MARMARA ÜNİVERSİTESİ-FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

V E K T Ö R   A L A N L A R I

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arş. Gör. Dikmen Nil KOFOĞLU

Ana Bilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Afet ÖZOK

ARALIK 1988

ÖZET

Bu çalışmada, bir yüzey üzerinde tanımlanmış olan teğetsel vektör alanları ve özellikleriincelenmiştir. Bu inceleme iki bölüm halinde gerçekleştirilmiştir. Birinci bölümde, vektör alanının tanımı verildikten sonra, teğetsel vektör alanının eğrilikleri ve bu eğrilikler ile ilgili teoremler ifade edilmiştir. Daha sonra teğetsel vektör alanının eğrisi, eğrilik çizgisi, asimptotik doğrultusu ve asimptotik çizgisi tanımlanmıştır. Bunlardan başka asal alan, vektör alanının burulması ve geodezik burulması tanımları da verilmiştir. İkinci bölümde ise, vektör alanının eğriliklerinin trigonometrik olarak ifadesine, yani normal eğrilik ve geodezik burulmanın trigonometrik ifadesine, bunlarlailgili özellikler ve sonuçlara yer verilmiştir.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM I

VEKTÖR ALANLARI

I.1. Tanım; U, R^3'te açık cümle olmak üzere; $U \subseteq R^3$'teki ν vektör alanı, U'nun her noktasına, o noktada bir vektör tekabül ettiren bir fonksiyondur |1|, |2|.

$$(1.1) \quad S: x^i = x^i(u^\alpha) \quad (i= 1,2,3; \ \alpha= 1,2)$$

üç boyutlu Öklid uzayında en az ikinci sınıftan bir yüzey;

$$(1.2) \quad C: u^\alpha = u^\alpha(s)$$

S yüzeyi üzerinde aynı sınıftan bir eğri olsun |3|.

$g_{\alpha\beta}$ ve $d_{\alpha\beta}$, S yüzeyinin birinci ve ikinci esas formlarının katsayıları, $g= |g_{\alpha\beta}|= g_{11}g_{22}-g_{12}^2 >0$ ve $d= |d_{\alpha\beta}|= d_{11}d_{22}-d_{12}^2 \neq 0$ dır.

p^α kontravaryant bileşenler; $x^i_{,\alpha}$ teğet doğrultuları olmak üzere, S yüzeyi üzerinde bir teğetsel vektör alanı

$$(1.3) \quad \nu: \nu^i = p^\alpha x^i_{,\alpha}$$

şeklinde gösterilir. Bu vektör alanı, birim vektör alanı, yani

$$(1.4) \quad g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta = 1$$

olsun |3|.

I.2. Bir Vektör Alanının Eğrilikleri

$p^\alpha = p^\alpha(u^1(s)\ ,\ u^2(s)) = p^\alpha(u^\gamma(s))$ $(\alpha=\gamma = 1,2)$ olmak üzere p noktasındaki C eğrisi boyunca ν'nin türev vektörünü (1.3) ifadesinden hesaplamak gerekirse:

$$\frac{dp^\alpha}{ds} = \frac{\partial p^\alpha}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds} + \frac{\partial p^\alpha}{\partial u^2}\frac{du^2}{ds} = \frac{\partial p^\alpha}{\partial u^\gamma}\frac{du^\gamma}{ds} \tag{1.5}$$

olduğundan,

$$\nu^1 = p^\alpha x^1_{,\alpha} = p^1 x^1_{,1} + p^2 x^1_{,2} = p^1 \frac{\partial x^1}{\partial u^1} + p^2 \frac{\partial x^1}{\partial u^2}$$

$$\frac{d\nu^1}{ds} = \frac{dp^1}{ds}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + p^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\right) + \frac{dp^2}{ds}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + p^2\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\nu^1}{ds} = {} & \left(\frac{\partial p^1}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds} + \frac{\partial p^1}{\partial u^2}\frac{du^2}{ds}\right)\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + p^1\left(\frac{\partial^2 x^1}{(\partial u^1)^2}\frac{du^1}{ds} + \right.\\ & \left. + \frac{\partial^2 x^1}{\partial u^1 \partial u^2}\frac{du^2}{ds}\right) + \left(\frac{\partial p^2}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds} + \frac{\partial p^2}{\partial u^2}\frac{du^2}{ds}\right)\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + \\ & + p^2\left(\frac{\partial^2 x^1}{\partial u^2 \partial u^1}\frac{du^1}{ds} + \frac{\partial^2 x^1}{(\partial u^2)^2}\frac{du^2}{ds}\right)\end{aligned} \tag{1.6}$$

dır.

x^i'ler $(i= 1,2,3)$, P noktasındaki birim normalin bileşenleri olmak üzere, Gauss formüllerinden:

$$\frac{\partial^2 x^i}{(\partial u^1)^2} = \Gamma^1_{11}\frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \Gamma^2_{11}\frac{\partial x^i}{\partial u^2} + d_{11}\ x^i$$

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^2 \partial u^1} = \Gamma^1_{12}\frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \Gamma^2_{12}\frac{\partial x^i}{\partial u^2} + d_{12}\ x^i$$

$$\frac{\partial^2 x^i}{(\partial u^2)^2} = \Gamma^1_{22} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \Gamma^2_{22} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + d_{22}\; X^i$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler (1.6) ifadesinde yerlerine yazıldığında;

$$\frac{d\nu^1}{ds} = \left(\frac{\partial p^1}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds} + \frac{\partial p^1}{\partial u^2}\frac{du^2}{ds}\right)\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + p^1\Big[\left(\Gamma^1_{11}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + \Gamma^2_{11}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} +\right.$$

$$\left. + d_{11}X^1\right)\frac{du^1}{ds} + \left(\Gamma^1_{12}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + \Gamma^2_{12}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + d_{12}X^1\right)\frac{du^2}{ds}\Big] + \left(\frac{\partial p^2}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds} +\right.$$

$$\left.\frac{\partial p^2}{\partial u^2}\frac{du^2}{ds}\right)\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + p^2\Big[\left(\Gamma^1_{12}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + \Gamma^2_{12}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + d_{12}\,X^1\right)\frac{du^1}{ds} +$$

$$+ \left(\Gamma^1_{22}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + \Gamma^2_{22}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + d_{22}X^1\right)\frac{du^2}{ds}\Big] \qquad \ldots\ldots$$

$$\frac{d\nu^1}{ds} = \frac{du^1}{ds}\left(\frac{\partial p^1}{\partial u^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + p^1\Gamma^1_{11}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + p^1\Gamma^2_{11}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + \frac{\partial p^2}{\partial u^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + p^2\Gamma^1_{12}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} +\right. \tag{1.7}$$

$$\left. + p^2\Gamma^2_{12}\frac{\partial x^1}{\partial u^2}\right) + \frac{du^2}{ds}\left(\frac{\partial p^1}{\partial u^2}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + p^1\Gamma^1_{12}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + p^1\Gamma^2_{12}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + \frac{\partial p^2}{\partial u^2}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + p^2\Gamma^1_{22}\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\right.$$

$$\left. + p^2\Gamma^2_{22}\frac{\partial x^1}{\partial u^2}\right) + X^1\left(p^1 d_{11}\frac{du^1}{ds} + p^2\, d_{12}\frac{du^1}{ds} + p^1\, d_{12}\frac{du^2}{ds} + p^2\, d_{22}\frac{du^2}{ds}\right)$$

bulunur.

