T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KABA GRUPLAR

Gevher YAŞAR

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan İÇEN

OCAK 2025

T.C
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KABA GRUPLAR

YÜKSEK LİSANS

Gevher YAŞAR
(3622361404)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan İÇEN

OCAK 2025

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Kaba Gruplar

Tezi Hazırlayan: Gevher YAŞAR
Yüksek Lisans

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında bilgi ve derin birikimleriyle bana yardımcı olan yol gösteren değerli danışman hocam Prof. Dr. İlhan İÇEN'e bu süreçte yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Abdullah Fatih ÖZCAN'a ve hayatta hep iyi ki dediklerim, eşim Hüseyin'e ve kardeşim Efsun'a teşekkür ederim.

Varlıklarıyla bana nefes veren mutluluk kaynaklarım, Asrın'a ve Çınar'a sevgiyle…

ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum Kaba Gruplar başlıklı bu çalışma; bilimsel araştırma ilkelerine ve etik değerlere sadık kalarak tarafımca hazırlanmıştır. Bu çalışma esnasında bilimsel ve toplumsal ahlaki değerlere uygun şekilde davrandığımı ve yararlandığım kaynakları eksiksiz olarak kaynakçada referans gösterdiğimi onurumla taahhüt ederim.

Gevher YAŞAR

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\boldsymbol{U}$	: Evrensel küme
$\boldsymbol{R}$	: U kümesi üzerinde denklik bağıntısı
$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$	: x elemanının denklik sınıfı
$(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{R})$	: Yaklaşım uzayı
$\underline{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{X})$	: X kümesinin alt yaklaşımı
$\overline{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{X})$	: X kümesinin üst yaklaşımı
$\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{G}$	: A, G kaba grubunun kaba alt grubu
$\boldsymbol{N} \lhd \boldsymbol{G}$	: N, G grubunun kaba normal alt grubu
$\boldsymbol{U}/\boldsymbol{R}$	: Bölüm grubu
$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x})$	: Kümenin kesinlik ölçüsü
$\boldsymbol{Bnd}(\boldsymbol{X})$	: Kümenin sınır bölgesi
$\boldsymbol{Neg}(\boldsymbol{X})$	: Kümenin negatif bölgesi
$\boldsymbol{Pos}(\boldsymbol{X})$	: Kümenin pozitif bölgesi
$\underline{\boldsymbol{Edg}}(\boldsymbol{X})$	: Kümenin iç sınır bölgesi
$\overline{\boldsymbol{Edg}}(\boldsymbol{X})$	: Kümenin dış sınır bölgesi
$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x})$	: Üyelik fonksiyonu
$< \boldsymbol{G}, * >$	: G Kaba grup

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KABA GRUPLAR

Gevher YAŞAR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

46+VIIIsayfa

2025

Danışman: Prof. Dr. İlhan İÇEN

Matematiksel teoriler, yalnızca soyut yapıların anlaşılmasını değil aynı zamanda bu yapıların farklı alanlarda uygulamalarını da mümkün kılmaktadır. Bu çalışmada, kaba kümeler ve kaba gruplar teorisinin temelleri incelenmiş olup bağlantılı olduğu küme teorilerinin matematiksel özellikleri hem teorik hem de uygulamalı bir bakış açısıyla ele alınmıştır.

Dört bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde, kaba kümelerle ilgili literatür çalışmaları özetlenmiş olup küme teorilerinin temel prensipleri ve günlük yaşamla ilişkisi verilmiştir.

İkinci bölümde; diğer bölümlerdeki kavramlara temel oluşturması açısından bazı hatırlatmalar, tanım ve teoremler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde ilk aşamada bilgi tablosu ve oluşturulan temel kümeler hakkında yorumlamalar yapılmıştır. Ardından kaba (rough) küme tanımı, denklik bağıntısı yardımıyla kümenin alt ve üst yaklaşımlarıyla ilgili tanım ve örneklere yer verilmiştir. Bu bölümün sonunda ise kümenin pozitif bölgesi, negatif bölgesi, sınır bölgesi ve kaba kümelerin sınıflandırılması gibi kavramların tanımları verilmiş olup ayrıca kaba kümelerde yaklaşımlı üyelik fonksiyon hesaplamaları ve yorumlamaları da yapılmıştır.

Dördüncü bölümde; kaba grup, kaba alt grup, kaba normal alt grup, kaba kalan sınıf (rough koset) kavramlarının tanım ve matematiksel özetleri teorik bir çerçevede incelenmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kaba Grup, Yaklaşım Uzayı, Alt Yaklaşım, Üst Yaklaşım

ABSTRACT

Master Thesis

ROUGH GROUPS

Gevher YAŞAR

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

46+VIII page

2025

Supervisor: Prof. Dr. İlhan İÇEN

Mathematical theories not only enable the understanding of abstract structures but also make it possible to apply these structures in different fields. In this study, the foundations of rough sets and rough group theory have been examined, and the mathematical properties of these structures have been addressed from both a theoretical and applied perspective.

The first chapter summarizes the literature on rough sets and related theories, presenting the fundamental principles of set theory and its connection to daily life.
The second chapter provides definitions, theorems and foundational reminders to establish a basis for the concepts discussed in subsequent chapters.

The third chapter begins with interpretations of information tables and basic sets, followed by definitions and examples related to the lower and upper approximations of rough sets using equivalence relations. It also introduces concepts such as the positive, negative, and boundary regions of sets, along with proofs of relevant theorems and includes calculations and interpretations of approximate membership functions in rough sets.

The fourth chapter examines the concepts of rough groups, rough subgroups, rough normal subgroups, and rough cosets within a theoretical framework supported by examples.

Keywords: Rough Group, Approximation Space, Lower Approximation, Upper Approximation

1. GİRİŞ

Merak duygusu, insanın doğasında olan keşfetme arzusudur. Kuvvet derecesi farklılık gösterse de hepimizde olan bu duygu, yeni şeyler öğrenmeyi ve evreni tanımayı, onu anlamlandırmayı sağlayan teşvik edici güçtür. Merakının sayesinde insanoğlu, hep bir araştırma içinde olmuş ve bu araştırmalar sonucunda da bilim ve teknoloji filizlenmiştir.

Bilim ve teknolojideki değişim hızlandıkça veri kapasitesi de artmıştır. Kalabalık veri gruplarının artması belirsizliği beraberinde getirmiş ve ortaya çıkan bu belirsizlik, büyüyen veri kümelerinde istenen bilginin bulunmasını ve kullanılmasını da güçleştirmiştir. Verilerin belirsizlik içerdiği durumları tanımlama ve analiz etme noktasında klasik matematik tek başına yeterli olmamıştır çünkü klasik matematik kesin ve belirli durumları sevmiştir.

Küme kavramını ilk kullanan matematikçi Balzano'dur ancak kümelerle ilgili ilk sistemli ve düzenli çalışmayı yapan, küme teorisini ve bugün hala kullandığımız alt kümelerle ilgili kavramları matematiğe kazandıran kişi G. Cantor olarak bilinmektedir.

1874-1875 yılları arasında Contor tarafından klasik küme teorisi tanımlanmıştır [1]. Klasik küme teorisinde; kümenin elemanları belirsizliğe yol açmayacak şekilde ya kümenin elemanıdır ya da kümenin elemanı değildir ancak verilerdeki değişiklikler ve belirsizlikler ya hep ya hiç kuralını bozmuştur. Klasik küme teorisinde küme, elemanları tarafından benzersiz bir şekilde belirlenir. Ancak bilim adamları ve filozoflar kesinliğin aksine belirsiz durumlar üzerine çalışmışlardır. Bu belirsizlikleri açığa kavuşturmak amacıyla bulanık (fuzzy) küme, kaba (rough) küme ve esnek (soft) küme, yakın (near) küme teorileri kullanılmıştır.

1965 yılında Türk asıllı Lütfü Askerzadeh (Zadeh) tarafından kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu bulanık küme teorisi, ortaya koyulmuştur [2]. Bulanık küme teorisinde kesinlik yoktur aksine her elemanın, tanımlanan kümeyi temsil etme derecesi olduğunu söyleyebiliriz. Klasik küme teorisinde; bir elemanın kümenin parçası olması ya da olmaması net bir şekilde belirtilirken bulanık küme teorisinde, çıkarım fonksiyonları yardımıyla her objenin kümeye aitlik derecesi farklılık gösterebilmektedir ve üyelik derecesi [0,1] reel aralığındaki değerleri alabilir.

Örneğin; üniversite giriş sınavı sonucunda yerleştirilen bir öğrenci, klasik küme teorisine göre başarılı yerleştirilmediğinde ise başarısız olarak sınıflandırılabilir. Bulanık küme teorisinde ise kazandığı bölümün niteliği, bireyin sıralaması gibi faktörler göz önüne alındığında %70 başarılı olduğu gibi bir ifade kullanılabilir. Klasik mantık; tamamen , hepsi veya hiçbiri, 0 veya 1 gibi ifadelerin kullanımına uygunken bulanık mantık ise; kısmen, belirli derecede, 0 ile 1 aralığındaki herhangi bir reel değer gibi muğlak ifadelere uygundur. Bulanık kümeler; algoritmaların kullanılarak MR ve mamografi görüntülerinin analiz edilmesi, benzer belge aranması, iş güvenliği ve risk analizi, belirsizlik durumunda yatırım kararlarının verilmesi gibi birçok alanda kullanılmıştır.

1982 yılında Pawlak tarafından belirsizliğe yeni bir yaklaşım olarak kaba küme (rough set) teorisi geliştirilmiştir [3]. Kaba küme teorisi, var olan kümeyle ilgili tam bilgiye sahip olamadığımız durumda denklik bağıntısıyla küme hakkında bilgiye ulaşmamızı sağlar. Bu teori sayesinde küme hakkında, eksik bilgiye rağmen detaylardan arındırılmış bir şekilde kararlar alınabilir. Günlük hayatta muhtemel dediğimiz durumların matematiksel ifadesidir. Bu yöntemde belirsizlik, bir kümenin sınır bölgesiyle açıklanır [3]. Kaba küme teorisinde bir kümenin sınırı ön plana çıkar, eğer kümenin sınırı boş kümeye eşitse bu küme tam (kesin) küme olur ancak sınırı boştan farklıysa bu küme kaba (rough) küme olarak değerlendirilir ve eldeki bilgilerin kümeyi tanımlamak için yeterli olmadığı kanısı ortaya çıkar.

1999 yılında Molodsow tarafından soft (esnek) küme teorisi [4] ortaya koyulmuştur. Teorinin temelinde, evrensel kümenin alt kümelerinin belirlenen parametre kümesi yardımıyla sınıflandırılması vardır. Örneğin herhangi bir kadroya başvuru şartlarını sağlayan kişiler arasından, A1 düzeyde İngilizce konuşabilme ve ileri seviyede bilgisayar kullanabilme kriterlerine göre seçim yapılması esnek kümeye örnek verilebilir. Kısaca esnek kümeyi, evrensel kümenin elemanlarının parametrize edilmiş hali olarak düşünebiliriz. Bulanık küme teorisinde reel aralıkta değerler alabilen üyelik fonksiyonunun yerini esnek kümelerde seçim fonksiyonu almıştır.

2007 yılında Peter tarafından yakın (near) küme teorisi [5] ortaya koyulmuştur. ‘‘Ne kadar yakın’’ adlı şiirden ilham alınarak nesneler arasındaki yakınlık ve benzerliğin algılanması üzerine araştırmalar yapılmıştır. Yakın küme teorisi, bir veri setindeki benzer özelliklere sahip veri noktalarını tanımlamak ve gruplamak için kullanılan bir matematiksel kavramdır. Yakın kümeler arasındaki benzerliği belirlemek için, algılanan nesnelerin ayırt edici özelliklerini gösteren reel değerli çıkarım fonksiyonları kullanılır. Bu fonksiyonlar, kümeler arasındaki benzerlikleri tanımlamak ve veri setinin gruplara ayrılmasını sağlamak için kullanılır. Kısacası bu teorinin temelinde, ayrık kümelerin nesnelerinden elde edilen benzerliklerin kullanılması amacı vardır bu da nesnelerin karşılaştırılmasına ve sınıflandırılmasına imkan sağlamıştır diyebiliriz.

Klasik küme, bulanık küme, esnek küme, kaba küme ve near küme (yakın küme) kavramları, farklı matematiksel alanlarda kullanılır her biri kendi alanında belirli bir amacı yerine getirir. Ancak bu kümeler tamamen bağımsız olarak değil, bazı durumlarda birbiriyle ilişkili veya birbirini tamamlayıcı olarak çalışabilirler. Bu küme teorileri arasındaki farklar ve ilişkiler Çizelge 1.1 ve Çizelge 1.2 yardımıyla farklı açılardan görselleştirilmiştir.

Çizelge 1.1: Küme teorileri arasındaki ilişki ve farklar (1).

Küme Türü	Kümenin Bilinirliği	İlişki
Klasik Küme	Elemanların kümeye dahil ya da hariç olduğu net sınırları içerir.	Diğer kümeler için temel oluşturur.
Bulanık Küme	Elemanların kümeye kısmi olarak dahil olduğu belirsiz sınırlar içerir.	Klasik kümelerin genelleştirilmiş hali olarak görülebilir.
Esnek Küme	Bir elemannın kümeya aitliği belirli koşullara göre esneklik gösterir.	Bulanık kümelerle benzerlik taşıyabilir.
Kaba Küme	Elemanların kümeye dahil olup olmadıkları denklik bağıntısıyla belirlenir.	Klasik küme teorisinin bir genelleştirilmiş halidir
Near Küme	Elemanların kümeye dahil olma durumu mesafeye dayalı olarak tanımlanır.	Klasik kümelerden farklı bir perspektif sunar.

Çizelge 1.2: Küme teorileri arasındaki ilişki ve farklar (2).

