM YÖNTEMİ İLE LİNEER OLMAYAN
MATEMATİKSEL MODELLERİN HAREKETLİ DALGA
ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

Tez Yazarı
Sebahattin ERTAŞ

Danışman
Prof. Dr. Hasan BULUT

OCAK 2025
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Deneme Denklem Yöntemi ile Lineer Olmayan Matematiksel Modellerin
Hareketli Dalga Çözümlerinin Analizi

Yazarı: Sebahattin ERTAŞ

İlk Teslim Tarihi: 18.12.2024

Savunma Tarihi: 21.01.2025

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Hasan BULUT Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Reşat YILMAZER Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Funda TÜRK Bartın Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Deneme Denklem Yöntemi ile Lineer Olmayan Matematiksel Modellerin Hareketli Dalga Çözümlerinin Analizi” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

21.01.2025

Sebahattin ERTAŞ



ÖNSÖZ

Bu çalışmamın bütün aşamalarında ve Yüksek Lisans eğitim hayatımda bana desteklerini esirgemeyen, sabırla ve özveriyle bana sürekli yardımcı olan, bilgi deneyim ve tecrübelerinden yararlandığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Hasan BULUT' a, teşekkürlerimi sunarım.

Sebahattin ERTAŞ
ELAZIĞ, 2025



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR	3
2.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	3
2.2. Soliton Kavramı.....	5
3. MATERYAL VE METOD: DENEME DENKLEM YÖNTEMLERİ	7
3.1. Deneme Denklem Yöntemi	7
3.2. Yeni Versiyon Deneme Denklem Metodu.....	8
4. YENİ DENEME DENKLEM YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI	10
4.1. Genelleştirilmiş Reaction Duffing Modeline Uygulaması.....	10
4.2. (1+1) Boyutlu Lineer Olmayan Ostrovsky Denklem ve Uygulaması.....	18
5. SONUÇ.....	28
KAYNAKLAR	29
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Deneme Denklem Yöntemi ile Lineer Olmayan Matematiksel Modellerin Hareketli Dalga Çözümlerinin Analizi

Sebahattin ERTAŞ

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2025, Sayfa: viii + 30

Bu çalışmada, lineer olmayan Reaction Duffing ve (1+1) boyutlu lineer olmayan Ostrovsky denklemlerine yeni versiyon deneme denklem yöntemi hareketli dalga dönüşümü uygulanarak bu denklemlerin yeni ve farklı tam çözümleri bulunmuştur. Ayrıca bulunan bu yeni tam çözümlerin fiziksel davranışlarını göstermek ve bu davranışların daha etkili yorumlanması için iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Deneme denklem yöntemi, Yeni versiyon deneme denklem yöntemi, Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler, Kararsız lineer olmayan Reaction Duffing ve (1+1) boyutlu lineer olmayan Ostrovsky denklemi

ABSTRACT

Analysis of Traveling Wave Solutions of Nonlinear Mathematical Models by Trial Equation Method

Sebahattin ERTAŞ

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

January 2025, Pages: viii + 30

In this study, new and different exact solutions of the nonlinear Reaction Duffing and (1+1) dimensional nonlinear Ostrovsky equations were found by applying the new version trial equation method moving wave transformation. In addition, two and three dimensional graphics were drawn to show the physical behaviors of these new exact solutions and to interpret these behaviors more effectively.

Keywords: Trial equation method, New version of the trial equation method, Nonlinear partial differential equations, Unstable nonlinear Reaction Duffing equation and (1+1) dimensional nonlinear Ostrovsky

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

- Şekil 4.1.** (4.26) denklemindeki çözümün $\alpha_1 = C_1 = s = p = A_1 = 2, k = \sqrt{2},$
 $\alpha_2 = 1, D_1 = \frac{1}{2}, h_4 = 3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi. 14
- Şekil 4.2.** (4.27) denklemindeki çözümün $\alpha_1 = E_1 = s = p = A_1 = 2, k = \sqrt{2}, \alpha_2 = 1,$
 $\alpha_3 = \frac{5}{3}, D_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}, C_2 = -1, h_4 = 3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi. 14
- Şekil 4.3.** (4.28) denklemindeki çözümün $\alpha_1 = s = p = C_3 = 2, k = \sqrt{2}, \alpha_2 = E_2 = 1,$
 $\alpha_3 = \frac{5}{3}, \alpha_4 = \frac{3}{2}, h_4 = 3$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi. 15
- Şekil 4.4.** (4.40) denklemindeki çözümün $\alpha_1 = C_1 = c = 2, k = \sqrt{2}, \alpha_2 = C_5 = 1, D_1 = \frac{1}{2}, C_5 = 3$
değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi. 17
- Şekil 4.5.** (4.41) denkleminde $\alpha_1 = A_1 = E_1 = c = 2, k = \sqrt{2}, \alpha_2 = B_1 = 1,$
 $C_2 = -1, D_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}, E_1 = 3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi. 17
- Şekil 4.6.** (4.42) denkleminde $\alpha_1 = C_3 = 2, \beta = \sqrt{2}, \alpha_2 = B_1 = E_2 = 1, r = 3$ değerleri için reel
kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi. 18
- Şekil 4.7.** (4.67) denkleminde $\alpha_2 = D_3 = 1, \alpha_1 = k = C_1 = 2, C_4 = A_2 = \frac{4}{3}, c = \frac{1}{8}$ değerleri için üç
ve iki boyutlu grafik gösterimi. 22
- Şekil 4.8.** (4.68) denkleminde $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = k = E_1 = 2, C_2 = -1, D_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}, c = \frac{1}{8}$
 $A_1 = \frac{2}{3}, A_2 = \frac{4}{3}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi. 22
- Şekil 4.9.** (4.69) denkleminde $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = k = C_6 = 2, C_3 = -1, E_2 = \frac{-3}{2}, c = \frac{1}{8}$
 $\alpha_3 = \frac{5}{3}, \alpha_4 = 4, A_1 = \frac{2}{3}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi. 23
- Şekil 4.10.** (4.80) denkleminde $\alpha_2 = B_1 = B_2 = C_7 = C_8 = D_3 = 1, C_4 = \frac{4}{3}, c = \frac{1}{8}$
 $\alpha_1 = k = C_1 = 2,$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi. 26
- Şekil 4.11.** (4.81) denkleminde $\alpha_2 = B_1 = B_2 = 1, \alpha_3 = \frac{5}{3}, C_2 = -1, A_1 = \frac{2}{3}, E_3 = \frac{3}{2}, c = \frac{1}{8}$
 $\alpha_1 = k = E_1 = B_3 = B_4 = 2, D_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi. 26
- Şekil 4.12.** (4.82) denkleminde $\alpha_2 = B_1 = B_2 = 1, \alpha_4 = 4, A_2 = \frac{4}{3}$
 $C_3 = -1, E_2 = \frac{-3}{2}, E_4 = -3, c = \frac{1}{8}, \alpha_1 = k = C_6 = B_4 = B_5 = 2,$ değerleri için a. ve c.
reel kısmın, b. ve d. sanal kısmın sırasıyla üç ve iki boyutlu grafik gösterimi. 27

1. GİRİŞ

Matematik, doğadaki olayları ve insan yapımı sistemleri modellemek ve anlamak için vazgeçilmez bir araçtır. Matematiksel modelleme, fiziksel olayların ve karmaşık sistemlerin matematiksel bir dille ifade edilmesi sürecidir. Doğada gözlemlenen birçok olay, dinamik süreçlerin bir yansımasıdır ve bu süreçler matematiksel ifadelerle modellenmek istendiğinde genellikle diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Diferansiyel denklemler, bir sistemdeki değişim oranlarını ve bu değişimlerin bağımlı değişkenler arasındaki ilişkilerini tanımlayan temel araçlardır.

Birçok fiziksel süreç, birden fazla bağımsız değişkenin etkisi altında gerçekleşir. Örneğin, ısı transferi hem zaman hem de mekân boyutunda gerçekleşirken, akışkanlar mekaniği ve elektromanyetik dalga teorisi gibi alanlarda da benzer şekilde birden fazla bağımsız değişken dikkate alınır. Bu tür durumlarda, kullanılan matematiksel ifadeler, kısmi diferansiyel denklemler (KDD'ler) adını alır. KDD'ler, bağımsız değişkenlerin türevlerini içeren denklemler olarak, karmaşık sistemlerin davranışlarını ifade etmede güçlü bir araçtır. Bu denklemler, mühendislikten fiziğe, biyolojiden ekonomiye kadar geniş bir yelpazede kullanılan modellerde temel bir rol oynar.

KDD'ler genel olarak doğrusal ve doğrusal olmayan olmak üzere iki gruba ayrılır. Lineer KDD'ler, çözüm sürecinde süperpozisyon ilkesine uyar ve daha düzenli bir matematiksel yapı sergiler. Ancak, birçok gerçek dünya sistemi doğrusal olmayan özellikler taşır. Lineer olmayan KDD'ler, daha karmaşık ve kaotik davranışları modelleyebildiği için fiziksel, biyolojik ve mühendislik uygulamalarında daha sık karşılaşılır. Doğrusal olmayan denklemler, sistemlerin ani değişimlerini, doğrudan etkileşimlerini ve kaotik davranışlarını ifade etme açısından büyük bir öneme sahiptir.

Doğrusal olmayan KDD'lerin çözümünde analitik yöntemler, sistemin yapısını anlamak ve fiziksel yorumlara ulaşmak açısından kritik bir rol oynar. Bu denklemlerden bazıları, soliton adı verilen özel çözümler sunar. Soliton çözümleri, doğrusal olmayan dalga denklemlerinde ortaya çıkan, şekli ve hızını bozmadan hareket eden dalga çözümleridir. Solitonlar, ilk kez su dalgalarının incelenmesi sırasında John Scott Russell tarafından gözlemlenmiş ve daha sonra matematiksel olarak tanımlanmıştır. Solitonların dikkat çekici özellikleri, enerji kaybı olmaksızın hareket etmeleri ve çarpışma sonrasında tekrar eski formlarını korumalarıdır. Bu özellikler, solitonları fizik, optik ve telekomünikasyon gibi alanlarda önemli bir araştırma konusu haline getirmiştir [1-16].

Bu bağlamda, deneme denklem yöntemi, doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri için etkili bir yaklaşım olarak öne çıkmıştır. Ma ve Fuchssteiner [17], doğrusal olmayan KDD'lerin tam çözümlerini bulmak üzere güçlü bir yöntem geliştirmiş ve çözülebilir diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonlarını polinom ya da rasyonel polinom fonksiyonlarla genişletmeyi hedeflemiştir. Bu yöntem, daha sonra birçok araştırmacı tarafından ele

alınarak geliştirilmiştir. Liu, bu yöntemi daha da ileriye taşıyarak literatüre deneme denklem yöntemi adıyla kazandırmıştır [18-20]. Yakın dönemde, Pandır ve arkadaşları [21, 22], Liu'nun önerdiği yöntemi genişleterek, genişletilmiş deneme denklem yöntemi olarak bilinen daha kapsamlı bir yöntem haline getirmiştir. Pandır ve Güreffe [23], bu yöntemin daha genel bir halini kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulayarak yeni ve farklı çözümler sunmuş, literatüre önemli katkılar sağlamıştır.