λ^j kontravaryant bileşenlerinin kovaryant türevleri

$$\lambda^i{}_{,j} = \frac{\partial \lambda^i}{\partial x^j} + \lambda^h\, \Gamma^i_{hj}$$

|4| olduğundan, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$p^i{}_{,j} = \frac{\partial p^i}{\partial u^j} + p^1\,\Gamma^i_{1j} + p^2\,\Gamma^i_{2j}$$

Yani,

$$p^1_{,1} = \frac{\partial p^1}{\partial u^1} + p^1\,\Gamma^1_{11} + p^2\,\Gamma^1_{21}$$

$$p^1_{,2} = \frac{\partial p^1}{\partial u^2} + p^1\,\Gamma^1_{12} + p^2\,\Gamma^1_{22}$$

$$p^2_{,1} = \frac{\partial p^2}{\partial u^1} + p^1\,\Gamma^2_{11} + p^2\,\Gamma^2_{21}$$

$$p^2_{,2} = \frac{\partial p^2}{\partial u^2} + p^1\,\Gamma^2_{12} + p^2\,\Gamma^2_{22}$$

$$x^i_{,j} = \frac{\partial x^i}{\partial u^j}$$

$$x^1_{,1} = \frac{\partial x^1}{\partial u^1}\,, \quad x^1_{,2} = \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\,, \quad x^2_{,1} = \frac{\partial x^2}{\partial u^1}\,, \quad x^2_{,2} = \frac{\partial x^2}{\partial u^2}$$

dır.

Bu eşitliklerdeki ifadeler (1.7) de yerine yazıldığında,

$$\frac{dv^1}{ds} = \frac{du^1}{ds}\,(x^1_{,1}\,p^1_{,1} + x^1_{,2}\,p^2_{,1}) + \frac{du^2}{ds}\,(x^1_{,1}\,p^1_{,2} + x^1_{,2}\,p^2_{,2}) + X^1\,(p^1 d_{11}\,\frac{du^1}{ds} +$$

$$+ p^2\,d_{12}\,\frac{du^1}{ds} + p^1\,d_{12}\,\frac{du^2}{ds} + p^2\,d_{22}\,\frac{du^2}{ds})$$

bulunur. $i = 1$ için yazılan bu ifade, $i = 2, 3$ değerleri için de yazılır:

$$i = 2 \text{ için}: \frac{dv^2}{ds} = \frac{du^1}{ds}\,(x^2_{,1}p^1_{,1} + x^2_{,2}p^2_{,1}) + \frac{du^2}{ds}\,(x^2_{,1}p^1_{,2} +$$

$$x^2_{,2}\,p^2_{,2}) + X^2(p^1 d_{11}\,\frac{du^1}{ds} + p^2\,d_{12}\,\frac{du^1}{ds} + p^1\,d_{12}\,\frac{du^2}{ds} + p^2\,d_{22}\,\frac{du^2}{ds})$$

$$i=3 \text{ için}: \frac{d\nu^3}{ds} = \frac{du^1}{ds}(x^3_{,1}\, p^1_{,1} + x^3_{,2}\, p^2_{,1}) + \frac{du^2}{ds}(x^3_{,1}\, p^1_{,2} + x^3_{,2}\, p^2_{,2}) +$$

$$+ x^3 (p^1\, d_{11} \frac{du^1}{ds} + p^2\, d_{12} \frac{du^1}{ds} + p^1\, d_{12} \frac{du^2}{ds} + p^2\, d_{22} \frac{du^2}{ds})$$

olduğuna göre,

$$(1.8) \quad \frac{d\nu^i}{ds} = x^i_{,\alpha}\, p^\alpha_{,\gamma} \frac{du^\gamma}{ds} + (p^\delta\, d_{\delta\gamma} \frac{du^\gamma}{ds}) x^i$$

dır.

I.2.1. Mutlak Eğrilik

Tanım: ω^i birim vektörü verildiğinde, ${}_\nu k$ türev vektörünün büyüklüğü olan ${}_\nu\chi$'ya, ν vektör alanının mutlak eğriliği denir.

Böylece (1.8) ifadesi gereğince,

$$(1.9) \quad \frac{d\nu^i}{ds} = {}_\nu k = {}_\nu\chi\, \omega^i = x^i_{,\alpha}\, p^\alpha_{,\gamma} \frac{du^\gamma}{ds} + (p^\gamma d_{\delta\gamma} \frac{du^\gamma}{ds}) x^i$$

dır.

ω, ω^i ve x^i arasındaki açı olsun.

$$(1.9) \quad {}_\nu\chi\, \omega^i = x^i_{,\alpha}\, p^\alpha_{,\gamma} \frac{du^\gamma}{ds} + (p^\delta d_{\delta\gamma} \frac{du^\gamma}{ds}) x^i$$

eşitliğinin her iki tarafı x^i ile çarpılarak,

$${}_\nu\chi \omega^i x^i = x^i x^i_{,\alpha} \cdot p^\alpha_{,\gamma} \frac{du^\gamma}{ds} + (p^\delta d_{\delta\gamma} \frac{du^\gamma}{ds})\ (x^i)^2$$

bulunur.

X^i ler birim normalin bileşenleri olduğundan, $X^i_{,\alpha}$ ile çarpımları sıfırdır. Zira X^i_{α} teğet doğrultusudur ve normale diktir. $(X^i)^2 = 1$ dir, çünkü X^i birim vektördür. Dolayısıyla,

$$(1.10) \qquad {}_{\nu}\chi\omega^i X^i = p^{\delta} d_{\delta\gamma}\frac{du^{\gamma}}{ds}$$

elde edilir. ω^i ile X^i arasındaki ω açısının kosinüsü

$$\cos\omega = \frac{\omega^i X^i}{|\omega^i|\ |X^i|}$$

dır. ω^i ile X^i, birim vektör olduklarından, uzunlukları 1'e eşittir. Buna göre

$$\cos\omega = \omega^i X^i$$

dir. Bu ifade (1.10)'da yerine yazılırsa,

$${}_{\nu}\chi\cos\omega = p^{\delta} d_{\delta\gamma}\frac{du^{\gamma}}{ds}$$

olur.

${}_{\nu}\chi$ sıfıra eşit değilse,

$${}_{\nu}\chi\cos\omega = p^{\delta} d_{\delta\gamma}\frac{du^{\gamma}}{ds}$$

denkleminin sağ tarafı, $0 \leqslant \omega < \frac{\pi}{2}$ veya $\frac{\pi}{2} < \omega \leqslant \pi$ değerlerine göre pozitif veya negatiftir. Birinci halde e= 1, ikincisinde e= -1 olmak üzere

$${}_{\nu}\chi_n = e p^{\delta} d_{\delta\gamma}\frac{du^{\gamma}}{ds} \qquad \ldots\ldots$$

olsun. Böylece ${}_{\nu}\chi_n$, (1.8)'deki normal bileşenin büyüklüğüdür.

I.2.2. Normal Eğrilik

Tanım: Bir vektör alanının P noktasındaki bir eğriye göre ω normal eğrilik vektörünün işaretli büyüklüğü olan ${}_{\nu}\chi_n$'ye, vektör alanının normal eğriliği denir.

p^{δ}'lar bir birim vektörün bileşenleri değilse, C eğrisine göre ν alanının normal eğriliği genel olarak,

$$(1.11) \qquad e({}_{\nu}\chi_n)= \frac{d_{\delta\gamma}\, p^{\delta}\, du^{\gamma}}{(g_{\alpha\gamma}\, du^{\alpha} du^{\gamma}\, g_{\lambda\mu}\, p^{\lambda} p^{\mu})^{1/2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Özellik: 1 Yalnız ve yalnız ${}_{\nu}\chi_n$, du^{α}'dan bağımsız ise, S üzerindeki P noktasından geçen bütün eğrilere göre, ν vektör alanının normal eğrilikleri eşittir. Böylece P noktasındaki

$$gd = 0$$

hali ile P noktasındaki her du^{α} için

$$\frac{\partial({}_{\nu}\chi_n)}{\partial(du^{\alpha})} = 0$$

hali birbirine eşittir.

