

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR HİBRİT YÖNTEM VE UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

SARA MAGHSOUDI KHOUZANI

DENİZLİ, OCAK - 2025

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ
İÇİN BİR HİBRİT YÖNTEM VE UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

SARA MAGHSOUDI KHOUZANI

DENİZLİ, OCAK - 2025

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

Sara MAGHSOUDI KHOUZANI

ÖZET

KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR HİBRİT YÖNTEM VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

SARA MAGHSOUDI KHOUZANI

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. ALİ KURT)

DENİZLİ, OCAK - 2025

Bu tezde, Caputo-Fabrizio türevleri ve Laplace dönüşümleri kullanılarak kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için hibrit ve ileri düzey bir yöntem sunulmuştur. Çalışma dört ana bölümde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, temel kavramlar ve konunun daha iyi anlaşılmasını sağlayacak uygulamalı bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde, Riemann-Liouville, Caputo ve Caputo-Fabrizio gibi kesirli türevlerin tanımları ve özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde, önerilen yöntem tanıtılmış ve bu yöntem, Newell-Whitehead-Segel denklemi, Jeofiziksel Korteweg-de Vries (gKdV) denklemi gibi temel denklemler üzerinde uygulanmıştır.

Önerilen yöntem, literatürdeki mevcut çözümlerle karşılaştırılarak doğruluğu ve etkinliği kanıtlanmış kesin ve verimli çözümler sunmaktadır. Bu çalışma, mühendislik, fizik ve uygulamalı bilimlerdeki karmaşık sistemlerin çözümü için güvenilir araçlar sunarak kesirli analiz alanına önemli bir katkı sağlamaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Caputo–Fabrizio türevi. Adomian ayrışım yöntemi. Laplace dönüşümü. Yarı-analitik çözümler

ABSTRACT

A HYBRID METHOD AND APPLICATIONS FOR SOLVING FRACTIONAL ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

**PH. D THESIS
SARA MAGHSOUDI KHOUZANI
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR:DOÇ. DR. ALİ KURT)

DENİZLİ, JANUARY 2025

This thesis develops hybrid and advanced methods for solving fractional differential equations using Caputo-Fabrizio derivatives and transforms. The study is organized into four main sections.

The first section introduces fundamental concepts and practical applications to enhance understanding. The second section examines the definitions and properties of fractional derivatives, including Riemann-Liouville, Caputo, and Caputo-Fabrizio. In the third section, the proposed method is introduced and applied to key equations such as the Newell-Whitehead-Segel equation and the Geophysical Korteweg-de Vries (gKdV) equation.

In the fourth section, the proposed methods offer accurate and efficient solutions, validated through comparisons with existing solutions and exact results in the literature. This research significantly contributes to fractional calculus by providing reliable tools for addressing complex systems in engineering, physics, and applied sciences.

KEYWORDS: Caputo–Fabrizio derivative. Adomian Decomposition method. Laplace transformation. Semi-analytical solutions

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
2.1 Bazı Özel Fonksiyonlar	3
2.1.1 Gamma Fonksiyonu	3
2.1.2 Beta Fonksiyonu	4
2.1.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu	4
2.1.4 Bazı Dönüşüm ve Yöntemler.....	6
2.1.4.1 Laplace Dönüşümü.....	6
2.1.4.2 Adomian Ayrıştırma Yöntemi.....	7
3. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	10
3.1 Kesirli Mertebeden Türev Tanımları.....	11
3.1.1 Riemann-Liouville Kesirli Türevi	12
3.1.2 Caputo Kesirli Türev	12
3.1.3 Erdelyi-Kober Kesirli Türev	12
3.1.4 Grünwald-Letnikov Kesirli Türev	13
3.1.5 Caputo-Fabrizio Kesirli Türev	13
3.2 Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler	15
3.2.1 Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem	15
3.2.2 Kesirli Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem.....	15
4. ÖNERİLEN YÖNTEMİN DETAYLARI VE UYGULAMALARI.....	17
4.1 Ele Alınan Yöntem	17
4.2 Yöntemin Uygulamaları	19
4.2.1 Newell-Whitehead-Segel Denkleminde Yöntemin Uygulanması.....	20
4.2.1.1 Lineer Kesirli Mertebeden Newell-Whitehead-Segel Denklemi	21
4.2.1.2 Lineer Olmayan Kesirli Mertebeli Newell-Whitehead-Segel Denklemi	26
4.2.2 Kesirli Türevli Jeofiziksel Korteweg – de Vries (gKdV) Denklemi	31
4.2.2.1 Genelleştirilmiş Beşinci Mertebeden Sawada–Kotera Denklemi	40
4.2.3 Duffing Osilasyon Denklemleri.....	46
4.2.3.1 Duffing Osilatörü— Serbest Sönümsüz Titreşim	47
4.2.3.2 Gerilmiş Elastik Tel osilatör (Gerilmiş Tele Bağlı Kütle)	52
4.2.4 Kesirli Mertebeden Genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-KdV Sistemi.....	58
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	73
6. KAYNAKLAR.....	74
7. ÖZGEÇMİŞ	82

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1: $t = 1$ durumunda (4. 11) denkleminin üç terimli yarı analitik çözümleri ile tam çözümün 2B grafiklerinin karşılaştırılması.	24
Şekil 4.2: $x = 1$ için (4. 11) denkleminin üç terimli yarı analitik çözümleri ve tam çözümü karşılaştırması.	24
Şekil 4.3: (4. 11) denklemi için, yarı analitik çözümler ve tam çözümlerin 3 boyutlu grafikleri.	25
Şekil 4.4: (4.23) denklemi için yarı analitik çözümler ve tam çözüm için karşılaştırmalı grafikler.	29
Şekil 4.5: $\alpha = 1$ için (4. 23) ün analitik çözümü ve tam çözümüne ait 3B grafik	30
Şekil 4.6: $\alpha = 1$ durumunda (4. 23) denklemi için 2 boyutlu karşılaştırmalı çözüm grafikleri.	30
Şekil 4.7: gKdV denkleminin tam çözümü ile yarı analitik çözümlerin kıyaslamaları	37
Şekil 4.8: gKdV Denkleminin yarı analitik çözümünün $\mu = 1, c = 0.5$ için 3B grafikleri	39
Şekil 4.9: gKdV Denkleminin yarı analitik çözümünün $\mu = 0, c = 0.5$ için 3B grafikleri	40
Şekil 4. 10: Duffing-Görelî Osilatörün Şeması.....	46
Şekil 4.11: Farklı α değerlerine sahip kesirli mertebeli Duffing-görelî osilatörün yarı analitik çözümleri.....	51
Şekil 4.12: Kesirli mertebeli Duffing-relativistik osilatörün tam çözümü ile yarı analitik çözümünün karşılaştırılması	51
Şekil 4.13: $A = 10, \lambda = 0.5$ olduğunda farklı α değerlerine sahip gerilmiş elastik telin kesirli mertebeli yarı analitik çözümleri	57
Şekil 4.14: $\alpha = 2, A = 10$ ve $\lambda = 0.1$ için kesirli mertebeden gerilmiş elastik telin kesin çözümü ile yarı Analitik çözümünün karşılaştırılması	57
Şekil 4.15: 2B grafiklerinin karşılaştırılması: α için ux, t yarı-analitik çözümler ve kesin çözüm.....	69
Şekil 4.16: 3B grafiklerinin karşılaştırılması: α için ux, t yarı-analitik çözümler ve tam çözüm.....	70
Şekil 4.17: 2B grafiklerinin karşılaştırılması: α için vx, t yarı-analitik çözümler ve tam çözüm.....	70
Şekil 4.18: 3B grafiklerinin karşılaştırılması: α için vx, t yarı-analitik çözümler ve tam çözüm.....	71
Şekil 4.19: 2B grafiklerinin karşılaştırılması: α için wx, t yarı-analitik çözümler ve tam çözüm.....	71
Şekil 4.20: 3B grafiklerinin karşılaştırılması: α için wx, t yarı-analitik çözümler ve tam çözüm.....	72

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1: $x = 1$ ve $\alpha = 1$ için 4 terim dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin mutlak hata tablosu.....	23
Tablo 4.2: $\alpha = 1$ ve $\rho = 1$ durumunda, 4 terim dikkate alınarak elde edilen tam ve yarı analitik çözümlerin sayısal değerleri.....	29
Tablo 4.3: $x = 5$, $\mu = 0$ ve $c = 0.5$ için, 4 terim dikkate alınarak tam ve yarı-analitik çözümlerin mutlak hata tablosu.....	37
Tablo 4.4: $t = 1$, $\mu = 0$ ve $c = 0.5$ için 4 terim dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin mutlak hata tablosu.....	37
Tablo 4.5: $x = 5$, $\mu = 1$ ve $c = 0.5$ için, 4 terim dikkate alınarak tam ve yarı-analitik çözümlerin mutlak hata tablosu.....	38
Tablo 4.6: $\mu = 1$ ve $c = 0.5$ olduğunda, 4 terim dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin mutlak hata tablosu.....	38
Tablo 4.7: Kalan Hatalar	38
Tablo 4.8: Çözümün 3 Terimi Kullanılarak $\alpha = 1$, $\lambda = -5$ ve $t = 0.01$ olması durumunda mutlak hata Tablosu	45
Tablo 4.9: $x = 10$ olduğunda ux, t nin 4 terimi dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin karşılaştırması.....	68
Tablo 4.10: $x = 10$ olduğunda $v x, t$ nin 4 terimi dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin karşılaştırması.....	68
Tablo 4.11: $x = 10$ olduğunda $w x, t$ nin 4 terimi dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin karşılaştırması.....	68

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$Re[\]$	:	Kompleks sayıları real kısmı
$\Gamma(\)$	:	Gamma Fonksiyonu operatörü
$B(\ , \)$	:	Beta fonksiyonu
$\mathbb{E}_\beta(\)$	:	Mittag-Leffler fonksiyonu
$\mathcal{L}\{ \ }$	:	Laplace dönüşümü
ADM	:	Adomian Ayrıştırma Yöntemini
KDD	:	Kısmi diferansiyel denklemler
ADD	:	Adi diferansiyel denklemler
α	:	Kesirli mertebe parametresini
D^α	:	α mertebeden kesirli türev operatörü
RL	:	Riemann-Liouville
GL	:	Grünwald Letnikov
C	:	Caputo
CF	:	Caputo-Fabrizio
${}^{RL}D^\alpha$	:	Riemann-Liouville kesirli türevi operatörü
${}^{GL}D^\alpha$	:	Grünwald Letnikov kesirsel türevi operatörü
${}^CD^\alpha$	:	Caputo kesirli türevi operatörü
${}^{CF}D^\alpha$	:	Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü
SK	:	Sawada–Kotera denklem

ÖNSÖZ

Öncelikle, bu akademik yolculukta bilgi, deneyim ve rehberlikleriyle bana her zaman ilham kaynağı olan, değerli hocam Doç. Dr. ALİ KURT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Kendisiyle çalışmak benim için yalnızca bilimsel bir fırsat değil, aynı zamanda hayatımın en önemli derslerinden birini almak anlamına gelmiştir.

Ayrıca, eğitimime bir süre ara verdikten sonra beni yeniden bu yola devam etmem için motive eden, her an yanımda olan sevgili eşime içtenlikle teşekkür ederim. Onun desteği ve inancı olmasaydı bu yolculuğa cesaret edemezdim. Zorluklar karşısında her zaman yanımda oldu ve bana güç verdi.

Canım aileme, özellikle de sevgili anne ve babama, her zaman duaları ve teşvikleriyle yanımda oldukları, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemedikleri için minnettarım. Aynı şekilde, sevinçlerimi ve üzüntülerimi paylaştığım, bana her zaman destek olan kıymetli kardeşlerime de yürekten teşekkür ediyorum.

Bu başarıyı, her zaman yanımda olan ve bana inanan sevdiklerime ithaf ediyorum.

Sara MAGHSOUDI KHOUZANI

1. GİRİŞ

Kesirli türevin tarihi, matematiksel analizin evrimi içinde önemli bir yer tutar. Aslında, kesirli türev kavramı, tam sayı dereceli türevlerin genelleştirilmesi olarak ortaya çıkmış ve matematikçilerin tam sayı olmayan derecelere sahip türevleri incelemeye başlamasıyla şekillenmiştir. Bu tarihsel tanımlama, 17. yüzyıla kadar uzanır ve bu dönemde bazı önemli matematikçiler kesirli türevlerin temellerini atmıştır. 1695 yılında, 1695 yılında, Gottfried Wilhelm Leibniz, fonksiyonu türevlerin kavramını ilk kez tam sayı olmayan dereceler için genelleştirme fikrini tartışmıştır. Bu tarihte, Leibniz, L'Hôpital ile yazışmalarında kesirli türevler hakkında bazı düşünceler ortaya koymuş ve türevlerin kesirli mertebelerde nasıl anlamlandırılabilceği üzerine fikir yürütmüştür. Ancak, bu dönemde kesirli türevlerin matematiksel temelleri tam olarak açıklanamamıştır.

Daha sonra, 18. ve 19. yüzyıllarda matematikçiler kesirli türevlerin teorik çalışmaların derinliklerine indiler ve Augustin-Louis Cauchy ve Joseph Liouville gibi önde gelen matematikçiler, kesirli türevlerin matematiksel özelliklerini ve prensiplerini araştırmışlardır. Bu nedenle, kesirli türevler, yalnızca bir genelleştirme aracı olmaktan çıkıp, bağımsız bir matematiksel analiz dalı olarak şekillenmeye başlamıştır.

Kesirli türevler, sıradan türevlerin genelleştirilmiş bir formu olarak tanımlanır ve yerel olmayan özellikleri sayesinde karmaşık sistemlerin davranışını ve hafıza etkisini başarılı bir şekilde modelleme kapasitesine sahiptirler. Bu nedenle, zamana veya mekâna bağlı olayların davranışını tanımlamak için kullanılırlar ve mühendislik, fizik, sinyal işleme, istatistik, finans, tıp ve sağlık bilimleri gibi çeşitli disiplinlerde geniş bir şekilde uygulanmaktadır (Podlubny 1999, Kilbas ve diğ. 2006, Mainardi 2010, Herrmann 2011).

Aslında, kesirli türevler 20. yüzyılda artan bir ilgi görmüş ve günümüzde hâlâ aktif bir araştırma alanı olarak varlığını sürdürmektedir. Birçok araştırmacı, doğada karşılaşılan olayların modellenmesi yoluyla elde edilen kesirli türevli diferansiyel denklemleri çeşitli yöntemlerle çözmeyi başarmıştır (Hattaf 2024, Stinga 2022,

Kilbas ve diğ 2006, Podlubny 1999). Bu durum, zamanla bilimsel araştırmaların önemli bir alanı hâline gelmiştir. Kesirli türevlerin yerel olmayan özelliği nedeniyle, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü, geleneksel diferansiyel denklemlere kıyasla çok daha karmaşıktır. Bu özellik, doğrudan analitik çözümlerin bulunmasını zorlaştırmış ve araştırmacıları bu tür denklemler için çeşitli sayısal yöntemler geliştirmeye yönlendirmiştir. Sayısal yöntemler geniş kullanım alanına sahip olsa da, karmaşık ve zaman alıcı hesaplamalar gerektirdiği için her zaman pratik bir çözüm sunmamaktadır. Buna karşılık, analitik yöntemler, özellikle Laplace dönüşümü, Fourier dönüşümü ve Mellin dönüşümü gibi integral dönüşüm yöntemlerine dayalı çözümler, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili bir yaklaşım olarak öne çıkmaktadır (Fahad ve diğ. 2023, Podlubny 1997).

Bu çalışmada, Caputo-Fabrizio kesirli türev kullanılarak ifade edilen matematiksel modellerin çözümleri için Laplace dönüşümü ve Adomian ayrıştırma yöntemi ile birleştirerek yeni bir yarı-analitik yöntem verilmiştir. Bu yöntem, karmaşık ve zaman alıcı sayısal hesaplamalara ihtiyaç duymadan, kesirli mertebeli doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin, sayısal hassasiyet açısından kabul edilebilir ve yakınsak çözümlerini elde etmeye olanak tanımaktadır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki kısımlarda kullanılacak temel fonksiyonların tanımları sunulmuştur.

2.1 Bazı Özel Fonksiyonlar

2.1.1 Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu, tamsayı olmayan reel sayılar için genelleştirilmiş bir faktöriyel fonksiyonudur. Γ notasyonu ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Burada z , $Re[z] > 0$ olan bir kompleks sayıdır. Gamma fonksiyonu, özellikle integral hesaplamalarında ve olasılık teorisi gibi alanlarda yaygın olarak kullanılır. Gamma fonksiyonunun bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir (Podlubny, 1999):

$$\Gamma(z + 1) = z!, z \in N,$$

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{(z + 1)(z + 2) \dots (z + n)} (1) = 1$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-z}\Gamma(z)$$

2.1.2 Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu, bir diğer özel fonksiyondur ve aynı zamanda Euler integrallerinin ilk türü olarak da adlandırılır. İntegral hesaplamalarında, kesirli türev ve olasılık teorisinde sıkça kullanılmıştır. Beta fonksiyonu, genellikle $B(z, w)$ sembolüyle gösterilir ve $Re[w], Re[z] > 0$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır (Podlubny 1999):

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt.$$

Beta fonksiyonu, Gamma fonksiyonu ile ilişkilidir ve aşağıdaki formül kullanılarak Gamma fonksiyonu cinsinden ifade edilir.

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Beta fonksiyonunun bazı temel özellikleri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$B(z, w) = B(w, z),$$

$$B(z, w) = \frac{(z-1)!(w-1)!}{(z+w-1)!},$$

$$B(z, w+1) = \frac{w}{z+w} B(z, w).$$

2.1.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu, kesirli analiz alanında yaygın olarak kullanılan ve tam sayı mertebeden olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir role sahip olan bir fonksiyondur.

Üstel fonksiyonun genelleştirilmiş bir formu olarak, Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$\mathbb{E}_\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $Re(\beta) > 0$, $z \in \mathbb{C}$ dir ve $\beta = 1$ değerinde Mittag-Leffler fonksiyonu üstel fonksiyona dönüşür. Ayrıca, Mittag-Leffler fonksiyonunun genelleştirilmesi, β parametresinin tam sayı olmayan değerlerini ve γ parametresini de içerebilir. Bu durumda, genellikle Mittag-Leffler fonksiyonu $\mathbb{E}_{\beta,\gamma}(z)$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{E}_{\beta,\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta k + \gamma)}, \quad Re[\beta], Re[\gamma] > 0,$$

şeklindedir. Aşağıda $|z| < 1$ ve özel β değerleri için, Mittag-Leffler fonksiyonunun bazı özellikleri verilmiştir; (Podlubny 1999, Elma 2021)

$$E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \frac{1}{1-z},$$

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z,$$

$$E_2(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cosh(z),$$

$$E_2(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cosh(z).$$

2.1.4 Bazı Dönüşüm ve Yöntemler

2.1.4.1 Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü, bir fonksiyonu zaman alanından frekans alanına dönüştüren bir matematiksel dönüşüm işlemidir ve mühendislik (Ogata 2010), matematik (Boyce ve DiPrima 2017), fizik (Fowler 1997) ve diğer birçok alanda çok önemli bir araçtır ve birçok uygulaması vardır. Bu dönüşüm diferansiyel denklemleri çözmek veya sistemlerin analizini yapmak için yaygın olarak kullanılır (Zill ve Cullen 2018).

Eğer $f(t)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon ise ve s reel veya kompleks bir parametreyse, bu aşamada

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt$$

Laplace dönüşümü gösteririr (Dascioglu ve Sezer 2017).

Laplace dönüşümü çeşitli avantajlar sağlar, özellikle başlangıç koşulları içeren diferansiyel denklemlerin çözüm sürecini basitleştirebilir. Ek olarak, Laplace dönüşümü, lineerlik, zaman kayması ve frekans türevleme/integralleme gibi frekans alanındaki fonksiyonların manipüle edilmesini kolaylaştıran özelliklere sahiptir.

Laplace dönüşümünün tanımlama gerektiren dikkate değer özelliklerinden biri, $f(t)$ fonksiyonunun n . tamsayı mertebeli bir türevinin Laplace dönüşümüdür.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned}$$

Ayrıca konvolüsyon bağıntısı, matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir (Dascioglu ve Sezer 2017):

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx .$$

Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ve $\mathcal{L}\{g(t)\}$ sırasıyla f ve g nin Laplace dönüşümleriyse, bu durumda Laplace dönüşümlerinin s değişkeni için tanım aralığında aşağıdaki şekilde sonuçlanır (Kisela, 2008)

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

2.1.4.2 Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Şimdi Adomian Ayrıştırma Yönteminin temel ilkelerini gösterelim,

$$L_t[u(x, t)] + R[u(x, t)] + N[u(x, t)] = f(x, t) \quad (2.1)$$

genel formunda ifade edilen doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemi dikkate alalım. Burada $L_t[.] = \partial / \partial t[.]$, t zamanına göre kısmi türev operatörü olarak tanımlanırken, $R[.]$, genellikle x e göre kısmi türevleri kapsayan lineer operatörü ifade etmektedir. Ayrıca $N[.]$, operatörü lineer olmayan bir analitik operatördür ve $f(x, t)$ fonksiyonu, $u(x, t)$ den bağımsız olduğu varsayılan homojen olmayan keyfi bir fonksiyondur (Adomian 1994). (2.1) denkleminin başlangıç koşulu ile $u(x, 0) = v(x)$ birlikte alınması gerektiğine dikkat edilmelidir. Daha sonra, L_t operatörünün tersinir olduğunu varsayarız, böylece L_t^{-1} nin (2.1) denkleminin her iki tarafına da uygulanmasını sağlar ve

$$u(x, t) = v(x) + L_t^{-1}[f(x, t)] - L_t^{-1}[R[u(x, t)]] - L_t^{-1}[N[u(x, t)]] \quad (2.2)$$

elde edilir. Adomian ayrıştırma yönteminde, $u(x, t)$ fonksiyonu aşağıdaki seri toplamı şeklinde olduğu kabul edilir:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) \quad (2.3)$$

Ayrıca, lineer olmayan $N[u(x, t)]$ teriminin $\{A_m\}_{m=0}^{\infty}$ şeklinde ayrıştırılabileceği kabul edilir ve

$$N[u(x, t)] = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(u_0, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (2.4)$$

terimi Adomian polinomları olarak adlandırılır. Bu polinomlar, aşağıdaki basit formül ile belirlenebilir,

$$A_m(u_0, u_1, u_2, \dots, u_m) = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left[N \left(t, \sum_{i=0}^m \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}. \quad (2.5)$$

Eğer (2.3)–(2.5) seri açılımlarını (2.1) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) = & v(x) + L_t^{-1}[f(x, t)] - L_t^{-1} \left[R \left[\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) \right] \right] \\ & - L_t^{-1} \left[N \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m(u_0, u_1, u_2, \dots, u_m) \right] \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda belirtilen denklemden aşağıdaki yineleme ilişkisi elde edilir,

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= v(x) + L_t^{-1}[f(x, t)], \\ u_{i+1}(x, t) &= L_t^{-1}[R[u_i(x, t)]] + L_t^{-1}[A_i(u_0, u_1, u_2, \dots, u_m)], \\ i &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Şimdi (2.6) denklemini kullanarak (2.1) denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$u(x, t) \cong \sum_{i=0}^m u_i(x, t),$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m u_i(x, t) = u(x, t).$$

Adomian ayrıştırma yöntemi serisi açılımında dikkate alınan terimlerin sayısı ne kadar fazlaysa, yarı analitik çözümün sayısal doğruluğu da o kadar yüksektir (Mak ve diğ 2021).

