

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK FONKSİYONLARIN STANDART  
OLMAYAN BANACH UZAYLARI VE BAZI  
ÖZELLİKLERİ

Eylem YAŞAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Matematik Anabilim Dalı  
Matematik Programı

Danışman  
Prof.Dr. Bilal BİLALOV

Eş-Danışman  
Doç.Dr.Yonca SEZER

Şubat, 2025

**T.C.**  
**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HARMONİK FONKSİYONLARIN STANDART OLMAYAN**  
**BANACH UZAYLARI VE BAZI ÖZELLİKLERİ**

Eylem YAŞAR tarafından hazırlanan tez çalışması 01.02.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Bilal BİLALOV  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Danışman

Doç.Dr. Yonca SEZER  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Eş-Danışman

**Jüri Üyeleri**

Prof.Dr. Bilal BİLALOV, Danışman  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Doç.Dr. Seda Kızılbudak Çalışkan , Üye  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Prof.Dr. Abdullah Avey , Üye  
İstanbul Ticaret Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Danışmanım Prof. Dr. Bilal BİLALOV 'un denetiminde hazırladığım Harmonik Fonksiyonların Standart Olmayan Banach Uzayları ve Bazı Özellikleri başlıklı çalışmada, veri toplama ve kullanımı için gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan elde ettiğim bilgileri ana metin ve referanslarda tam ve eksiksiz bir şekilde sunduğumu, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin herhangi bir yanlışlık veya hile yapmadığımı, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallarına uygun hareket ettiğimi beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı durumunda her türlü hukuki sonucu kabul edeceğimi onaylıyorum.

Eylem YAŞAR

İmza

*Sevgili eřime  
ve bu sreęte yanımda olanlara*



## TEŞEKKÜR

---

Bu tezi hazırlarken beni destekleyen değerli danışmanım Prof. Dr. Bilal BİLALOV'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Aynı zamanda, eş danışmanım Doç. Dr. Yonca SEZER'e, değerli önerileri ve motive edici yaklaşımıyla çalışmamın her aşamasında bana yol gösterdiği için minnettarım. Tez sürecim boyunca yanımda olan, sevgi ve sabırla bana destek veren aileme şükranlarımı sunuyorum. Özellikle hayatımın en büyük destekçisi, sevgili eşim Murat YAŞAR'a, bu zorlu süreçte beni motive eden, her anımda yanımda olan ve hayallerime inanan eşsiz desteği için sonsuz teşekkür ederim. Onun sevgisi ve güveni olmasaydı, bu başarı mümkün olmazdı. Bu çalışma, bana inanan ve beni her zaman cesaretlendiren bu özel insanlara adanmıştır.

Eylem YAŞAR

# İÇİNDEKİLER

---

<b>SİMGE LİSTESİ</b>	<b>vii</b>
<b>KISALTMA LİSTESİ</b>	<b>ix</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	<b>x</b>
<b>ÖZET</b>	<b>xi</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xiii</b>
<b>1 GİRİŞ</b>	<b>1</b>
1.1 Literatür Taraması . . . . .	1
1.2 Tezin Amacı ve Hipotezi . . . . .	2
<b>2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER</b>	<b>3</b>
2.1 Banach Fonksiyon Uzayı . . . . .	6
2.2 İlişik Uzay . . . . .	6
2.3 Hölder Eşitsizliği . . . . .	7
2.4 Mutlak Sürekli Norm . . . . .	8
2.5 Dağılım Fonksiyonu ve Yeniden Düzenleme Altında Azalan Fonksiyonlar . . . . .	9
2.6 Yeniden Düzenlenme Altında Değişmeyen Uzaylar (Simetrik Uzay)	13
2.7 Temel Fonksiyon . . . . .	14
2.8 Simetrik Uzay . . . . .	17
2.9 Hilbert Dönüşümü . . . . .	18
2.10 Fourier Serileri . . . . .	19
<b>3 HARMONİK VE ANALİTİK FONKSİYONLARIN BANACH SINIFLARI VE SİNGÜLER İNTEGRALLER</b>	<b>27</b>
3.1 Poisson Çekirdeği ve Fatou Teoremi . . . . .	27
3.1.1 Poisson Çekirdeği . . . . .	27
3.2 Harmonik Fonksiyonlar Uzayı ve Plesner Teoremi . . . . .	36
3.2.1 $h_p$ uzayı . . . . .	36
3.2.2 Smirnov Teoremi . . . . .	40

<b>4 AĞIRLIKLI SİMETRİK UZAYLARDA SİNGÜLER OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI</b>	<b>42</b>
4.1 Ağırlıklı Banach Fonksiyonu . . . . .	42
4.2 $A_X$ Mucenhaupt Sınıfı . . . . .	47
4.3 Cauchy Singüler İntegralinin Sınırlılığı . . . . .	51
<b>5 <math>H_X</math> BANACH HARDY SINIFLARI</b>	<b>55</b>
5.1 $h_X$ Harmonik Fonksiyonlar Sınıfı . . . . .	55
5.2 $H_x$ Hardy Sınıfları . . . . .	57
<b>6 SONUÇ</b>	<b>59</b>
<b>KAYNAKÇA</b>	<b>61</b>
<b>TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR</b>	<b>63</b>

## SİMGE LİSTESİ

---

$X(\rho)$	Banach fonksiyon uzayı
$\ f\ _X$	Banach uzayı normu
$\alpha_X, \beta_X$	Boyd İndisleri
$\mu_f(\lambda)$	Dağılım fonksiyonu
$E^c$	$E$ kümesinin tümleyeni
$\chi_E$	$E$ kümesinin karakteristik fonksiyonu
$f(x)$	Fonksiyonel analizde kullanılan bir fonksiyon
$\rho(f)$	Fonksiyon normu
$\mathcal{F}(f)$	Fourier dönüşümü
$H_X$	Hardy uzayı sınıfları
$\Delta H$	Harmonik fonksiyonlar için diferansiyel operatör
$h_X$	Harmonik fonksiyonlar sınıfı
$\lambda_i$	Harmonik seriler için özdeğer
$\mathcal{H}(f)$	Hilbert dönüşümü
$e^{i\theta}$	Kompleks düzlem üzerindeki birim çember noktası
$L^p$	Lebesgue uzayı
$(R, \mu)$	Ölçü Uzayı
$T_\phi$	Öteleme operatörü
$S(f)$	Singüler integral operatörü
$\mathcal{P}_\rho$	Poisson çekirdeği
$F^+$	Pozitif yönlü sınır değer fonksiyonu
$\sigma$	Sigma cebiri
$\omega(f, t)$	Süreklilik modülü

$\phi_X(t)$	Temel fonksiyon
$\int_T$	$T$ üzerinde alınan integral ifadesi
$f^*(t)$	Yeniden Düzenleme Altında Azalan Sıralama



## KISALTMA LİSTESİ

---

ABFU	Ağırlıklı Banach Fonksiyon Uzayı
BT	Boyd İndeks Teoremi
CIF	Cauchy Integral Formülü
FT	Fourier Dönüşümü
$H_p$	Hardy Uzayları
$H_X$	Banach Hardy Sınıfları
$\mathcal{H}f$	Maksimal Hilbert Dönüşümü
$L_p$	Lebesgue Uzayı
$M_x$	Lorentz Uzayı
NT	Normun Mutlak Sürekliliği
PK	Poisson Çekirdeği
R	Reel Sayılar kümesi
RRT	Riesz Temsili Teoremi
RI	Yeniden Düzenleme Altında Değişmeyen Uzaylar

## ŞEKİL LİSTESİ

---

<b>Şekil 2.1</b>	$f(x)$ ve $\mu_f(\lambda)$ grafikleri . . . . .	11
<b>Şekil 2.2</b>	$f$ ve $f^*$ grafikleri . . . . .	12
<b>Şekil 3.1</b>	Birim çemberde Poisson çekirdeği ve açısız özellikler . . . . .	34



## Harmonik Fonksiyonların Standart Olmayan Banach Uzayları ve Bazı Özellikleri

Eylem YAŞAR

Matematik Anabilim Dalı  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Prof.Dr. Bilal BİLALOV

Eş-Danışman: Doç.Dr.Yonca SEZER

Bu tez, standart olmayan Banach uzaylarında tanımlı harmonik fonksiyonların özelliklerini incelemektedir. Çalışma, Mucenhaupt sınıfına ait ağırlıklı fonksiyonlar ve normların tam sürekliliği altında harmonik fonksiyonların davranışlarını analiz etmektedir. Poisson çekirdeği, Laplace denklemleri ve Plessner teoremleri gibi matematiksel araçlar kullanılarak teorik ve pratik katkılar sağlanmıştır. Ayrıca, Boyd indisi kavramı tanıtılarak, ağırlıklı fonksiyonların özellikleri üzerine yeni yaklaşımlar geliştirilmiştir.

Tezde, ağırlıklı Banach uzayları ve Hardy uzayları kullanılarak, harmonik fonksiyonların sınır değer problemleri ve norm davranışları üzerinde çalışılmıştır. Simetrik uzaylarda singüler operatörlerin sınırlılıkları incelenmiş ve teorik analizleri yapılmıştır. Bu analizler, farklı fonksiyon uzayları ve operatörler arasındaki ilişkilerin daha derinlemesine anlaşılmasını sağlamıştır. Elde edilen bulgular, diferansiyel denklemler, spektral analiz ve sinyal işleme gibi alanlarda etkili yöntemlerin geliştirilmesine olanak tanımaktadır.

Bu çalışma, diferansiyel denklemlerin çözümü, manyetik alanların modellenmesi ve potansiyel teorideki sınır değer problemlerinin çözümü gibi fiziksel sistemlerde temel araçlar olarak kullanılabilir. Ayrıca, sinyal ve görüntü işleme alanlarında, ağırlıklı Hardy uzayları ve Mucenhaupt sınıfı yardımıyla gürültülü sinyallerin filtrelenmesi gibi uygulamalarda etkili yöntemler geliştirilmesine katkı sağlayabilir. Bu tez, matematiksel analiz ve uygulamalı bilimlerde önemli katkılar sunmaktadır.

**Anahtar Kelimeler :** Possion çekirdeği, ağırlıklı Banach uzayları, Mucenhaupt sınıfı, Hx Hardy sınıfları.



---

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

## ABSTRACT

---

# NONSTANDART BANACH SPACES OF HARMONIC FUNCTIONS SOME PROPERTIES

Eylem YAŞAR

Department of Mathematics  
Master of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof.Dr. Bilal BİLALOV  
Co-supervisor: Assoc.Prof. Dr.Yonca SEZER

This study examines the properties of harmonic functions defined in non-standard Banach spaces. It analyzes the behavior of harmonic functions under the complete continuity of norms and weighted functions belonging to the Mucenhaupt class. Using mathematical tools such as the Poisson kernel, Laplace equations, and Plessner theorems, both theoretical and practical contributions are provided. Additionally, the concept of the Boyd index is introduced, offering new approaches to the properties of weighted functions.

The thesis investigates boundary value problems and norm behavior of harmonic functions using weighted Banach spaces and Hardy spaces. The boundedness of singular operators in symmetric spaces is examined, and their theoretical analyses are conducted. These analyses lead to a deeper understanding of the relationships between different function spaces and operators. The findings enable the development of effective methods in fields such as differential equations, spectral analysis, and signal processing.

This research serves as a fundamental tool for solving differential equations, modeling magnetic fields, and addressing boundary value problems in potential theory. Moreover, in signal and image processing, it contributes to the development of effective methods for filtering noisy signals using weighted Hardy spaces and the Mucenhaupt class. This thesis provides significant contributions to mathematical analysis and applied sciences.

**Keywords :** Poisson kernel, weighted Banach spaces, Mucenhaupt class,  $H_x$  Hardy classes.



---

**YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING**

Bu çalışma, harmonik fonksiyonlar ve Banach uzayları arasındaki ilişkiyi, özellikle Boyd indisleri ve ağırlıklı fonksiyon teorileri bağlamında derinlemesine incelemektedir. Bu yüksek lisans tezi, bu alanın temel teorik çerçevesini özetleyerek, harmonik analiz ve kompleks analizdeki güncel araştırma konularına yeni bir perspektif sunmaktadır. Mucenhaupt sınıfı ve Smirnov teoremi gibi kavramların kullanımıyla, hem teorik matematiğin temel problemlerine çözümler üretilmekte hem de uygulamalı bilim alanlarında yeni araştırma kapıları açılmaktadır. Bu sayede, harmonik fonksiyonlar teorisine yapılan bu katkı, hem disiplinin temel anlayışını zenginleştirmekte hem de diğer alanlardaki bilimsel çalışmalara ilham vermektedir.

## 1.1 Literatür Taraması

Standart olmayan Banach uzayları ve harmonik fonksiyonların analizi üzerine yapılan çalışmalar, fonksiyonel analiz ve matematiksel fizik gibi alanlarda önemli bir yere sahiptir. Bu bölümde, ağırlıklı Banach uzayları, Hardy sınıfları ve Cauchy singüler operatörlerin sınırlılığı konularına odaklanan güncel ve klasik literatürden örnekler sunulacaktır. Harmonik fonksiyonlar, ilk olarak klasik potansiyel teorisi çerçevesinde ele alınmıştır. Banach uzayları teorisi ise Stefan Banach [1] tarafından 1930'larda geliştirilmiştir. Modern fonksiyonel analizde, bu iki alanın kesişim noktaları, özellikle ağırlıklı Banach uzayları ve Hardy uzayları üzerine yapılan çalışmalarda belirginleşmiştir. Smirnov [2] ve Riesz[3] gibi öncülerin çalışmaları, bu alanda kritik bir öneme sahiptir. Boyd'un indis teorisi [4] ve Lorentz uzaylarının [5] analizi de literatürde önemli bir yer tutar. Ağırlıklı Banach fonksiyon uzayları, fonksiyonel analizde önemli bir yer tutar. Bu uzaylar, harmonik analiz ve operatör teorisinde sıkça kullanılır. Nelson Dunford [6], ve D.W.Boyd [7] gibi çalışmalar, bu uzayların yapısal özelliklerini ve lineer operatörler üzerindeki etkilerini derinlemesine incelemiştir. Özellikle, Boyd indisi ve Mucenhaupt sınıfı Benjamin Mucenhaupt [8], sırasıyla simetrik uzaylar ve ağırlıklı norm eşitsizlikleri

için temel araçlardır. Son yıllarda, Colin Bennet Sharpley [9], tarafından ağırlıklı Banach uzaylarının interpolasyon teorisi üzerine yapılan çalışmalar, bu uzayların analitik ve uygulamalı problemlerdeki rollerini genişletmiştir. Özellikle, Lorentz uzaylarının analizinde kullanılan modern metodolojiler literatüre önemli katkılar sunmuştur. Harmonik fonksiyonlar ve Hardy sınıfları, kompleks analizde sıkça incelenen konulardır. F.Riezs [10], E.M.Stein [11] ve J.B. Garnett [12] gibi çalışmalar, bu konularda temel referanslardır. Özellikle, Riesz teoremi harmonik fonksiyonların sınır davranışını, Hardy sınıfları ise analitik fonksiyonların belirli büyüme koşullarını inceler. Bu sınıflar, Poisson ve Cauchy çekirdekleri ile yakından ilişkili olup, Blaschke çarpımları ve Smirnov teoremi gibi araçlarla daha derinlemesine incelenebilir. Ağırlıklı simetrik uzaylarda singüler operatörlerin sınırlılığı, fonksiyon uzaylarındaki analizler için kritik bir konudur. Benjamin Mucenhaupt [8] tarafından ağırlıklı fonksiyonların Mucenhaupt sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfın Banach uzaylarındaki rolü detaylandırılmıştır. Özellikle, Poisson çekirdekleri ve Fatou teoreminin sınır değer problemleri üzerindeki etkisi literatürde geniş yankı bulmuştur. Cauchy ve Poisson integrallerinin sınırlılığı üzerine yapılan çalışmalar, A.P. Calderon [13] tarafından detaylandırılmıştır. Bu çalışmalar, singüler operatörlerin teorik analizini modern yaklaşımlarla genişletmiştir. Ağırlıklı Banach uzaylarında singüler integral operatörlerinin sınırlılığı ve harmonik fonksiyonların davranışları üzerine yoğun bir araştırma yapılmıştır. Özellikle, Poisson-Stieltjes integralleri ve Boyd indislerinin kullanımıyla ilgili çalışmalar literatürde dikkat çekmektedir. D.W.Boyd [14] ve Bilal Bilalov 'un ağırlıklı Banach uzayları, Mucenhaupt sınıfı ve harmonik fonksiyonlar üzerine yaptığı çalışmalarda, Poisson çekirdeği ve Hardy uzayları gibi konulara odaklanarak özgün sonuçlar elde etmiştir [15] [16] [17] [18].

## 1.2 Tezin Amacı ve Hipotezi

Bu çalışmanın amacı, standart olmayan Banach uzaylarında tanımlı harmonik fonksiyonların özelliklerini incelemektir. Özellikle ağırlıklı Banach uzaylarının normlarının tam sürekli olduğu durumlarda harmonik fonksiyonların davranışları ele almaktadır. Poisson çekirdekleri, Laplace denklemleri ve Plessner teoremleri gibi temel matematiksel araçlar kullanılmaktadır. Bu çalışmada bu tür uzaylarda harmonik fonksiyonların norm davranışları, matematiksel analizin yeni araştırmalar ve temel kavramlarına ilişkin yeni bir bakış açısı sunması hipotezi üzerine çalışılmıştır.

## 2

## TEMEL TANIM VE TEOREMLER

---

Baz teorisi, yaklaşım teorisinin içinde bağımsız bir alan olarak ortaya çıkar ve Matematik ile doğa bilimlerinin çeşitli alanlarında geniş uygulama alanlarına sahiptir. Fourier yönteminin kısmi diferansiyel denklemler teorisinin birçok problemine uygulanması, diferansiyel operatörlere ilişkin spektral problemlere yol açmaktadır. Ayrık diferansiyel operatörler durumunda, Fourier yönteminin çözüm için kullanılabilmesi, ilgili fonksiyon uzaylarında köklü (öz ve ilişik) fonksiyonların oluşturduğu sistemin temel özelliklerinin (tamlik, minimallik, bazlık) incelenmesini gerektirir. Genel olarak, dikkate alınan lineer topolojik uzaydaki belirli bir lineer operatörün öz elemanlarından oluşan sistemin baz oluşturması, operatör denklemlerinin çözümünde belirleyici bir rol oynamaktadır. Bu yöntemi göstermek için  $(X; \tau)$  lineer topolojik uzayında,  $T : X \rightarrow X$  kapalı lineer operatörünü ele alalım. Burada  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_T \subset X$ ,  $T$  operatörünün öz fonksiyonlarından oluşan bir sistem ve  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  karşılık gelen öz değerler kümesi olsun.

$$Tx = y \quad (2.1)$$

denklemini çözelim. Burada  $y \in R_T$  verilen ve  $x \in D_T$  aranan elemandır.  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$   $X$  uzayında bir baz oluştursun ve  $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$  (burada  $X^*$ ,  $X$ 'in dual uzayıdır) bu sisteme biortogonal olsun. Genellikle  $T$  operatörü  $D_T$  üzerinde

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^*(x) x_n, \forall x \in D_T \quad (2.2)$$

şeklinde bir seri olarak ifade edilmektedir. Diferansiyel operatörler durumunda, (2.2) ifadesi ile incelenen operatörün spektral özelliklerinin çalışılmasının konusudur. (2.2) ifadesini (2.1)' de dikkate alarak  $y$ 'yi  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  bazına göre genişlettiğimizde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^*(x) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(y) x_n \Rightarrow \lambda_n x_n^*(x) = x_n^*(y), \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

elde ederiz.  $M_0 = \{n \in N : x_n \in KerT\}$  ve  $M_1 = N \setminus M_0$  olarak tanımlayalım. (2.1) denkleminin çözülebilmesi için (2.3) ifadesinden,  $x_n^*(y) = 0, \forall n \in M_0$  şartının sağlanması gerektiği anlaşılmaktadır. Buna göre  $n \in M_1$  için  $x_n^*(x) = \lambda_n^{-1}x_n^*(y)$  elde ederiz. Böylece (2.1) denkleminin genel çözümünün

$$x = x_0 + \sum_{n \in M_1} \lambda_n^{-1}x_n^*(y)x_n,$$

olduğu açıktır. Burada  $\sum_{n \in M_1} \lambda_n^{-1}x_n^*(y)x_n \in D_T$  ve  $x_0 \in \ker(T)$  keyfi bir elemandır. Bu genel gözlemler, lineer topolojik uzaylarda lineer denklemler teorisi açısından bazı problemlerinin önemini göstermektedir. Bu nedenle, çeşitli lineer topolojik uzaylardaki sistemlerin bazı özelliklerinin incelenmesi, ayrı bir bilimsel ilgi alanını oluşturmaktadır. Diferansiyel denklemler durumunda,  $X$  olarak ele alınan uzay, ele alınan problemle ilişkilendirilen farklı fonksiyon uzaylarıdır. Çoğu zaman,  $\{x_n\}_{n \in N}$  sisteminin bazı özelliklerini doğrudan belirlemek mümkün değildir. Bu tür problemlerde, bazı özelliklerin kararlılığı giderek daha çok kullanılmaktadır. Bu fikir, klasik Paley-Wiener çalışmalarından kaynaklanmaktadır. Soru,  $X$  Banach uzayında  $\{y_n\}_{n \in N}$  sisteminin  $\{x_n\}_{n \in N}$  bazına ne kadar yakın olması gerektiğidir. Bu yakınlık  $\{y_n\}_{n \in N}$  sisteminin  $X$ 'te  $\{x_n\}_{n \in N}$ 'ye izomorfik bir baz oluşturabilmesi için gereklidir. Bu yöntemin özü,  $Ax_n = y_n, \forall n \in N$  olacak şekilde bir  $A \in L(X)$  otomorfizmasının varlığını kanıtlamaktır. Bu, diferansiyel operatörlerin teorik temellerini inceleyen bir çalışmadır. Bununla birlikte, son zamanlarda, mekanik ve matematiksel fizik gibi belirli problemlerin uygulamalarıyla ilgili olarak, standart olmayan fonksiyon uzaylarına olan ilgi büyük oranda artmıştır. Bu tür uzaylara değişken üslü Lebesgue uzayı, Morrey uzayı, Grand-Lebesgue uzayı ve diğer çeşitli uzaylar dahildir. Bu uzaylar (Orlicz uzayları da dahil) Luxemburg sınıflandırmasına göre ölçüm uzayları üzerinde Banach fonksiyonel uzaylarıdır. Bu uzayların çoğu (değişken üslü Lebesgue uzayı ve Morrey uzayı hariç) simetriktir ve Boyd'un sonuçları sayesinde, bu uzaylardaki harmonik analiz yöntemi oldukça gelişmiştir. Yukarıda sunulan gerekçeler, birçok klasik sistemin ve bunların pertürbasyonlarını (özellikle trigonometrik sistemlerin) simetrik uzaylarda bazı özelliklerini incelemenin yerinde olduğunu ortaya koymaktadır. Pertürbe trigonometrik sistemlerin belirli fonksiyon uzaylarında bazı özelliklerinin öğrenilmesinin bir yolu da Hardy sınıflarında analitik fonksiyonlar için Riemann sınır problemlerinin uygulanmasıdır. Buna göre gerekli fonksiyon uzaylarında pertürbe trigonometrik sistemlerin bazı özelliklerinin öğrenilmesi için fonksiyon uzayın Hardy sınıflarının dahil edilmesi ve özelliklerin öğrenilmesi gereklidir. Bu tezde, standart olmayan Banach uzaylarında tanımlı harmonik fonksiyonların spektral özellikleri ve bu fonksiyonların normlarının sürekliliği ile ilgili temel problemler incelenmektedir. Bu tez beş bölümden