Özellik	Klasik Küme	Bulanık Küme	Esnek Küme	Kaba Küme	Near Küme
Üyelik Derecesi	Üyelik derecesi ya 1'dir ya da 0'dır.	Kısmi üyelik (0 ile 1 arasında)	Kurallara bağlı esnek üyelik	Alt ve üst yaklaşımlarla üyelik belirlenir.	Mesafeye dayalı üyelik
Kullanım Alanları	Matematik, istatistik, bilgisayar bilimi	Bulanık mantık, kontrol sistemleri, yapay zeka	Esnek mantık sistemleri, karar verme algoritmaları	Bilgi sistemleri, veri madenciliği, yapay zeka	Topoloji, analiz, metrik uzaylar
Aitlik	Eleman kümeye ya aittir ya da değildir.	Üyelik derecesi elemanın kümeye ne kadar ait olduğunu gösterir.	Bir elemanın aitlik derecesi duruma göre değişebilir.	Bir elemanın kümeye aitliği kesin sınırlara sahip değildir aksine belirsiz sınırları vardır.	Belirli bir mesafede veya yakınlıkta bulunan elemanlar kümeye ait olabilir.

Kaba küme teorisi belirsizliğe yeni bir bakış açısı getirerek;

- Öznitelik seçimi ve filtreleme alanında veri setindeki gereksiz bilgiyi elimine ederek daha anlamlı ve yönetilebilir veri kümeleri oluşturulmasına,
- Piyasa analizi ve finansal tahmin alanında verilerdeki belirsizlikleri ve eksiklikleri ele alarak piyasa trendlerinin analiz edilmesine,
- Finansal risklerin değerlendirilmesi ve yönetilmesine,
- Kalite kontrol ve izleme alanında üretim süreçlerindeki eksikliklerin takibinin yapılmasına,
- Makine ve ekipmanlarda arıza tespiti ve önleyici bakım stratejileri geliştirilmesine,
- Çevresel veri setlerindeki belirsizlikleri yöneterek kirlilik izleme ve kontrol stratejileri geliştirilmesine,
- Veri madenciliğinde büyük veri setlerinden anlamlı bilgiyi çıkararak algoritmaların daha iyi sonuçlar vermesine,
- Yapay zekâ sistemlerinde bilgiye ulaşmayı otomatikleştirmesine,
- Uzman sistemlerde verilerin kullanılarak sorulara yanıt verilmesine,
- Örüntü sistemlerinde eksik olan bölümü tamamlayıp algoritmanın daha dayanıklı olmasına,

- Tıpta tedavi sürecinin desteklenmesinde, görüntü analizinde aynı belirti gösteren hastaların farklı hastalıklar kategorisinde analiz edilmesine imkân sağlamıştır.

Matematikteki bu gelişmeler, birçok değişimin ve kolaylıkların da öncüsü olmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖNERMELER

Tanım 2.1. U ve V kümeleri boş kümeden farklı iki küme olsun, $x \in U$ ve $y \in V$ olmak üzere (x, y) sıralı ikilisine U ile V kümelerinin kartezyen çarpımı ya da dik çarpımı denir.

U ve V'nin kartezyen çarpımı UxV simgesiyle gösterilir.

$$UxV = \{(x, y): x \in U \; ve \; y \in V\}\text{' dir [6].}$$

Tanım 2.2. U ve V boş olmayan iki küme UxV'nin herhangi bir alt kümesine U'dan V'ye bağıntı denir [6].

Tanım 2.3. UxU'dan U'ya bir fonksiyona U'da ikili işlem denir [7].

U'da ikili işlem ve $a, b \in U$ olsun. (a, b)'nin $*$ işlemi altındaki görüntüsü $a * b$ olarak gösterilir ve fonksiyon olma özelliklerinden;

1. U'daki herhangi iki eleman için $a * b$ mutlaka sonuç verir ve sonuç yine U'dadır yani kapalıdır.
2. $a * b$'nin sonucu tektir.

Tanım 2.4. $B \neq \emptyset$ ve B üzerinde en az bir ikili işlem tanımlıysa bu yapıya cebirsel yapı denir ve $(B,*)$ ile gösterilir [7].

Örnek 2.1. Rasyonel sayılar kümesinde toplama işlemini göz önüne alırsak $(Q,\oplus)$ bir cebirsel yapıdır.

Tanım 2.5. $*$ B'de bir ikili işlem olsun.

1. $\forall\, a, b \in B$ için $a * b = b * a$ ise $*$ işlemi değişmelidir.
2. $\forall\, a, b \in B$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ ise $*$ işlemi birleşmelidir [7].

Tanım2.6. A'da bir ikili işlem olsun.

$$\forall\, a \in A \text{ için } a * e = e * a = a$$

olacak şekilde bir $e \in A$ varsa e'ye $*$ işleminin etkisiz (birim) elemanı denir [7].

Önerme 2.1. $*$ A'da ikili işlem olsun. A'da $*$ işleminin etkisiz elemanı varsa tektir [7].

Kanıt.

Kabul edelim ki e ve e^{-1} iki etkisiz eleman olsun. e etkisiz eleman olduğunda, $\forall\, a \in A$ için $a * e = e * a = a$ ve özel olarak $a = e^{-1}$ alınırsa $e^{-1} * e = e * e^{-1} = a$ bulunur. Aynı şekilde e^{-1} bir etkisiz eleman olduğundan $\forall\, a \in A$ için $a * e^{-1} = e^{-1} * a = a$ ve özel olarak $a = e$ alınırsa $e * e^{-1} = e^{-1} * e = e$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e = e^{-1}$ olduğu görülür.

Önerme 2.2. $A \neq \emptyset$ ve $*$ A kümesi üzerinde ikili işlem ve e birim eleman olmak üzere,

$a \in A$'nını tersi varsa tektir [7].

Tanım 2.7. $*$ A'da bir ikili işlem ve $e \in A$ birim elemanı olsun. Bir $a \in A$ için,

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

eşitliğini sağlayan $a^{-1} \in A$ varsa buna a'nın tersi denir [7].

Tanım 2.8. U kümesi üzerinde bir R bağıntısı; yansıma, simetri, geçişme koşullarını sağlaması durumunda bu bağıntıya denklik bağıntısı denir [7].

Tanım 2.9. U kümesi üzerinde R denklik bağıntısı tanımlıysa ve $x \in U$ verilmişse, R bağıntısı altında x elemanı ile ilişkili olan tüm $y \in U$'nun oluşturduğu kümeye x'in denklik sınıfı denir ve denklik sınıfı $R(x)$ ile ya da $[x]_R$ gösterilir.

$$R(x) = [x]_R = \{y \in U: xRy\}$$

olarak ifade edilir.

R, U kümesi üzerinde denklik bağıntısıysa bu bağıntının oluşturduğu denklik sınıfları topluluğuna bölüm kümesi denir ve

$$U/_R = \{[x]_R : x \in U\}$$

şeklinde gösterilir [6].

R, U üzerinde bir denklik bağıntısı olduğundan U 'yu kendi içinde ayrık alt kümelere böler. Tüm denklik sınıflarının kümesine, R tarafından oluşturulan U 'nun bir sınıflandırması da denir.

Tanım 2.10. m sıfırdan farklı bir tamsayı olsun,

$$a, b \in \mathbb{Z} \text{ için } a \equiv b\ (modm) \Rightarrow m/a - b$$

ile tanımlanır ve a ile b $modm$'ye göre denktirler denir [7].

Tanım 2.11. $G \neq \emptyset$ ve $\star$ G'de bir ikili işlem olmak üzere $(G,\star)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bu yapıya grup denir [7].

- $\forall\, a, b \in G$ için $a * b \in G$
- $\forall\, a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$
- $\forall\, a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $e \in G$ vardır.
- $\forall\, a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $\exists\, a^{-1} \in G$ vardır.

Tanım 2.12. $(G,*)$ cebirsel yapısı bir grup ve $\forall\, a, b \in G$ için $a * b = b * a$ oluyorsa bu gruba değişmeli (Abel) grup denir [7].

Tanım 2.13. G bir grup ve $H \neq \emptyset$ ve $H \subset G$ olsun. H, G grubunda tanımlı olan işleme göre grup olma koşullarını sağlıyorsa H'ye G'nin alt grubu denir ve $H < G$ ile gösterilir. Alt grup olma şartlarını sağlayan H'nin G'nin birim elemanını içermesi açıktır. Eğer e, G'nin birim elemanı ise hem G hem de $\{e\}$ her zaman G'nin alt gruplarıdır [7].

Önerme 2.3. G bir grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. H'nin G'nin bir alt grubu olması için şu iki şartın sağlanması gereklidir ve yeterlidir:

- $\forall\, a, b \in H$ için $ab \in H$ (kapalılık özelliği)
- $\forall\, a \in H$ için $\exists\, a^{-1} \in H$ olmasıdır (ters elemanı içermesi) [7].

Önerme 2.4. G grubunun boş olmayan bir alt kümesi H olsun. Eğer $\forall\, a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ $(a^{-1}b \in H)$ oluyorsa H, G'nin alt grubudur [7].

Önerme 2.5. H, G grubunun boş olmayan sonlu bir alt kümesi olup ve H'nin elemanları G'de tanımlı işlem altında kapalılık özelliğini sağlıyorsa H, G'nin bir alt grubu olarak kabul edilir ve $H < G$ şeklinde gösterilebilir [7].

Teorem 2.1. $N < G$ olsun, aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $\forall\, a \in G$ ve $\forall\, x \in N$ için $axa^{-1} \in N$'dir.
2. $\forall\, a \in G$ için $aNa^{-1} \subset N$'dir.
3. $\forall\, a \in G$ için $aNa^{-1} = N$'dir.
4. $\forall\, a \in G$ için $aN = Na$'dır.

Teorem 2.1'in denk koşullarından birini sağlayan N alt gruba G'nin normal alt grubu denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir [7].

Normal alt gruplar, bir grubun başka bir gruba bölünmesi yoluyla bölüm grupları oluşturur ve bu da karmaşık yapıdaki grubun daha basit yapılara dönüşmesini sağlar. Eğer $N \lhd G$ ise G/N bölüm grubu tanımlanabilir. Böylece daha büyük bir grup, daha küçük ve daha yönetilebilir bir yapıya indirgenmiş olur. Bir grubun tüm normal alt gruplarını bulmak grubun tam yapısını anlamak için önemlidir.

Örnek 2.2. $(4\mathbb{Z}, +)$ grubunun $(\mathbb{Z}, +)$'nın normal alt grubu olduğunu gösterelim.

$4\mathbb{Z} \neq \emptyset$ ve $4\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ olduğu kolayca görülür.

$\forall\, x, y \in 4\mathbb{Z}$ için $x = 4k$ ve $y = 4n$ olacak şekilde $k, n \in \mathbb{Z}$ vardır.

$x + (-y) = 4k - 4n = 4(k - n) \in 4\mathbb{Z}$ olur. Buradan $4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ elde edilir.

$(\mathbb{Z}, +)$ değişmeli bir grup olduğundan her alt grubu da değişmelidir.

$\forall\, a \in \mathbb{Z}$ için $a + 4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} + a$ olacağından $4\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$'dir.

Değişme özelliği sağlandığından, teorem 2.1'deki $\forall\, a \in G$ için $aN = Na$ şartı sağlanmış olur buradan $4\mathbb{Z}'$nin normal alt grup olduğunu göstermiş oluruz.

Tanım 2.14. G bir grup ve $H < G$ olsun.

$$a \in G \text{ için } aH = \{ah : h \in H\} \text{ ve } Ha = \{ha : h \in H\}$$

kümelerine sırasıyla sol koset (sol yan küme), sağ koset (sağ yan küme) denir.

Örnek 2.3. $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$(\mathbb{Z}_6, +)$ grubu ve H= $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ alt grubunu ele alalım.

$$\bar{0} + H = \{\bar{0} + \bar{0}, \bar{0} + \bar{2}, \bar{0} + \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

$$\bar{1} + H = \{\bar{1} + \bar{0}, \bar{1} + \bar{2}, \bar{1} + \bar{4}\} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$$

$$\bar{2} + H = \{\bar{2} + \bar{0}, \bar{2} + \bar{2}, \bar{2} + \bar{4}\} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{0}\}$$

$$\bar{3} + H = \{\bar{3} + \bar{0}, \bar{3} + \bar{2}, \bar{3} + \bar{4}\} = \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{1}\}$$

$$\bar{4} + H = \{\bar{4} + \bar{0}, \bar{4} + \bar{2}, \bar{4} + \bar{4}\} = \{\bar{4}, \bar{0}, \bar{2}\}$$

$$\bar{5} + H = \{\bar{5} + \bar{0},, \bar{5} + \bar{2}, \bar{5} + \bar{4}\} = \{\bar{5}, \bar{1}, \bar{3}\}$$

$H < G$ için tüm sol kosetlerin kümesidir.

3. BİLGİ SİSTEMLERİ VE KABA KÜMELER

3.1 Bilgi Tablosu

G. Cantor ile temelleri atılan klasik küme teorisi herkes tarafından kabul gören ve hala matematikçilerin kullandığı bir teoridir ancak belirsizlik durumlarında yetersiz kalmasından dolayı filozoflar, araştırmacılar yeni çalışmalara yönelmiştir bunlardan biri de Pawlak tarafından geliştirilen Kaba küme (rough küme) teorisidir. Rough küme teorisinin temelinde, evrensel küme üzerindeki bir alt küme eldeki veriler ışığında tanımlanamıyorsa küme üzerinde tanımlanan denklik bağıntısı aracılığıyla kümenin alt ve üst yaklaşımlarının bulunması ve bu şekilde alt kümenin karakterize edilmesi vardır.

Bu teoride veriler satır ve sütunlara yerleştirilerek bilgi tablosu oluşturulur. Aşağıda verilen Örnek 3.1.1'de veriler satır ve sütunlara yerleştirilerek bilgi tablosu oluşturulmuştur.

Örnek 3.1.1. Bilgi Tablosu [8].

Çizelge 3.1.1: Bilgi Tablosu.

