



**HİPERBOLİK JACOBSTHAL VE HİPERBOLİK
JACOBSTHAL -LUCAS POLİNOMLAR**

Kübra Nur GÜRBÜZ

**Doç. Dr. Sait TAŞ
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
2025
(Her hakkı saklıdır.)**

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**HİPERBOLİK JACOBSTHAL VE HİPERBOLİK JACOBSTHAL-LUCAS
POLİNOMLAR**

(Hyperbolic Jacobsthal and Hyperbolic Jacobsthal - Lucas Polynomials)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra Nur GÜRBÜZ

Danışman: Doç. Dr. Sait TAŞ

Erzurum
Ocak, 2025

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Kübra Nur GÜRBÜZ tarafından hazırlanan “Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Jacobsthal- Lucas Polinomları” başlıklı çalışması 10 / 01 / 2025 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Erdal KARADUMAN <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır
Danışman:	Doç. Dr. Sait TAŞ <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN <i>Erzurum Teknik Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim YönetmeliĐi’nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

.... / / 202..

Aslı ıslak imzalıdır

Prof. Dr. Alper NUHOĐLU

Enstitü Müdürü



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Doç. Dr. Sait TAŞ danışmanlığında sunulan “HİPERBOLİK JACOBSTHAL VE HİPERBOLİK JACOBSTHAL -LUCAS POLİNOMLARI” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	22	30
Kuramsal Temeller	25	30
Materyal ve Metot	28	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	19	20
Sonuçlar ve Öneriler	0	20
Tezin Geneli	23	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Sunulan bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ettiğimizi beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Kübra Nur GÜRBÜZ	Doç. Dr. Sait TAŞ
20.12.2024	20.12.2024
İmza:	İmza:
Aslı Islak İmzalıdır	Aslı Islak İmzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Tez çalışma sürecinde desteğini, emeğini, ilgisini, engin bilgisini ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyen ve aynı zamanda kişiliği ve çalışmalarıyla kendime örnek aldığım saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Sait TAŞ’a çok teşekkür ederim. Beni yetiştiren maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen bana güvenen kıymetli anneme, babama ve sevgili kardeşlerime ayrıca her zaman desteğini hissettiren eşim Ali Serhat’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kübra Nur GÜRBÜZ



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HİPERBOLİK JACOBSTHAL VE HİPERBOLİK JACOBSTHAL LUCAS POLİNOMLAR

Kübra Nur GÜRBÜZ

Danışman: Doç. Dr. Sait TAŞ

Amaç: Hiperbolik, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının özelliklerinden yararlanarak Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Jacobsthal Lucas Polinomlarının üreteç fonksiyonlarını, Binet formüllerini, Q matrislerini ve determinat gösterimlerini bulmak amaçlanmıştır.

Yöntem: Gaussian Jacobsthal ve Gaussian Jacobsthal Lucas polinomları üzerine yapılan çalışmada bulunan özelliklerin Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomları üzerine uygulanmıştır.

Bulgular: Bu çalışmada, Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Lucas polinomları incelenerek, bu polinomların üreteç fonksiyonları, Binet formülleri, Q matrisleri ve determinat gösterimleri ele alınmıştır.

Sonuç: $HJ_n(1)$ özel durumu için Hiperbolik polinomlar tanımlanarak bunun bir Hiperbolik Jacobsthal sayısı, $HJ_n(1)$ ise Hiperbolik Jacobsthal Lucas sayısı olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Jacobsthal sayılar, Jacobsthal polinomlar, Hiperbolik Jacobsthal sayılar, Lucas sayılar, Lucas polinomlar, Hiperbolik Lucas polinomlar, Hiperbolik Jacobsthal polinomlar.

Ocak 2025, 40 sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

HYPERBOLIC JACOBSTHAL AND HYPERBOLIC JACOBSTHAL LUCAS POLYNOMIALS

Kübra Nur GÜRBÜZ

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sait TAŞ

Purpose: By using the properties of hyperbolic, Jacobsthal and Jacobsthal Lucas numbers, it is aimed to find the generating functions of Hyperbolic Jacobsthal and Hyperbolic Jacobsthal Lucas polynomials, Binet formulas, Q matrices and determinate representations.

Method: The properties found in the study on Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials were applied to Hyperbolic Jacobsthal and Hyperbolic Jacobsthal Lucas polynomials.

Findings: In this study, Hyperbolic Jacobsthal and Hyperbolic Lucas polynomials are examined and the generator functions, Binet formulas, Q matrices and determinant representations of these polynomials are discussed.

Results: By defining Hyperbolic polynomials for the special case $HJ_n(1)$, it was shown that it is a Hyperbolic Jacobsthal number, and $HJ_n(1)$ is a Hyperbolic Jacobsthal Lucas number.

Keywords: Jacobsthal numbers, Jacobsthal polynomial, Hyperbolic Jacobsthal numbers, Lucas numbers, Lucas polynomial, Hyperbolic Lucas polynomial, Hyperbolic Jacobsthal polynomial.

January 2025, 40 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ.....	vii
GİRİŞ.....	1
Jacobsthal Sayılar ve Özellikleri.....	2
Jacobsthal Lucas Sayılarının Özellikleri.....	3
KURAMSAL TEMELLER.....	5
MATERYAL VE METOT	9
ARAŞTIRMA BULGULARI	17
SONUÇ.....	29
KAYNAKÇA	30
ÖZ GEÇMİŞ.....	31

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

J_n	: Jacobsthal Sayıları
H	: Hiperbolik Sayılar
j_n	: Jacobsthal Lucas Sayıları
$J_n(x)$	: Jacobsthal Polinomları
$j_n(x)$	: Jacobsthal Lucas Polinomları
HF_n	: Hiperbolik Fibonacci Sayıları
F_n	: Fibonacci Sayıları
HJ_n	: Hiperbolik Jacobsthal Sayıları
Hj_n	: Hiperbolik Jacobsthal Lucas Sayıları
$\mathbb{H}J_n(x)$	: Hiperbolik Jacobsthal Polinomları
$\mathbb{H}j_n(x)$	: Hiperbolik Jacobsthal Lucas Polinomları
$Gj_n(x)$	: Gaussian Jacobsthal Lucas Polinomları
$GJ_n(x)$	: Gaussian Jacobsthal Polinomları

GİRİŞ

Matematiğin temeli olan sayılar ve bu sayılar arasındaki ilişkilerden yararlanarak tanım kümesi doğal sayılar olan birçok sayı dizisi matematiğin çalışma alanı olmuştur. Sayı dizileri sadece matematiğin değil fizik, görsel sanatlar, bilgisayar gibi birçok bilim dalında da yer almıştır. En bilinen sayı dizisi Fibonacci sayıları tavşanların üremesi problemi ile ilgili tanımlanmıştır. Ama Fibonacci' nin kendisi bu sayı dizisi üzerine bir çalışmada bulunmamıştır.

Fibonacci sayıları üzerine çalışmalar 19. yüzyılda başlamıştır. Fibonacci sayılarını bu kadar önemli kılan üç neden vardır.

Birinci neden; ilk terimler bitkilerde, böceklerde, çiçeklerde vb. birçok yerde karşımıza çıkar. İkinci neden; herhangi bir terim kendinden önceki terime bölündüğünde 'Altın oran' denilen $(1 + \sqrt{5})/2 = 1,618033 \dots$ irrasyonel sayıya yakınsadığı görülür.