oluşmaktadır. İlk bölümde ölçüm uzayları üzerinde tanımlı Banach fonksiyon uzayları için temel tanım ve teoremler sunulmuş, simetrik uzaylar ve bu uzaylara karşılık gelen temel fonksiyon kavramları tanıtılmıştır. Ayrılabilirlik ve eşlenik uzaylar açıklanmış, Hölder Eşitsizliği ve normun mutlak sürekliliği gibi önemli teoremler ele alınarak, yeniden düzenleme altında değişmeyen uzay kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca simetrik uzaylarda interpolasyon teorisi ve operatör interpolasyonu hakkında temel bilgiler verilmiştir. Hilbert dönüşümünün sınırlı olduğu simetrik uzaylar Boyd indisleri yardımıyla karakterize edilmiştir. Son olarak, simetrik uzaylarda Fourier serileri teorisinin temel unsurları ele alınmıştır. İkinci bölümde Harmonik ve analitik fonksiyonların Banach uzaylarındaki davranışları incelenmiştir. Bu bölümde Poisson çekirdekleri, Fatou teoremi ve Plesner teoremi gibi önemli araçlar tanıtılmıştır. Ayrıca, Blaschke çarpımları ve Smirnov teoremi gibi harmonik fonksiyonlar için kritik olan sonuçlara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, ağırlıklı simetrik uzaylarda singüler operatörlerin sınırlılığı birim çemberdeki harmonik ve analitik fonksiyonların Banach sınıfları incelenmiştir. Singüler operatörlerin sınırları, Poisson çekirdeği ve Fatou Teoremi gibi konular detaylandırılmıştır. Beşinci bölümde, Banach Hardy sınıfları  $H_X$  üzerinde Poisson formülü verilmiş, harmonik fonksiyonların farklı sınıfları incelenmiştir. Bu sınıflar, Banach uzayının normları aracılığıyla oluşturulmuş ve klasik özellikleri sunulmuştur. Riesz teoreminin geçerli olduğu Banach Hardy sınıfları karakterize edilmiş ve bazı teorisine dair gerekli bilgiler sağlanmıştır. Paley-Wiener ve N.K. Bari'nin Riesz tabanlarının kararlılığına dair klasik sonuçlar ve genellemeleri sunulmuştur. Bu sistemlerin simetrik uzaylardaki temel özellikleri, Hardy sınıflarındaki çözülebilirlik ile ilişkilendirilmiştir. Ayrıca, lineer fazlı üstel sistemler ve simetrik uzaylarda tanımlı bozulmuş trigonometrik seriler için temel özellikleri belirlenmiş ve bu özelliklerin faz parametresi ile Boyd indisi arasındaki ilişki incelenmiştir.

## 2.1 Banach Fonksiyon Uzayı

$(R, \mu)$  bir ölçü uzayı olsun.  $M^+$   $R$ 'de tanımlı değerleri  $[0, \infty]$  aralığında bulunan  $\mu$ -ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun.  $R$ 'nin  $\mu$ -ölçülebilir  $E$  alt kümesinin karakteristik fonksiyonu ise  $\chi_E$  ile gösterilecektir.

**Tanım 2.1.** (Banach Fonksiyon Uzay Normu) :  $\rho : M^+ \rightarrow [0, \infty]$  biçiminde tanımlı tasvirini göz önüne alalım.  $\forall f, g, f_n \in M^+, (n = 1, 2, 3, \dots)$  tüm  $a \geq 0$  sabitleri ve  $R$ 'nin tüm  $\mu$ -ölçülebilir  $E$  alt kümeleri için eğer aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa ise  $\rho$  tasvirine Banach fonksiyon normu (Kısaca fonksiyon normu) denir[9].

$$P(1) \quad \rho(f) = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-h.h.y} \quad \rho(af) = a\rho(f)$$

$$P(2) \quad 0 \leq g \leq f \quad \mu\text{-h.h.y.} \quad \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$$

$$P(3) \quad 0 \leq f_n \uparrow f \quad \mu\text{-h.h.y.} \quad \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$$

$$P(4) \quad \mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$$

$$P(5) \quad \mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f d\mu \leq C_E \quad \rho(f).$$

Burada  $0 < C_E < \infty$  sabiti,  $E$  ve  $\rho$ 'ye bağlı  $f$ 'den bağımsızdır

$$\rho_p(f) = \begin{cases} \left\{ \int_R f^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}, & (1 \leq p < \infty), \\ \text{ess sup}_R f, & (p = \infty), \end{cases} \quad f \in M^+. \quad (2.4)$$

**Tanım 2.2.** (Banach Fonksiyon Uzayı) :  $\rho$  bir Banach fonksiyon normu olmak üzere

$$X(\rho) = X_\rho = X = \{f \in M^+ : \rho(|f|) < +\infty, \}$$

ifadesi ile verilen uzaya Banach fonksiyon uzayı (BFU) denir ve  $\forall f \in X$  fonksiyonu için norm aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$\|f\|_X = \rho(|f|) \quad (2.5)$$

**Örnek 1 :**  $1 \leq p \leq \infty$  olmak üzere  $L^p$  uzayları bir Banach fonksiyon uzayıdır.

## 2.2 İlişik Uzay

Bu çalışmada,  $1 \leq p \leq \infty$  olmak üzere  $L^p$  ve duali  $L^{p'}$  Lebesgue uzayları arasındaki dualite ilişkisi üzerinden belirli bir Banach fonksiyon uzayının önemli

kavramlarını inceleyeceğiz. Klasik Hölder eşitsizliği  $\forall f \in L^p$  ve  $f \in L^{p'}$  için aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$\int_R f d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|f\|_{L^{p'}}$$

burada

$$1 \leq p \leq \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad (2.6)$$

Hölder eşitsizliğindeki norm,  $\forall g \in L^{p'}$  ve (2.6) bağıntılarını sağlayan her  $p$  ve her  $p'$  için

$$\|g\|_{L^{p'}} = \sup \left\{ \int_R \|fg\| d\mu : f \in L^p, \|f\|_{L^p} \leq 1 \right\} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.3.** (İlişik Uzay) : Eğer  $\rho$  bir fonksiyon normu ise, onun ilişik normu  $\rho'$  için

$$\rho'(g) = \left\{ \int_R fg d\mu : f \in M^+, \rho(f) \leq 1 \right\}, \quad (2.8)$$

eşitliğine sahipse  $\rho'(g)$  fonksiyonuna  $M^+$  üzerinde Associate Uzayı (İlişik Uzay) denir[9].

**Tanım 2.4.**  $\rho$  bir fonksiyon normu olsun ve  $X = X(\rho)$ 'nin Tanım (2.1)'deki gibi  $\rho$  tarafından tanımlanan Banach fonksiyon uzayı olduğunu kabul edelim.  $\rho'$  normu  $\rho$ 'in ilişik normu olsun.  $\rho'$  belirlenen Banach fonksiyon uzayı  $X(\rho')$  uzayına  $X$  uzayının ilişik uzayı denir ve  $X'$  ile gösterilir.

(2.5) ve (2.8) 'dan  $X'$  ilişik uzayındaki  $g$  fonksiyonunun normu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\|g\|_{X'} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} |fg|, d\mu : f \in X, \|f\|_X \leq 1 \right\}. \quad (2.9)$$

### 2.3 Hölder Eşitsizliği

**Teorem 2.1.**  $X$  bir Banach fonksiyon uzayının ilişik uzayı  $X'$  olsun. Eğer  $f \in X$  ve  $g \in X'$  o zaman  $fg$  çarpımı integrallenebilir bir fonksiyon olur ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır :

$$\int_R |fg| d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}. \quad (2.10)$$

*İspat.* Eğer  $\|f\|_X = 0$  ise, o zaman  $f = 0$ ,  $\mu$  h.h.y. Böylece (2.10) nin her iki tarafı sıfırdır.  $\|f\|_X > 0$  durumu için ise,  $f/\|f\|_X$  fonksiyonunun normu 1' dir. Böylece

(2.9) ,

$$\int_R \left| \left( \frac{f}{\|f\|_X} \right) g \right| d\mu \leq \|g\|_{X'}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğini  $\|f\|_X$  ile çarparak (2.10) bulunur. ■

## 2.4 Mutlak Sürekli Norm

Normun mutlak sürekliliği, Banach fonksiyon uzayları teorisinde, uzayların geometrik ve topolojik özelliklerini anlamak için kritik öneme sahip temel bir kavramdır. Özellikle, uzayların yansıma özelliği ve ayrılabilirliği gibi yapısal karakterizasyonlarda merkezi bir rol oynar.

**Tanım 2.5.** (Mutlak Sürekli Norm) :  $f$ ,  $X$  Banach fonksiyon uzayı olmak üzere, eğer  $E_n \rightarrow \emptyset$   $\mu$ -h.h.y. koşulunu sağlayan her  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için eğer  $\|f_{\chi_{E_n}}\|_X \rightarrow 0$ ,  $f$  fonksiyonuna  $X$  uzayında mutlak sürekli norma sahiptir denir. Mutlak sürekli norma sahip fonksiyonların kümesi  $X_a$  ile gösterilir. Eğer  $X_a = X$  ise,  $X$  uzayı mutlak sürekli norma sahiptir.

Bir sonraki sonuç, önceki tanımlamada dikkatimizi  $\{E_n\}$  azalan dizilerle sınırlayabileceğimizi gösteriyor.

**Önerme 2.1.**  $f$  fonksiyonu  $X$  Banach fonksiyon uzayında mutlak sürekli norma sahiptir ancak ve ancak  $E_n \downarrow \emptyset$   $\mu$  h.h.y. koşulunu sağlayan her  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için  $\|f_{\chi_{E_n}}\|_x \downarrow 0$  olur.

*İspat.* Gereklik koşulunun ispatı açıktır. Yeterlilik koşulu için,  $f$  'nin azalan diziler için belirtilen özelliğe sahip olduğunu varsayalım.  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $F_n \rightarrow \emptyset$   $\mu$  - h.h.y. koşulunu sağlayan keyfi bir dizi olsun. O zaman  $E_n = \bigcup_{m \geq n} F_m$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) dizisi azalan bir dizidir ve  $\{F_n\}$  ile aynı üst sınırına sahiptir. Bu nedenle  $f$  üzerindeki hipotez  $\|f_{\chi_{E_n}}\|_x \downarrow 0$  anlamına gelmektedir. Tüm  $n$  için  $F_n \subset E_n$  olduğundan,  $\|f_{\chi_{F_n}}\|_x \rightarrow 0$ 'dir. Dolayısıyla  $f$  'nin mutlak sürekli norma sahip olduğu sonucu çıkmaktadır. ■

**Örnek 2 :** Eger  $1 \leq p < \infty$  ise, Lebesgue uzayı  $L^p(R, \mu)$  mutlak sürekli norma sahiptir. Bu, önceki önermenin doğrudan bir sonucudur.  $p = \infty$  olduğunda, mutlak süreklilik, ölçüm uzayının  $(R, \mu)$  altında yatan yapısına bağlıdır. Örneğin,  $(R, \mu)$  atomik değilse,  $L^\infty$  'un mutlak sürekli kısmı  $(L^\infty)_a$  yalnızca sıfır fonksiyonununu içerir. Eğer  $(R, \mu)$  tam atomic ise, doğal sayılar durumunda olduğu gibi, o zaman  $l^\infty$  'in mutlak sürekli kısmı, sonsuzda sıfıra yakınsayan dizilerden oluşan  $c_0$  alt uzayıdır.

**Lemma 2.1.** Eğer  $f$  mutlak süreklı norma sahip ise, her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta > 0$  bulunur. Bu durumda  $\mu(E) < \delta$  için  $\|f_{\chi_{E_n}}\|_X < \varepsilon$  eşitsizlik sağlanır.

*İspat.* Aksini varsayalım. Yani  $\varepsilon > 0$  için,

$$\mu(E_n) < 2^{-n}, \quad \|f_{\chi_{E_n}}\|_X \geq \varepsilon.$$

olacak şekilde  $E_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ölçülebilir kümesi var olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n) < 2^{-m+1}, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Burada  $E_n \rightarrow \emptyset$  bulunur. Böylece bu sonuç  $f$  fonksiyonunun mutlak süreklı norma sahip olması gerçeği ile çelişir. ■

**Tanım 2.6.** (Ayrılabilirlik) : Bir  $\mu$  ölçüsüne karşılık gelen  $(\mathcal{A}, d)$  metrik uzayı, ayrılabilir ise  $\mu$  ölçüsüne ayrılabilir denir.

## 2.5 Dağılım Fonksiyonu ve Yeniden Düzenleme Altında Azalan Fonksiyonlar

**Tanım 2.7.** (Dağılım fonksiyonu) :  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(R, \mu)$  uzayında tanımlı bir  $f$  fonksiyonunun dağılım fonksiyonu  $\mu_f$  aşağıdaki şekilde tanımlanır :

$$\mu_f(\lambda) = \mu\{x \in R : |f(x)| > \lambda\}, \quad (\lambda \geq 0). \quad (2.11)$$

Burada  $\mu_f$  yalnızca  $f$  fonksiyonunun  $|f|$  mutlak değerine bağlı ve  $\mu_f$  fonksiyonunu  $\infty$  değerini alabilir.

**Tanım 2.8.** (Denk ölçülebilir) : Eğer  $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$  ve  $g \in \mathcal{M}_0(S, \nu)$  fonksiyonları aynı dağılım fonksiyonuna sahipse, yani her  $\lambda \geq 0$  için  $\mu_f(\lambda) = \mu_g(\lambda)$  eşitliği geçerliyse, bu fonksiyonlara denk ölçülebilir (equivalent measurable) denir[9].

**Önerme 2.2.**  $f, g, f_n, (n = 1, 2, \dots)$  fonksiyonlarının  $\mathcal{M}_o(R, \mu)$  kümesine ait ve  $a$ 'nın sıfırdan farklı her hangi bir skaler olduğunu.  $\mu_f$  dağılım fonksiyonu,  $[0, \infty)$  aralığında negatif olmayan, azalan ve sağdan sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca,

$$|g| \leq |f| \mu - h.h.y. \quad \Rightarrow \quad \mu_g \leq \mu_f; \quad (2.12)$$

$$\mu_{\alpha f}(\lambda) = \mu_f(\lambda/|\alpha|), \quad (\lambda \geq 0); \quad (2.13)$$

$$\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2), \quad (\lambda_1, \lambda_2 \geq 0); \quad (2.14)$$

$$|f| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf |f_n| \quad \mu - h.h.y. \quad \Rightarrow \quad \mu_f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \mu_{f_n}; \quad (2.15)$$

Özellikle,

$$|f_n| \uparrow |f| \quad \mu - h.h.y. \quad \Rightarrow \quad \mu_{f_n} \uparrow \mu_f.$$

**Örnek 3 :** Negatif olmayan basit bir  $f$  fonksiyonun  $\mu_f$  dağılım fonksiyonunu hesaplayalım.

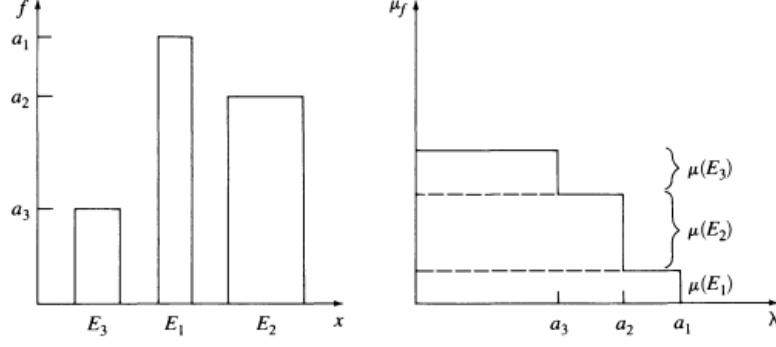
$$f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad (2.16)$$

olduğunu kabul edelim. Burada  $E_j$  kümeleri  $R$  uzayının sonlu  $\mu$  ölçülü ikili ayrık alt kümeleridir ve  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > 0$  dir. Eğer  $\lambda \geq \alpha_1$  ise  $\mu_f(\lambda) = 0$  olur. Ayrıca  $\alpha_2 \leq \lambda < \alpha_1$  ise  $f(x)$  fonksiyonu,  $E_1$  kümesi üzerinde  $\lambda$  değerini geçer ve böylece  $\mu_f(\lambda) = \mu(E_1)$  olur. Benzer şekilde, eğer  $\alpha_3 \leq \lambda < \alpha_2$  ise, o zaman  $f(x)$  fonksiyonu  $E_1 \cup E_2$  kümesi üzerinde  $\lambda$  geçer ve böylece  $\mu_f(\lambda) = \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$  olur. Genel olarak,

$$\mu_f(\lambda) = \sum_{j=1}^n m_j \chi_{[\alpha_{j+1}, \alpha_j)}(\lambda), \quad (\lambda \geq 0), \quad (2.17)$$

burada  $\alpha_{n+1}$  sıfır kabul edilerek aşağıdaki seri elde edilir (Şekil 2.1)

$$m_j = \sum_{i=1}^j \mu(E_i), \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.18)$$



Şekil 2.1  $f(x)$  ve  $\mu_f(\lambda)$  grafikleri

**Tanım 2.9.** (Yeniden Düzenleme Altında Azalan Fonksiyonu) :  $f$  fonksiyonunun  $\mathcal{M}_0(R, \mu)$  kümesine ait olduğunu varsayalım.  $f$  fonksiyonunun yeniden düzenleme altında azalan sıralaması,  $f^*$  fonksiyonu  $[0, \infty]$  aralığında olarak

$$f^*(t) = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\}, \quad (t \geq 0) \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\inf \emptyset = \infty$  kuralı kullanılmaktadır. Bu durumda, tüm  $\lambda \geq 0$  değerleri için  $\mu_f(\lambda) > t$  ise, o zaman  $f^*(t) = \infty$  olur. Ayrıca,  $(R, \mu)$  sonlu bir ölçüm uzayı ise,  $\mu_f$  dağılım fonksiyonu  $\mu(R)$  ile sınırlıdır ve dolayısıyla tüm  $t \geq \mu(R)$  için  $f^*(t) = 0$  olur. Bu durumda  $f^*$  fonksiyonunu  $[0, \mu(R)]$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olarak kabul edebiliriz. Eğer  $\mu_f$  kesin azalan sürekli bir fonksiyon ise,  $f^*$  fonksiyonu uygun bir aralıkta,  $\mu_f$  fonksiyonunun tersi olduğu belirtilebilir. Daha genel bir  $f$  fonksiyonu için, önce  $\mu_f$  dağılım fonksiyonunu; daha sonra da  $\mu_f$ 'nin  $[0, \infty]$  aralığındaki Lebesgue ölçüsüne göre  $m_{\mu_f}$  dağılım fonksiyonunu oluşturursak o zaman  $f^*$  yeniden düzenleme altında azalan bir fonksiyonu elde ederiz

$$f^*(t) = \sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = m_{\mu_f}(t), \quad (t \geq 0) \quad (2.20)$$

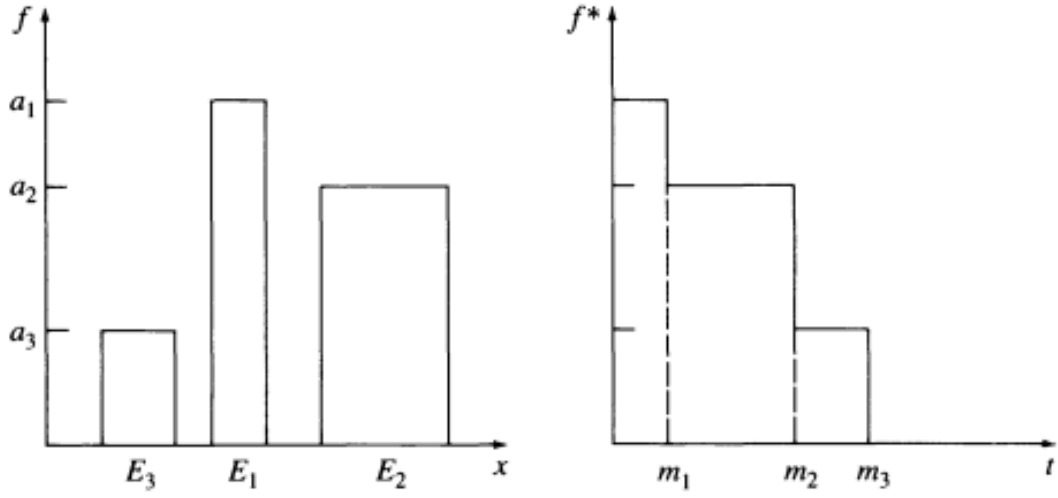
(2.20) bağıntısının bir sonucudur ve (2.11)  $\mu_f$  fonksiyonunun azalan olması ve dağılım fonksiyonunun tanımından gelir.

**Örnek 4 :** Şimdi (2.16) ile verilen  $f$  fonksiyonunun azalan yeniden düzenlenmesini bulalım. Eşitlik (2.19) ve Şekil 2.1'e bakıldığında,  $t \geq m_3$  ise  $f^*(t) = 0$  olur. Ayrıca, eğer  $m_3 > t \geq m_2$  ise, o zaman  $f^*(t) = \alpha_3$  ve eğer  $m_2 > t \geq m_1$ , ise  $f^*(t) = \alpha_2$  olur ve böyle devam edersek

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(t), \quad (t \geq 0), \quad (2.21)$$

elde edilir. Burada  $m_0 = 0$  alınır. Geometrik olarak,  $f$  fonksiyonunun grafiğindeki dikey blokları yeniden düzenleme altında azalan  $f^*$  fonksiyonunu elde

ediyoruz. (bkz. Şekil 2.2); sıçrama noktalarında  $f^*$  fonksiyonunun değerleri sağdan süreklidir.