Daha önceki bölümde belirttiğimiz gibi, kesirli türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek ve bu denklemleri çözmek için birçok yöntem kullanılmıştır. Bu yöntemler arasında Homotopi Pertürbasyon Yöntemi (Jassim 2015, Javeed ve diğ 2019), Homotopi Analiz Yöntemi (Hashim ve diğ 2009), Tekrarlama Yöntemi (Singh ve Kumar 2017), Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (Ahrabi ve Momenzadeh 2018), Adomian Ayrıştırma Yöntemi (Sumiati ve diğ 2020) ve benzeri yöntemler bulunmaktadır.

Ayrıca, yukarıda belirtilen tekrarlamalı yöntemlerinin yanı sıra, çeşitli dönüşümlerin birleştirilmesiyle hibrit ve uygulamalı yöntemlere de ulaşılabileceği ifade edilmiştir. Bu hibrit yaklaşımlar, karmaşık problemleri çözmek için güçlü bir araç sunmaktadır.

Araştırma tezimiz, farklı türlerdeki kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için özel olarak tasarlanmış yarı-analitik bir yöntem ifade edilmiştir. Bu yöntem, yüksek doğrulukta sonuçlar üretebilmekte ve bu tür problemleri analiz etmek için araştırmacılara daha etkili araçlar sağlamayı amaçlamaktadır.

3. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Daha önce de belirttiğimiz gibi, kesirli hesap, gerçek dünya problemlerinin karmaşık dinamiklerini anlamada önemli bir rol oynamaktadır. Bu durum, doğal olayların daha doğru bir şekilde modellenmesini sağlayan yerel olmayan operatörler aracılığıyla gerçekleşmektedir. Kesirli türevlerin kullanımı, gerçek hayatta meydana gelen olaylar üzerine çalışan araştırmacılar, mühendisler, matematikçiler ve bilim insanları için oldukça avantajlıdır (Miller ve Ross 1993, Kumar ve Baleanu 2019). Kesirli analiz, elektromanyetik dalgalar (Atangana ve Baleanu 2017), difüzyon denklemleri (Yang ve diğ. 2019), viskoelastisite (Bagley ve Torvik 1983), polarizasyon (Berezovsky ve Cheremnykh 2018), elektrot-elektrolit (Sun ve Zhao 2017), ısı transferi (Yang ve diğ. 2019), kontrol teorisi (Kilbas ve diğ. 2006), finans (Raberto ve diğ. 2002), biyomedikal mühendislik ve biyoloji (Prakash ve Verma 2019) gibi çeşitli önemli alanlarda kullanılmaktadır.

Bir kesirli türev, D^α şeklinde gösterilen, sıradan türev kavramını genişleten bir matematiksel operatördür. Kesirli türevlerin tarihi, L'Hopital'in 1695 yılında Leibniz'e bir mektup yazarak n sayısının tam sayı olmayan durumunda

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

ifadesinin yorumu hakkında bilgi talep etmesiyle başlar. Bu soru, kesirli hesap teorisinin gelişimine yol açmıştır. Tam sayı mertebeli diferansiyel ve integral hesabının genelleştirilmesi olarak, tam sayı olmayan türevlerin ve integralleme kavramları daha önce de bahsedilmiş olsa da, kesirli türevin ilk tanımı Liouville ve Riemann tarafından 19. yüzyılın sonunda yapılmıştır (Girejko ve diğ. 2011, Diethelm 2010).

Bu tarihten itibaren, kesirli diferansiyel denklemleri ifade etmek için Riemann-Liouville (R-L), Caputo gibi iyi bilinen türevlerin yanı sıra Atangana-Baleanu ve

Caputo-Fabrizio gibi daha yeni türevler de dahil olmak üzere çeşitli kesirli mertebeden türev kavramları mevcuttur (Atangana ve Baleanu 2016, Caputo ve Fabrizio 2015).

Farklı araştırmacılar klasik tam sayı mertebeli türevin farklı özelliklerini korumayı hedefledikleri için kesirli türev farklı şekillerde tanımlanmıştır, her bir tanımın kendisine özgü avantajları ve dezavantajları vardır. Dahası, bu tanımlar genellikle örtüşmez ve hatta bazı fonksiyonlar için bile aynı sonucu vermezler. Bu uyumsuz tanımlar nedeniyle kullanılan tanımın açıkça belirtilmesi önemlidir.

Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevler, kesirli analizde iki yaygın tanımdır. Her ikisi de kesirli türev kavramını içermekle birlikte, farklı özelliklere ve uygulamalara sahiptir. İyi bilinen Riemann-Liouville ve Caputo türev tanımları kesirli integral formunda ifade edilen tanımlardır ve iki türevdeki küçük değişikliklerle başka tanımlar elde edilebilir.

Aslında Caputo tanımı, Riemann-Liouville tanımının eksikliklerini gidermek için Riemann-Liouville üzerinde yapılan küçük değişikliklerle elde edilmiştir. Bu tanımın başlangıç-değer problemlerinde daha kullanışlı olduğu düşünülmektedir. Ek olarak, birçok tanımın temelini oluşturan Riemann-Liouville tanımının uygun koşullar altında Grünwald–Letnikov tanımına dönüştürülebildiği görülmektedir (Diethelm 2010).

Caputo ve Fabrizio, 2015 yılında, tekil bir çekirdek içermeyen yeni bir kesirli türev önerdiler. Önceden Riemann-Liouville ve Caputo'da kullanılan singüler çekirdek, tekil olmayan üstel bir çekirdek ile değiştirilmiştir ve bu önerilen yaklaşımın temel avantajıdır (Rosales García ve diğ. 2018).

Bu bilgilere dayanarak, farklı formlara ve kullanım alanlarına sahip çeşitli kesirli türev tanımlarının daha iyi anlaşılması için, yukarıda sunulan kesirli türev tanımları bu bölümde açıklanmış ve bazı özellikleri analiz edilmiştir.

3.1 Kesirli Mertebeden Türev Tanımları

Literatürde çok farklı kesirli türevler tanımları bulunmaktadır. Bunlardan bazıları şu şekilde ifade edilebilir.

3.1.1 Riemann-Liouville Kesirli Türevi

$f(t)$ 'nin $[k, t]$ aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olduğunu varsayalım. $n, n - 1 \leq \alpha < n$ olacak şekilde pozitif bir tam sayı ve $t > k$ için, $f(t)$ fonksiyonunun α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki şekildedir (Podlubny 1999):

$${}^{RL}D^\alpha [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

3.1.2 Caputo Kesirli Türev

Bu tanım, Riemann-Liouville türevinden sonra literatürde en sık kullanılan kesirli türev tanımlarından biridir ve Caputo tarafından 1967 yılında ifade edilmiştir. Bu tanım, Riemann-Liouville tanımını temel alan kesirli türev tanımlarından biridir. $n, n - 1 \leq \alpha < n$ olacak şekilde pozitif tam sayı olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun α . mertebeden Caputo kesirli türevi aşağıdaki şekildedir (Podlubny 1999):

$${}^CD^\alpha [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^x (x - t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} [f(t)] dt,$$

3.1.3 Erdelyi-Kober Kesirli Türev

$f(x)$ sonlu (a, b) aralığında tanımlı, sürekli ve n kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, ayrıca $\alpha, \sigma, \mu \in \mathcal{R}$, $\alpha, \sigma > 0$ ve $n - 1 < \alpha < n$ olmak koşuluyla α . mertebeden Erdelyi-Kober kesirli integral operatörü

$$(I_{0, \sigma, \eta + \sigma}^\alpha f)(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha + \eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{\sigma\eta + \sigma - 1} f(t) dt}{(x^\sigma - t^\sigma)^{1 - \alpha}}, \quad 0 < x < \infty,$$

olmak üzere, Erdelyi-Kober kesirli türevinin tanımı,

$$(D_{0,\sigma,\eta}^\alpha f)(x) = x^{-n\sigma} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(\eta+n)} (I_{0,\sigma,\eta+\sigma}^{n-\alpha} f)(x) \quad \sigma > 0$$

şeklindedir (Atangana 2016).

3.1.4 Grünwald-Letnikov Kesirli Türev

$n, n < p < n + 1$ şartını sağlayan bir tamsayı, h sürekli bir fonksiyon, $f^k(x), k = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ türevleri de $[a, x]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun p . mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türevi

$$({}^{GL}D_t^p f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(a)(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+n+1)} \int_a^x (x-t)^{n-p} f^{n+1}(t) dt$$

dir (Podlubny 1999).

3.1.5 Caputo-Fabrizio Kesirli Türev

Kabul edelim ki $a, b, \alpha \in R, b > a, a \in [-\infty, t), f \in H^1(a, b), \alpha \in [0, 1]$ olsun, zaman değişkenine göre α . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevi şu şekilde tanımlanır:

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}} d\tau.$$

Buradaki $N(\alpha)$, $N(0) = N(1) = 1$ olacak şekilde bir normalleştirme fonksiyonudur. Caputo kesirli türevde olduğu gibi, $f(t)$ sabitse bu türev sıfır olacaktır ve çekirdek $t = \tau$ için bir tekilliğe sahip değildir (Al-Refai ve Pal 2019).

Caputo-Fabrizio türevi, $H^1(a, b)$ 'ye ait olmayan fonksiyonlara da uygulanabilir. Aslında, $f \in L^1(-\infty, b)$ ve herhangi bir $\alpha \in [0, 1]$ için yukarıdaki tanım şu şekilde de ifade edilebilir (Caputo ve Fabrizio 2015):

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{\alpha N(\alpha)}{1-\alpha} \int_{-\infty}^t (f(t) - f(\tau)) e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}} d\tau.$$

Teorem (Caputo ve Fabrizio 2015): Caputo-Fabrizio türevi bağlamında, eğer $g(t)$ fonksiyonu $g^{(s)}(a) = 0$ koşulunu sağlıyorsa (burada $s = 1, 2, \dots, n$), o hâlde aşağıdaki ilişki geçerlidir:

$${}^{CF}D_t^\alpha ({}^{CF}D_t^\omega g(t)) = {}^{CF}D_t^\omega ({}^{CF}D_t^\alpha g(t)).$$

Bu teorem, Caputo-Fabrizio türevinin diferansiyel operatörler arasındaki değişme özelliğini ifade etmekte olup, verilen başlangıç koşulları altında operatörlerin yer değiştirebildiğini gösterir.

Caputo-Fabrizio türevinin Laplace dönüşümü

Caputo-Fabrizio türevinin Laplace dönüşümü, aşağıdaki şekilde verilir:

$$\mathcal{L}[{}^{CF}D_t^\alpha f(t)] = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f'(\tau) e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}} d\tau dt.$$

Dolayısıyla, Laplace dönüşümünün konvolüsyon özelliğinden,

$$\mathcal{L}[{}^{CF}D_t^\alpha f(t)] = \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L}[f'(\tau)] \mathcal{L}\left[e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}}\right] = \frac{s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)}{s + \alpha(1-s)}$$

şeklinde ifade edebiliriz (Caputo ve Fabrizio 2015).

Caputo-Fabrizio türevi için belirtilen tüm özellikler göz önüne alındığında, bu türev aslında klasik ve kesirli türevler arasında bir köprü oluşturacak şekilde tasarlanmıştır. Ayrıca, yumuşak çekirdeği sayısal kararlılığı artırır ve hesaplama

yöntemlerinde daha iyi yakınsama sağlar. Bu çalışmada, yukarıda özellikleri verilen kesirli türevin tanım ve özelliklerini kullanarak yeni bulgulara ulaşılmıştır.

3.2 Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Matematiksel modellemenin, sistemlerin davranışlarını analiz etmek ve anlamak için güçlü bir araç olduğu iyi bilinmektedir. Bu bağlamda, kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemler (kesirli ADD) ve kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler (kesirli KDD), zaman veya mekâna bağlı değişiklikleri tanımlamak için kullanılan temel araçlardır.

3.2.1 Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem

Bir bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre kesirli mertebeden türevlerini içeren denklemlere kesirli mertebeden adi diferansiyel denklem denir. Kesirli mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemin en genel formu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Podlubny 1999).

$$a_n D^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} D^{\beta_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\beta_1} y(t) + a_0 D^{\beta_0} y(t) = f(t)$$

3.2.2 Kesirli Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem

Bir bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kesirli mertebeden türevlerini içeren denklemlere kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem denir (Podlubny 1999). Örnek olarak Nigmatullin'in kesirli difüzyon denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$D_t^\alpha u(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

Sonraki bölümde, kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmek için önerilen yöntemi açıklanacaktır. Ayrıca, bu yöntemin performansını daha iyi açıklamak ve değerlendirmek amacıyla çeşitli denklemler örnek olarak ele alınacaktır. Bu örnekler, yöntemin doğadaki olaylardan türetilen matematiksel modellerde ve mühendislikteki karmaşık problemlerin çözümündeki uygulamalarını gösterecektir.



4. ÖNERİLEN YÖNTEMİN DETAYLARI VE UYGULAMALARI

Bu bölümde, önerilen yöntemin temel prensipleri ve uygulama detayları ayrıntılı bir şekilde ele alınacaktır. Önerilen yöntem, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü için geliştirilen yenilikçi bir yaklaşımı temsil etmektedir. Bu yaklaşım, teorik sağlamlığı ve sayısal verimliliği birleştirerek, farklı türlerdeki problemleri çözme potansiyeline sahiptir. Ayrıca, yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu göstermek amacıyla, çeşitli gerçek dünya problemlerine ilişkin örnekler sunulacak ve uygulama adımları detaylandırılacaktır. Bu örnekler, yöntemin geniş bir uygulama alanına hitap ettiğini ve bilimsel araştırmalarda kullanılabilirliğini ortaya koymaktadır.

4.1 Ele Alınan Yöntem

Kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem;

$${}^{CF}D_t^\alpha u(x, t) + D_x^n u(x, t) + R(u(x, t)) + N(u(x, t)) = g(x, t),$$
$$t > 0, x > 0, 0 < \alpha \leq 1, u(x, 0) = h(x) \quad (4.1)$$

olarak verilsin. Burada, D_t^α in α . mertebesindeki Caputo-Fabrizio kesirli diferansiyel operatördür. D_x^n sırasıyla x teki en yüksek mertebeli lineer klasik türev operatörü, $R(u(x, t))$ lineer, $N(u(x, t))$ lineer olmayan operatöre karşılık gelir ve $g(x, t)$ homojen olmayan terimdir.

Denklem (4.1)' e t bağımsız değişkenine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\mathcal{L}[{}^{CF}D_t^\alpha u] = \mathcal{L}[g(x, t)] - \mathcal{L}[D_x^n u] - \mathcal{L}[R(u) + N(u)]. \quad (4.2)$$

Caputo-Fabrizio kesirli türevinin Laplace dönüşümü yardımıyla, aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$\frac{s\mathcal{L}[u] - u(0)}{s + \alpha(1 - s)} = \mathcal{L}[g(x, t)] - \mathcal{L}[D_x^n u] - \mathcal{L}[R(u) + N(u)]. \quad (4.3)$$

Yukarıdaki denklem basitleştirilirse,

$$\mathcal{L}[u] = \frac{1}{s}u(x, 0) + \frac{s + \alpha(1 - s)}{s}(\mathcal{L}[g(x, t)] - \mathcal{L}[D_x^n u] - \mathcal{L}[R(u) + N(u)]) \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) denkleminin her iki tarafında ters Laplace dönüşümü alınmak üzere (4.5) denklemi elde edilir,

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s}u(x, 0) \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha(1 - s)}{s}(\mathcal{L}[g(x, t)] - \mathcal{L}[D_x^n u] - \mathcal{L}[R(u) + N(u)]) \right]. \quad (4.5)$$

Şimdi, $u(x, t)$ aranan çözümü aşağıda verilen sonsuz bir seri ile temsil edilmek üzere

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t), \quad (4.6)$$

(4.1) denklemindeki lineer olmayan kısım aşağıdaki şekilde gösterilsin,

$$N(u(x, t)) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m. \quad (4.7)$$

Buradaki A_m terimi, aşağıdaki eşitlik yardım ile elde edilen Adomian polinomlarıdır,

$$A_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left[N \left(\sum_{i=0}^m \lambda^i u_i \right) \right] \Big|_{\lambda=0}.$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.8)$$

Şimdi (4.6)–(4.8) denklemlerini (4.5) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} u_m &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} u(x, 0) \right] + \\ &\frac{s + \alpha(1-s)}{s} \mathcal{L}^{-1} \left(\mathcal{L}[g(x, t)] - \mathcal{L} \left[D_x^n \sum_{m=0}^{\infty} u_m \right] \right) - \\ &\frac{s + \alpha(1-s)}{s} \mathcal{L}^{-1} \left(\mathcal{L} \left[R \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_m \right) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \right] \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Denklemin her iki tarafını karşılaştırarak (4.9) yardımıyla aşağıdaki yinelemeli algoritma

$$\begin{aligned} u_0 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} u(x, 0) \right], \\ u_{m+1} &= \frac{s + \alpha(1-s)}{s} \left(\mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[g(x, t)]] - \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[D_x^n u_m]] - \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[R(u_m) + A_m]] \right) \\ m &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. Böylece, (4.10) denklemini kullanarak (4.1) lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü elde edilir.

4.2 Yöntemin Uygulamaları

Önerilen yöntemin detaylarının aktarılmasının ardından, yöntemin pratik uygulamalarını göstermek için çeşitli örnekler verilecektir. Bu bölümde, doğal olaylar, fiziksel sistemler ve mühendislik modellerinden alınan matematiksel denklemler kullanılarak yöntemin performansı ve etkinliği değerlendirilecektir. Seçilen örnekler, yöntemin karmaşık problemleri çözme konusundaki geniş kullanım alanını ortaya koymayı hedeflemektedir. Bu sayede, yöntemin yalnızca problem çözme yeteneği değil, aynı zamanda gerçek sistemlerin analizine olan katkısı da daha iyi anlaşılacaktır.

4.2.1 Newell-Whitehead-Segel Denkleminde Yöntemin Uygulanması

Newell-Whitehead-Segel denklemi, iki boyutlu sistemlerde şerit deseninin görünümünü açıklayan en önemli genlik denklemlerinden biridir. Ayrıca, bu denklem Rayleigh-Benard konveksiyonu, Faraday kararsızlığı, doğrusal olmayan optikler, kimyasal reaksiyonlar ve biyolojik sistemler gibi çeşitli sistemlerde uygulama bulmuştur. Bu nedenle bu denklemin çözümüne ulaşmak çok önemlidir (Kanchana ve diğ. 2020), (Latif ve diğ. 2020), (Newell and Whitehead 1969).

Newell-Whitehead-Segel denkleminin Caputo-Fabrizio kesirli modeli şu şekilde verilir:

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + cU - dU^r, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

burada α , zaman-kesirli türevin mertebesini belirleyen bir parametredir. $\alpha = 1$ olduğunda, denklemin kesirli formu aşağıda gösterilen klasik forma indirgenir:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + cU - dU^r.$$

Burada, r pozitif bir tamsayı ve $k > 0$ olmak üzere $c, d, k \in R$ sabitleri, $U(x, t)$ aranan fonksiyonu zaman değişkeni t 'nin ve uzay değişkeni x 'in bir fonksiyonudur; ayrıca $t \geq 0, x \in R$ dir. Bu algoritmanın etkinliği, doğrusal olmayan kesirli Newell-Whitehead-Segel denkleminin bazı örnekleri kullanılarak gösterilecektir.

Son yıllarda, klasik Newell-Whitehead-Segel denklemini araştırmak için diferansiyel dönüşüm yöntemi (Aasaraai 2011), indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (Keskin ve Oturanc 2009), Adomian ayrışım yöntemi (Pue-On 2013), homotopi pertürbasyon yöntemi (Jassim 2015), varyasyonel iterasyon yöntemi (Prakash ve diğ. 2019), sonlu fark şeması (Hilal ve diğ. 2020) gibi çeşitli yöntemler kullanılmıştır. Ayrıca, bu kesirli denklemi çözmek için çeşitli analitik (Areshi ve diğ. 2022) ve yaklaşık çözümler önerilmiştir.

Aşağıdaki örneklerde, Caputo-Fabrizio operatörünü içeren Newell-Whitehead-Segel denklemini çözmek için Adomian ayrıştırma yönteminin ve Laplace dönüşümü

ile birlikte kullanılmasından oluşan bir yöntem uyguluyoruz. Bu yeni yöntem, kesirli terimlerin uygulamadaki zorlukların üstesinden gelir. Laplace dönüşümü sayesinde, herhangi bir diskretize etme veya normalleştirme işlevine ihtiyacımız yoktur. Adomian polinomları ve Laplace dönüşümünün bu kombinasyonu, lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerini elde etmek için önemli bir araçtır. Genel olarak, bu yöntem birçok doğrusal veya doğrusal olmayan kesirli mertebeli KDD'lerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılabilir.