Üçüncü neden ise bu sayıların sayılar teorisinde çok ilginç özelliklerinin olmasıdır.

Fibonacci sayılarının benzeri olan Lucas sayıları Edouard Lucas tarafından başlangıç değerleri değiştirilerek elde edilmiştir. Lucas dizilerinin bu kadar popüler olmasının nedeni Fibonacci sayı dizileri arasında birçok ilginç bağıntının olmasıdır.

Belçikalı matematikçi Eugene Charles Catalan ve Alman matematikçi E. Jacobsthal tarafından 1883 yıllarında tamsayı dizileri ile ilgili polinomlar üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Bu polinomlar Fibonacci ile benzer lineer bağıntı ilişkileri ile tanımlanmıştır. Örnek olabilecek birçok çalışma daha vardır.

Bu çalışmada öncelikle daha önceden bilinen Hiperbolik sayıların tanımı verilip bu sayıların toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü gösterildi daha sonra Hiperbolik Fibonacci sayıları, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas sayıları, Hiperbolik Jacobsthal sayıları ve Hiperbolik Jacobsthal Lucas sayılarının tanıtımı yapıldı. Daha fazla bilgi için, (Horadam 1965), (Atasanov 2011), (Atasanov 2012), (Horadam 1996), (Horadam 1997), (Dikmen 2019), (Tas 2022), (Barreira ve Valls 2016)(Gargoubi 2016).

Bu çalışmada üzerine çalışılan Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomlarının özellikleri incelenmeden önce tezde kullanılan Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının özelliklerine bakılmıştır. Bu sayıların bazı temel özellikleri aşağıda sunulmuştur.

Jacobsthal Sayılar ve Özellikleri

Jacobsthal sayıları, bazı matematiksel algoritmalar ve sayısal analiz gibi alanlarda kullanılır. Ayrıca, kriptografi ve veri sıkıştırma gibi bazı bilgisayar bilimleri uygulamalarında da yer alabilirler. Bunun yanı sıra, graf teorisi ve ağaç yapıları ile ilgili problemlerle de ilişkilidirler. Jacobsthal sayıları, bir tür özel sayı dizisidir ve Fibonacci dizisine benzer şekilde tanımlanırlar ancak farklı bir başlangıç koşuluna ve farklı bir geri dönüşüm ilişkisinin kullanılması ile oluşturulurlar. Jacobsthal sayıları genellikle J_n ile gösterilir.

Jacobsthal sayılarının Binet benzeri formülü,

$$J_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$$

şeklindedir. Negatif n tamsayıları için ise Jacobsthal sayıları

$$J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_n$$

olarak verilebilir.

Binet formülü, tam sayı dizileri için çok önemlidir. Tam sayı dizilerinin birçok önemli özelliği, Binet formülleri ile elde edilebilir. Jacobsthal sayıları için Binet benzeri formül ile elde edilen özellikler şu şekilde verilebilir.

$$i) J_{m+n} = J_m J_n - (-2)^n J_{m-n}$$

$$ii) J_{m-n} = (-2)^{-n} (J_m J_n - J_{m+n})$$

$$iii) J_{2n+1} = J_{n+1} J_n - (-2)^n = J_n J_{n+1} + (-2)^n$$

Horadam, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları arasındaki bağıntıları içeren birçok özelliği ve bu sayıların ardışık toplamalarını,

$$\sum_{i=2}^n J_i = \frac{1}{2} (J_{n+2} - 3)$$

şeklinde vermiştir (Horadam 1997). İndis toplam ve fark özelliğini, büyük indisli tek sayıların indirgenme formülünü, ayrıca çift ve tek ardışık toplamalarını ve ardışık kare toplamalarını Jacobsthal Binet benzeri formülü kullanılarak

$$i) J_{m+n} = J_m J_{n+1} + 2J_{m-1} J_n ,$$

$$ii) J_{2n} = J_n J_{n+1} + 2J_n J_{n-1} = J_n (J_{n+1} + 2J_{n-1}) = J_n j_n ,$$

$$iii) J_{2n+1} = J_{n+1}^2 + 2J_n^2 ,$$

iv) $(-1)^n 2^{n-1} J_{m-n} = J_m J_{n-1} - J_{m-1} J_n$

eşitlikleri ile verilebilir. (Koken ve Bozkurt 2008)

Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{\infty} J_i x^{i-1} = (1 - x - 2x^2)^{-1}$$

Simpson formülü,

$$J_{n+1} J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$$

şeklinde verilir. (Horadam 1996)

Jacobsthal Lucas Sayılarının Özellikleri

Jacobsthal-Lucas sayıları, Jacobsthal sayılarına benzer bir şekilde tanımlanan, ancak başlangıç koşulları farklı olan bir sayı dizisidir. Bu diziler, genellikle Lucas sayıları gibi, fakat belirli bir değişiklik ile tanımlanırlar. Jacobsthal Lucas sayıları matematiksel analiz ve teori, algoritmalar ve kriptografi, graf teorisi ve dinamik sistemler alanlarında kullanılır.

Jacobsthal Lucas sayılarının üreten fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{\infty} j_i x^{i-1} = (1 + 4x)(1 - x - 2x^2)^{-1}$$

Simpson formülü,

$$j_{n+1} j_{n-1} - j_n^2 = 9(-1)^{n-1} 2^{n-1}$$

ve toplam formülü

$$\sum_{i=1}^n j_i = \frac{1}{2} (j_{n+2} - 5)$$

şeklinde verilir (Horadam 1996).

j_n , n . Jacobsthal Lucas sayısı ise,

i) $j_{m+n} = j_m j_n - (-2)^n j_{m-n}$

ii) $j_{2n} = j_n^2 + (-2)^{n+1}$

$$\text{iii)} \quad j_{2n+1} = j_n j_{n+1} - (-2)^n$$

$$\text{iv)} \quad j_{m-n} = (-2)^{-n} (j_m j_n - j_{m+n})$$

eşitlikleri vardır. (Koken ve Bozkurt 2008)

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\text{i.} \quad j_n J_n = J_{2n}$$

$$\text{ii.} \quad j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$$

$$\text{iii.} \quad 9J_n = j_{n+1} + 2j_{n-1}$$

$$\text{iv.} \quad j_{n+1} + j_n = 3(J_{n+1} + J_n) = 3 \cdot 2^n$$

$$\text{v.} \quad j_{n+1} - j_n = 3(J_{n+1} - J_n) + 4(-1)^{n+1} = 2^n + 2(-1)^{n+1}$$

$$\text{vi.} \quad j_{n+1} - 2j_n = 3(2J_n - J_{n+1}) = 3(-1)^{n+1}$$

$$\text{vii.} \quad j_{n+r} - j_{n-r} = 3(J_{n+r} - J_{n-r}) = 2^{n-r}(2^{2r} - 1)$$

$$\text{viii.} \quad j_n = 3J_n + 2(-1)^n$$

$$\text{ix.} \quad 3J_n + j_n = 2^{n+1}$$

$$\text{x.} \quad J_n + j_n = 2J_{n+1}$$

$$\text{xi.} \quad j_{n+2}j_{n-2} - j_n^2 = -9(J_{n+2}J_{n-2} - J_n)^2 = 9(-1)^n 2^{n-2}$$

$$\text{xii.} \quad J_m j_n + J_n j_m = 2J_{m+n}$$

$$\text{xiii.} \quad j_m j_n + 9J_m J_n = 2j_{m+n}$$

$$\text{xiv.} \quad j_n^2 + 9J_n^2 = 2j_{2n}$$

$$\text{xv.} \quad J_m j_n - J_n j_m = (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n}$$

$$\text{xvi.} \quad j_m j_n - 9J_m J_n = (-1)^n 2^{n+1} j_{m-n}$$

$$\text{xvii.} \quad j_n^2 - 9J_n^2 = (-1)^n 2^{n+2} \quad (\text{Horadam 1996})$$

Bu tezin temel amacı, Gaussin Jacobsthal ve Gaussin Jacobsthal Lucas polinomlarının özellikleri incelenerek Hiperbolik, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas sayılarının ve polinomlarının özelliklerinden de yararlanarak aynı özelliklerin Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Jacobsthal Lucas Polinomlarında olup olmadığını incelemektir.

KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmamızı daha detaylı bir şekilde anlayabilmek için özelliklerinden yararlanılacak olan Hiperbolik, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas sayıları, Hiperbolik Fibonacci sayıları, Hiperbolik Jacobsthal, Hiperbolik Jacobsthal Lucas sayıları, Jacobsthal polinomlar ve Jacobsthal Lucas polinomlarının tanımları verilmiştir.

Kompleks sayılara benzer başka bir sayı sistemi de hiperbolik sayılardır. Matematiğin ve teorik fiziğin farklı alanlarında uygulamaları bulunan reel sayı olmayıp ve karesi 1'e eşit olan sayıların oluşturduğu kümedir. Ayrıca bu sayılar Lorentz sayıları, ikili sayılar, bölünmüş karmaşık sayılar ve perplex sayılar olarak da bilinir. 20. yüzyılın sonunda Oleg Bodnar, Alexey Stakhov ve Ivan Tkachenko altın oran yardımı ile bir hiperbolik fonksiyon ortaya koymuştur. Daha sonra ise Stakhov ve Rozin bu teoriyi esas alarak simetrik hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarını geliştirmiştir. Hiperbolik sayılar iki boyutlu sayı sistemleridir, $z = x + hy$ şeklinde verilir. (Ergezer ve Köme 2024)

Tanım 2.1: Hiperbolik sayıların kümesi H ,

$$H = \{z = x + hy : h \notin \mathbb{R}, h^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$$

biçiminde tanımlanır.

z_1 ve z_2 herhangi iki Hiperbolik sayı olmak üzere bunların toplamı, farkı ve çarpımı,

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + hy_1) \pm (x_2 + hy_2) = (x_1 \pm x_2) + h(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + hy_1) \times (x_2 + hy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + h(x_1y_2 + y_1x_2).$$

ve iki Hiperbolik sayının bölümü,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + hy_1}{x_2 + hy_2} = \frac{(x_1 + hy_1)(x_2 - hy_2)}{(x_2 + hy_2)(x_2 - hy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 - y_2^2} + h \frac{x_1y_2 + y_1x_2}{x_2^2 - y_2^2}.$$

şeklindedir.

Hiperbolik sayılar ile ilgili yapılan bazı çalışmalar (Gargoubi 2016), (Motter 1998), (Khadjiev ve Göksal 2016), (Barreira ve Valls 2016), (Torunbalcı 2018), (Torunbalcı 2019), (Taş 2022), (Uygun 2013) dır.

Tanım 2.2: Jacobsthal sayıları, bir tür özel sayı dizisidir ve Fibonacci dizisine benzer şekilde tanımlanır. Ancak farklı bir başlangıç koşuluna ve farklı bir geri dönüşüm ilişkisinin kullanılması ile oluşturulur. Horadam, Jacobsthal dizileri J_n ve Jacobsthal Lucas dizileri j_n aşağıdaki tekrarlama bağıntısı ile

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \quad n \geq 2 \text{ için}$$

$$J_0 = 0 \text{ ve } J_1 = 1 \text{ ve}$$

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}, \quad n \geq 2 \text{ için}$$

$$j_0 = 2 \text{ ve } j_1 = 1 \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Tanım 2.3: Jacobsthal polinom dizileri $J_n(x)$ ve Jacobsthal Lucas polinom dizileri $j_n(x)$ sırasıyla

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) + 2xJ_{n-2}(x) \quad n \geq 2 \text{ için}$$

$$J_0(x) = 0 \text{ ve } J_1(x) = 1 \text{ olması koşuluyla ve}$$

$$j_n(x) = j_{n-1}(x) + 2xj_{n-2}(x) \quad n \geq 2$$

$$j_0(x) = 2 \text{ ve } j_1(x) = 1 \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Jacobsthal polinomunda $x = 1$ alındığında Jacobsthal sayıları elde edilir.

$$J_0(1) = 0 = J_0$$

$$J_1(1) = 1 = J_1$$

$$J_2(1) = 1 = J_2$$

$$J_3(1) = 1 + 2x = J_3$$

$$J_4(1) = 1 + 4x = J_4$$

Aynı şekilde Jacobsthal Lucas polinomlarında da $x = 1$ alındığında Jacobsthal Lucas sayıları elde edilir.

$$j_0(1) = 2 = j_0$$

$$j_1(1) = 1 = j_1$$

$$j_2(1) = 1 + 4x = j_2$$

$$j_3(1) = 1 + 6x = j_3$$

$$j_4(1) = 1 + 8x + 8x^2 = j_4$$

Hiperbolik Fibonacci dizileri ve onların özellikleri Fügen Torunbalcı tarafından verilmiştir. (Torunbalcı 2019)

Tanım 2.4: Hiperbolik Fibonacci dizileri, $HF_1 = 1 + h$, $HF_2 = 1 + 2h$ başlangıç şartıyla ve F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere

$$HF_n = F_n + hF_{n+1}, (h^2 = 1)$$

şeklinde tanımlanır.

Hiperbolik Fibonacci dizisinin elemanları,

$$1 + h, 1 + 2h, 2 + 3h, 3 + 5h, \dots, (1 + h)F_n + hF_{n-1}, \dots$$

şeklindedir.

Tanım 2.5: Hiperbolik Jacobsthal sayıları, $HJ_0 = \frac{h}{2}$, $HJ_1 = 1$ başlangıç şartları olmak üzere

$$HJ_n = HJ_{n-1} + 2HJ_{n-2}.$$

$h^2 = 1$, şeklinde tanımlanır. Bazı Hiperbolik Jacobsthal sayılar,

$$\frac{h}{2}, 1, 1 + h, 3 + h, 5 + 3h, 11 + 5h, 21 + 11h, 43 + 21h, 85 + 43h, \dots$$

dır.

Hiperbolik Jacobsthal sayıları ile Jacobsthal sayıları arasında

$$HJ_n = J_n + hJ_{n-1}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

Tanım 2.6: Hiperbolik Jacobsthal Lucas sayıları, $Hj_0 = 2 - \frac{h}{2}$ ve $Hj_1 = 1 + 2h$ başlangıç şartıyla

$$Hj_{n+1} = Hj_n + 2Hj_{n-1} \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır.

Hiperbolik Jacobsthal Lucas sayıları ile Jacobsthal Lucas sayıları arasındaki ilişki

$$Hj_n = j_n + hj_{n-1}.$$

şeklindedir.

Tanım 2.7: $n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ biçimindeki ifadeler x değişkenine göre düzenlenmiş reel katsayılı polinom denir.