Bu tez de yeni deneme denklem yöntemi detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu yöntem kararsız lineer olmayan Reaction Duffing denklemine ve (1+1) boyutlu lineer olmayan Ostrovsky denklemine uygulanmıştır. Bu denklemlerin çözümleri Mathematica programında elde edilmiş ve bulunan çözümlerin grafikleri çizilmiştir [24-29].



2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde tezde kullanılan ve yararlanılan ön bilgiler verilmiştir. Ayrıca kısmi diferansiyel denklemler ve soliton kavramı anlatılmıştır.

Tanım 2.1: (a, b) aralığında tanımlı $u = \Gamma(\xi)$ fonksiyonu ve $\xi_0 \in (a, b)$ olmak üzere u fonksiyonunun ξ_0 noktasındaki türevi aşağıdaki gibidir.

$$u' = \Gamma'(\xi_0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\xi_0 + k) - \Gamma(\xi_0)}{k} \quad (2.1)$$

Tanım 2.2: Diferansiyel denklem; ξ bağımsız değişkeni, $u = u(\xi)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$\Gamma(\xi, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0 \quad (2.2)$$

denklemine denir. Yani bilinmeyen fonksiyon ve bilinmeyen fonksiyonun bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme denir. $u = u(\xi)$ fonksiyonu tek değişkene bağlı ise bu denkleme adi diferansiyel denklem denir.

Tanım 2.4: Bir diferansiyel denklemin mertebesi; denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine denir. Derecesi ise; o denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin polinom derecesine denir.

Tanım 2.5: Diferansiyel denklemin keyfi sabitler içeren çözümüne genel çözüm, bu sabitlere değer verilerek bulunan çözüme özel çözüm, denklemi sağlayan fakat keyfi sabitlere değer verilerek bulunamayan çözümlere de tekil çözüm denir.

Tanım 2.6: Bir diferansiyel denklem ve bu denklemin bağımsız değişkeninin aynı değerleri için verilen şartlarla olan probleme başlangıç değer problemleri, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlarla olan probleme de sınır değer problemi denir.

2.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.3: Bilinmeyen fonksiyonun birden fazla bağımsız değişkene bağlı olduğu denklemlere kısmi diferansiyel denklem denir (KDD). $u = u(\xi, \zeta)$ olmak üzere

$$\Gamma\left(\xi, \zeta, u, \frac{du}{d\xi}, \frac{d^2u}{d\xi^2}, \dots, \frac{d^k u}{d\xi^t d\zeta^l}\right) = 0, \quad (t + l = k) \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler; genellikle fiziksel, biyolojik ve mühendislik sistemlerindeki süreçleri modellemek için temel araçlardır. Bu denklemler, bağımsız değişkenlerin bir sistem üzerindeki etkilerini anlamak ve çözmek için kullanılır. Örneğin, bir sıcaklık

dağılımını modellemek için kullanılan ısı denklemi veya dalga hareketlerini açıklayan dalga denklemi bu kategoride yer alır.

KDD'ler lineer olup olmadıklarına göre sınıflandırılır. Lineer KDD'ler, bağımlı değişken u ve türevlerinin yalnızca birinci dereceden terimlerle yer aldığı denklemlerdir. Lineer KDD'ler

$$k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)u + \sum_i n_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + \sum_{i,j} m_{ij}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. k, n_i, m_{ij} fonksiyonları bağımsız değişkenin birer fonksiyonlarıdır. Lineer kısmi türevli denklemler analitik yöntemlerle daha kolay bir şekilde çözülebilir. Buna karşılık, lineer olmayan KDD'ler, bağımlı değişkenin veya türevlerinin doğrusal olmayan kombinasyonlarını içerir. Örneğin, su dalgalarını modelleyen Korteweg-de Vries (KdV) denklemi:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.5)$$

şeklinindedir. Bu tür denklemler genellikle daha karmaşıktır ve özel çözüm yöntemleri gerektirir. Mertebelerine göre KDD'ler birinci dereceden veya daha yüksek dereceli olarak sınıflandırılabilir. Birinci dereceden KDD'ler, en yüksek türev derecesinin bir olduğu denklemlerdir.

$$m(\xi, \zeta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + n(\xi, \zeta) \frac{\partial u}{\partial \zeta} = k(\xi, \zeta) \quad (2.6)$$

şeklindeki denklem örnek olarak verilebilir. Daha yüksek dereceli denklemlerde türevlerin derecesi iki veya daha fazladır. Örneğin, Laplace denklemi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (2.7)$$

şeklindeki ikinci dereceden KDD'dir. İkinci dereceden KDD'ler, fiziksel özelliklerini anlamada oldukça önemli olan eliptik, parabolik ve hiperbolik denklemler olarak sınıflandırılır. Bu sınıflandırma, katsayı matrisinin determinantına ($b^2 - 4ac$) bağlıdır.

- ($b^2 - 4ac$) < 0 olduğu durumda eliptik denklem olarak adlandırılır ve genellikle denge durumlarını veya statik sistemleri modellemek için kullanılır.
- ($b^2 - 4ac$) = 0 olduğu durumda parabolik denklem olarak adlandırılır ve zamana bağlı süreçleri modellemek için kullanılır. Buna aşağıdaki ısı denklemi örnek olarak verilebilir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

- ($b^2 - 4ac$) > 0 olduğu durumda hiperbolik denklem olarak adlandırılır ve dalga gibi yayılımı gibi dinamik olayları modellemek için kullanılır. Aşağıdaki dalga denklemi örnek olarak verilebilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

KDD'ler, bağımsız değişkenlerin sayısına göre de sınıflandırılabilir. İki bağımsız değişkenli denklemler (x,t) sıkça görülürken, daha karmaşık sistemlerde çok bağımsız değişkenli denklemlerle karşılaşılır. Homojenlik durumuna göre KDD'ler, sağ tarafın sıfır olup olmamasına bağlı olarak homojen veya homojen olmayan olarak da sınıflandırılır.

KDD'lerin bu çeşitlilikteki sınıflandırmaları, onların çözüm yöntemlerinin seçimi ve fiziksel sistemlerin modellenmesi açısından kritik öneme sahiptir. Bu sınıflamalar, bir KDD'nin yapısını ve özelliklerini anlamak için matematiksel bir çerçeve sunar ve uygulamalı problemlerin çözümünde önemli bir rol oynar.

2.2. Soliton Kavramı

Solitonlar, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin özel çözümleri olarak matematik ve fizik dünyasında dikkat çeken bir fenomeni temsil eder. İlk kez 1834 yılında İskoç mühendis John Scott Russell tarafından bir kanal boyunca ilerleyen su dalgaları üzerinde gözlemlenen solitonlar, doğrusal olmayan sistemlerin temel özelliklerini anlamada önemli bir araç haline gelmiştir. Scott Russell, bir at arabasının çektiği kanal suyunda, ilerlerken hızını ve şeklini koruyan bir dalga formu keşfetmiştir. Bu gözlem, doğrusal olmayan dalgaların davranışlarını incelemeye yönelik ilk adım olarak kabul edilir.

Matematiksel olarak, solitonlar, doğrusal olmayan sistemlerde ortaya çıkan, kendini yeniden üretebilen, yayılırken hızını ve şeklini koruyabilen dalga çözümleri olarak tanımlanır. Bu özellikleriyle solitonlar, doğrusal sistemlerde görülen sıradan dalgalardan farklılık gösterir. Doğrusal sistemlerde dalgalar genellikle birbirleriyle etkileşime girdiklerinde bozunmaya veya enerjilerinin bir kısmını kaybetmeye eğilimlidir. Ancak solitonlar, doğrusal olmayan sistemlerde çarpıştıklarında bile orijinal formlarını korur ve yeniden ortaya çıkar. Soliton çözümleri genellikle doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle modellenir. Bu denklemlere, ilk kez su dalgalarını modellemek için geliştirilmiş ve solitonların matematiksel teorisinin temelini oluşturan Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi, optik fiberlerdeki ışık darbelerinin yayılımını açıklamada kullanılan Nonlinear Schrödinger (NLS) Denklemi, fiziksel sistemlerdeki topolojik solitonları ve zincirli moleküler sistemlerin dinamiklerini modellemek için kullanılan Sine-Gordon Denklemi örnek verilebilir. Bu denklemler, doğrusal olmayan etkilerin dalga yayılımı üzerindeki karmaşık etkilerini anlamak için önemli bir çerçeve sağlar. Matematiksel olarak, soliton çözümler, bu denklemlerin analitik çözümleri olarak elde edilir ve genellikle hiperbolik fonksiyonlar veya üstel ifadelerle ifade edilir. Solitonların en belirgin özellikleri şunlardır:

- **Şekil ve Hızın Korunumu:** Solitonlar, yayılırken şekillerini ve hızlarını korur. Bu özellik, doğrusal olmayan sistemlerde enerji kaybının düşük olduğu durumlarda ortaya çıkar.

- **Çarpışma Sonrası Davranış:** İki veya daha fazla soliton çarpıştığında, şekil ve hız özelliklerini koruyarak yollarına devam eder. Bu durum, solitonların doğrusal olmayan sistemlerde kendilerini yeniden üretme yeteneğini gösterir.
- **Uzun Süreli Stabilite:** Solitonlar, uzun mesafelerde bile bozunmadan ilerleyebilir. Bu özellik, özellikle optik iletişim sistemleri ve su dalgalarının modellenmesinde büyük bir avantaj sağlar.
Solitonlar, matematiksel teorilerinin yanı sıra birçok uygulama alanında önemli roller oynar.
- **Optik İletişim:** Fiber optik kablolardaki ışık darbelerinin enerji kaybı olmadan uzun mesafelerde taşınması, solitonların kullanılmasıyla mümkün olmuştur. Nonlinear Schrödinger denklemi, bu süreci açıklayan temel bir modeldir.
- **Akışkanlar Mekaniği:** Su dalgalarının davranışlarının modellenmesi, soliton teorisinin ilk uygulama alanlarından biridir. Özellikle kanal dalgalarının ve tsunami benzeri büyük su dalgalarının dinamiklerini anlamada kullanılır.
- **Plazma Fiziği:** Plazma dalgalarının modellenmesi ve doğrusal olmayan etkilerin incelenmesi için soliton çözümleri önemli bir araçtır.
- **Biyoloji ve Kimya:** Solitonlar, biyomoleküler zincirlerde enerji taşınmasını ve kimyasal reaksiyonların dalga formlarını modellemek için kullanılmaktadır.
- **Fiziksel Sistemler:** Sine-Gordon denklemi, manyetik alanlardaki topolojik solitonlar ve zincirli moleküler sistemler gibi fiziksel sistemlerde önemli bir model olarak öne çıkar.