4.2.1.1 Lineer Kesirli Mertebeden Newell-Whitehead-Segel Denklemleri

Homojen zaman-kesirli mertebeden Newell-Whitehead-Segel denklemi (Prakash and Verma 2019),

$$D_t^\alpha u(x, t) = D_x^2 u(x, t) - 2u(x, t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.11)$$

başlangıç koşulu ile

$$u(x, 0) = e^x \quad (4.12)$$

şeklinde verilsin.

Eğer $0 < \alpha \leq 1$ ise, Caputo-Fabrizio kesirli operatörünü uygulayarak ve t ye göre Laplace dönüşümünü alarak,

$$\mathcal{L}[{}^{CF}D_t^\alpha u(x, t)] = \mathcal{L}[D_x^2 u(x, t)] - \mathcal{L}[2u(x, t)] \quad (4.13)$$

olur. Caputo-Fabrizio kesirli türevinin Laplace dönüşümünden faydalanılarak,

$$\frac{s\mathcal{L}[u(x, t)] - u(x, 0)}{s(1 - \alpha) + \alpha} + 2\mathcal{L}[u(x, t)] = \mathcal{L}[D_x^2 u(x, t)] \quad (4.14)$$

elde edilir. Denklem (4.14) i sadeleştirerek,

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \frac{e^x}{s(3 - 2\alpha) + 2\alpha} + \frac{s(1 - \alpha) + \alpha}{s(3 - 2\alpha) + 2\alpha} \mathcal{L}[D_x^2(x, t)] \quad (4.15)$$

denklemini elde edilir. (4.15) denkleminin t bağımsız değişkenine göre ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$u(x, t) = \frac{e^x e^{-\frac{2\alpha t}{3-2\alpha}}}{3 - 2\alpha} + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1 - \alpha) + \alpha}{s(3 - 2\alpha) + 2\alpha} \mathcal{L}[D_x^2(x, t)] \right] \quad (4.16)$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi, Adomian ayrıştırma yöntemini uygulayarak, (4.16) denklemini

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m = \frac{e^x e^{-\frac{2\alpha t}{3-2\alpha}}}{3 - 2\alpha} + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1 - \alpha) + \alpha}{s(3 - 2\alpha) + 2\alpha} \mathcal{L} \left[D_x^2 \sum_{m=0}^{\infty} u_m \right] \right] \quad (4.17)$$

formuna dönüşür. Her iki tarafı karşılaştırarak ve yinelemeli algoritmayı kullanarak,

$$u_0 = \frac{e^{x - \frac{2\alpha t}{3-2\alpha}}}{3 - 2\alpha}, \quad (4.18)$$

$$u_1 = t \frac{e^{x - \frac{2\alpha t}{3-2\alpha}}}{(3-2\alpha)^2}, \quad (4.19)$$

$$u_2 = \frac{1}{2!} t^2 \frac{e^{x - \frac{2\alpha t}{3-2\alpha}}}{(3 - 2\alpha)^3}, \quad (4.20)$$

$$u_3 = \frac{1}{3!} t^3 \frac{e^{x - \frac{2\alpha t}{3-2\alpha}}}{(3 - 2\alpha)^4}, \quad (4.21)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $u(x, t)$ için yaklaşık çözüm:

$$u(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{x-\frac{2\alpha t}{3-2\alpha}}}{3-2\alpha} + t \frac{e^{x-\frac{2\alpha t}{3-2\alpha}}}{(3-2\alpha)^2} + \frac{1}{2!} t^2 \frac{e^{x-\frac{2\alpha t}{3-2\alpha}}}{(3-2\alpha)^3} + \frac{1}{3!} t^3 \frac{e^{x-\frac{2\alpha t}{3-2\alpha}}}{(3-2\alpha)^4} \\
&\quad + \dots \\
&= \frac{e^{x-\frac{2\alpha t}{3-2\alpha}}}{3-2\alpha} \left[1 + \frac{t}{3-2\alpha} + \frac{t^2}{2! (3-2\alpha)^2} + \frac{t^3}{3! (3-2\alpha)^3} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{3-2\alpha} e^{x-\frac{2\alpha t}{3-2\alpha}} e^{\frac{t}{3-2\alpha}} \\
&= \frac{e^{x-\frac{t(2\alpha-1)}{3-2\alpha}}}{3-2\alpha}
\end{aligned}$$

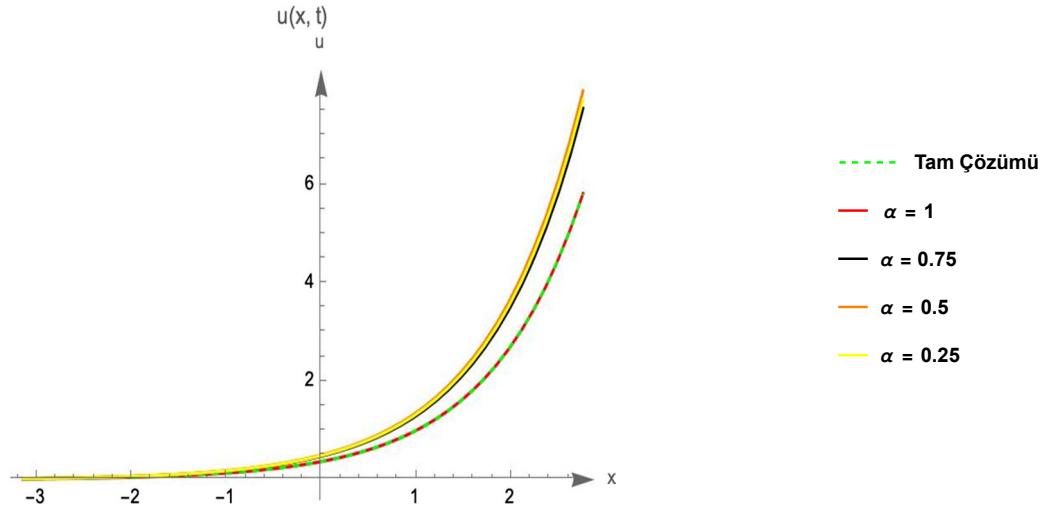
şeklinde elde edilir.

Tablo 1 de, kesirli Newell-Whitehead-Segel denkleminin yaklaşık çözümleri, (4.11) denklemi için, bu dört çözüm göz önüne alındığında, $x = 1$ de $\alpha = 1$ için tam çözüm ile (Prakash ve diğ. 2019) sayısal olarak karşılaştırılır.

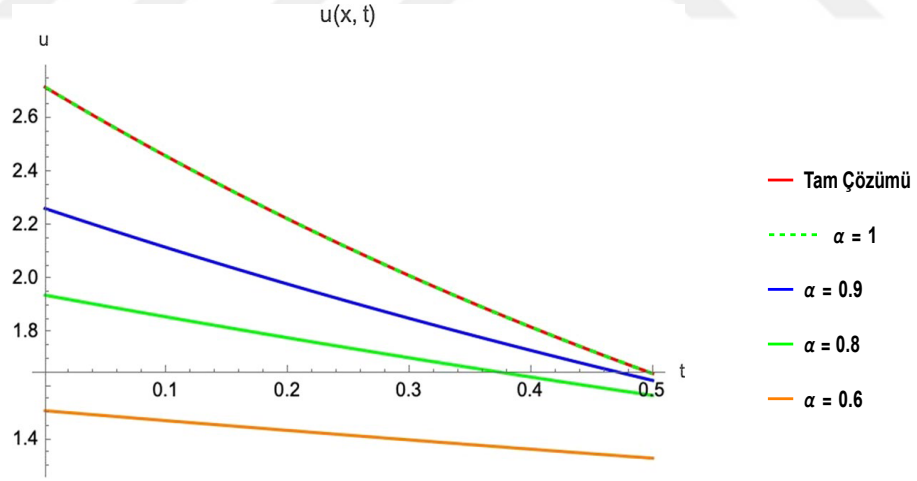
Tablo 4.1: $x = 1$ ve $\alpha = 1$ için 4 terim dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin mutlak hata tablosu

$\alpha = 1$			
t	Uygulanan Yöntem (u_U)	Tam Çözüm (u_T)	$ u_T - u_U $
0.01	2.691234471	2.691234472	1.1124×10^{-9}
0.02	2.664456224	2.664456241	1.7481×10^{-8}
0.03	2.637944372	2.637944459	8.6920×10^{-8}
0.04	2.611696203	2.611696473	2.6981×10^{-7}
0.05	2.585709012	2.585709659	6.4698×10^{-7}

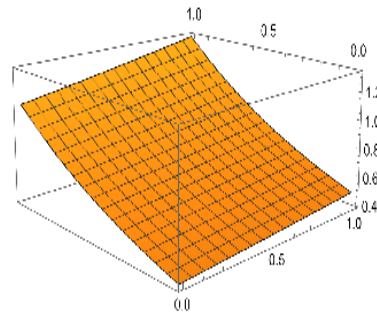
Şekil 4.1, $t = 1$ anında Denklem (4.11) için elde edilen yarı analitik çözüm ile tam çözümün karşılaştırmasını göstermektedir. Buna ek olarak, Şekil 4.2, $x = 1$ konumunda (4.11) denkleminin çözümlerine ilişkin karşılaştırmalı grafikler sunmaktadır.



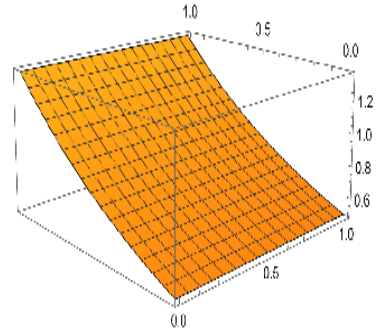
Şekil 4.1: $t = 1$ durumunda (4. 11) denkleminin üç terimli yarı analitik çözümleri ile tam çözümün 2B grafiklerinin karşılaştırılması.



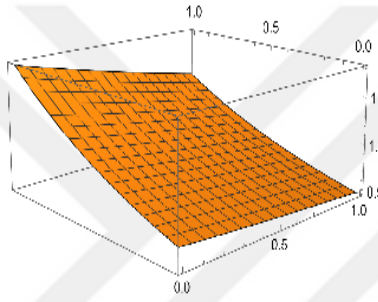
Şekil 4.2: $x = 1$ için (4. 11) denkleminin üç terimli yarı analitik çözümleri ve tam çözümü karşılaştırması.



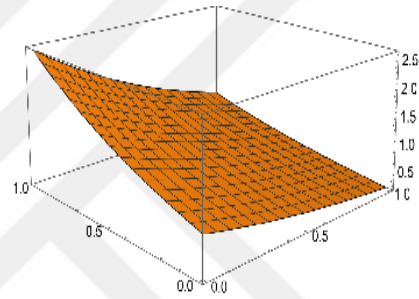
$$\alpha = 0.25$$



$$\alpha = 0.5$$



$$\alpha = 0.75$$



$$\alpha = 1 \text{ (Tam çözüm)}$$

Şekil 4.3: (4. 11) denklemi için, yarı analitik çözümler ve tam çözümlerin 3 boyutlu grafikleri.

Şekil 4.3, kesirli türevin mertebesindeki değişimlerin çözümün fiziksel davranışını nasıl etkilediğini göstermektedir. Grafiklerde, $u(x,t)$ için farklı α değerlerine göre elde edilen üç terimli yarı analitik çözümler yer almaktadır. Elde edilen sonuçlar, $\alpha = 1$ durumunda, Prakash ve ark. (2019) tarafından sunulan tam çözüm ile bu çalışmada kullanılan yöntemle elde edilen yarı analitik çözümlerin birbirleriyle uyumlu olduğunu ortaya koymaktadır.

4.2.1.2 Lineer Olmayan Kesirli Mertebeli Newell-Whitehead-Segel Denklemi

Kesirli mertebeden lineer olmayan Newell-Whitehead-Segel denklemini (Jassim, 2015) ele alalım:

$$D_t^\alpha u(x, t) = 5D_x^2 u(x, t) + 2u(x, t) + u^2(x, t),$$

$$0 < \alpha \leq 1. \quad (4.23)$$

Bu denklem, aşağıdaki başlangıç koşuluna sahiptir:

$$u(x, 0) = \rho. \quad (4.24)$$

Buradaki ρ keyfî sabittir ve D_t^α , $0 < \alpha \leq 1$ mertebesinin Caputo-Fabrizio kesirli operatörüdür. (4.23) denklemi için kesirli Caputo Fabrizio'nun Laplace dönüşümünü t değişkenine göre uygulayarak,

$$\mathcal{L}^{CF}[D_t^\alpha u(x, t)] = \mathcal{L}[5D_x^2 u(x, t)] + \mathcal{L}[2u(x, t)] + \mathcal{L}[u^2(x, t)], \quad (4.25)$$

başlangıç koşulunu kullanarak,

$$\frac{s\mathcal{L}[u(x, t)] - u(x, 0)}{s(1 - \alpha) + \alpha} = \mathcal{L}[5D_x^2 u(x, t)] + \mathcal{L}[2u(x, t)] + \mathcal{L}[u^2(x, t)], \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26) denklemi regüle edilirse,

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \frac{\rho}{s(2\alpha - 1) - 2\alpha} + \frac{5(s(1 - \alpha) + \alpha)}{s(2\alpha - 1) - 2\alpha} \mathcal{L}[D_x^2 u] +$$

$$\frac{s(1 - \alpha) + \alpha}{s(2\alpha - 1) - 2\alpha} \mathcal{L}[u^2(x, t)], \quad (4.27)$$

olur. (4. 27) denklemi için ters Laplace dönüşümünü alırsak,

$$u(x, t) = \frac{\rho e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}}}{2\alpha-1} + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5(s(1-\alpha) + \alpha)}{s(2\alpha-1) - 2\alpha} \mathcal{L}[D_x^2 u] \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1-\alpha) + \alpha}{s(2\alpha-1) - 2\alpha} \mathcal{L}[u^2(x, t)] \right] \quad (4.28)$$

denklemini elde edilir. ADM yöntemi kullanarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m = \frac{\rho e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}}}{2\alpha-1} + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5(s(1-\alpha) + \alpha)}{s(2\alpha-1) - 2\alpha} \mathcal{L} \left[D_x^2 \sum_{m=0}^{\infty} u_m \right] \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1-\alpha) + \alpha}{s(2\alpha-1) - 2\alpha} \mathcal{L} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m \right] \right]. \quad (4.29)$$

Buradaki, $A_m(x)$ lineer olmayan terimlerin dönüştürülmüş halidir, $u^2(x, t)$ ve ilk lineer olmayan terimler aşağıdaki şekilde ve benzer terimler olarak verilir:

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2 \\ A_1 &= 2u_0 u_1 \\ A_2 &= 2u_0 u_1 + u_1^2 \\ A_3 &= 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2 . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Şimdi (4. 29) denklemini için (4.10) ile verilen formül yinelemeli algoritma uygulanırsa,

$$\begin{aligned} u_0 &= \rho \frac{e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}}}{2\alpha-1} \\ u_1 &= -\left(\frac{1}{2}\right) \rho^2 \frac{e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}}}{(2\alpha-1)^3} \left[(2\alpha-3) e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}} + 1 \right] \\ u_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rho^3 \frac{e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}}}{(2\alpha-1)^5} \left[(2\alpha-3) (4\alpha-5) e^{\frac{4\alpha t}{2\alpha-1}} + 2((2\alpha-3))e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}} + (2\alpha-1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 = & - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \rho^4 \frac{e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}}}{(2\alpha-1)^7} \left[\frac{(2\alpha-3)(6\alpha-7)(10\alpha-13)}{3} e^{\frac{6\alpha t}{2\alpha-1}} \right. \\
& \left. + 3(2\alpha-3)(4\alpha-5) e^{\frac{4\alpha t}{2\alpha-1}} + \frac{(2\alpha-3)(10\alpha-13) + 30(\alpha-1)}{3} \right].
\end{aligned} \tag{4.31}$$

sonuçlarına ulaşılır. Böylece,

$$u(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
= & \rho \frac{e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}}}{2\alpha-1} - \left(\frac{1}{2}\right) \rho^2 \frac{e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}}}{(2\alpha-1)^3} \left[(2\alpha-3) e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}} + 1 \right] + \\
& \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rho^3 \frac{e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}}}{(2\alpha-1)^5} \left[(2\alpha-3)(4\alpha-5) e^{\frac{4\alpha t}{2\alpha-1}} + \right. \\
& \left. 2(2\alpha-3) e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}} + (2\alpha-1) \right] - \\
& \left(\frac{1}{2}\right)^3 \rho^4 \frac{e^{\frac{2\alpha t}{2\alpha-1}}}{(2\alpha-1)^7} \left[\frac{(2\alpha-3)(6\alpha-7)(10\alpha-13)}{3} e^{\frac{6\alpha t}{2\alpha-1}} + \right. \\
& \left. 3(2\alpha-3)(4\alpha-5) e^{\frac{4\alpha t}{2\alpha-1}} + \right. \\
& \left. \frac{(2\alpha-3)(10\alpha-13) + 30(\alpha-1)}{3} \right]
\end{aligned} \tag{4.32}$$

yaklaşık çözümü elde edilir. Ayrıca, $\alpha = 1$ ve $\rho = 1$ koyarsak, serinin beşinci ve altıncı terimleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_4 = \frac{e^{2t}}{16} - \frac{e^{4t}}{4} + \frac{3e^{6t}}{8} - \frac{e^{8t}}{4} + \frac{e^{10t}}{16} \tag{4.33}$$

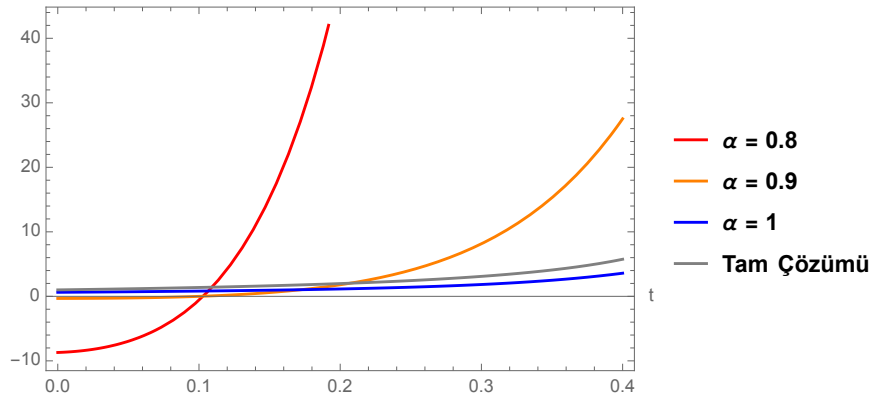
$$u_5 = -\frac{e^{2t}}{32} + \frac{5e^{4t}}{32} - \frac{5e^{6t}}{16} + \frac{5e^{8t}}{16} - \frac{5e^{10t}}{32} + \frac{e^{12t}}{32}. \tag{4.34}$$

Tablo 4.2 de $\alpha = 1$ ve $\rho = 1$ durumları dikkate alınarak önerilen yöntemin çözümü, Jassim (2015) tarafından sunulan diğer çözümle karşılaştırılmıştır. Tabloda verilen hata değerleri, sonuçların kabul edilebilir sınırlar içerisinde olduğunu açıkça göstermektedir.

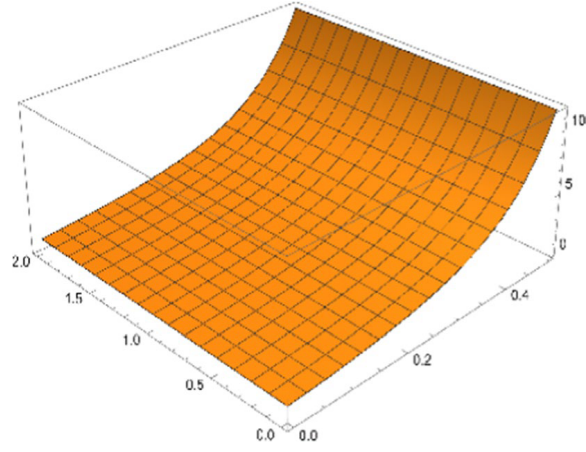
Tablo 4.2: $\alpha = 1$ ve $\rho = 1$ durumunda, 4 terim dikkate alınarak elde edilen tam ve yarı analitik çözümlerin sayısal değerleri

$\alpha = 1$			
t	Uygulanan Yöntem (u_U)	(bkz. Jassim 2015) (u)	$ u_T - u $
0.01	1.030611204	1.030611203	2.9250×10^{-10}
0.02	1.062491317	1.062491320	3.8813×10^{-9}
0.03	1.095714104	1.095714135	3.1619×10^{-8}
0.04	1.130359080	1.130359220	1.4010×10^{-7}
0.05	1.166512045	1.166512514	4.6910×10^{-7}

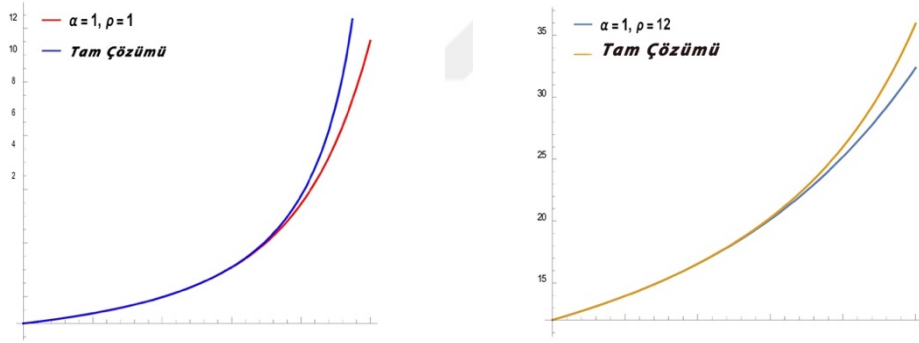
Şekil 4.4 ve Şekil 4.5, (4.23) denklemi için sırasıyla iki boyutlu (2B) ve üç boyutlu (3B) grafikler yardımıyla, önerilen yöntemle elde edilen yarı-analitik çözüm ile literatürde rapor edilen diğer çözümün (Jassim 2015) karşılaştırmasını sunmaktadır. Yapılan analizler, türevin mertebesinin $\alpha = 1$ olduğu durumda, önerilen yöntemden elde edilen yarı-analitik çözümler ve diğer çözümler arasında yüksek düzeyde bir uyum olduğunu göstermektedir. Şekil 4.6, (4.23) denkleminin, $\alpha = 1$, $\rho = 1$ ve $\rho = 12$ durumlarında elde edilen yarı-analitik çözüm ile diğer çözümün karşılaştırmasını sunmaktadır.