Tanım 2.8: $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $\forall k = 0, 1, 2, \dots$ için $c_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots$$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir. Buradaki c_k sayılarına serinin katsayıları adı verilir.

Eğer $\forall k \geq p$ için $c_k = 0$ ise ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_p(x - x_0)^p$$

olur. Bu durumda kuvvet serisi polinom olur.

MATERYAL VE METOT

Bu bölümde tezde kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 3.1: Gaussian Jacobsthal polinomlar $\{GJ_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $GJ_0(x) = \frac{i}{2}$ ve $GJ_1(x) = 1$ başlangıç şartları ile aşağıdaki tekrarlama ilişkisi ile tanımlanır,

$$GJ_{n+1}(x) = GJ_n(x) + 2xGJ_{n-1}(x), n \geq 1.$$

Tanımdan

$$GJ_n(x) = J_n(x) + ixJ_{n-1}(x); i^2 = -1$$

olduğu görülür. Burada $J_n(x)$, n . Jacobsthal polinomdur. (Asci ve Gürel 2013)

Tanım 3.2: Gaussian Jacobsthal Lucas polinomlar $\{Gj_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $Gj_0(x) = 2 - \frac{i}{2}$ ve $Gj_1(x) = 1 + 2ix$ başlangıç şartları ile aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır,

$$Gj_{n+1}(x) = Gj_n(x) + 2xGj_{n-1}(x), n \geq 1.$$

Ayrıca,

$$Gj_n(x) = j_n(x) + ixj_{n-1}(x)$$

yazılabilir. Burada $j_n(x)$, n . Jacobsthal Lucas polinomdur.

Teorem 3.1: Gaussian Jacobsthal polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$g(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} GJ_n(x)t^n = \frac{2t + i(1-t)}{2 - 2t - 4xt^2}$$

ve Gaussian Jacobsthal Lucas polinomları,

$$h(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} Gj_n(x)t^n = \frac{4 - 2t + i(t - 1 + 4xt)}{2 - 2t - 4xt^2}$$

şeklindedir. (Asci ve Gürel 2013)

İspat: $g(t, x)$, Gaussian Jacobsthal polinom dizilerinin $GJ_n(x)$ üreteç fonksiyonu olsun, bu takdirde

$$g(t, x) - tg(t, x) - 2xt^2g(t, x) = GJ_0(x) + GJ_1(x)t - GJ_0(x)t$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=2}^{\infty} t^n [GJ_n(x) - GJ_{n-1}(x) - 2xGJ_{n-2}(x)] \\
& = \frac{i}{2} + \left(1 - \frac{i}{2}\right)t \\
& = \frac{2t + i(1-t)}{2 - 2t - 4xt^2} \\
g(t, x) & = \frac{2t + i(1-t)}{2 - 2t - 4xt^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ karakteristik denklemin kökleri olsun .

$$t^2 - t - 2x = 0$$

ise

$$\alpha(x) = \frac{1+\sqrt{8x+1}}{2}, \beta(x) = \frac{1-\sqrt{8x+1}}{2}$$

$\alpha(x) + \beta(x) = 1$ ve $\alpha(x)\beta(x) = -2x$ olur. (Asci ve Gürel 2013)

Teorem 3.2: $n \geq 0$ olmak üzere Gaussian Jacobsthal ve Gaussian Jacobsthal Lucas polinomları için Binet formülü

$$GJ_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

ve

$$Gj_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) + ix(\alpha^{n-1}(x) + \beta^{n-1}(x))$$

olur (Asci ve Gürel 2013).

İspat: İspat n üzerinden tümevarımla yapılabilir.

Teorem 3.3: $D_n(x)$, $n \times n$ tipinde bir tridiagonal matris olsun,

$$D_n(x) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1 & 2x & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad n \geq 1$$

ve $D_0(x) = \frac{i}{2}$ olması şartıyla,

$$\det D_n(x) = Gj_n(x)$$

dır. (Asci ve Gürel 2013)

İspat: n üzerinden tümevarım ispat yöntemi ile ispatlanabilir. $n = 1$ ve $n = 2$ için

$$\det D_1(x) = 1 = GJ_1(x)$$

$$\det D_2(x) = 1 + xi = GJ_2(x)$$

$n - 1$ ve $n - 2$ için teoremin doğru olduğunu kabul edelim.

$$\det D_{n-1}(x) = GJ_{n-1}(x)$$

$$\det D_{n-2}(x) = GJ_{n-2}(x)$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} \det D_n(x) &= \det D_{n-1}(x) + 2x \det D_{n-2}(x) \\ &= GJ_{n-1}(x) + 2x GJ_{n-2}(x) \\ &= GJ_n(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.4: $n \geq 0$ olmak üzere

$$H_n(x) = \begin{bmatrix} 2 - \frac{i}{2} & \frac{x}{2} - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & ix & 2x & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ise

$$\det H_n(x) = GJ_{n-1}(x)$$

olur (Asci ve Gürel 2013).

İspat: n üzerinden tümevarım ispat yöntemi kullanılarak ispat yapılır. $n = 1$ ve $n = 2$ için

$$\det D_1(x) = 2 - \frac{i}{2} = Gj_0(x)$$

$$\det D_2(x) = 1 + 2xi = Gj_1(x)$$

olur.

$n - 1$ ve $n - 2$ için teoremin doğru olduğunu kabul edelim.

$$\det D_{n-1}(x) = Gj_{n-2}(x)$$

$$\det D_{n-2}(x) = Gj_{n-3}(x)$$

olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \det D_n(x) &= \det D_{n-1}(x) + 2x \det D_{n-2}(x) \\ &= G_{j_{n-2}}(x) + 2x G_{j_{n-3}}(x) \\ &= G_{j_{n-1}}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

$Q(x)$, P ve R 2×2 tipinde matris olmak üzere

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \text{ ve } R = \begin{bmatrix} 4x+1+xi & 1+2xi \\ 1+2xi & 2-\frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.5: $n \geq 1$ olmak üzere

$$Q^n(x)P = \begin{bmatrix} G_{j_{n+2}}(x) & G_{j_{n+1}}(x) \\ G_{j_{n+1}}(x) & G_{j_n}(x) \end{bmatrix}$$

dır Burada $G_{j_n}(x)$, n . Gaussian Jacobsthal polinomdur. (Asci ve Gürel 2013)

İspat: İspat tümevarım ispat yöntemi ile ispatlanır. $n = 1$ için

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x+1+ix & 1+ix \\ 1+ix & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{j_3}(x) & G_{j_2}(x) \\ G_{j_2}(x) & G_{j_1}(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{j_{k+2}}(x) & G_{j_{k+1}}(x) \\ G_{j_{k+1}}(x) & G_{j_k}(x) \end{bmatrix}$$

$n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{j_{k+2}}(x) & G_{j_{k+1}}(x) \\ G_{j_{k+1}}(x) & G_{j_k}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{j_{k+3}}(x) & G_{j_{k+2}}(x) \\ G_{j_{k+2}}(x) & G_{j_{k+1}}(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorem 3.6: $n \geq 1$ için

$$Q^n(x)R = \begin{bmatrix} Gj_{n+2}(x) & Gj_{n+1}(x) \\ Gj_{n+1}(x) & Gj_n(x) \end{bmatrix}$$

dır. Burada $Gj_n(x)$, n . Gaussian Jacobsthal Lucas polinomudur. (Asci ve Gürel 2013)

İspat: $n = 1$ için

$$\begin{aligned} Q(x)R &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x + 1 + xi & 1 + 2xi \\ 1 + 2xi & 2 - \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Gj_3(x) & Gj_2(x) \\ Gj_2(x) & Gj_1(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur.