Solitonlar, sadece matematiksel bir fenomen olmaktan öte, modern teknolojide devrim niteliğinde uygulamalara olanak sağlamıştır. Özellikle telekomünikasyon, enerji taşınımı ve dalga dinamiklerinin modellenmesi gibi alanlarda, solitonların fiziksel özelliklerinden yararlanılmaktadır. Gelecekte, doğrusal olmayan sistemlerin daha iyi anlaşılması ve yeni modelleme tekniklerinin geliştirilmesiyle, solitonların kullanım alanlarının daha da genişlemesi beklenmektedir.

Bu bağlamda, solitonların teorik ve pratik önemi, doğrusal olmayan sistemlerin incelenmesinde güçlü bir araç olarak görülmelerini sağlamaktadır. Soliton çözümleri, hem matematiksel güzellikleri hem de geniş uygulama alanları ile diferansiyel denklem teorisinin en ilgi çekici konularından biri olmaya devam etmektedir.

3. MATERYAL VE METOD: DENEME DENKLEM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, deneme denklem yöntemleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Öncelikle Liu tarafından önerilen deneme denklem yöntemi ele alınmış, ardından bu yöntemin geliştirilmesiyle ortaya çıkan yeni versiyonuna yer verilmiştir. Deneme denklem yöntemleri üzerine yapılan çalışmalar, birçok araştırmacının katkısıyla zenginleşmiş ve bu yöntem, çeşitli doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasında etkin bir araç haline gelmiştir.

3.1. Deneme Denklem Yöntemi

Cheng-Shi Liu tarafından geliştirilen deneme denklem yöntemi, doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için güçlü bir araçtır. Bu yöntem, denklemin belirli dönüşümlerle sadeleştirilerek çözüm sürecinin kolaylaştırılmasını amaçlar. Bu bölümde, deneme denklem yönteminin temel adımları ele alınmıştır.

Bağımsız değişkenler üzerinde tanımlı bir doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi genel formda

$$\Omega(\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \dots, \phi_t, \dots, \phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{xz}, \dots, \phi_{xt}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

İfade edelim. Burada Ω , ϕ ve onun türevlerini içeren bir fonksiyondur. Çözüm sürecinde, aşağıdaki hareketli dalga dönüşümü kullanılır:

$$\phi(x, y, z, \dots, t) = \phi(\zeta), \quad \zeta = k_1x + k_2y + k_3z + \dots + k_nt \quad (3.2)$$

Bu dönüşüm, bağımsız değişkenler arasında bir ilişki kurarak, denklemi bir değişkene bağlı hale getirir. (3.1) denkleminde bu dönüşüm uygulanıp türevler yerine yazıldığında,

$$\Phi(\phi, \phi', \phi'', \phi''', \dots) = 0 \quad (3.3)$$

formunda bir doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. Buradaki ϕ çözüm sürecinde belirli bir fonksiyon olarak tanımlanır. Bu fonksiyon, genelde aşağıdaki biçimde ifade edilen bir denklemin çözümünden elde edilir:

$$(\phi')^2 = F(u) = a_n\phi^n + \dots + a_1\phi + a_0 \quad (3.4)$$

Bu denklemdeki a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 sabitleri daha sonra belirlenecektir. (3.4) denkleminde yararlanılarak (3.3) denkleminde yer alan türevler hesaplanır ve denklem, bir polinom ifadeye dönüştürülür.

Elde edilen polinom, katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle bir cebirsel denklem sistemi oluşturur. Bu sistem, Mathematica gibi yazılımlar kullanılarak çözülebilir ve gerekli a_i katsayıları

elde edilir. Bu katsayılar, (3.4) denkleminde yerine yazılarak u fonksiyonu ifade edilir. (3.4) denkleminin integrali alınarak

$$\pm(\zeta - \zeta_0) = \int \frac{d\phi}{\sqrt{F(\phi)}} \quad (3.5)$$

İfadesine ulaşılır.

Bu integral, çoğunlukla analitik çözüm yöntemleri veya tam diskriminant yaklaşımı gibi tekniklerle çözülür. Elde edilen $\phi(\zeta)$ çözümleri, (3.2) dönüşümüne yerleştirilerek, doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin hareketli dalga çözümleri bulunur.

Bu yöntem, hem matematiksel analiz hem de hesaplama açısından etkili bir çözüm stratejisi sunar ve doğrusal olmayan sistemlerin analitik incelenmesine olanak sağlar.

3.2. Yeni Versiyon Deneme Denklem Metodu

Önceki bölümde tanımlandığı gibi, (3.1) denklemindeki doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denkleme, (3.2) hareketli dalga dönüşümü uygulanarak türev işlemleri gerçekleştirilir. Bu işlemlerin sonucunda, (3.3) formundaki doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. Yeni deneme denklem yöntemi, bu adi diferansiyel denklem için daha genel bir çözüm formu sunar.

Elde edilen (3.3) adi diferansiyel denklem için çözüm fonksiyonu şu şekilde ifade edilir

$$(P')^2(\zeta) = e_0 + e_1P(\zeta) + e_2P^2(\zeta) + \dots + e_NP^N(\zeta) \quad (3.6)$$

Burada e_0, e_1, \dots, e_N katsayıları daha sonra belirlenecektir. Çözüm fonksiyonu ise şu şekilde yazılır

$$\phi(\zeta) = A_0 + \sum_{i=1}^N A_i P^i(\zeta) + B_i P^{-i}(\zeta) \quad (3.7)$$

Bu çözüm formu, $P(\zeta)$ fonksiyonunun hem pozitif hem de negatif kuvvetlerini içeren bir polinom olarak tanımlanmıştır. (3.7) denkleminde yararlanarak, (3.3) denkleminde yer alan türevler hesaplanır. Örneğin, $\phi'(\zeta)$ türevinin karesi şu şekilde elde edilir

$$(\phi'(\zeta))^2 = P'(\zeta)^2 \left(\sum_{i=1}^N i A_i P^{i-1}(\zeta) - i B_i P^{-i-1}(\zeta) \right)^2 \quad (3.8)$$

Bu ifade, $P'(\zeta)$ fonksiyonunun (3.6) denkleminde elde edilen çözümü ile ilişkilendirilir.

(3.3) denklemini çözüme ulaştırmak için, en yüksek mertebeden türev terimi ile doğrusal olmayan terimler arasında bir denge sağlamak gerekir. Bu süreç, balans prosedürü olarak adlandırılır ve çözüm fonksiyonu (3.7)'deki N sayısını belirlemek için kullanılır. N , denklemin yapısına bağlı olarak seçilen bir doğal sayıdır.

Belirlenen N 'ye göre, (3.7) çözüm fonksiyonundaki türevler hesaplanır ve bu ifadeler (3.3) denklemi içinde yerine yazılır. Böylece, $\phi(\zeta)$ fonksiyonunun katsayılarına bağlı bir sıfır polinomu elde edilir. Bu polinomun katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur.

Bu cebirsel denklem sistemi, genellikle Mathematica gibi bir paket program kullanılarak çözülür. Çözüm sonucunda A_i, B_i katsayıları ve e_i parametreleri belirlenir. Elde edilen bu katsayılar, (3.6) ve (3.7) denklemlerine yerleştirilerek $P(\zeta)$ fonksiyonları hesaplanır. Son olarak, bu çözümler (3.2) dönüşümüne uygulanarak (3.1) denkleminin yeni hareketli dalga çözümleri bulunur.

Bu yöntem, doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için daha genel ve kapsamlı çözüm formları sağlayarak, denklemin çözüm uzayını genişletir.



4. YENİ DENEME DENKLEM YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI

4.1. Genelleştirilmiş Reaction Duffing Modeline Uygulaması

Genelleştirilmiş Reaction Duffing Modelinin p, q, r ve s sabit sayılar olmak üzere en genel hali

$$u_{tt} + pu_{xx} + qu + ru^2 + su^3 = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde dir. H. Aminikhah ve ark. (2015), bu denklemin özel hallerinin tam çözümlerini elde etmek için fonksiyonel değişken yöntemini kullandılar. (4.1) denklemini ele alalım. Bu denkleme yeni deneme denklem yöntemini uygulayacağız. Hareketli dalga dönüşümünü

$$u(x, t) = v(\xi), \quad \xi = kx - ct \quad (4.2)$$

alalım. $v = v(\xi)$, $\frac{\partial v}{\partial \xi} = v'$ olmak üzere, (4.1) denkleminde

$$(c^2 + pk^2)v'' + qv + rv^2 + sv^3 = 0 \quad (4.3)$$

elde edilir. Bu denklem lineer olmayan adi diferansiyel denklemdir. Elde ettiğimiz bu adi diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonu

$$(P')^2(\xi) = h_0 + h_1P(\xi) + h_2P^2(\xi) + \dots + h_NP^N(\xi)$$

olmak üzere (3.6) ifadesini gözönüne alalım. N sayısını bulmak için (4.3) denkleminde balans prosedürünü uygulayacağız. Balans işlemi bu denkleminde bulunan en yüksek dereceden lineer olmayan v^3 terimi ile en yüksek mertebeden türev v'' terimi arasında aşağıdaki gibi yapılmıştır. (3.4) denkleminde belirtilen ifade

$$P'(\xi) = \sqrt{h_0 + h_1P(\xi) + h_2P^2(\xi) + \dots + h_NP^N(\xi)} \cong \pm \sqrt{h_N}P(\xi)^{N/2} + \dots \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabileceğinden (3.5) ifadesindeki çözüm fonksiyonu kısaca

$$v = A_M P(\xi)^M + \dots \quad (4.5)$$

şeklinde alınır. $N = 4$ ve dengeleme terimi M için gerekli olan terimler

$$v^3 = A_M^3 P(\xi)^{3M} + \dots \quad (4.6)$$

$$v''(\xi) \cong M(M-1)A_M P(\xi)^{M-2} + \dots \quad (4.7)$$

olarak hesaplanır. Buradan bulunan $u'' \approx u^3$ terimlerinin denkleğinden $M=-1$ olarak balans terimi bulunur. Bulunan bu balans terimi (3.5) de yazıldığında (4.1) denklemin yeni çözüm fonksiyonu

$$v(\xi) = A_0 + A_1 P(\xi) + \frac{B_1}{P(\xi)} \quad (4.8)$$

olarak bulunur. (4.3) denklemindeki v'' ve v^3 terimleri (4.8) çözüm fonksiyonuna göre hesaplanarak tekrar (4.3) denkleminde göz önüne alındığında $P(\xi)$ 'e bağlı polinom denklemi bulunur. Buradaki polinom sıfır polinomu olarak kabul edilirse, katsayıları sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Bulunan cebirsel sistem Mathematica programı ile çözüldüğünde $A_0, A_1, B_1, h_0, h_1, h_2, h_3, h_4$ ve β, r katsayıları elde edilir. Bu katsayılar çözüm fonksiyonu olan (4.8) ve (3.4) denkleminde yerine yazılır. (3.4) denkleminde katsayılar yerine yazıldığında

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{dP}{\sqrt{h_0 + h_1 P(\xi) + h_2 P^2(\xi) + h_3 P^3(\xi) + h_4 P^4(\xi)}} \quad (4.9)$$

elde edilir. Bu integrali hesapladığımızda $P(\xi)$ fonksiyonlarını elde ederiz. Bu $P(\xi)$ fonksiyonlarını çözüm fonksiyonu (4.8) de yerine yazarak (4.1) denkleminin aşağıdaki durumlarda çözümleri bulunur.