Gerçekten:

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad d=\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}$$

$$g.d=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (g_{11}g_{22}-g_{12}^2)(d_{11}d_{22}-d_{12}^2)=0$$

ise, ya $g_{11}\;\; g_{22}-g_{12}^{2} = 0$

veya $d_{11}\;\; d_{22}-d_{12}^{2} = 0$

dır.

Şimdi diğer hal elde edilmek istenirse, şu yol izlenir.

$$e({}_{\nu}\chi_n)=\frac{d_{\delta\gamma}\,p^{\delta}\,du^{\gamma}}{(g_{\alpha\gamma}\,du^{\alpha}du^{\gamma})^{1/2}}$$

$$e({}_{\nu}\chi_n)=\frac{d_{11}p^1du^1+d_{12}p^1du^2+d_{21}p^2du^1+d_{22}p^2du^2}{\left[\,g_{11}(du^1)^2+2g_{12}du^1du^2+g_{22}(du^2)^2\right]^{1/2}}$$

ifadesinin ∂u^1'e göre kısmi türevi,

$$e\,\frac{\partial({}_{\nu}\chi_n)}{\partial(\partial u^1)}=\frac{1}{\left[g_{11}(du^1)^2+2g_{12}du^1du^2+g_{22}(du^2)^2\right]^{3/2}}\Big[(d_{11}p^1+d_{21}p^2)(g_{11}(du^1)^2+$$

$$+2g_{12}du^1du^2+g_{22}(du^2)^2)-(g_{11}du^1+g_{12}du^2)(d_{11}p^1du^1+d_{12}p^1du^2+d_{21}p^2du^1+d_{22}p^2du^2)\Big]$$

olduğundan,

$$e\,\frac{\partial({}_{\nu}\chi_n)}{\partial(\partial u^1)}=0\Rightarrow d_{11}p^1g_{11}(du^1)^2+2d_{11}p^1g_{12}du^1du^2+d_{11}p^1g_{22}(du^2)^2+$$

$$+d_{21}p^2g_{11}(du^1)^2+2d_{21}p^2g_{12}du^1du^2+d_{21}p^2g_{22}(du^2)^2-$$

$$-g_{11}du^1d_{11}p^1du^1-g_{11}du^1d_{12}p^1du^2-g_{11}du^1d_{21}p^2du^1-$$

$$-g_{11}du^1d_{22}p^2du^2-g_{12}du^2d_{11}p^1du^1-g_{12}du^2d_{12}p^1du^2-$$

$$-g_{12}du^2d_{21}p^2du^1-g_{12}du^2d_{22}p^2du^2=0$$

$$du^1du^2\left[p^1(d_{11}g_{12}-g_{11}d_{12})+p^2(d_{21}g_{12}-g_{11}d_{22})\right]+(du^2)^2\left[p^1(g_{22}d_{11}-\right.$$

$$\left.-g_{12}d_{12})+p^2(g_{22}d_{21}-g_{12}d_{22})\right]=0\ .$$

$$(1.12)\quad du^1\left[p^1(d_{11}g_{12}-g_{11}d_{12})+p^2(d_{21}g_{12}-g_{11}d_{22})\right]+$$

$$+du^2\left[p^1(g_{22}d_{11}-g_{12}d_{12})+p^2(d_{21}g_{22}-g_{12}d_{22})\right]=0$$

$$(1.12)\Rightarrow(1)\quad p^1(d_{11}g_{12}-g_{11}d_{12})+p^2(d_{21}g_{12}-g_{11}d_{22})=0$$

$$(2)\quad p^1(g_{22}d_{11}-g_{12}d_{12})+p^2(d_{21}g_{22}-g_{12}d_{22})=0$$

Şimdi: $\dfrac{\partial({}_{\nu}\chi_n)}{\partial(\partial u^{\alpha})}=0 \Longleftrightarrow dg=0$

olduğunu göstermek gerekiyor.

$$(1)\quad p^1(d_{11}g_{12}-g_{11}d_{12})=-p^2(d_{21}g_{12}-g_{11}d_{22})$$

$$(2)\quad p^1(g_{22}d_{11}-g_{12}d_{12})=-p^2(d_{21}g_{22}-g_{12}d_{22})$$

(1) ve (2)'den elde edilen bu eşitlikler birbirine oranlandığında;

$$\frac{p^1(d_{11}g_{12}-g_{11}d_{12})}{p^1(g_{22}d_{11}-g_{12}d_{12})}=\frac{-p^2(d_{21}g_{12}-g_{11}d_{22})}{-p^2(d_{21}g_{22}-g_{12}d_{22})}$$

$$(d_{11}g_{12}-g_{11}d_{12})(d_{21}g_{22}-g_{12}d_{22})=(d_{21}g_{12}-g_{11}d_{22})(g_{22}d_{11}-g_{12}d_{12})$$

$$d_{11}g_{12}d_{21}g_{22}-d_{11}g_{12}g_{12}d_{22}-g_{11}d_{12}d_{21}g_{22}+g_{11}d_{12}g_{12}d_{22}=$$

$$=d_{21}g_{12}g_{22}d_{11}-d_{21}g_{12}^2d_{12}-g_{11}d_{22}g_{22}d_{11}+g_{11}d_{22}g_{12}d_{12}$$

$$-d_{11}d_{22}g_{12}^2-g_{11}g_{22}d_{12}^2+d_{12}^2g_{12}^2+g_{11}d_{22}d_{11} = 0$$

$$g_{12}^2(d_{12}^2-d_{11}d_{22})+g_{11}g_{22}(d_{11}d_{22}-d_{12}^2) = 0$$

$$(d_{11}d_{22}-d_{12}^2)(g_{11}g_{22}-g_{12}^2) = 0$$

elde edilir. Bu da, ya $d_{11}d_{22}-d_{12}^2 = 0$

veya $g_{11}g_{22}-g_{12}^2 = 0$

dır.

Böylece $\dfrac{\partial({}_{\nu}\chi_n)}{\partial(\partial u^1)} = 0$ ile $g.d= 0$'ın denk olduğu görülür.

$g > 0$ ve (1.11), p^α ve du^α'ya göre simetrik olduğundan, şu sonuç çıkarılabilir: yalnız ve yalnız bir noktada $d= 0$ ise, yüzey üzerindeki herhangi bir eğriye göre, herhangi bir vektör alanının normal eğriliği o noktada sabitttir.

Tersi söylenmedikçe $d\neq 0$ olduğu farzedilecektir. Bir vektör alanının P noktasındaki normal eğriliğinin sıfırdan farklı sonlu ekstremum değerini aldığı tek bir doğrultunun varlığı kolayca gösterilir.

I.2.3. Vektör Alanının Asal Doğrultusu ve Asal Eğriliği

Tanım: 1. Vektör alanının bir P noktasındaki normal eğriliğinin ekstremum değerini aldığı tek doğrultuya, alanın P noktasındaki asal doğrultusu denir.

Tanım: 2. Asal doğrultuya tekabül eden normal eğriliğe, alanın P noktasındaki asal eğriliği denir.