Hasta	Baş Ağrısı	Kas Ağrısı	Vücut Sıcaklığı	Grip
P_1	Yok	Var	Yüksek	Var
P_2	Var	Yok	Yüksek	Var
P_3	Var	Var	Çok Yüksek	Var
P_4	Yok	Var	Normal	Yok
P_5	Var	Yok	Yüksek	Yok
P_6	Yok	Var	Çok Yüksek	Var

Çizelge 3.1.1'de sütunlara semptomlar, satırlara ise nesneler (hastalar) yerleştirilmiştir. Her bir satır belirli bir hasta hakkında bilgileri içermektedir. Örneğin P_5 hastası;

(Baş ağrısı, var), (Kas ağrısı, yok), (Vücut sıcaklığı, yüksek), (Grip, yok) nitel veri kümeleriyle karakterizedir.

Çizelge 3.1.1'de P_3 ve P_6 hastaları kas ağrısı, vücut sıcaklığı ve grip olma durumuna göre ayırt edilmezdir. P_2 ve P_5 hastaları ise baş ağrısı, kas ağrısı, vücut sıcaklığı semptomlarını aynı şekilde gösterdiği için bu nitelikler yönünden ayırt edilemezdir ve P_2 hastası gripken P_5 hastası grip değildir bundan dolayı grip olma durumu; kas ağrısı, baş ağrısı ve vücut sıcaklığı ile ilişkili değildir. Vücut sıcaklığı baz alındığında $\{P_1, P_2, P_5\}$, $\{P_3, P_6\}$, $\{P_4\}$ temel kümeleri oluşur. Nitelikler değiştirildiğinde farklı temel kümeler ortaya çıkmaktadır.

Burada hastaların, gösterdiği belirtilere göre nasıl sınıflandırılabileceği ve bazı hastaların neden kesin olarak sınıflandırılamayacağı açıklanmaktadır ve özellikle sınırda kalan vakalar üzerinde durulmaktadır.

- P_2 hastası gripken P_5 hastası grip değildir. Ancak P_2 ve P_5 hastaları baş ağrısı, kas ağrısı ve sıcaklık belirtileri açısından ayırt edilemezdir. Bu nedenle grip belirtisi, baş ağrısı ve sıcaklık belirtileri açısından karakterize değildir.
- P_2 ve P_5 hastaları sınırda kalan vakalar olarak tanımlanır ve mevcut bilgilerle doğru şekilde sınıflandırılamazlar.

Kalan hastalar (P_1, P_3, P_6) ise grip olduklarını kesin olarak sınıflandırmamızı sağlayan belirtileri sergilerken,

P_2 ve P_5 hastaları mevcut bilgilerle net bir şekilde grip hastalarının dışında tutulamayacak belirtilere sahiptir, P_4 hastasının ise gösterdiği belirtiler göz önünde tutulursa kesinlikle grip değildir.

- P_1, P_3 ve P_6 kesin olarak grip olan hastalardır.
- P_4 hastası ise kesin olarak grip olmayan hastadır.

Bu durumda gribi olan hastaların; alt yaklaşımı $\{P_1, P_3, P_6\}$, üst yaklaşımı $\{P_1, P_2, P_3, P_5, P_6\}$ve sınır vakalar ise $\{P_2, P_5\}$'dir.

Benzer şekilde gribi olmayan hastaların; alt yaklaşımı $\{P_4\}$, üst yaklaşımı $\{P_2, P_4, P_5\}$, sınır vakaları ise $\{P_2, P_5\}$'dir.

Tanım 3.1.1. Bilgi sistemi, satırlarda kümenin nesnelerini ve sütunlarda ise nesneye ait özellikleri organize eden bir veri tablosudur. U boştan farklı objelerin kümesi, A yine boştan farklı özellikler kümesi olmak üzere bilgi sistemi (U, A) ikilisiyle tanımlanır. $a \in A$ ve a niteliğine göre değer kümesi Va olmak üzere $fa: U \rightarrow Va$ şeklinde bilgi fonksiyonuyla tanımlanır [3].

Bilgi sistemi tablosunun tekrara düştüğü durumlarda sadeleştirme yapılabilir bunun içinde ayırt edilmezlik bağıntısı kullanılır.

3.2 Kaba Kümeler

Tanım 3.2.1. Sonlu ve boş olmayan bir U kümesi ile $R \subseteq UxU$ bağıntısı tanımlansın. R, U'daki elemanlar arasında anlamlı ilişkiler sağlayan ayırt edilmezlik bağıntısıdır. R bağıntısı U üzerindeki elemanları ilişkilendirerek eksik bilgi durumlarını tanımlamak amacıyla kullanılır. Bu bağlamda $S = (U, R)$ ikilisi yaklaşım uzayı olarak adlandırılır [9].

Tanım 3.2.2. $S = (U, R)$ yaklaşım uzayı $\emptyset \neq X \subseteq U$ olmak üzere X kümesinin R alt yaklaşımı;

$$\underline{R}(X) = \bigcup_{x \in U} \{R(x): R(x) \subseteq X\}$$

ya da

$\underline{R}(X) = \{x: R(x) \subseteq X\}$ ile tanımlanır [10].

Buna göre X'in alt yaklaşımı, X'in sınırları içinde kalan ve X tarafından tamamen kontrol edilen denklik sınıflarının birleşiminden oluşan yapıdır. Bu yapı, X'in sınırlarını aşmadan onunla uyumlu elemanların birleşiminden meydana gelir.

X'in R üst yaklaşımı ise

$$\overline{R}(X) = \bigcup_{x \in U} \{R(x): R(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

veya

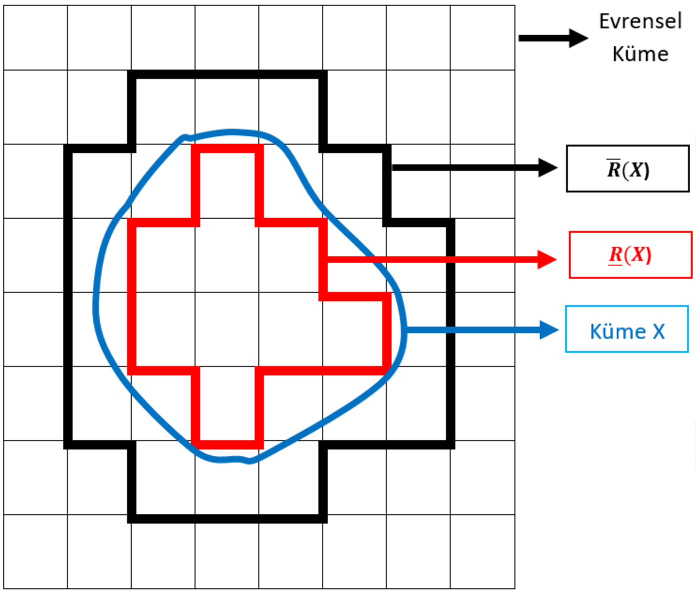
$$\overline{R}(X) = \{x: R(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanır [10].

R yardımıyla U üzerindeki x'in denklik sınıflarıyla X kümesinin kesişimi boş kümeden farklı olabilir ve kesişimde yer alan elemanlar X kümesinde olmayabilir. Bu bize $\overline{R}(X)$'in X kümesini aşan onu bir üst versiyona taşıyan yapıyı temsil ettiğini düşündürebilir.

Kısaca $\overline{R}(X)$ kümesi, X kümesinde bulunmasa bile $R(x)'$in X ile ilişkili olan tüm elemanlarını içerir.

Bir kümenin alt ve üst yaklaşımları aşağıda verilen Şekil 3.2.1'den daha iyi anlaşılabilir.



Şekil 3.2.1: Bir kümenin alt ve üst yaklaşımları.

Şekil 3.2.1' de görüldüğü gibi bir kümenin alt yaklaşımı içinde bulunan elemanlar, R'nin bilgileriyle uyumlu X'in elemanlarını kesinlikle içerir.

Kümenin üst yaklaşımı içinde bulunan elemanlar, R'nin bilgileriyle uyumlu X'in muhtemel elemanlarını içerir şeklinde yorumlanabilir.

Tanım 3.2.3. U evrensel kümesi üzerinde R bir denklik bağıntısı olsun ve (U,R) ikilisi yaklaşım uzayı olsun. Bir $X \subseteq U$ alt kümesi tanımlanabilir ise $\overline{R}(X) = \underline{R}(X)$'dir. Tam tersi durumda eğer $\overline{R}(X) - \underline{R}(X) \neq \emptyset$ ise o zaman X'e kaba küme denir [11].

Tanım 3.2.4. U evrensel küme ve $X \subset U$ ise X'in sınır bölgesi, üst ve alt yaklaşımları arasındaki farktır.

$$BndR(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X)$$

Bu bölge X'e tamamen ait olmayan ancak X'in dışında da kesin bir şekilde konumlandırılamayan elemanların bir araya geldiği bölgedir. Dolayısıyla $BndR(X)$ sınır bölgesi evrensel kümenin kararsız bölgesidir. Yani sınırda yer alan nesneler R bağıntısıyla ne X'e ne de $-X$ kümesine aittir.

Tanım 3.2.5. X'in sınır bölgesi boş küme ise yani sınırında kararsızlık yoksa X kümesi R bağıntısıyla crisp (tam veya kesin) küme olarak adlandırılır [3].

Tanım 3.2.6. X'in sınır bölgesinde elemanlar varsa X kümesi R bağıntısı bağlamında kaba (rough) kümedir aynı zamanda alt ve üst yaklaşımlar olarak tanımlanan küme ikilisi $\left(\underline{R}(X), \overline{R}(X)\right)$ şeklinde gösterilir [12].

Örnek 3.2.1. Bilgi Tablosu

Çizelge 3.2.1: Bilgi Tablosu.

Nesneler	Yaş (ay)	Koşma Becerisi	Kalem Tutma Becerisi
C_1	60-65	5	10
C_2	60-65	5	10
C_3	68-72	4	9
C_4	68-72	3	8
C_5	72-80	5	8
C_6	72-80	4	9
C_7	72-80	3	8

Çizelge 3.2.1'de $U = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7\}$ birinci sınıfa başlayan öğrenciler (nesneler) kümesini; yaş, koşma becerisi, kalem tutma becerisi ise nesnelere ait nitelikler kümesini temsil etmektedir.

Koşma ve kalem tutma becerisine göre denklik sınıfları:

$$[C_1] = [C_2]$$

$$[C_3] = [C_6]$$

$$[C_4] = [C_7]$$

$$[C_5]$$

$X = \{C_1, C_2, C_3\}$ kümesi kalem tutma ve koşma becerisi özelliklerine göre;

$$\underline{R}(X) = \{C_1, C_2\}$$

$$\overline{R}(X) = \{C_1, C_2, C_3, C_6\}$$

$$\overline{R}(X) - \underline{R}(X) = \{C_3, C_6\}$$

Yani X kümesi kalem tutma ve koşma becerisine göre tanımlanamaz bu yüzden kaba kümedir.

Klasik küme temel bir kavramdır ve sezgisel olarak net üyelik sınırları vardır. Kaba küme teorisi ise kesin olmayan yaklaşık sınırlara sahip kümeleri tanımlamak için geliştirilmiştir, eksikliğin olduğu durumlarda alt ve üst yaklaşımlar kullanılarak nesnelerin modellenmesinde kolaylıklar sağlamıştır. Alt yaklaşım bir nesnenin kesin olarak kümeye ait olduğu durumu, üst yaklaşım ise bir nesnenin kümeye ait olma olasılığının bulunduğu durumu ifade eder.

Önerme 3.2.1. (U, R) yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olmak üzere;

i. $\underline{R}(X)$ kümesi, X'in tam anlamıyla kapsadığı ve tanımlanabilir kümeler arasında en büyük olanıdır.

ii. $\overline{R}(X)$ kümesi, X'i kapsayan tanımlanabilir kümeler arasında en küçük olanıdır [3].

Kanıt.

$\underline{R}(X)$ ve $\overline{R}(X)$'in tanımlarından dolayı bu kümelerin tanımlanabilir olduğu bellidir.

1. X'in kapsadığı en büyük tanımlanabilir kümenin $\underline{R}(X)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\underline{R}(X) \neq A$ ve $\underline{R}(X) \subset A$ olacak şekilde $A \subseteq X$ tanımlanabilir alt kümesini alalım. Burada $y \in A$ ve $y \notin \underline{R}(X)$ olacak şekilde bir $y \in U$ vardır. $y \notin \underline{R}(X)$ olduğundan $[y] \nsubseteq X$'dir. A tanımlanabilir olduğundan denklik sınıflarının birleşimi olarak yazılabilir ve $y \in A$ olduğundan $[y] \subseteq A$ kapsaması vardır. Varsayımdan $[y] \subseteq X$ elde edilir ve bu bir çelişki doğurur.
2. X'i kapsayan en küçük tanımlanabilir kümenin $\overline{R}(X)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\overline{R}(X) \neq B$ ve $B \subset \overline{R}(X)$ olacak şekilde $X \subseteq B$ tanımlanabilir kümesini ele alalım. Buradan $y \in \overline{R}(X)$ ve $y \notin B$ olacak şekilde $y \in U$ vardır ve $y \in \overline{R}(X)$ olduğundan $[y] \cap X \neq \emptyset$ sağlanır. Diğer bir taraftan $y \notin B$ ve B tanımlanabilir

olduğundan $[y] \nsubseteq B$ olup ve $[y] \nsubseteq X$ elde edilir. Bu da $[y] \cap X \neq \emptyset$ olmasıyla çelişir.

Teorem 3.2.1. U kümesi üzerindeki R denkliğiyle oluşturulan (U, R) yaklaşım uzayı ve $\emptyset \neq X, Y \subseteq U$ alt kümelerinin alt ve üst yaklaşımları belirli matematiksel özelliklere sahiptir bu özellikler aşağıda sıralanmıştır [13].