1. Durum:

Bulunan

$$A_0 = A_0, \quad A_1 = A_1, \quad B_1 = 0, \quad h_0 = h_0, \quad h_1 = \frac{4A_0 h_4 (q + A_0 (r + sA_0))}{sA_1^3},$$

$$h_2 = \frac{4h_4 (q + 2rA_0 + 3sA_0^2)}{sA_1^2}, \quad h_3 = \frac{4h_4 (r + 3sA_0)}{3sA_1}, \quad h_4 = h_4, \quad c = -\sqrt{\frac{-sA_1^2 + k^2 p h_4}{h_4}}, \quad (4.10)$$

katsayıları için (4.8) çözüm fonksiyonu

$$u_1(\xi_1) = A_0 + A_1 P(\xi_1) \quad (4.11)$$

şeklinde elde edilir. Bununla birlikte elde edilen diğer katsayılar (3.5) denkleminde yerine yazıldığında

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{dP}{\sqrt{h_0 + \frac{4A_0 h_4 (q + A_0 (r + sA_0))}{sA_1^3} P(\xi) + \frac{4h_4 (q + 2rA_0 + 3sA_0^2)}{sA_1^2} P^2(\xi) + \frac{4h_4 (r + 3sA_0)}{3sA_1} P^3(\xi) + h_4 P^4(\xi)}} \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) integralini hesaplamak oldukça zordur. Bunun için (4.12) ifadesini $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve

α_4 'ler $P^4 + \frac{h_3}{h_4} P^3 + \frac{h_2}{h_4} P^2 + \frac{h_1}{h_4} P + \frac{h_0}{h_4} = 0$ polinom denkleminin kökleri olmak üzere

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{dP}{\sqrt{\frac{h_0}{h_4} + \frac{h_1}{h_4} P(\xi) + \frac{h_2}{h_4} P^2(\xi) + \frac{h_3}{h_4} P^3(\xi) + P^4(\xi)}} \quad (4.13)$$

olarak alalım. (4.13) ifadesinin integrali alındığında

$$F(\varphi, l) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-l^2 \sin^2 \psi}}, \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(P-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4)}{(P-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4)}}, \quad l^2 = \frac{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}. \quad \text{olmak}$$

üzere

$$\pm(\xi - \xi_0) = -\frac{1}{P - \alpha_1}, \quad (4.14)$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{2}{\alpha_1 - \alpha_2} \sqrt{\frac{P - \alpha_2}{P - \alpha_1}}, \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad (4.15)$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{P - \alpha_1}{P - \alpha_2} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad (4.16)$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{2}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}} \ln \left| \frac{\sqrt{(P - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} - \sqrt{(P - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\sqrt{(P - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \sqrt{(P - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \quad (4.17)$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{2F(\varphi, l)}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4, \quad (4.18)$$

bulunur. (4.14)-(4.18) denklemlerinden P fonksiyonları çekildiğinde ve (4.11) denkleminde yerine yazıldığında $\theta_1 = \beta x + rt$, $\xi_1 = x - 2\beta t$ olmak üzere sırasıyla

$$u_{1,1}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 \pm \frac{1}{\xi_1 - \xi_0} \right) \quad (4.19)$$

$$u_{1,2}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 \pm \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\xi_1 - \xi_0)^2} \right) \quad (4.20)$$

$$u_{1,3}(x,t) = A_0 + A_1 \left(\frac{\alpha_2 e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\xi_1 - \xi_0)} - \alpha_1}{e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\xi_1 - \xi_0)} - 1} \right) \quad (4.21)$$

$$u_{1,4}(x,t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} (\xi_1 - \xi_0) \right]} \right) \quad (4.22)$$

ve

$$u_{1,5}(x,t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2} (\xi_1 - \xi_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right]} \right) \quad (4.23)$$

elde edilir. Eğer $A_0 = -A_1\alpha_1$ ve $\xi_0 = 0$ olarak alındığında; (4.19)-(4.20) denklemleri sırasıyla

$$u_{1,1}(x,t) = \pm \frac{A_1}{kx + \sqrt{\frac{-sA_1^2 + k^2 ph_4 t}{h_4}}} \quad (4.24)$$

ve

$$u_{1,2}(x,t) = \pm \frac{4A_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \left(kx + \sqrt{\frac{-sA_1^2 + k^2 ph_4 t}{h_4}} \right)^2} \quad (4.25)$$

rasyonel fonksiyon çözümlerini, $C_1 = \pm A_1\alpha_2$ ve $D_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$ olmak üzere

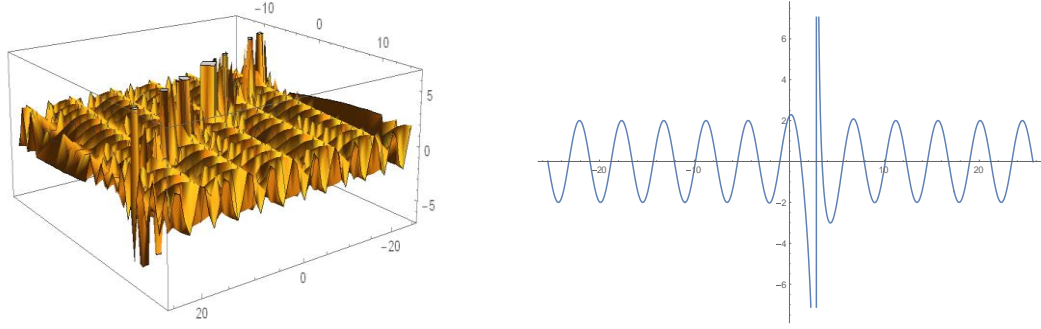
$$u_{1,3}(x,t) = C_1 \coth \left[D_1 \left(kx + \sqrt{\frac{-sA_1^2 + k^2 ph_4 t}{h_4}} \right) \right] \quad (4.26)$$

hareketli dalga çözümünü, $C_2 = \frac{-2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{\alpha_3 - \alpha_2}$, $E_1 = \frac{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2}$ ve

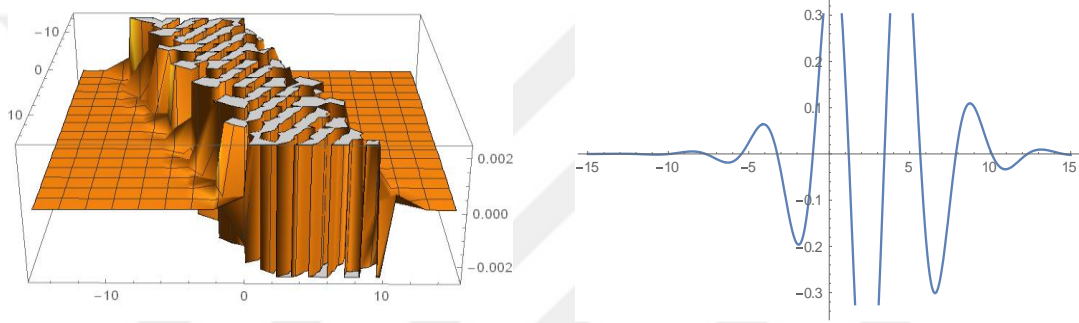
$D_2 = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}$ olmak üzere aşağıdaki

$$u_{1,4}(x,t) = \frac{A_1 C_2}{E_1 + \cosh \left[D_2 \left(kx + \sqrt{\frac{-sA_1^2 + k^2 ph_4 t}{h_4}} \right) \right]} \quad (4.27)$$

soliton çözümü verir.



Şekil 4.1. (4.26) denklemindeki çözümün $\alpha_1 = C_1 = s = p = A_1 = 2, k = \sqrt{2}, \alpha_2 = 1, D_1 = \frac{1}{2}, h_4 = 3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



Şekil 4.2. (4.27) denklemindeki çözümün $\alpha_1 = E_1 = s = p = A_1 = 2, k = \sqrt{2}, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \frac{5}{3}, D_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}, C_2 = -1, h_4 = 3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Eğer (4.23) denkleminde $A_0 = -A_1\alpha_2$ alınırsa Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$C_3 = \frac{A_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_4}, \quad E_2 = \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_4},$$

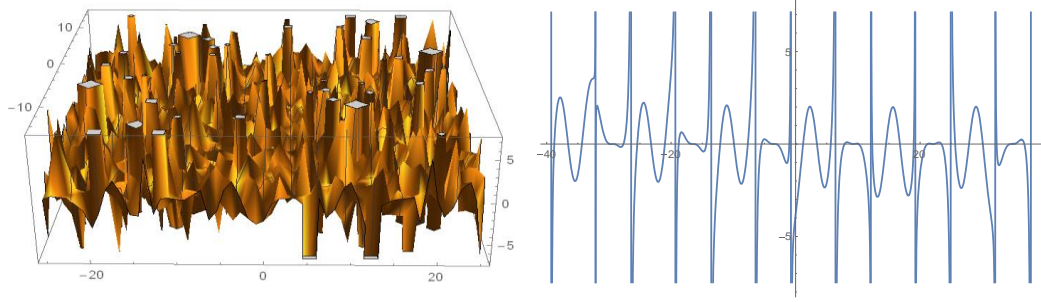
ve

$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2} \left(kx + \sqrt{\frac{-sA_1^2 + k^2 p h_4 t}{h_4}} \right), \quad l_1^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}$$

olmak üzere

$$u_{1,5}(x, t) = \frac{C_3}{E_2 + sn^2(\varphi_1, l_1)} \quad (4.28)$$

olarak ifade edilir.