Yukarıdaki asal doğrultu tanımına göre; normal eğriliğin ∂u^{α}'ya göre kısmi türevi alınıp, sıfıra eşitlenir. Daha önce yapılan (1.12) işlemi gözönüne alındığında, sonuca ulaşılır:

$$(1.12) \Rightarrow du^1\left[p^1(d_{11}g_{12}-g_{11}d_{12})+p^2(d_{21}g_{12}-g_{11}d_{22})\right]+$$
$$+du^2\left[p^1(g_{22}d_{11}-g_{12}d_{12})+p^2(d_{21}g_{22}-g_{12}d_{22})\right]=0$$

$$p^1d_{11}g_{12}du^1-p^1g_{11}d_{12}du^1+p^2d_{21}g_{12}du^1-p^2g_{11}d_{22}du^1+p^1g_{22}d_{11}du^2-$$
$$-p^1g_{12}d_{12}du^2+p^2d_{21}g_{22}du^2-p^2g_{12}d_{22}du^2=0$$

$$-g_{11}du^1(p^1d_{12}+p^2d_{22})+g_{12}du^1(p^1d_{11}+p^2d_{21})-$$
$$-g_{21}du^2(p^1d_{12}+p^2d_{22})+g_{22}du^2(p^1d_{11}+p^2d_{21})=0$$
$$-g_{11}du^1(p^1d_{21}+p^2d_{22})+g_{12}du^1(p^1d_{11}+p^2d_{12})-$$
$$-g_{21}du^2(p^1d_{21}+p^2d_{22})+g_{22}du^2(p^1d_{11}+p^2d_{12})=0$$

$\varepsilon^{\alpha\beta}=\dfrac{e^{\alpha\beta}}{\sqrt{g}}$, $e^{12}=-e^{21}=1$, $e_{12}=e^{12}$, $e_{21}=e^{21}$, $e^{11}=e^{22}=0$, $e_{11}=e^{11}=e_{22}=e^{22}$ |4| olduğundan,

$$e^{21}g_{11}du^1(p^1d_{21}+p^2d_{22})+e^{12}g_{12}du^1(p^1d_{11}+p^2d_{12})+$$
$$+e^{21}g_{21}du^2(p^1d_{21}+p^2d_{22})+e^{12}g_{22}du^2(p^1d_{11}+p^2d_{12})=0$$

ve

$$\sqrt{g}\,\varepsilon^{21}g_{11}du^1(p^1d_{21}+p^2d_{22})+\sqrt{g}\,\varepsilon^{12}g_{12}du^1(p^1d_{11}+p^2d_{12})+$$
$$+\sqrt{g}\,\varepsilon^{21}g_{21}du^2(p^1d_{21}+p^2d_{22})+\sqrt{g}\,\varepsilon^{12}g_{22}du^2(p^1d_{11}+p^2d_{12})=0$$

elde edilir. Bu da

$$\varepsilon^{21}g_{11}du^1(p^1d_{21}+p^2d_{22})+\varepsilon^{12}g_{12}du^1(p^1d_{11}+p^2d_{12}) +$$

$$+\varepsilon^{21}g_{21}du^2(p^1d_{21}+p^2d_{22})+\varepsilon^{12}g_{22}du^2(p^1d_{11}+p^2d_{12})= 0$$

demektir. Devam edilirse,

$$\varepsilon^{21}g_{11}du^1d_{2\delta}p^\delta+\varepsilon^{12}g_{12}du^1p^\delta d_{1\delta}+\varepsilon^{21}g_{21}du^2p^\delta d_{2\delta}+\varepsilon^{12}g_{22}du^2p^\delta d_{1\delta}=0$$

$$\varepsilon^{21}(g_{11}du^1+g_{12}du^2)p^\delta d_{2\delta}+\varepsilon^{12}(g_{21}du^1+g_{22}du^2)p^\delta d_{1\delta}= 0$$

$$\varepsilon^{21}g_{1\gamma}du^\gamma p^\delta d_{2\delta}+\varepsilon^{12}g_{2\gamma}du^\gamma p^\delta d_{1\delta}= 0$$

olur ki, |4| 'dan dolayı bu ifade

$$\varepsilon^{12}g_{1\gamma}du^\gamma p^\delta d_{2\delta}+\varepsilon^{21}g_{2\gamma}du^\gamma p^\delta d_{1\delta}= 0$$

dır. Diğer bir deyişle,

$$\varepsilon^{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma}d_{\beta\delta}p^\delta du^\gamma= 0 \tag{1.13}$$

elde edilir ki, bu da asal doğrultuları veren formüldür.

Şimdi de asal eğriliğin hesaplanması gerekiyor:

S yüzeyi üzerinde v vektör alanının bir P noktasındaki asal eğriliğinin hesabında, S yüzeyinin eğrilik çizgilerine nisbet edildiği, yani

$$g_{12}= d_{12}=0$$

olduğu farzedilsin. Bu durumda, asal doğrultuları veren

$$\varepsilon^{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma}d_{\beta\delta}p^\delta du^\gamma= 0$$

ifadesinden,

$$g_{11}d_{22}p^2du^1-g_{22}d_{11}p^1du^2= 0 \tag{1.14}$$

bulunur. Diğer taraftan, vektör alanının P noktasındaki normal eğriliği de (1.11)'den

$$(1.15)\qquad {}_{v}\chi_n=\frac{d_{11}p^1du^1+d_{22}p^2du^2}{\left[g_{11}(du^1)^2+g_{22}(du^2)^2\right]^{1/2}\left[g_{11}(p^1)^2+g_{22}(p^2)^2\right]^{1/2}}$$

olur. O halde (1.14) ifadesinden, asal doğrultular için

$$g_{11}d_{22}p^2du^1=g_{22}d_{11}p^1du^2$$

$$\frac{du^1}{du^2}=\frac{g_{22}d_{11}p^1}{g_{11}d_{22}p^2}$$

yazılabileceğinden, bu ifadeler (1.15) de yerlerine yerleştirilerek,

$${}_{v}\bar{\chi}_n=\frac{d_{11}p^1g_{22}d_{11}p^1+d_{22}p^2g_{11}d_{22}p^2}{\left[g_{11}(g_{22}d_{11}p^1)^2+g_{22}(g_{11}d_{22}p^2)^2\right]^{1/2}\left[g_{11}(p^1)^2+g_{22}(p^2)^2\right]^{1/2}}$$

$${}_{v}\bar{\chi}_n=\frac{g_{22}(d_{11})^2(p^1)^2+g_{11}(d_{22})^2(p^2)^2}{\left[g_{11}(g_{22})^2(d_{11})^2(p^1)^2+g_{22}(g_{11})^2(d_{22})^2(p^2)^2\right]^{1/2}\left[g_{11}(p^1)^2+g_{22}(p^2)^2\right]^{1/2}}$$

$${}_{v}\bar{\chi}_n=\frac{g_{22}(d_{11})^2(p^1)^2+g_{11}(d_{22})^2(p^2)^2}{\left[g_{11}g_{22}(g_{22}d_{11}^2(p^1)^2+g_{11}d_{22}^2(p^2)^2\right]^{1/2}\left[g_{11}(p^1)^2+g_{22}(p^2)^2\right]^{1/2}}$$

$$(1.16)\qquad {}_{v}\bar{\chi}_n=\left[\frac{g_{22}(d_{11})^2(p^1)^2+g_{11}(d_{22})^2(p^2)^2}{g_{11}g_{22}(g_{11}(p^1)^2+g_{22}(p^2)^2)}\right]^{1/2}$$

bulunur.