Şekil 4.4: (4.23) denklemi için yarı analitik çözümler ve tam çözüm için karşılaştırmalı grafikler.



Şekil 4.5: $\alpha = 1$ için (4. 23) ün analitik çözümü ve tam çözümüne ait 3B grafik



Şekil 4.6: $\alpha = 1$ durumunda (4. 23) denklemi için 2 boyutlu karşılaştırmalı çözüm grafikleri.

4.2.2 Kesirli Türevli Jeofiziksel Korteweg – de Vries (gKdV) Denklemi

1895 yılında Korteweg-de Vries (KdV) denklemi Korteweg ve De Vries (Alharbi and Almatrafi 2022) tarafından bulunmuştur. Bulunan bu denklem, akışkanlar mekaniği alanında, özellikle akışkanlardaki dalgaların dinamik davranışının anlaşılmasında yaygın uygulama alanı bulmuştur. KdV denkleminin matematiksel model olarak kullanıldığı literatür geniş ve kapsamlıdır. Kısa bir genel bakış sağlamak için, KdV denklemi çalışmasındaki bazı son gelişmeler aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Naowarat ve diğ. 2023). Klasik doğrusal olmayan KdV denklemi (Saifullah ve diğ. 2023) şu şekilde verilmektedir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}(x, t) + \mathcal{W}(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{W}(x, t) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \mathcal{W}(x, t) = 0.$$

Geyer ve Quirchmayr (2017) tarafından genişletilen jeofiziksel Korteweg-de Vries (gKdV) denklemi, volkanik patlamalar, heyelanlar veya depremlerden kaynaklanan ve okyanusun geniş kısımlarını kateden güçlü tsunami dalgalarının yayılmasını modellemektedir. (4.36) denklemi, Geyer ve Quirchmayr (2017) tarafından, dünyanın dönüşü nedeniyle hava ve su gibi hareketli nesnelerin belirgin sapması olan Coriolis etkisini dahil ederek genelleştirilmiştir. Bu genelleme, ekvatorial bölgedeki tek katmanlı okyanus akıntılarının davranışını araştırmayı amaçlamıştır.

Geyer ve Quirchmayr (2017) tarafından gKdV denklemini aşağıdaki gibi formülize etmişlerdir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W} - \mu \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{W} + \frac{3}{2} \mathcal{W} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{W} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \mathcal{W} = 0.$$

Burada $\mathcal{W} = \mathcal{W}(x, t)$ serbest yüzeyin ilerlemesini temsil etmektedir ve μ suyun derinliğine bağlı olan Coriolis etkisi parametresini belirtmektedir.

Coriolis kuvvetinin tsunami dalgası yayılımı üzerindeki etkisine ilişkin kapsamlı bir sayısal araştırma yapmışlardır (Saifullah ve diğ. 2023).

Son yıllarda, doğrusal olmayan gKdV denkleminin çözümlerini elde etmek amacıyla çeşitli analitik ve sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Örneğin, Geyer ve Quirchmayr (2017), Jacobi eliptik fonksiyonlarını kullanarak gKdV denklemi için bazı açık ilerleyen dalga çözümleri sunmuştur. Karunakar ve Chakraverty (2019) ise çalışmalarında homotopi pertürbasyon yöntemini uygulayarak gKdV denklemini analiz etmişlerdir. Alharbi ve Almatrafi (2022), Fourier kavramına dayalı bir $e^{-F(\eta)}$ genişlemesi kullanarak çözümler geliştirmiştir. Ayrıca, Younas ve diğ. (2022), Hirota'nın çift doğrusal tekniğini kullanarak gKdV denklemi için çeşitli soliton çözümleri elde etmişlerdir.

Bunun yanı sıra, Ak ve diğ. (2020), gKdV denklemi yardımıyla Coriolis etkisinin okyanus akışları üzerindeki etkisini kapsamlı bir şekilde incelemiş ve sayısal simülasyonlar geliştirmek amacıyla sonlu elemanlar yaklaşımını kullanarak gKdV denklemini analiz etmişlerdir.

Caputo-Fabrizio zamana göre kesirli mertebeden gKdV denklemini

$${}^{CF}D_t^\alpha \mathcal{W}(x, t) - \mu D_x \mathcal{W}(x, t) + \frac{3}{2} \mathcal{W}(x, t) D_x \mathcal{W}(x, t) + \frac{1}{6} D_x^3 \mathcal{W}(x, t) = 0,$$

$$t > 0, x > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.35)$$

başlangıç koşuluyla,

$$\mathcal{W}(x, 0) = 2(c + \mu) \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}(c + \mu)x} \right) \quad (4.36)$$

göz önünde bulunduralım (Saifullah ve diğ. 2023), burada c dalga hızıdır. Yukarıda bahsedilen yöntem yardımıyla, Caputo-Fabrizio kesirli türevlerinin t 'ye göre Laplace dönüşümü kullanılarak (4.35) gKdV denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{s\mathcal{L}[\mathcal{W}] - \mathcal{W}(0)}{s + \alpha(1 - s)} = \mu \mathcal{L}[D_x \mathcal{W}(x, t)] - \frac{3}{2} \mathcal{L}[\mathcal{W} D_x \mathcal{W}] - \frac{1}{6} \mathcal{L}[D_x^3 \mathcal{W}]. \quad (4.37)$$

(4.37) denklemi düzenlenerek ve (4.35) başlangıç koşulu göz önünde bulundurularak,

$$\mathcal{L}[\mathcal{W}] = \frac{1}{s} \left(2(c+\mu) \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}(c+\mu)x} \right) \right) + \frac{s + \alpha(1-s)}{s} \left(\mu \mathcal{L}[D_x \mathcal{W}(x, t)] - \frac{3}{2} \mathcal{L}[\mathcal{W} D_x \mathcal{W}] - \frac{1}{6} \mathcal{L}[D_x^3 \mathcal{W}] \right) \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.38) denkleminde ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{W}(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \left(2(c+\mu) \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}(c+\mu)x} \right) \right) \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha(1-s)}{s} \left(\mu \mathcal{L}[D_x \mathcal{W}(x, t)] - \frac{3}{2} \mathcal{L}[\mathcal{W} D_x \mathcal{W}] - \frac{1}{6} \mathcal{L}[D_x^3 \mathcal{W}] \right) \right] \quad (4.39)$$

sonucuna ulaşılır. Ele alınan yöntemi kullanarak, bilinmeyen $\mathcal{W}(x, t)$ fonksiyonu, sonsuz sayıda terimin toplamından oluşan seriyi ayrıştırarak aşağıdaki gibi çözüm bulunur,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{W}_m = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \left(2(c+\mu) \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}(c+\mu)x} \right) \right) \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha(1-s)}{s} \left(\mu \mathcal{L}[D_x \mathcal{W}(x, t)] - \frac{3}{2} \mathcal{L}[\mathcal{W} D_x \mathcal{W}] - \frac{1}{6} \mathcal{L}[D_x^3 \mathcal{W}] \right) \right]. \quad (4.40)$$

Buradaki lineer olmayan terim (A_m) aşağıdaki şekilde ayrıştırılabilir:

$$N(\mathcal{W}(x, t)) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m. \quad (4.41)$$

Burada A_m lineer olmayan polinom ve

$$A_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left[N \left(\sum_{i=0}^m \lambda^i \mathcal{W}_i \right) \right] \Big|_{\lambda=0},$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.42)$$

şeklinde ifade edilebilir. $N(\mathcal{W}) = \mathcal{W}\mathcal{W}_x$ lineer olmayan terimi için, ilk birkaç Adomian polinomu şu şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_{0_x} \\ A_1 &= \mathcal{W}_1 \mathcal{W}_{0_x} + \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_{1_x} \\ A_2 &= \mathcal{W}_2 \mathcal{W}_{0_x} + \mathcal{W}_1 \mathcal{W}_{1_x} + \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_{2_x} \\ &\vdots \\ A_m &= \mathcal{W}_m \mathcal{W}_{0_x} + \mathcal{W}_{m-1} \mathcal{W}_{1_x} + \dots + \mathcal{W}_1 \mathcal{W}_{m-1_x} + \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_{m_x}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

$\mathcal{W}(x, t)$ fonksiyonunun tüm bileşenleri hesaplanabilir ve bu bileşenler, (4.42) ve (4.43) denklemlerindeki ifadelerin (4.40) denkleminde yerleştirilmesiyle,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{W}_m &= \\ &2(c+\mu) \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}}(c+\mu)x \right) + \mu \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha(1-s)}{s} \mathcal{L} \left[D_x \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{W}_m(x, t) \right] \right] - \\ &\frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha(1-s)}{s} \mathcal{L} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m \right] \right] - \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha(1-s)}{s} \mathcal{L} \left[D_x^3 \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{W}_m(x, t) \right] \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

elde edilir. (4.43) denklemini (4.44) denkleminde kullanılarak ve (4.44)'ün her iki tarafı karşılaştırarak, $\mathcal{W}_m$ için aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$\mathcal{W}_0 = 2(c+\mu) \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}}(c+\mu)x \right) \quad (4.45)$$

$$\mathcal{W}_1 = 2 \frac{c(c+\mu)\sqrt{6c+6\mu} \sinh(1/2 \sqrt{6c+6\mu} x)(1+(t-1)\alpha)}{\cosh^3(1/2 \sqrt{6c+6\mu} x)} \quad (4.46)$$

$$\mathcal{W}_2 = 6 \frac{c^2(c+\mu)^2 \left(\cosh^2(1/2 \sqrt{6c+6\mu} x) - \frac{3}{2} \right) (2+(t^2-4t+2)\alpha^2 + (4t-4)\alpha)}{\cosh^4(1/2 \sqrt{6c+6\mu} x)} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_3 = 2 \frac{c^2(c+\mu)^2 \sqrt{6c+6\mu} \sinh(1/2 \sqrt{6c+6\mu} x)}{\cosh^7(1/2 \sqrt{6c+6\mu} x)} & \left((6+(t^3-9t^2+18t-6)\alpha^3 \right. \\ & + (9t^2-36t+18)\alpha^2 + (18t-18)\alpha)c \cosh^4(1/2 \sqrt{6c+6\mu} x) \\ & + \left((-3t^3+45t^2-108t+36)c + 18\mu(t^2-3t+1) \right) \alpha^3 \\ & + \left((-45t^2+216t-108)c - 18\mu(t^2-6t+3) \right) \alpha^2 \\ & - 108(c+\mu/2)(t-1)\alpha - 36c - 18\mu \Big) \cosh^2(1/2 \sqrt{6c+6\mu} x) \\ & - 27 \left((t^2-3t+1)\alpha^2 + (3t-2)\alpha + 1 \right) (c+\mu)(\alpha-1) \Big) \end{aligned} \quad (4.48)$$

...

Bu durumda, (4.35) denkleminin yarı-analitik çözümü

$$\mathcal{W}(x, t) = \mathcal{W}_0(x, t) + \mathcal{W}_1(x, t) + \mathcal{W}_2(x, t) + \mathcal{W}_3(x, t) + \dots ,$$

şeklinde ifade edilebilir.

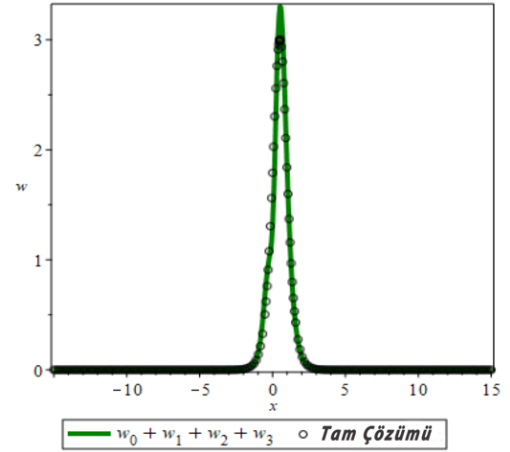
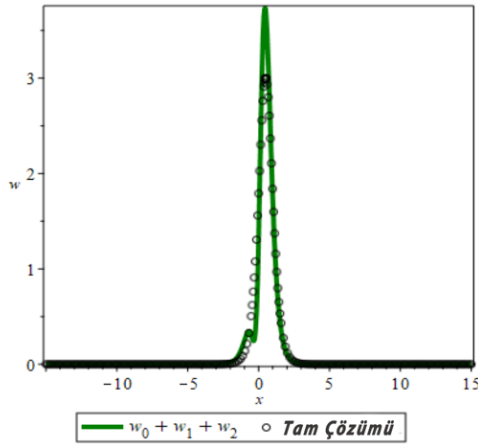
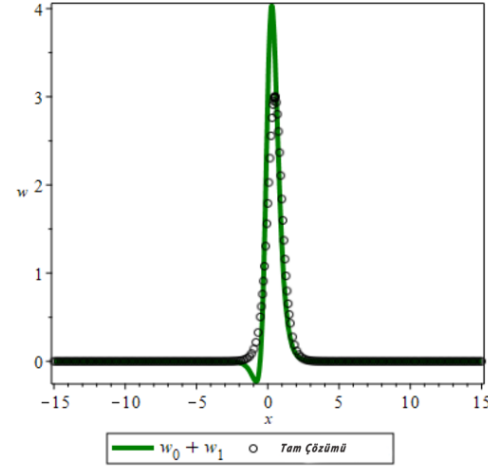
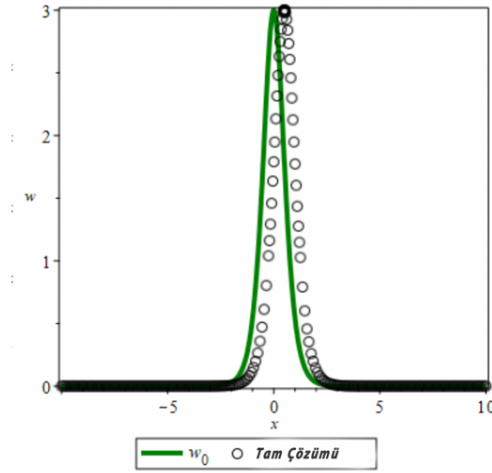
gKdV denkleminin tam çözümünün aşağıdaki şekilde tanımlandığı literatürde açıkça ifade edilmiştir (Geyer and Quirchmayr 2017):

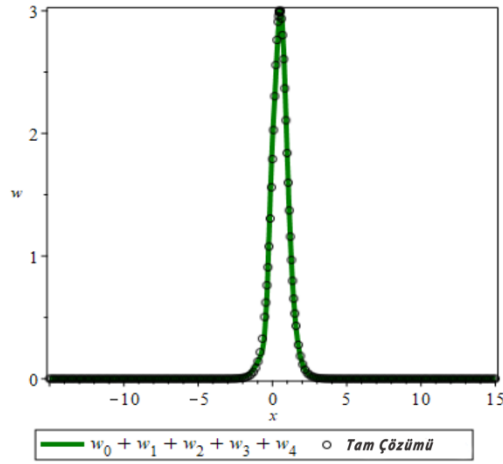
$$\mathcal{W}(x, t) = 2(c+\mu) \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}(c+\mu)} (x - ct) \right), \quad (4.49)$$

Bu bağlamda, sonuçlarını doğrulamak için, özetlenen yaklaşım yoluyla elde edilen yarı analitik çözümleri (4.35) denkleminde sunulan tam çözümle karşılaştırılabilir.

Şekil 1, $\alpha = 1, t = 1, \mu = 1$ ve $c = 0.5$ için belirtilen tekniği kullanarak elde edilen yarı-analitik çözümlerin simülasyonlarını sunmaktadır. Bu simülasyonlar, söz

konusu denklem için elde edilen sonuçların makul bir yakınsama sağladığını göstermektedir. (4.35) denkleminin tam çözüme doğru yaklaştığı gözlemlenmiştir. Özellikle dikkat çekici bir şekilde, beş terim kullanılarak elde edilen sayısal çözüm, tam çözüme oldukça yakın bir sonuç vermektedir.





Şekil 4.7: gKdV denkleminin tam çözümü ile yarı analitik çözümlerin kıyaslamaları

Tablo 4.3 ve Tablo 4.6 incelendiğinde, uygulanan yöntemle yakınsak bir çözüme ulaşmanın mümkün olduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca, tüm durumlarda, tablolar belirtilen yöntemle elde edilen çözümlerle ilişkili mutlak hata değerlerinin kabul edilebilir sınırlar içinde ve neredeyse ihmal edilebilir düzeyde olduğunu ortaya koymaktadır.

Tablo 4.3: $x = 5$, $\mu = 0$ ve $c = 0.5$ için, 4 terim dikkate alınarak tam ve yarı-analitik çözümlerin mutlak hata tablosu

$\alpha = 1$			
t	Uygulanan Yöntem (w_U)	Tam Çözüm (w_T)	$ w_T - w_U $
0.2	$0.8243898722 \times 10^{-3}$	$0.8241427559 \times 10^{-3}$	9.17×10^{-10}
0.4	$0.9818740173 \times 10^{-3}$	$0.9799199677 \times 10^{-3}$	3.02×10^{-8}
0.6	$0.1171585063 \times 10^{-2}$	$0.1165124592 \times 10^{-2}$	7.07×10^{-9}
0.8	$0.1400155456 \times 10^{-2}$	$0.1385308574 \times 10^{-2}$	1.03×10^{-6}
1	$0.1674838206 \times 10^{-2}$	$0.1647068371 \times 10^{-2}$	3.23×10^{-6}

Tablo 4.4: $t = 1$, $\mu = 0$ ve $c = 0.5$ için 4 terim dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin mutlak hata tablosu

$\alpha = 1$			
x	Uygulanan Yöntem (w_U)	Tam Çözüm (w_T)	$ w_T - w_U $
0	0.8359375000	0.8336698057	0.23×10^{-2}
2.5	0.1176779837	0.1177196065	0.42×10^{-4}
5	$0.1643834094 \times 10^{-2}$	$0.1647068371 \times 10^{-2}$	0.32×10^{-5}
7.5	$0.2165959743 \times 10^{-4}$	$0.2170273770 \times 10^{-4}$	0.43×10^{-7}
10	$0.2851705167 \times 10^{-6}$	$0.2857385932 \times 10^{-6}$	0.57×10^{-9}

Tablo 4.5: $x = 5$, $\mu = 1$ ve $c = 0.5$ için, 4 terim dikkate alınarak tam ve yarı-analitik çözümlerin mutlak hata tablosu

$\alpha = 1$			
t	Uygulanan Yöntem (w_U)	Tam Çözüm (w_T)	$ w_T - w_U $
0.2	$0.4954868327 \times 10^{-5}$	$0.4955095206 \times 10^{-5}$	2.27×10^{-10}
0.4	$0.6681281141 \times 10^{-5}$	$0.6688676970 \times 10^{-5}$	7.39×10^{-9}
0.6	$0.8971476188 \times 10^{-5}$	$0.9028766001 \times 10^{-5}$	5.73×10^{-8}
0.8	$0.1194091929 \times 10^{-4}$	$0.1218755290 \times 10^{-4}$	2.47×10^{-7}
1	$0.1568129003 \times 10^{-4}$	$0.1645146393 \times 10^{-4}$	7.70×10^{-7}

Tablo 4.6: $\mu = 1$ ve $c = 0.5$ olduğunda, 4 terim dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin mutlak hata tablosu

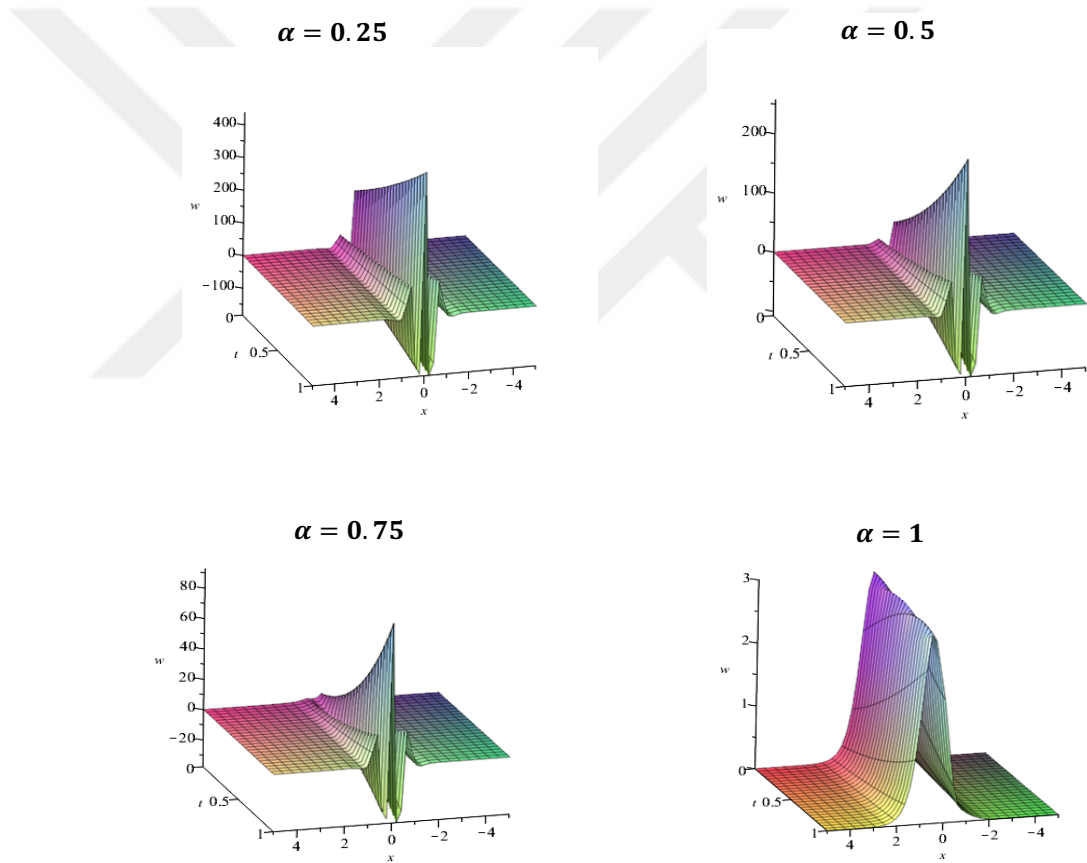
$\alpha = 1$			
x, t	Uygulanan Yöntem (w_U)	Tam Çözüm (w_T)	$ w_T - w_U $
$x = 1$ $t = 0.1$	$6.202725369 \times 10^{-1}$	$6.202952493 \times 10^{-1}$	$0.227124462 \times 10^{-4}$
$x = 2$ $t = 0.2$	$3.986010559 \times 10^{-2}$	$3.988423641 \times 10^{-2}$	$0.241308207 \times 10^{-4}$
$x = 6$ $t = 0.6$	$4.443879633 \times 10^{-7}$	$4.495164330 \times 10^{-7}$	$0.51284697 \times 10^{-8}$
$x = 8$ $t = 0.8$	$1.468474946 \times 10^{-9}$	$1.504066570 \times 10^{-9}$	$0.35591623 \times 10^{-10}$
$x = 10$ $t = 1$	$4.823162356 \times 10^{-12}$	$5.032554789 \times 10^{-12}$	$0.20939243 \times 10^{-13}$

Ayrıca, (4.35) denklemi için kullanılan yöntemin etkinliği, bu çalışmada ve Karunakar ve Chakraverty (2019) tarafından ele alınan yöntem ile elde edilen seri çözümün beş terimine ait mutlak hatalardaki farklılıkları gösteren Tablo 4.7 ile vurgulanmıştır. Bu makalede hesaplanan mutlak hatalar, Karunakar ve Chakraverty (2019) çalışmasında bildirilen hatalardan daha küçük olduğu için, bu çözümünden elde edilen iyileştirilmiş sonuçlara ve kullanılan yöntemin bu denklem için etkinliğine dikkat çekilmektedir.