1. $\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}(X)$
2. $\underline{R}(\emptyset) = \overline{R}(\emptyset) = \emptyset$
3. $\underline{R}(U) = \overline{R}(U) = U$
4. $\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$
5. $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$
6. $X \subseteq Y$ ise $\underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y)$
7. $X \subseteq Y$ ise $\overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y)$
8. $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y)$
9. $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$
10. $\underline{R}(-X) = -\overline{R}(X)$
11. $\overline{R}(-X) = -\underline{R}(X)$
12. $\underline{R}\underline{R}(X) = \overline{R}\underline{R}(X) = \underline{R}(X)$
13. $\overline{R}\,\overline{R}(X) = \underline{R}\,\overline{R}(X) = \overline{R}(X)$.

Kanıt.

1. $\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}(X)$

   $x \in \underline{R}(X)$ olsun. $[x]_R \subseteq X$ kapsaması vardır ve $x \in [x]_R$ olduğundan $x \in X$ elde edilir. Şimdi $x \in X$ olsun, $x \in [x]_R$ olduğundan $X \cap [x]_R \neq \emptyset$ olup $x \in \overline{R}(X)$ elde edilir.

2. $\underline{R}(\emptyset) = \overline{R}(\emptyset) = \emptyset$

   $\underline{R}(\emptyset) \subseteq \emptyset$ kapsaması vardır. Ayrıca $\emptyset \subseteq \underline{R}(\emptyset)$'dir ve her zaman geçerlidir. Bu yüzden $\emptyset = \underline{R}(\emptyset)$ elde edilir. Şimdi de $\emptyset \neq \overline{R}(\emptyset)$ olsun. Öyleyse $x \in \overline{R}(\emptyset)$ olacak şekilde en az bir x nesnesi vardır. Bu da $[x]_R \cap \emptyset \neq \emptyset$ çelişkisini verir kabulümüz yanlış demektir bundan dolayı $\emptyset = \overline{R}(\emptyset)$ olur ve $\emptyset = \underline{R}(\emptyset) = \overline{R}(\emptyset)$ olduğu ortaya çıkar.

3. $\underline{R}(U) = \overline{R}(U) = U$

$\underline{R}(U) \subseteq U$ kapsaması vardır. Ters kapsamayı göstermek için $x \in U$ alalım. $[x]_R \subseteq U$ her zaman geçerli olduğundan $x \in \underline{R}(U)$'dur. Kanıt 1'den $U \subseteq \overline{R}(U)$ vardır. Ayrıca $\overline{R}(U) \subseteq U$ her zaman geçerli olduğundan $\overline{R}(U) = U$ elde edilir. Böylece $\underline{R}(U) = \overline{R}(U) = U$ olduğu açıktır.

4. $\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$

$x \in \overline{R}(X \cup Y) \Leftrightarrow [x]_R \cap (X \cup Y) \neq \emptyset \Leftrightarrow ([x]_R \cap X) \cup ([x]_R \cap Y) \neq \emptyset \Leftrightarrow$ $[x]_R \cap X \neq \emptyset$ veya $[x]_R \cap Y \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{R}(X)$ veya $x \in \overline{R}(Y) \Leftrightarrow x \in \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$.

5. $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$

$x \in \underline{R}(X \cap Y) \Leftrightarrow [x]_R \subseteq X \cap Y \Leftrightarrow [x]_R \subseteq X$ ve $[x]_R \subseteq Y \Leftrightarrow x \in \underline{R}(X)$ ve $x \in \underline{R}(Y) \Leftrightarrow x \in \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$.

6. $X \subseteq Y$ ise $\underline{R}(x) \subseteq \underline{R}(Y)$

$X \subseteq Y$ olduğundan $X \cap Y = X$ olup, kanıt 5'ten gidersek $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \Leftrightarrow \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y) = \underline{R}(X)$ elde edilir ki bu $\underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y)$ kapsamasını verir.

7. $X \subseteq Y$ ise $\overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y)$

$x \in \overline{R}(X)$ alalım buradan $[x]_R \cap X \neq \emptyset$ sağlanır. Kabulden $[x]_R \cap Y \neq \emptyset$ olup $x \in \overline{R}(Y)$ elde edilir.

8. $\underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y) \subseteq \underline{R}(X \cup Y)$

$x \in \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y) \Longrightarrow x \in \underline{R}(X)$ veya $x \in \underline{R}(Y) \Longrightarrow [x]_R \subseteq X$ veya $[x]_R \subseteq Y \Longrightarrow$ $[x]_R \subseteq (X \cup Y) \Longrightarrow x \in \underline{R}(X \cup Y)$.

9. $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$

$X \cap Y \subseteq X$ ve $X \cap Y \subseteq Y$ olduğundan $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X)$ ve $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(Y)$ Buradan $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$ elde edilir.

10. $\underline{R}(-X) = -\overline{R}(X)$

$$x \in \underline{R}(-X) \Leftrightarrow [x]_R \subseteq -X \Leftrightarrow [x]_R \cap X = \emptyset \Leftrightarrow x \notin \overline{R}(X) \Leftrightarrow x \in -\overline{R}(X)$$

11. Yukarıda yer alan kanıt 10'a dayanarak ispatlanabilir.

12. $\underline{R}\,\underline{R}(X) = \overline{R}\,\underline{R}(X) = \underline{R}(X)$

$\underline{R}(X) \subseteq X$ olduğundan kanıt 6'ya göre $\underline{R}\,\underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(X)$ elde edilir. Tersine

$x \in \underline{R}(X)$ alalım yine kanıt 6'ya göre $[x]_R \subseteq X$ olduğundan

$\underline{R}\,[x]_R \subseteq \underline{R}(X)$ kapsaması vardır. $[x]_R$ denklik sınıfı tanımlanabilir olduğundan $\underline{R}\,[x]_R = [x]_R$'dir. Dolayısıyla $x \in \underline{R}\,\underline{R}(X)$ elde edilir. Şimdi diğer eşitliği gösterelim. Kanıt 1'e göre $\underline{R}(X) \subseteq \overline{R}\,\underline{R}(X)$ kapsaması vardır. Ters kapsama için $x \in \overline{R}\,\underline{R}(X)$ alalım. Üst yaklaşımdan $[x]_R \cap \underline{R}(X) \neq \emptyset$'dir. Bu durumda $y \in [x]_R$ ve $y \in \underline{R}(X)$ olacak şekilde $y \in U$ nesnesi vardır ve $y \in [x]_R$ olduğundan

$[x]_R = [y]_R$ eşitliği vardır. Diğer taraftan alt yaklaşıma göre $[y]_R \subseteq X$ kapsaması olduğundan $x \in \underline{R}\,(X)$ elde edilir.

13. $\overline{R}\,\overline{R}(X) = \underline{R}\,\overline{R}(X) = \overline{R}(X)$

Kanıt 1.maddeye göre $\overline{R}(X) \subseteq \overline{R}\,\overline{R}(X)$ kapsaması vardır. Ters kapsama için

$x \in \overline{R}\,\overline{R}(X)$ alalım. Üst yaklaşımdan $[x]_R \cap \overline{R}(X) \neq \emptyset$'dir. Bu durumda $y \in [x]_R$ ve $y \in \overline{R}(X)$ olacak şekilde en az bir $y \in U$ nesnesi vardır. $y \in [x]_R$ ve $[x]_R$ tanımlanabilir küme olduğundan $[y]_R = [x]_R$ eşitliği vardır. Diğer taraftan üst yaklaşıma göre $[y]_R \cap X \neq \emptyset$ olduğundan $x \in \overline{R}(X)$ elde edilir.

Şimdi de diğer eşitliği gösterelim. Kanıt 1'e göre $\underline{R}\,\overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(X)$ kapsaması vardır. Tersine $x \in \overline{R}(X)$ alalım ve $[x]_R \cap X \neq \emptyset$'dir. Öyleyse $[x]_R \subseteq \overline{R}(X)$ kapsaması vardır ve alt yaklaşıma göre $x \in \underline{R}\,\overline{R}(X)$ elde edilir.

Örnek 3.2.2. (U, R) yaklaşım uzayı olsun $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ ve R denklik bağıntısı olmak üzere;

$$E_1 = \{x_1, x_4, x_8\}$$

$$E_2 = \{x_2, x_5, x_7\}$$

$$E_3 = \{x_3\}$$

$$E_4 = \{x_6\}$$

$$U/R = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$$

$X_1 = \{x_1, x_4, x_7\}$ ve $X_2 = \{x_2, x_8\}$ olsun [3].

$$\underline{R}\,(X_1 \cup X_2) = E_1$$

$$\underline{R}\,(X_1) = \emptyset$$

$\underline{R}\,(X_2) = \emptyset$ buradan

$$\underline{R}\ (X_1 \cup X_2) \supseteq \underline{R}\ (X_1) \cup \underline{R}\ (X_2) \text{ olur.}$$

Diğer bir taraftan,

$$Y_1 = \{x_1, x_3, x_5\} \text{ ve } Y_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_6\}$$

$$\overline{R}(Y_1 \cap Y_2) = E_3$$

$$\overline{R}(Y_1) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

$$\overline{R}(Y_2) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$$

$$\overline{R}\ (Y_1 \cap Y_2) \subseteq \overline{R}(Y_1) \cap \overline{R}\ (Y_2) \text{ olur.}$$

Tanım 3.2.7. Bir $X \subseteq U$ kümesinin pozitif bölgesi $POS(X) = \underline{R}(X)$ ile yani R denklik bağıntısı kullanılarak X kümesine kesin bir şekilde ait olan nesnelerden oluşur. Benzer şekilde negatif bölge R bağıntısı kullanılarak herhangi bir belirsizliğe mahal vermeden X kümesine ait olmayan nesnelerden oluşur yani $NEG(X) = U - \overline{R}(X)$ ile tanımlıdır [14].

Pozitif bölgedeki elemanlar, kesinlikle X kümesine aittir negatif bölgedeki elemanlar ise kesinlikle X'e ait olmayan yani X'in tümleyeninde olan elemanlardan oluşur.

Örnek 3.2.3. Örnek 3.2.1'den yola çıkarak $X = \{C_1, C_2, C_3\}$ için

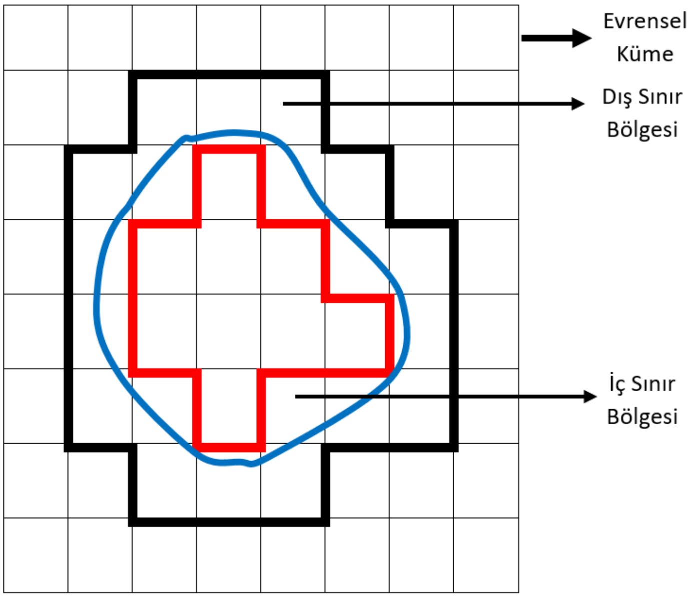
$$POS(X) = \underline{R}(X) = \{C_1, C_2\}$$

$$NEG(X) = U - \overline{R}(X) = \{C_4, C_5, C_7\}$$

Tanım 3.2.8. (U, R) yaklaşım uzayı $X \subseteq U$ olsun. $\underline{Edg}(X) = X - \underline{R}(X)$ ile X'in iç sınır bölgesi ile tanımlanır. Benzer şekilde X'in dış sınır bölgesi ise $\overline{Edg}(X) = \overline{R}(X) - X$ ile tanımlıdır. X kümesinin sınır bölgesi, iç sınır ve dış sınır bölgelerinin birleşiminden oluşur [3].

$$BndR(X) = \underline{Edg}(X) \cup \overline{Edg}(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X)$$

Bir kümenin iç ve dış sınır bölgeleri Şekil 3.2.2.'de gösterilmektedir.



Şekil 3.2.2: Bir kümenin iç ve dış sınır bölgeleri.

Örnek 3.2.4. Örnek 3.2.1'den yola çıkarak $X = \{C_1, C_2, C_3\}$ için

$$\underline{R}(X) = \{C_1, C_2\}$$

$$\overline{R}(X) = \{C_1, C_2, C_3, C_6\}$$

$$\underline{Edg}(X) = X - \underline{R}(X) = \{C_3\}$$

$$\overline{Edg}(X) = \overline{R}(X) - X = \{C_6\}$$

X kümesinin sınır bölgesi $= \underline{Edg}(X) \cup \overline{Edg}(X) = \{C_3, C_6\}$ kümesini elde ederiz.

Tanım 3.2.9. $X \neq \emptyset$ kümesi verilsin. $|X|$, kümenin eleman sayısı (kardinalitesi) olmak üzere (U, R) yaklaşım uzayındaki kümenin kesinlik ölçüsünün değeri aşağıdaki gibidir.

$$a_R(X) = \frac{|\underline{R}(X)|}{|\overline{R}(X)|}$$

Bir kümenin tam veya kaba küme olarak sınıflandırılması $a_R(X)$ değerine bağlıdır. Eğer $a_R(X) = 1$ ise X kümesi R bağıntısıyla eksiksizdir yani tam kümedir. $a_R(X) < 1$ ise X kümesi R bağıntısıyla kaba küme kategorisine girer [15].

- Yaklaşımın doğruluğunu gösteren $a_R(X)$, X kümesinin R bağıntısına göre kesinliğini veya belirsizliğini ölçen bir katsayıdır.
- Bu katsayı, 0 ile 1 arasında bir değere sahiptir.