Weingarten formülleri gözönüne alınırsa;

$$n^i_{u_1} = \frac{d_{12}g_{12}-g_{22}d_{11}}{g_{11}g_{22}-g^2_{12}} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{g_{12}d_{11}-g_{11}d_{12}}{g_{11}g_{22}-g^2_{12}} \frac{\partial x^i}{\partial u^2}$$

$$n^i_{u_2} = \frac{g_{12}d_{22}-g_{22}d_{12}}{g_{11}g_{22}-g^2_{12}} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{g_{12}d_{12}-g_{11}d_{22}}{g_{11}g_{22}-g^2_{12}} \frac{\partial x^i}{\partial u^2}$$

dir. $d_{12}= g_{12}= 0$ olduğundan, bu formüller

$$n^i_{u_1} = \frac{-g_{22}d_{11}}{g_{11}g_{22}} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} = - \frac{d_{11}}{g_{11}} \frac{\partial x^i}{\partial u^1}$$

(1.17)

$$n^i_{u_2} = \frac{-g_{11}d_{22}}{g_{11}g_{22}} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} = - \frac{d_{22}}{g_{22}} \frac{\partial x^i}{\partial u^2}$$

şeklini alır.

$$h_{11}= (n^i_{u_1})^2 \quad , \quad h_{12}= n^i_{u_1} . n^i_{u_2} \quad , \quad h_{22}= (n^i_{u_2})^2$$

olduğundan, (1.17)'den

$$h_{11}= \frac{d^2_{11}}{g^2_{11}} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^1}\right)^2 = \frac{d^2_{11}}{g^2_{11}} g_{11}= \frac{d^2_{11}}{g_{11}}$$

(1.18) $$h_{12}= \frac{d_{11}}{g_{11}} \frac{d_{22}}{g_{22}} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} = \frac{d_{11}d_{22}}{g_{11}g_{22}} g_{12}= 0$$

$$h_{22}= \frac{d^2_{22}}{g^2_{22}} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^2}\right)^2 = \frac{d^2_{22}}{g^2_{22}} . g_{22}= \frac{d^2_{22}}{g_{22}}$$

elde edilir.

(1.18) den

$$g_{11}h_{11}= d_{11}^2 \quad , \quad g_{22}h_{22}= d_{22}^2$$

elde edilir ve bunlar (1.16) da yerine konursa,

$$_{\nu}\bar{X}_n=\left[\frac{g_{22}g_{11}h_{11}(p^1)^2+g_{11}g_{22}h_{22}(p^2)^2}{g_{11}g_{22}(g_{11}(p^1)^2+g_{22}(p^2)^2)}\right]^{1/2}$$

$$_{\nu}\bar{X}_n=\left[\frac{g_{11}g_{22}(h_{11}(p^1)^2+h_{22}(p^2)^2)}{g_{11}g_{22}(g_{11}(p^1)^2+g_{22}(p^2)^2)}\right]^{1/2}$$

(1.19) $$_{\nu}\bar{X}_n=\left[\frac{h_{11}(p^1)^2+h_{22}(p^2)^2}{g_{11}(p^1)^2+g_{22}(p^2)^2}\right]^{1/2}$$

bulunur.

$$h_{\alpha\beta}= \sum_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\right)$$

olmak üzere, (1.19) ifadesi

(1.20) $$_{\nu}\bar{X}_n= \left(\frac{h_{\lambda\delta}p^\lambda p^\delta}{g_{\lambda\delta}p^\lambda p^\delta}\right)^{1/2}$$

yazılır. Böylece asal eğrilikleri veren formül elde edilmiş olur.

Teorem: 1 M ve K, Yüzeyin ortalama ve Gauss eğrilikleri olmak üzere, (1.21) $\quad h_{\alpha\beta}= d_{\alpha\beta}M-g_{\alpha\beta}K$

dır.

Gerçekten; S üzerinde $g_{12}= d_{12}= 0$ seçildiğinde,

$$M= \chi_1+\chi_2= \frac{g_{11}d_{22}+d_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22}}$$

$$K= \chi_1\cdot\chi_2= \frac{d_{11}d_{22}}{g_{11}g_{22}}$$

olmak üzere,

$$d_{11}M-g_{11}K= d_{11}\ \frac{g_{11}d_{22}+d_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22}}\ -g_{11}\ \frac{d_{11}d_{22}}{g_{11}g_{22}}$$

$$d_{11}M-g_{11}K= \frac{d_{11}g_{11}d_{22}+d_{11}^2g_{22}-g_{11}d_{11}d_{22}}{g_{11}g_{22}} = \frac{d_{11}^2}{g_{11}}$$

elde edilir, yani

$$d_{11}M-g_{11}K= \frac{d_{11}^2}{g_{11}} = h_{11}$$

dir. $h_{12}= h_{21}= 0$ dır.

$$d_{22}M-g_{22}K= d_{22}\ \frac{g_{11}d_{22}+d_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22}}\ -g_{22}\ \frac{d_{11}d_{22}}{g_{11}g_{22}}$$

$$d_{22}M-g_{22}K= \frac{g_{11}d_{22}^2+d_{22}d_{11}g_{22}-g_{22}d_{11}d_{22}}{g_{11}g_{22}} = \frac{d_{22}^2}{g_{22}}$$

ifadesi de

$$h_{22} = d_{22}M - g_{22}K$$

demektir.

Teorem: 2 S yüzeyi üzerinde ν alanı birim vektörlerden oluşmuş ise, $g_{\lambda\delta}p^{\lambda}p^{\delta} = 1$ olacağından, asal eğrilik

(1.22) $\quad {}_{\nu}\bar{\chi}_{n} = (h_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta})^{1/2}$

şeklindedir.

Gerçekten; (1.20) ifadesinde $g_{\lambda\delta}p^{\lambda}p^{\delta} = 1$ şartı yerleştirildiğinde, (1.22) elde edilir.

I.3. Vektör Alanının Eğrisi

Tanım: Bir eğri teğet doğrultuları ile belirlenir. Teğet doğrultuları, vektör alanına ait birer vektördürler. İşte bu vektörler boyunca belirlenen S yüzeyi üzerindeki bir eğriye, ν vektör alanının eğrisi denir.

ν vektör alanının P noktasındaki eğrisi:

(1.23) $\quad \varepsilon_{\alpha\beta}p^{\alpha}du^{\beta} = 0$

ile tanımlanır.

Eşitliğin sol tarafı açıldığında;

$$\varepsilon_{12}p^{1}du^{2} + \varepsilon_{21}p^{2}du^{1} = 0$$

$$p^{1}du^{2} - p^{2}du^{1} = 0$$

$$p^{1}du^{2} = p^{2}du^{1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p^{1}}{p^{2}} = \frac{du^{1}}{du^{2}} = \frac{\frac{du^{1}}{ds}}{\frac{du^{2}}{ds}}$$

elde edilir. Buradan denilebilir ki, S yüzeyindeki ν birim vektör alanının bir eğrisi, ν'nin eğriye teğet olan vektörleri boyunca S'de bir eğridir ve

$$(1.24) \quad \frac{du^{\alpha}}{ds} = p^{\alpha}$$

ile tanımlanır.

Bir vektör alanının, alanın bir noktasındaki eğrisine göre normal eğriliği, o noktadaki eğrinin normal eğriliğidir. Bu sebeple; yüzey üzerindeki bir eğrinin normal eğriliği, bir vektör alanının normal eğriliğinin özel bir hali gibi gözönüne alınabilir.

Teorem: 3 χ_n, alan eğrisinin normal eğriliği; M, yüzeyin ortalama eğriliği; K, yüzeyin Gauss eğriliği olmak üzere

$$(1.25) \quad ({}_{\nu}\bar{\chi}_n)^2 = M\,\chi_n - K$$

dır.