Tablo 4.7: Kalan Hatalar

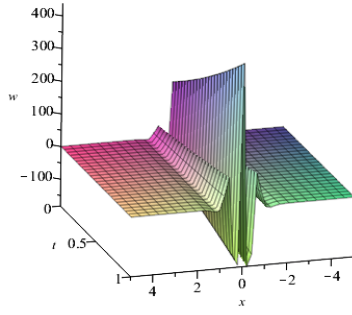
5 terimli çözüme göre, $\alpha = 1$		
x, t	Bu Yöntemle Kalan Hatalar	Referansta Kalan Hatalar (bkz. Karunakar ve Chakraverty 2019)
$x = 1$ $t = 0.1$	$-0.227124462e - 4$	-0.0000
$x = 2$ $t = 0.5$	$-0.423921896e - 3$	-0.0008
$x = 3$ $t = 1$	$-0.2744949641e - 3$	-0.0005

Şekil 4.8 ve Şekil 4.9, kesirli türevin mertebesindeki değişimlerin, elde edilen sonuçların fiziksel davranışı üzerindeki etkilerini net bir şekilde göstermektedir. Ayrıca, bu grafiksel gösterimler, μ için iki farklı durumu, yani $\mu = 0$ ve $\mu = 1$ olmak üzere, $0 < \alpha \leq 1$ aralığında $w(x,t)$ nin yarı-analitik çözümlerini sunmaktadır. Khater ve Kumar (2018) tarafından elde edilen tam çözüm ile önerilen yöntemle hesaplanan yarı-analitik çözümlerin, $\alpha = 1$ olduğunda uyum gösterdiği açıkça görülmektedir. Buna ek olarak, α kesirli türev mertebesi azaldığında veya arttığında hem dalga sayısında hem de genliğinde belirgin değişiklikler meydana geldiği açık bir şekilde ortaya konulmaktadır.

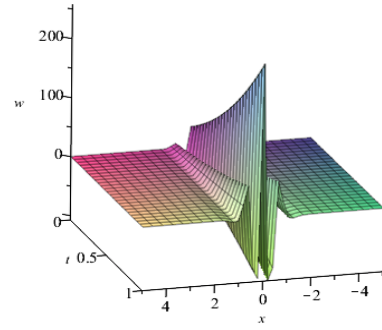


Şekil 4.8: gKdV Denkleminin yarı analitik çözümünün $\mu = 1$, $c = 0.5$ için 3B grafikleri

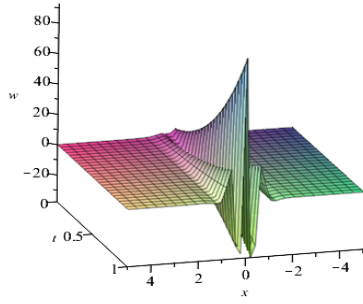
$$\alpha = 0.25$$



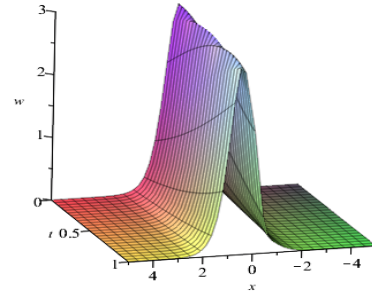
$$\alpha = 0.5$$



$$\alpha = 0.75$$



$$\alpha = 1$$



Şekil 4.9: gKdV Denkleminin yarı analitik çözümünün $\mu = 0$, $c = 0.5$ için 3B grafikleri

4.2.2.1 Genelleştirilmiş Beşinci Mertebeden Sawada–Kotera Denklemini

Bu bölümde, kesirli mertebeli genelleştirilmiş Sawada–Kotera (SK) denkleminin çözümü incelenecektir. Bu denklem, doğrusal olmayan sistemlerde gözlemlenen karmaşık dalga dinamiklerini modellemek amacıyla kullanılan yüksek mertebeli bir kısmi diferansiyel denklemdir. Klasik Sawada–Kotera denkleminin genelleştirilmiş bir versiyonu olan bu denklem, Korteweg–de Vries (KdV) hiyerarşisi içerisinde yer almakta ve daha yüksek dereceli saçılma terimleri ile doğrusal olmayan etkiler barındırmaktadır. Genelleştirilmiş formu, eklenen doğrusal olmayan ve saçılma

terimleri sayesinde fiziksel olayların daha kapsamlı ve gerçekçi bir matematiksel temsilini sunmaktadır.

Genelleştirilmiş SK denklemi şu şekilde ifade edilir:

$$\mathcal{W}_t + \beta \mathcal{W}_{xxxxx} + \gamma \mathcal{W} \mathcal{W}_{xxx} + \delta \mathcal{W}_x \mathcal{W}_{xx} + \sigma \mathcal{W}^2 \mathcal{W}_x + \eta \mathcal{W}^3 \mathcal{W}_x = 0 ,$$

burada $\mathcal{W} = \mathcal{W}(x, t)$ dalga profili, $\beta, \gamma, \delta, \sigma, \eta$ ise saçılma ve doğrusal olmayan etkiler arasındaki etkileşimleri belirleyen katsayılardır. Genelleştirilmiş beşinci mertebeden SK denklemi, su dalgaları, plazma fiziği ve doğrusal olmayan optik gibi çeşitli fiziksel sistemlerde kullanılabilir.

Bu kısımda, zaman kesirli türevli genelleştirilmiş beşinci mertebeden SK denkleminin çözümü yarı-analitik bir yöntemle ele alınmaktadır. Doğrusal olmayan, saçılma ve kesirli etkiler arasındaki etkileşimler incelenerek bu denklemin fiziksel sistemlerdeki önemi vurgulanacaktır. Bu yaklaşım, dalga fenomenlerinin daha derinlemesine anlaşılmasını sağlamayı ve doğrusal olmayan sistemlerin modellenmesine katkıda bulunmayı amaçlamaktadır.

Kesirli genelleştirilmiş beşinci dereceden SK denklemi şu formda yazılabilir:

$$D_t^\alpha \mathcal{W} + \beta \mathcal{W}_{xxxxx} + \gamma \mathcal{W} \mathcal{W}_{xxx} + \delta \mathcal{W}_x \mathcal{W}_{xx} + \sigma \mathcal{W}^2 \mathcal{W}_x + \eta \mathcal{W}^3 \mathcal{W}_x = 0 .$$

Burada, $\mathcal{W} = \mathcal{W}(x, t)$ dalga profili, D_t^α Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü ve $\beta, \gamma, \delta, \sigma, \eta$ ise saçılma ve doğrusal olmayan etkiler arasındaki etkileşimleri belirleyen katsayılardır.

Kesirli türev içeren genelleştirilmiş beşinci mertebeden SK denklemi, doğrusal olmaması ve saçılma etkileri içermesi nedeniyle billinen yöntemlerle çözülmesi oldukça zordur. Bu nedenle, bu bölümde Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü ve onun Laplace dönüşümünü Adomian ayrıştırma yöntemiyle birleştiren bir yöntem uygulanacaktır. Daha önce başarıyla tanıtılan bu yaklaşım, kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için etkili bir araç olup, bu bölümde genelleştirilmiş SK

denkleminin çözümüne uyarlanarak genişletilmiştir. Bu yöntem, kesirli terimlerin karmaşıklığını ele alarak hızlı yakınsama sağlayan yarı-analitik çözümler sunmaktadır (Iyiola 2013, Riaz ve diğ. 2023, Gupta ve Ray 2015, Wazwaz 2008, Kilbas ve diğ. 2006, Shaikh ve diğ. 2019, Wang ve diğ. 2023, Zheng ve Wen 2013).

Kesirli genelleştirilmiş beşinci mertebeden Sawada–Kotera (SK) denklemi

$${}^{CF}D_t^\alpha \mathcal{W} + 45 \mathcal{W}^2 D_x \mathcal{W} + 15 D_x \mathcal{W} D_x^2 \mathcal{W} + 15 \mathcal{W} D_x^3 \mathcal{W} + D_x^5 \mathcal{W} = 0,$$

$$0 < \alpha \leq 1, t > 0, x > 0 \quad (4.50)$$

şeklinde verilsin. Burada ${}^{CF}D_t^\alpha$, Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü olarak tanımlanmıştır. Bu denklemde, $\mathcal{W}(x, t)$ dalga fonksiyonunu ve α kesirli mertebe parametresini temsil eder. Kesirli parametre α , denklemin doğrusal olmayan ve bellek etkilerinin modellenmesini sağlamaktadır.

Başlangıç koşulu olarak, şu ifade verilmiştir:

$$\mathcal{W}(x, 0) = 2 \operatorname{sech}^2(x - \lambda),$$

burada λ , bir keyfi sabittir.

Laplace dönüşümü, denkleme uygulandıktan sonra, belirtilen başlangıç koşulu dahil edilerek sadeleştirmeler yapıldıktan sonra ters Laplace dönüşümü sonucunda aşağıdaki terimler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} (2 \operatorname{sech}^2(x - \lambda)) \right] - \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha(1-s)}{s} \left(45 \mathcal{L}[\mathcal{W}^2 D_x \mathcal{W}] + 15 \mathcal{L}[D_x \mathcal{W} D_x^2 \mathcal{W}] + \right. \right. \\ \left. \left. 15 \mathcal{L}[\mathcal{W} D_x^3 \mathcal{W}] + \mathcal{L}[D_x^5 \mathcal{W}] \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Yönteme göre, (4.51) denkleminin $\mathcal{W}(x, t)$ çözümü ve doğrusal olmayan terimler $N(\mathcal{W}(x, t))$ ile Adomian polinomları $E_m, B_m, C_m, \mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_m$ gibi alt çözümlere bağlı olarak aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$\mathcal{W}(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{W}_m(x, t), \quad (4.52)$$

$$N(\mathcal{W}(x, t)) = \sum_{m=0}^{\infty} E_m + \sum_{m=0}^{\infty} B_m + \sum_{m=0}^{\infty} A_m, \quad (4.53)$$

$$\mathcal{W}^2 D_x \mathcal{W} = \sum_{m=0}^{\infty} E_m, \quad (4.54)$$

$$\mathcal{W} D_x^3 \mathcal{W} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m, \quad (4.55)$$

$$D_x \mathcal{W} D_x^2 \mathcal{W} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m, \quad (4.56)$$

(4.52) – (4.56) eşitliklerindeki seri çözüm terimlerini (4.51) denkleminde yerine koyarak şu sonuca ulaşılır:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{W}_m &= 2 \operatorname{sech}^2(x - \lambda) - 45 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha(1 - s)}{s} \mathcal{L} \left[\sum_{m=0}^{\infty} E_m \right] \right] - \\ &15 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha(1 - s)}{s} \mathcal{L} \left[\sum_{m=0}^{\infty} B_m \right] \right] - 15 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha(1 - s)}{s} \mathcal{L} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m \right] \right] - \\ &\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha(1 - s)}{s} \mathcal{L} \left[D_x^5 \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{W}_m(x, t) \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Doğrusal olmayan terimler dikkate alındığında, Adomian polinomlarına karşılık gelen bileşenler şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
E_0 &= \mathcal{W}_0^2 D_x \mathcal{W}_0, \\
E_1 &= 2 \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_1 D_x \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_0^2 D_x \mathcal{W}_1, \\
E_2 &= (\mathcal{W}_1^2 + 2 \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_2) D_x \mathcal{W}_0 + 2 \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_1 D_x \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_0^2 D_x \mathcal{W}_2 \\
&\vdots \\
E_m &= \sum_{k=0}^m \left(\sum_{j=0}^k \mathcal{W}_j \mathcal{W}_{k-j} \right) D_x \mathcal{W}_{m-k}, \tag{4.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0 &= \mathcal{W}_0 D^3 \mathcal{W}_0 \\
B_1 &= \mathcal{W}_0 D^3 \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_1 D^3 \mathcal{W}_0 \\
B_2 &= \mathcal{W}_0 D^3 \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_1 D^3 \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 D^3 \mathcal{W}_0 \\
&\vdots \\
B_m &= \mathcal{W}_0 D^3 \mathcal{W}_m + \mathcal{W}_1 D^3 \mathcal{W}_{m-1} + \mathcal{W}_2 D^3 \mathcal{W}_{m-2} + \dots + \mathcal{W}_m D^3 \mathcal{W}_0, \tag{4.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= Dxx \mathcal{W}_0 D_x \mathcal{W}_0 \\
A_1 &= Dxx \mathcal{W}_0 D_x \mathcal{W}_1 + Dxx \mathcal{W}_1 D_x \mathcal{W}_0 \\
A_2 &= Dxx \mathcal{W}_0 D_x \mathcal{W}_2 + Dxx \mathcal{W}_1 D_x \mathcal{W}_1 + Dxx \mathcal{W}_2 D_x \mathcal{W}_0 \\
&\vdots \\
A_m &= Dxx \mathcal{W}_0 D_x \mathcal{W}_m + Dxx \mathcal{W}_1 D_x \mathcal{W}_{m-1} + \dots + Dxx \mathcal{W}_m D_x \mathcal{W}_0. \tag{4.60}
\end{aligned}$$

(4.58) – (4.60) denklemlerinin (4.57) denkleminde yerine yazılması ve yinelemeli algoritmanın uygulanmasıyla, $\mathcal{W}_m$ için aşağıdaki çözümler elde edilmiştir:

$$\mathcal{W}_0 = 2 \operatorname{sech}^2(x - \lambda),$$

$$\mathcal{W}_1 = -64 [1 + \alpha(t - 1)] \tanh(-x + \lambda) \operatorname{sech}^2(-x + \lambda). \quad (4.61)$$

Dolayısıyla, kesirli türev içeren genelleştirilmiş beşinci mertebeden Sawada–Kotera (SK) denkleminin seri çözümü şu şekildedir:

$$\mathcal{W}(x, t) = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 + \dots.$$

Ayrıca, kesirli türev içeren genelleştirilmiş beşinci mertebeden Sawada–Kotera (SK) denklemi için tam çözüm aşağıdaki gibi sunulmuştur (Iyiola 2013):

$$\mathcal{W}(x, t) = 2 \operatorname{sech}^2(x - \lambda - 16t). \quad (4.62)$$

Tablo 4.8, kesirli genelleştirilmiş beşinci mertebeden Sawada–Kotera denkleminin mutlak hatalarının karşılaştırmasını göstermektedir.

Tablo 4.8: Çözümün 3 Terimi Kullanılarak $\alpha = 1$, $\lambda = -5$ ve $t = 0.01$ olması durumunda mutlak hata Tablosu

x	Uygulanan Yöntem ($\mathcal{W}_U$)	Tam Çözüm ($\mathcal{W}_T$)	$ \mathcal{W}_T - \mathcal{W}_U $
0	5.95×10^{-4}	5.00×10^{-4}	9.5×10^{-5}
5	2.70×10^{-8}	2.27×10^{-8}	4.3×10^{-9}
10	1.23×10^{-12}	1.03×10^{-12}	2.0×10^{-13}
15	5.58×10^{-17}	4.68×10^{-17}	8.9×10^{-18}
20	2.53×10^{-21}	2.12×10^{-21}	4.1×10^{-22}

Tablo 4.8'den elde edilen gözlemler, yöntemin yakınsayan bir çözüm sağladığını ve mutlak hata değerlerinin kabul edilebilir sınırlar içinde kalarak neredeyse ihmal edilebilir düzeyde olduğunu göstermektedir. Bu çalışmada, kesirli mertebeden genelleştirilmiş beşinci mertebeden Sawada–Kotera denklemi için yarı-analitik bir çözüm yöntemi uygulanmış ve bu sistemde doğrusal olmayanlık, saçılma ve kesirli mertebeye etkileri arasındaki karmaşık etkileşimler başarılı bir şekilde modellenmiştir.

4.2.3.1 Duffing Osilatörü– Serbest Sönümsüz Titreşim

Kesirli mertebeli Duffing–relativistik osilatör denklemini (sönümsüz titreşim)

$$D^\alpha u(t) + \delta u(t) + \gamma u(t)^3 = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.63)$$

ve

$$u(0) = A, u'(0) = 0,$$

başlangıç koşullarını ele alalım. Burada $1 < \alpha \leq 2$ kesirli türevin mertebesi, A salınımın genliği, δ ve γ sırasıyla doğrusal ve doğrusal olmayan pozitif boyutsuz sertlik parametreleridir ve ayrıca daha iyi bir tahmin sağlamak için γ lineer olmayan terimin katsayısının küçük olması gerekir (Hosen ve diğ. 2015). Denklemin salınımlı çözümleri (4.63), γA^2 çarpımı $\sqrt{\delta}$ (Kovacic 2016, Jones 1978) ile karşılaştırıldığında küçük olmalıdır.

Denkleme Laplace dönüşümü uygulanırsa (Loh ve diğ. 2018),

$$\mathcal{L}[{}^{CF}D_t^\alpha u(t)] + \delta \mathcal{L}[u(t)] + \gamma \mathcal{L}[u(t)^3] = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.64)$$

aşağıdaki sonuca varılabilir:

$$\frac{s^2 \mathcal{L}[u] - su(0)}{\eta + s(1 - \eta)} + \delta \mathcal{L}[u] + \gamma \mathcal{L}[u^3] = 0, \quad 0 < \eta \leq 1, \quad (4.65)$$

burada $\alpha = 1 + \eta$ olarak alınmıştır.