Şekil 4.3. (4.28) denklemindeki çözümün $\alpha_1 = s = p = C_3 = 2, k = \sqrt{2}, \alpha_2 = E_2 = 1, \alpha_3 = \frac{5}{3}, \alpha_4 = \frac{3}{2}, h_4 = 3$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

2. Durum:

Bulunan

$$A_0 = \frac{1}{486s^2} \left(\begin{array}{l} -162rs - \frac{702\sqrt[3]{18}s^2(r^2 - 3qs)}{63rs^3(2r^2 - 9qs) + \sqrt{3}s^2\sqrt[3]{14080r^6 - 126720qr^4s + 344439q^2r^2s^2 - 237276q^3s^3}} \\ + 27\sqrt[3]{4} \left(378r^3s^3 - 1701qrs^4 + 3\sqrt{3}s^2\sqrt[3]{14080r^6 - 126720qr^4s + 344439q^2r^2s^2 - 237276q^3s^3} \right) \end{array} \right) \text{ ve}$$

$$A_1 = -i\sqrt{\frac{h_4(c^2 + k^2p)}{s}}, \quad B_1 = B_1, \quad h_0 = h_0, \quad h_1 = h_1, \quad h_2 = h_2, \quad h_3 = h_3, \quad h_4 = h_4, \quad c = c \quad (4.29)$$

katsayıları için (4.8) çözüm fonksiyonu

$$u_3(\xi_1) = A_0 + A_1P(\xi_1) + \frac{B_1}{P(\xi_1)} \quad (4.30)$$

şeklindedir. Ayrıca bulunan diğer katsayılar (3.5) denkleminde yerine yazıldığında

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{dP}{\sqrt{\frac{784\lambda A_0^4}{169A_1^2} + \frac{96\lambda A_0^3}{13A_1}P(\xi) + \frac{56\lambda A_0^2}{13}P^2(\xi) - 8\lambda A_0A_1P^3(\xi) - 2\lambda A_1^2P^4(\xi)}} \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.31) integralini hesaplamak oldukça zordur. Bunun için (4.31) ifadesini $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve

α_4 'ler $P^4 + \frac{h_3}{h_4}P^3 + \frac{h_2}{h_4}P^2 + \frac{h_1}{h_4}P + \frac{h_0}{h_4} = 0$ polinom denkleminin kökleri olmak üzere

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{dP}{\sqrt{\frac{h_0}{h_4} + \frac{h_1}{h_4}P(\xi) + \frac{h_2}{h_4}P^2(\xi) + \frac{h_3}{h_4}P^3(\xi) + P^4(\xi)}} \quad (4.32)$$

olarak alalım. (4.32) integrali hesaplandığında (4.14)-(4.18) ifadelerindeki bağıntılar elde edilir. Buradan P fonksiyonları çekildiğinde ve (4.30) denkleminde yerine yazıldığında $\xi_2 = kx - ct$ olmak üzere sırasıyla

$$u_{2,1}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 \pm \frac{1}{\xi_2 - \xi_0} \right) + \frac{B_1}{\alpha_1 \pm \frac{1}{\xi_2 - \xi_0}} \quad (4.33)$$

$$u_{2,2}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 \pm \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\xi_2 - \xi_0)^2} \right) + \frac{B_1}{\alpha_1 \pm \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\xi_2 - \xi_0)^2}} \quad (4.34)$$

$$u_{2,3}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\frac{\alpha_2 e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\xi_1 - \xi_0)} - \alpha_1}{e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\xi_1 - \xi_0)} - 1} \right) + \frac{B_1}{\frac{\alpha_2 e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\xi_1 - \xi_0)} - \alpha_1}{e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\xi_1 - \xi_0)} - 1}} \quad (4.35)$$

$$u_{2,4}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} (\xi_1 - \xi_0) \right]} \right) + \frac{B_1}{\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} (\xi_1 - \xi_0) \right]}} \quad (4.36)$$

$$u_{2,5}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_2 + \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2} (\xi_1 - \xi_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right]} \right) + \frac{B_1}{\alpha_2 + \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2} (\xi_1 - \xi_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right]}} \quad (4.37)$$

bulunur. Eğer $A_0 = -A_1 \alpha_1$ ve $\xi_0 = 0$ alındığında; (4.33)-(4.34) denklemleri ve (4.36) denklemleri sırasıyla

$$u_{2,1}(x, t) = \pm \frac{A_1}{kx - ct} + \frac{B_1 (kx - ct)}{\alpha_1 (kx - c) \pm 1} \quad (4.38)$$

ve

$$u_{2,2}(x,t) = \pm \frac{4A_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \xi_2^2} + \frac{B_1(4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \xi_2^2)}{\alpha_1(4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \xi_2^2) \pm 4(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (4.39)$$

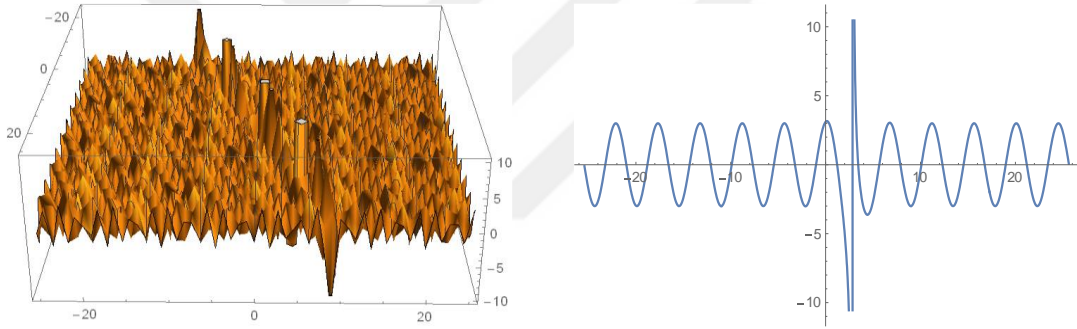
rasyonel fonksiyon çözümlerini, $C_5 = \pm \frac{B_1}{\alpha_2}$, olmak üzere

$$u_{2,3}(x,t) = C_1 \coth[D_1(kx - ct)] + C_5 \tanh[D_1(kx - ct)] \quad (4.40)$$

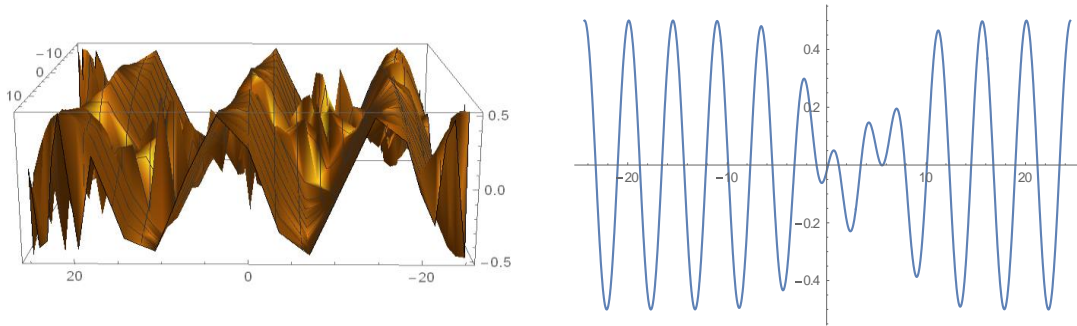
hareketli dalga çözümünü,

$$u_{2,4}(x,t) = \frac{A_1 C_2}{E_1 + \cosh[D_2(kx - ct)]} + \frac{B_1}{\alpha_1 - \frac{C_2}{E_1 + \cosh[D_2(kx - ct)]}} \quad (4.41)$$

soliton çözümünü verir.



Şekil 4.4. (4.40) denklemindeki çözümün $\alpha_1 = C_1 = c = 2, k = \sqrt{2}, \alpha_2 = C_5 = 1, D_1 = \frac{1}{2}, C_5 = 3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

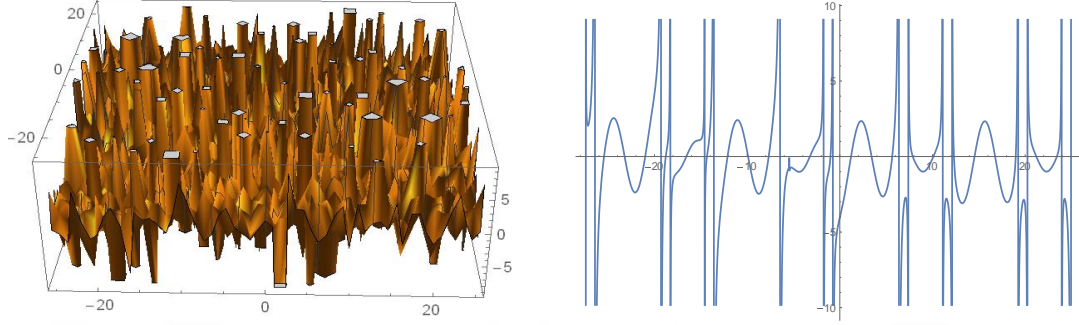


Şekil 4.5. (4.41) denleminde $\alpha_1 = A_1 = E_1 = c = 2, k = \sqrt{2}, \alpha_2 = B_1 = 1, C_2 = -1, D_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}, E_1 = 3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Eğer (3.37) denleminde $A_0 = -A_1\alpha_2$ alınırsa Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$u_{2,5}(x,t) = \frac{C_3}{E_2 + sn^2(\varphi_1, l_1)} + \frac{B_1}{\alpha_2 + \frac{C_3}{E_2 + sn^2(\varphi_1, l_1)}} \quad (4.42)$$

olarak bulunur.



Şekil 4.6. (4.42) denkleminde $\alpha_1 = C_3 = 2, \beta = \sqrt{2}, \alpha_2 = B_1 = E_2 = 1, r = 3$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

4.2. (1+1) Boyutlu Lineer Olmayan Ostrovsky Denklem ve Uygulaması

(1+1) boyutlu lineer olmayan Ostrovsky denklemi

$$uu_{xx} - u_x u_{xt} + u^2 u_t = 0 \quad (4.43)$$

şeklinindedir. Ostrovsky denklemi dönen bir okyanustaki zayıf doğrusal olmayan yüzey ve iç dalgalar için bir modeldir. Vakhnenko ve Parkers tarafından bu denklem sunulmuştur. Denkleminin tamamen integrallenebilir olduğunu ters saçılma yöntemiyle bulmuşlardır. Daha sonra birçok araştırmacı bu denklemin hareketli dalga çözümlerini bulmak için hiperbolik tanjant yöntemini, üstel fonksiyon yöntemini, (G'/G)-genişleme yöntemini, tanh-coth fonksiyonu yöntemini ve Bernoulli Sub-ODE yöntemlerini kullanmışlardır. Biz burada Ostrovsky denklemine yeni deneme denklem yöntemini uygulayacağız. Öncelikle hareketli dalga dönüşümü

$$u(x,t) = u(\tau), \quad \tau = kx - ct, \quad (4.44)$$

olarak uygulandığında ve τ 'ya göre bir kez integrali alıp integrasyon sabitini sıfır olarak seçtiğimizde, (4.43) denklemi

$$3k^2 uu'' - 3k^2 (u')^2 + u^3 = 0 \quad (4.45)$$

lineer olmayan ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. (4.45) denklemi için çözüm fonksiyonunu $(P')^2(\tau) = h_0 + h_1 P(\tau) + h_2 P^2(\tau) + \dots + h_N P^N(\tau)$ olarak (3.7) ifadesindeki gibi kabul edelim. N sayısını bulmak için balans prosedürünü uygulayalım. Balans

prosedürünü (4.45) adi diferansiyel denklemindeki en yüksek dereceden lineer olmayan u^3 terimi ile en yüksek mertebeden türev uu'' terimi arasında aşağıdaki gibi uygulayalım. (3.6) ifadesi

$$P'(\tau) = \sqrt{h_0 + h_1P(\tau) + h_2P^2(\tau) + \dots + h_NP^N(\tau)} \cong \pm\sqrt{h_N}P(\tau)^{N/2} + \dots \quad (4.46)$$

olarak yazılabildiğinden $N = 4$ ve balans için gerekli olan terimleri (3.7) ifadesini göz önüne alarak

$$u = A_M P(\tau)^M + \dots \quad (4.47)$$

$$u^3 = A_M^2 P(\tau)^{3M} + \dots \quad (4.48)$$

$$u''(\tau) \cong M(M-1)A_M P(\tau)^{M-2} + \dots \quad (4.49)$$

şeklinde hesaplarız. Buna göre $uu'' \approx u^3$ terimlerinin denkleğinden balans terimi $M = -2$ olarak elde edilir. Elde edilen balans terimi (3.7) denkleminde yazıldığında denklem (4.45) yeni çözüm fonksiyonu

$$u(\tau) = A_0 + A_1P(\tau) + A_2P^2(\tau) + \frac{B_1}{P(\tau)} + \frac{B_2}{P^2(\tau)} \quad (4.50)$$