Gerçekten; (1.21) eşitliğinin heriki tarafı $p^{\alpha}p^{\beta}$ ile çarpıldığında,

$$(1.26) \quad h_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} = d_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta}M - g_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta}K$$

olur. "Teorem 2"'den dolayı;

$$h_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} = ({}_{\nu}\bar{\chi}_n)^2$$

$$g_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} = 1$$

dir. Bunlar (1.26) da yerine yazıldığında, (1.27) $\quad ({}_{\nu}\bar{\chi}_n)^2 = d_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta}M-K$

elde edilir. (1.24) ifadesi, (1.27)'de kullanılırsa,

$$({}_{\nu}\bar{\chi}_n)^2 = \frac{du^{\alpha}}{ds}\;\frac{du^{\beta}}{ds}\; d_{\alpha\beta}M-K = \frac{d_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}}{ds^2}\; M-K$$

olur ki, bu da

$$({}_{\nu}\bar{\chi}_n)^2 = \chi_n\; M-K$$

demektir.

Teorem: 4 $\quad p^{\alpha}$ ve q^{α} ortogonal iki vektör alanı olsun. $e({}_p\bar{\chi}_n)$ ve $e({}_q\bar{\chi}_n)$, iki alanın asal eğriliklerini; χ_1 ve χ_2, yüzeyin asal eğriliklerini göstermek üzere;

(1.28) $\quad ({}_p\bar{\chi}_n)^2 + ({}_q\bar{\chi}_n)^2 = M^2-2K = \chi_1^2+\chi_2^2$

dir.

Gerçekten; p^{α} bileşenli alanın vektörlerinin u^2=sabit parametre eğrisi ile yaptığı açı ψ ise, q^{α} bileşenli alan ilk alana dik olduğundan, ikinci alanın u^2= sabit parametre eğrisi ile yaptığı açı $(\frac{\pi}{2}+\psi)$'dir. "Teorem 3" gereğince

$$({}_p\bar{\chi}_n)^2 = M\,{}_p\chi_n - K$$

(1.29)

$$({}_q\bar{\chi}_n)^2 = M\,{}_q\chi_n - K$$

ifadelerindeki ${}_p\chi_n$ ve ${}_q\chi_n$; sırası ile p^{α} ve q^{α} bileşenli alanların eğrilerinin normal eğrilikleridir. Dolayısıyla u^2= sabit parametre eğrisi ile ψ açısı yapan eğrinin normal eğriliği, "Euler Teoremi"gereğince

$$ {}_p\chi_n = \chi_1 \cos^2\psi + \chi_2 \sin^2\psi $$

ve u^2= sabit parametre eğrisi ile $\psi + \frac{\pi}{2}$ açısı yapan eğrinin normal eğriliği

$$ {}_q\chi_n = \chi_1 \sin^2\psi + \chi_2 \cos^2\psi $$

dir.

"Euler Teoremi" gereği yazılan bu iki eşitlik, (1.29) da yerine yazılıp, toplandığında

$$ ({}_p\bar{\chi}_n)^2 = M\ (\chi_1\cos^2\psi + \chi_2\sin^2\psi) - K $$

$$ ({}_q\bar{\chi}_n)^2 = M\ (\chi_1\sin^2\psi + \chi_2\cos^2\psi) - K $$

$$ ({}_p\bar{\chi}_n)^2 + ({}_q\bar{\chi}_n)^2 = M\left[\chi_1(\cos^2\psi + \sin^2\psi) + \chi_2(\sin^2\psi + \cos^2\psi)\right] - 2K $$

$$ ({}_p\bar{\chi}_n)^2 + ({}_q\bar{\chi}_n)^2 = M\ (\chi_1 + \chi_2) - 2K $$

$$ ({}_p\bar{\chi}_n)^2 + ({}_q\bar{\chi}_n)^2 = M^2 - 2K $$

elde edilir. Bu ifade incelendiğinde de,

$$ M^2 - 2K = (\chi_1 + \chi_2)^2 - 2\chi_1\chi_2 = \chi_1^2 + 2\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 - 2\chi_1\chi_2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 $$

olur ki, bu da (1.28) eşitliğidir. Yani

$$ ({}_p\bar{\chi}_n)^2 + ({}_q\bar{\chi}_n)^2 = M^2 - 2K = \chi_1^2 + \chi_2^2 $$

dir.

I.4. Bir Vektör Alanının Eğrilik Çizgisi

Tanım: Her noktasındaki teğet doğrultusu, alanın asal doğrultusu olan S yüzeyi üzerindeki bir eğriye, alanın eğrilik çizgisi denir.

Tanımından da anlaşıldığı üzere, eğrilik çizgisini veren formül, asal doğrultuyu veren formül ile aynıdır. O formül de (1.13)'te bulunmuştu. O halde eğrilik çizgilerinin denklemi

$$\varepsilon^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} d_{\beta\delta} p^{\delta} du^{\gamma} = 0 \tag{1.30}$$

dır.

$\dfrac{\partial({}_{\nu}\chi_n)}{\partial(\partial u^2)} = 0$ için de aynı sonuç elde edilir.

I.5. Vektör Alanının Asimptotik Doğrultusu

Tanım: Bir vektör alanının normal eğriliğini sıfır yapan doğrultuya, alanın asimptotik doğrultusu denir.

I.6. Vektör Alanının Asimptotik Çizgisi

Tanım: Her noktasındaki teğet doğrultusu, vektör alanının asimptotik doğrultusu olan yüzey üzerindeki bir eğriye, vektör alanının asimptotik çizgisi denir.

ν vektör alanının P noktasındaki asimptotik doğrultusu ve asimptotik çizgisi;

$$e({}_{\nu}\chi_n) = \frac{d_{\delta\gamma} p^{\delta} du^{\gamma}}{(g_{\alpha\gamma} du^{\alpha} du^{\gamma} g_{\lambda\mu} p^{\lambda} p^{\mu})^{1/2}} = 0 \text{ dan}$$

(1.31) $\quad d_{\delta\gamma} p^{\delta} du^{\gamma} = 0$

denklemi ile tanımlanır.

I.7. Asal Alan

Tanım: Her noktasındaki doğrultuları, yüzeyin bir asal doğrultuları ailesini oluşturan vektör alanına, S yüzeyinin asal vektör alanı veya asal alanı denir.

Asal alanın vektörünün doğrultusuna ve S yüzeyinin P noktasındaki asal alan ile oluşturulan eğrilik çizgisine, ayrı ayrı, S yüzeyinin tekabül eden asal doğrultusu ve S' nin P noktasındaki tekabül eden eğrilik çizgisi denir.

Aşikar olarak, asal alanın P noktasındaki eğrisi, S yüzeyinin P noktasındaki mütekabil eğrilik çizgisidir.

Özellik: 1 Yalnız ve yalnız

(1.32) $\quad \varepsilon^{\alpha\beta} d_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} p^{\gamma} p^{\delta} = 0$

ise ν vektör alanı S'nin asal alanıdır.

Gerçekten:

Şart gerektir:

Yani; ν, S'nin asal alanı ise (1.32) vardır. Asal doğrultuları veren (1.13) ifadesi

$$\left[p^{1}(g_{11}d_{21}-g_{21}d_{11})+p^{2}(g_{11}d_{22}-g_{21}d_{12})\right]du^{1}+\left[p^{1}(g_{12}d_{21}-g_{22}d_{11})+\right.$$

$$\left.+p^{2}(g_{12}d_{22}-g_{22}d_{12})\right]du^{2}=0$$

şeklinde açıldığından, asal doğrultular

$$du^1\left[p^1(g_{11}d_{21}-g_{21}d_{11})+p^2(g_{11}d_{22}-g_{21}d_{12})\right]= du^2\left[p^1(g_{22}d_{11}-\right.$$

$$\left.-g_{12}d_{21})+p^2(g_{22}d_{12}-g_{12}d_{22})\right]$$

$$\text{(1.33)}\qquad \frac{du^1}{du^2}=\frac{p^1(g_{22}d_{11}-g_{21}d_{12})+p^2(g_{22}d_{12}-g_{12}d_{22})}{p^1(g_{11}d_{21}-g_{21}d_{11})+p^2(g_{11}d_{22}-g_{21}d_{12})}$$

bağıntısından belirlenir. Diğer taraftan ν, S'nin asal alanı ise, ν'nin doğrultusunu belirleyen p^1 ve p^2, (1.33) bağıntısını sağlamalı, yani

$$\frac{p^1}{p^2}=\frac{p^1(g_{22}d_{11}-g_{12}d_{21})+p^2(g_{22}d_{12}-g_{12}d_{22})}{p_1(g_{11}d_{21}-g_{21}d_{11})+p^2(g_{11}d_{22}-g_{21}d_{12})}$$

veya

$$p^1\left[p^1(g_{11}d_{21}-g_{21}d_{11})+p^2(g_{11}d_{22}-g_{21}d_{12})\right]=p^2\left[p^1(g_{22}d_{11}-g_{12}d_{21})+\right.$$

$$\left.+p^2(g_{22}d_{12}-g_{12}d_{22})\right]$$

$$p^1\left[p^1(g_{11}d_{21}-g_{21}d_{11})+p^2(g_{11}d_{22}-g_{21}d_{12})\right]+p^2\left[p^1(g_{12}d_{12}-g_{22}d_{11})+\right.$$

$$\left.+p^2(g_{12}d_{22}-g_{22}d_{12})\right] = 0$$

olmalıdır. Ayrıca (1.32) eşitliği açıldığında da bu ifade bulunduğundan, şart gerektir.

Şart yeterdir:

Yani; (1.32) varsa, ν, S'nin asal alanıdır. (1.32) ifadesi açıldığında, ...

$$p^1\left[p^1(d_{11}g_{21}-d_{21}g_{11})+p^2(d_{12}g_{21}-d_{22}g_{11})\right]+p^2\left[p^1(d_{11}g_{22}-d_{21}g_{12})+\right.$$
$$\left.+p^2(d_{12}g_{22}-d_{22}g_{12})\right]=0$$

elde edilir.

Bir önceki ispat yolu izlendiğinde,

$$p^1\left[p^1(d_{11}g_{21}-d_{21}g_{11})+p^2(d_{12}g_{21}-d_{22}g_{11})\right]=p^2\left[p^1(d_{21}g_{12}-d_{11}g_{22})+\right.$$
$$\left.+p^2(d_{22}g_{12}-d_{12}g_{22})\right]$$

$$\frac{p^1}{p^2}=\frac{p^1(d_{21}g_{12}-d_{11}g_{22})+p^2(d_{22}g_{12}-d_{12}g_{22})}{p^1(d_{11}g_{21}-d_{21}g_{11})+p^2(d_{12}g_{21}-d_{22}g_{11})} \tag{1.34}$$

elde edilir ki, du^1 ve du^2 doğrultuları, (1.34) bağıntısını sağlamalı, yani

$$\frac{du^1}{du^2}=\frac{p^1(d_{21}g_{12}-d_{11}g_{22})+p^2(d_{22}g_{12}-d_{12}g_{22})}{p^1(d_{11}g_{21}-d_{21}g_{11})+p^2(d_{12}g_{21}-d_{22}g_{11})}$$

veya

$$du^1\left[p^1(d_{11}g_{21}-d_{21}g_{11})+p^2(d_{12}g_{21}-d_{22}g_{11})\right]=du^2\left[p^1(d_{21}g_{12}-\right.$$
$$\left.-d_{11}g_{22})+p^2(d_{22}g_{12}-d_{12}g_{22})\right]$$

$$du^1\left[p^1(d_{21}g_{11}-d_{11}g_{21})+p^2(d_{22}g_{11}-d_{12}g_{21})\right]+du^2\left[p^1(d_{21}g_{12}-\right.$$
$$\left.-d_{11}g_{22})+p^2(d_{22}g_{12}-d_{12}g_{22})\right]=0$$

elde edilir. Bu da (1.13) ifadesinin aynıdır. Yani asal doğrultuları veren formül elde edilmiş olur ve asal doğrultuların ailesi, asal alanı meydana getirir. Dolayısiyle, şart yeterdir.

I.8. Vektör Alanının Burulması

ν teğetsel vektör alanının bir P noktasındaki bir C eğrisine göre burulması şöyle hesaplanır: (1.9) gereğince ν birim vektörüne dik olan ω birim vektörü gözönüne alındığında

$$\nu x \omega = \gamma$$

ile tanımlanan γ vektörü ile birlikte ν, ω, γ üç yüzlüsü, ν vektör alanının Frenet üçyüzlüsünü oluşturacaktır. O halde bu üçyüzlünün birim vektörlerinin S'ye göre türevleri hesaplanırsa; (1.9)'a göre

$$\frac{d\nu}{ds} = {}_{\nu}\chi\, \omega$$

dır. Diğer taraftan

$$\frac{d\omega}{ds} = -{}_{\nu}\chi\, \nu \qquad + {}_{\nu}\tau\, \gamma$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \qquad - {}_{\nu}\tau\, \omega$$

olacaktır.

I.2.1. de tanımlandığı üzere ${}_{\nu}\chi$, alanın mutlak eğriliğidir. ${}_{\nu}\tau$ ise, alanın burulmasını ifade eder.

I.9. Vektör Alanının Geodezik Burulması

Bir S yüzeyi üzerindeki C eğrisine göre vektör alanının geodezik burulması,

$$(1.35) \qquad {}_{\nu}\tau_g = e\ \varepsilon^{\beta\alpha} g_{\alpha\delta} d_{\gamma\beta} p^{\delta} \frac{du^{\gamma}}{ds}$$

ile tanımlanır |5| |6|.

BÖLÜM II

VEKTÖR ALANININ EĞRİLİKLERİNİN TRİGONOMETRİK İFADELERİ

II.1. Normal Eğriliğin Trigonometrik Şekilde İfadesi

S yüzeyi üzerindeki eğrilik çizgileri, parametre eğrileri olarak seçilsin. $g_{12}= d_{12}= 0$. Buna göre; θ, C eğrisi ile $u^2=$ sabit parametre eğrisi arasındaki açı; ϕ, ν vektör alanı ile $u^2=$ sabit parametre eğrisi arasındaki açı olsun. Buradan $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\phi$ ve $\sin\phi$ ifadeleri kolayca yazılabilir:

$$C: x^i= x^i(u^1(s), u^2(s)) \qquad (i= 1, 2, 3)$$

$$dx^i= \frac{\partial x^i}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^i}{\partial u^2} du^2$$

$$u^2= \text{sabit} \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial u^2} =0 \Rightarrow \delta x^i= \frac{\partial x^i}{\partial u^1} du^1$$

$$|dx^i|=\sqrt{g_{11}(du^1)^2+g_{22}(du^2)^2}$$

$$|\delta x^i|=\sqrt{g_{11}}\, du^1$$

$$\cos\theta= \frac{dx^i \,.\, \delta x^i}{|dx^i|\ |\delta x^i|} =\sqrt{g_{11}}\,\frac{du^1}{ds}$$

$$\sin^2\theta= 1-\cos^2\theta= 1-g_{11}(\frac{du^1}{ds})^2= \frac{ds^2-g_{11}(du^1)^2}{ds^2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2 - g_{11}(du^1)^2}{ds^2} = \frac{g_{22}(du^2)^2}{ds^2}$$

$$\sin\theta = \sqrt{g_{22}}\,\frac{du^2}{ds}$$

$$\nu:\ \nu^i = p^\alpha x^i_{,\alpha} = p^1 \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + p^2 \frac{\partial x^i}{\partial u^2}$$

$$|\nu| = 1$$

$$u^2 = \text{sabit} \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial u^2} = 0 \Rightarrow \delta x^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}\,du^1$$

$$|\delta x^i| = \sqrt{g_{11}}\,du^1$$

$$\cos\phi = \frac{\nu.\delta x^i}{|\nu|\ |\delta x^i|} = p^1\sqrt{g_{11}}$$

$$\sin^2\phi = 1-\cos^2\phi = 1-(p^1)^2 g_{11} = (p^1)^2 g_{11} + (p^2)^2 g_{22} - (p^1)^2 g_{11} = (p^2)^2 g_{22}$$

$$\sin\phi = p^2\sqrt{g_{22}}$$

Sıra, ${}_{\nu}\chi_n$' nin trigonometrik olarak ifade edilmesine geldi. Buna göre:

$$\chi_1 = \frac{d_{11}}{g_{11}}\ ,\quad \chi_2 = \frac{d_{22}}{g_{22}}$$ asal eğrilikler olmak üzere,

$$d_{11} = \chi_1 g_{11}\ ,\quad d_{22} = \chi_2 g_{22}$$ 'dir.