$u(0) = A$ olduğunda Laplace dönüşümünün lineerliğini kullanarak ve (4.65) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\mathcal{L}[u] = \frac{1}{s^2 + \delta(\eta + s(1 - \eta))} [sA - \gamma(\eta + s(1 - \eta))\mathcal{L}[u^3]] \quad (4.66)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{sA}{s^2 + \delta(\eta + s(1 - \eta))} \right] + \gamma \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{\eta + s(1 - \eta)}{s^2 + \delta(\eta + s(1 - \eta))} \mathcal{L}[u^3] \right] \quad (4.67)$$

sonucuna ulaşılır. Daha sonra bilinmeyen $u(t)$ fonksiyonunun çok sayıda terimden oluşan sonsuz bir seriye ayrıştırılmasıyla çözüm olarak fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t). \quad (4.68)$$

O halde Adomian polinomları kullanılarak doğrusal olmayan terim şu şekilde yazılır:

$$N(u(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k, \quad (4.69)$$

buradaki A_k terimi, aşağıdaki verilmiştir,

$$A_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left[N \left(\sum_{i=0}^k \lambda^i u_i \right) \right] \Big|_{\lambda=0}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.70)$$

$A_k(x)$ ise lineer olmayan terimlerin dönüştürülmüş halidir, $N(u(t)) = u(t)^3$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomları aşağıdaki şekilde verilir:

$$A_0 = u_0^3$$

$$A_1 = 3 u_0^2 u_1$$

$$A_2 = 3 u_0^2 u_2 + 3 u_0 u_1^2$$

$$A_3 = 3 u_0^2 u_3 + 6 u_0 u_1 u_2 + u_1^3$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= 3 u_0^2 u_4 + 3 u_0 u_2^2 + 6 u_0 u_1 u_3 + 3 u_1^2 u_2 \\
A_5 &= 3 u_0^2 u_5 + 6 u_0 u_1 u_4 + 6 u_0 u_2 u_3 + 3 u_1^2 u_3 + 3 u_1 u_2^2 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Şimdi (4.67) denklemi için (4.68) - (4.70) denklemleri yardımıyla açıklanan yinelemeli algoritmayı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{SA}{S^2 + \delta(\eta + S(1 - \eta))} \right] \\
&+ \gamma \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{\eta + S(1 - \eta)}{S^2 + \delta(\eta + S(1 - \eta))} \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k \right] \right]
\end{aligned} \tag{4.72}$$

olur. Yukarıdaki denklemin her iki tarafı karşılaştırılarak u_0 değeri elde edilebilir ve daha sonra bir sonraki terimler belirlenebilir. Böylece aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

$$\begin{aligned}
u_0 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{SA}{S^2 + \delta(\eta + S(1 - \eta))} \right], \\
u_1 &= \gamma \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{\eta + S(1 - \eta)}{S^2 + \delta(\eta + S(1 - \eta))} \mathcal{L}[A_0] \right], \\
&\vdots \\
u_{k+1} &= \gamma \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{\eta + S(1 - \eta)}{S^2 + \delta(\eta + S(1 - \eta))} \mathcal{L}[A_k] \right].
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Bu nedenle, (4.73) algoritması uygulanarak ve bu terimler (4.68) te değiştirilerek kalan terimler benzer şekilde elde edilebilir ve seri çözümü şu şekilde verilir:

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots$$

ve buradaki

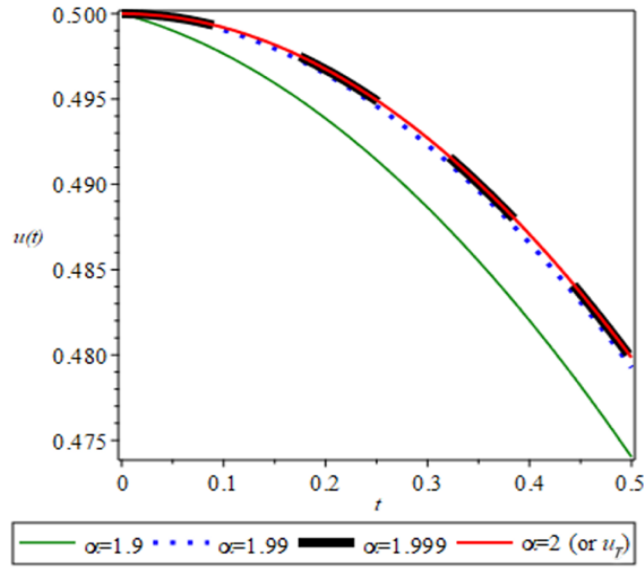
$$u_0(t) = Ae^{\frac{\delta(\eta-1)t}{2}} \left[\cosh\left(\frac{\sqrt{\delta(\delta\eta^2 - 2\delta\eta + \delta - 4\eta)}}{2} t\right) + \frac{\sqrt{\delta(\delta\eta^2 - 2\delta\eta + \delta - 4\eta)} \sinh\left(\frac{\sqrt{\delta(\delta\eta^2 - 2\delta\eta + \delta - 4\eta)}}{2} t\right) (\eta - 1)}{\delta\eta^2 - 2\delta\eta + \delta - 4\eta} \right] \quad (4.74)$$

şeklindedir. Sonunda (4.63) denklemi için yaklaşık bir çözüm elde edilir ve aşağıdaki gibidir:

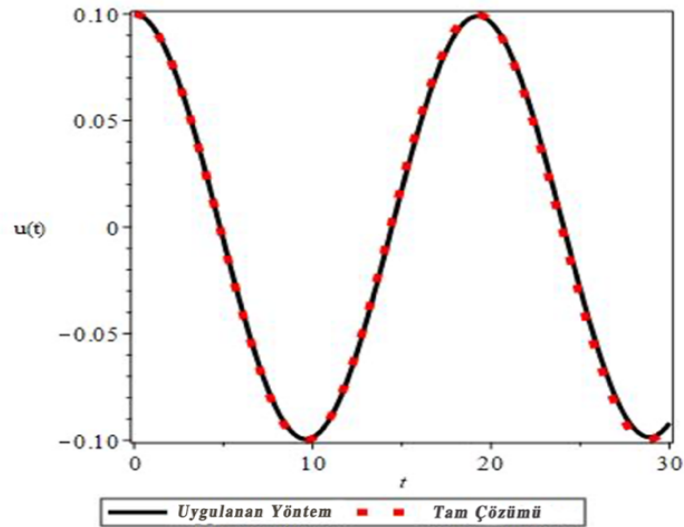
$$u(x) = u_0(x) - \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\eta + S(1 - \eta)}{S^2 + \delta(\eta + S(1 - \eta))} \mathcal{L}[A_k] \right]. \quad (4.75)$$

Şekil 4.10 de, bahsedilen yöntemle kesirli mertebeli ($\alpha = \eta + 1$) değişen değerlerle sönümsüz Duffing relativistik osilatör denkleminin sayısal simülasyonunun bir grafiği gösterilmektedir.

Şekil 4.11, uygulanan yöntemin kesinliğini ($\alpha = \eta + 1 = 1.99$ için) tam çözüm (Sunday 2017), ($\alpha = 2$ tam sayı mertebesine sahip u_T) ile karşılaştırma yoluyla göstermektedir. Önerilen teknik kullanılarak elde edilen sonucun kesin çözümlerle yakından uyumlu olduğu şekilden açıkça görülmektedir.



Şekil 4.11: Farklı α değerlerine sahip kesirli mertebeli Duffing-görelî osilatörün yarı analitik çözümleri



Şekil 4.12: Kesirli mertebeli Duffing-relativistik osilatörün tam çözümü ile yarı analitik çözümünün karşılaştırılması

Kesirli dereceli Duffing – relativistik osilatörün yaklaşık çözümüne ilişkin mutlak hatalar, A, δ, γ ve t nin farklı değerleri dikkate alınarak Tablo 4.9 da sunulmaktadır.

Tablo 4.9: Kesirli dereceli Duffing-görelî osilatörün tam çözümü ile yarı analitik çözümünün karşılaştırılması

A, γ, δ	Uygulanan Yöntem u_U	Tam Çözüm u_T	$ u_T - u_U $
$A = 0.1, \gamma = 0.1$ $\delta = 0.1, t = 0.05$	0.099987322598	0.09998737527	4.92×10^{-8}
$A = 0.5, \gamma = 0.2$ $\delta = 0.8, t = 0.5$	0.4479161384	0.4479161348	4.74×10^{-6}
$A = 0.7, \gamma = 0.03$ $\delta = 2, t = 5$	0.4838558555	0.4837644915	9.14×10^{-5}
$A = 10, \gamma = 0.05$ $\delta = 5, t = 6$	3.527583214	3.528292714	7.90×10^{-4}

4.2.3.2 Gerilmiş Elastik Tel osilatör (Gerilmiş Tele Bağlı Kütle)

Gerilmiş bir elastik telin boyutsuz ve doğrusal olmayan kesirli mertebeli hali verildiğinde, orta noktasında bir kütlenin bağlandığı konservatif doğrusal olmayan bir salınım sistemini örneklendirir (genelleştirilmiş doğrusal olmayan osilatör) (Shatnawi ve diğ. 2021, Geng 2011, Younesian ve diğ. 2012):

$$D^\alpha u(t) + u(t) - \frac{\lambda u(t)}{\sqrt{1 + u(t)^2}} = 0,$$

$$0 < \lambda \leq 1, 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.76)$$

denklemini aşağıdaki başlangıç koşulu ile ele alalım

$$u(0) = A, u'(0) = 0.$$

Şimdi (4.76) denkleminde Laplace dönüşümünü uygulayarak,

$$\mathcal{L}[{}^{CF}D_t^\alpha u(t)] + \mathcal{L}[u(t)] - \mathcal{L}\left[\frac{\lambda u(t)}{\sqrt{1 + u(t)^2}}\right] = 0,$$

$$1 < \alpha \leq 2 \quad (4.77)$$

elde edilir. Başlangıç koşullarına ve Caputo-Fabrizio kesirli türevinin Laplace dönüşümüne göre (Loh ve diğ. 2018),

$$\frac{S^2 \mathcal{L}[u] - Su(0)}{\eta + S(1 - \eta)} + \mathcal{L}[u] - \mathcal{L}\left[\frac{\lambda u(t)}{\sqrt{1 + u(t)^2}}\right] = 0, \quad (4.78)$$

sonucuna ulaşılır. Buradaki $\alpha = 1 + \eta, 0 < \eta \leq 1$ and $0 < \lambda \leq 1$ dir. Gerekli düzenlemeler ışığında:

$$\mathcal{L}[u] = \frac{SA}{S^2 + \eta + S(1 - \eta)} + \frac{\eta + S(1 - \eta)}{S^2 + \eta + S(1 - \eta)} \mathcal{L}\left[\frac{\lambda u(t)}{\sqrt{1 + u(t)^2}}\right] \quad (4.79)$$

eşitliğine ulaşılır. Daha sonra (4.79) denkleminin her iki tarafındaki ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{SA}{S^2 + \eta + S(1 - \eta)}\right] + \lambda \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\eta + S(1 - \eta)}{S^2 + \eta + S(1 - \eta)} \mathcal{L}\left[\frac{u(t)}{\sqrt{1 + u(t)^2}}\right]\right] \quad (4.80)$$

bulunur. Önceki örnekte olduğu gibi Adomian polinomları kullanılarak ayrıştırma serisine göre bileşenlerin toplamı şu şekilde gösterilebilir:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t), \quad (4.81)$$

ve lineer olmayan $N(u(t)) = \frac{\lambda u(t)}{\sqrt{1 + u(t)^2}}$ terimi,

$$N(u(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k,$$

şeklinde verilir. Buradaki A_m terimi aşağıdaki eşitlikle verilir,

$$A_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left[N \left(\sum_{i=0}^k \lambda^i u_i \right) \right] \Big|_{\lambda=0}. \quad (4.82)$$

Lineer olmayan terimin ilk birkaç terimi,

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 + 1}} \\ A_1 &= \frac{u_1}{\sqrt{u_0^2 + 1}} - \frac{u_0^2 u_1}{(u_0^2 + 1)^{3/2}} \\ A_2 &= \frac{u_2}{\sqrt{u_0^2 + 1}} - \frac{u_1^2 u_0}{(u_0^2 + 1)^{3/2}} + \frac{3 u_0^3 u_1^2}{2 (u_0^2 + 1)^{5/2}} - \frac{u_0 (4 u_0 u_2 + 2 u_1^2)}{4 (u_0^2 + 1)^{3/2}} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.83)$$

şeklinde hesaplanır. Bu nedenle (4.81) – (4.83) denklemlerindeki tüm terimler (4.80) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{SA}{S^2 + \eta + S(1 - \eta)} \right] + \lambda \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\eta + S(1 - \eta)}{S^2 + \eta + S(1 - \eta)} \mathcal{L}[A_k] \right] \quad (4.84)$$

elde edilir. (4.84) denkleminin her iki tarafı karşılaştırılarak ve u_0 başlangıç koşulu kullanılmak kaydı ile geri kalan terimler şu şekilde belirlenebilir:

$$\begin{aligned} u_0 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{SA}{S^2 + \eta + S(1 - \eta)} \right], \\ u_1 &= \lambda \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\eta + S(1 - \eta)}{S^2 + \eta + S(1 - \eta)} \mathcal{L}[A_0] \right], \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$u_{k+1} = \lambda \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\eta + S(1 - \eta)}{S^2 + \eta + S(1 - \eta)} \mathcal{L}[A_k] \right]. \quad (4.85)$$

Yinelemeli algoritma kullanılırsa:

$$u(x) = u_0(x) - \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\eta + S(1 - \eta)}{S^2 + \eta + S(1 - \eta)} \mathcal{L}[A_k] \right]$$

eşitliğine ulaşılır. Sonuç olarak:

$$u_0 = Ae^{\frac{(\eta-1)t}{2}} \left[\cosh \left(\frac{t \sqrt{\eta^2 - 6\eta + 1}}{2} \right) + \left(\frac{(\eta - 1)}{\sqrt{\eta^2 - 6\eta + 1}} \sinh \left(\frac{t \sqrt{\eta^2 - 6\eta + 1}}{2} \right) \right) \right]$$

$$u_1 = \frac{\lambda u_0}{\sqrt{1 + u_0^2}} \left[1 - e^{\frac{(\eta-1)t}{2}} \cosh \left(\frac{t \sqrt{\eta^2 - 6\eta + 1}}{2} \right) - \left(\frac{(\eta - 1)e^{\frac{(\eta-1)t}{2}}}{\sqrt{\eta^2 - 6\eta + 1}} \sinh \left(\frac{t \sqrt{\eta^2 - 6\eta + 1}}{2} \right) \right) \right]$$

$$u_2 =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2 u_0}{(1 + u_0^2)^2} e^{\frac{(\eta-1)t}{2}} \left[1 + \frac{(\eta^2 - 5\eta + 1)(\eta - 1)t - \eta^2 + 6\eta - 1}{\eta^2 - 6\eta + 1} \cosh \left(\frac{t \sqrt{\eta^2 - 6\eta + 1}}{2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\eta^4 t - 9\eta^3 t - \eta^3 + 20\eta^2 t + 5\eta^2 - 9\eta t - 5\eta + t + 1}{(\eta^2 - 6\eta + 1)^{3/2}} \sinh \left(\frac{t \sqrt{\eta^2 - 6\eta + 1}}{2} \right) \right] \quad (4.86) \end{aligned}$$

⋮

terimleri bulunur. Böylece, (4.76) denkleminin yarı analitik çözümü şu şekilde elde edilebilir:

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots$$

ve lineer olmayan osilatörün tam periyodik çözümü şu şekildedir (Gonzalez-Gaxiola ve de Chavez 2022, Younesian ve diğ. 2012, Sun ve diğ. 2007)

$$u_e(t) = A \cos(\omega_e(A)t), \quad (4.87)$$

burada

$$\omega_e(A) = \frac{2\pi}{4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\lambda/(\sqrt{1+A^2} \sin^2 \theta + \sqrt{1+A^2})}}}$$

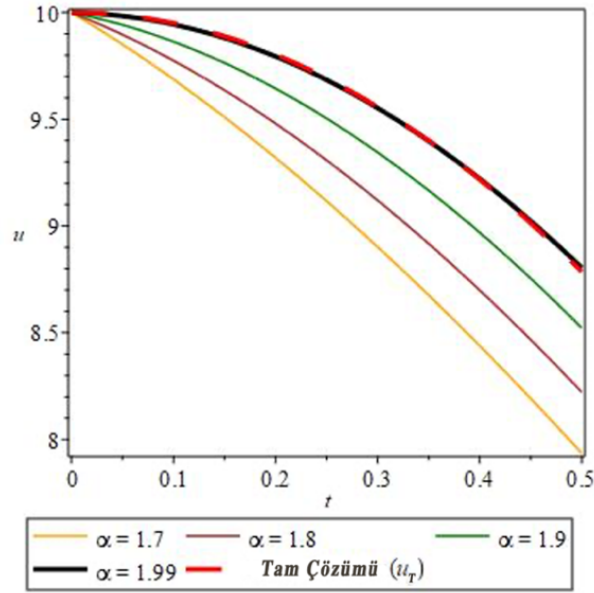
Elde ettiğimiz sonucun kesin çözüme tatmin edici bir yaklaşım olduğunu göstermek için, çeşitli α türev mertebesinin değişen değerleri için sayısal simülasyonlar sonunda aşağıdaki tabloya ulaşılır.

$u(t)$ 'nin sadece 3 terimli yaklaşık çözümü dikkate alınarak ve tam çözümle karşılaştırılarak, elde edilen sonuçların doğruluğu kontrol edilmiş ve daha fazla gerekçelendirme için tablo ve grafik halinde sunulmuştur. Tablo 4.10, uygulanan yöntemin, genliği çok büyük veya çok küçük olduğunda bile, lineer olmayan kesirli mertebeli bir sistemin çözümüne kayda değer bir yaklaşım sağlayabildiğini göstermektedir.

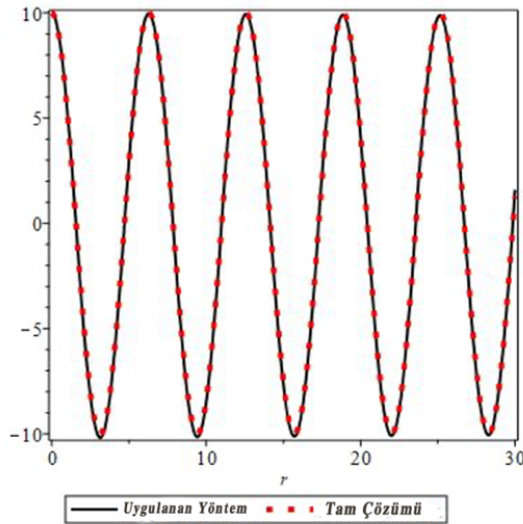
Tablo 4.10: $\alpha = 2$ ve $\lambda = 0.5$ olduğunda farklı A değerlerine sahip gerilmiş bir elastik telin kesirli mertebeli tam çözümünün ve yarı analitik çözümünün karşılaştırılması

A	Uygulanan Yöntem (u_U)	Tam Çözüm (u_T)	$ u_T - u_U $
0.01	0.009991	0.009993	2.44×10^{-6}
0.05	0.499564	0.499687	1.23×10^{-5}
1	0.998876	0.999192	3.15×10^{-4}
10	9.983496	9.987613	4.12×10^{-3}
100	99.82719	99.87503	4.78×10^{-2}

Şekil 4.12 ve 4.13, kesirli türev $\alpha \in (1, 2]$ 'nin çeşitli değerleriyle elde edilen sonuçların davranışını göstermektedir. Ayrıca, $\alpha = 2$ 'ye yaklaştığında elde edilen sonuçlar ile tamsayı türev mertebesine sahip tam çözüm arasındaki karşılaştırmayı da göstermektedir.



Şekil 4.13: $A = 10$, $\lambda = 0.5$ olduğunda farklı α değerlerine sahip gerilmiş elastik telin kesirli mertebeli yarı analitik çözümleri



Şekil 4.14: $\alpha = 2$, $A = 10$ ve $\lambda = 0.1$ için kesirli mertebeden gerilmiş elastik telin kesin çözümü ile yarı Analitik çözümünün karşılaştırılması

Görüldüğü üzere, önerilen yöntem, makul bir doğruluk düzeyine daha az hesaplama yüküyle ulaşmayı sağlamaktadır. Ayrıca, (Shatnawi ve diğ. 2021,

González-Gaxiola ve de Chávez 2022) gibi alternatif kaynaklarla karşılaştırıldığında, uygulanan yöntem, küçükten büyüğe değişen salınım genlikleriyle ilişkili mekanik zorlukların üstesinden gelmede yüksek bir hassasiyet sergilemektedir. Bunun yanı sıra, diğer örnekler üzerinden bu potansiyel yöntemin, fizik ve doğrusal olmayan mühendislikten kaynaklanan diğer problemlere uygulanabilirliğini de gösterilmiş olur.

4.2.4 Kesirli Mertebeden Genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-KdV Sistemi

Ünlü Korteweg-de Vries (KdV) denklemi, modern integralenebilir sistemler ve çözüm teorisinin ilerlemesini önemli ölçüde etkilemiştir. 1982 yılında, Hirota ve Satsuma, KdV denkleminin genel bir formunu tanıttılar (Hirota ve Satsuma 1981, 1982):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3u \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial(-v^2 + w)}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 3u \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3u \frac{\partial w}{\partial x}.\end{aligned}$$

Hirota-Satsuma genel birleştirilmiş KdV sistemi olarak bilinen bu sistem, kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Hirota ve Satsuma, bunun Kadomtsev-Petviashvili hiyerarşisinin dört indirgemesinden türetilbileceğini göstermiştir (Xue ve diğ. 2016).

Kesirli genelleştirilmiş Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV sistemi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3u \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial(-v^2 + w)}{\partial x} \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 3u \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3u \frac{\partial w}{\partial x}, \\ t &> 0 \text{ ve } 0 < \alpha \leq 1\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ (ya da D_t^α), $u(x, t)$, $v(x, t)$ ve $w(x, t)$ 'in zaman kesirli türevlerinin mertebesini tanımlayan α mertebesindeki Caputo-Fabrizio kesirli türevidir.

Kesirli genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-KdV sistemi çok zorlu olduğundan ve doğrudan yöntemlerle çözülmesi kolay olmadığından, bu bölümde Caputo-Fabrizio türev operatörünü ve onun Laplace dönüşümünü Adomian ayrışım yöntemi ile birleştiren bir yöntemi uygulanacaktır. Daha önce tanıtılan bu yaklaşım, kesirli denklem sistemlerini çözmek için bu bölümde genişletilmiştir.