Şekil 2.2  $f$  ve  $f^*$  grafikleri

**Önerme 2.3.**  $f, g$  ve  $f_n, (n = 1, 2, \dots)$ , fonsiyonları  $\mathcal{M}_0(R, \mu)$  kümesine ait ve  $a$  herhangi bir skaler olsun. Yeniden düzenleme altında azalan  $f^*$ ,  $[0, \infty)$  üzerinde negatif olmayan, azalan ve sağdan sürekli bir fonsiyondur. Ayrıca,

$$|g| \leq |f| \quad \mu\text{-h.h.y.} \implies g^* \leq f^*; \quad (2.22)$$

$$(\alpha f)^* = |\alpha| f^*; \quad (2.23)$$

$$(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2), \quad (t_1, t_2 \geq 0); \quad (2.24)$$

$$|f| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf |f_n| \quad \mu\text{-h.h.y.} \implies f^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n^*; \quad (2.25)$$

Özellikle,

$$|f_n| \uparrow |f| \mu\text{-h.h.y.} \implies f_n \uparrow f_n^*;$$

$$f^*(\mu_f(\lambda)) \leq \lambda, \quad (\mu_f(\lambda) < \infty); \quad \mu_f(f^*(t)) \leq t, \quad f(t) < \infty; \quad (2.26)$$

$$f \text{ ve } f^* \text{ denk ölçülebilirdir}; \quad (2.27)$$

$$(|f|)^p)^* = (f^*)^p, \quad (0 < p < \infty). \quad (2.28)$$

**Teorem 2.2.**  $(R, \mu)$  tam  $\sigma$ -sonlu ölçü uzayının rezonans olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki türden biri olmasıdır :

(i) Atomik olmayan (Ayrık olmayan)

(ii) tam atomik, tüm temel elemanları eşit ölçüye sahiptir.

## 2.6 Yeniden Düzenleme Altında Değişmeyen Uzaylar (Simetrik Uzay)

Negatif olmayan bir vektör  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  için  $\ell^p$ -normu  $(\sum_{k=1}^n \alpha_k^p)^{1/p}$  biçimindedir. Bu norm  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  değerlerine bağlıdır, ancak bu değerler sıraya bağlı olarak düzenlenmemiştir. Başka bir ifadeyle  $\ell^p$ -normu vektörün büyüklüğünden bahsederken, bu büyüklüğün altta yatan ölçüm uzayı üzerindeki girişlerin nasıl dağıldığına bakılmaksızın ele alınması durumunu göz önünde bulunduralım. Amacımız, normları bu özelliği taşıyan daha genel ölçüm uzayları üzerindeki Banach fonksiyon uzaylarını ayırmak olacaktır. Bu uzaylara, yeniden düzenleme altında değişmeyen uzay (Rearrangement-Invariant) denir ve genel Banach fonksiyon uzaylarına kıyasla çok daha zengin bir yapıya sahiptirler.

**Tanım 2.10.**  $\rho$  tam  $\sigma$ -sonlu bir  $(R, \mu)$  ölçü uzayı üzerinde bir fonksiyon normu olsun. O zaman  $\rho$ ,  $\mathcal{M}_0^+(R, \mu)$  içindeki her bir eş ölçülebilir  $f$  ve  $g$  fonksiyon çifti için  $\rho(f) = \rho(g)$  ise yeniden düzenleme altında değişmeyen normu denir. Bu durumda,  $\rho$  normu tarafından üretilen Banach fonksiyon uzayı  $X = X(\rho)$  yeniden düzenleme altında değişmeyen uzayı olarak adlandırılır.

**Sonuç 2.1.**  $X$  bir rezonans ölçü uzayı üzerinde yeniden düzenleme altında değişmeyen uzay olsun  $f_1$  fonksiyonunun  $\mathcal{M}_0$ 'ya ait olduğunu ve  $f_2$  fonksiyonunun ise  $X$  uzayına ait olduğunu kabul edelim. Eğer  $f_1 \prec f_2$  ise,  $f_1$   $X$  uzayına aittir ve  $\|f_1\|_X \leq \|f_2\|_X$ .

**Teorem 2.3.**  $(R, \mu)$  rezonans ölçü uzayı  $(E_j)_{j \in R}$   $R$ 'nin her biri sonlu pozitif ölçüye sahip, ikili ayrık alt kümelerinin sayılabilir bir sınıfı olsun.  $E = R \setminus \bigcup_j E_j$ .  $\mathcal{M}_0(R, \mu)$  içindeki her  $f$  fonksiyonu için,

$$Af = f\chi_E + \sum_{j \in J} \left( \frac{1}{\mu(E_j)} \int_{E_j} f d\mu \right) \chi_{E_j}.$$

Buradan  $A$  operatörü,  $(R, \mu)$  üzerindeki her yeniden düzenleme altında değişmeyen  $X$  uzayında büzülme operatörü dönüşümü

$$\|Af\|_X \leq \|f\|_X, \quad (f \in X).$$

**Teorem 2.4** (Lüksemburg Teoremi).  $\rho$  bir  $(R, \mu)$  ölçü uzayı üzerinde yeniden düzenleme altında değişmeyen fonksiyon normu olsun varsayalım. O zaman  $(R^+, \mu)$  üzerinde bir  $\bar{\rho}$  yeniden düzenleme altında değişmeyen fonksiyon normu vardır (tek olması gerekmez)

$$\rho(f) = \bar{\rho}(f^*), \quad (f \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu)). \quad (2.29)$$

Ayrıca, eğer  $\sigma (R^+, m)$  üzerinde herhangi bir yeniden düzenleme altında değişmeyen fonksiyon normu

$$\rho(f) = \sigma(f^*), \quad f \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu), \quad (2.30)$$

ile ifade ediliyor ise bu durumda  $\rho$  'nın ilişik normu  $\rho'$  ve  $\sigma$  'nın ilişik normu  $\sigma'$  gösterilir ve

$$\rho'(g) = \sigma'(g^*), \quad (g \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu)) \quad (2.31)$$

ile ifade edilir.

## 2.7 Temel Fonksiyon

Yeniden düzenleme altında değişmeyen uzaylar için Banach fonksiyon uzaylarında dualite ve ayrılabilirlik özelliklerini ele alacağız ve bunları  $X$  yeniden düzenleme altında değişmeyen uzay ile ilişkilendirilen  $\varphi_X$  ile gösterilen  $X$ 'in temel fonksiyonu açısından yeniden formüle edeceğiz.

**Tanım 2.11.** (Temel Fonksiyon) :  $(R, \mu)$  rezonans ölçü uzayı üzerinde  $X$  yeniden düzenleme altında değişmeyen uzayın Banach fonksiyon uzayı olduğunu varsayalım.  $\mu$  değer kümesine ait her sonlu  $t$  değeri için  $E$ ,  $\mu(E) = t$  olacak şekilde  $R$  'nin bir alt kümesi olsun:

$$\varphi_X(t) = \|\chi_E\|_X \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanan  $\varphi_X$  fonksiyonuna,  $X$  'in temel fonksiyonu denir. Eğer  $(R, \mu)$  atomik değilse,  $\mu$ 'nin değer kümesi  $[0, \mu(R)]$  aralığındadır. Bu durumda,  $L^p(R, \mu)$  'ün temel fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\varphi_{L^p}(t) = t^{1/p}, \quad (1 \leq p < \infty) \quad (0 \leq t < \mu(R)), \quad (2.33)$$

ve

$$\varphi_{L^\infty}(0) = 0; \quad \varphi_{L^\infty}(t) = 1, \quad (0 < p < \infty) \quad (0 \leq t < \mu(R)). \quad (2.34)$$

Teorem (2.2) 'ye göre, tüm elemanları tam ölçüye sahip olan  $(R, \mu)$  'nün rezonans ölçü uzayı tam atomik olması durumu söz konusudur. Örneğin, sonlu değer kümesi  $Z^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  olan sayma ölçüsüne sahip tamsayılar kümesi  $Z$ 'dir.  $L^p(Z)$  için  $\ell^p$  yazdığımızda

$$\varphi_{\ell^p}(t) = n^{1/p}, \quad (1 \leq p < \infty) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.35)$$

ve

$$\varphi_{\ell^\infty}(0) = 0; \quad \varphi_{\ell^\infty}(n) = 1, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.36)$$

şeklinde olur .

**Teorem 2.5.**  $X, (R, \mu)$  rezonans ölçü uzayı üzerinde yeniden düzenlenme altında değişmeyen uzay ve  $X', X$  'in ilişik uzayı olsun. O zaman  $\mu$  'nün değer kümesindeki her sonlu değer için ,

$$\varphi_X(t)\varphi_{X'}(t) = t \quad (2.37)$$

eşitliği geçerlidir.

*İspat.* Eğer  $t = 0$  ise, her temel fonksiyon orijinde (2.37) açıktır. Dolayısıyla,  $0 < t < \infty$  olduğunu kabul edebiliriz,  $t, \mu$  'nün değer kümesinde olduğundan  $\mu(E) = t$  olacak şekilde  $R$  kümesinin bir  $E$  alt kümesi vardır( 2.10 ) 'daki Hölder eşitsizliğine göre,

$$t = \int_E d\mu \leq \|\chi_E\|_X \|\chi_E\|_{X'} = \varphi_X(t)\varphi_{X'}(t) = t.$$

Diğer yandan

$$\varphi_X(t) = \|\chi_E\|_X = \sup \left\{ \int_E |g| d\mu : \|g\|_{X'} \leq 1 \right\}. \quad (2.38)$$

Herhangi bir  $g$  için, Teorem (2.3)

$$h = \left( \frac{1}{t} \int_E |g| d\mu \right) \chi_E$$

fonksiyonunun

$$h = \left( \frac{1}{t} \int_E |g| d\mu \right) \varphi_{X'}(t) = \|h\|_{X'} \leq \|g\|_{X'} \leq 1,$$

eşitsizliğini sağladığını gösterir. Bu durumda,  $g$  üzerindeki supremumu alıp ve Teorem(2.3) 'ü kullanarak

$$\frac{\varphi_X(t)\varphi_{X'}(t)}{t} \leq 1$$

eşitsizliği elde edilir. ■

**Sonuç 2.2.**  $X, (R, \mu)$  Rezonans ölçü uzayı üzerinde yeniden düzenleme altında değişmeyen uzay olsun. O zaman  $X$  'in  $\varphi_x$  temel fonksiyonu aşağıdaki durumları sağlar:

$$\varphi_x \text{ artan fonksiyondur; } \varphi_x(t) = 0 \iff t = 0 \quad ; \quad (2.39)$$

$$\varphi_x(t)/t \text{ azalan fonksiyondur;} \quad (2.40)$$

$$\varphi_x(t) \text{ fonksiyonu (orjin dışında) süreklidir.} \quad (2.41)$$

*İspat.*  $\varphi_x$  fonksiyonunun artan olması Banach fonksiyon uzaylarının latis özelliğinden elde edilir[19]. Bu durumda, bir önceki teorem,  $\varphi_x(t)/t = 1/\varphi_{x'}(t)$  azalan fonksiyonu olduğunu gösterir.  $\varphi_x$  fonksiyonunun sürekliliği yalnızca atomik olmadığında ispat gerektirir, çünkü  $(R, \mu)$  atomik olduğunda  $\varphi_x$  fonksiyonu,  $R^+$  nın ayırık bir alt kümesinde tanımlı olduğundan süreklidir.  $(R, \mu)$  atomik olmadığı durumda,  $\varphi_x, (0, \mu(R))$  aralığında artan bir fonksiyondur, dolayısıyla sıçramalı süreksizliklere sahip olabilir. Ancak,  $\varphi_x$  herhangi bir  $t_0 > 0$  'da bir sıçramalı süreksizliğe sahip olamaz, çünkü o zaman (2.40)  $t_0$  'ın sağında sağlanmamış olur. Bu da (2.41)'u kanıtlar. ■

**Tanım 2.12.**  $\varphi, R^+$  üzerinde bir yarı konkav fonksiyon olsun.  $M_\varphi = M_\varphi(R^+, m)$  Lorentz uzayı,  $\mathcal{M}_0(R^+, m)$  uzayında fonksiyoneli

$$\|f\|_{M_\varphi} = \sup_{0 < t < \infty} \{f^{**}(t)\varphi(t)\}$$

biçiminde tanımlanan tüm  $f$  fonksiyonların sınıfı şeklinde tanımlanır.

Yeniden düzenleme altında değişmeyen uzaylarda, Boyd indis aracılığıyla fonksiyonların büyüme ve azalma hızlarını inceleyecek, özellikle de Lorentz uzayları  $\Lambda(X)$  ve  $M(X)$  üzerindeki uygulamalarına odaklanacağız.

**Önerme 2.4.**  $X, (R^+, m)$  üzerinde yeniden düzenleme altında değişmeyen uzay olsun. O zaman  $X$  ortaya çıkan temel fonksiyon konkav olacak şekilde yeniden düzenleme altında değişmeyen bir norm ile denk yeniden normlandırılabilir[9].

**Tanım 2.13.** (Lorentz Uzayları) :  $X, (R^+, m)$  üzerinde yeniden düzenlenme altında değişmeyen uzay olsun ve  $X$  'in Önerme (2.4) gibi  $\varphi_X$  temel fonksiyonu konkav olacak şekilde  $X$  'in yeniden normlandığını kabul edelim.  $\Lambda(X)$  ve  $M(X)$  Lorentz uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır  $M(X)$  uzayı

$$\|f\|_{M(X)} = \sup_{0 < t < \infty} \{f^*(t)\varphi_X(t)\} \quad (2.42)$$

normu ile verilen  $M_{\varphi_X}$  uzayıdır.  $\Lambda(X)$  uzayı  $\mathcal{M}_0^+(R^+, m)$  'deki,

$$\|f\|_{\Lambda(X)} = \int_0^\infty f^*(s)d\varphi_X(s) \quad (2.43)$$

sonlu olan tüm  $f$  fonksiyonlarından oluşur. (2.43) 'deki integral iyi tanımlıdır. Çünkü  $\varphi_X$  artan fonksiyondur. Ayrıca,  $\varphi_X$  konkav ve negatif olmayan fonksiyon olduğundan,  $\varphi_X, (0, \infty)$  aralığında negatif olmayan, azalan bir  $\phi(x)$  fonksiyonun integrali olarak ifade edilebilir. Bu yüzden (2.43)'deki Riemann-Stieltjes integrali

$$\|f\|_{\Lambda(X)} = \|f\|_{L^\infty} \varphi_X(0+) + \int_0^\infty f^*(s)\phi_X(s)ds \quad (2.44)$$

biçiminde yeniden yazılabilir.

## 2.8 Simetrik Uzay

Simetrik uzaylar, ölçülebilir fonksiyonların dağılım özelliklerine dayalı olarak tanımlanan ve hemen hemen eş fonksiyonların aynı norma sahip olduğu özel bir Banach uzayı sınıfıdır.

**Tanım 2.14.** (Simetrik Uzay) :  $f$  ve  $g$  fonksiyonları hemen hemen eş (veya denk) ise, bu fonksiyonlar aşağıdaki eşitliğe sahiptir:

$$f \sim g \iff \mu_f = \mu_g,$$

burada  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının  $\mu_f$  ve  $\mu_g$  sırasıyla dağılım fonksiyonlarıdır. Bu ilişkinin, bir denklik bağıntısı olduğu kolayca ifade edilebilir.  $(M, d\mu, u)$ , ölçü uzayı üzerindeki bir  $X$  Banach fonksiyon uzayı için,

$$f \sim g \implies \|f\|_X = \|g\|_X$$

koşulu sağlanıyorsa,  $X$  uzayına simetrik uzay denir. Bu koşul, hemen hemen eş olan tüm ölçülebilir fonksiyonların aynı norma sahip olduğunu ifade eder[20].

**Örnek 5 :**  $L_{m,-}$  Orlicz uzayı ve  $L_p(m)$  grand uzayı simetrik uzay örnek olarak verilebilir.

## 2.9 Hilbert Dönüşümü

Hilbert dönüşümü, analitik fonksiyonların reel ve sanal kısımlarının sınır değerlerinin incelenmesinde ortaya çıkan lineer bir operatördür. Fourier serilerinin ve Fourier integrallerinin norm yakınsaklığı gibi konularda belirleyicidir. Burada, Hilbert dönüşümünün varlığı ve  $L^p$  uzaylarındaki sınırlılığını belirleyeceğiz.

**Tanım 2.15.** (Hilbert Dönüşümü) :  $R$  üzerinde yerel olarak integrallenebilir bir fonksiyonu olsun.  $f$ 'nin  $Hf$  Hilbert dönüşümü

$$(Hf)(x) = p.v. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{dt}{x-t} \quad (2.45)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| \geq \varepsilon} f(t) \frac{dt}{x-t}, \quad (h.h.y) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

esas değer integrali ile tanımlanır.  $H : f \rightarrow Hf$  operatörüne Hilbert dönüşümü denir.

(Maksimal Hilbert Dönüşümü) :  $R$  üzerinde yerel integrallenebilir  $f$  fonksiyonun  $\mathcal{H}f$  maksimal Hilbert dönüşümü

$$(\mathcal{H}f)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |(H_\varepsilon f)(x)|, \quad (x \in \mathbf{R}), \quad (2.46)$$

şeklinde tanımlanır.  $\mathcal{H} : f \rightarrow \mathcal{H}f$  operatörüne maksimal Hilbert dönüşümü denir.

**Tanım 2.16.** (Boyd İndis) :  $X$  sonsuz, atomik olmayan, tam  $\sigma$ -sonlu ölçü uzayı üzerinde yeniden düzenleme altında değişmeyen bir Banach fonksiyon uzayı olsun.  $X$  uzayının Boyd indisleri  $\underline{\alpha}_X$  ve  $\bar{\alpha}_X$

$$\underline{\alpha}_X = \sup_{0 < t < 1} \frac{\log h_x(t)}{\log t}, \quad \bar{\alpha}_X = \inf_{1 < t < \infty} \frac{\log h_x(t)}{\log t}. \quad (2.47)$$

şeklinde tanımlanır.

**Önerme 2.5.**  $X$  uzayının  $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_x$  ve  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_X$  indisleri

$$\underline{\alpha}_X = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log h_x(t)}{\log t}, \quad \bar{\alpha}_x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log h_x(t)}{\log t}, \quad (2.48)$$

limitleri ile verilebilir. Bu indisler,

$$0 \leq \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha} \leq 1 \quad (2.49)$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca,  $X'$  ilişik uzayının  $\underline{\alpha}' = \underline{\alpha}_{X'}$  ve  $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}_{X'}$  indisleri

$$\underline{\alpha}' = 1 - \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha}' = 1 - \underline{\alpha}. \quad (2.50)$$

bağıntıları ile verilebilir.

**Teorem 2.6** (D.W.Boyd Teorem).  $1 \leq p < q \leq \infty$  olduğunu varsayalım.  $X$ ,  $(R, \mu)$  sonsuz atomik olmayan, tam  $\sigma$ -sonlu bir ölçü uzayı üzerinde yeniden düzenleme altında değişmeyen bir Banach fonksiyon uzayı olsun. O zaman, zayıf tipteki  $(p, p; q, q)$  her lineer (veya yarı lineer)  $T$  operatörünün,  $X$  uzayından  $X$  uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter şart  $X$ 'in  $\underline{\alpha}$  ve  $\bar{\alpha}$  indislerinin

$$\frac{1}{q} < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha} < \frac{1}{p} \quad (2.51)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır.

## 2.10 Fourier Serileri

**Tanım 2.17.** Eğer  $f$  fonksiyonu  $L^1(\mathbf{T})$ uzayına ait ise, o zaman her  $n$  tam sayısı için  $f$  fonksiyonunun  $n$ -inci Fourier katsayı

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (2.52)$$

şeklinde tanımlanır ve elde edilen  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}$  trigonometrik seri,  $f$  fonksiyonunun Fourier serisi olarak adlandırılır.

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}$$

biçiminde yazılır. Fourier serisinin  $N$ 'inci kısmi toplamı

$$(S_N f)(e^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta} \quad (2.53)$$

ile ifade edilir. Amacımız,  $X$ 'teki her  $f$  fonksiyonunun Fourier serisinin  $X$ 'teki normuna  $f$  fonksiyonuna yakınsadığı yeniden düzenleme altında değişmeyen  $X$  uzaylarına göre karakterize etmektedir. Yani:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_X = 0, \quad (f \in X). \quad (2.54)$$

Bu durumda, Fourier serisinin  $X$  uzayındaki norma göre yakınsadığını söyleyeceğiz.

$$P(e^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta},$$

formundaki toplama  $N$  dereceli bir trigonometrik polinom denir, ( $\alpha_N$  veya  $\alpha_{-N}$  sıfırdan farklı). Derecesi en fazla  $N$  olan bir  $P$  trigonometrik polinomu için  $S_N P = P$  eşitliği geçerlidir. Fourier serilerinin normda yakınsadığı  $X$  alt uzayı,  $L^\infty$  'nin  $X$  'e sürekli gömmesi nedeniyle, rasyonel katsayılara sahip trigonometrik polinomlarla  $S_N f$  'nin yaklaşımına izin verdiği için, zorunlu olarak ayrılabilir değildir. Bir sonraki lemma, temel fonksiyon  $\varphi_x$  temel fonksiyonu orjinde sıfıra yakınsarsa, bu alt uzayı  $X_b$  'nin basit fonksiyonlarının kapanışı ile eşitler. Bu durum sadece  $X = L^\infty$  olduğunda geçerli değildir.  $T_\phi$  ile gösterilen öteleme operatörü

$$T_\phi f(e^{i\theta}) = f(e^{i(\theta+\phi)}), \quad (-\pi < \theta, \phi \leq \pi),$$

biçiminde tanımlanır ve  $f$  fonksiyonun sürekliliğinin  $X$  modülü,  $\omega(f, \cdot)_X$  ile gösterilir.

$$\omega(f, t)_X = \sup_{|\phi| \leq t} \|T_\phi f - f\|_X, \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

biçiminde tanımlanır.