Şeklinde bulunur. Bu çözüme göre (4.45) denkleminde bulunan uu'' ve u^3 terimleri hesaplanarak (4.45)'de yerine yazıldığında $P(\tau)$ fonksiyonuna bağı bir polinom bulunur. Bu polinomu sıfır polinomu olarak aldığımızda, bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Bulunan bu sistemi Mathematica programıyla çözüldüğümüzde $A_0, A_1, A_2, B_1, B_2, h_0, h_1, h_2, h_3, h_4$ ve k, c katsayıları elde edilir. Bu katsayılar (3.6) denklemin ve çözüm fonksiyonu olan (4.50)'de yerine yazılır. Denklem (3.6) da katsayılar yerine yazıldığında

$$\pm(\tau - \tau_0) = \int \frac{dP}{\sqrt{h_0 + h_1P(\tau) + h_2P^2(\tau) + h_3P^3(\tau) + h_4P^4(\tau)}} \quad (4.51)$$

İntegralini de hesaplayarak $P(\tau)$ fonksiyonları elde edilir. Bulunan $P(\tau)$ fonksiyonları (4.50) çözüm fonksiyonunda yerine yazılarak (4.43) denkleminin aşağıda belirtilen durumlardaki çözümleri elde edilmiştir.

1. Durum:

Bulunan

$$A_0 = \frac{A_1(3k^2h_3 - 4A_1)}{12k^2h_4}, \quad A_1 = A_1, \quad A_2 = B_1 = B_2 = 0, \quad c = c, \quad h_3 = h_3, \quad h_4 = h_4,$$

$$h_0 = \frac{(k^2h_3 + 4A_1)(3k^2h_3 - 4A_1)^3}{6912k^8h_4^3}, \quad h_1 = \frac{(4A_1 - 3k^2h_3)^2(8A_1 + 3k^2h_3)}{432k^6h_4^2}, \quad h_2 = \frac{9k^2h_3^2 - 16A_1^2}{24k^4h_4}, \quad (4.52)$$

bulunan katsayıları için (4.50) çözüm fonksiyonu

$$u_1(\tau_1) = A_0 + A_1P(\tau_1) \quad (4.53)$$

şeklindedir. Ayrıca bulunan diğer katsayılar (3.5) denkleminde yerine yazıldığında

$$\pm(\tau - \tau_0) = \int \frac{dP}{\sqrt{\frac{h_0 + \frac{h_1}{h_4}P(\tau) + \frac{h_2}{h_4}P^2(\tau) + \frac{h_3}{h_4}P^3(\tau) + P^4(\tau)}}} \quad (4.54)$$

olduğunu kabul edelim. (4.54) ifadesindeki integrali hesaplamak oldukça zordur. Bunun için

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 'ler $P^4 + \frac{h_3}{h_4}P^3 + \frac{h_2}{h_4}P^2 + \frac{h_1}{h_4}P + \frac{h_0}{h_4} = 0$ polinom denkleminin kökleri olmak

üzere (4.54) ifadesinin integrali alındığında

$$F(\varphi, l) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \psi}}, \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(P - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(P - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_4)}}, \quad l^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}.$$

olmak üzere

$$\pm(\tau - \tau_0) = -\frac{1}{P - \alpha_1}, \quad (4.55)$$

$$\pm(\tau - \tau_0) = \frac{2}{\alpha_1 - \alpha_2} \sqrt{\frac{P - \alpha_2}{P - \alpha_1}}, \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad (4.56)$$

$$\pm(\tau - \tau_0) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{P - \alpha_1}{P - \alpha_2} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad (4.57)$$

$$\pm(\tau - \tau_0) = \frac{2}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}} \ln \left| \frac{\sqrt{(P - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} - \sqrt{(P - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\sqrt{(P - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \sqrt{(P - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \quad (4.58)$$

ve

$$\pm(\tau - \tau_0) = \frac{2F(\varphi, l)}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4, \quad (4.59)$$

bulunur. (4.55)-(4.59) denklemlerinden P fonksiyonları çekildiğinde ve (4.53) denkleminde yerine yazıldığında $\tau_1 = kx - ct$ olmak üzere sırasıyla

$$u_{1,1}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 \pm \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \right) \quad (4.60)$$

$$u_{1,2}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 \pm \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\tau_1 - \tau_0)^2} \right) \quad (4.61)$$

$$u_{1,3}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\frac{\alpha_2 e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\tau_1 - \tau_0)} - \alpha_1}{e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\tau_1 - \tau_0)} - 1} \right) \quad (4.62)$$

$$u_{1,4}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} (\tau_1 - \tau_0) \right]} \right) \quad (4.63)$$

$$u_{1,5}(x, t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2} (\tau_1 - \tau_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right]} \right) \quad (4.64)$$

elde edilir. Eğer $A_0 = -A_1 \alpha_1$, $h_3 = h_4$, $A_1 = \frac{A_2}{2}$ ve $\tau_0 = 0$ olarak seçildiğinde; (3.60)-(4.61)

denklemleri sırasıyla

$$u_{1,1}(x, t) = A_2 \left[\pm \frac{1}{kx - ct} \right] \quad (4.65)$$

ve

$$u_{1,2}(x, t) = A_2 \left[\pm \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{8 - 2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 k^2 (kx - ct)^2} \right] \quad (4.66)$$

rasyonel fonksiyon çözümlerini, $C_4 = \pm A_2 \alpha_2^2$ ve $D_3 = \frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}$ olmak üzere

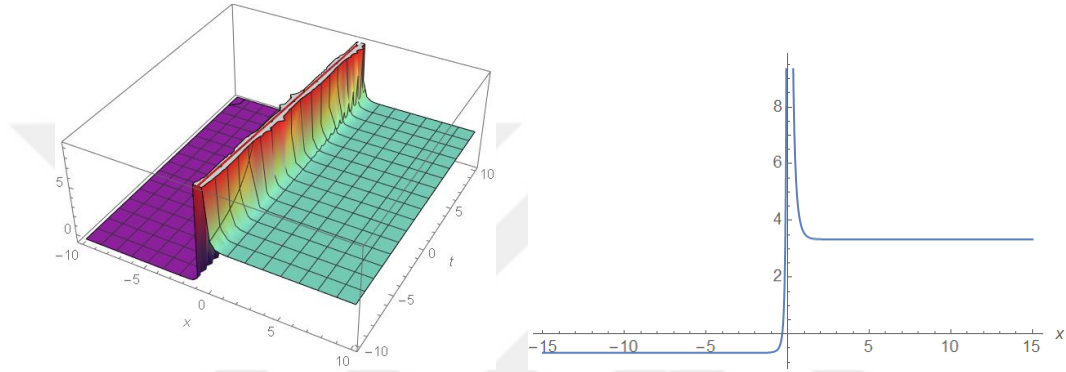
$$u_{1,3}(x, t) = C_1 \coth [D_3 (kx - ct)] + C_4 \coth^2 [D_3 (kx - ct)] \quad (4.67)$$

hareketli dalga çözümünü, $C_2 = \frac{-2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{\alpha_3 - \alpha_2}$, $E_1 = \frac{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2}$ ve

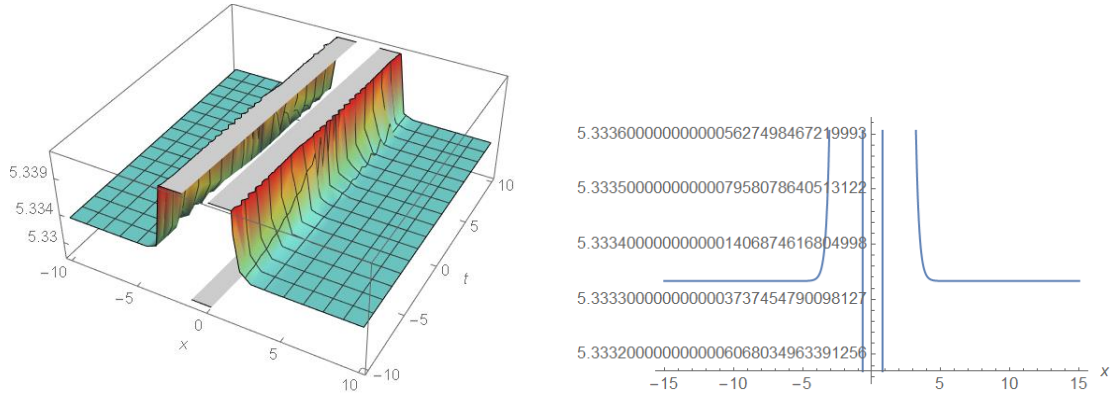
$D_4 = k\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}$ olmak üzere

$$w_{1,4}(x,t) = \frac{A_1 C_2}{E_1 + \cosh[D_4(x-ct)]} + A_2 \left(\alpha_1 + \frac{C_2}{E_1 + \cosh[D_4(x-ct)]} \right)^2 \quad (4.68)$$

soliton çözümünü verir.



Şekil 4.7. (4.67) denkleminde $\alpha_2 = D_3 = 1$, $\alpha_1 = k = C_1 = 2$, $C_4 = A_2 = \frac{4}{3}$, $c = \frac{1}{8}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



Şekil 4.8. (4.68) denkleminde $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = k = E_1 = 2$, $C_2 = -1$, $D_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $c = \frac{1}{8}$, $A_1 = \frac{2}{3}$, $A_2 = \frac{4}{3}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Eğer (4.64) denkleminde $A_0 = -A_1\alpha_2$ alınırsa Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

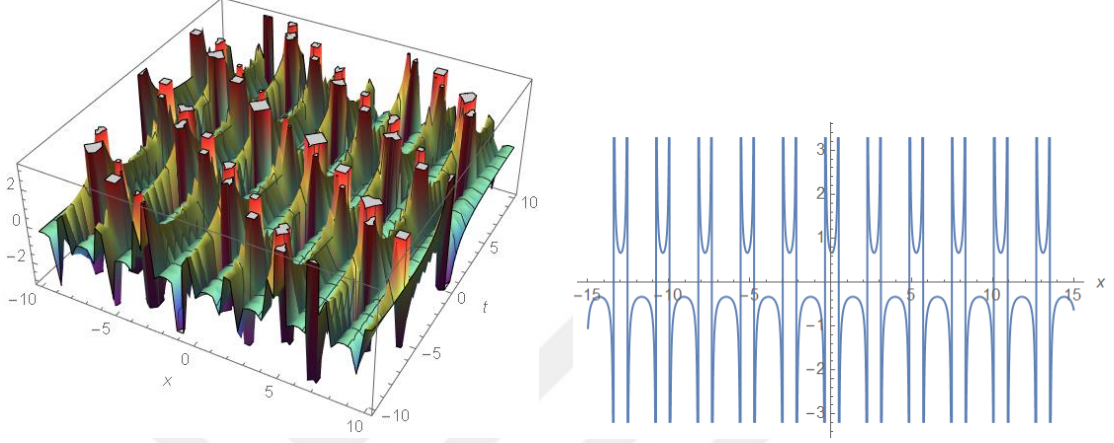
$$C_3 = \frac{A_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_4}, \quad C_6 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_4}, \quad E_2 = \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_4},$$

$$\varphi_3 = \frac{k\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2}(x-ct), \quad l_1^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}$$

olmak üzere

$$u_{1.5}(x,t) = \frac{C_3}{E_2 + sn^2(\varphi_3, l_1)} \quad (4.69)$$

olarak ifade edilir.