Zaman kesirli türevli genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-KdV denklem sistemi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3u \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial(-v^2 + w)}{\partial x} \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 3u \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3u \frac{\partial w}{\partial x}, \\ t &> 0 \text{ ve } 0 < \alpha \leq 1, \end{aligned} \tag{4.88}$$

olarak verilir, başlangıç koşulları ise

$$u(x, 0) = 5/3 - 2 \tanh^2(x)$$

$$v(x, 0) = -5/6 + \tanh^2(x)$$

$$w(x, 0) = 1 + \tanh^2(x)$$

olarak ele alınmıştır. Burada $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ ve $w = w(x, t)$ aranan fonksiyonlardır. $\alpha = 1$ için (4. 88) denkleminin tam çözümü şu şekildedir:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= 5/3 - 2 \tanh \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right)^2 \\ v(x, t) &= -5/6 + 2 \tanh \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right)^2 \\ w(x, t) &= 1 + \tanh \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right)^2. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Caputo-Fabrizio kesirli operatörünü $0 < \alpha \leq 1$ mertebesiyle kullanarak ve ardından Laplace dönüşümünü t 'ye göre alarak,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[{}^{CF}D_t^\alpha u(x, t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{4}D_x^3 u(x, t)\right] + \mathcal{L}[3 u(x, t)D_x u(x, t)] \\ &\quad + \mathcal{L}[3D_x w(x, t)] - \mathcal{L}[6 v(x, t)D_x v(x, t)], \\ \mathcal{L}[{}^{CF}D_t^\alpha v(x, t)] &= -\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}D_x^3 v(x, t)\right] - \mathcal{L}[3 u(x, t)D_x v(x, t)], \\ \mathcal{L}[{}^{CF}D_t^\alpha w(x, t)] &= -\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}D_x^3 w(x, t)\right] - \mathcal{L}[3 u(x, t)D_x w(x, t)]\end{aligned}\quad (4.90)$$

elde edilir. Caputo-Fabrizio kesirli türevlerine t bağımsız değişkenine göre Laplace dönüşümü uygulayarak ve (4.89) denklemindeki başlangıç koşulunu dikkate alarak, (4.90) denklemleri yeniden düzenlenirse:

$$\begin{aligned}\frac{s\mathcal{L}[u(x, t)] - u(x, 0)}{s(1 - \alpha) + \alpha} &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{4}D_x^3 u(x, t)\right] + \mathcal{L}[3 u(x, t)D_x u(x, t)] + \\ &\quad \mathcal{L}[3D_x u(x, t)] - \mathcal{L}[6 v(x, t)D_x v(x, t)] \\ \frac{s\mathcal{L}[v(x, t)] - v(x, 0)}{s(1 - \alpha) + \alpha} &= -\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}D_x^3 v(x, t)\right] - \mathcal{L}[3 u(x, t)D_x v(x, t)] \\ \frac{s\mathcal{L}[w(x, t)] - w(x, 0)}{s(1 - \alpha) + \alpha} &= -\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}D_x^3 w(x, t)\right] - \mathcal{L}[3 u(x, t)D_x w(x, t)]\end{aligned}\quad (4.91)$$

elde edilir. Bazı cebirsel işlemler sonucunda:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(x, t)] &= \frac{u(x, 0)}{s} + \frac{1}{4} \frac{\alpha(1 - s) + s}{s} \mathcal{L}[D_x^3 u(x, t)] + \\ &\quad 3 \frac{s(1 - \alpha) + \alpha}{s} \mathcal{L}[u(x, t)D_x u(x, t)] + 3 \frac{s(1 - \alpha) + \alpha}{s} \mathcal{L}[D_x w(x, t)] - \\ &\quad 6 \frac{s(1 - \alpha) + \alpha}{s} \mathcal{L}[v(x, t)D_x v(x, t)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[v(x, t)] &= \frac{v(x, 0)}{s} - \frac{1}{2} \frac{\alpha(1-s) + s}{s} \mathcal{L}[D_x^3 v(x, t)] - \\
&\quad 3 \frac{\alpha(1-s) + s}{s} \mathcal{L}[u(x, t) D_x v(x, t)] \\
\mathcal{L}[w(x, t)] &= \frac{w(x, 0)}{s} - \frac{1}{2} \frac{\alpha(1-s) + s}{s} \mathcal{L}[D_x^3 w(x, t)] - \\
&\quad 3 \frac{\alpha(1-s) + s}{s} \mathcal{L}[u(x, t) D_x w(x, t)] \quad (4.92)
\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. (4.92) denklemlerinin her iki tarafına da ters Laplace dönüşümü uygulanmasıyla aşağıdaki terimler elde edilir:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= u(x, 0) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{4} \frac{\alpha(1-s) + s}{s} \mathcal{L}[D_x^3 u(x, t)] \right] + \\
&\quad \mathcal{L}^{-1} \left[3 \frac{s(1-\alpha) + \alpha}{s} \mathcal{L}[u(x, t) D_x u(x, t)] \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[3 \frac{s(1-\alpha) + \alpha}{s} \mathcal{L}[D_x w(x, t)] \right] - \\
&\quad \mathcal{L}^{-1} \left[6 \frac{s(1-\alpha) + \alpha}{s} \mathcal{L}[v(x, t) D_x v(x, t)] \right] \\
v(x, t) &= v(x, 0) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha(1-s) + s}{s} \mathcal{L}[D_x^3 v(x, t)] \right] - \\
&\quad \mathcal{L}^{-1} \left[3 \frac{\alpha(1-s) + s}{s} \mathcal{L}[u(x, t) D_x v(x, t)] \right] \\
w(x, t) &= w(x, 0) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha(1-s) + s}{s} \mathcal{L}[D_x^3 w(x, t)] \right] - \\
&\quad \mathcal{L}^{-1} \left[3 \frac{\alpha(1-s) + s}{s} \mathcal{L}[u(x, t) D_x w(x, t)] \right]. \quad (4.93)
\end{aligned}$$

Adomian ayrıştırma yöntemi (ADM) doğrultusunda, çözümler sonsuz seriler olarak aşağıda gösterildiği gibi temsil edilmiştir,

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x, t) \\
 v(x, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x, t) \\
 w(x, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x, t).
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Şimdi, (4.94) denklemlerindeki başlangıç koşullarını ve seriyi (4.93) denklemlerinde yerine koyarak,

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \frac{5}{3} - 2 \tanh^2(x), \\
 v_0 &= -\frac{5}{6} + \tanh^2(x), \\
 w_0 &= 1 + \tanh^2(x)
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
 u_{j+1} &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(\alpha(1-s) + s) \mathcal{L} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} \right)}{s} \right) + \\
 &\quad \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(\alpha(1-s) + s) \mathcal{L} (3A_j)}{s} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(\alpha(1-s) + s) \mathcal{L} \left(3 \frac{\partial w_j}{\partial x} \right)}{s} \right) - \\
 &\quad \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(\alpha(1-s) + s) \mathcal{L} (6C_j)}{s} \right),
 \end{aligned}$$

$$v_{j+1} = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(\alpha(1-s) + s)\mathcal{L} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^3 v_j}{\partial x^3} \right)}{s} \right) -$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(\alpha(1-s) + s)\mathcal{L}(3F_j)}{s} \right),$$

$$w_{j+1} = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(\alpha(1-s) + s)\mathcal{L} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^3 w_j}{\partial x^3} \right)}{s} \right) -$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(\alpha(1-s) + s)\mathcal{L}(3B_j)}{s} \right), \quad (4.96)$$

burada, A_j, B_j, C_j ve F_j lineer olmayan terimlerdir ve lineer olmayan terimler Adomian polinomları cinsinden temsil edilirler. Terimler şu şekilde tanımlanabilir:

$$N(u(x,t), v(x,t), w(x,t)) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j + B_j + C_j + F_j$$

burada

$$A_j = u(x,t)u_x(x,t),$$

$$B_j = u(x,t)w_x(x,t),$$

$$C_j = v(x,t)v_x(x,t),$$

$$F_j = u(x,t)v_x(x,t) \quad (4.97)$$

şeklindedir. Sonra lineer olmayan kısım bileşenlerine ayrılabilir:

$$A_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\lambda^j} \left[N \left(\sum_{i=0}^j \lambda^i u_i \right) \right] \Big|_{\lambda=0}, \quad m = 0,1,2,3, \dots$$

$$B_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\lambda^j} \left[N \left(\sum_{i=0}^j \lambda^i u_i \right) \right] \Big|_{\lambda=0}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$C_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\lambda^j} \left[N \left(\sum_{i=0}^j \lambda^i u_i \right) \right] \Big|_{\lambda=0}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$F_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\lambda^j} \left[N \left(\sum_{i=0}^j \lambda^i u_i \right) \right] \Big|_{\lambda=0}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.98)$$

Yukarıdaki Adomian polinomlarının birkaç bileşeni:

$$A_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot u_0$$

$$A_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot u_0$$

$$A_2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot u_0$$

$$A_3 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot u_3 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x} \cdot u_0$$

$$A_4 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot u_4 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot u_3 + \frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial u_4}{\partial x} \cdot u_0$$

$$A_5 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot u_5 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot u_4 + \frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot u_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x} \cdot u_2 + \frac{\partial u_4}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial u_5}{\partial x} \cdot u_0$$

$$B_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot u_0$$

$$B_1 = \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \cdot u_0$$

$$B_2 = \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \cdot u_0$$

$$B_3 = \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot u_3 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \cdot u_2 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial w_3}{\partial x} \cdot u_0$$

$$B_4 = \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot u_4 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \cdot u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \cdot u_2 + \frac{\partial w_3}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial w_4}{\partial x} \cdot u_0$$

$$B_5 = \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot u_5 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \cdot u_4 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \cdot u_3 + \frac{\partial w_3}{\partial x} \cdot u_2 + \frac{\partial w_4}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial w_5}{\partial x} \cdot u_0$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, C_j ve F_j de aynı yolla hesaplanır.

O halde, Adomian polinomlarını denklem (4.96) da yerine koyarak ve iteratif algoritmayı uygulayarak,

$$u_1 = 4 \tanh(x) [(3 \tanh^4(x) - 5 \tanh^2(x) + 2)(\alpha t - \alpha + 1)] +$$

$$2 \tanh(x) [(-6 \tanh^4(x) + 11 \tanh^2(x) - 5)(\alpha t - \alpha + 1)] +$$

$$6 \tanh(x) [(\alpha t - \alpha + 1)(1 - \tanh^2(x))]$$

$$v_1 = 4 \tanh(x) [(3 \tanh^4(x) - 5 \tanh^2(x) + 2)(\alpha t - \alpha + 1)] -$$

$$2 \tanh(x) [(6 \tanh^4(x) - 11 \tanh^2(x) + 5)(\alpha t - \alpha + 1)]$$

$$w_1 = 4 \tanh(x) [(3 \tanh^4(x) - 5 \tanh^2(x) + 2)(\alpha t - \alpha + 1)] -$$

$$2 \tanh(x) [(6 \tanh^4(x) - 11 \tanh^2(x) + 5)(\alpha t - \alpha + 1)]$$

$$u_2 = -4 - 2\alpha^2(t^2 - 4t + 2) - 8\alpha(t - 1) +$$

$$2 \frac{\sinh^2(x) (\alpha^2 t^2 - 4\alpha^2 t + 2\alpha^2 + 4\alpha t - 4\alpha + 2)(2 \cosh^4(x) + 15)}{\cosh^6(x)} -$$

$$\frac{\sinh^2(x) (\alpha^2 t^2 - 4\alpha^2 t + 2\alpha^2 + 4\alpha t - 4\alpha + 2)(5 \cosh^4(x) + 3 \cosh^2(x) + 30)}{\cosh^6(x)} +$$

$$3 \frac{\sinh^2(x) (\alpha^2 t^2 - 4\alpha^2 t + 2\alpha^2 + 4\alpha t - 4\alpha + 2)(\cosh^2(x) + 3)}{\cosh^4(x)}$$

$$v_2 = 2 + \alpha^2(t^2 - 4t + 2) + 4\alpha(t - 1) +$$

$$2 \frac{\sinh^2(x) (\alpha^2 t^2 - 4\alpha^2 t + 2\alpha^2 + 4\alpha t - 4\alpha + 2)(2 \cosh^4(x) + 15)}{\cosh^6(x)} -$$

$$\frac{\sinh^2(x) (\alpha^2 t^2 - 4\alpha^2 t + 2\alpha^2 + 4\alpha t - 4\alpha + 2)(5 \cosh^4(x) + 3 \cosh^2(x) + 30)}{\cosh^6(x)}$$

$$w_2 = 2 + \alpha^2(t^2 - 4t + 2) + 4\alpha(t - 1) -$$

$$\frac{\sinh^2(x) (\alpha^2 t^2 - 4\alpha^2 t + 2\alpha^2 + 4\alpha t - 4\alpha + 2)(5 \cosh^4(x) + 3 \cosh^2(x) + 30)}{\cosh^6(x)} +$$

$$2 \frac{\sinh^2(x) (\alpha^2 t^2 - 4\alpha^2 t + 2\alpha^2 + 4\alpha t - 4\alpha + 2)(2 \cosh^4(x) + 15)}{\cosh^6(x)}$$

⋮

sonucu elde edilir. Dolayısıyla zaman kesirli genelleştirilmiş Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denkleminin seri çözümü aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$u(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$v(x, t) = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

$$w(x, t) = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{8}{3} \operatorname{sech}^7(x) \left[-\frac{1}{8} \cosh^7(x) + 3 \left(\frac{5}{4} + \left(1 + \frac{1}{2} t^2 - 2t \right) \alpha^2 + 2\alpha(t - 1) \right) \cosh^5(x) \right. \\ & + \sinh(x) \left(\frac{15}{2} + \alpha^3(t^3 - 9t^2 + 18t - 6) + 9\alpha^2(t^2 - 4t + 2) \right. \\ & + \left. \frac{39}{2} \alpha(t - 1) \right) \cosh^4(x) + 9 \left(-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} t^2 + t \right) \alpha^2 \right. \\ & + \left. (-t + 1)\alpha \right) \cosh^3(x) - 3 \sinh(x) \alpha^2 t^2 (3 + (t - 3)\alpha) \cosh^2(x) \\ & \left. \left. + 27 \sinh(x) ((t^2 - 3t + 1)\alpha^2 + (3t - 2)\alpha + 1)(\alpha - 1) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(x, t) = & -\frac{4}{3} \operatorname{sech}^7(x) \left[-\frac{1}{8} \cosh^7(x) \right. \\
& + 3 \left(\frac{5}{4} + \left(1 + \frac{1}{2} t^2 - 2t \right) \alpha^2 + 2\alpha(t-1) \right) \cosh^5(x) \\
& + \sinh(x) \left(\frac{15}{2} + (t^3 + 18t - 6)\alpha^3 + 9\alpha^2(t^2 - 4t + 2) \right. \\
& + \left. \frac{39}{2} \alpha(t-1) \right) \cosh^4(x) + 9 \left(-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + t - \frac{1}{4} t^2 \right) \alpha^2 \right. \\
& + \left. (1-t)\alpha \right) \cosh^3(x) \\
& - 3 \sinh(x) \left(18 + 3t^2 \alpha^3 \sinh^2(x) + (t^3 + 54t - 18)\alpha^3 \right. \\
& + 3(7t^2 - 36t + 18)\alpha^2 + 54\alpha(t-1) \cosh^2(x) + 54 \sinh(x) \left(1 \right. \\
& + \left. t^2 \alpha^3 \sinh^2(x) + (3t-1)\alpha^3 + (t^2 - 6t + 3)\alpha^2 + 3\alpha(t-1) \right) \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(x, t) = & -\frac{4}{3} \operatorname{sech}^7(x) \left[-\frac{3}{2} \cosh^7(x) \right. \\
& + 3 \left(\frac{5}{4} + \left(1 + \frac{1}{2} t^2 - 2t \right) \alpha^2 + 2\alpha(t-1) \right) \cosh^5(x) \\
& + \left(\frac{15}{2} + (t^3 + 18t - 6)\alpha^3 + 9\alpha^2(t^2 - 4t + 2) \right. \\
& + \left. \frac{39}{2} \alpha(t-1) \right) \sinh(x) \cosh^4(x) + 9 \left(-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} t^2 + t \right) \alpha^2 \right. \\
& + \left. (1-t)\alpha \right) \cosh^3(x) \\
& - 3 \sinh(x) \left(18 + 3t^2 \alpha^3 \sinh^2(x) + (t^3 + 54t - 18)\alpha^3 \right. \\
& + 3(7t^2 - 36t + 18)\alpha^2 + 54\alpha(t-1) \cosh^2(x) + 54 \left(1 \right. \\
& + \left. t^2 \alpha^3 \sinh^2(x) + (3t-1)\alpha^3 + (t^2 - 6t + 3)\alpha^2 \right. \\
& + \left. 3\alpha(t-1) \sinh(x) \right) \left. \right].
\end{aligned}$$

Tablo 4.9: $\mathbf{x} = \mathbf{10}$ olduğunda $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ nin 4 terimi dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin karşılaştırması

$\alpha = 1$			
t	Uygulanan Yöntem (u_U)	Tam Çözüm (u_T)	$ u_T - u_U $
0.1	0.3333333133	0.333333313	1.61×10^{-10}
0.2	0.3333333088	0.333333309	2.80×10^{-10}
0.4	0.3333332968	0.333333296	9.36×10^{-10}
0.6	0.3333332805	0.333333278	2.40×10^{-9}
0.8	0.3333332581	0.333333251	7.07×10^{-9}
1.0	0.3333332288	0.333333211	1.79×10^{-8}

Tablo 4.10: $\mathbf{x} = \mathbf{10}$ olduğunda $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ nin 4 terimi dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin karşılaştırması

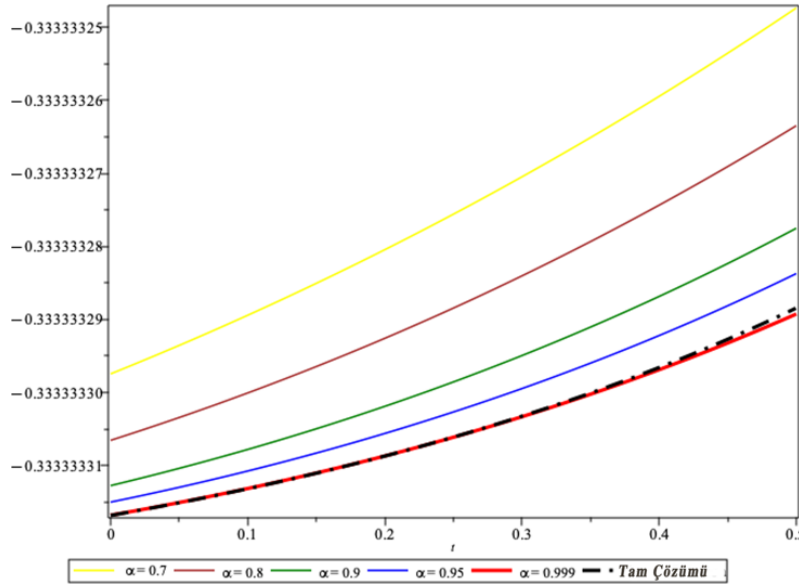
$\alpha = 1$			
t	Uygulanan Yöntem (v_U)	Tam Çözüm (v_T)	$ v_T - v_U $
0.1	0.1666666565	0.166666657	6.94×10^{-11}
0.2	0.1666666544	0.166666654	9.00×10^{-11}
0.4	0.1666666485	0.166666648	2.18×10^{-10}
0.6	0.1666666403	0.166666639	9.51×10^{-10}
0.8	0.1666666291	0.166666626	3.18×10^{-9}
1.0	0.1666666144	0.166666606	8.78×10^{-9}

Tablo 4.11: $\mathbf{x} = \mathbf{10}$ olduğunda $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ nin 4 terimi dikkate alınarak tam ve yarı analitik çözümlerin karşılaştırması

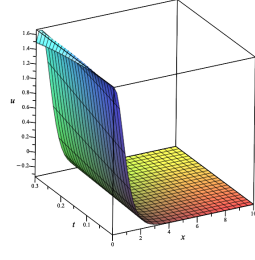
$\alpha = 1$			
t	Uygulanan Yöntem (w_U)	Tam Çözüm (w_T)	$ w_T - w_U $
0.1	1.999999991	1.999999990	6.94×10^{-11}
0.2	1.999999987	1.999999988	2.90×10^{-10}
0.4	1.999999983	1.999999982	1.82×10^{-10}
0.6	1.999999973	1.999999973	5.51×10^{-10}
0.8	1.999999961	1.999999959	3.38×10^{-9}
1.0	1.999999947	1.999999939	8.78×10^{-9}

Tablolar 4.11, 4.12 ve 4.13 te, zaman kesirli Hirota-Satsuma denklemleri için belirtilen yöntemle elde edilen dört terimli yaklaşık yarı-analitik çözümler, tam çözümlerle sayısal olarak karşılaştırılmış ve mutlak hatalar sunulmuştur. Bulgular, t değerlerinin artmasıyla mutlak hataların arttığını, daha yüksek alfa değerlerinin ise azalan mutlak hatalarla ilişkilendirildiğini önermektedir.

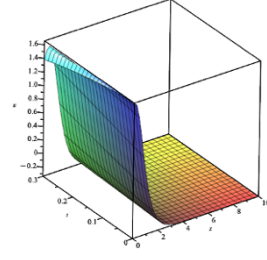
Diğer kaynaklarla karşılaştırıldığında, uygulanan yöntemin başlangıç dört terim için elde edilen çözümlerin oldukça doğru olduğunu ve kesin çözümlere hızla yakınsadığını göstermektedir (Li ve diğ. 2021, Kurt ve diğ. 2019, Merdan ve diğ. 2013, Neirameh 2015). Ayrıca, Şekil 4.14'ten Şekil 4.19'a kadar, türevin mertebesindeki değişikliklerin $u(x, t)$, $v(x, t)$ ve $w(x, t)$ sonuçlarının fiziksel davranışını nasıl etkilediğini göstermektedir. Bu çizilen grafikler, α 'nın çeşitli değerleri için yarı-analitik çözümleri sergilemektedir. Dikkat çekici bir şekilde, $\alpha = 1$ olduğunda tam çözümün bu uygulanan yöntemle elde edilen yarı-analitik sonuçlarla yakından eşleştiğini ortaya koymaktadır.