- Eğer $a_R(X)$ değeri 1'e eşitse, X kümesi R'ye göre kesin yani tam küme olarak tanımlanabilir. Bu durumda X kümesi, R'ye göre belirli (crisp) olarak adlandırılır.
- Eğer $a_R(X)$ değeri 1'den küçükse, X kümesi R'ye göre belirsizdir ve kaba küme olarak adlandırılır. Bu durum X kümesinin bazı elemanlarının, R'ye göre tam olarak tanımlanamadığı anlamına gelir.
- $a_R(X)$ değerinin büyük olması kümenin bilinirliğinin fazla olması anlamını taşır.
- X kümesinin kesinlik derecesinden yola çıkılarak belirsizlik ölçüsü de bulunabilir. $\rho_R(X) = 1 - a_R(X)$ olarak tanımlanan bu değer X kümesi hakkındaki eksiklik derecesini temsil etmektedir [10].

Örnek 3.2.5. $U = \{1, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $x \equiv y(Mod3)$ denklik bağıntısını göz önüne alınarak $X = \{1, 3, 5\}$ kümesinin kesinlik ölçüsünün değerini hesaplayalım.

$$[1] = \{1,7,13\}$$

$$[3] = \{3\}$$

$$[5] = \{5, 11\}$$

$$\underline{R}(X) = \{3\}$$

$$\overline{R}(X) = \{1, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

$$a_R(X) = \frac{|\underline{R}(X)|}{|\overline{R}(X)|} = \frac{1}{6}$$

$a_R(X)$ değerinin $\frac{1}{6}$ olması, X kümesinden $\frac{1}{6}$ oranında kesin bilgi elde edebileceğimizi gösterir.

Örnek 3.2.6. $E_1 = \{x_1, x_4, x_8\}$, $E_2 = \{x_2, x_5, x_7\}$, $E_3 = \{x_3\}$, $E_4 = \{x_6\}$ ve

$X_1 = \{x_1, x_4, x_5\}$, $X_2 = \{x_3, x_5\}$, $X_3 = \{x_3, x_6, x_8\}$ olsun.

$$\underline{R}\,(X_1) = \emptyset$$

$$\overline{R}(X_1) = E_1 \cup E_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8\}$$

$$Bnd(X_1) = E_1 \cup E_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8\}$$

$$Neg(X_1) = E_3 \cup E_4 = \{x_3, x_6\}$$

$$a_R(X_1) = \frac{0}{6} = 0$$

$$\underline{R}\,(X_2) = E_3 = \{x_3\}$$

$$\overline{R}(X_2) = E_2 \cup E_3 = \{x_2, x_3, x_5, x_7\}$$

$$BndR(X_2) = E_2 = \{x_2, x_5, x_7\}$$

$$Neg(X_2) = E_1 \cup E_4 = \{x_1, x_4, x_6, x_8\}$$

$$a_R(X_2) = \frac{\underline{R}\,(X_2)}{\overline{R}(X_2)} = \frac{1}{4}$$

$$\underline{R}(X_3) = E_3 \cup E_4 = \{x_3, x_6\}$$

$$\overline{R}(X_3) = E_1 \cup E_3 \cup E_4 = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_8\}$$

$$BndR(X_3) = E_1 = \{x_1, x_4, x_8\}$$

$$Neg(X_3) = E_2 = \{x_2, x_5, x_7\}$$

$$a_R(X_3) = \frac{2}{5}$$

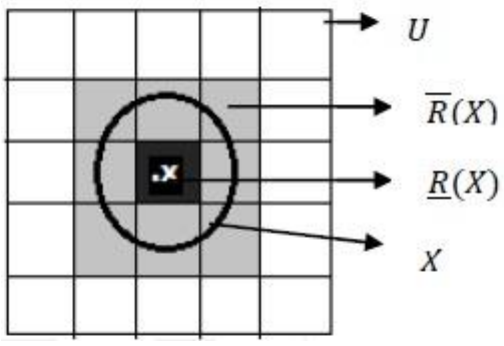
Belirsizliğin sayısal değeri, olasılık teorisi gibi önceden belirlenmiş değer değildir. Bunun yerine belirsizliği ifade eden temel kavramlar olan yaklaşımlar kullanılarak hesaplanır. Bu yaklaşım belirsizliğin kesin sayılar yerine yaklaşık olarak ifade edilmesini sağlar.

Belirsizliğin sayısal olarak ifade edilmesi sınırlı bilgiye bağlıdır. Yani elimizdeki bilgiyle nesneleri tam doğrulukla sınıflandırmak her zaman mümkün olmayabilir. Bu tür bir sayısal karakterizasyon, kavramların ne kadar kesin olduğunu ifade etmek için kullanılır [3].

3.3 Kaba Kümelerin Sınıflandırılması

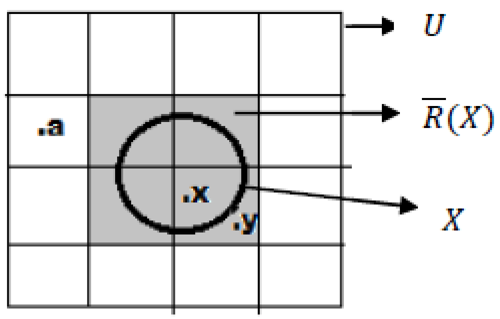
Tanım 3.3.1. Kaba kümeleri belirli kriterlere göre dört ana grupta sınıflandırabiliriz [10].

1. X kümesi rough R- tanımlanabilirdir⇔ $\underline{R}(X) \neq \emptyset$ ve $\overline{R}(X) \neq U$ ise bir X kümesinin yaklaşık olarak R-tanımlı (roughly R-definable) olması, U'nun bazı elemanlarının X'e ve – X'e (X 'in tamamlayıcısı) ait olup olmadığına R'ye göre karar verebildiğimiz anlamına gelir.



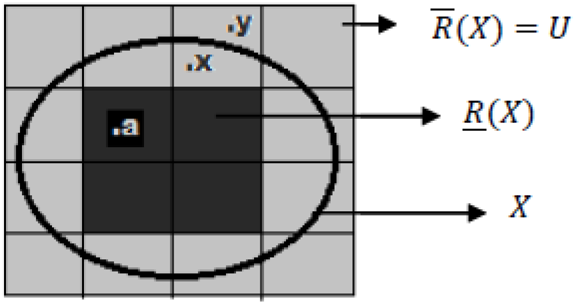
Şekil 1.3.1: Rough $\boldsymbol{R} -$ tanımlanabilir küme.

2. X kümesi internal R- tanımlanamazdır $\Leftrightarrow \underline{R}(X) = \emptyset$ ve $\overline{R}(X) \neq U$ ise bir X kümesinin içsel olarak R-tanımsız (internally R-undefinable) olması, U'nun bazı elemanlarının $-X$'e ait olduğuna R bağıntısına göre karar verebildiğimiz ancak U'nun herhangi bir elemanının X'e ait olup olmadığına karar veremediğimiz anlamına gelir.



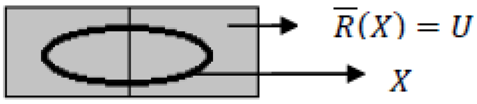
Şekil 3.3.2: Internal $\boldsymbol{R} -$ tanımlanamaz küme.

3. X kümesi external R- tanımlanamazdır $\Leftrightarrow \underline{R}(X) \neq \emptyset$ ve $\overline{R}(X) = U$ ise bir X kümesinin dışsal olarak R-tanımsız (externally R-undefinable) olması, U'nun bazı elemanlarının X'e ait olduğuna R bağıntısına göre karar verebildiğimiz ancak U'nun herhangi bir elemanının $-X$'e ait olup olmadığına karar veremediğimiz anlamına gelir.



Şekil 3.3.3: External $\boldsymbol{R} -$ tanımlanamaz küme.

4. X kümesi total R- tanımlanamazdır $\Leftrightarrow$ $\underline{R}(X) = \emptyset$ ve $\overline{R}(X) = U$ ise bir X kümesinin tamamen R-tanımsız (totally R-undefinable) olması, U'nun herhangi bir elemanının X'e veya $-X$'e ait olup olmadığına R bağıntısına göre karar veremediğimiz anlamına gelir. Yani R bağıntısına göre U'nun bir elemanının X'e veya $-X$'e ait oldukları kesin olarak söylenemez.



Şekil 3.3.4: Total $\boldsymbol{R} -$ tanımlanamaz küme.

3.4 Kaba Kümelerde Üyelik Fonksiyonu

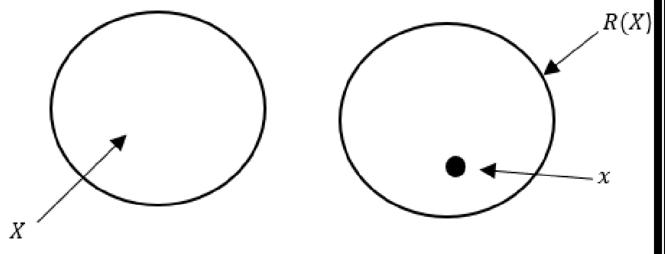
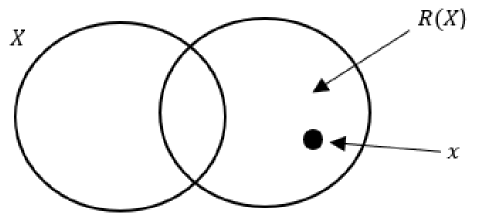
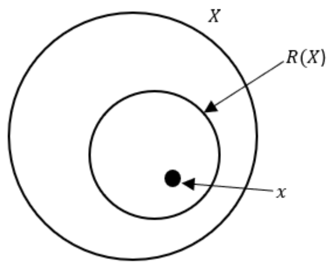
Tanım 3.4.1. Klasik küme teorisinde bir eleman kümeye aitse 1, eleman kümeye ait değilse 0 degerini alır. Rough kümelerde ise bir elemanın kümeye aitliği $[0,1]$ reeel aralığında herhangi bir değer alabilir bu durum yaklaşımlı üyelik foksiyonu $M_X^R(X) : U \to [0,1]$ ile de tanımlanabilir. Daha açık bir ifadeyle; kaba küme teorisinde kullanılan alt ve üst yaklaşım kümeleri yerine, kaba üyelik fonksiyonu kullanarak da kaba kümeler oluşturulabilir ve analiz edilebilir [16].

$|X|$, X kümesinin eleman sayısını, $[x]_R = R(x)$ ise x elemanının denklik sınıflarını göstermek üzere yaklaşımlı üyelik fonksiyonu:

$$M_X^R(x) = \frac{|X \cap [x]_R|}{|[x]_R|}$$

şeklinde tanımlanır [16].

Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu, R yardımıyla x hakkında verilen bilgiler ışığında x elemanının X'e ait olma derecesini açıklar ya da x elemanının, R yardımıyla X kümesine uyumunu gösterir.

	$X \cap R(X) = \emptyset$ olması halinde $M_X^R(x) = 0$
	$0 < M_X^R(x) < 1$
	$R(x) \subseteq X$ olması durumunda $M_X^R(x) = 1$ olur

Şekil 3.4.1: Kaba üyelik fonksiyonu.

Tanım 3.4.2. (U, R) yaklaşım uzayı ve X kümesi U'nun bir alt kümesi olmak üzere,

$0 < M_X^R(x) < 1$ olacak şekilde $\exists\, x \in X$ varsa X kaba (rough) kümedir [16].

Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu bir kümenin sınır bölgesini tanımlamak için kullanılabilir.

$\underline{R}(X) = \{x \in U: M_X^R(x) = 1\}$ ($M_X^R(x)$ değeri 1 olan tüm elemanlar bu kümeye dahildir.)

$\overline{R}(X) = \{x \in U: M_X^R(x) > 0\}$ ($M_X^R(x) > 0$ ifadesi, x elemanının X kümesine kısmen ait olduğunu belirtir. Bu demektir ki x elemanı X kümesi ile bir ilişkiye sahiptir ama tam olarak X kümesinin içinde olmayabilir.)

$BndR(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X) = \{X \in U : 0 < M_R^X(x) < 1\}$ (0< $M_X^R(x)$ <1 ifadesi, x elemanının X kümesine ne tamamen ait ne de tamamen dışında olduğunu belirtir. Bu elemanlar, X kümesinin sınır bölgesinde yer alır.

Üyelik fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $M_X^R(x)$=1$\Leftrightarrow x \in \underline{R}(X)$
2. $M_X^R(x) = 0 \Leftrightarrow x \in U - \overline{R}(x)$
3. $0 < M_X^R(x) < 1 \Leftrightarrow x \in BndR(x)$
4. $\forall\, x \in U$ için $M_{U-X}^R(x)$ = 1- $M_X^R(x)$
5. $\forall\, x \in U$ için $M_{X\cup Y}^R(x) \geq max\,\{M_X^R(x), M_Y^R(x)\}$
6. $\forall\, x \in U$ için $M_{X\cap Y}^R(x) \leq min\{M_X^R(x), M_Y^R(x)\}$

Yukarıdaki özelliklerden kaba üyelik fonksiyonunun, bulanık üyelik fonksiyonundan temel olarak farklı olduğu sonucuna varılabilir. Yukardaki 5. özellik x elemanının X ve Y kümelerinin birleşimindeki üyelik derecesinin, X ve Y kümelerindeki üyelik derecelerinin maksimumundan büyük veya eşit olduğunu belirtir. 6. özellik ise x elemanının X ve Y kümelerinin kesişimindeki üyelik derecesinin, X ve Y kümelerindeki üyelik derecelerinin minimumundan küçük veya eşit olduğunu belirtir. Buradan yola çıkarak kümelerin birleşimi ve kesişimi için üyelik hesaplamasının, genel olarak bileşenlerinin üyeliklerinden hesaplanamayacağını göstermektedir. Bu nedenle biçimsel olarak kaba üyelik, bulanık üyeliğin bir genellemesidir. Ayrıca kaba üyelik fonksiyonu, bulanık üyelik fonksiyonunun aksine olasılıksal bir yapıya sahiptir. Kaba üyelik fonksiyonu, kümelerin birleşimi ve kesişimi için farklı kurallar içerir ve bu da onu bulanık üyelik fonksiyonundan ayırır [16].

Örnek 3.4.1. $U = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\}$ kümesinin

$U/R = \big\{\{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \{b_5, b_7\}, \{b_6\}, \{b_8\}\big\}$ olsun.