Şekil 4.9. (4.69) denkleminde $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = k = C_6 = 2, C_3 = -1, E_2 = \frac{-3}{2}, c = \frac{1}{8}, \alpha_3 = \frac{5}{3}, \alpha_4 = 4, A_1 = \frac{2}{3}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

2. Durum:

Bulunan

$$A_0 = \frac{-9k^2h_3^2}{8h_4}, A_1 = \frac{-3k^2h_3}{2}, A_2 = 0, B_1 = -\frac{9k^2h_3^3}{32h_4^2}, B_2 = \frac{-3k^2h_3^4}{128h_4^3}, c = c$$

$$h_0 = \frac{h_3^4}{256h_4^3}, h_1 = \frac{h_3^3}{16h_4^2}, h_2 = \frac{3h_3^2}{8h_4}, h_3 = h_3, h_4 = h_4 \quad (4.70)$$

bulunan katsayıları için (4.50) çözüm fonksiyonu

$$u_2(\tau_1) = A_0 + A_1P(\tau_1) + \frac{B_1}{P(\tau_1)} + \frac{B_2}{P^2(\tau_1)} \quad (4.71)$$

şeklinindedir. Ayrıca ilgili diğer katsayılar (3.5) denkleminde yerine yazıldığında

$$\pm(\tau - \tau_0) = \int \frac{dP}{\sqrt{\frac{h_0}{h_4} + \frac{h_1}{h_4}P(\tau) + \frac{h_2}{h_4}P^2(\tau) + \frac{h_3}{h_4}P^3(\tau) + P^4(\tau)}} \quad (4.72)$$

olarak elde edilir. (4.72) ifadesindeki integrali hesaplamak için $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 'ler

$$P^4 + \frac{h_3}{h_4} P^3 + \frac{h_2}{h_4} P^2 + \frac{h_1}{h_4} P + \frac{h_0}{h_4} = 0$$

polinom denkleminin kökleri olmak üzere (4.72) ifadesinin

integralini hesapladığımızda (4.55)-(4.59) sonuçlar bulunur. (4.55)-(4.59) denklemlerinden P fonksiyonları çekildiğinde ve (4.71) denkleminde yerine yazıldığında

$$u_{2,1}(x,t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 \pm \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \right) + \frac{B_1}{\alpha_1 \pm \frac{1}{\tau_1 - \tau_0}} + \frac{B_2}{\left(\alpha_1 \pm \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \right)^2} \quad (4.73)$$

$$u_{2,2}(x,t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 \pm \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\tau_1 - \tau_0)^2} \right) + \frac{B_1}{\alpha_1 \pm \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\tau_1 - \tau_0)^2}} + \frac{B_2}{\left(\alpha_1 \pm \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\tau_1 - \tau_0)^2} \right)^2} \quad (4.74)$$

$$u_{2,3}(x,t) = A_0 + A_1 \left(\frac{\alpha_2 e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\tau_1 - \tau_0)} - \alpha_1}{e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\tau_1 - \tau_0)} - 1} \right) + \frac{B_1}{\frac{\alpha_2 e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\tau_1 - \tau_0)} - \alpha_1}{e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\tau_1 - \tau_0)} - 1}} + \frac{B_2}{\left(\frac{\alpha_2 e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\tau_1 - \tau_0)} - \alpha_1}{e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\tau_1 - \tau_0)} - 1} \right)^2} \quad (4.75)$$

$$u_{2,4}(x,t) = A_0 + A_1 \left(\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} (\tau_1 - \tau_0) \right]} \right) + \frac{B_1 \left(2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} (\tau_1 - \tau_0) \right] \right)}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 - 2\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} (\tau_1 - \tau_0) \right]} + B_2 \left(\frac{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} (\tau_1 - \tau_0) \right]}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 - 2\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} (\tau_1 - \tau_0) \right]} \right)^2 \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned}
u_{2,5}(x,t) = & A_0 + A_1 \left(\alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2} (\tau_1 - \tau_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right]} \right) \\
& + \frac{B_1}{\alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2} (\tau_1 - \tau_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right]}} \\
& + \frac{B_2}{\left(\alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2} (\tau_1 - \tau_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right]} \right)^2} \quad (4.77)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $A_0 = -A_1\alpha_1$, ve $\tau_0 = 0$ olarak seçildiğinde; (4.73)-(4.74) denklemleri sırasıyla

$$u_{2,1}(x,t) = \alpha_1 \pm \frac{1}{kx - ct} + \frac{B_1}{\alpha_1 \pm \frac{1}{kx - ct}} + \frac{B_2}{\left(\alpha_1 \pm \frac{1}{kx - ct} \right)^2} \quad (4.78)$$

ve

$$u_{2,2}(x,t) = \pm \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (kx - ct)^2} + \frac{B_1}{\alpha_1 \pm \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (kx - ct)^2}} + \frac{B_2}{\left(\alpha_1 \pm \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{4 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (kx - ct)^2} \right)^2} \quad (4.79)$$

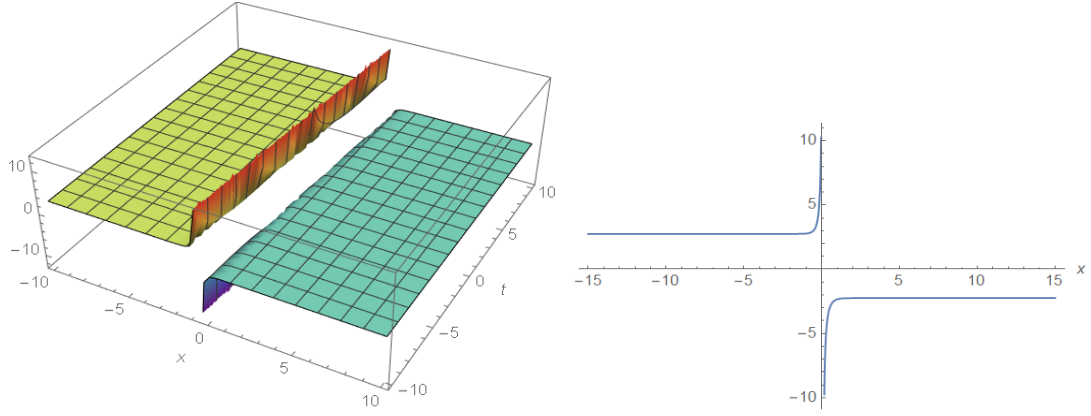
rasyonel fonksiyon çözümlerini, $C_7 = \frac{B_1}{\alpha_2}$ ve $C_8 = \frac{B_2}{\alpha_2^2}$ olmak üzere

$$u_{2,3}(x,t) = C_1 \coth [D_3 (kx - ct)] + C_7 \tanh [D_3 (kx - ct)] + C_8 \tanh^2 [D_3 (kx - ct)] \quad (4.80)$$

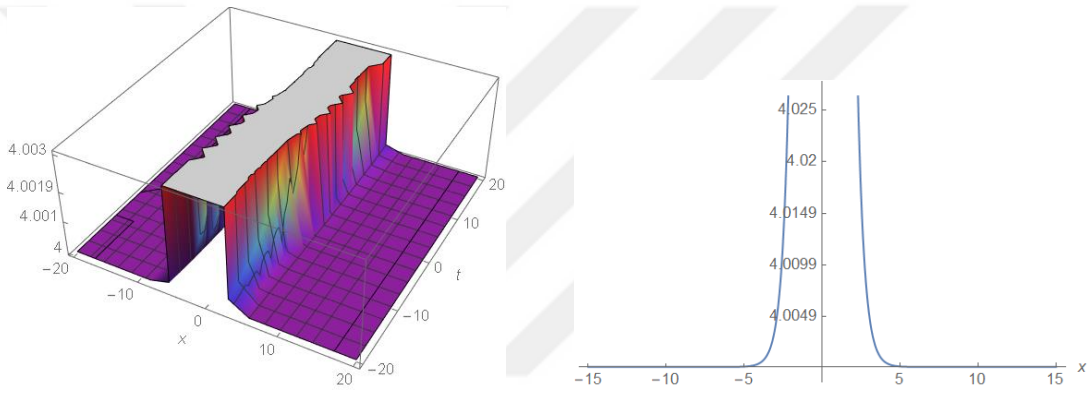
hareketli dalga çözümünü, $B_3 = \alpha_1 B_1$, $B_4 = \alpha_1 B_2$, $E_3 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 - 2\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_2)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
w_{2,4}(x,t) = & \frac{A_1 C_2}{E_1 + \cosh [D_4 (x - ct)]} + A_2 \left(\alpha_1 + \frac{C_2}{E_1 + \cosh [D_4 (x - ct)]} \right)^2 \\
& + B_3 \left(\frac{E_1 + \cosh [D_4 (x - ct)]}{E_3 + \cosh [D_4 (x - ct)]} \right) + B_4 \left(\frac{E_1 + \cosh [D_4 (x - ct)]}{E_3 + \cosh [D_4 (x - ct)]} \right)^2 \quad (4.81)
\end{aligned}$$

soliton çözümünü verir.