$${}_{\nu}\chi_{n}= p^{\delta}d_{\delta\gamma}\frac{du^{\gamma}}{ds} = p^{1}d_{11}\frac{du^{1}}{ds} + p^{2}d_{22}\frac{du^{2}}{ds}$$ idi. Bu ifadede d_{11} ve d_{22} değerleri yerlerine yazılırsa;

$${}_{\nu}\chi_{n}= p^{1}\chi_{1}g_{11}\frac{du^{1}}{ds} + p^{2}\chi_{2}g_{22}\frac{du^{2}}{ds}$$

$${}_{\nu}\chi_{n}= p^{1}\chi_{1}\sqrt{g_{11}}\,\sqrt{g_{11}}\,\frac{du^{1}}{ds} + p^{2}\chi_{2}\sqrt{g_{22}}\,\sqrt{g_{22}}\,\frac{du^{2}}{ds}$$

(2.1) $${}_{\nu}\chi_{n}= \chi_{1}\cos\phi\cos\theta + \chi_{2}\sin\phi\sin\theta$$

elde edilir.

II.2. Geodezik Burulmanın Trigonometrik Şekilde İfadesi

(1.35) eşitliğinden dolayı ${}_{\nu}\tau_{g}= e\,\varepsilon^{\beta\alpha}g_{\alpha\delta}d_{\gamma\beta}p^{\delta}\frac{du^{\gamma}}{ds}$ idi.

$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{e^{\alpha\beta}}{\sqrt{g}}$ olmak üzere, bu ifade

$${}_{\nu}\tau_{g}= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left(g_{22}d_{11}p^{2}\frac{du^{1}}{ds} - g_{11}d_{22}p^{1}\frac{du^{2}}{ds}\right)$$

şeklindedir. Buna göre;

$${}_{\nu}\tau_{g}= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left(g_{22}\,\chi_{1}g_{11}p^{2}\frac{du^{1}}{ds} - g_{11}\,\chi_{2}\,p^{1}\frac{du^{2}}{ds}\,g_{22}\right)$$

$$
{}_{\nu}\tau_g = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \sqrt{g_{11}g_{22}} \left(\chi_1 \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\, p^2 \frac{du^1}{ds} - \right.
$$

$$
\left. -\chi_2 \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\, p^1 \frac{du^2}{ds}\right)
$$

(2.2) $\quad {}_{\nu}\tau_g = \chi_1 \cos\theta\sin\phi - \chi_2\cos\phi\sin\theta$

olarak elde edilir.

Özellik II.1. Her noktasındaki doğrultusu, alanın asal doğrultusu olan S yüzeyi üzerindeki eğri, alanın eğrilik çizgisi olduğuna göre, eğrilik çizgisi boyunca alanın geodezik burulması sıfırdır, yani ${}_{\nu}\tau_g = 0$'dır.

Sonuç II.1. $\phi = \theta$ ise (2.1) ve (2.2) den

(2.3) $\quad \chi_n = \chi_1\cos^2\theta + \chi_2\sin^2\theta$

(2.4) $\quad \tau_g = (\chi_1 - \chi_2)\sin\theta\cos\theta$

elde edilir.

Sonuç II.2. χ_n, normal eğrilik; M, ortalama eğrilik; K da, Gauss eğriliği olmak üzere, ${}_{\nu}\chi_n$ ile ${}_{\nu}\tau_g$ arasında

(2.5) $\quad {}_{\nu}\chi_n^2 + {}_{\nu}\tau_g^2 = \chi_1^2\cos^2\theta + \chi_2^2\sin^2\theta = M\chi_n - K$

bağıntısı vardır.

Gerçekten:

$${}_{\nu}\chi_n^2+{}_{\nu}\tau_g^2= (\chi_1\cos\theta\cos\phi+\chi_2\sin\theta\sin\phi)^2+(\chi_1\cos\theta\sin\phi-$$

$$-\chi_2\sin\theta\cos\phi)^2$$

$${}_{\nu}\chi_n^2+{}_{\nu}\tau_g^2= \chi_1^2\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+\chi_2^2\sin^2\theta(\sin^2\phi+\cos^2\phi)$$

(1) $${}_{\nu}\chi_n^2+{}_{\nu}\tau_g^2= \chi_1^2\cos^2\theta+\chi_2^2\sin^2\theta$$

$$M\chi_n-K= \frac{g_{11}d_{22}+g_{22}d_{11}}{g_{11}g_{22}}(\chi_1\cos^2\theta+\chi_2\sin^2\theta)-\frac{d_{11}d_{22}}{g_{11}g_{22}}$$

$$M\chi_n-K= \frac{g_{11}d_{22}\chi_1\cos^2\theta+g_{11}d_{22}\chi_2\sin^2\theta+g_{22}d_{11}\chi_1\cos^2\theta+g_{22}d_{11}\chi_2\sin^2\theta-d_{11}d_{22}}{g_{11}g_{22}}$$

$$M\chi_n-K= \frac{g_{11}\chi_2g_{22}\chi_1\cos^2\theta+g_{11}\chi_2g_{22}\chi_2\sin^2\theta+g_{22}\chi_1g_{11}\chi_1\cos^2\theta+g_{22}\chi_1g_{11}\chi_2\sin^2\theta-\chi_1g_{11}\chi_2g_{22}}{g_{11}g_{22}}$$

$$M\chi_n-K= \chi_1\chi_2\cos^2\theta+\chi_2^2\sin^2\theta+\chi_1^2\cos^2\theta+\chi_1\chi_2\sin^2\theta-\chi_1\chi_2$$

$$M\chi_n-K= \chi_1\chi_2(\cos^2\theta+\sin^2\theta-1)+\chi_1^2\cos^2\theta+\chi_2^2\sin^2\theta$$

(2) $$M\chi_n-K= \chi_1^2\cos^2\theta+\chi_2^2\sin^2\theta$$

(1) ve (2) nin birleştirilmesi ile (2.5) iddiası doğrulanmış olur.

KAYNAKLAR

|1| Thorpe, J.A.; Elementary Topics in Differential Geometry, University of New York, 1978.

|2| Millman, R.S., Parker G.D.; Elements of Differential Geometry, New Jersey, 1977.

|3| Pan, T.K.; "Normal Curvature of A Vector Field", Amer. Jour. Math., 74 (1952), 955-966.

|4| Eisenhart, L.P.; An Introduction to Differential Geometry With Use of The Tensor Calculus, Princeton University Press, 1947.

|5| Amur, K.S.; "On Some Properties of The Curvatures of A Vector Field", Bull. Cal. Math. Soc., 58 (1966), 83-87.

|6| Pan, T.K.; "Torsion of A Vector Field", Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956), 449-457.