$n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\begin{aligned} Q^k(x)R &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 4x + 1 + xi & 1 + 2xi \\ 1 + 2xi & 2 - \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Gj_{k+2}(x) & Gj_{k+1}(x) \\ Gj_{k+1}(x) & Gj_k(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olsun.

$n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\begin{aligned} Q^{k+1}(x)R &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} 4x + 1 + xi & 1 + 2xi \\ 1 + 2xi & 2 - \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 4x + 1 + xi & 1 + 2xi \\ 1 + 2xi & 2 - \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Gj_{k+2}(x) & Gj_{k+1}(x) \\ Gj_{k+1}(x) & Gj_k(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Gj_{k+3}(x) & Gj_{k+2}(x) \\ Gj_{k+2}(x) & Gj_{k+1}(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.7: $n \geq 1$ için,

$$GJ_{n-1}(x)GJ_{n+1}(x) - GJ_n^2(x) = (-1)^n 2^{n-2} x^{n-1} (2 + x - i)$$

dır. Burada $GJ_n(x)$ n . Gaussian Jacobsthal polinomudur. (Asci ve Gürel 2013)

İspat: İspatı matrisler yardımıyla yapılır. İlk olarak matrislerin determinatları hesaplanır.

$$\det Q^{n-1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^{n-1} = (-2x)^{n-1}$$

$$\det P = \begin{vmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(2+x-i)$$

Teorem 3.5'den

$$Q^{n-1}(x)P = \begin{bmatrix} Gj_{n+1}(x) & Gj_n(x) \\ Gj_n(x) & Gj_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

matrislerin determinatları hesaplanır.

$$\begin{aligned} Gj_{n-1}(x)Gj_{n+1}(x) - Gj_n^2(x) &= \det(Q^{n-1}(x)P) \\ &= \det Q^{n-1}(x) \det P \\ &= (-2x)^{n-1} \left(\frac{-1}{2} \right) (2+x-i) \\ &= (-1)^n 2^{n-2} x^{n-1} (2+x-i) \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$Gj_{n-1}(x)Gj_{n+1}(x) - Gj_n^2(x) = (-1)^n 2^{n-2} x^{n-1} (2+x-i)$$

elde edilir.

Teorem 3.8: $n \geq 1$ için,

$$Gj_{n-1}(x)Gj_{n+1}(x) - Gj_n^2(x) = (8x+1)(x+2-i)(-1)^{n-1} 2^{n-2} x^{n-1}$$

dır. Burada $Gj_n(x)$ n . Gaussian Jacobsthal Lucas polinomudur. (Asci ve Gürel 2013)

İspat: Teorem 3.6' dan

$$Q^{n-1}(x)R = \begin{bmatrix} Gj_{n+1}(x) & Gj_n(x) \\ Gj_n(x) & Gj_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} Gj_{n-1}(x)Gj_{n+1}(x) - Gj_n^2(x) &= \det(Q^{n-1}(x)R) \\ &= \det Q^{n-1}(x) \det R \\ &= (-2x)^{n-1} \frac{1}{2} (8x+1)(x+2-i) \\ &= (8x+1)(x+2-i)(-1)^{n-1} 2^{n-2} x^{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$Gj_{n-1}(x)Gj_{n+1}(x) - Gj_n^2(x) = (8x + 1)(x + 2 - i)(-1)^{n-1}2^{n-2}x^{n-1}$$

olur.

Teorem 3.9: Gaussian Jacobsthal ve Gaussian Jacobsthal Lucas polinomların toplamaları sırasıyla verilir :

$$i) \quad \sum_{k=0}^n Gj_k(x) = \frac{1}{2x} [Gj_{n+2}(x) - 1]$$

$$ii) \quad \sum_{k=0}^n Gj_k(x) = \frac{1}{2x} [Gj_{n+2}(x) - (1 + 2xi)]$$

şeklindedir.

İspat: $n \geq 1$ için $Gj_{n+1}(x) = Gj_n(x) + 2xGj_{n-1}(x)$

ise

$$Gj_{n-1}(x) = \frac{1}{2x} (Gj_{n+1}(x) - Gj_n(x))$$

yazılır. Buradan

$$Gj_0(x) = \frac{1}{2x} (Gj_2(x) - Gj_1(x))$$

$$Gj_1(x) = \frac{1}{2x} (Gj_3(x) - Gj_2(x))$$

$$Gj_2(x) = \frac{1}{2x} (Gj_4(x) - Gj_3(x))$$

$\vdots$

$$Gj_{n-1}(x) = \frac{1}{2x} (Gj_{n+1}(x) - Gj_n(x))$$

$$Gj_n(x) = \frac{1}{2x} (Gj_{n+2}(x) - Gj_{n+1}(x))$$

yazılır. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{k=0}^n Gj_k(x) = \frac{1}{2x} [Gj_{n+2}(x) - Gj_1(x)]$$

$$= \frac{1}{2x} [Gj_{n+2}(x) - 1]$$

elde edilir.

Teorem 3.10: $n \geq 1$ için,

$$GJ_n(x)Gj_n(x) = GJ_{2n}(x) + ixJ_{2n-1}(x) - x^2J_{2n-2}(x)$$

dır. Burada $J_n(x)$ n . Jacobsthal polinomdur.

İspat: $GJ_n(x)$ ve $Gj_n(x)$ polinomlarının Binet formülünden ispat yapılabilir.

$$\begin{aligned} GJ_n(x)Gj_n(x) &= \left[\frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right] \\ &\quad \times [\alpha^n(x) + \beta^n(x) + ix(\alpha^{n-1}(x) + \beta^{n-1}(x))] \\ &= \frac{\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \frac{\alpha^{2n-1}(x) - \beta^{2n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\ &\quad + ix \frac{\alpha^{2n-1}(x) - \beta^{2n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} - x^2 \frac{\alpha^{2n-2}(x) - \beta^{2n-2}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\ &= GJ_{2n}(x) + ixJ_{2n-1}(x) - x^2J_{2n-2}(x) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomlarının tanımı verilmiş olup bu polinomların üreteç fonksiyonları, Binet formülleri, determinat gösterimleri, Q matrisleri ve toplam formüllerinin bazı gibi özellikleri verilmiştir.

Tanım 4.1: Hiperbolik Jacobsthal polinomlar $\{\mathbb{HJ}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ $\mathbb{HJ}_0(x) = \frac{h}{2}$ ve $\mathbb{HJ}_1(x) = 1$ olmak üzere

$$\mathbb{HJ}_{n+1}(x) = \mathbb{HJ}_n(x) + 2x\mathbb{HJ}_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca, $J_n(x)$ n . Jacobsthal polinomu olmak üzere

$$\mathbb{HJ}_n(x) = J_n(x) + hxJ_{n-1}(x)$$

bağıntısı yazılabilir.

Tanım 4.2: Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinom dizileri $\{\mathbb{HJ}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathbb{HJ}_0(x) = 2 - \frac{h}{2}$ ve $\mathbb{HJ}_1(x) = 1 + 2hx$ olmak üzere

$$\mathbb{HJ}_{n+1}(x) = \mathbb{HJ}_n(x) + 2x\mathbb{HJ}_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca,

$$\mathbb{HJ}_n(x) = j_n(x) + hxj_{n-1}(x)$$

dır. Burada $j_n(x)$, n . Jacobsthal Lucas polinomudur.