Şekil 4.10. (4.80) denkleminde $\alpha_2 = B_1 = B_2 = C_7 = C_8 = D_3 = 1, C_4 = \frac{4}{3}, c = \frac{1}{8}, \alpha_1 = k = C_1 = 2,$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



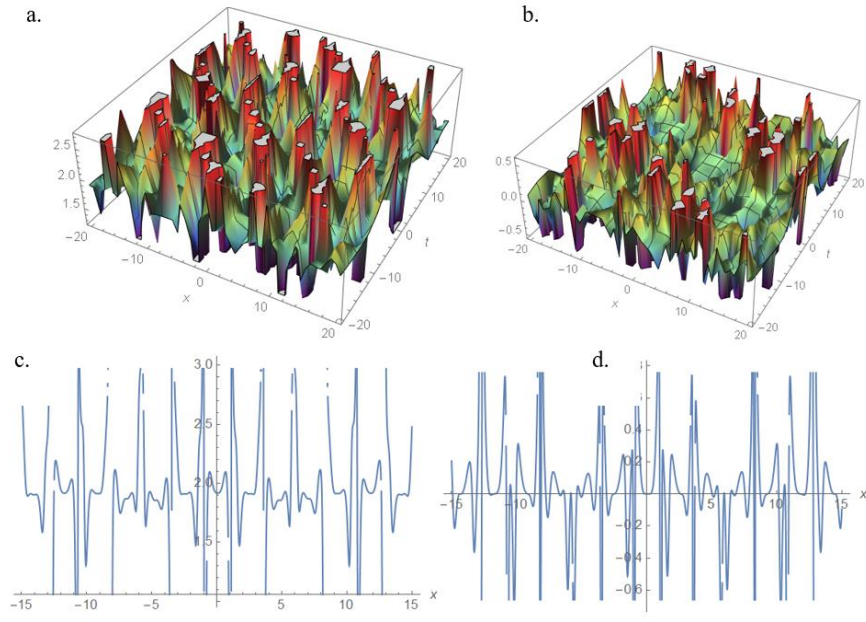
Şekil 4.11. (4.81) denkleminde $\alpha_2 = B_1 = B_2 = 1, \alpha_3 = \frac{5}{3}, C_2 = -1, A_1 = \frac{2}{3}, E_3 = \frac{3}{2}, c = \frac{1}{8}, \alpha_1 = k = E_1 = B_3 = B_4 = 2, D_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Eğer (4.77) denkleminde $A_0 = -A_1\alpha_2$ alınırsa Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$B_4 = \alpha_2 B_1, \quad B_5 = \alpha_2^2 B_2, \quad E_4 = \frac{\alpha_1(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_4)}, \text{ olmak üzere}$$

$$u_{2,5}(x,t) = \frac{C_3}{E_2 + sn^2(\varphi_3, l_1)} + B_4 \frac{E_2 + sn^2(\varphi_3, l_1)}{E_4 + sn^2(\varphi_3, l_1)} + B_5 \left(\frac{E_2 + sn^2(\varphi_3, l_1)}{E_4 + sn^2(\varphi_3, l_1)} \right)^2 \quad (4.82)$$

olarak ifade edilir.



Şekil 4.12. (4.82) denkleminde $\alpha_2 = B_1 = B_2 = 1, \alpha_4 = 4, A_2 = \frac{4}{3}, C_3 = -1, E_2 = \frac{-3}{2}, E_4 = -3, c = \frac{1}{8}, \alpha_1 = k = C_6 = B_4 = B_5 = 2$, değerleri için a. ve c. reel kısmın, b. ve d. sanal kısmın sırasıyla üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmaya yönelik yenilikçi ve etkili bir yöntem incelenmiştir. Uygulama aşamasında elde edilen özgün ve çeşitli tam çözümler, fiziksel olayların matematiksel modellerle daha iyi anlaşılmasını mümkün kılacaktır. Söz konusu yöntem, mevcut deneme denklem tekniklerinin detaylı bir analizi sonucunda tasarlanmış yeni versiyon deneme denklem yöntemidir.

Bu yöntem, kararsız doğrusal olmayan Reaction Duffing denklemi ile (1+1) boyutlu doğrusal olmayan Ostrovsky denklemlerine ayrı ayrı uygulanmıştır. Her iki denklemde de literatürde yer almayan özgün tam çözümler, farklı durumlar altında ortaya konmuştur. Bu yeni yöntemle elde edilen çözümler, soliton dalgaların farklı ve karmaşık kombinasyonlarını temsil etmektedir. Yeni çözümlerin anlaşılmasını kolaylaştırmak amacıyla, belirli katsayılar seçilerek Şekil 4.1-Şekil 4.12 deki iki ve üç boyutlu grafikler çizilmiştir, bu sayede çözümlerin fiziksel davranışlarına dair değerli bilgiler elde edilmiştir. Bu grafiklerin incelenmesi, diğer araştırmacılar için de yeni bir perspektif sunabilir.

Elde edilen grafikler, önerilen çözüm fonksiyonlarının farklı türde solitonlarla ilişkili olduğunu açıkça göstermektedir. Literatürde yaygın olarak bilinen "dark" ve "bright" solitonların ötesinde, bir arada bulunan farklı türde solitonlar da tanımlanmıştır. Bu durum, fiziksel olayların daha kapsamlı bir şekilde yorumlanmasına katkı sağlamaktadır. Eğer (3.7) çözüm fonksiyonu farklı durumlar için genişletilirse, daha genel bir çözüm ailesi oluşturulabilir ve yeni tam çözümler bulunabilir.

KAYNAKLAR

- [1] R. Bronson, *Differential Equations*, Nobel Yayinevi, Ankara 1993.
- [2] K.E. Abbasova, "The Schrodinger operator with growing potential", *Advanced Mathematical Models & Applications*, 8(1), 2023, s. 14-18.
- [3] F. Aboud, I.T. Jameel, A.F. Hasan, B.K. Mostafa, and A. Nachaoui, "Polynomial approximation of an inverse cauchy problem for helmholtz type equations", *Advanced Mathematical Models & Applications*, 7(3), 2022, s. 306-322.
- [4] H.M. Srivastava, J. Iqbal, M. Arif, A. Khan, Y.S. Gasimov, and R. Chinram, "A new application of Gauss quadrature method for solving systems of nonlinear equations", *Symmetry*, 13(3), 2021, s. 432.
- [5] Z. Pinar, T. Ozis, "A not efor finding exact solutions of some nonlinear differential equation", *Sigma Journal of Engineering*, 36(2), 2018, s. 433-440.
- [6] H.F. Ismael, H.M. Baskonus, "Instability modulation and novel optical soliton solutions to the Gerdjikov–Ivanov equation with M-fractional", *Optical and Quantum Electronics*, 55, 2023, s. 303.
- [7] H. Bulut, T.A. Sulaiman, H.M. Baskonus, T. Yazgan (2017). Novel hyperbolic behaviors to some important models arising in quantum science. *Optical and Quantum Electronics*, 49(11), 349.
- [8] G. Yel, H.M. Baskonus, H. Bulut (2017). Novel archetypes of new coupled Konno–Oono equation by using sine–Gordon expansion method. *Optical and Quantum Electronics*, 49(9), 285.
- [9] K.K. Ali, R. Yilmazer, A. Yokus, H. Bulut (2020). Analytical solutions for the (3+ 1)-dimensional nonlinear extended quantum Zakharov–Kuznetsov equation in plasma physics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 124327.
- [10] H. Bulut, T.A. Sulaiman, F. Erdogan, H.M. Baskonus (2017). On the new hyperbolic and trigonometric structures to the simplified MCH and SRLW equations. *The European Physical Journal Plus*, 132(8), 350.
- [11] F. Xu (2008). Application of Exp-function method to symmetric regularized long wave (SRLW) equation. *Physics Letters A*, 372(3), 252-257.
- [12] H. Chen, H. Zhang (2004). New multiple soliton solutions to the general Burgers–Fisher equation and the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 19(1), 71-76.
- [13] F. Chand, A.K. Malik (2012). Exact Traveling Wave Solutions of Some Nonlinear Equations Using G. G-expansion Method. *International Journal of Nonlinear Science*, 14(4), 416-424.
- [14] A. Yokuş, D. Kaya (2015, September). Conservation laws and a new expansion method for sixth order Boussinesq equation. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1676, No. 1, p. 020062). AIP Publishing LLC.
- [15] E.M.E. Zayed, K.A. Gepreel, "The (G'/G)-expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics", *Journal of Mathematical Physics*, 50, 2009, 013502.
- [16] K.K. Ali, H. Dutta, R. Yilmazer, and S. Noeiaghdam, "On the new wave behaviors of the GilsonPickering equation", *Frontiers in Physics*, 8, 2020, s. 54.
- [17] Ma, W. X., Fuchssteiner, B., Explicit and Exact Solutions to a KolmogrovPetrovski-Piskunov Equation, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 31(3), 329-338, 1996.
- [18] Liu, C.S., Trial Equation Method and Its Applications to Nonlinear Evolution Equations, *Phys. Sinica*, 54(6), 2505-2509, 2005.
- [19] Liu, C.S., Using Trial Equation to Solve the Exact Solutions for Two Kinds of KdV Equations with Variable Coeffients, *Acta Phys. Sinica*, 54, 4506-4510, 2005.
- [20] Liu, C.S., A New Trial Equation Method and Its Applications, *Commun. Theor. Phys.*, 45(3), 395-397, 2006.

- [21] Pandir, Y., Gurefe, Y., Kadak, U., Mısırlı, E., Classifications of Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations with Generalized Evolution, *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, Article ID 478531, 16 pp, 2012.
- [22] Pandir, Y., Gurefe, Y., Mısırlı, E., Classification of Exact Solutions to the Generalized Kadomtsev-Petviashvili Equation, *Phys. Scr.*, 87(2), 025003, 12 pp, 2013.
- [23] Pandir, Y., Gurefe, Y., Mısırlı, E., A Multiple Extended Trial Equation Method for the Fractional Sharma-Tasso-Olver Equation, *AIP Conf. Proc.*, 1558, 1927, 2013.
- [24] Ma, W.X., Huang, T., Zhang, Y., A Multiple Exp-Function Method for Nonlinear Differential Equations and its Application, *Phys. Script.*, 82(6), 065003, 2010
- [25] Ma, W.X., Zhu, Z., Solving the (3+1)-dimensional Generalized KP and BKP by the Multiple Exp-Function Algorithm, *Appl. Math. Comput.*, 218, 11871-11879, 2012
- [26] Liu, C.S., Applications of Complete Discrimination System for Polynomial for Classifications of Traveling Wave Solutions to Nonlinear Differential Equations, *Comput. Phys. Commun.*, 181(2), 317-324, 2010.
- [27] Gurefe, Y., Sonmezoglu, A., Mısırlı, E., Application of Trial Equation Method to the Nonlinear Partial Differential Equations Arising in Mathematical Physics, *Pramana-J. Phys.*, 77(6), 1023-1029, 2011.
- [28] Gurefe, Y., Sonmezoglu, A., Mısırlı, E., Application of an Irrational Trial Equation Method to High Dimensional Nonlinear Evolution Equations, *J. Adv. Math. Stud.*, 5(1), 41-47, 2012.
- [29] Gurefe, Y., Mısırlı, E., Sonmezoglu, A., Ekici, M., Extended Trial Equation Method to Generalized Nonlinear Partial Differential Equations, *Appl. Math. Comput.*, 219(10), 5253-5260, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

Sebahattin ERTAŞ

[REDACTED]

[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]

AKADEMİK FAALİYETLER

Bildiriler:

1. Ertaş S. (2024), New Exact Solutions of the (1+1) Dimensional Nonlinear Ostrovsky Equation, 8th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences