



T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

b-METRİK UZAYLARDA YAKIN LİPSCHİTZ DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT
NOKTA TEOREMLERİ

Dildar Gülsemih AKEKİN

ŞUBAT - 2025

Dildar Gülsemih AKEKİN tarafından hazırlanan "*b*-METRİK UZAYLARDA YAKIN LİPSCHİTZ DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN

İmza

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Murat OLGUN

İmza

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

İmza

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 10.02.2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Dildar Gülsemih AKEKİN

10.02.2025

ÖZET

b-METRİK UZAYLARDA YAKIN LİPSCHİTZ DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

AKEKİN, Dildar Gülsemih

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN

Şubat 2025, 32 sayfa

İlk bölüm tez çalışmasının amacı ve kaynak özetleri için ayrılmıştır. İkinci bölümde *b*-metrik uzayın tanımı, önemli bazı örnekler ile sabit nokta teori için temel teşkil eden bazı lemmalara yer verilmiştir. Ayrıca bu lemmalar kullanılarak sabit nokta teoremlerinin nasıl ispatlandığını göstermek amacı ile bir kaç sabit nokta teoremi incelenmiştir. Tezin orijinal bölümünü oluşturan üçüncü bölüm ise iki kısma ayrılmıştır. Birinci kısımda bir kapalı bağıntı yardımıyla genel bir sabit nokta teoremi elde edilmiştir. İkinci kısımda ise *b*-metrik uzayda yakın Lipschitz dönüşümü kavramı tanıtarak bu tür dönüşümler için bir sabit nokta teoremi sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, *b*-metrik uzay, kapalı bağıntı, yakın Lipschitz dönüşümü.

ABSTRACT

FIXED POINT THEOREMS FOR NEARLY LIPSCHITZIAN MAPPINGS ON b -METRIC SPACES

AKEKİN, Dildar Gülsemih

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. İshak ALTUN

February 2025, 32 pages

The first section is reserved for the purpose of the thesis and the source summaries. The second section includes the definition of the b -metric space, some important examples and some lemmas that form the basis for fixed point theory. In addition, a few fixed point theorems are examined in order to show how fixed point theorems are proved using these lemmas. The third section, which constitutes the original part of the thesis, is divided into two parts. In the first part, a general fixed point theorem is obtained by means of an implicit relation. In the second part, the concept of a nearly Lipschitzian mapping in the b -metric space is introduced and a fixed point theorem for such mappings is presented.

Key Words: Fixed point, b -metric space, implicit relation, nearly Lipschitzian mapping.

TEŞEKKÜR

İlk olarak yüksek lisans tez konumum belirlenmesinden, tezin yazım aşamasına kadar her türlü desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesi ile zaman ayırıp, yüksek lisans çalışmamı tamamlamamda rehberliği ile ışık tutan danışmanım sayın hocam Prof. Dr. İshak Altun'a, daha sonra eğitim-öğretim hayatımda desteğini esirgemeyen aileme ve tüm sevdiklerime teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
1.1 Kaynak Özetleri	2
1.2 Çalışmanın Amacı	3
2. MATERYAL VE YÖNTEM	4
2.1 Tanım ve Örnekler	4
2.2 Temel Lemmalar	6
2.3 Bazı Sabit Nokta Teoremleri	12
3. ARAŞTIRMA BULGULARI	23
3.1 Kapalı bağıntıyla elde edilen bazı sabit nokta sonuçları	23
3.2 b -metrik uzayda yakın Lipschitz dönüşümü	27
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	30
KAYNAKLAR	32

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^+	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
\mathbb{N}	Doğal Sayılar Kümesi
(X, d)	b -Metrik uzay
$B(x_0, r)$	x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\eta(T^n)$	T dönüşümünün yakın Lipschitz sabiti
$L^p[0, 1]$	$[0, 1]$ den \mathbb{R} ye tanımlı mutlak değerlerinin p yinci kuvveti integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı
$\ell^p(\mathbb{R})$	mutlak değerlerinin p yinci kuvveti yakınsak seri oluşturan reel terimli diziler sınıfı

1 . GİRİŞ

(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda

Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0 \leq \lambda < 1$ sabiti varsa T ye **büzülme** dönüşümü,

her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda [d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$ sabiti varsa T ye **Kannan** büzülme dönüşümü,

her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda [d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$ sabiti varsa T ye **Chatterjea büzülme** dönüşümü,

her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2} [d(x, Ty) + d(y, Tx)] \right\}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0 \leq \lambda < 1$ sabiti varsa T ye **genelleştirilmiş büzülme dönüşümü** veya **Ciric büzülme** dönüşümü denir.

Tam metrik uzayda yukarıda verilen eşitsizliklerden birini sağlayan dönüşümlerin sabit noktasının var ve tek olduğu hatta her Picard iterasyon dizisinin ($x_0 \in X$ olmak üzere $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisi) bu sabit noktaya yakınsadığı bilinmektedir. Metrik uzayda elde edilen bu sonuçlar b -metrik uzaylara da genişletilmiştir.

Diğer taraftan metrik uzayda yakın Lipschitz ve yakın büzülme eşitsizlikleri de yukarıda bahsedilen eşitsizliklerden bağımsız olarak sabit nokta sonuçları verebilmektedir. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\{a_n\}$ de negatif olmayan reel sayı-

ların sıfıra yakınsayan bir dizisi olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq k_n [d(x, y) + a_n]$$

eşitsizliğini sağlayan $k_n \geq 0$ sabiti varsa T dönüşümüne yakın Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan k_n sayılarının infimumu $\eta(T^n)$ ile gösterilir ve yakın Lipschitz sabiti olarak adlandırılır. O zaman

$$\eta(T^n) = \sup \left\{ \frac{d(T^n x, T^n y)}{d(x, y) + a_n} : x, y \in X, x \neq y \right\}$$

olur. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta(T^n) < 1$ ise T ye yakın büzülme dönüşümü, $\eta(T^n) = 1$ ise T ye yakın genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Yakın Lipschitz dönüşümleri ile ilgili temel sabit nokta teoremi şu şekildedir: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir yakın Lipschitz dönüşümü olsun. Bu durumda eğer

$$\limsup \sqrt[n]{\eta(T^n)} < 1$$

ise T dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her Picard iterasyonu bu sabit noktaya yakınsar. Ayrıca her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için, $M = \sup a_n$ olmak üzere

$$d(T^n x, z) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \eta(T^i) [d(x, Tx) + M]$$

eşitsizliği sağlanır.

1.1. Kaynak Özetleri

b -metrik uzayın tanımı ve çeşitli örnekleri için Czerwik'in çalışması incelenmiştir [4]. Ardından b -metrik uzayın topolojik yapısı, bu uzayda bir dizinin yakınsaklığı ve Cauchy olma özelliği ve bu uzayın tamlığı ile alakalı temel bilgiler için Aghajani, Abbas ve Roshan [1], Boriceanu, Bota ve Petrusel [2] ve Bota, Guran ve Petrusel [3] başta olmak üzere çeşitli çalışmalar dikkate alınmıştır. b -metrik uzayda çeşitli eşitsizlikler ile bir dizinin bu uzayda Cauchy dizisi olmasını garanti edecek lemmaların ispatı için Miclescu ve Mihail'in [5, 6] da verilen iki adet çalışmaları ile Suzuki'nin [9] çalışması incelenmiştir. Metrik uzayda yakın Lipschitz dönüşümü kavramı ve ilgili sabit nokta

teoremi için Sahu'nun [8] çalışması dikkate alınmıştır. Son olarak b -metrik uzayda sabit nokta teoremlerinin ispat tekniğini detaylı olarak incelemek için yukarıda bahsi geçen çalışmaların yanı sıra Mitrovic'in [7] çalışması da incelenmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında b -metrik uzayda yeni sabit nokta teoremlerinin elde edilmesi amaçlanmıştır. Bunun için bir kapalı bağıntı yoluyla bir genel sabit nokta teoreminin elde edilmesi bir de yakın Lipschitz dönüşümü kavramını b -metrik uzaylarda tanımlayarak bu tür dönüşümleri için yeni sabit nokta teoremlerinin elde edilmesi amaçlanmaktadır.



2 . MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Tanım ve Örnekler

Bu bölümde öncelikle b -metrik uzay tanımını verip bununla ilgili temel özellikleri inceleyeceğiz.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir küme, $s \geq 1$ bir reel sayı ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq s [d(x, y) + d(y, z)]$

özellikleri sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir b -metrik denir. Bu durumda (X, d) ikilisine de bir b -metrik uzay denir.

Örnek 2.1. Her metrik uzayın $s = 1$ olmak üzere bir b -metrik uzay olduğu açıktır.