**Lemma 2.2.**  $X$ , yeniden düzenleneme altında değişmeyen bir uzay olsun ve  $X_b$ , basit fonksiyonların  $X$  uzayındaki kapanışı olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i)  $\varphi_X(0+) = 0$ ;
- (ii)  $X$  uzayındaki sürekli fonksiyonların  $X_b$  kapanışı olur.
- (iii)  $X$  uzayındaki trigonometrik polinomları  $X_b$  kapanışı olur.
- (iv)  $X_b$  uzayında öteleme işlemi süreklidir,

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \|T_\phi f - f\|_X = 0, \quad (f \in X_b);$$

(v)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega(f, t)_X = 0, \quad (f \in X_b).$$

*İspat.* (i)'nin (ii) 'yi sağladığını göstermek için,  $X$  'teki her  $f$  basit fonksiyonunun,  $X$  üzerinde sürekli fonksiyonlarla keyfi olarak yakınsamasının mümkün olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Bu amaçla,  $\varepsilon > 0$  olsun. Ölçüsü en fazla  $\varepsilon$  olan  $\mathbb{T}$  'nin bir alt kümesi  $E$  'yi ve  $\mathbb{T}$  'de  $\|g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$  ( $E^c$  üzerinde)  $\|f - g\| \leq \varepsilon$  şartı sağlayan sürekli bir  $g$  fonksiyonunu seçebiliriz. O zaman

$$\|f - g\|_X \leq \|f\chi_E\|_X + \|(f - g)\chi_{E^c}\|_X + \|g\chi_E\|_X$$

$$\leq 2\|f\|_{L^\infty}\varphi_X(\varepsilon) + \varepsilon\varphi_X(1),$$

ki bu,  $\varepsilon$  küçük olduğunda küçüktür. Eğer (i) sağlanıyor ise (ii)'nin (iii)'yi sağladığı, trigonometrik polinomların sürekli fonksiyonlar uzayında düzgün yoğun olduğu gerçeğinin doğrudan bir sonucudur. Şimdi (iii)'nin sağlandığını kabul edelim.  $f \in X_b$  olsun ve  $\varepsilon > 0$  olacak şekilde  $P$  Trigonometrik polinomu  $\|f - P\|_X < \varepsilon/4$  sağlar.  $P$ 'nin düzgün sürekliliğinden ( $\delta > 0$ 'ı seçebiliriz.)

$$\|T_\phi P - P\|_{L^\infty} < \frac{\varepsilon}{2\varphi_X(1)}, \quad (|\phi| \leq \delta)$$

elde edilir.  $X$  yeniden düzenleme altında değişmeyen uzay olduğundan, öteleme altında değişmezdir. Böylece  $|\phi| \leq \delta$  olduğu durumda

$$\begin{aligned} \|T_\phi f - f\|_X &\leq \|T_\phi(f - P) + (T_\phi P - P) + (P - f)\|_X \\ &\leq 2\|f - P\|_X + \|T_\phi P - P\|_{L^\infty}\varphi_X(1) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. O halde öteleme dönüşümü  $X_b$  üzerinde süreklidir, yani (iv) şartı sağlanır. (iv) şartının (v) şartını gerektirdiği açıktır ve dolayısıyla ispatı tamamlamak için sadece (v) şartının (i) şartını gerektirdiğini göstermemiz yeterlidir.  $\chi$ , uygun bir aralıkta karakteristik fonksiyonu olmak üzere eğer

$$\varphi_X(2\phi) = \|T_\phi \chi - \chi\|_X \leq \omega(\chi, |\phi|)_X,$$

formunda yazılırsa aradığımız sonuç elde edilir. ■

**Lemma 2.3.** *Bir Fourier serisinin  $X_b$  uzayındaki norma göre yakınsaması için gerek ve yeter koşul,  $S_N$  operatörlerinin kısmi toplamın operatör normunun düzgün sınırlı olmasıdır:*

$$\|S_N\|_{\mathcal{B}(X_b)} \leq M, \quad (N = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.55)$$

*İspat.* (2.55)'in geçerli olduğunu kabul edelim ve  $f$  fonksiyonu  $X_b$  uzayına ait olsun. Eğer  $\varepsilon > 0$  Lemma(2.3),  $\|f - P\|_X < \varepsilon/(M + 1)$  olacak şekilde bir  $P$  trigonometrik polinomunun varlığı garanti eder. O halde, her  $N \geq \text{degree}(P)$  için,

$$\|f - S_N f\|_X \leq \|f - P\|_X + \|S_N(f - P)\|_X \leq (1 + M)\|f - P\|_X < \varepsilon$$

olur. Bu nedenle,  $S_N f \rightarrow f$  ( $X_b$  uzayındaki norma göre).

Tersine, eğer Fourier serileri  $X_b$  uzayındaki norma göre yakınsaksa, o halde  $S_N$ 'nin operatör normları düzgün sınırlı olduğu her  $f$  fonksiyonu için  $X_b$ ,  $\{S_N f\}$   $X_b$ 'nin sınırlı bir alt kümesidir. Düzgün sınırlılık prensibinden elde edilir.  $S_N$  daha sonra (2.55) koşulunu  $m$  çarpım operatörünün sınırlılığını formülize edelim.  $m$  operatörü

başlangıçta  $P(e^{i\theta}) = \sum_{-N}^N a_n e^{in\theta}$  trigonometrik polinomlar üzerinde

$$mP(e^{i\theta}) = \sum_{-N}^N -i \cdot \text{sgn}(n) a_n e^{in\theta}$$

şeklinde tanımlanır. ■

**Lemma 2.4.** (2.55) koşulunun geçerli olması için gerek ve yeter şart,

$$\|mP\|_X \leq c\|P\|_X$$

sağlanacak şekilde bir  $c$  sabiti var olmasıdır.  $P$  tüm trigonometrik polinomları için bu durumda,  $m$  operatörü, tüm  $X$  uzayı üzerinde tanımlı ve sınırlı bir lineer operatöre tek türlü genişletilebilir. Bu  $\|m\|_{\mathcal{B}(X_b)X} \leq c$  eşitsizliği ve

$$(mf)^{\wedge}(n) = -i \cdot \text{sgn}(n) \hat{f}(n), \quad (f \in X_b, n \in \mathbf{Z}) \quad (2.56)$$

sağlar.

*İspat.*  $P$  Trigonometrik polinomları üzerinde tanımlanan  $T$  operatörü

$$T(P)(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^N a_n e^{in\theta},$$

$$T(P) = \frac{1}{2} \hat{P}(0) + \frac{1}{2} [P + im(P)]$$

eşitliğini sağlar. Burada  $P(e^{i\theta}) = \sum_{-N}^N a_n e^{in\theta}$ ,  $|\hat{P}(0)| \leq \|P\|_L \leq c\|P\|_X$  olduğundan ve  $m$  operatörünün  $X_b$  üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter koşulun  $T$ 'nin de sınırlı olduğu sonucu çıkar. Eğer  $P$ ,  $N$  dereceden olan trigonometrik polinomu ise,

$$T(P)(e^{i\theta}) = e^{iN\theta} S_N(e^{-iN(\cdot)} P(e^{i(\cdot)}))(e^{i\theta}).$$

Böylece (2.55) geçerliyse,

$$\|T(P)\|_X \leq \|S_N(e^{-iN(\cdot)} P(e^{i(\cdot)}))\|_X \leq M\|P\|_X$$

elde edilir. Trigonometrik polinomlar  $X_b$ 'de yoğun olduğundan,  $T$ 'nin (dolayısıyla  $m$ )  $X_b$  uzayına normu koruyan tek bir genişlemesi olduğu sonucuna ulaşırız.

Tersine, eğer  $m$  (dolayısıyla  $T$ )  $X_b$  üzerinde sınırlıysa, o zaman

$$S_N(P)(e^{i\theta}) = e^{-iN\theta} T(e^{iN(\cdot)} P)e^{i\theta} - e^{-i(N+1)\theta} T(e^{i(N+1)(\cdot)} P)(e^{i\theta}),$$

$S_n$  operatörlerinin kısmi toplamı düzgün sınırlı operatör normlarına sahiptir. Şimdide (2.56) gösterelim. Eğer  $f$ ,  $X_b$  uzayına aitse,  $X_b$ 'de  $f$ 'ye yakınsayan herhangi bir  $P_j$  trigonometrik polinomlar dizisi seçelim. O zaman  $X_b$ 'de  $m(P_j) \rightarrow m(f)$ , çünkü  $m$   $X_b$  üzerinde sınırlı bir genişlemeye sahiptir.  $X_b$ 'deki herhangi bir  $g$  fonksiyonu için

$$|\hat{g}(n)| \leq \|g\|_{L^1} \leq C\|g\|_X, \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad (2.57)$$

eşitsizliğini sağladığını not edelim. Öncelikle  $g = mf - mP_j$ , 'e, sonra  $g = f - P_j$ , 'ye uygulayarak :

$$(mf)^\wedge(n) = \lim_{j \rightarrow \infty} (mP_j)^\wedge(n) = -i \cdot \text{sgn}(n) \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{P}_j(n) = -i \cdot \text{sgn}(n) \hat{f}(n)$$

bulunur. Böylece (2.56) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. ■

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon < |\phi| \leq \pi} f(e^{i(\theta-\phi)}) \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi. \quad (2.58)$$

Ardından, esas değer integralini ele alalım.  $f \rightarrow \tilde{f}$  operatörü, ( $\tilde{f}$  eşlenik fonksiyon operatörü olarak bilinir).  $f$  operatörü Hilbert dönüşümünün periyodik bir benzeridir. Esas değer integralinin hemen hemen her yerde varlığı (2.59) bağıntısına karşılık gelen maksimal eşlenik operatörünün analizinin aracılığıyla aynı yol ile kurulacaktır. Yani

$$(bf)(e^{i\theta}) = \sup_{0 < \varepsilon \leq 2\pi} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\varepsilon < |\phi| \leq \pi} f(e^{i(\theta-\phi)}) \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi \right| \quad (2.59)$$

varlığından sonra Hilbert dönüşümünde olduğu gibi, temel sonuç uygun  $S$  Calderon operatörü ile maximal operatörünün baskın olmasıdır

$$S(f^*)(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds + \int_1^\infty f^*(s) \frac{ds}{s}.$$

**Teorem 2.7.** Eğer  $f$ ,  $L^1(T)$  ise, o zaman  $f$  fonksiyonundan bağımsız bir  $c$  sabiti için

$$(bf)^*(t) \leq cSf^*(t), \quad (0 < t < 1),$$

Ayrıca  $\tilde{f}$  eşlenik fonksiyonu h.h.y. mevcuttur.

$$(\tilde{f})^*(t) \leq cS(f^*)(t), \quad (0 < t < 1) \quad (2.61)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Lemma 2.5.** *Eğer  $P$  trigonometrik bir polinom ise,*

$$mP = \tilde{P}. \quad (2.62)$$

*İspat.* (2.62) özdeşliğinin yalnızca  $\{e^{iNt} : N \in \mathbf{Z}\}$  üstel değerleri için doğrulanması yeterlidir, çünkü bunlar trigonometrik polinomların temelini oluşturur ve bundan dolayı operatörlerin her ikisi de lineerdir  $N = 0$  durumu önemsizdir. Üstelik,  $N < 0$  için kanıt,  $N > 0$  için değişkenlerin değiştirilmesiyle elde edilecektir. Dolayısıyla  $N > 0$  olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (e^{iN(\cdot)})^\sim(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iN(\theta-\phi)} \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iN\phi} \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi \cdot e^{iN\theta} \\ &= -i \left[ \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(N\phi) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi \right] e^{iN\theta} \\ &= -i \cdot \text{sgn}(N) e^{iN\theta} = m(e^{iN(\cdot)})(e^{i\theta}), \end{aligned}$$

temel bağıntısından:

$$\sin(N\phi) \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \cos(k\phi) + \cos(N\phi)$$

elde edilir. ■

**Teorem 2.8.**  *$X$  uzayının  $T$  üzerinde yeniden düzenleme altında değişmeyen bir Banach fonksiyon uzayı olduğunu ve temel fonksiyonunun  $\varphi_X(0+) = 0$  koşulunu sağladığını varsayalım.  $X_b$ ,  $X$  uzayındaki basit fonksiyonların kapanışı olsun.  $O$  zaman aşağıdaki koşullar denktir:*

- (i)  $X_b$  cinsinden Fourier serileri normda yakınsar;
- (ii)  $S_N$  kısmi toplam operatörleri  $X_b$  üzerinde eşit şekilde sınırlanmıştır;
- (iii)  $m$  çarpan operatörü  $X_b$  ile sınırlıdır;
- (iv) Eşlenik işlev operatörü  $X_b$  ile sınırlıdır;
- (v) Calderon operatörü

$$Sf^*(t) = \int_0^1 f^*(s) \cdot \min\left(1, \frac{s}{t}\right) \frac{ds}{s}$$

$[0, 1]$  aralığında  $X_b$ 'nin Luxemburg tasviri olan  $(X_b)^-$  ile sınırlıdır. Bu koşullardan herhangi biri sağlanıyorsa,  $X_b$ 'deki tüm  $f$  için  $mf = \tilde{f}$  h.h.y. geçerlidir.

**Sonuç 2.3.**  $X, T$  üzerinde ayrılabilir, yeniden düzenleme altında değişmeyen bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Fourier serileri, ancak ve ancak  $X$ 'in Boyd indisleri

$$0 < \underline{\alpha}_X, \bar{\alpha}_X < 1$$

koşullarını sağlıyorsa  $X$  uzayındaki norma göre yakınsar. Ayrılabilir olmayan uzaylar için  $X$  yerine  $X_b$  kullanıldığında da benzer bir sonucun ortaya çıktığını belirtelim.

Şimdi çemberdeki (veya herhangi bir sonlu atomik olmayan ölçü uzayındaki) Boyd indislerini tanımlamak için gerekli düzenlemeleri yapalım. Luxemburg temsil teoremine göre  $X$  yeniden düzenleme altında değişmeyen uzayı  $[0, 1]$  aralığında tanımlandığını varsayabiliriz. Bu durumda, uygun bir  $E_t$  genişleme operatörü

$$(E_t f)(s) = \begin{cases} f(st), & 0 \leq s \leq \min(1, 1/t), \\ 0, & \min(1, 1/t) \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (2.63)$$

seçilir. Daha önce olduğu gibi

$$h_X(t) = \|E_{1/t}\|_{\mathcal{B}(X)}$$

göz önüne alalım.  $O$  zaman  $h_{L^\infty}(t) \leq 1$  ve  $h_{L^\infty}(t) \leq t$ . Dolayısıyla (Önerme 2.1),  $E_{1/t}f \prec \max(1, t)f$  olduğunu gösterir. İnterpolasyon teoreminden (Teorem (2.2))  $h_X(t) \leq \max(1, t)$  eşitsizliği vardır. (2.63)'den  $(E_t f)^* \leq E_t(f^*)$  olduğu sonucu çıkar, dolayısıyla  $h_X$

$$h_X(t) = \sup \left\{ \frac{1}{t} \int_0^1 E_{1/t} f^*(s) g^*(s) ds : \|f\|_X \leq 1, \|g\|_{X'} \leq 1 \right\}$$

biçiminde verilir.  $h_X$ 'in azalmayan fonksiyon olduğunu gösterir. Ayrıca  $E_{1/st} = E_{1/t} \circ E_{1/s}$  için  $0 < s \leq t$  olduğundan alt çarpımsaldır. Bu nedenle  $X$ 'in  $\underline{\alpha}_X$  ve  $\bar{\alpha}_X$  Boyd indislerini tanımlamak için alt çarpımsal fonksiyonların genel teorisine başvurabiliriz (bkz. Tanım 2.13).

Şimdi indislerin özellikleri tam olarak belirlenebilir.

$$h_X(t) = t h_{X'} \left( \frac{1}{t} \right), \quad (t > 0), \quad (2.64)$$

özdeşliği kritik rol oynar.

$$\begin{aligned}\int_0^t E_{1/t}(f^*)(s)g^*(s) ds &= \int_0^{t\Lambda^1} f^*\left(\frac{s}{t}\right)g^*(s) ds \\ &= t \int_0^{1\Lambda^1/t} f^*(u)g^*(ut) du \\ &\leq t \int_0^1 f^*(u)E_t g^*(u) du,\end{aligned}$$

eşitsizliğinden  $h_X(t) \leq th_X(1/t)$  sonucu çıkar. Aynı sonucu  $X'$  uzayına uyguladığımızda ters eşitsizlik ve (2.64) elde edilir.



# 3

## HARMONİK VE ANALİTİK FONKSİYONLARIN BANACH SINIFLARI VE SİNGÜLER İNTEGRALLER

---

Bu bölümde, birim çember üzerinde tanımlı harmonik ve analitik fonksiyonlar sırasıyla Banach ve Hardy uzayları kullanılarak incelenmektedir. Fatou lemması ile Poisson-Stieltjes integrallerinin sınır değerlerinin hemen hemen her yerde,  $1 \leq p \leq \infty$  aralığındaki Plesner teoremi harmonik fonksiyonları  $h_1$  sınıfına ait olma koşulları ve  $h_p$  sınıfı incelenmektedir.  $u \in H_p$  fonksiyonunun  $\vartheta$  aracılığıyla eşlenik fonksiyonunun  $L_p$ -normunun tahmini üzerine Riesz teoremi gibi klasik sonuçlar ele alınır. Birim çember üzerinde tanımlı harmonik fonksiyonların, sınır değerlerinin normuyla belirlenen  $h_X$  sınıfı ve analitik fonksiyonların  $H_X$  Hardy sınıfları incelenmektedir. Özellikle,  $H_X$  sınıfındaki fonksiyonlar için Poisson ve Cauchy formülleri elde edilmektedir.

### 3.1 Poisson Çekirdeği ve Fatou Teoremi

Bu çalışma, kompleks analiz ve fonksiyonel analiz alanlarının kesişiminde yer alan önemli bir konuyu ele almaktadır. Özellikle, harmonik ve analitik fonksiyonların çeşitli Banach uzayları içerisindeki kullanımları, singüler integraller, sıkça kullanılan Poisson çekirdeği ve Fatou Teoremi gibi kavramlar incelenmektedir.

#### 3.1.1 Poisson Çekirdeği

Karmaşık düzlemde birim disk  $\text{int}\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  ve birim çember  $\mathbb{T}$  olarak gösterilsin.  $\mathbb{T}$  üzerindeki noktalar,  $z = 1$  noktasından itibaren ölçülen  $s$  yay uzunluğu kullanılarak parametrik olarak ifade edilsin:  $f(s)$ ,  $s \in (0, 2\pi]$  fonksiyonu

yeterince düzgün fonksiyon olsun. Bu fonksiyonu, Fourier serisine açalım:

$$f(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ks + b_k \sin ks),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos ks ds, k = 0, 1, \dots;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \sin ks ds, k = 1, 2, \dots$$

$\text{int}\mathbb{T}$  birim disk üzerinde Laplace denklemini ele alalım:  $\Delta u = 0$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg \frac{y}{x}$  Kutupsal koordinat sistemi üzerinde Laplace denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir :

$$\Delta u(x, y) = \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = 0.$$

Bu denklemin çözümünü  $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$  formunda arıyoruz. Bu ifadeyi denkleme yerine koyarak ve değişkenleri ayırdığımızda,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \Phi(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0,$$

$$\rho^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} R(\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$$

elde edilir.  $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \forall \varphi \in (0, 2\pi]$  açıkça görülebilir. İlk denklemden ise  $\lambda = n^2$  elde edilir ve genel çözüm  $\Phi_n(\varphi) = \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi$  şeklindedir. Burada  $\alpha_n$  ve  $\beta_n$  reel sayılardır.  $\lambda = n^2$  için ikinci denklem, iki lineer bağımsız çözüme sahiptir.  $\rho^n$  ve  $\rho^{-n}$   $R(\rho)$  fonksiyonunun  $\rho < 1$  için sınırlı olması gerektiğinden,  $\rho^{-n}$  çözümü kabul edilemez. Buna göre,  $R_n(\rho) = \rho^n, n \geq 0$ . Şimdi,  $u(\rho, \varphi)$  çözümünü bir seri formunda bulmaya çalışıyoruz:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (3.1)$$

açıkça görülmektedir ki, eğer  $|\alpha_n; \beta_n| \leq M = \text{const} < +\infty$ , ise, o zaman (3.1) serisi ve türevi alınarak elde edilen seri,  $\rho \leq \rho_1 < 1$  aralığında  $\rho_1 = \text{const}$  için düzgün yakınsaktır. Buna göre, (3.1) serisi terim terime türevlenebilir ve bu birim çemberinde serinin toplamı,  $\mathbb{T}$  harmonik fonksiyondur. (3.1) serisinin açılımı  $\rho = 1$  için anlamlı ve  $\text{int}\mathbb{T}$  bölgesinde  $u$  fonksiyonun  $f(s)$  değerini alması gerekir.

Bundan dolayı,

$$u(1, s) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Bunu  $f(s)$  fonksiyonunun seri açılımıyla  $\alpha_k = a_k \quad k = 0, 1, \dots;$   
 $\beta_k = b_k \quad k = 1, 2, \dots$  Fourier katsayılarını elde ederiz. Sonuç olarak, problemin genel çözümü aşağıdaki gibidir:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f(s) \rho^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi).$$

$a_k$  ve  $b_k$  ifadelerini seride yerine koyup dönüşümler yaptığımızda

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (\cos k s \cos k \varphi + \sin k s \sin k \varphi) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos k(s - \varphi) \right) ds \end{aligned}$$

bulunur.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k e^{iks} = (1 - \rho e^{is})^{-1}$$

ve

$$\rho^k \cos k(s - \varphi) = \operatorname{Re} \rho^k e^{ik(s-\varphi)},$$

göz önünde bulundurduğumuzda

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos k(s - \varphi) &= -1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \cos k(s - \varphi) = \\ &= -1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k e^{ik(s-\varphi)} = -1 + 2 \operatorname{Re} \left( 1 - \rho e^{i(s-\varphi)} \right)^{-1} = \\ &= -1 + 2 \operatorname{Re} \frac{1 - \rho e^{i(s-\varphi)}}{(1 - \rho e^{i(s-\varphi)})(1 - \rho e^{-i(s-\varphi)})} = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(s - \varphi) + \rho^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(s - \varphi) + \rho^2} ds, \rho < 1. \quad (3.2)$$

Bu integral Poisson integrali olarak adlandırılır ve yeterince düzgün  $f(s)$  fonksiyonları için Dirichlet probleminin gerçek bir çözümünü sağladığı sonucu, yukarıda özetlenen yaklaşım kullanılarak kanıtlanabilir. Bunun için  $f(s)$ 'nin Fourier katsayıları üzerinde ön tahminlerin (kısmi integrasyon yöntemiyle) oluşturulması gereklidir. İntegralin çekirdeği(3.2) aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\mathcal{P}_p(s - \varphi) \equiv \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(s - \varphi) + \rho^2} = \operatorname{Re} \frac{e^{is} + \rho e^{i\varphi}}{e^{is} - \rho e^{i\varphi}}.$$

Dolayısıyla ,

$$u(\rho, \varphi) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} ds, z = \rho e^{i\varphi}. \quad (3.3)$$

Cauchy-Riemann denklemlerine göre,  $u(\rho, \varphi)$  harmonik fonksiyon bir reel sabit farkıyla bir  $\vartheta(\rho, \varphi)$  eşlenik harmonik fonksiyon tanımlar ve  $f(z) = u(\rho, \varphi) + i\vartheta(\rho, \varphi)$  şeklindeki karmaşık değerli fonksiyon,  $z = \rho e^{i\varphi}$  'ye göre analitiktir.( 3.3) denkleminde yararlanarak aşağıdaki formülü :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} ds + ic, \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada  $c \in \mathbb{R}$ , ve  $c = \operatorname{Im} f(0)$ . Bu formül,  $\operatorname{int}\mathbb{T}$  birim disk üzerinde  $f(s)$  sınır değerleri verilen  $f(z)$  analitik bir fonksiyonunu verir.  $u = \operatorname{Re} f(z)$  olsun. ( 3.4) formülündeki integral genellikle Schwarz integrali olarak adlandırılır.  $\vartheta(\rho, \varphi)$  fonksiyonunun, O halde

$$\vartheta(1, \varphi) = \tilde{f}(\varphi), \varphi \in (0, 2\pi],$$

$\tilde{f}(\varphi)$  yeterince düzgün sınır değerlerine sahip olduğunu varsayalım, böylece

$$f(e^{i\varphi}) = f(\varphi) + i\tilde{f}(\varphi).$$

$\vartheta(\rho, \varphi)$  fonksiyonunu Poisson integrali olarak ifade ederek aşağıdaki sonuca ulaşılır

$$\begin{aligned} f(z) &= u(z) + i\vartheta(z) = u(\rho, \varphi) + i\vartheta(\rho, \varphi) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{is}) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(s - \varphi) + \rho^2} ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Böylece, analitik fonksiyonlar (sadece harmonik olanlar için değil), Poisson integrali, bir iç nokta  $z$ 'deki fonksiyonun değerini, sınır değerleri  $f(\cdot)$  ile sağlanır. Önceden verilmiş bir  $f(e^{is})$  fonksiyonu için, (3.5) integrali bir harmonik fonksiyonunu ifade eder ve bu fonksiyonun  $z$ 'ye göre analitik olabilmesi için,  $f(e^{is}) = \operatorname{Im} f(e^{is})$  fonksiyonu,  $u(\cdot)$  harmonik fonksiyonuna eşlenik olan  $v(\cdot)$

fonksiyonunun sınır değeri olmalıdır. Bu durumda,  $u(\cdot)$ 'nin sınır değerleri  $f(e^{is}) = \operatorname{Re} f(e^{is})$  olur.

Formül (3.5)'ten ortalama değer teoremi elde edilir. (özellikle  $f(0)$  'ın değeri  $\mathbb{T}$  üzerindeki aritmetik ortalamaya eşittir). (3.4) formülünü kullanarak  $f(z) = u + iv$  ve  $-if(z) = v - iu$  fonksiyonlarına uygulayarak, birim çember için Cauchy formülünü kolayca elde ederiz :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{is}) \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds.$$

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_\rho(s - \varphi) d\mu(s), \quad (3.6)$$

daha genel bir integrali ele alalım.  $\mu(s)$ ,  $(0, 2\pi]$  aralığında tanımlı, sınırlı varyasyona sahip (genel olarak karmaşık değerli) bir fonksiyon olsun. (3.6) fonksiyonunun birim disk içinde harmonik olduğu doğrudan doğrulanabilir. Aşağıdaki teorem geçerlidir.

**Teorem 3.1** (Fatou Teoremi).  $\mu(\cdot)$ 'nin türevlenebilir olduğu  $\varphi_0$ ,  $(0, 2\pi]$  aralığında, bir nokta olsun. O zaman, (3.6) formülü ile tanımlanan  $u(\rho, \varphi)$  harmonik fonksiyonu  $\operatorname{int}\mathbb{T}$  içinde  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $\rho < 1$ , olan bir nokta,  $\mathbb{T}$  içinde herhangi bir teğetsel olmayan yol boyunca sınır noktası  $e^{i\varphi_0}$  'ye yaklaşırken

$$\lim u(\rho, \varphi) = \mu'(\varphi_0), \quad (3.7)$$

sağlar.

*İspat.*  $\mu(\varphi_0) = 0$  olduğunu kabul edelim.  $\mu(s)$  fonksiyonu genel durumu kaybetmeden bir sabit çıkarmak,  $d\mu(s)$  ölçüsünü ve dolayısıyla (3.6) integralinin değerini değiştirmez.  $z = \rho e^{i\varphi}$  'yi  $e^{i\varphi_0}$  noktasına bağlayan yay,  $\rho = \rho(\alpha)$ ,  $\varphi = \varphi(\alpha)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  biçiminde parametrelendirilmiştir.

$$K_\alpha(s; \varphi_0) = \sin(s - \varphi_0) \mathcal{P}'_{\rho(\alpha)}(s - \varphi(\alpha)), \quad (3.8)$$

fonksiyonu göz önüne alalım. Harmonik fonksiyona karşılık gelen parametreler  $\mathcal{P}_r(\varphi)$  integrasyonu ile hesaplanır. Eğer  $\mu(s)$ ,  $\mu(0) = \mu(2\pi)$  koşulunu sağlamıyorsa o zaman bu fonksiyon  $\mu_1(s) = \mu(s) - As$  koşulunu sağlar. Burada  $2\pi A = \mu(2\pi) - \mu(0)$  olur.

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_\rho(s - \varphi) d\mu_1(s) + A,$$

olduğundan ve

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_\rho(s - \varphi) ds = 1,$$

özdeşliği ile bir  $\mu(s)$  periyodik fonksiyon koşulunu göz önüne almak yeterlidir. Bu varsayım altında, (3.6) formülünün kısmi integrasyonu aşağıdaki eşitliği verir:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{P}_\rho(s - \varphi) \mu(s) \Big|_{s=0}^{s=2\pi} -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_\rho(s - \varphi) \mu(s) ds = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}'_\rho(s - \varphi) \mu(s) ds.$$

(3.8) formülünden

$$u(\rho(\alpha), \varphi(\alpha)) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\alpha(s; \varphi_0) \frac{\mu(s) ds}{\sin(s - \varphi_0)}$$

elde edilir.  $\mu(\varphi_0) = 0$ , koşulundan ve  $\mu'_0(\varphi_0)$  türevinin varlık teoreminin koşulundan

$$\lim_{s \rightarrow \varphi_0} \frac{\mu(s)}{\sin(s - \varphi_0)} = \mu'_0(\varphi_0)$$

sonucu çıkar. (3.8) çekirdeğinin bazı özelliklerini verelim.

(a)  $0 < \delta < \pi$  olsun. O zaman,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \sup_{|s - \varphi_0| \geq \delta, s \in [0, 2\pi]} |K_\alpha(s; \varphi_0)| = 0.$$

Bu, özellik

$$K_\alpha(s; \varphi_0) = -\frac{2\rho(\alpha) [1 - \rho^2(\alpha)] \sin(s - \varphi_0) \sin(s - \varphi(\alpha))}{[1 - 2\rho(\alpha) \cos(s - \varphi(\alpha)) + \rho^2(\alpha)]^2}, \quad 0 \leq s \leq 2\pi,$$

formülünden elde edilir.  $|s - \varphi_0| \geq \delta$  eşitsizliğinden ve  $\alpha \rightarrow 1$  iken  $\varphi(\alpha) \rightarrow \varphi_0$  ilişkisi 1'e yeterince yakın  $\alpha$  olduğunda  $\cos(s - \varphi(\alpha)) \leq 1 - q$ , burada  $q > 0$  olarak elde edilir.

(b) Aşağıdaki sonuç geçerlidir:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} J(\alpha, \varphi_0) = -1, \quad (3.9)$$

burada

$$J(\alpha, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\alpha(s; \varphi_0) ds.$$

Kısmi integrasyon yöntemiyle

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\alpha(s; \varphi_0) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(s - \varphi_0) \mathcal{P}'_\rho(s - \varphi) ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(s - \varphi_0) \mathcal{P}_\rho(s - \varphi) ds.\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_\rho(s)$  serisini düzgün yakınsak bir seriye açarak, son integrali kolayca hesaplayabiliriz, böylece

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\alpha(s, \varphi_0) ds = -\rho \cos(\varphi(\alpha) - \varphi_0).$$

Sonuç,  $(\alpha \rightarrow 1)$  için  $\rho(\alpha) \rightarrow 1$  olduğunda,  $\varphi(\alpha) \rightarrow \varphi_0$  şeklinde (3.9) elde edilir.

(c) Teoremin koşulları altında  $\alpha \rightarrow 1$  iken

$$\int_0^{2\pi} |K_\alpha(s; \varphi_0)| ds,$$

integrali sınırlıdır.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |K_\alpha(s; \varphi_0)| ds &= \int_0^{2\pi} |\sin(s + \varphi - \varphi_0) \mathcal{P}'_\rho(s)| ds \leq \\ &\leq |\sin(\varphi - \varphi_0)| \int_0^{2\pi} |\mathcal{P}'_\rho(s)| ds + \int_0^{2\pi} |\sin s \mathcal{P}'_\rho(s)| ds.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Her bir terimi ayrı ayrı göz önünde bulunduralım.

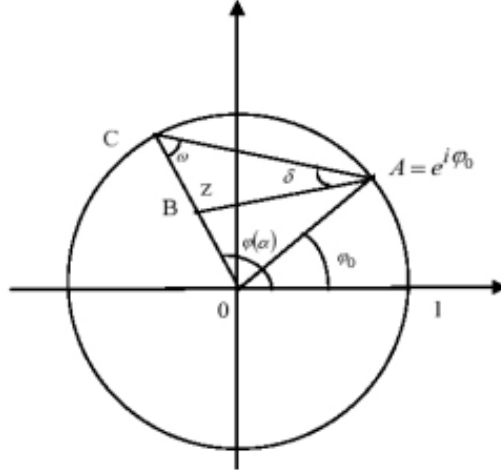
$$\sin s \mathcal{P}'_\rho(s) = -\frac{2\rho(1 - \rho^2) \sin^2 s}{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos s)^2} \leq 0,$$

olduğunda

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\sin s \mathcal{P}'_\rho(s)| ds &= -\int_0^{2\pi} \sin s \mathcal{P}'_\rho(s) ds = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos s \mathcal{P}_\rho(s) ds = 2\pi\rho,\end{aligned}$$

bulunur ve (3.10) denklemindeki ikinci integralin sınırlılığı açıktır. Ayrıca,

$$|\sin(\varphi - \varphi_0)| \int_0^{2\pi} |\mathcal{P}'_\rho(s)| ds = 2|\sin(\varphi - \varphi_0)| \times$$



**Şekil 3.1** Birim çemberde Poisson çekirdeği ve açısal özellikler

$$\begin{aligned}
 & \times \int_0^\pi |\mathcal{P}'_\rho(s)| ds = -2 |\sin(\varphi - \varphi_0)| \int_0^\pi \mathcal{P}'_\rho(s) ds = \\
 & = -2 |\sin(\varphi - \varphi_0)| [\mathcal{P}_\rho(\pi) - \mathcal{P}_\rho(0)] = \\
 & = -2 |\sin(\varphi - \varphi_0)| \left[ \frac{1 - \rho}{1 + \rho} - \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right] = \\
 & = \frac{8\rho |\sin(\varphi - \varphi_0)|}{1 - \rho^2} \leq 8 \frac{|\sin(\varphi - \varphi_0)|}{1 - \rho}
 \end{aligned}$$

elde edilir. (c) Sınırlılık özelliğini ispatlamak için, son teoremin sınırlılığını ispatlamak yeterlidir.  $\varphi_0$  noktasındaki  $\rho = \rho(\alpha)$ ,  $\varphi(\alpha) = \varphi$  teğet olmayan yaklaşımı kullanacağız. Bu koşul, yolun  $A = e^{i\varphi_0}$  noktasındaki bir köşe ile bir açının tamamen içinde yer aldığını ve açının hiçbir kenarının  $A$  noktasında çemberle teğet olmadığını ifade eder.  $\triangle BAC$  üçgeninde (Şekil 3.1.1) sinüs teoremi ile şu ilişkiyi elde ederiz:

$$\frac{BC}{\sin \delta} = \frac{BA}{\sin \omega}$$

buradan  $BC = 1 - \rho$ ,

$BA^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - \varphi_0)$  olduğu anlamına gelir.  $\alpha \rightarrow 1$  iken  $\delta \geq \delta_0 > 0$  olduğundan

$$1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - \varphi_0) \leq M(1 - \rho)^2, \quad \text{burada } M = \text{const.}$$

bulunur.  $1 - \rho = \varepsilon$  bağıntısını aldığımızda

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right),$$

elde edilir. Buradan çekirdek için aşağıdaki yaklaşım bulunur :

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2},$$

olduğunu göz önünde bulundurarak, kolaylıkla aşağıdaki ifade elde edilir:

$$1 + 4(1 - \varepsilon) \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{\varepsilon^2} \leq M,$$

Böylece  $\alpha \rightarrow 1$  iken  $|\sin(\varphi - \varphi_0)|/1 - \rho$  sınır koşulu için geçerli olacaktır. Teorem aşağıdaki yaklaşım kullanılarak ispatlanacaktır. Fonksiyonu  $\nu(s) = \frac{\mu(s)}{\sin(s-\varphi_0)} - \mu'(\varphi_0)$  olarak tanımlayalım. O zaman

$$u(\rho(\alpha), \varphi(\alpha)) + J(\alpha; \varphi_0) \varphi'(\varphi_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(s) K_\alpha(s, \varphi_0) ds. \quad (3.11)$$

Aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\left| \int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} \nu(s) K_\alpha(s; \varphi_0) ds \right| \leq \max_{|s - \varphi_0| \leq \delta} |\nu(s)| \int_0^{2\pi} |K_\alpha(s; \varphi_0)| ds,$$

bu da  $\nu(s)$  fonksiyonunun  $s = \varphi_0$  noktasındaki dejenere olmadığını ifade eder. Bu,  $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta$  bölgesinde (3.11) integralinin,  $\delta$  sıfıra giderken,  $\alpha \rightarrow 1$  olduğunda düzgün bir çekirdek ile sınırlanabileceği gerçeğinden kaynaklanmaktadır. (3.11) denklemindeki integralin değeri  $\alpha \rightarrow 1$  olduğunda 0'a yaklaşır bu da (3.9) denklemindeki süreklilik ile tutarlıdır ve ayrıca (3.7) denkleminde düzgün bir süreklilik tahmini sağlar.[21] ■

**Sonuç 3.1.** (3.6) Poisson-Stieltjes integrali,  $\text{int}\mathbb{T}$  üzerindeki hemen her yerde  $u(1, s)$  için sonlu limit değerlerine sahiptir ve bu değerler, rastgele herhangi bir teğet olmayan yolda türev  $\mu'(s)$  ile çakışır. Bu limit değerleri hemen her yerde sonludur ve hatta  $(0, 2\pi]$  aralığında entegre edilebilir bir fonksiyon  $u(1, s)$  oluşturur. (3.2) Poisson-Lebesgue integralini ele alalım. Bilindiği gibi, bu durumda  $d\mu(s) = f(s)ds$ ,  $\mu(s) = \int_0^s f(\sigma)d\sigma$  ve  $\mu'(s)$  fonksiyonu hemen hemen her yerde vardır ve hemen hemen her yerde  $f(s)$  fonksiyonuna eşittir. Özellikle, bu durum  $f(s)$  fonksiyonunun sürekli olduğu her noktada geçerlidir.

Buna göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.2.** Lebesgue integrallenebilir herhangi bir  $f(s)$  fonksiyonu için, (3.2) Poisson-Lebesgue integrali, h.h.y.  $\mathbb{T}$  çemberi üzerinde verilen hemen hemen her yerde  $u(1, \varphi)$  teğet olmayan sınır değerlerine sahiptir ve h.h.y  $f(\varphi)$  ile çakışır. Özellikle,  $u(1, \varphi)$  limiti vardır.  $f(s)$  fonksiyonunun  $s = \varphi$  her süreklilik noktasında  $f(\varphi)$  değerine eşittir.

## 3.2 Harmonik Fonksiyonlar Uzayı ve Plesner Teoremi

Bu çalışmada, birim diskteki harmonik fonksiyonların  $h_p$  uzaylarındaki sınır davranışları, Plesner teoremi incelenmektedir.

### 3.2.1 $h_p$ uzayı

$u(\rho, \varphi)$ ,  $int\mathbb{T}$  birim çemberin içinde düzgün ve harmonik fonksiyon olsun

$$I_p(u) = \overline{\lim}_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \|u(\rho; \cdot)\|_{L_p} < +\infty$$

ve koşulunu sağlasın. Tüm bu fonksiyonların kümesini  $h_p$  ile göstereyim.  $1 < p < +\infty$  için,  $h_p \hookrightarrow h_1$  bir sürekli gömmesinin olduğu açıktır. Bu durumda, aşağıdaki klasik teorem geçerlidir.

**Teorem 3.2** (Plesner Teoremi). *Birim diskin içinde  $u(\rho, \varphi)$ ,  $\rho < 1$ , harmonik fonksiyonu  $h_1$  sınıfına aittir, ancak ve ancak  $\rho < 1$  için bir Poisson-Stieltjes integrali olarak ifade edilebilir.*

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_\rho(s - \varphi) d\mu(s), \quad (\mathcal{P}) \quad (3.1)$$

Burada  $\mu(s)$  fonksiyonu  $(0, 2\pi]$  aralığında sınırlı varyasyona sahiptir.  $u(\rho, \varphi)$  harmonik fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul, artmayan bir  $\mu(s)$  fonksiyonu ile Poisson-Stieltjes integrali olarak ifade edilebilmesidir.

**Sonuç 3.3.** *Bir  $u(\rho, \varphi)$  harmonik fonksiyonu,  $h_1$  sınıfına aittir, ancak ve ancak iki negatif olmayan harmonik fonksiyonun farkı olarak ifade edilebilir. Aslında,  $u \in h_1$  ise, bu fonksiyon  $(\mathcal{P})$  Poisson integrali biçiminde ifade edilebilir ve  $\mu = \mu_1 - \mu_2$  alınabilir yeterlidir; burada  $\mu_k$  negatif olmayan ve artmayan fonksiyonlardır.*

Tersine durum ise Plesner Teoremi 3.2.1'den çıkarılmaktadır.

**Sonuç 3.4.** *Keyfi bir  $u \in h_p$  fonksiyonu,  $(p \in [1, +\infty])$   $[0, 2\pi]$  üzerinde h.h.y. sıfırdan farklı sınır değerlerine sahiptir. Bu değerler  $[0, 2\pi]$  üzerinde toplanabilir bir fonksiyon oluşturur ve bu nedenle h.h.y sonlu bir fonksiyondur. Aslında,  $u(1; \varphi_0) = \mu'(\varphi_0)$  h.h.y eşittir ve sınırlı varyasyona sahip fonksiyonun türevi vardır ve toplanabilir. Poisson–Lebesgue integrali, Poisson–Stieltjes integrali biçiminde ifade edilebileceği tamamen açıktır. Şimdi, Poisson-Stieltjes integrali biçiminde ifade edilebilen ancak Poisson-Lebesgue integrali biçiminde ifade edilemeyen bir fonksiyon örneği verelim.*

$$u(\rho, \varphi) = \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho \cos \varphi} = \mathcal{P}_\rho(\varphi), \quad z = \rho e^{i\varphi}$$

kabul edelim. Bu,  $\rho < 1$  için negatif olmayan bir harmonik fonksiyondur ve,  $|z| = 1$  çemberindeki tüm noktalarda sıfıra eşittir, bununla birlikte ancak  $z = 1$  noktasında,  $z \rightarrow 1$  (teğet olmayan) bir yaklaşırken  $(+\infty)$  'ye gider. Plesner Teoremi'ne göre, bu fonksiyon Poisson-Stieltjes integrali ile ifade edilebilir. Eğer aynı zamanda Poisson-Lebesgue integrali ile de ifade edilebilseydi, bu son integralin  $f(s)$  fonksiyonu h.h.y. (Sonuç 3.1) 'e dayanarak, sıfıra eşit olurdu ve dolayısıyla  $u(\rho; \varphi) = 0$  olurdu ki bu mümkün değildir.  $h_p$  sınıflarında, aşağıdaki önemli teorem geçerlidir.

**Teorem 3.3.** *Bir  $u$  fonksiyonu,  $h_p, p > 1$  olmak üzere  $h_p$  sınıfına aittir, ancak ve ancak  $f \in L_p$  olmak üzere*

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \mathcal{P}_\rho(s - \varphi) ds \quad (\mathcal{P} - L) \quad (3.2)$$

*Poisson-Lebesgue integrali ile ifade edilebilir.*

Dirichlet Problemini tanımlayalım.

**Tanım 3.1.** (Dirichlet Problemi) : Dirichlet problemi, birim çemberde h.h.y. verilen bir  $f \in L_p(0, 2\pi)$  fonksiyonu, sınır değerlerini sağlayan bir  $u \in h_p$  fonksiyonu bulma problemidir. Özellikle,  $z = \rho e^{i\varphi} \mathcal{K} e^{i\varphi_0}$  noktası için,  $u$  çözümü  $[0, 2\pi]$  aralığındaki neredeyse her  $\varphi_0$  değeri için herhangi bir teğet olmayan yol boyunca koşulu sağlar.

**Teorem 3.4.** *Dirichlet probleminin bir çözümü vardır, tektir ve  $p > 1$  durumunda Poisson-Lebesgue integrali  $(\mathcal{P} - L)$  şeklinde ifade edilebilir.*

Bu teoride aşağıdaki Riesz teoremi önemli bir rol oynamaktadır.

**Teorem 3.5** (F. Riesz).  *$u(\rho, \varphi)$  ve  $\vartheta(\rho, \varphi)$  eşlenik harmonik fonksiyonların her ikisi de  $h_p$  sınıfına ( $p > 1$ ) aittir ya da ait değildir. Ayrıca  $p$  'ye bağlı bir  $A_p > 0$  sabiti vardır. Öyle ki :*

$$\left( \int_0^{2\pi} |\vartheta(\rho, \varphi)|^p d\varphi \right)^{1/p} \leq A_p \left( \int_0^{2\pi} |u(\rho, \varphi)|^p d\varphi \right)^{1/p}, \quad p > 1.$$

**Tanım 3.2.** (Hardy Sınıfları) :  $int\mathbb{T}$  içinde

$$\mathcal{M}_p(\Phi) \equiv \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{i\sigma})|^p d\sigma < +\infty, \quad p > 0$$

koşulunu sağlayan  $\Phi(z)$  analitik fonksiyonlar sınıfını ele alalım. Bu fonksiyon sınıfını  $H_p^+$  ile göstereceğiz.  $u(\rho, \sigma) = \text{Re}\Phi(\rho e^{i\sigma})$  ve  $\vartheta(\rho, \sigma) = \text{Im}\Phi(\rho e^{i\sigma})$ ,

harmonik fonksiyonları  $h_p$  sınıfına dahildir ancak ve ancak  $\Phi \in H_p^+$  olmasıdır.  $\Phi$  fonksiyonunun özellikleri önceki sonuçlardan elde edilir. Özellikle, h.h.y.  $\sigma_0 \in (0, 2\pi]$ ,  $\Phi^+(e^{i\sigma_0}) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \Phi(\rho e^{i\sigma}) \rho e^{i\sigma}$  sonlu noktasının  $e^{i\sigma}$  'ya teğet olmayan yaklaşımı için sonlu ve sınır değerleri vardır ve  $\Phi^+(e^{i\sigma})$  değerler  $L_p(0, 2\pi)$  uzayına aittir. Plesner teoreminden,  $\Phi$  fonksiyonunun  $H_1^+$  sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul Poisson-Stieltjes integrali

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_\rho(\sigma - s) d\mu(s), \quad z = \rho e^{i\sigma},$$

edilmesidir. Burada genellikle  $\mu$ -karmaşık değerli sınırlı varyasyona sahip bir fonksiyondur. Dikkat edilir ki,  $H_1^+$  sınıfındaki  $\Phi$  fonksiyonu ve  $h_1$  sınıfındaki harmonik fonksiyonlardan farklı olarak, yalnızca Poisson-Stieltjes ifadesi ile değil, aynı zamanda Poisson-Lebesgue integrali olarak da ifade edilebilir

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^+(e^{is}) \mathcal{P}_\rho(\sigma - s) ds, \quad z = \rho e^{i\sigma}.$$

Hardy uzayları teorisinde, Blaschke çarpım kavramı önemli bir rol oynar. Bu nedenle, bu kavramla ilgili bazı temel bilgileri verelim.

**Önerme 3.1.** Birim disk  $|z| < 1$  içinde  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  noktalar dizisi verilsin. Bu noktalar,  $n$  arttıkça modüllerinin artmayan sırada sıralandığı bir şekilde indislenmiştir ( $|\xi_n| \leq |\xi_{n+1}|$ ). Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\xi_n|) < +\infty, \quad |\xi_n| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.12)$$

koşul sağlanır ise birim disk  $|z| < 1$  içinde,  $|b(z)| \leq 1$  olacak şekilde ve  $\{\xi_n\}$  sıfırları ile çakışan bir fonksiyon  $b(z)$  analitik fonksiyonu vardır.

$b(z)$  fonksiyonu :

$$b(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \frac{\xi_n - z}{1 - \overline{\xi_n} z} \cdot \frac{|\xi_n|}{\xi_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n - z}{1 - \overline{\xi_n} z} \cdot \frac{|\xi_n|}{\xi_n}, \quad (3.13)$$

biçiminde tanımlanır ve Blaschke çarpımı olarak adlandırılır.

$H_p^+$  sınıfındaki fonksiyonlar için aşağıdaki sonuçlar vardır.

**Önerme 3.2.**  $\Phi \in H_p, p > 0$  olsun ve  $\Phi$  fonksiyonunun sıfırlarını,  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi olarak yazalım. Burada fonksiyonun her bir sıfırı katlılık sayısı kadar tekrarlanmıştır. Bu, eşitsizlik (3.12) ile sağlamaktadır.

**Önerme 3.3.** Birim disk üzerinde h.h.y  $z = 1$  çemberinin üzerinde modülü 1 'e eşit olan Blaschke çarpımı (3.13) sonlu ve teğet olmayan sınır değerleri  $b^+(e^{is})$  'ya sahiptir.

Şimdi, F. Riesz teoremini kanıtlayalım.

**Teorem 3.6.**  $H_p^+$  sınıfında yer alan ve  $p > 0$ , sıfırdan farklı her  $\Phi(z) \neq 0$ , fonksiyonu

$$\Phi(z) = b(z)\Phi(z), \quad |z| < 1, \quad (3.14)$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $b(z)$ ,  $int\mathbb{T}$  diskinde tanımlı ve  $|b(z)| \leq 1$  koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. Ayrıca,  $\Phi_0 \in H_p$ ,  $|z| < 1$  için sıfır noktasına sahip değildir. Bununla birlikte,  $\mu_p(r; \Phi_0) \leq M_p(\Phi)$  koşulu sağlanır. Burada

$$\mu_p(r; \Phi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_0(re^{i\varphi})|^p d\varphi, \quad M_p(\Phi) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \mu_p(r; \Phi).$$

*İspat.* Eğer  $\Phi$ ,  $int\mathbb{T}$  birim diskin üzerinde sonlu sayıda sıfıra sahip ise o zaman  $b(\cdot)$  fonksiyonu

$$b(z) = b_m(z) = \prod_{n=1}^m \frac{\xi_n - z}{1 - \overline{\xi_n}z} \cdot \frac{|\xi_n|}{\xi_n},$$

karşılık gelen Blackhe çarpanlarının çarpımı olarak ifade edilir. Burada  $\Phi(\xi_n) = 0$  ve  $n = \overline{1, m}$  sayılardır.  $\Phi_0 \in H_p^+$  olması gerçeği  $b_m(z)$  fonksiyonunun h.h.y.  $|z| = 1$  üzerinde 1 modülüne sahip olması özelliğinden kaynaklanır. Teoremin son ifadesi,  $\forall \Phi \in H_p$  için  $\mu_p(r; \Phi)$  fonksiyonunun monotonluğunun bir sonucudur.  $\Phi(z)$ ,  $int\mathbb{T}$  'den sonsuz sayıda sıfıra sahip olsun. Bu durumda, Önerme(3.2) ve Önerme (3.3) 'den  $\Phi(z)$  fonksiyonuna karşılık gelen bir  $b(z)$  Blaschke çarpımı vardır. Böylece  $\Phi_0(z) = \frac{\Phi(z)}{b(z)}$  fonksiyonu  $int\mathbb{T}$  'de sıfır noktası yoktur.  $m \rightarrow \infty$  'a iken  $\mu_p(r; \frac{\Phi}{b_m}) \leq M_p(\Phi)$ , eşitsizliğinden teorem ispat edilmiş olur. Burada  $\frac{\Phi(z)}{b_m(z)} \rightarrow \Phi_0(z)$  elde edilir. ■

Aşağıdaki temel teorem F. Riesz'e aittir.

**Teorem 3.7** (F. Riesz'in teoremi).  $\forall \Phi \in H_p^+$   $p > 0$  için,  $\Phi^+(e^{is})$  fonksiyonunun hemen hemen her yerde teğet olmayan sınır değerlerine sahiptir.

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{is})|^p ds = \int_0^{2\pi} |\Phi^+(e^{is})|^p ds, \quad (3.15)$$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{is}) - \Phi^+(re^{is})|^p ds = 0. \quad (3.16)$$

**Teorem 3.8** (Riesz gösterimi).  $\Phi(z) \in H_1^+$  fonksiyonu için, aşağıdaki sınır integraline ilişkin teorem vardır :

$$\int_0^{2\pi} \Phi(e^{is}) ds = 0$$

Bu tür fonksiyonlar için, teorem sınır koşulları teğet olmayan değerler için tanımlandığında geçerlidir.

**Teorem 3.9** (F. Riesz-G. Fichtenholz).  $\Phi$  fonksiyonunun  $H_1^+$  sınıfında tanımlanmış olsun, dejenere olmayan ve yatay olmayan bir fonksiyon olsun ve bu fonksiyon sınır integralinde aşağıdaki koşulları sağlamalıdır. ( $z = \rho e^{i\sigma}$ ):

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_\rho(\sigma - s) d\mu(s),$$

Poisson-Lebesgue integral olarak;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^+(e^{is}) \mathcal{P}_\rho(\sigma - s) ds,$$

Cauchy-Lebesgue integral olarak ;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^+(e^{is}) \frac{e^{is} ds}{e^{is} - z},$$

Cauchy-Stieltjes integrali olarak ;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{is} d\mu(s)}{e^{is} - z}.$$

Bu teoremlerin gelişimi, özellikle E.E. Pivovara'nın çalışmalarında bulunmaktadır [22].

### 3.2.2 Smirnov Teoremi

Analitik fonksiyonlar teorisinde sınır değer problemlerinin incelenmesinde aşağıdaki temel teorem önemli bir rol oynar.

**Teorem 3.10** (Teorem (V.İ. Smirnov)).  $\Phi \in H_p^+$ ,  $p > 0$  olsun. Eğer  $(0, 2\pi]$  aralığında h.h.y.  $|\Phi^+(e^{is})| \leq M$  ( $M$  bir sabittir) eşitsizliği sağlanıyorsa  $|\Phi(z)| \leq M$   $\forall z \in \text{int}\mathbb{T}$  için geçerlidir. Ayrıca, eğer  $\Phi^+ \in L_q(0, 2\pi)$  ve  $q > p$  ise,  $\Phi \in H_q^+$  olur.

**Teorem 3.11** (A. Zygmund). Fonksiyon  $f(s)$ ,  $(0, 2\pi]$  aralığında reel değerli sınırlı bir fonksiyon ve  $m = \sup_{[0, 2\pi]} \text{vrai} f(s) < +\infty$  olsun.  $\exp\{\pm \lambda S f\}$  ve  $\exp\{|\lambda S f|\}$

$|\lambda| < \frac{\pi}{2m}$  olacak şekilde tüm  $\lambda$  değerleri için iyi tanımlıdır. Eğer  $f(s)$  sürekli ve  $2\pi$ -periyodik bir fonksiyon ise, bu fonksiyonlar herhangi reel  $\lambda$  değer için iyi integrallenebilir.

**Teorem 3.12** (Smirnov). *Cauchy-Stieltjes integral*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\psi(\tau)}{\tau - z}, \quad |z| < 1,$$

$\forall \delta \in (0, 1)$  için  $H_{\delta}^{+}$  sınıfına ait bir fonksiyondur. Burada  $\psi(e^{i\theta})$  fonksiyonu  $(-\pi, \pi]$  aralığında eğri ya da kapalı yoldur.



## AĞIRLIKLIL SİMETRİK UZAYLARDA SİNGÜLER OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

### 4.1 Ağırlıklı Banach Fonksiyonu

$\Gamma \subset \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}$  üzerinde bir Jordan eğrisi olsun (yani birim çember homeomorf bir eğri)  $\Gamma$ 'nin yönlendirilmiş olduğunu ve yay uzunluğu ile oluşturulan  $|d\tau|$  lineer Lebesgue ölçüsü ile tanımlandığını varsayalım.  $\mu$  üzerinde pozitif yön saat yönünün tersidir. Ölçülebilir bir  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonununna uygulanan singüler Cauchy operatörü, aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$(Sf)(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t,r)} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

burada

$$\Gamma(t; r) = \{\tau \in \Gamma : |\tau - t| < r\}, \quad r > 0.$$

$f \in L_1(\Gamma)$  ise,  $(Sf)(t)$   $\Gamma$  üzerinde h.h.y. vardır. (bkz. [23] [Teorem 2.22]). Ölçülebilir bir  $\omega : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$  fonksiyonu ağırlık (veya ağırlık fonksiyonu) adını alır.  $|\omega^{-1}\{0, \infty\}| = 0$  (burada  $|\cdot|$  Lebesgue ölçüsü) ise Ağırlıklı Lebesgue uzayı  $L_\omega^p(\Gamma)$ :

$$\|f\|_{L_\omega^p(\Gamma)} = \left( \int_\Gamma |f(\tau)|^p \omega^p(\tau) |d\tau| \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty$$

şeklindeki norm ile tanımlanır.  $S$  bir singüler operatörü  $L_\omega^p(\Gamma)$   $1 < p < \infty$  üzerinde sınırlıdır ; yani  $S \in \mathcal{L}(L_\omega^p(\Gamma)) \iff \omega$  Mucenhoutp ağırlığıdır ( $\omega \in A_p(\Gamma)$ ). Dolayısıyla

$$\sup_{t \in \Gamma} \sup_{r > 0} \left[ \left( \frac{1}{r} \int_{\Gamma(t,r)} \omega^p(\tau) |d\tau| \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{1}{r} \int_{\Gamma(t,r)} \omega^{-p'}(\tau) |d\tau| \right)^{\frac{1}{p'}} \right] < \infty,$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Bu konu hakkında daha fazla bilgi için [24] bakılabilir. Carleson sınıfının tanımından eğer  $\omega \in A_p(\Gamma)$  ise  $\Gamma$  eğrisi Carleson eğrisidir. (ya da

Ahlfors-David anlamında düzenli eğrisi). Yani :

$$C_\Gamma = \sup_{t \in \Gamma} \sup_{r > 0} \frac{|\Gamma(t; r)|}{r} < \infty,$$

$C_\Gamma$  sabit Carleson sabiti olarak adlandırılır. Eğer  $X(\Gamma)$ ,  $\Gamma$  üzerinde bir Banach uzayı ise, o zaman ağırlıklı Banach uzayı  $X_\omega(\Gamma)$  aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$X_\omega(\Gamma) = \{f \in \mathcal{F}(\Gamma; |d\tau|) : f\omega \in X(\Gamma)\},$$

burada  $\mathcal{F}(\Gamma; |d\tau|)$ ,  $\Gamma$  üzerindeki fonksiyonlar kümesini ve Lebesgue ölçüsünü  $|d\tau|$  ile ifade eder.  $\omega$  ile ağırlıklı uzay göz önüne aldığımızda,  $X_\omega(\Gamma)$ 'nin yapısı  $X(\Gamma)$ 'ye benzer, yani  $X_\omega(\Gamma)$  de bir Banach uzayı olur.  $\Gamma$ 'nın herhangi bir ölçülebilir alt kümesi  $E \subset \Gamma$  için :

$$\|\chi_E\|_X \|\chi_E\|_{X'} = |E|$$

eşitliği sağlanır.  $X$ ,  $\Gamma$  üzerinde Banach fonksiyon uzayı,  $X$  uzayının  $X(\Gamma)$  'ya göre  $X'$  yazalım.  $\rho(\cdot)$  ağırlık fonksiyonu ve  $\omega : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$  negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun.  $\rho_\omega : \mathcal{F}^+(\Gamma; |d\tau|) \rightarrow [0, \infty]$  fonksiyonu ve  $X_\omega :$

$$\rho_\omega(f) = \rho(f\omega), \quad f \in \mathcal{F}^+(\Gamma; |d\tau|); X_\omega = \{f \in \mathcal{F}(\Gamma; |d\tau|) : f\omega \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Lemma 4.1.** *i)  $\rho_\omega$  ağırlığı (P1) – (P5) koşullarını sağlar ve  $X_\omega :$*

$$\|f\|_{X_\omega} = \rho_\omega(|f|) = \rho(|f\omega|) = \|f\omega\|_X;$$

*normu ile bir normlu uzaydır.*

*ii) Eğer  $\omega \in X$  ve  $\omega^{-1} \in X'$  ise  $\rho_\omega$  ölçülebilir bir fonksiyon ve  $X_\omega$  Banach fonksiyon uzayıdır.  $\rho_\omega$ ,  $\Gamma$  üzerinde ölçülebilir ve sonlu bir fonksiyondur. Ayrıca, aşağıdaki sürekli gömmeler geçerlidir:*

$$L_\infty \subset X_\omega \subset L_1$$

*iii) Eğer  $\omega \in X$  ve  $\omega^{-1} \in X'$  ise, o zaman  $X'\omega^{-1}$ ,  $X_\omega$  'ya ilişik uzaydır.*

*İspat.* (i) (P1) – (P5) koşullarından ve  $0 < \omega(\tau) < \infty$  olduğundan  $\Gamma$  üzerinde h.h.y (i) koşulu çıkar.

(ii)  $\omega \in X$  olduğunu varsayalım. Eğer  $\omega\chi_E \leq \omega$  ise, (P2) koşulundan,  $\omega\chi_E \in X$  olduğu sonucu çıkar. Yani  $\rho(\omega\chi_E) < \infty \Rightarrow \chi_E \in X_\omega$ , herhangi bir ölçülebilir küme  $E \subset \Gamma : |E| < +\infty$ . Sonuç olarak,  $\rho_\omega$ , Hölder eşitsizliği uygulanarak (P4) koşulundan çıkar. ( $f \geq 0$ )

$$\int_E f(\tau)|d\tau| = \int_\Gamma (f(\tau)\omega(\tau)\chi_E(\tau)) \frac{\chi_E(\tau)}{\omega(\tau)} |d\tau| \leq$$

$$\rho(f\omega\chi_E)\rho'(\omega^{-1}\chi_E) \leq \rho(f\omega)\rho'(\omega^{-1}\chi_E) = C_E\rho_\omega(f), \quad (4.1)$$

sağlanır. Burada  $C_E = \rho(\omega^{-1}\chi_E) \in (0, +\infty)$ , buradan  $\rho_\omega$ 'nın (P5) özelliğini sağladığı görülür. O halde,  $\rho_\omega$  bir Banach fonksiyon normudur. (P2) özelliğinden ve (4.1) eşitsizliğinden  $X'$  için:

$$\|f\|_{L_1} \leq \|f\|_{X_\omega} \|\omega^{-1}\chi_E\|_{X'} \leq \|\omega^{-1}\|_{X'} \|f\|_{X_\omega}, \quad \forall f \in X_\omega$$

elde edilir. O halde,  $X_\omega \subset L_1$  sürekli bir gömme vardır. Eğer  $f \in L_\infty$  ise:

$$\|f\|_{X_\omega} \leq \| \|f\|_{L_\infty} \|_{X_\omega} = \|f\|_{L_\infty} \|\omega\|_X.$$

O halde  $L_\infty \subset X_\omega$  olduğu sonucuna varılır. (ii) kanıtlanmıştır.

(iii)  $g \in \mathcal{F}^+(\Gamma; d\tau)$  için

$$\begin{aligned} \rho'_\omega(g) &= \sup \left\{ \int_\Gamma f(\tau)g(\tau)d\tau : f \in \mathcal{F}^+(\Gamma; d\tau) \text{ ve } \rho_\omega(f) \leq 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \int_\Gamma (f(\tau)\omega(\tau)) \left( \frac{g(\tau)}{\omega(\tau)} \right) d\tau : f \in \mathcal{F}^+(\Gamma; d\tau) \text{ ve } \rho_\omega(f\omega) \leq 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \int_\Gamma h(\tau) \left( \frac{g(\tau)}{\omega(\tau)} \right) |d\tau| : h \in \mathcal{F}^+(\Gamma; d\tau) \text{ ve } \rho(h) \leq 1 \right\} = \rho'(\omega^{-1}g) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle  $(X_\omega)' = X_{\omega^{-1}}$  sonucunu elde ederiz. ■

**Teorem 4.1.**  $X, \Gamma$  üzerinde bir Banach uzayı  $\omega \in X$  &  $\omega^{-1} \in X'$  olsun.  $X$  mutlak sürekli bir norma sahip  $\iff X_\omega$  mutlak sürekli bir norma sahip.

*İspat.*  $X$  mutlak sürekli norma sahip ve  $f \in X_\omega$  olsun. O zaman  $f_\omega \in X$  olur.  $\{E_n\} \subset \Gamma : E_n \rightarrow \emptyset, n \rightarrow \infty$  mutlak sürekli norma sahip olduğunu varsayalım:

$$\|f\chi_{E_n}\|_{X_\omega} = \|f\omega\chi_{E_n}\|_X \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir. Tersine  $X_\omega$  uzayı m.s.n. olsun. Eğer  $f \in X \Rightarrow f\omega^{-1} \in X_\omega$  olsun

$$\|f\chi_{E_n}\|_X = \|f\omega^{-1}\chi_{E_n}\|_{X_\omega} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

elde ederiz. ■

Lemma (4.1) ve [25] Sonuç 1.2.16 ele alınarak aşağıdaki sonucu elde ederiz .

**Sonuç 4.1.**  $X, \Gamma$  üzerinde bir Banach fonksiyon uzayı olsun ve  $\omega \in X$  ile  $\omega^{-1} \in X^*$  olsun.

- (i)  $(X_\omega)^*$  dual uzay  $(X_\omega^{-1})$  ilişik uzayına izometrik olarak izomorftir .  
 $(X_\omega^{-1} \iff X_\omega)$ .  $X_\omega$ , mutlak sürekli bir norma sahiptir, yani  $X_\omega = (X_\omega)_a$ .  
 Bununla birlikte eğer  $X_\omega = (X_\omega)_a$  ise,  $\vartheta \in (X_\omega)^*$  fonksiyonu:

$$\vartheta(f) = \int_{\Gamma} f(\tau)\overline{g(\tau)}|d\tau|, \quad \forall f \in X_\omega \quad (4.2)$$

integrali ile tanımlanır ve  $g \in X'_{\omega^{-1}}$  vardır. Normu  $\|\vartheta\|_{(X_\omega)^*} = \|g\|_{X'_{\omega^{-1}}}$  biçimindedir.

- (ii)  $X_\omega$  uzayı refleksif, yani  $(X_\omega)^{**} = X_\omega \iff X_\omega$  ve  $X'_{\omega^{-1}}$  ile mutlak sürekli norma sahiptirler .

Lemma (4.1) ve Sonuç (4.1) 'den aşağıdaki sonucu çıkarırız :

**Sonuç 4.2.**  $X, \Gamma$  üzerinde bir B.F.U. ve  $\omega \in X$  ve  $\omega^{-1} \in X'$  olsun. O zaman  
 $X' = (X')_a \iff X'\omega^{-1} = (X'_{\omega^{-1}})_a$ .

Bu sonucu, Sonuç (4.1) çıkararak elde ediyoruz.

**Sonuç 4.3.**  $\Gamma$  eğrisi üzerinde  $X$  bir Banach fonksiyon uzayı ve  $\omega \in X$  ile  $\omega^{-1} \in X'$  olsun. O zaman

$$X = X^{**} \iff X_\omega = (X_\omega)^{**}.$$

$\|d\tau\|$  Lebesgue ölçüsü  $\Gamma$  üzerinde ayrılabilir olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.4.**  $X, \Gamma$  üzerinde bir B.F.U.  $\omega \in X$  ve  $\omega^{-1} \in X'$  olsun. O zaman  
 $X_\omega$  ayrılabilir  $\iff X_\omega = (X_\omega)_a$ .

$\Gamma$  üzerindeki tüm sürekli fonksiyonların kümesi  $C(\Gamma)$  olarak gösterilsin([26] Lemma 1.3).

**Önerme 4.1.**  $X, \Gamma$  üzerinde B.F.U. olsun,  $\omega \in X$  ve  $\omega^{-1} \in X'$ . O zaman

$$X_\omega \text{ ayrılabilir} \iff X_\omega \text{ içinde } C(\Gamma) \text{ yoğundur.}$$

*İspat.* Eğer  $C(\Gamma)$ ,  $X_\omega$  içinde yoğun ise,  $X_\omega$  ayrılabilir olur.  $X_\omega$  'nın ayrılabilir olduğunu ancak  $C(\Gamma)$  'nin  $X_\omega$  içinde yoğun olmadığını kabul edelim. Bu durumda,  $\exists 0 \neq \vartheta \in (X_\omega)^* : \vartheta(f) = 0, \forall f \in C(\Gamma)$ . Sonuç 4.4 ve Önerme 4.1'ten  $\exists h \neq 0 : h \in X'_\omega^{-1}$  ve

$$\vartheta(f) = \int_\Gamma f(\tau)h(\tau)|d\tau| = 0, \forall f \in C(\Gamma).$$

$\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \Gamma$ ,  $\xi \in \mathbb{T}$  için  $|\gamma'(\xi)| = 1$  olacak şekilde bir homeomorfizma olsun. O zaman

$$\int_T F(\xi)\overline{h(\gamma(\xi))}|d\xi| = 0, \forall F \in C(\mathbb{T}), (F(\xi) = f(\gamma(\xi))).$$

Özel olarak

$$\int_T \overline{h(\gamma(\xi))}\xi^n |d\xi| = 0, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

$\{\xi^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$   $L_1(\mathbb{T})$  'de yoğun olduğundan ve  $h(\gamma(\cdot)) \in L_1(\mathbb{T})$  olduğunda (yani  $h \in X'_{\omega^{-1}} \subset L_1(\Gamma)$ ). (4.3)'den, yani  $\Gamma$  üzerinde h.h.y.  $h = 0$  olduğu sonucu çıkar. Bu çelişki,  $C(\Gamma)$ 'nin  $X_\omega$  'da yoğun olduğunu ispatlar. ■

$\mathcal{R}(\Gamma)$ ,  $\Gamma$  nın dışında yer alan tüm rasyonel fonk kümesini gösterebilir.

**Sonuç 4.5.**  $X, B.F.U.$  ve  $\omega \in X, \omega^{-1} \in X'$  olsun. Eğer  $X_\omega$  veya  $X$  refleksif ise  $\mathcal{R}(\Gamma)$ ,  $X_\omega$  ve  $X'_{\omega^{-1}}$  içinde yoğundur.

*İspat.*  $X_\omega^{**} = X_\omega$ . O zaman (3.2) ve Sonuç 4.4'dan,  $X_\omega$  ve  $X'_{\omega^{-1}}$ 'in ayrılabilir olduğu sonucu çıkar. Sonuç 4.1'den,  $C(\Gamma)$ 'nin  $X_\omega$  hem de  $X'_{\omega^{-1}}$  'de yoğun olduğu sonucu çıkar. Margelyan teoreminden  $C(\Gamma)$  'daki her fonksiyonların  $C(\Gamma)$  'te  $\mathcal{R}(\Gamma)$  'den gelen fonksiyonlarla yaklaşık olarak hesaplanabilir.  $\mathcal{R}(\Gamma)$ 'nin hem  $X_\omega$  hem de  $X'_{\omega^{-1}}$  içinde yoğun olduğu sonucu çıkar. ■

## 4.2 $A_X$ Mucenhaupt Sınıfı

$X, \Gamma$  üzerinde B.F.U. ve  $t \in \Gamma$  noktası için,  $\Gamma_r(t) = \{\tau \in \Gamma : |\tau - t| < r\}$  tanımlayalım.  $\omega : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$  ağırlıklı fonksiyon olsun. O halde:

$$B_r(t) = \frac{1}{r} \|\omega \chi_{\Gamma_r(t)}\|_X \|\omega^{-1} \chi_{\Gamma_r(t)}\|_{X'}, \quad r > 0.$$

Aşağıdaki ağırlık fonksiyon sınıflarını göz önünde bulunduralım

$$A_X(\Gamma; t) = \left\{ \omega : \sup_{r>0} B_r(t) < \infty \right\};$$

$$A_X(\Gamma) = \left\{ \omega : \sup_{t \in \Gamma} \sup_{r>0} B_r(t) < \infty \right\}$$

olduğu açıktır.  $\forall t \in \Gamma$  ve  $A_X(\Gamma) \subset A_X(\Gamma; t)$  için eğer  $X$ , Lebesgue uzayı  $L_p(\Gamma)$ ,  $p \in (1, +\infty)$  ise  $A_X(\Gamma)$ , Mucenhaupt sınıfı  $A_p(\Gamma)$  'ye aittir. Eğer  $\omega \in A_X(\Gamma; t)$  ise, o zaman :

$$C_\Gamma(t) = \sup_{r>0} \frac{|\Gamma_r(t)|}{r} < \infty, \quad (4.4)$$

koşulu sağlanır. Eğer (4.3) koşulu bir  $t \in \Gamma$  noktasında sağlanıyorsa,  $\Gamma$  eğrisine  $t$  noktasında Carleson eğrisi ve  $C_\Gamma(t)$  sabitine  $t \in \Gamma$  noktasındaki Carleson sabiti denir. Benzer şekilde, eğer  $\omega \in A_X(\Gamma)$  ise,

$$C_\Gamma = \sup_{t \in \Gamma} C_\Gamma(t) < +\infty.$$

Bu durumda  $\Gamma$ , bir Carleson eğrisidir.  $\Gamma$  üzerindeki ağırlık sınıfı  $W(\Gamma)$  ile gösteririz, yani

$$W(\Gamma) = \{ \omega : \Gamma \rightarrow [0, \infty] : |\omega^{-1}| \{0; \infty\} = 0 \}.$$

**Lemma 4.2.**  $X, \Gamma$  üzerinde B.F.U. ve  $\omega \in W(\Gamma)$  olsun. Eğer  $A = \omega S \omega^{-1} \in [X]$  (yani,  $A$  operatörü  $X$ 'de sınırlı) ise  $\omega \in X$  ve  $\omega^{-1} \in X'$ .

*İspat.*  $\sup_{t \in \Gamma} |t| < +\infty$  olduğundan,  $(Vf)(t) = tf(t)$  çarpım operatörünün  $X$  'te sınırlı olduğu açıktır. O zaman :

$$\begin{aligned} ((AV - VA)f)(t) &= (AV(f))(t) - (VA(f))(t) = \\ &= (A(\tau f(\tau)))(t) - V \left( \frac{\omega(t)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} \right) = \\ &= \frac{\omega(t)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\tau f(\tau)}{\omega(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{t\omega(t)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t\omega(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\tau f(\tau)}{t\omega(\tau)} - \frac{f(t)}{\omega(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau - t} \\
&= \frac{\omega(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} d\tau.
\end{aligned}$$

$(AV - VA) \in [X]$ , olduğundan  $\exists C > 0$  :

$$\left\| \frac{\omega}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} d\tau \right\|_X \leq C \|f\|_X, \quad \forall f \in X. \quad (4.5)$$

O halde

$$\left\| \frac{\omega}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} d\tau \right\|_X = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} d\tau \right| \|\omega\|_X. \quad (4.6)$$

$$C(f_0) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{f_0(\tau)}{\omega(\tau)} d\tau \right| > 0$$

olacak şekilde  $\exists f_0 \in X$  sonucu çıkar. Tersine :

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} d\tau = 0, \quad \forall f \in X.$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda, [27] Lemma 1.1.13  $\omega^{-1} \in X'$ .  $\theta_{\Gamma}(\tau)$  özelliği  $\tau \in \Gamma$  her elemanı için sağlanır.

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\tau) e^{i\theta_{\Gamma}(\tau)}}{\omega(\tau)} |d\tau| = 0, \quad \forall f \in X \quad (4.7)$$

elde ederiz h.h.y.  $\Gamma$  üzerinde  $|e^{i\theta_{\Gamma}(\tau)}| = 1$  olduğundan ve (4.7) 'den:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} |d\tau| = 0, \quad \forall f \in X,$$

sonucu çıkar. O zaman [27] Lemma 1.1.15 'den

$$\|\omega^{-1}\|_{X'} = \sup \left\{ \int_{\Gamma} f\omega^{-1} |d\tau| : f \in X, \|f\|_X \leq 1 \right\} = 0.$$

bulunur. Eğer  $X' \subset L_1(\Gamma)$  ise, o zaman  $\omega^{-1} = 0$  olduğu çıkar ve bu  $\omega \in W(\Gamma)$  olduğunu gösterir. Ayrıca,  $\exists f_0 \in X : C(f_0) > 0$ . Böylece (4.6) ve (4.5) 'den

$$\|\omega\|_X \leq \frac{C}{C_0} \|f_0\|_X \implies \omega \in X$$

sonucu bulunur. (4.5) 'ten

$$\int_{\Gamma} f(\tau) \omega^{-1}(\tau) |d\tau|,$$

integrali  $\forall f \in X$  için, vardır ve  $\omega^{-1} \in X'$  elde edilir. ([28] Lemma 1.1.13) ■

**Teorem 4.2.**  $X, \Gamma$  üzerinde Banach fonksiyon uzayı ve  $\omega \in W(\Gamma)$ .

$A = \omega S \omega^{-1} \in [X]$  ise  $\omega \in A_X(\Gamma)$ .

*İspat.*  $d = \min_{t \in \Gamma} \max_{\tau \in \Gamma} |\tau - t|$  olsun.  $\psi(t) = \max_{\tau \in \Gamma} |\tau - t|$  fonksiyonu,  $\Gamma$  kompakt kümesinde sürekli olduğundan,  $d$  değeri iyi tanımlıdır.  $d > 0$  'dır.  $t \in \Gamma$  bir sabit noktasını alalım ve  $r > \frac{d}{3}$  ve Lemma 4.2 'den  $\omega \in X$  ve  $\omega^{-1} \in X'$  olduğu sonucu çıkar. O halde :

$$B_t^{(1)} = \sup_{r > \frac{d}{3}} \frac{1}{r} \|\omega \chi_{\Gamma_r(t)}\|_X \|\omega^{-1} \chi_{\Gamma_r(t)}\|_{X'} \leq \frac{3}{d} \|\omega\|_X \|\omega^{-1}\|_{X'} = B_1 < +\infty$$

olarak tanımlanır.  $r \in (0, \frac{d}{3}]$  olsun  $x \in \Gamma : |x - t| = 3r$  olsun.

$$g(\tau) = \begin{cases} f(\tau) \frac{|d\tau|}{d\tau} e^{i \arg(t-x)}, & \tau \in \Gamma_r(t), \\ 0, & \tau \in \Gamma \setminus \Gamma_r(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım, burada  $0 \leq f \in X$ .  $z \in \Gamma_r(x)$  içinde :

$$\begin{aligned} (Ag)(z) &= \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma_r(t)} \frac{g(\tau)}{\omega(\tau)|\tau - z|} d\tau = \\ &= \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)|\tau - z|} e^{i\alpha(\tau,z)} |d\tau|, \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada  $\alpha(t, z) = \arg(t - x) - \arg(\tau - z)$ .

$$|r - z| \leq |r - t| + |t - x| + |x - z| \leq |t - x| + 2r < 3r;$$

$$|\sin \alpha(\tau, z)| \leq \frac{r}{\frac{3}{2}r} = \frac{2}{3}; \quad \cos \alpha(\tau, z) \geq \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

bulunur ve  $z \in \Gamma_r(x)$  için, aşağıdaki sonuç elde edilir

$$\begin{aligned} |(Ag)(z)| &\geq \frac{\omega(z)}{2\pi} \int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)|\tau - z|} \cos \alpha(\tau, z) |d\tau| \geq \\ &\geq \frac{\sqrt{5}}{6\pi} \omega(z) \int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)|\tau - z|} |d\tau| \geq \frac{C\omega(z)}{r} \int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} |d\tau|, \end{aligned}$$

burada  $C = \frac{\sqrt{5}}{30\pi}$ . O halde :

$$\|(Ag)\chi_{\Gamma_r(x)}\|_X \geq \frac{C}{r} \int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} |d\tau| \|\omega\chi_{\Gamma_r(x)}\|_X \quad (4.9)$$

sonucu çıkar. Böylece eğer  $A \in B(X)$  ise o zaman (4.8)'den :

$$\|(Ag)\chi_{\Gamma_r(x)}\|_X \leq \|Ag\|_X \leq \|A\|\|g\|_X = \|A\|\|f\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) 'den:

$$\frac{C}{r} \int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} |d\tau| \|\omega\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X \leq \|A\|\|f\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X \quad (4.11)$$

bulunur. Burada  $f = \omega$  alınırsa,

$$\frac{C}{r} \|\Gamma_r(t)\| \|\omega\chi_{\Gamma_r(x)}\|_X \leq \|A\|\|\omega\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X$$

olur.  $r \leq |\Gamma_r(t)|$ , olduğundan :

$$\|\omega\chi_{\Gamma_r(x)}\|_X \leq \frac{\|A\|}{C} \|\omega\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\|\omega\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X \leq \frac{\|A\|}{C} \|\omega\chi_{\Gamma_r(x)}\|_X,$$

(4.10) ve (4.11)'den

$$\|A\|\|f\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X \geq \frac{C}{r} \int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)} |d\tau| \|\omega\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X$$

bulunur. Ek olarak

$$\frac{1}{r} \sup_{f \in Y} \int_{\Gamma} |f(\tau)| \frac{\chi_{\Gamma_r(t)}(\tau)}{\omega(\tau)} |d\tau| \|\omega\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X \leq \left( \frac{\|A\|}{C} \right)^2,$$

çıkar. Burada

$$Y = \{f \in X : \|f\|_X \leq 1\}.$$

O halde,  $\|\cdot\|'_X$  için

$$B_t^{(2)} = \sup_{r \in (0, \frac{d}{3})} \frac{1}{r} \|\omega\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X \|\omega^{-1}\chi_{\Gamma_r(t)}\|_{X'} \leq \left( \frac{\|A\|}{C} \right)^2 = B_2 < \infty$$

eşitsizliği elde edilir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in \Gamma} \sup_{r > 0} \frac{1}{r} \|\omega\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X \|\omega^{-1}\chi_{\Gamma_r(t)}\|_{X'} \leq \\ & \leq \sup_{t \in \Gamma} \max\{B_t^{(1)}; B_t^{(2)}\} \leq \max\{B_1; B_2\} < \infty, \end{aligned}$$

sonucu çıkar. Böylece,  $\omega S\omega^{-1} \in [X] \Rightarrow \omega \in A_X(\Gamma)$ . ■

### 4.3 Cauchy Singüler İntegralinin Sınırlılığı

**Teorem 4.3** (Boyd).  $1 < q < p < \infty$  ve  $(M; \mathcal{M}; \mu)$  bir sonlu ölçüye sahip bir ölçü uzayı olsun. ( $\mu(M) < \infty$ ).  $X$  üzerinde  $(\mathcal{M}; \mu)$  için, eğer  $T \in [L_p(M; \mu)] \cap [L_q(M; \mu)]T \in [X]$  ise  $X$ , uzayının Boyd indisleri :

$$\frac{1}{p} < \alpha_X \leq \beta_X < \frac{1}{q}$$

eşitsizliklerini sağlar. Bu durum ile bağlantılı olarak, altuzayların genişletilmiş durumu için aşağıdaki teorem geçerlidir.

**Teorem 4.4.**  $X$  uzayı  $\Gamma$  üzerinde bir simetrik fonksiyon uzayı ve dejenere olmayan Boyd indislerine sahip olsun, Yani  $(0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1)$ . O zaman,  $S \in [X] \iff \Gamma$  bir kompakt Carleson ölçüsüne sahip, yani  $S, \Gamma$  üzerinde  $X$  uzayı dejenere olmayan bir operatördür.

*İspat.*  $S \in [X]$  olsun. O zaman  $\omega \equiv 1$  alınırsa, Teorem 4.2 'den  $1 \in A_X(\Gamma)$  elde edilir, yani

$$\sup_{t \in \Gamma} \sup_{r > 0} \frac{1}{r} \|\chi_{\Gamma_r(t)}\|_X \|\chi_{\Gamma_r(t)}\|_{X'} < \infty \Rightarrow \sup_t \sup_{r > 0} \frac{|\Gamma_r(t)|}{r} < \infty$$

$\Rightarrow \Gamma$  Carleson eğrisi.

Tersine  $\Gamma$  bir Carleson eğrisidir. David teoremine göre (bkz.[23])  $S \in [L_p(\Gamma)]$ ,  $\forall p \in (1, +\infty)$ , için geçerlidir. Bu nedenle,  $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$  olduğundan Teorem 4.3' den  $S \in [X]$  olduğu sonucu çıkar. ■

(  $BMO$  ve  $VMO$  ) :  $BMO$  sınırlı ortalama salınımı ve  $VMO$  sifıra yakınsayan ortalama salınım anlamındadır. Şimdi bu ifadeleri tanımlayalım:  $f \in L_1(\Gamma)$  olsun.  $t \in \Gamma$  ;  $\delta \in (0, \infty]$  ve  $r \in (0, \infty)$  için

$$\Omega_t(f; r) = \frac{1}{|\Gamma_r(t)|} \int_{\Gamma_r(t)} f(\tau) |d\tau|,$$

$$M_{\delta,t}(f) = \sup_{0 < r < \delta} \frac{1}{|\Gamma_r(t)|} \int_{\Gamma_r(t)} |f(\tau) - \Omega_t(f; r)| |d\tau|.$$

O zaman

$$BMO(\Gamma; t) = \{f : \|f\|_{*,t} = M_{\infty,t}(f) < \infty\}.$$

$$VMO(\Gamma; t) = \left\{ f \in BMO(\Gamma; t) : \lim_{\delta \rightarrow 0} M_{\delta; t}(f) = 0 \right\}.$$

Bu tanımlar kullanılarak  $\Gamma$  üzerindeki  $BMO$  ve  $VMO$  fonksiyonları için genişletilmiş tanımlar

$$BMO(\Gamma) = \{f : \sup_{t \in \Gamma} \|f\|_{*; t} < \infty\};$$

$$VMO(\Gamma) = \{f : \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{t \in \Gamma} M_{\delta; t}(f) = 0\}$$

şeklindedir.

**Önerme 4.2.**  $X, \Gamma$  üzerindeki B.F.U. ve  $\omega \in W(\Gamma)$  olsun. O zaman:

- $\omega \in A_X(\Gamma; t) \ \& \ 1 \in A_X(\Gamma; t) \Rightarrow \ln \omega \in BMO(\Gamma; t);$
- $\omega \in A_X(\Gamma) \ \& \ 1 \in A_X(\Gamma) \Rightarrow \ln \omega \in BMO(\Gamma)$

$X, \Gamma$  üzerinde bir ağırlıklı Banach uzayı ve  $\omega \in W(\Gamma)$  olsun. Aşağıdaki özellikleri göz önüne alalım:

- (B)  $S \in [X_\omega];$
- (R)  $X_\omega^{**} = X_\omega.$

Eğer (B) özelliği sağlanıyorsa, Teorem 4.2 'den  $\omega \in A_X(\Gamma) \implies \omega \in X$  ve  $\omega^{-1} \in X' \implies L_\infty(\Gamma) \subset X_\omega \subset L_1(\Gamma)$ . Ayrıca,  $\Gamma$  bir kompakt sınırdır. Eğer (R) koşulu sağlanıyorsa, o zaman  $X_\omega^* = X'_{\omega^{-1}}$  ve  $\mathcal{R}(\Gamma), X_\omega$  ve  $X'_{\omega^{-1}}$  'de yoğundur. Dolayısıyla, f(B) ve (R) koşulları sağlanırsa aşağıdaki Lemma klasik Lebesgue durumuna benzer şekilde ispatlanabilir.

**Lemma 4.3.**  $S \in [X_\omega]$  ve  $X_\omega^{**} = X_\omega$  olsun. Eğer  $a \in L_\infty(\Gamma)$  ise,  $aI \in [X_\omega]$  ve  $\|aI\|_{[X_\omega]} \leq \|a\|_{L_\infty(\Gamma)}$ .

**Lemma 4.4.**  $X_\omega^{**} = X_\omega$  ve  $S \in [X_\omega]$  olsun. O zaman operatörler

$$P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S),$$

$X_\omega$  ve  $X'_{\omega^{-1}}$  'de sürekli projeksiyonlardır. Yani  $P_\pm^2 = P_\pm$ .

$\mathcal{K}(X_\omega)$  sınıfı,  $[X_\omega]$  içindeki kompakt operatörleri içerir; yani, eğer  $T \in \mathcal{K}(X_\omega) \implies T_1 T \in \mathcal{K}(X_\omega) \ \& \ T T_1 \in \mathcal{K}(X_\omega), \forall T_1 \in [X_\omega]$ .

**Lemma 4.5.** Eğer  $a \in C(\Gamma)$  ise,  $(aS - Sa) \in \mathcal{H}(X_\omega)$ .

**Lemma 4.6.**  $X, \Gamma$  üzerinde bir Banach fonksiyon uzayı ve  $X^{**} = X$  ve  $S \in [X_\omega]$  olsun. O zaman  $S^*$  :

$$S^* = -H_\Gamma S H_\Gamma,$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $H_\Gamma, X^*$  içinde tanımlı bir operatördür ve  $(H_\Gamma \varphi)(t) = \overline{h_\Gamma(t)} \varphi(t)$ ,  $h_\Gamma(t) = e^{i\theta_\Gamma(t)}$  şeklinde olup burada  $\theta_\Gamma(t), t \in \Gamma$  için  $\Gamma$  üzerinde tanımlı bir kanonik formdur.

Bu lemmanın ispatı, için referans (Ör. bkz. [24]) 'de olduğu gibi standart metodlara dayanır.

**Lemma 4.7.**  $X, \Gamma$  üzerinde ayrılabilir bir Banach uzayı olsun. Eğer  $S \in [X] \implies S^2 = \frac{1}{4}I$ .

*İspat.*  $\forall \varphi \in \mathcal{R}(\Gamma), S^2 \varphi = \frac{1}{4} \varphi$  için olduğu bilinmektedir [29]. Sonuç (4.5)'e göre  $\mathcal{R}(\Gamma), X$  'de yoğundur. Genelliğini kaybetmeden  $0 \in D^+$  olsun. Burada  $D^+ = \text{int}\Gamma, D^- = \text{ext}\Gamma$  :

$$L_1^+(\Gamma) = \left\{ f \in L_1(\Gamma) : \int_\Gamma f(\tau) \tau^n d\tau = 0, \forall n \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

$$L_{1;0}^-(\Gamma) = \left\{ f \in L_1(\Gamma) : \int_\Gamma f(\tau) \tau^{-n} d\tau = 0, \forall n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$L_1^-(\Gamma) = L_{1;0}^-(\Gamma) \dot{+} C$$

uzayları tanımlanır.  $X, \Gamma$  üzerinde bir Banach uzayı ise,  $X^{**} = X$  ve  $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$ . O zaman  $P^\pm \in [X]$ . Ayrıca,

$$X^+ = P^+ X; \quad X_0^- = P^- X; \quad X^- = X_0^- \dot{+} C.$$

■

Aşağıdaki lemma geçerlidir:

**Lemma 4.8.**  $X, \Gamma$  üzerinde bir Banach uzayı olsun,  $X^{**} = X$  ve  $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$  koşulu altında aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

i)  $X^+ = L_1^+(\Gamma) \cap X, \quad X_0^- = L_{1;0}^-(\Gamma) \cap X; \quad X^- = L_1^-(\Gamma) \cap X;$

ii) Eğer  $f \in X^\pm$  ve  $g \in (X^\pm)'$   $\implies fg \in L_1^\pm(\Gamma)$ . Ayrıca, eğer  $f \in X^-$  ve  $g \in X$  (ya da eşdeğer olarak,  $f \in X_0^-$  ve  $g \in (X^-)'$ )  $\implies fg \in L_{1;0}^-(\Gamma)$ .

Aşağıdaki lemma fonksiyonların  $X^\pm$  sınıfına ait olup olmadığını belirlemede önemlidir.

**Lemma 4.9.**  $f^\pm$  fonksiyonu  $D^\pm$  'de analitik  $\{t_k : k = \overline{1, m}\} \subset \Gamma$  noktaları hariç ve  $D^\pm \cup \Gamma$  'da sürekli olsun. Ayrıca,  $f^\pm/\Gamma \in X$  ve  $f^\pm$  fonksiyonu aşağıdaki ( $\mu > 0$ ):

$$|f^\pm(z)| \leq M|z - t_k|^{-\mu}, \quad D^\pm \ni z \rightarrow t_k, \quad k = \overline{1, m}$$

koşulları sağlasın (yani,  $z \in D^\pm$  olduğundan  $t_k$  noktalarına yeterince yakın). O zaman  $f^\pm/\Gamma \in X^\pm$ .

Kanıt, (bkz.[30]) 'de tartışıldığı gibi standart yöntemler kullanılarak yapılmıştır.



Bu bölümde,  $\mathbb{T}$  birim çemberi ve  $(0, \pi]$  yarı açık aralığı  $e^{it} : (0, \pi] \leftrightarrow \mathbb{T}$  eşlemesi ile tanımlanacaktır. Bu tanım,  $(0, \pi]$  aralığında tanımlı  $f$  fonksiyonu aracılığı ile  $\mathbb{T}$  üzerinde göz önüne alınacaktır. Eğer  $X$ ,  $(0, \pi]$  aralığında bir Banach fonksiyon uzayı ise, bu tanımlama altında  $\mathbb{T}$  üzerinde bir Banach fonksiyon uzayı olarak  $f(e^{it}) := f(t), t \in (0, \pi)$  kabul edilir ve  $X(\mathbb{T}) \equiv X((0, \pi]) := X$  olarak gösterilir.

### 5.1 $h_X$ Harmonik Fonksiyonlar Sınıfı

**Tanım 5.1.**  $h_p$  sınıfına benzer şekilde,  $X$  normu ile oluşturulan  $int\mathbb{T}$  'de  $h_X$  harmonik fonksiyonlar sınıfı

$$h_X = \left\{ u : \Delta u = 0, \quad int\mathbb{T} \quad \sup_{0 < r < 1} \|u_r(\cdot)\|_X < +\infty \right\},$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $u_r(e^{it}) = u(re^{it})$ . Eğer  $X$ ,  $\mathbb{T}$  üzerinde (ya da eşdeğer olarak  $(-\pi; \pi]$  üzerinde) bir Banach fonksiyon uzayı ise,  $X \subset L_1(\mathbb{T})$  olduğundan  $h_X \subset h_1$  sonucu çıkar. Böylece,  $h_1$  sınıfına ilişkin sonuçlar  $h_X$  için de sağlanır. (örneğin, teğet olmayan sınır değerleri h.h.y. varlığı, Plesner teoremi 3.2.1 vb.)

Teorem 3.2.1 'ün bir benzeri  $h_X$  sınıfları içinde geçerlidir :

**Teorem 5.1.**  $X$ , Boyd indisleri ile  $\mathbb{T}$  üzerinde bir simetrik uzay olsun ve  $h_X$ ,  $int\mathbb{T}$  içinde harmonik fonksiyonlar sınıfına karşılık gelmektedir.  $u$  fonksiyonu,  $h_X$  sınıfına aittir.  $u$  fonksiyonu Poisson-Lebesgue integrali

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \mathcal{P}_\rho(s - \varphi) ds, \quad (P - L)$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $u$  'nun yoğunluğu  $f \in X$ .

*İspat.*  $f \in X$  olsun.  $u \in h_X$  olduğunu göstereceğiz.

$$S' = \{g \in X' : \|g\|_X \leq 1\}$$

tanımlansın.  $((-\pi, \pi]; m)$  Ölçü uzayı, (burada  $m$  - Lebesgue ölçüsü) rezonanslı olduğundan Sonuç 1.6.4[31] 'e göre :

$$\|u_r(\cdot)\|_X = \sup_{g \in S'} \int_{-\pi}^{\pi} |u_r g| d\varphi,$$

eşitliği sağlanır. Burada  $u_r(\varphi) = u(re^{i\varphi})$  olarak tanımlıdır. Sonuç olarak :

$$\begin{aligned} \|u_r(\cdot)\|_X &= \sup_{g \in S'} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(s) f(s - \varphi) g(\varphi) ds \right| d\varphi \leq \\ &= \sup_{g \in S'} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(s) \int_{-\pi}^{\pi} |f(s - \varphi) g(\varphi)| d\varphi ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(s) \|f(s - \cdot)\|_X ds. \end{aligned}$$

$X$  simetrik bir uzay olduğundan,  $\|f(s - \cdot)\|_X = \|f\|_X$ ,  $\forall s \in [-\pi, \pi]$

$$\|u_r\|_X \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(s) \|f\|_X ds = \|f\|_X \implies u \in h_X$$

geçerlidir. Şimdi tersi durumu kanıtlayalım.  $u \in h_X$  olsun.  $p; q : 1 < q < \frac{1}{\beta_X} \leq \frac{1}{\alpha_X} < p < +\infty$  sayılarını seçelim.

$$L_p(T) \subset X \subset L_q \subset (T)$$

sürekli gömmelerden

$$h_p \subset h_X \subset h_q$$

sonucu elde edilir. Sonuç olarak, Teorem 3.3' e göre  $u$  fonksiyonunun yoğunluğu  $f \in L_q(T)$  olan bir Poisson-Lebesgue ( $P - L$ ) integrali şeklinde ifade edilir. Şimdi  $f \in X$  olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki,  $u_{r_n}(\varphi) = u(r_n e^{i\varphi})$  dizisi  $[-\pi, \pi]$  üzerinde  $f(\varphi)$  'ye h.h.y. yakınsasın (böyle bir dizi her zaman vardır). O zaman, Fatou Teorem (3.1) 'e göre aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\|f\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_{r_n}\|_X \leq \sup_{r_n} \|u_{r_n}\|_X \leq \|u\|_{h_X}.$$

■

Benzer şekilde,  $h_p$  durumu için karşılık gelen Dirichlet problemini göz önüne alalım. (Dirichlet problemi) :  $\mathbb{T}$  'de h.h.y.  $u^+ = f$  bağıntısını sağlayan  $u \in h_X$  fonksiyonu bulalım. Burada  $f \in X$  verilen bir fonksiyon ve  $u^+(\cdot)$ ,  $u$  fonksiyonun  $\mathbb{T}$  üzerindeki teğet olmayan sınır değerlerini ifade eder. Teorem 5.1 'den, Dirichlet probleminin çözülebilirliği elde edilir .

**Teorem 5.2** (Teorem D.).  $X$  uzayı,  $\alpha_X, \beta_X \in (0, 1)$  indislerine sahip  $\mathbb{T}$  üzerinde simetrik bir uzay ve  $h_X$ ,  $\text{int } \mathbb{T}$ 'de ilgili harmonik sınıfa karşılık gelen uzay olsun. O halde  $u \in h_X$  ve  $u^+ = f$  elde edilir. Dirichlet Problemi,  $\mathbb{T}$ 'de her  $f \in X$  için tek bir çözüme sahiptir.

## 5.2 $H_x$ Hardy Sınıfları

$X$ ,  $(-\pi, \pi]$  B.F.U. olsun .  $H_X^+$  kümesi,

$$\|F\|_{H_X^+} = \lim_{r \rightarrow 1-0} \|F_r(\cdot)\|_X, \quad F_r(t) = F(re^{it})$$

normu ile  $\mathbb{T}$  içinde analitik olan  $F(\cdot)$  fonksiyonundan oluşan Hardy sınıfını  $H_X^+$  ile göstereceğiz. Ayrıca  $H_X^+$  fonksiyon sınıfı

$$H_{X_b}^+ \equiv \{F \in H_X^+ : F^+ \in X_b\},$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $F(\cdot)$   $\mathbb{T}$  'de  $F$  'nin sınır değerlerini gösterir. Hardy Banach sınıfı fonksiyonlarının  ${}_m H_X^-$ , birim çember dışında analitik olan ve sonsuzda sonlu mertebeye sahip fonksiyonlardan oluşan bir sınıf olarak tanımlayalım.  $\text{int } \mathbb{T}$  içinde karşılık gelen analitik  $f(\cdot)$  fonksiyon, sonsuzdaki bir noktanın komşuluğunda bir Laurent serisine sahiptir :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^m a_n z^n, \quad z \rightarrow \infty, \quad a_m \neq 0.$$

Böylece,  $m > 0$  için,  $z = \infty$  noktası  $m$  mertebeli bir kutup;  $m \leq 0$  için  $z = \infty$  noktası  $(-m)$  mertebeli bir sıfırdır.  $f(\cdot) = f_0(\cdot) + f_1(\cdot)$  olsun, burada  $f_0(\cdot)$  düzenli kısım ve  $f_1(\cdot)$ ,  $z = \infty$  'un komşuluğunda Laurent serisi açılımının esas kısmıdır.

Eğer  $g(z) = \overline{f_0(\frac{1}{z})}$ ,  $|z| < 1$ , fonksiyonu  $\mathcal{H}_X^+$  sınıfına aitse, bu durumda  $f(\cdot)$  fonksiyonunun  ${}_m H_X^-$  sınıfına ait olduğunu söyleriz.  $u, v \in h_1$  ilgili harmonik fonksiyonlar olsun. O zaman, harmonik fonksiyonu için Piersan Teoremine göre çözümleri  $\mu_u$  ve  $\mu_v$  karşılık gelen sınır değerleri

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(s - \varphi) d\mu_u(s)$$

$$\vartheta(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(s - \varphi) d\mu_{\vartheta}(s), \quad 0 \leq r < 1, \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

elde edilir. Böylece

$$w(re^{i\varphi}) = u(re^{i\varphi}) + i\vartheta(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(s - \varphi) d\mu_w(s),$$

$h_1$  uzayından karşılık gelen kompleks değerli harmonik fonksiyonu vardır. Burada  $\mu_w = \mu_u + i\mu_{\vartheta}$ ,  $[-\pi, \pi]$  üzerinde sınır değerlerine sahip kompleks değerli bir fonksiyondur.  $w(\cdot)$ , genel olarak analitik fonksiyon değildir. Analitik olması için  $u(\cdot)$  ve  $\vartheta(\cdot)$  fonksiyonlarının eşlenik harmonik olması gerekir. Böylece  $\forall f \in H_1$  için sürekli sınır değerlerine sahip (bir sabite kadar tekil olan) bir  $\mu(\cdot)$  fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon  $f(\cdot)$  aracılığıyla, Poisson-Stieltjes integrali

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(s - \varphi) d\mu(s), \quad 0 \leq r < 1, \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu durumda, ilgili harmonik fonksiyonun çözümü  $f^+ \in L_1(-\pi, \pi)$  (mutlak, integrallenebilir) olup,  $f(\cdot)$  fonksiyonunun Poisson-Lebesgue :

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(s - \varphi) f^+(s) ds, \quad 0 \leq r < 1, \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Fourier dönüşümü ile çözümü elde edilir. Sonuç olarak, benzer kısıtlamalarla sürekli fonksiyonların uygulanması, referanslarda ( bkz. analizler [32–34]) yer alan sonuçlara göre belirsizliğin ortadan kaldırılmasına yol açmaktadır.

# 6

## SONUÇ

---

Bu tez çalışmasında, standart olmayan Banach uzaylarında tanımlı harmonik fonksiyonların özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu fonksiyonların matematiksel analizine yeni bir bakış açısı sunulmuştur. Çalışma kapsamında, ağırlıklı Banach uzaylarının normlarının tam sürekliliği, Boyd indisleri ve Mucenhaupt sınıfı gibi kavramların harmonik fonksiyonların davranışlarına olan etkileri analiz edilmiştir. Ayrıca, Poisson çekirdeği, Laplace denklemleri ve Plessner teoremleri gibi temel matematiksel araçlar kullanılarak, harmonik fonksiyonların norm davranışları üzerine teorik ve pratik katkılar sağlanmıştır.

Bu araştırma, matematiksel analiz, fonksiyonel analiz ve harmonik analiz alanlarında önemli teorik sonuçlar ortaya koymuş ve bu sonuçların uygulamalı matematikteki çeşitli problemlere uygulanabilirliğini göstermiştir. Özellikle, diferansiyel denklemler, spektral analiz ve sinyal işleme gibi alanlarda bu yapıların daha etkili bir şekilde kullanılabilmesine olanak tanınmıştır. Hardy sınıfları ve Riesz teoremi gibi klasik matematiksel araçların, ağırlıklı Banach uzaylarında harmonik fonksiyonların analizine uygulanması, bu fonksiyonların sınır davranışları ve norm özellikleri hakkında daha derin bir anlayış sağlamıştır. Bu çalışma, matematik alanına önemli katkılar sunmaktadır. İlk olarak, harmonik fonksiyonların norm davranışları üzerine yeni bir yaklaşım geliştirilmiş ve bu yaklaşım, fonksiyonel analizdeki mevcut teorilere önemli bir katkı sağlamıştır. İkinci olarak, Ağırlıklı Banach uzaylarının yapısal özellikleri, Boyd indisleri ve Mucenhaupt sınıfı gibi kavramlar aracılığıyla daha iyi anlaşılmıştır. Üçüncü olarak, Poisson çekirdeği ve Fatou teoremi gibi araçlar kullanılarak, harmonik fonksiyonların sınır değer problemleri üzerine yeni sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, simetrik uzaylarda singüler operatörlerin sınırlılıkları incelenmiş ve bu operatörlerin teorik analizine katkıda bulunulmuştur. Bu tez çalışmasının uygulama alanları oldukça geniştir. Özellikle, diferansiyel denklemlerin çözümü, manyetik alanların modellenmesi, titreşim analizleri ve potansiyel teoride sınır değer problemlerinin çözümü gibi fiziksel sistemlerde temel araçlar olarak kullanılmaktadır. Ayrıca, sinyal işleme

ve görüntü işleme alanlarında, ağırlıklı Hardy uzayları ve Mucenhaupt sınıfı yardımıyla gürültülü sinyallerin filtrelenmesi ve görüntülerin sıkıştırılması gibi uygulamalarda etkili yöntemler geliştirilmesine olanak tanımaktadır. Bunun yanı sıra, makine öğrenimi algoritmalarında özellik çıkarma ve veri indirgeme gibi aşamalarda harmonik analiz yöntemlerinin kullanımı, bu alanda yeni ve daha gelişmiş algoritmaların geliştirilmesine katkı sağlayabilir.

Sonuç olarak, bu tez, standart olmayan Banach uzayları üzerine yeni bir perspektif sunmuş ve harmonik fonksiyonların matematiksel analizi için sağlam bir temel oluşturmuştur. Bu çalışma, yalnızca teorik matematikte değil, aynı zamanda uygulamalı bilimlerde de önemli bir etki yaratabilecek niteliktedir. Gelecekte, bu tezde sunulan teorik bulguların daha karmaşık matematiksel yapılara ve uygulamalı problemlere genişletilmesi, bu alandaki araştırmalara yeni bir ivme kazandıracaktır.

- [1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*. Warsaw: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1932, Translated as \*Theory of Linear Operations\* in 1955.
- [2] V. I. Smirnov, “Sur les fonctions holomorphes et harmoniques,” *Mathematische Annalen*, c. 96, no. 1, ss. 227–262, 1927.
- [3] F. Riesz, “Sur une espèce nouvelle de propriétés analytiques des fonctions,” *Bulletin des Sciences Mathématiques*, c. 62, ss. 1–20, 1938.
- [4] D. W. Boyd, *Indices of Function Spaces and their Relationship to Interpolation*. American Mathematical Society, 1960, Ph.D. Thesis, University of Chicago.
- [5] G. G. Lorentz, *Approximation of Functions*, Second Edition. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 1986.
- [6] N. Dunford, “Banach uzaylarının temel özellikleri ve spektral teorisi üzerine çalışmalar,” 1988.
- [7] D. W. Boyd, “Boyd indeksi ve simetrik uzayların yapısal özellikleri,” 1974.
- [8] B. Muckenhoupt, “Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function,” *Transactions of the American Mathematical Society*, c. 165, ss. 207–226, 1972.
- [9] C. Bennett R. C. Sharpley, *Interpolation of Operators*. Academic Press, Şub. 1988.
- [10] F. Riesz, “Riesz teoremi ve harmonik fonksiyonların sınır değer analizi,” 1928.
- [11] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970.
- [12] J. B. Garnett, *Hardy sınıflarının modern uygulamaları*. 2007.
- [13] A. P. Calderón, “Singular integrals,” *American Journal of Mathematics*, c. 84, ss. 861–872, 1965.
- [14] D. W. Boyd, “Indices of function spaces and their relationship to interpolation,” *Canadian Journal of Mathematics*, c. 21, ss. 1245–1254, 1969.
- [15] B. T. Bilalov, S. R. Sadigova L. G. Softova, “Higher order elliptic equations in weighted Banach spaces,” 2024.
- [16] B. T. Bilalov, S. R. Sadigova L. G. Softova, “Higher order elliptic equations in weighted Banach spaces,” 2024, Received: 6 November 2023 / Accepted: 9 February 2024 / Published online: 15 March 2024.

- [17] B. T. Bilalov, *Hardy-Banach Function Classes and the Method of Boundary Value Problems in Questions of Bases*. Baku: Elm, 2022.
- [18] L. G. Softova, "Some Remarks on Solvability of Dirichlet Problem for Laplace Equation in Non-standard Function Spaces," c. 19, article number 133, 2022, Published: 05 May 2022.
- [19] C. Bennett R. C. Sharpley, "Interpolation of Operators," içinde. Academic Press, 1988, böl. Chapter 1, Teorem 1.7(i) Sayfa 6.
- [20] B. Bilalov, *Reel Analiz Ders Notu*, Erişim tarihi: 10 Mart, 2024.
- [21] B. T. Bilalov, *Hardy-Banach Function Classes and the Method of Boundary Value Problems in Questions of Bases*. Baku: Elm, 2022, Sayfa 23 1.2.22.
- [22] İ. Privâlov, *Analitik Fonksiyonların Sınır Özellikleri*. Moskova-Leningrad: GITTL, 1950, s. 336.
- [23] E. Dynkin, "Methods of the theory of singular integrals (Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory)," *Itogi Nauki i Tekhniki VI NITI, Ser. Sovrem. Probl. Mat.*, c. 15, ss. 197–292, 1987.
- [24] A. Bottcher Y. Karlovich, *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights and Toeplitz Operators* (Progress in Mathematics). Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1997, c. 154.
- [25] B. T. Bilalov, *Hardy-Banach Function Classes and the Method of Boundary Value Problems in Questions of Bases*. Baku: Elm, 2022, Sayfa 20 1.2.16.
- [26] A. Karlovich, "On the essential norm of the Cauchy singular operator in weighted rearrangement-invariant spaces," *Integral Equations and Operator Theory*, c. 38, ss. 28–50, 2000.
- [27] B. T. Bilalov, *Hardy-Banach Function Classes and the Method of Boundary Value Problems in Questions of Bases*. Baku: Elm, 2022, Sayfa 12 1.1.15.
- [28] B. T. Bilalov, *Hardy-Banach Function Classes and the Method of Boundary Value Problems in Questions of Bases*. Baku: Elm, 2022, Sayfa 12 Lemma 1.1.13.
- [29] I. Gohberg N. Krupnik, *One-dimensional linear singular integral equations, Volumes 1 and 2*. Birkhäuser Verlag, 1992, c. 1-2, Russian original: Shtiintsa, Kishinev, 1973.
- [30] A. Karlovich, "On the essential norm of the Cauchy singular operator in weighted rearrangement-invariant spaces," *Integral Equations and Operator Theory*, c. 38, ss. 28–50, 2000.
- [31] B. T. Bilalov, *Hardy-Banach Function Classes and the Method of Boundary Value Problems in Questions of Bases*. Baku: Elm, 2022, Sayfa 41 Sonuç 1.6.4.
- [32] E. Granishin, *Grammatikal'nye osnovy ianžtočnogo fonet'klesisskogo system*. Moskva: GITTL, 1950, s. 336.
- [33] E. Danilevsky, *Negrammaticheskie granicy na pismennom jazyke*. Naoska: Minsk, 1975, s. 336.
- [34] G. Kolesnichenko, *Kompletniya teorii fiziki kemikenskogo predskazaniya*. Naoska: Minsk, 1966, s. 626.

## TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

---

### **Konferans Bildirisi**

1. Eylem YAŞAR, Yonca Sezer, Bilal Bilalov, "Some Properties of Harmonic Functions in Nonstandard Banach Spaces", 9th International Azerbaijan Congress on Life, Engineering, Mathematical, and Applied Sciences, Baku, Azerbaijan, December 20-22, 2024 (Oral Presentation).