Hiperbolik Jacobsthal polinomunda $x = 1$ için aldığı değerler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mathbb{HJ}_0(1) = \frac{h}{2} = HJ_0$$

$$\mathbb{HJ}_1(1) = 1 = HJ_1$$

$$\mathbb{HJ}_2(1) = 1 + h = HJ_2$$

$$\mathbb{HJ}_3(1) = 3 + h = HJ_3$$

$$\mathbb{HJ}_4(1) = 5 + 3h = HJ_4$$

Aynı şekilde Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomları $x = 1$ için aldığı değerler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mathbb{HJ}_0(1) = 2 - \frac{h}{2} = Hj_0$$

$$\mathbb{HJ}_1(1) = 1 + 2h = Hj_1$$

$$\mathbb{HJ}_2(1) = 5 + h = Hj_2$$

$$\mathbb{HJ}_3(1) = 7 + 5h = Hj_3$$

$$\mathbb{HJ}_4(1) = 17 + 7h = Hj_4$$

$\mathbb{HJ}_n(1) = Hj_n$ ve $\mathbb{HJ}_n(1) = Hj_n$ sırası ile n . Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Jacobsthal Lucas sayıları olduğunu gözlemledik. Daha sonra kullanılacak Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomun bazı terimleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	$\mathbb{HJ}_n(x)$	$\mathbb{HJ}_n(x)$
0	$\frac{h}{2}$	$2 - \frac{h}{2}$
1	1	$1 + 2xh$
2	$1 + hx$	$4x + 1 + xh$
3	$1 + hx + 2x$	$6x + 1 + (4x + 1)hx$
4	$1 + hx + 4x + 2hx^2$	$8x^2 + 8x + 1 + (6x + 1)hx$
5	$1 + hx + 6x + 4hx^2 + 4x^2$	$1 + 10x + 20x^2 + (8x^3 + 8x^2 + x)h$

Teorem 4.1: Hiperbolik Jacobsthal polinomlar için üreteç fonksiyon,

$$g(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{HJ}_n(x) t^n = \frac{2t + h(1-t)}{2 - 2t - 4xt^2}$$

dır.

İspat: $g(t, x)$, Hiperbolik Jacobsthal polinomunun $\mathbb{HJ}_n(x)$ üreteç fonksiyonu olsun, bu takdirde

$$\begin{aligned}
g(t, x) &= \mathbb{H}\mathbb{J}_0(x) + \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)t + \mathbb{H}\mathbb{J}_2(x)t^2 + \dots \\
-tg(t, x) &= -\mathbb{H}\mathbb{J}_0(x)t - \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)t^2 - \mathbb{H}\mathbb{J}_2(x)t^3 + \dots \\
-2xt^2g(t, x) &= -\mathbb{H}\mathbb{J}_0(x)2xt^2 - \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)2xt^3 - \mathbb{H}\mathbb{J}_2(x)2xt^4 + \dots
\end{aligned}$$

yazılır. Denklemler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
(1 - t - 2xt^2)g(t, x) &= \mathbb{H}\mathbb{J}_0(x) + \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)t - \mathbb{H}\mathbb{J}_0(x)t \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} t^n [\mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x) - 2x\mathbb{H}\mathbb{J}_{n-2}(x)]
\end{aligned}$$

$$(1 - t - 2xt^2)g(t, x) = \mathbb{H}\mathbb{J}_0(x) + \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)t - \mathbb{H}\mathbb{J}_0(x)t$$

$$g(t, x) = \frac{\frac{h}{2} + t - \frac{ht}{2}}{1 - t - 2xt^2}$$

$$g(t, x) = \frac{2t + h(1 - t)}{2 - 2t - 4xt^2}$$

elde edilir.

Teorem 4.2: Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomun üreten fonksiyonu,

$$h(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x)t^n = \frac{4 - 2t + h(t - 1 + 4xt)}{2 - 2t - 4xt^2}$$

dır.

İspat : $h(t, x)$, Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomunun $\mathbb{H}\mathbb{J}_n(x)$ üreteç fonksiyonu olsun, bu takdirde

$$\begin{aligned}
h(t, x) &= \mathbb{H}\mathbb{J}_0(x) + \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)t + \mathbb{H}\mathbb{J}_2(x)t^2 + \dots \\
-th(t, x) &= -\mathbb{H}\mathbb{J}_0(x)t - \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)t^2 - \mathbb{H}\mathbb{J}_2(x)t^3 - \dots \\
-2xt^2h(t, x) &= -\mathbb{H}\mathbb{J}_0(x)2xt^2 - \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)2xt^3 - \mathbb{H}\mathbb{J}_2(x)2xt^4 - \dots \\
(1-t-2xt^2)h(t, x) &= \mathbb{H}\mathbb{J}_0(x) + \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)t - \mathbb{H}\mathbb{J}_0(x)t \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} t^n (\mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x) - 2x\mathbb{H}\mathbb{J}_{n-2}(x)) \\
h(t, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x)t^n = \frac{4 - 2t + h(t - 1 + 4xt)}{2 - 2t - 4xt^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\alpha(x)$ ve $\beta(x)$,

$$t^2 - t - 2x = 0$$

karakteristik denkleminin kökleri olsun. Buradan,

$$\alpha(x) = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}, \beta(x) = \frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}$$

olup $\alpha(x) + \beta(x) = 1$ ve $\alpha(x).\beta(x) = -2x$ olur. Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomları için Binet formülleri aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.3: $n \geq 0$ için,

$$\mathbb{HJ}_n(x) = \frac{\alpha^{n-1}(x)(\alpha(x) + hx) - \beta^{n-1}(x)(\beta(x) + hx)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

ve ,

$$\mathbb{HJ}_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) + hx(\alpha^{n-1}(x) + \beta^{n-1}(x))$$

dır.

İspat: Jacobsthal polinomlar için Binet formülünü kullanarak

$$J_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

$$\mathbb{HJ}_n(x) = J_n(x) + hxJ_{n-1}(x)$$

$$\mathbb{HJ}_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + hx \left(\frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right)$$

$$\mathbb{HJ}_n(x) = \frac{\alpha^{n-1}(x)(\alpha(x) + hx) - \beta^{n-1}(x)(\beta(x) + hx)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

elde edilir. Benzer olarak

$j_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$ eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathbb{HJ}_n(x) = j_n(x) + hxj_{n-1}(x)$$

$$= \alpha^n(x) + \beta^n(x) + hx(\alpha^{n-1}(x) + \beta^{n-1}(x))$$

elde edilir.

Teorem 4.4: $A_0(x) = \frac{h}{2}$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$A_n(x) = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1 & 2x & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\det A_n(x) = \mathbb{HJ}_n(x)$$

dır.

İspat: $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ ve $n = 4$ için $A_n(x)$ matrisinin determinatları hesaplanır. Yani

$$A_1(x) = [1]$$

$$\det A_1(x) = 1$$

$$A_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_2(x) = 1 + hx$$

$$A_3(x) = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 \\ -x & 1 & 2x \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_3(x) = 1 + hx + 2x$$

$$A_4(x) = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 & 0 \\ -x & 1 & 2x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_4(x) = 1 + hx + 4x + 2hx^2$$

olur. Buradan

$$\det A_1(x) = \mathbb{HJ}_1(x)$$

$$\det A_2(x) = \mathbb{HJ}_2(x)$$

$$\det A_3(x) = \mathbb{HJ}_3(x)$$

$$\det A_4(x) = \mathbb{HJ}_4(x)$$

yazılır.

Buradan, Matris determinatlarının aynı indisteki Hiperbolik Jacobsthal polinoma eşit olduğu görüldü. Tümevarım ispat yöntemi ile aşağıdaki gibi ispat yapılır.

$n - 1$ ve $n - 2$ için doğru olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\det A_{n-1}(x) = \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x)$$

$$\det A_{n-2}(x) = \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-2}(x)$$

ise

$$\begin{aligned} \det A_n(x) &= \det A_{n-1}(x) + 2x \det A_{n-2}(x) \\ &= \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x) + 2x \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-2}(x) \\ &= \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5: $n \geq 0$ olmak üzere

$$B_n(x) = \begin{bmatrix} 2 - \frac{h}{2} & -\frac{x}{2} - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & hx & 2x & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

için

$$\det B_n(x) = H_j_{n-1}(x)$$

dır.

İspat: Tümevarım ispat yöntemi kullanılır. $n=1$ ve $n=2$ için

$$\det B_1(x) = 2 - \frac{h}{2} = \mathbb{H}\mathbb{J}_0(x)$$

$$\det B_2(x) = 1 + 2hx = \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)$$

olur.

$n - 1$ ve $n - 2$ için İspatın doğru olduğunu kabul edelim.

$$\det B_{n-1}(x) = \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-2}(x)$$

$$\det B_{n-2}(x) = \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-3}(x)$$

ise, bu takdirde

$$\det B_n(x) = \det B_{n-1}(x) + 2x \det B_{n-2}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{HJ}_{n-2}(x) + 2x\mathbb{HJ}_{n-3}(x) \\
&= \mathbb{HJ}_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2×2 tipindeki $Q(x)$ ve P ve R matrisleri sırasıyla

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1+hx & 1 \\ 1 & \frac{h}{2} \end{bmatrix} \text{ ve } R = \begin{bmatrix} 4x+1+hx & 1+2xh \\ 1+2xh & 2-\frac{h}{2} \end{bmatrix}$$

şeklinde olsun.

Teorem 4.6: $n \geq 1$ olmak üzere

$$Q^n(x)P = \begin{bmatrix} \mathbb{HJ}_{n+2}(x) & \mathbb{HJ}_{n+1}(x) \\ \mathbb{HJ}_{n+1}(x) & \mathbb{HJ}_n(x) \end{bmatrix}$$

dır. ($\mathbb{HJ}_n(x)$ n . Hiperbolik Jacobsthal polinomudur.)

İspat: $n = 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\begin{aligned}
Q(x)P &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+hx & 1 \\ 1 & \frac{h}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+hx+2x & 1+hx \\ 1+hx & 1 \end{bmatrix} \\
Q(x)P &= \begin{bmatrix} \mathbb{HJ}_3(x) & \mathbb{HJ}_2(x) \\ \mathbb{HJ}_2(x) & \mathbb{HJ}_1(x) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olur.

$n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$Q^k(x)P = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1+hx & 1 \\ 1 & \frac{h}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{HJ}_{k+2}(x) & \mathbb{HJ}_{k+1}(x) \\ \mathbb{HJ}_{k+1}(x) & \mathbb{HJ}_k(x) \end{bmatrix}$$

olsun.

Sonra $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\begin{aligned}
Q^{k+1}(x)P &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} 1+hx & 1 \\ 1 & \frac{h}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1+hx & 1 \\ 1 & \frac{h}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{HJ}_{k+2}(x) & \mathbb{HJ}_{k+1}(x) \\ \mathbb{HJ}_{k+1}(x) & \mathbb{HJ}_k(x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{HJ}_{k+2}(x) + 2x\mathbb{HJ}_{k+1}(x) & \mathbb{HJ}_{k+1}(x) + 2x\mathbb{HJ}_k(x) \\ \mathbb{HJ}_{k+2}(x) & \mathbb{HJ}_{k+1}(x) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$Q^{k+1}(x)P = \begin{bmatrix} \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+3}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+2}(x) \\ \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+2}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+1}(x) \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4.7: $n \geq 1$ için,

$$Q^n(x)R = \begin{bmatrix} \mathbb{H}\mathbb{J}_{n+2}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) \\ \mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) \end{bmatrix}$$

dır. ($\mathbb{H}\mathbb{J}(x)$, n . Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomdur.)

İspat: $n = 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\begin{aligned} Q(x)R &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x + 1 + hx & 1 + 2xh \\ 1 + 2xh & 2 - \frac{h}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x + 1 + (x + 4x^2)h & 4x + 1 + xh \\ 4x + 1 + xh & 1 + 2xh \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{H}\mathbb{J}_3(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_2(x) \\ \mathbb{H}\mathbb{J}_2(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur.

$n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$Q^k(x)R = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 4x + 1 + hx & 1 + 2xh \\ 1 + 2xh & 2 - \frac{h}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+2}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+1}(x) \\ \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+1}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_k(x) \end{bmatrix}$$

olsun.

Sonra $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\begin{aligned} Q^{k+1}(x)R &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} 4x + 1 + hx & 1 + 2xh \\ 1 + 2xh & 2 - \frac{h}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 4x + 1 + hx & 1 + 2xh \\ 1 + 2xh & 2 - \frac{h}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+2}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+1}(x) \\ \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+1}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_k(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+2}(x) + 2x\mathbb{H}\mathbb{J}_{k+1}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+1}(x) + 2x\mathbb{H}\mathbb{J}_k(x) \\ \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+2}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+1}(x) \end{bmatrix} \\ Q^{k+1}(x)R &= \begin{bmatrix} \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+3}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+2}(x) \\ \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+2}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_{k+1}(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.8: $n \geq 1$ için

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x)\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_n^2(x) = (-1)^n 2^{n-2} x^{n-1} (2 + x - h)$$

biçimindedir.

İspat: $Q^{n-1}(x)$ ve P matrislerinin determinatları hesaplanır. Yani

$$\det Q^{n-1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^{n-1} = (-2x)^{n-1}$$

$$\det P = \begin{vmatrix} 1+hx & 1 \\ 1 & \frac{h}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(2+x-h)$$

olur. Teorem 4.6'dan

$$Q^{n-1}(x)P = \begin{bmatrix} \mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) \\ \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

yazılır. Determinat hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x)\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_n^2(x) &= \det(Q^{n-1}(x)P) \\ &= \det Q^{n-1}(x) \det P \\ &= (-2x)^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right) (2+x-h) \\ &= (-1)^n 2^{n-2} x^{n-1} (2+x-h) \end{aligned}$$

yazılır.

Sonuç olarak

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x)\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_n^2(x) = (-1)^n 2^{n-2} x^{n-1} (2+x-h)$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.9: $n \geq 1$ olmak üzere

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}^{\dagger}(x)\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}^{\dagger}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_n^{\dagger 2}(x) = (-1)^{n-1} 2^{n-2} x^{n-1} (8x+1)(2-h-x)$$

dır.

İspat: Öncelikle $Q^{n-1}(x)$ ve R matrislerinin determinatları hesaplanır. Yani

$$\det Q^{n-1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^{n-1} = (-2x)^{n-1}$$

$$\det R = \begin{vmatrix} 4x + 1 + hx & 1 + 2xh \\ 1 + 2xh & 2 - \frac{h}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(8x + 1)(2 - h - x)$$

olur.