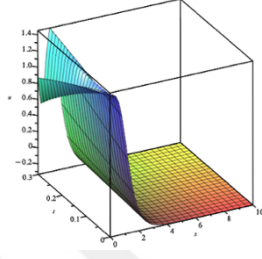
Şekil 4.15: 2B grafiklerinin karşılaştırılması: α için $u(x, t)$ yarı-analitik çözümler ve kesin çözüm



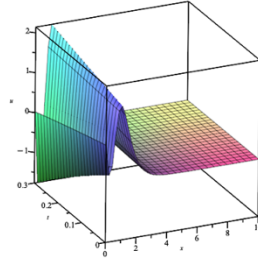
Tam çözümü $u(x, t)$



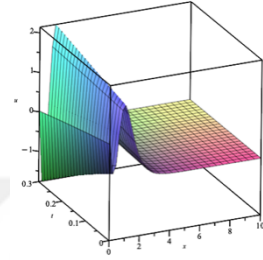
$\alpha = 0.95$



$\alpha = 0.75$

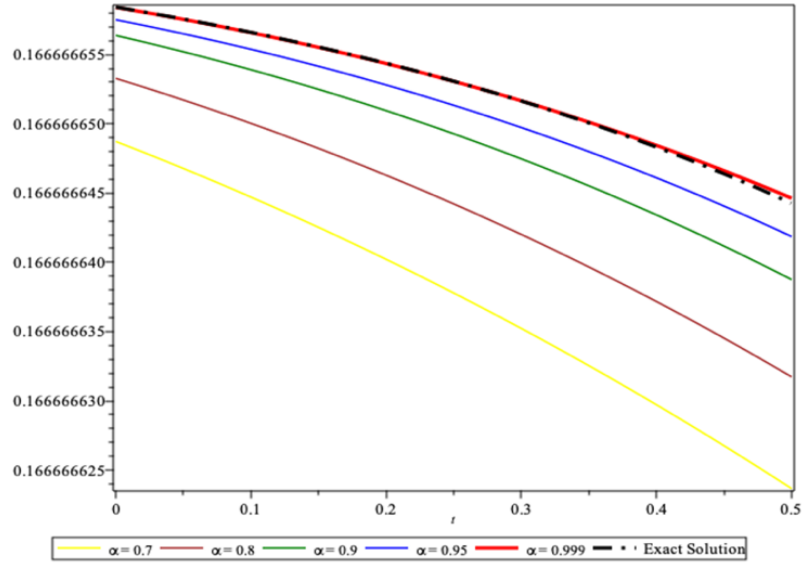


$\alpha = 0.5$

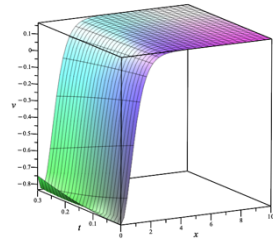


$\alpha = 0.25$

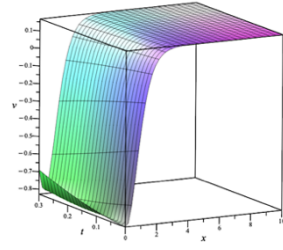
Şekil 4.16: 3B grafiklerinin karşılaştırılması: α için $u(x, t)$ yarı-analitik çözümler ve tam çözüm



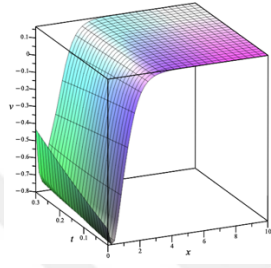
Şekil 4.17: 2B grafiklerinin karşılaştırılması: α için $v(x, t)$ yarı-analitik çözümler ve tam çözüm



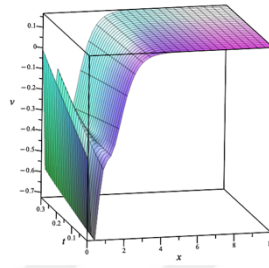
Tam çözüm $u(x, t)$



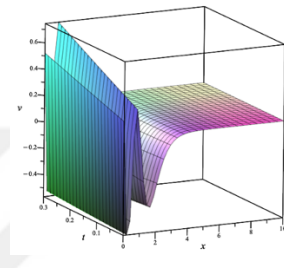
$\alpha = 0.95$



$\alpha = 0.75$

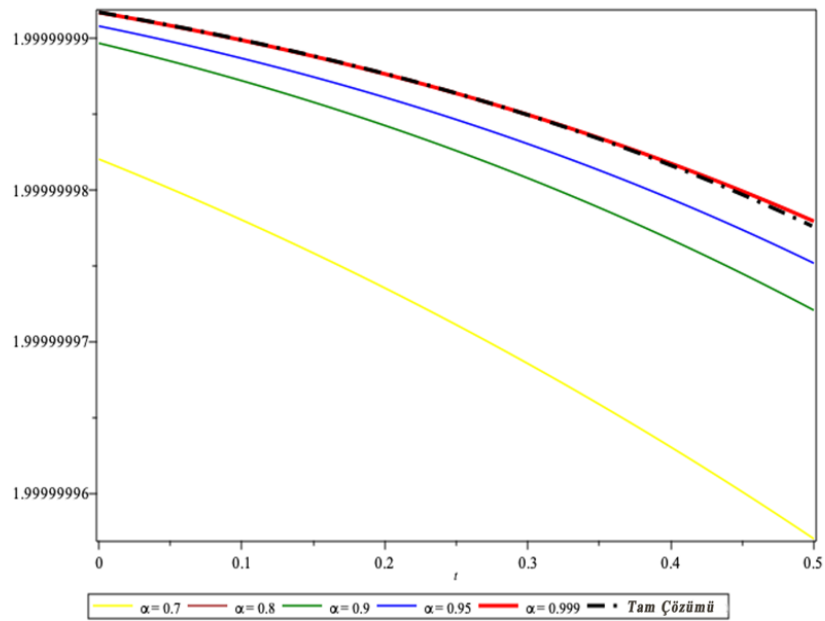


$\alpha = 0.5$

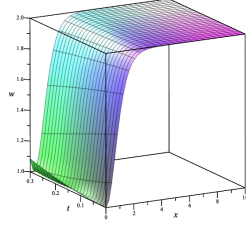


$\alpha = 0.25$

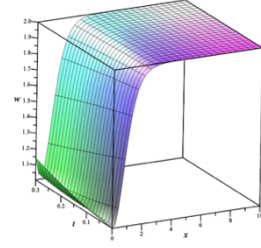
Şekil 4.18: 3B grafiklerinin karşılaştırılması: α için $v(x, t)$ yarı-analitik çözümler ve tam çözüm



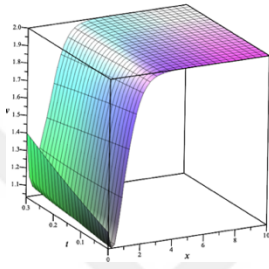
Şekil 4.19: 2B grafiklerinin karşılaştırılması: α için $w(x, t)$ yarı-analitik çözümler ve tam çözüm



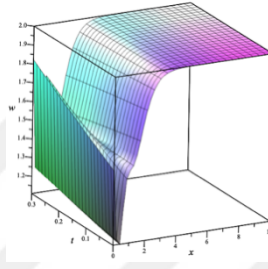
Tam Çözüm $w(x, t)$



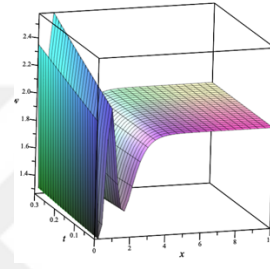
$\alpha = 0.95$



$\alpha = 0.75$



$\alpha = 0.5$



$\alpha = 0.25$

Şekil 4.20: 3B grafiklerinin karşılaştırılması: α için $w(x, t)$ yarı-analitik çözümler ve tam çözüm

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez, Laplace dönüşümü ve Adomian ayrıştırma tekniğinin kombinasyonu gibi hibrit analitik-sayısal yöntemlerin, lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemleri çözmede önemli bir araç olduğunu ortaya koymaktadır. Bu yöntem, Newell–Whitehead–Segel denklemi, jeofizik KdV denklemi, doğrusal olmayan salınım problemleri ve genelleştirilmiş Hirota-Satsuma modeli gibi farklı modellere uygulanmış ve yüksek hassasiyetli, yakınsayan yarı-analitik çözümler kanıtlanmıştır.

Caputo-Fabrizio türevi ve diğer kesirli türev formlarının kullanımı, lineer olmayan, saçılma ve kesirli türevin etkilerinin daha derinlemesine incelenmesini mümkün kılmakta; bu da fizik, biyoloji, kıyı mühendisliği ve diğer alanlardaki gerçek dünya olaylarının anlamada büyük bir önem taşır. Elde edilen çözümlerin kesin çözümler ve diğer referanslarla karşılaştırılması, bu yöntemlerin yüksek doğruluğunu, hesaplama kolaylığını ve güvenilirliğini ortaya koymakta; ayrıca, parametrelerin farklı değerlerinde de tutarlılığını ve hassasiyetini koruduğunu göstermektedir.

Ayrıca, bu yöntemler yeni dalga biçimleri, solitonlar ve hareketli dalga çözümlerinin keşfedilmesine olanak sağlayarak sinyal işleme, akışkanlar mekaniği ve bilimsel modelleme gibi alanlarda katkıda bulunmuştur. Maple gibi sayısal araçların kullanımı, sonuçların doğrulanmasını ve görselleştirilmesini sağlamış, bu yaklaşımların gerçek dünya problemlerine uygulanabilirliğini vurgulamıştır.

Genel olarak, bu çalışma, hibrit yöntemlerin kesirli kısmi diferansiyel denklemleri çözmede etkili araçlar olduğunu ortaya koymakta ve matematiksel modelleme ile çok disiplinli alanlardaki uygulamalara yönelik yeni araştırmalara zemin hazırlamaktadır.

6. KAYNAKLAR

Aasaraai, A., “Analytic solution for Newell-Whitehead-Segel Equation by differential transform method”, *Middle East J. Sci. Res.*, 10, 270–273, (2011).

Adomian, G., Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, (1994).

Ahrabi, S. S., ve Momenzadeh, A., “On Failed Methods of Fractional Differential Equations: The Case of Multi-step Generalized Differential Transform Method”, *Mediterr. J. Math.*, 15 (149), 10 pages, (2018).

Ak, T., Saha, A., Dhawan, S., & Kara, A. H., “Investigation of Coriolis Effect on oceanic flows and its bifurcation via Geophysical Korteweg–de Vries equation”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 36(6), 1234–1253, (2020).

Al-Refai, M. and Pal, K., “New aspects of Caputo – Fabrizio fractional derivative”, *Progr. Fract. Differ. Appl*, 5 (2), 157-166, (2019).

Alharbi, A.R. and Almatrafi, M.B., “Exact solitary wave and numerical solutions for geophysical KdV equation”, *Journal of King Saud University Science*, 34(6), 102087, (2022).

Areshi, M., Khan, A., Shah, R., & Nonlaopon, K., “Analytical investigation of fractional-order Newell-Whitehead-Segel equations via a novel transform”, *Aims Math*, 7(4), 6936-6958, (2022).

Atangana, A. and Baleanu, D., “New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model”, *Thermal Science*, 20(2), 763–769, (2016).

Atangana, A., ve Baleanu, D., “New fractional derivatives applied to the modeling of electromagnetic wave propagation in media with memory”, *Progress in Electromagnetics Research M*, 60, 15-28, (2017).

Bagley, R. L., ve Torvik, P. J., “Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures”, *AIAA Journal*, 21 (5), 741-748, (1983).

Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., and Trujillo, J.J., Fractional Calculus: Models and Numerical Methods, New Jersey, World Scientific, (2012).

Berezovsky, A. D., ve Cheremnykh, O. K., “Polarization phenomena in fractional calculus”, *Applied Mathematics and Computation*, 338, 332-343, (2018).

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (10th ed.), Wiley, (2017).

Caputo, M., and Fabrizio, M., “A new definition of fractional derivative without singular kernel”, *Progress in fractional differentiation and applications*, 1(2), 73-85, (2015).

Dascioglu, A., ve Sezer, M., *Diferansiyel Denklemler 2*, Türkiye: DORA, 191-192, (2017).

Diethelm, K., *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Springer Science & Business Media, (2010).

Elma, B., “kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan bazı evrim denklemlerinin çözümleri üzerine”, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İzmir, (2021)

Fahad, H.M., Rehman, M.U., and Fernandez, A., “On Laplace transforms with respect to functions and their applications to fractional differential equations”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46 (7): 8304-8323 (2023).

Feng, G.Q., “He’s frequency formula to fractal undamped Duffing equation”, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 40(4), 1671-1676, (2021).

Fowler, A. C., *Mathematical Methods for Physicists* (2nd ed.), Academic Press, (1997).

Gupta, A. K., ve Ray, S. S., “Numerical treatment for the solution of fractional fifth-order Sawada–Kotera equation using second kind Chebyshev wavelet method”, *Applied Mathematical Modelling*, 39 (17), 5121-5130, (2015).

Geng, F., “A piecewise variational iteration method for treating a nonlinear oscillator of a mass attached to a stretched elastic wire”, *Computers & Mathematics with Applications*, 62(4), 1641–1644, (2011).

Geyer, A. and Quirchmayr, R., “Shallow water equations for equatorial tsunami waves”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (italicized), 376(2111), 5743–5756, (2017).

Girejko, E., Mozyrska, D., ve Wyrwas, M., “A sufficient condition of viability for fractional differential equations with the Caputo derivative”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 381, 146-154, (2011).

González-Gaxiola, O., ve Ruiz de Chávez, J., “Application of a heuristic method to solve nonlinear oscillators with irrational forces”, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 15 (1), 82–99, (2022).

Hashim, I., Abdulaziz, O., ve Momani, S., “Homotopy analysis method for fractional IVPs”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 674-684, (2009).

Hattaf, K., “A new mixed fractional derivative with applications in computational biology”, *Computation* 12 (1),7 (2024).

Herrmann, R., “Fractional Calculus: An Introduction for Physicists”, *Journal of Physics: Conference Series* 56 (4), 576 (2011).

Hilal, N., Injrou, S. and Karroum, R., “Exponential finite difference methods for solving Newell–Whitehead–Segel equation”, *Arabian Journal of Mathematics*, 9, 367-379, (2020).

Hosen, M. A., Chowdhury, M. S. H., and Motakabber, S. M. A., “Analytical approximate solutions of the Duffing relativistic oscillator”, In *Third International Conference on Advances in Computing, Control and Networking – ACCN*, (2015).

Iyiola, O. S., “A numerical study of ito equation and Sawada-Kotera equation both of time-fractional type”, *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 2 (2), 71-79, (2013).

Jassim, H. K., “Homotopy perturbation algorithm using Laplace transform for Newell-Whitehead-Segel equation”, *Int. J. Adv. Appl. Math. Mech.*, 2, 8–12, (2015).

Javeed, S., Baleanu, D., Waheed, A., Khan, M. S., ve Affan, H., “Analysis of Homotopy Perturbation Method for Solving Fractional Order Differential Equations”, *Mathematics*, 7 (1), 40, 14 pages, (2019).

Jones, S. E., “Remarks on the perturbation process for certain Conservative Systems”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 13(2), 125–128, (1978).

Kanchana, C., Siddheshwar, P. G., and Zhao, Y., “Primary and secondary instabilities in Rayleigh-Bénard convection of water-copper nanoliquid”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 90, 105392, (2020).

Karunakar, P. and Chakraverty, S., “Effect of coriolis constant on geophysical Korteweg-de Vries equation”, *Journal of Ocean Engineering and Science*, 4(2), 113–121, (2019).

Keskin, Y. and Oturanc, G., “Reduced differential transform method for partial differential equations”, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(6), 741-750, (2009).

Khan, A., Saifullah, S., Ahmad, S., Khan, J., and Baleanu, D., “Multiple bifurcation solitons, lumps and rogue waves solutions of a generalized perturbed KdV equation,” *Nonlinear Dynamics*, 111(6), 5743–5756, (2022).

Khater, M. M., and Kumar, D., “Implementation of three reliable methods for finding the exact solutions of $(2+ 1)$ dimensional generalized fractional evolution equations”, *Optical and Quantum Electronics*, 50, 1-16, (2018).

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam, Elsevier, (2006).

Kirby, J. T., Shi, F., Tehranirad, B., Harris, J. C. and Grilli, S. T., “Dispersive tsunami waves in the ocean: Model equations and sensitivity to dispersion and Coriolis effects”, *Ocean Modelling*, 62, 39–55, (2013).

Kisela, T., “Fractional Differential Equations and Their Applications”, Diploma Thesis, Brno University of Technology, Institute of Mathematics, Brno, (2008).

Kovacic, I., “Four types of strongly nonlinear oscillators: Generalization of a perturbation procedure”, *Procedia IUTAM*, 19, 101–109, (2016).

Kovacic, I., and Brennan, M. J. “The Duffing equation: Nonlinear oscillators and their behaviour.” Wiley, (2011).

Kurt, A., “Conformable Laplace Dönüşümleri ve Uygulamaları”, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Konya, (2018).

Kurt, A., Rezazadeh, H., Senol, M., Neirameh, A., Tasbozan, O., Eslami, M., ve Mirzazadeh, M., “Two effective approaches for solving fractional

generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system arising in interaction of long waves”, *Journal of Ocean Engineering and Science*, 4 (1), 24-32, (2019).

Kumar, D., ve Baleanu, D., “Fractional calculus and its applications in physics”, *Frontiers in Physics*, 7, 81, (2019).

Latif, B., Selamat, M.S., Rosli, A.N., Yusoff, A.I. and Hasan, N.M., “The semi-analytic iterative method for solving Newell-Whitehead-Segel equation”, *Mathematics and Statistics*, 8, 87–94, (2020).

Li, Z., Li, P., ve Han, T., “Bifurcation, traveling wave solutions, and stability analysis of the fractional generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equations”, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2021, 1-6, (2021).

Loh, J. R., Isah, A., Phang, C., and Toh, Y. T., “On the new properties of Caputo–Fabrizio Operator and its application in deriving shifted Legendre operational matrix”, *Applied Numerical Mathematics*, 132, 138–153, (2018).

Mainardi, F. “Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models”, *Mathematics in Applied Sciences*, 56 (4): 576 (2010).

Mak, M. K., Leung, C. S., ve Harko, T., “A brief introduction to the Adomian decomposition method, with applications in astronomy and astrophysics”, *arXiv.org*, (2021, February 21).

Mboro Nchama, G. A., Lau-Alfonso, L. D., Leon Mecías, A. M., ve Rodríguez Ricard, M., “Properties of the Caputo-Fabrizio fractional derivative”, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 14, 761-769, (2020).

Merdan, M., Gökdoğan, A., Yildirim, A., ve Tauseef Mohyud-Din, S., “Solution of time-fractional generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by generalised differential transformation method”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 23 (5), 927-940, (2013).

Mickens, R. E., *Oscillations in planar dynamic systems*. World Scientific, (1996).

Miller, K. S., ve Ross, B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, (1993).

Naowarat, S., Saifullah, S., Ahmad, S. And De la Sen, M., “Periodic, singular and dark solitons of a generalized geophysical KdV equation by using the tanh-coth method”, *Symmetry*, 15(1), 135, (2023).

Nchama, G. A., “Properties of Caputo-Fabrizio fractional operators”, *New Trends in Mathematical Science*, 1 (8), 001–025, (2020).

Neirameh, A., “Soliton solutions of the time fractional generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system”, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 9 (4), 1847, (2015).

Newell, A.C. and Whitehead, J.A., “Finite bandwidth, finite amplitude convection”, *Journal of Fluid Mechanics*, 38, 279–303, (1969).

Oldham, K.B., Spanier, J., *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, New York, Dover Publications, (2006).

Ogata, K., *Modern Control Engineering* (5th ed.), Prentice-Hall, (2010)

Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, San Diego, Academic Press, (1999).

Podlubny, I., “The Laplace Transform Method for Linear Differential Equations of the Fractional Order”, *arXiv preprint funct-an/9710005*, (1997).

Prakash, A., Goyal, M. and Gupta, S., “Fractional variational iteration method for solving time-fractional Newell-Whitehead-Segel equation”, *Nonlinear Engineering*, 8, 164–171, (2019).

Prakash, A., ve Verma, V., “Numerical method for fractional model of Newell-Whitehead-Segel equation”, *Frontiers in Physics*, 7, (2019).

Pue-On, P., “Laplace Adomian decomposition method for solving Newell-Whitehead-Segel equation”, *Applied Mathematical Sciences*, 7(132), 6593-6600, (2013).

Raberto, M., Scalas, M., ve Mainardi, F., “Waiting times and returns in high frequency financial data: An empirical study”, *Physica A*, 314, 749-755, (2002).

Riaz, M. B., Naseer, F., Abbas, M., Abd El-Rahman, M., Nazir, T., ve Chan, C. K., “Solitary wave solutions of Sawada-Kotera equation using two efficient analytical methods”, *AIMS Mathematics*, 8 (12), 31268-31292, (2023).

Rizvi, S. T. R., Seadawy, A. R., Ashraf, F., Younis, M., Iqbal, H., and Baleanu, D., “Lump and interaction solutions of a geophysical Korteweg–de Vries equation”, *Results in Physics*, 19, 103661, (2020).

Rosales García, J. J., Filoteo, J. D., ve González, A., “A comparative analysis of the RC circuit with local and non-local fractional derivatives”, *Revista Mexicana De Física*, 64 (6 Nov-Dec), 647-654, (2018).

Saifullah, S., Fatima, N., Abdelmohsen, S. A., Alanazi, M. M., Ahmad, S. and Baleanu, D., “Analysis of a conformable generalized geophysical KdV equation with Coriolis effect”, *Alexandria Engineering Journal*, 73, 651-663, (2023).

Salas, A. H., and Castillo H., J. E., “Exact solution to Duffing equation and the pendulum equation,” *Applied Mathematical Sciences*, 8, 8781–8789, (2014).

Shaikh, A., et al., “Analysis of differential equations involving Caputo–Fabrizio Fractional Operator and its applications to reaction–diffusion equations”, *Advances in Difference Equations*, 2019 (1), (2019).

Shatnawi, M. T., Ouannas, A., Bahia, G., Batiha, I. M. and Grassi, G., “The optimal homotopy asymptotic method for solving two strongly fractional-order nonlinear benchmark oscillatory problems”, *Mathematics*, 9 (18), (2021).

Singh, B. K., ve Kumar, P., “Fractional Variational Iteration Method for Solving Fractional Partial Differential Equations with Proportional Delay”, *International Journal of Differential Equations*, 2017, Article ID 5206380, 11 pages, (2017).

Stinga, P. R., “Fractional derivatives: Fourier, elephants, memory effects, viscoelastic materials, and anomalous diffusions”, *Notices of the American Mathematical Society*, 70(04), 1. (2023).

Strogatz, S. H., *Nonlinear dynamics and chaos*, (1996).

Sumiati, I., Sukono, K., ve Bon, A. T., “Solution of Fractional Ordinary Differential Equations Using the Elzaki-Adomian Decomposition Method”, *Proceedings of the 5th NA International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*, Detroit, Michigan, USA, August, 10-14, (2020).

Sun, W. P., Wu, B. S., & Lim, C. W., “Approximate analytical solutions for oscillation of a mass attached to a stretched elastic wire,” *Journal of Sound and Vibration*, 300(3–5), 1042–1047, (2007).

Sun, J., ve Zhao, H., “Fractional differential equation modeling of charge transfer dynamics in electrode-electrolyte systems”, *Electrochimica Acta*, 251, 299-307, (2017).

Sunday, J., “The Duffing oscillator: Applications and computational simulations,” *Asian Research Journal of Mathematics*, 2(3), 1–13, (2017).

Wazwaz, A.-M., “The tanh method: Exact solutions of the Sawada-Kotera and the Hirota-Satsuma equations”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 78 (1), 120-130, (2008).

Yang, X. J., Abdel-Aty, M., ve Cattani, C., “A new general fractional-order derivative with Rabotnov fractional-exponential kernel applied to model the anomalous heat transfer”, *Thermal Science*, 23 (3 Part A), 1677-1681, (2019).

Yang, X. J., Baleanu, D., ve Machado, J. A. T., “Fractional diffusion equations and anomalous diffusion: a brief survey”, *Journal of King Saud University-Science*, 31 (4), 437-443, (2019).

Younas, U., Ren, J., Baber, M. Z., Yasin, M. W. and Shahzad, T., “Ion-acoustic wave structures in the fluid ions modeled by higher dimensional generalized Korteweg-de Vries–Zakharov–Kuznetsov equation”, *Journal of Ocean Engineering and Science*, (2022).

Younesian, D., Askari, H., Saadatnia, Z., & Kalami Yazdi, M., “Analytical approximate solutions for the Generalized Nonlinear Oscillator,” *Applicable Analysis*, 91(5), 965–977, (2012).

Zill, D. G., ve Cullen, M. R. (2018). *Advanced Engineering Mathematics*. 10th ed. Boston: Cengage Learning, 184-209, (2018).