$X = \{b_1, b_3, b_5, b_6, b_7\}$ kümesinin

$$\underline{R}(X) = \{\, b_5, b_6, b_7\}$$

$$\overline{R}(X) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$$

$$BndR(x) = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

X kümesinin elemanlarını kaba üyelik fonksiyonuna göre üyelik değerleri;

$$M_X^R(b_1) = \frac{|X \cap [b_1]|}{|[b_1]|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = M_X^R(b_3)$$

$$M_X^R(b_5) = \frac{|X \cap [b_5]|}{|[b_5]|} = \frac{2}{2} = 1 = M_X^R(b_7)$$

$$M_X^R(b_6) = 1$$

Örnek 3.4.2.

$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ olan evrensel küme ve (U, R) yaklaşım uzayı olmak üzere, U üzerinde R denklik bağıntısı tüm $a, b \in U$ için $a \equiv b(mod5)$ şeklinde tanımlansın. U'nun bir alt kümesi olan $X = \{1,2,6,7,8,9\}$ kümesini ele alalım;

$$[0] = [5] = [10] = \{0, 5, 10\}$$

$$[1] = [6] = \{1, 6\}$$

$$[2] = [7] = \{2, 7\}$$

$$[3] = [8] = \{3, 8\}$$

$$[4] = [9] = \{4, 9\}$$

$\underline{R}(X) = \{1,2,6,7\}$ ve $\overline{R}(X) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

$$M_X^R(1) = 1$$

$$M_X^R(2) = 1$$

$$M_X^R(3) = 0,5$$

$$M_X^R(4) = 0,5$$

$$M_X^R(5) = 0$$

$$M_X^R(6) = 1$$

$$M_X^R(7) = 1$$

$$M_X^R(8) = 0,5$$

$$M_X^R(9) = 0,5$$

$$M_X^R(10) = 0$$

10'un üyelik fonksiyon değerinin 0 çıkması X kümesinde olmadığını gösterir.

4. KABA GRUP

Bismas ve Nanda tarafından 1994 yılında sadece üst yaklaşım tanımı kullanılarak kaba grup tanımlanmıştır [17]. Kuroks ve Wang ise 1996 yılında alt ve üst yaklaşımı birlikte kullanarak kaba grubu tanımlamıştır [18]. 1994 yılında Biswas ve Nanda tarafından kaba grup ve kaba alt grup kavramları tanımlanmış ve bunların bazı özellikleri verilmiştir. Ardından Miao ve meslektaşları, Biswas ve Nanda tarafından verilen kaba grup tanımını geliştirerek yenilemeye çalışmışlardır. Özellikle birleşme özelliği, kaba grubun önemsiz kaba alt grupları ve iki kaba alt grubun kesişiminin kaba alt grup olması gerektiği gibi bazı özellikler üzerinde durmuşlardır. [19]

Tanım 4.1. (U, R) yaklaşım uzayı $G \neq \emptyset$, $R \subseteq UxU$ denklik bağıntısı olmak üzere

$\star : UxU \rightarrow U$ ikili işlem, $G \subseteq U$ olsun G kümesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa G'ye kaba (rough) grup denir ve $< G, \star >$ şeklinde gösterilir [11].

1. $\forall x, y \in G$ için $x \star y \in \overline{G}$ (Kapalılık)
2. $\forall x, y, z \in G$ için $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z \in \overline{G}$ (Birleşme Özelliği)
3. $\forall x \in G$ için $x \star e = e \star x = x$ olacak şekilde $\exists\ e \in \overline{G}$ vardır. (Birim Eleman)
4. $\forall x \in G$ için $x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e$ olacak şekilde $\exists\ x^{-1} \in G$ vardır. (x^{-1}'e x'in yaklaşımlı ters elemanıdır denir.)

Bu tanımda alt yaklaşım kullanılmamıştır ve birim eleman üst yaklaşımda aranırken ters eleman kümede aranmıştır.

Not: $\overline{G} = G = \underline{G}$ olduğunda kaba grup bir grup olur.

Tanım 4.2. G bir kaba grup ve $A \subset G$ olsun. Eğer $A = A^{-1}$ ise A'ya simetrik deriz. Başka bir deyişle A'daki her bir elemanın tersi de A'da bulunuyorsa bu simetrik olduğunu gösterir [20].

Özellik 4.1. G bir kaba grup olmak üzere G'nin sadece bir tane birim elemanı vardır.

Yani $x * y = y * x = e$ olacak şekilde yanlızca bir tane y vardır ve x^{-1} ile gösterilir.

Yukarıdaki özellik kaba gruplarda iki tane temel prensibi tanımlar ve bunları şöyle açıklayabiliriz:

- Tek birim eleman: Herhangi bir eleman birim elemanla işleme girdiğinde elemanın kendisini verir.
- Ters eleman: Her elemanın grubun birim elemanına ulaşmak için tersine sahip olduğunu ifade eder.

Özellik 4.2.

1. $(x^{-1})^{-1} = x$ (Bir elemanın tersinin tersi yine kendisidir.)
2. $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ (Bu özellik ters alma işleminin dağıtıcı olduğunu gösterir.)

Örnek 4.1. [21]

$X = \mathbb{Z}_3 x \mathbb{Z}_3 = \{(a,b): a,b \in \mathbb{Z}_3\}$ olmak üzere $Mod3'e$ göre toplama işlemi ile tanımlı küme,

$$V = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(1,0),(2,0)\} \subseteq X$$

$$X/R = C_1 \cup C_2$$

$C_1 =$ En az bir bileşeni sıfır olmayan olan tüm sıralı ikililer,

$C_2 = X$'in C_1 dışında kalan sıralı ikililerini içerir ve $C_2 = X - C_1 = C_1^t$ olmak üzere

Burada $\mathbb{Z}_3$ mod 3 aritmetiği üzerindeki tüm sayıların kümesidir yani $\{0,1,2\}$ olur.

$$X = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

X kümesi R tarafından oluşturulan denklik sınıflarının birleşimidir bu nedenle V kümesiyle kesişen eşdeğerlik sınıfı otomatik olarak X içinde yer alır yani V kümesinin üst yaklaşımı X kümesidir.

1. $\forall x,y \in V$ için $(x,y) \in \overline{R}(V) = X$
2. Birleşme özelliği $\overline{R}(V)$ içinde yer alıyor.
3. Birim elemanı olan (0,0) $\in \overline{R}(V)$
4. $(1,1)^{-1} = (2,2)$ $(1,2)^{-1} = (2,1)$ $(2,2)^{-1} = (1,1)$ $(2,1)^{-1} = (1,2)$ $(1,0)^{-1} = (2,0)$ $(2,0)^{-1} = (1,0) \in V$

V kümesi kaba (rough) gruptur.

Örnek 4.2.

$U = \mathbb{Z}_7$ = {Mod 7'ye göre kalanlar sınıfı}

$*$: Mod 7'ye göre toplama işlemidir.

$$U/R = \{E_1, E_2, E_3\}$$

$$E_1 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}$$

$$E_2 = \{\overline{2}, \overline{4}\}$$

$$E_3 = \{\overline{6}\}$$

$$V = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}\} \text{ olsun.}$$

Buradan $\overline{R}(V) = U$ olur.

1. $\forall x, y \in V$ için $(x * y) \in \overline{R}(V) = U$
2. Birleşme özelliği $\overline{R}(V)$ içinde vardır.
3. $\overline{0} \in \overline{R}(V)$'dir.
4. $(\overline{1})^{-1} = \overline{6} \in V$ $\quad (\overline{6})^{-1} = \overline{1} \in V$ $\quad (\overline{3})^{-1} = \overline{4} \in V$ $\quad (\overline{4})^{-1} = \overline{3} \in V$

Bu yüzden V kaba gruptur.

Örnek 4.3. $U = Mod$ 3'e göre kalan sınıfların kümesi

$$U = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

$*$: Kalan sınıfların toplama işlemi olsun.

$G = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ ve U'nun bir ayrık parçalanışı $E_1 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ $E_2 = \{\overline{2}\}$ olmak üzere,

$U/R = \{E_1, E_2\}$ olsun.

Buradan $\overline{G} = E_1$ olur.

$$\overline{G} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$$

$$\overline{0} * \overline{1} = \overline{1} \in \overline{G}$$

$$\overline{1} * \overline{1} = \overline{2} \notin \overline{G}$$

Kapalılık özelliğini sağlamaz ve G kaba grup değildir.

Örnek 4.3. [21]

$X = R$ toplama işlemiyle tanımlanan reel sayılar kümesi olmak üzere,
$X/R = \{E_1, E_2\}$ olarak verilsin.

Burada E_1 sıfırdan büyük veya sıfıra eşit reel sayılar kümesi,

$E_2 = R\backslash E_1$ olarak verilmiştir.

$V = R\backslash\{0\}$ olsun. Buradan $\overline{R}(V) = R$ olur.

Şimdi V'nin kaba grup olduğunu göstermek için tanımda verilen dört koşulun sağlandığını göstermemiz lazım.

1. V'de toplama işlemi için kapalılık özelliği sağlanır.
2. Birleşme özelliği sağlanır.
3. $0 \in \overline{R}(V)'$dir yani birim eleman vardır
4. $\forall\, x\, V$ için, $x^{-1} = -x \in V$ vardır yani $x + x^{-1} = 0$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla V kaba gruptur.

4.1 Kaba Alt Grup

Tanım 4.1.1. Kaba grup G ve onun alt kümesi H için; H kümesi G'de tanımlı işlem altında kaba grup olma koşullarını sağlaması durumunda H, G'nin kaba alt grubu olarak adlandırılır. Matematiksel olarak $\forall x, y \in H$ için $x \star y^{-1} \in \overline{H}$ şartları sağlanıyorsa H, G'nin kaba alt grubudur ve $H \leq G$ şeklinde gösterilir [17].

NOT: G kaba grubunun aşikar (açık) kaba alt grubu sadece kendisidir. $\{e\}$ kümesinin G grubunun kaba alt grubu olması için $e \in G$ koşulu sağlanmalıdır [22].

Örnek 4.1.1.

$$\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$$

$*$: Mod 6 üzerinde kalan sınıfların toplama işlemi olsun.

$$\mathbb{Z}_6/R = \left\{\{\overline{2}, \overline{3}\}, \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{5}\}\right\} \text{ ayrık parçalanışı}$$

$$G = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}$$

$$H = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{5}\}$$

$\overline{G} = \mathbb{Z}_6$ ve $\overline{H} = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{5}\}$

$\overline{1}+\overline{1} = \overline{2} \notin \overline{H}$ 'dir.

G kümesi kaba grup ve $H \subset G$'dir ancak H kümesi $*$ işlemine göre kapalılık özelliğini sağlamadığından H, G'nin kaba alt grubu değildir [23].

Özellik 4.1.1.

$H \leq K$ ve K$\leq G$ olsun buradan $H \leq G$'dir.

Bu özellik kaba grup teorisinin geçişme özelliğine örnektir. Yani H, K'nın K'da G'nin kaba alt grubu ise H, G'nin kaba alt grubu kabul edilir [24].

Teorem 4.1.1. G bir kaba grup ve H, G'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda H nin bir kaba alt grup olması için gerek ve yeter şart,

1. $\forall x, y \in H$ için $x.y \in \overline{H}$
2. $\forall x \in H$ için $x^{-1} \in H$

olmasıdır [22].

Önerme. $< G,\star>$ kaba grubunun kaba alt kümesi olan H'nin, kaba alt grup olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilmiştir [24].

1. $H \subseteq G$ olması
2. $\forall x, y \in H$ için $y^{-1} \in H$ ve $xy^{-1} \in \overline{H}$'dir.

Özellik 4.1.2.

$< G,\star>$ kaba grup olsun.

$H_1 \leq G$, $H_2 \leq G$ ve $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ koşulları sağlanıyorsa o zaman $H_1 \cap H_2$'de G'nin kaba alt grubudur.

Genel olarak G kaba grup olsun.

Eğer $H_i \leq G$ ($i \in I$ ve I indeks kümesi) ise

ve $\cap_{i\in I} H_i \neq \emptyset$ oluyorsa o zaman $\cap_{i\in I} H_i \leq G$'dir [25].

Bunu şöyle açıklayabiliriz. Kaba grup içindeki kaba alt grupların kesişimi boş kümeden farklıysa bu alt kümelerin kesişimi de ana grubun, kaba alt grubudur.

Özellik 4.1.3.

G kaba grup, H'de G'nin kaba alt grubu olmak üzere;

$\forall x \in H$ için $e_H = e_G$ ve $X_H^{-1} = X_G^{-1}$ dir.

Burada e_H ve e_G sırasıyla H ve G'nin birim elemanı, X_H^{-1} ve X_G^{-1} sırasıyla H ve G'nin ters elemanını belirtir.

Bu özellik kaba gruplar ve kaba alt gruplar arasındaki yapısal özellikleri vurgular. Kaba alt grupların, kaba grupların birim eleman ve ters eleman gibi temel özelliklerini koruduğunu belirtir [24].

Özellik 4.1.4.

G kaba grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olmak üzere aşağıdaki önermeler eşdeğerdirler.

1. $H \leq G$ (H, G'nin kaba alt grubudur.)
2. $\forall x, y \in H$ için $x^{-1} \in H$ ve $xy \in \overline{H}$
3. $\forall x, y \in H$ için $xy^{-1} \in \overline{H}$ [24].

Kanıt.

Gerekli koşul açıktır. Biz sadece yeterli koşulu ispatlayacağız.

(1) ile $\forall\ x, y \in H$ olduğunda $x * y \in \overline{H}$ olduğunu elde ederiz.
(2) ile $\forall\ x \in H$ için $x^{-1} \in H$ olduğu elde edilir.
(1) ve (2) den $\forall\ x \in H,\ x * x^{-1} = e \in \overline{H}$ elde edilir. Birleşme $\overline{G}$ içinde geçerlidir bu nedenle $\overline{H}$ içinde geçerlidir.