Teorem 4.7'den

$$Q^{n-1}(x)R = \begin{bmatrix} \mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) \\ \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) & \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

ise determinant hesabından

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x)\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_n^2(x) &= \det(Q^{n-1}(x)R) \\ &= \det Q^{n-1}(x) \det R \\ &= (-2x)^{n-1} \frac{1}{2}(8x + 1)(2 - h - x) \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-2} x^{n-1} (8x + 1)(2 - h - x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x)\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_n^2(x) = (-1)^{n-1} 2^{n-2} x^{n-1} (8x + 1)(2 - h - x)$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.10: Hiperbolik Jacobsthal polinomların toplamı,

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{H}\mathbb{J}_k(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+2}(x) - 1]$$

dır.

İspat: $n \geq 1$ için.

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) = \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) + 2x\mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x)$$

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x)]$$

olur.

Bu denklemden,

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_0(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_2(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)]$$

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_1(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_3(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_2(x)]$$

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_2(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_4(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_3(x)]$$

⋮

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+2}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x)]$$

yazılır.

Yukarıdaki denklemler toplanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathbb{H}\mathbb{J}_k(x) &= \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+2}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)] \\ &= \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+2}(x) - 1] \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.11: Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomların toplamı,

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{H}\mathbb{J}_k(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+2}(x) - 1]$$

dır.

İspat: $n \geq 1$ için ,

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) = \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) + 2x\mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x)$$

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_{n-1}(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x)]$$

olup

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_0(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_2(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)]$$

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_1(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_3(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_2(x)]$$

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_2(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_4(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_3(x)]$$

⋮

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) = \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+2}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_{n+1}(x)]$$

yazılır.

Yukarıdaki denklemler toplanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathbb{H}\mathbb{J}_k(x) &= \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+2}(x) - \mathbb{H}\mathbb{J}_1(x)] \\ &= \frac{1}{2x} [\mathbb{H}\mathbb{J}_{n+2}(x) - 1] \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.12: $n \geq 1$ için,

$$\mathbb{H}\mathbb{J}_n(x)\mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) = \mathbb{H}\mathbb{J}_{2n}(x) + hxJ_{2n-1}(x) + x^2J_{2n-2}(x)$$

dır. ($J_n(x)$ n . Jacobsthal polinomdur.)

İspat: $\mathbb{H}\mathbb{J}_n(x)$ ve $\mathbb{H}\mathbb{J}_n(x)$ polinomlarının Binet formülünden ispat yapılabilir.

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathbb{J}_n(x)\mathbb{H}\mathbb{J}_n(x) &= \left[\frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + hx \frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right] \\ &\quad \times [\alpha^n(x) + \beta^n(x) + hx(\alpha^{n-1}(x) + \beta^{n-1}(x))] \\ &= \frac{\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + hx \frac{\alpha^{2n-1}(x) - \beta^{2n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\ &\quad + hx \frac{\alpha^{2n-1}(x) - \beta^{2n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + x^2 \frac{\alpha^{2n-2}(x) - \beta^{2n-2}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\ &= \mathbb{H}\mathbb{J}_{2n}(x) + hxJ_{2n-1}(x) + x^2J_{2n-2}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

SONUÇ

İlk olarak tam sayı dizilerinin tarihçesinden bahsedildi. En önemli sayı dizisi olan Fibonacci ve Lucas dizilerine değinildi. Fibonacci dizisinin matematikte neden önemli olduğu üzerine duruldu. Kuramsal temeller bölümünde çalışmada önemli olan sayı dizilerinin tanımları verildi ve bazı özellikleri sunuldu. Üçüncü bölümde yöntemini kullandığımız Gaussian Jacobsthal ve Gaussian Jacobsthal Lucas polinomlarının tanımı yapıldı ve bazı önemli teoremleri verildi. Son olarak dördüncü bölümde çalışmamız sonucunda elde ettiğimiz Hiperbolik Jacobsthal ile Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomlarının tanımı yapıldı üreten fonksiyonları, Binet formülleri, determinat gösterimleri, Q matrisleri ve toplam formülleri verildi. Sırasıyla Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Jacobsthal Lucas polinomlarında $x = 1$ değeri için polinomun değerinin Hiperbolik Jacobsthal ve Hiperbolik Jacobsthal Lucas sayısı olduğu görüldü.

KAYNAKÇA

- Asci, M., & Gurel, E. (2013). Gaussian jacobsthal and Gaussian jacobsthal lucas polynomials. *Notes Number Theory Discrete Math*, 19(1), 25-36.
- Atanassov K. (2012). Short remarks on Jacobsthal numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*. 18(2):63-64.
- Atanassov K. (2011). Remark on Jacobsthal numbers. Part 2. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*. 17(2):37-39.
- Barreira L. Popescu LH, Valls C. (2016). Hyperbolic sequences of linear operators and evolution maps. *Milan J. Math.*, 84:203-216.
- Dikmen C.M. (2019). Hyperbolic Jacobsthal Numbers. *Asian Research Journal of Mathematics*. 15(4): 1-9.
- Ergezer, S., & Köme, S. (2024). Bazı genelleştirilmiş bihiperbolik sayılar ve polinomların özellikleri (Master's thesis, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi)
- Gargoubi H.(2016). Kossentini S. f-algebra structure on hyperbolic Numbers. *Adv. Appl. Clifford Algebr.*26(4):1211-1233.
- Horadam A.F.(1996). Jacobsthal Representation Numbers. *Fibonacci Quarterly*. Vol. 34.2-8
- Horadam A.F.(1965) Generating Functions for Powers of a Certain Generalized Sequence of Numbers. *Duke Math. J.* Vol. 32.437-46.
- Horadam AF.(1997). Jacobsthal representantion polynomials. *Fibonacci Quarterly*.35:137-148.
- Khadjiev D. & Göksal Y. (2016). Applications of hyperbolic numbers to the invariant theory in two-dimensional pseudo-Euclidean space. *Advances in Applied Clifford Algebras*.26. 645-668.
- Koken, F., & Bozkurt, D. (2008). On the Jacobsthal-Lucas numbers by matrix methods. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 3(33), 1629-1633.
- Motter A.E.(1998). Rosa A.F. Hyperbolic calculus. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 8(1):109-128.
- Taş S. (2022). On Hyperbolic Jacobsthal-Lucas Sequence. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*. 5 (1), 16-20.
- Torunbalcı Aydın F.(2018) On generalisations of the Jacobsthal Sequence. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*.;24(1):120-135.
- Torunbalcı Aydın F.(2019). Hyperbolic fibonacci sequence. *Universal Journal of Mathematics and Applications*. Cilt 2, Sayı 2.;59-64
- Uygun, Ş. (2013). Jacobsthal matris dizisi ve özellikleri.

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler		
Adı Soyadı	:	Kübra Nur GÜRBÜZ
Doğum tarihi	:	
Doğum Yeri	:	
Uyruğu	:	
Adres	:	
Tel	:	
E-mail	:	
Eğitim		
Lise	:	Şenyurt Lisesi
Lisans	:	Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Yüksek lisans	:	Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Cebir ve Sayılar Teorisi Ana Bilim Dalı
Yabancı Dil Bilgisi		
İngilizce	:	Orta
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar		
Tezden Üretilmiş Yayınlar		