Teorem 4.1.2. H_1 ve $H_{2,}G$ kaba grubunun iki kaba alt grubu olsun bu durumda

$\overline{H_1} \cap \overline{H_2} = \overline{H_1 \cap H_2}$ ise $H_1 \cap H_2$, G'nin bir kaba alt grubudur [26].

Kanıt.

$H_1\ ve\ H_2$'nin G'nin iki kaba alt grubu olduğunu varsayalım. $H_1 \cap H_2 \subset G$ olduğu açıktır. $x, y \in H_1 \cap H_2$ olduğunu düşünelim. Çünkü H_1 ve H_2 kaba alt gruplardır.

$x * y \in \overline{H_1}, x * y \in \overline{H_2}$ ve $x^{-1} \in H_1$, $x^{-1} \in H_2$ yani $x * y \in \overline{H_1} \cap \overline{H_2}$ ve $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$

$\overline{H_1} \cap \overline{H_2} = \overline{H_1 \cap H_2}$ olduğunu varsayarak $x * y \in \overline{H_1 \cap H_2}$ ve $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$ elde ederiz.

Bu yüzden $H_1 \cap H_2$, G'nin bir kaba alt grubudur.

Tanım 4.1.2. G bir kaba grup, K'da G'nin kaba alt grubu ve H, G'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda H, K'nın bir kaba alt grubu ise G'nin de kaba alt grubudur [26].

Tanım 4.1.3. G bir kaba grup olsun. $\forall\ x, y \in G$ için $x.y = y.x$ ise G'ye değişmeli kaba grup denir [26].

4.2 Kaba Yan Kümeler

Kaba yan kümeler (rough coset), kaba grubun elemanları arasındaki belirli bir ilişkiye dayanarak tanımlanır. Bu ilişki belirsiz sınırlar içerebilir. Örneğin bir kaba grubun elemanlarının kaba alt gruba bölünmesi durumunda bazı elemanların birden fazla kalan sınıfa ait olabileceği durumlar ortaya çıkar bu durumlar kaba yan kümeler ya da kaba koset olarak ifade edilir. G grubunda H alt gruba dair tam bilgiye sahip değilsek alt grup ile G'nin elemanları ilişkilendirilir böylece grup yapısı analiz edilir.

Tanım 4.2.1. (U, R) yaklaşım uzayı $G \subset U$ olmak üzere H'de G'nin kaba alt grubu olsun. G'nin elemanları arasında "$\sim$" bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$\forall\ a, b \in G$ için,

$\sim: a \sim b \Leftrightarrow a * b^{-1} \in H \cup \{e\}$ olduğunda geçerlidir [26].

Yukarıdaki tanımdan $a \sim b$ ifadesi, a ve b elemanlarının arasında tanımlanan bir ilişkidir. Bu ilişki $a * b^{-1}$ ifadesinin H kümesine veya birim eleman kümesine dahil olması durumunda geçerlidir yani G'nin a ve b elemanları arasındaki bir ilişki varsa $a * b^{-1}$ mutlaka H'de veya birim eleman kümesinde yer alır.

Teorem 4.2.1. "$\sim$" G kaba grubunun elemanları üzerinde bir denklik bağıntısıdır [26].

Kanıt.

$\forall\ a \in G$ için G bir kaba grup olduğundan $a^{-1} \in G$'dir. $a * a^{-1} = e$ olduğundan

$a \sim a$ elde ederiz.

Ayrıca $\forall\ a, b \in G$ için eğer $a \sim b$ ise o zaman $a * b^{-1} \in H \cup \{e\}$ yani $a * b^{-1} \in H$ veya

$a * b^{-1} \in \{e\}$ olur. Eğer $a * b^{-1} \in H$ ise H, G'nin bir kaba alt grubu olduğundan $(a * b^{-1})^{-1} = b * a^{-1} \in H$ olur. Bu yüzden $b \sim a$ olur.

Eğer $a * b^{-1} \in \{e\}$ ise o zaman $a * b^{-1} = e$ 'dir. Bu $b * a^{-1} = (a * b^{-1})^{-1} = e^{-1} = e$ anlamına gelir. Böylece $b \sim a$ olur.

Eğer $a \sim b$ ve b$\sim c$ ise tanıma göre $a * b^{-1} \in H \cup \{e\}$ ve $b * c^{-1} \in H \cup \{e\}$.

1. Eğer $a * b^{-1} \in H$ ve $b * c^{-1} \in H$ ise H kaba alt grup olduğundan,

$(a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) = a * c^{-1} \in H.$

2. Eğer $a * b^{-1} = e$ veya $b * c^{-1} = e$ ise bu durumda,

   $a * b^{-1} = e \Longrightarrow a = b$ veya

   $b * c^{-1} = e \Longrightarrow b = c.$

   Dolayısıyla $a = c$ yani $a \sim c$ elde edilir. Sonuç olarak $a * c^{-1} \in H \cup \{e\}$ olduğu için $a \sim c$'dir ve geçişme özelliği de sağlanır.

Tanım 4.2.2. "$\sim$" bağıntısının G kaba grup üzerinde gösterdiği kalan sınıflara kaba sağ kalan sınıf (kaba sağ koset) denir. Kaba sağ kalan sınıf a elemanını içerir ve $H * a$ ile gösterilir.

$H * a = \{h * a | h \in H, a \in G, h * a \in G\} \cup \{a\}$ [18].

Yukarıdaki tanımdan da anlaşılacağı gibi kaba sağ koset terimi, kaba grubun bir alt kümesi ile belirli bir elemanın bir işlemi sonucunda oluşan kümeyi ifade eder ve a'yı içeren kaba sağ koset $H * a$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.3. "$\sim'$" G kaba grubunun elemanları üzerinde bir denklik bağıntısıdır [26].

Tanım 4.2.3. "$\sim'$" ilişkisi ile tanımlanan bağıntının kaba grup G üzerinde gösterdiği sınıflara kaba sol kalan sınıf (rough sol koset) denir. Kaba sol koset a elemanını içerir ve $a * H$ ile gösterilir. Yani;

$$a * H = \{a * H | h \in H, a \in G, a * h \in G\} \cup \{a\}$$

Açıklama 4.2.1. Genel olarak kaba grup üzerindeki ikili işlem değişme özelliği göstermez. Bu nedenle "$\sim$" ve "$\sim'$" bağıntıları farklıdır. Bunun sonucu olarak kaba sol ve kaba sağ kosetler birbirinden farklıdır [26].

Yani $H * a \neq a * H$'dır. Bu fark grubun elemanları arasındaki işlemlerin sırasının önemli olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.4. Kaba sol koset ve kaba sağ koset sayıları eşittir [26].

Kanıt.

Kaba sağ koset kümesini S_1 ve kaba sol koset kümesini S_2 ile gösterelim.

$\varphi: S_1 \to S_2$ fonksiyonunu ve $\varphi(H * a) = a^{-1} * H$ olacak şekilde tanımlayalım.

φ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu ispatlayacağız.

(1) Eğer $H * a = H * b$ $(a \neq b)$ ise o zaman $a * b^{-1} \in H'$dir. Çünkü $H, G'nin$ kaba alt grubudur bu yüzden $b * a^{-1} \in H$ olur. Bu da demektir ki $a^{-1} * H = b^{-1} * H$ anlamına gelir. Dolayısıyla φ bir eşlemedir.

(2) S_2'nin herhangi bir $a * H$ elemanı, S_1'in elemanı olan $H * a^{-1}$'in görüntüsüdür. Yani φ örten bir foksiyondur.

(3) Eğer $H * a \neq H * b$ ise o zaman $a * b^{-1} \notin H$. Yani $a^{-1} * H \neq b^{-1} * H$ anlamına gelir . Dolayısıyla φ birebir fonksiyondur.

φ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan dolayı kaba sağ koset sayısı, kaba sol koset sayısına eşittir.

Tanım 4.2.4. Hem kaba sol koset hem de kaba sağ koset sayısına G'nin içinde H alt grubunun indeksi denir [26].

4.3 Kaba Normal Alt Grup

Tanım 4.3.1. G kaba grup, N'de G'nin kaba alt grubu olmak üzere eğer $\forall\ a \in G$ için

$a * N = N * a$ oluyorsa, N'ye kaba normal alt grup (rough invariant subgroup) veya kaba değişmez alt grup denir.

Burada;

$$a \star N = \{a \star n | n \in N, a \in G, a \star n \in G\} \cup \{a\}$$

$$N \star a = \{n \star a | n \in N, a \in G, n \star a \in G\} \cup \{a\}$$

olarak tanımlanır. Kaba normal alt grubu $N \lhd G$ olarak gösterilir. Ayrıca $N \star a$ yerine Na, $a \star N$ yerine aN, $a \star n$ yerine an, $n \star a$ yerine na yazılabilir [26].

Teorem 4.3.1. G kaba grubun bir kaba alt grubu N olsun. N'nin normal alt grup olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall\ a \in G$ için $a * N * a^{-1} = N$ olmasıdır [26].

Kanıt.

N, G'nin kaba normal alt grubu olsun. Tanım 4.3.1'e göre $\forall\ a \in G$ için

$a * N = N * a$ olur. G kaba grup olduğundan

$(a * N) * a^{-1} = (N * a) * a^{-1}$ yazabiliriz ve buradan

$a * N * a^{-1} = N * (a * a^{-1})$ olur böylece

$a * N * a^{-1} = N$ elde ederiz.

Şimdi N nin G'nin bir kaba alt grubu olduğunu ve $\forall\, a \in G$ için $a * N * a^{-1} = N$ olduğunu varsayalım o zaman $(a * N * a^{-1}) * a = N * a$'dır

Yani $a * N = N * a$ elde ederiz. Bu nedenle N, G'nin kaba normal alt grubudur.

Teorem 4.3.2. Kaba grup olan G'nin alt grubu N olmak üzere, N'nin kaba normal alt grup olması için gerekli ve yeterli şart; $\forall\, a \in G$ ve $n \in N$ için $a * n * a^{-1} \in N$ olmalıdır [26].

Kanıt.

G kaba grubun, kaba normal alt grubunun N olduğunu varsayalım.

Tanıma göre $\forall\, a \in G$ için $a * N * a^{-1} = N$.

Herhangi bir $n \in N$ için $a * n * a^{-1} \in a * N * a^{-1} = N$.

G kaba grubunun, kaba alt grubunun N olduğunu varsayalım ve $\forall\, a \in G, n \in N$ için

$a * n * a^{-1} \in N$'dir. Buradan $a * N * a^{-1} \subset N$ olur ve $a^{-1} \in G$ olduğundan

$a^{-1} * N * a \subset N$ elde ederiz.

Bu durumda $a * (a^{-1} * N * a) * a^{-1} \subset a * N * a^{-1}$ olur. Yani N $\subset a * N * a^{-1}$ dir.

$a * N * a^{-1} \subset N$ ve $N \subset a * N * a^{-1}$ olduğundan $a * N * a^{-1} = N$ elde ederiz.

Buradan N kaba normal alt gruptur.

Özellik 4.3.1.

$M \lhd G$ ve $N \lhd G$ olmak üzere $M \cap N \neq \emptyset$ olsun. O zaman;

1. $M \cap N \lhd G$
2. $MN \lhd G$

Burada $MN = \{mn | m \in M, n \in N\}$ [24].

Kanıt.

1. $M \cap N \leq G$ olması Özellik 4.1.2 ve Tanım 4.3.1'e dayalıdır. Bu ifade $M \cap N$'nin G'nin bir alt kümesi olduğunu gösterir.

   $\forall\, x \in M \cap N$ ve $a \in G$ için;

M ve N, G'nin normal alt gruplarıdır.

Bu durumda $a * a^{-1} \in M$ ve $a * a^{-1} \in N$ anlamına gelir. Buradan $a * a^{-1} \in M \cap N$ elde edilir. Böylece $M \cap N \lhd G$'dir. Yani $M \cap N$, G'nin normal alt grubudur.

2. $MN \leq G$ özellik gereğidir yani MN, G'nin bir alt kümesidir. M ve N, G'nin normal alt gruplarıdır.

   Bu durumda $\forall \in M, \forall \in N$ $a \in G$ için $ama^{-1} \in M$, $ana^{-1} \in M$'dir.

   Bu durum şu ifadeyi ortaya çıkarır:

   $amn(a^{-1}) = (ama^{-1})(\ ana^{-1}) \in MN$

   Dolayısıyla $MN \lhd G$'dir. Yani MN, G'ye göre normal alt gruptur.

Özellik 4.3.2.

$M \lhd G$, N'de G'nin kaba alt grubu ve $M \cap N \neq \emptyset$ olsun. O zaman;

1. $M \cap N \lhd N$
2. $NM \leq G$

Burada $MN = \{mn | n \in N, m \in M\}$'dir [24].

Kanıt.

$M \cap N \subseteq N$ olduğu açıktır.

Ayrıca $\forall\ x, y \in M \cap N$, $x, y \in M$ ve $x, y \in N$.

Yine $M \lhd G$ ve N'de G'nin kaba alt grubu olduğundan $xy \in \overline{M}$, $xy \in \overline{N}$, $x^{-1} \in M$ ve $x^{-1} \in N$'dir

Dolayısıyla $xy \in \overline{M \cap N}$ ve $x^{-1} \in M \cap N$'dir. Bu yüzden $M \cap N \leq N$'dir.

Yine $\forall\ x \in M \cap N$, $\forall\ n \in N$ olduğundan $x \in M$ ve $x \in N$'dir. Dolayısıyla $nxn^{-1} \in N$ ve $nxn^{-1} \in M$ ve bu yüzden $nxn^{-1} \in M \cap N$'dir.

Böylece $M \cap N \lhd N$ elde edilir. Teorem 4.3.2'ye göre;

$\forall\ n_1 n_2 \in N$ ve $\forall\ m_1, m_2 \in M$

$$(n_1 m_1)(n_2 m_2)^{-1} = n_1 m_1 {m_2}^{-1} {n_2}^{-1} = n_1 e\ m_1 {m_2}^{-1} {n_2}^{-1}$$

$$n_1 {n_2}^{-1} n_2 m_1 {m_2}^{-1} {n_2}^{-1} = (n_1 {n_2}^{-1}) n_2 (m_1 {m_2}^{-1}) {n_2}^{-1}$$

$N \leq G$ ve $M \lhd G$ olduğundan;

$n_1 n_2{}^{-1} \in \overline{N}$ ve $n_2(m_1 m_2{}^{-1}) n_2{}^{-1} \in M$.

$(n_1 m_1)(n_2 m_2)^{-1} \in \overline{NM}$. Bu yüzden özellik 4.1.4'e göre $NM \leq G$'dir.

Özellik 4.3.3.

G kaba grubunun, kaba normal alt grupları G_1 ve G_2 olmak üzere $\overline{G_1}\ \overline{G_2}$=$\overline{G_1 G_2}$ olsun.

$G_1\, G_2 = \{g_1 g_2 | g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$'dir. O zaman $< G_1 G_2, \star >$ $G'nin$ bir kaba normal alt grubudur [24].

Kanıt.

$$\forall\, a_1, a_2, b_1, b_2 \in G_1 G_2 \text{ (burada } a_1, b_1 \in G_1,\ a_2, b_2 \in G_2)$$

$$(a_1 a_2)(b_1 b_2)^{-1} = (a_1 a_2)(b_2{}^{-1} b_1{}^{-1}) = a_1 (a_2 b_2{}^{-1}) b_1{}^{-1}$$

$< G_2, * >$ bir kaba grup olduğundan,

$$\forall\, a_2, b_2 \in G_2 \text{ için } b_2{}^{-1} \in G_2 \text{ ve } a_2 b_2{}^{-1} \in \overline{G_2}$$

Bu nedenle,

$$a_1\big(a_2 b_2{}^{-1}\big) b_1{}^{-1} = a_1 c_2 b_1{}^{-1} \text{ (burada } c_2 = a_2 b_2{}^{-1} \in \overline{G_2}$$

Yine G_1 ve G_2, G kaba grubunun normal alt grubu olduğundan $c_2 G_1 = G_1 c_2$'dir. Bu nedenle $\exists\ d_1 \in G_1$ vardır $c_2 b_2{}^{-1} = d_1 c_2$ olacak şekilde. Dolayısıyla $a_1 c_2 b_1{}^{-1} = a_1 d_1 c_2$.

G_1, kaba grup olduğundan $\forall\ a_1, d_1 \in G_1$, $a_1 d_1 \in \overline{G_1}$. Bu nedenle

$$a_1 d_1 c_2 = c_1 c_2 \in \overline{G_1 G_2} \text{ (burada } c_1 = a_1 d_1 \in \overline{G_1})$$

Dolayısıyla $< G_1 G_2, * >$ G kaba grubunun kaba alt grubudur.

Tekrar $\forall\ g \in G$, $\forall\ a_1, a_2 \in G_1 G_2$ için (burada $a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$)

G_1 ve G_2, G'nin kaba normal alt grubu olduğundan $g a_1 g^{-1} \in G_1$, $g a_2 g^{-1} \in G_2$'dir.

Bu nedenle

$$g(a_1 a_2)\, g^{-1} = g a_1 g^{-1} g a_2 g^{-1} = (g a_1 g^{-1})(g a_2 g^{-1}) \in G_1 G_2$$

Dolayısıyla $< G_1\, G_2, * >$ kaba normal alt grubudur G'nin.

Tanım 4.3.2. n elemanlı bir kümenin kendi üzerine birebir fonksiyonuna n'li permütasyon denir. Bu n'li permütasyonların tümünün oluşturduğu küme bileşke işlemine göre grup olur bu gruba permütasyon grup (simetrik grup) denir ve S_n ile gösterilir.

Örnek 4.3.1. U, S_4 grubunun tüm permütasyonlarının kümesi,

$*$ işlemi ise permütasyonun çarpımı olsun.

U'nun sınıflandırması $U/R = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ şeklindedir.

$$E_1 = \{(1), (12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$$

$$E_2 = \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$$

$$E_3 = \{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$$

$$E_4 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$G_1 = \{(1), (12), (13)\}$ olsun.

$$\overline{G_1} = \{(1), (12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$$

$$(12) * (13) = (132) \notin \overline{G_1}$$

Bu yüzden G_1 kaba grup değildir.

$$G_2 = \{(12), (123), (132)\}$$

$$\overline{G_2} = E_1 \cup E_2$$

- $\forall\, x, y \in G_2$ için $x * y \in \overline{G_2}$
- $(12) * (12) = (1) \in \overline{G_2}$
- $\overline{G_2}$ birleşme özelliğinin olduğu açıktır.
- $(12)^{-1} = (12) \in G_2$, $(123)^{-1} = (132) \in G_2$, $(132)^{-1} = (123) \in G_2$ bu yüzden G_2 kümesi kaba gruptur.

$$G_3 = \{(1), (123), (132)\}$$

$$\overline{G_3} = E_1 \cup E_2$$

- $G_3 \subset G_2$
- $\forall\, x, y \in G_3$ için $x * y \in \overline{G_3}$

- $(1)^{-1} = (1) \in G_3$, $(123)^{-1} = (132) \in G_3$, $(13)^{-1} = (13) \in G_3$ bu yüzden G_3, G_2'nin kaba alt grubudur [26].

Örnek 4.3.2. $U = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8]\}$ kümesi mod 9'a göre kalan sınıfların kümesi ve $*$ işlemi ise kalan sınıfların toplamı olsun.

$$U/R = \{E_1, E_2, E_3\}$$

$$E_1 = \{[0],[1],[2]\}$$

$$E_2 = \{[3],[4],[5]\}$$

$$E_3 = \{[6],[7],[8]\}$$

şeklinde verilsin.

$$X_1 = \{[2],[7],[8],[1]\}$$

olsun. O zaman $\overline{X_1} = E_1 \cup E_3$'dir. $[2] * [1] = [3] \notin \overline{X_1}$ olduğundan X_1 kaba grup değildir.

$$X_2 = \{[2],[7],[5],[4]\}$$

$$\overline{X_2} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = U$$

- $\forall\, x, y \in X_2$ için $x * y \in \overline{X_2}$
- Birleşme özelliği vardır.
- $[2] * [7] = 0 \in \overline{X_2}$
- $[2]^{-1} = [7] \in X_2$, $[5]^{-1} = [4] \in X_2$, $[7]^{-1} = [2] \in X_2$, $[4]^{-1} = [5] \in X_2$ bu yüzden X_2 kümesi kaba gruptur.

$$X_3 = \{[2],[3],[6],[7]\}$$

$$\overline{X_2} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = U$$

- $\forall\, x, y \in X_3$ için $x * y \in \overline{X_3}$
- Birleşme özelliği vardır.
- $[0] \in \overline{X_3}$
- $[2]^{-1} = [7] \in X_3$ $[7]^{-1} = [2] \in X_3$

  $[3]^{-1} = [6] \in X_3$ $[6]^{-1} = [3] \in X_3$ olduğundan X_3 kümesi kaba gruptur.

$$X_4 = X_2 \cap X_3 = \{[2],[7]\}$$

$$\overline{X_4} = E_1 \cup E_3$$

$$[2] * [2] = [4] \notin X_4$$

Bu yüzden X_4, X_2 ve X_3'ün kaba alt grubu değildir [26].

Örnek 4.3.3. U, S_4'ün tüm permütasyonlarının kümesi, $*$ işlemi ise permütasyonların çarpımı olsun.

U'nun sınıflandırması olan $U/R = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ şeklindedir.

$$E_1 = \{(1), (123), (132)\}$$

$$E_2 = \{(12), (13), (23), (14), (24), (34)\}$$

$$E_3 = \{(124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$$

$$E_4 = \{(1234), (1234), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$$

$$E_5 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$$G = \{(12), (13), (123), (132)\}$$

$$N = \{(123), (132)\}$$

$$\overline{G} = \{(1), (123), (132), (12), (13), (23), (14), (24), (34)\}$$

$$\overline{N} = \{(1), (123), (132)\}$$

G kaba gruptur N'de G'nin kaba alt grubudur.

$$(12) * N = (12) * (123), (12) * (132) = (23), (13)$$

$$(13) * N = (13) * (123), (13) * (132) = (12), (23)$$

$$(123) * N = (123) * (123), (123) * (132) = (132), (1)$$

$$(132) * N = (132) * (123), (132) * (132) = (1), (123)$$

$$N * (12) = (123) * (12), (132) * (12) = (13), (23)$$

$$N * (13) = (123) * (13), (132) * (13) = (23), (12)$$

$$N * (123) = (123) * (123), (132) * (123) = (132), (1)$$

$$N * (132) = (123) * (132), (132) * (132) = (1), (123)$$

N kaba normal alt gruptur [26].

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde; küme teorileriyle ilgili yapılan çalışmalar hakkında genel bilgilendirme ve karşılaştırmalar yapılarak küme teorilerinin kullanım alanlarına yönelik bilgiler detaylı bir şekilde paylaşılmaktadır.

Kaba küme teorisi kapsamında kümelerin sınır bölgesi, pozitif ve negatif bölgeleri analiz edilmektedir. Ayrıca küme tanımları ve üyelik fonksiyonlarının hesaplaması somut örneklerle desteklenmiştir.

Alt ve üst yaklaşımlar şekillerle görselleştirilmekte, bir kümenin iç sınır ve dış sınır bölgesi karşılaştırılmalı olarak incelenmektedir. Bu sayede kaba kümelerin yapısal özellikleri daha anlaşılır hale getirilmektedir.

Kaba grup ve kaba alt grup kavramları; klasik grup, alt grup yapılarıyla olan benzerliğinden yola çıkılarak tanım ve örneklerle zenginleştirilmiştir.

Son olarak kaba normal alt grup ve kaba yan kümelerle ilgili tanımlar sunulmakta ve çeşitli örneklerle açıklanmaktadır.

6. KAYNAKÇA

[1] G. Cantor, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, J. Reine Angew. Math., 77 (1874) 258-262.

[2] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353.

[3] Z. Pawlak, Rough sets-theoretical aspects of reasoning about data, Kluwer Academic Puplishers, Boston, London, Dordrecht, 1991.

[4] D. Molodtsov, Soft set theory- First Results, Comput. Math. Apple, 37 (1999) 19-31.

[5] J. F. Peters, Near sets. General theory about nearness of objects, Appl. Math. Sci., 1:53-56 (2007) 2609-2629.

[6] Özer, O., Çoker, D., Taş, K., 1994. Soyut Matematik. Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir.

[7] Çallıalp, F. (1994). Cebir. Sakarya Üniversitesi

[8] Z. Pawlak, Why rough sets?, the 5th IEEE International conference on fuzzy systems (FUZZ-IEEE 96), New Orleans, Louisiana, Sept. (1996) 738-743.

[9] Oğuz, G., Içen, I., & Habil, G. M. (2018). Lie rough groups. Filomat, 32(16), 5735-5741.

[10] Özcan, A. F., Beydağı, M. M., & Içen, I. (2022). Comparison of Rough Sets and Local Rough Sets in Data Analysis. New Trends in Mathematical Sciences, 10(2), 1-13.

[11] Bağırmaz, N. (2015). *Topolojik Rough Gruplar* (Yayınlanmış doktora tezi). İnönü Üniversitesi, Malatya.

[12] Taşbozan, H. (2017). *Lokal Rough Kümeler ve Rough Altgrupoidler* (Yayınlanmış doktora tezi). İnönü Üniversitesi, Malatya.

[13] Yayla, H.R. (2021). *Kaba Küme Teorisi ve Dokular* (Yayınlanmış yüksek lisans tezi). Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

[14] Beydağı, M. (2021). *Kaba Küme Teorisine Bir Lokal Yaklaşım* (Yayınlanmış yüksek lisans tezi). İnönü Üniversitesi, Malatya.

[15]Alkhazaleh, S., & Marei, E. A. (2021). New soft rough set approximations. International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems, 21(2), 123-134.

[16] Suraj, Z., 2004. An introduction to rough set theory and its applications. ICENCO, December 27-30, Cairo, Egypt, 1-39.

[17] R. Biswas and S. Nanda, Rough groups and rough subgroups, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 42 (1994) 251-254.

[18] N. Kuroki and P. P. Wang, The lower and upper approximations in a fuzzy group, Inform. Sci., 90 (1996) 203-220.

[19] Yaşar, R. (2023). Rough Groups over Rough Sets. Türk Doğa ve Fen Dergisi, 12(2), 88-92.

[20] Lin, F., Sun, Q., Lin, Y., & Li, J. (2021). Some topological properties of topological rough groups. Soft Computing, 25, 3441-3453.

[21] Almohammadi, S. T., & Ozel, C. (2019). A new approach to rough vector spaces. General Letters in Mathematics, 6, 1-9.

[22] Bağırmaz, N., İçen, İ., & Özcan, A. F. (2016). Topological rough groups. Topological Algebra and its Applications, 4(1).

[23] Alharbi, N., Altassan, A., Aydi, H., & Özel, C. (2019). Rough quotient in topological rough sets. Open Mathematics, 17(1), 1750-1755.

[24] Yan, Y. H., Li, J. P., & Wang, D. S. (2008, December). Rough invariant subgroup's properties and rough quotient group. In 2008 International Conference on Apperceiving Computing and Intelligence Analysis (pp. 181-184). IEEE.

[25] Kellil, R. Rough structure on groups. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 632.

[26] Miao, D., Han, S., Li, D., Sun, L. (2005). Rough Group, Rough Subgroup and Their Properties. In: Ślęzak, D., Wang, G., Szczuka, M., Düntsch, I., Yao, Y. (eds) Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing. RSFDGrC 2005. Lecture Notes in Computer Science(), vol 3641. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/11548669_11

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Gevher YAŞAR

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2005, Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği
- **Yüksek Lisans:** 2025, İnönü Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM:

- 2005-2025 Milli Eğitim Bakanlığı, İlköğretim Matematik Öğretmenliği