Örnek 2.2. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $p > 1$ için $d(x, y) = |x - y|^p$ olsun. O zaman (X, d) ikilisi $s = 2^{p-1}$ olmak üzere bir b -metrik uzaydır. Gerçekten b -metriğin ilk iki koşulunun sağlandığı açıktır. Diğer taraftan $t > 0$ için $f(t) = t^p$ fonksiyonu konveks olduğundan her $x, y, z \in X$ için

$$|x - y|^p \leq 2^{p-1} [|x - z|^p + |z - y|^p]$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece b -metriğin üçüncü koşul da sağlanır.

Örnek 2.3. $0 < p < 1$ olmak üzere $[0, 1]$ üzerinde tanımlı reel değerli ve mutlak değerlerinin p yinci kuvveti integrallenebilen fonksiyonların kümesi $L^p [0, 1]$ olsun. Yani

$$L^p [0, 1] = \left\{ f \mid f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } \int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty \right\}$$

olsun. O zaman $f, g \in L^p [0, 1]$ için

$$d(f, g) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlı d fonksiyonu $s = 2^{\frac{1}{p}}$ olmak üzere $L^p [0, 1]$ üzerinde bir b -metriktir.

Örnek 2.4. $0 < p < 1$ olmak üzere

$$\ell^p(\mathbb{R}) = \left\{ \{x_n\} \mid \{x_n\} \text{ reel terimli dizi ve } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

olsun. O zaman $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \ell^p(\mathbb{R})$ için

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlı d fonksiyonu $s = 2^{\frac{1}{p}}$ olmak üzere $\ell^p(\mathbb{R})$ üzerinde bir b -metriktir.

Tanım 2.2. (X, d) bir b -metrik uzay, $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun.

1. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n(\varepsilon)$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.
2. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n(\varepsilon)$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine x noktasına yakınsıyor denir. Bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olarak gösterilir.
3. Eğer (X, d) deki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) ye tam b -metrik uzay denir.

Tanım 2.3. (X, d) bir b -metrik uzayı ve $Y \subseteq X$ olsun.

1. Eğer Y deki her dizinin Y nin bir elemanına yakınsayan bir alt dizisi varsa Y ye X in kompakt bir alt kümesi denir.
2. Y içinde yakınsak her dizinin limiti Y kümesine aitse Y kümesine kapalı küme denir.

2.2. Temel Lemmalar

Lemma 2.1. Bir b -metrik uzayda yakınsak her dizinin limiti tekdir. Ayrıca yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

Not 2.1. Genel olarak bir b -metriği sürekli olmayabilir. Ayrıca b -metrik uzayda

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

biçiminde tanımlı açık yuvarın açık bir küme olması gerekmez. Yine kapalı yuvarın da kapalı bir küme olması gerekmez.

Örnek 2.5. $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ olmak üzere $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$d(m, n) = \begin{cases} 0 & , m = n \\ \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| & , m, n \text{ den biri çift, diğeri tek veya } \infty \\ 5 & , m, n \text{ den biri tek, diğeri tek veya } \infty \\ 2 & , \text{ diğ}er \text{ durumlarda} \end{cases} .$$

Böylece tüm olası durumlar dikkate alındığında her $m, n, p \in X$ için

$$d(m, n) \leq \frac{5}{2}(d(m, p) + d(p, n))$$

elde edilir. Yani $s = \frac{5}{2}$ olmak üzere (X, d) bir b -metrik uzaydır. Şimdi $x_n = 2n$ dizisini göz önüne alalım. O zaman

$$d(x_n, \infty) = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$$

olduğundan $x_n \rightarrow \infty$ olur. Ancak

$$d(x_n, 1) = 2 \nrightarrow 5 = d(\infty, 1)$$

olduğundan d fonksiyonu sürekli değildir.

Lemma 2.2. (X, d) bir b -metrik uzay, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ bu uzayda sırası ile x, y noktalarına yakınsayan iki dizi olsun. O zaman

$$\frac{1}{s^2}d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq s^2d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır. Özel olarak $x = y$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$ olur. Üstelik $z \in X$ için

$$\frac{1}{s}d(x, z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq sd(x, z)$$

eşitsizliği de sağlanır.

İspat. b -metriğin üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$d(x, y) \leq sd(x, x_n) + s^2d(x_n, y_n) + s^2d(y_n, y)$$

ve

$$d(x_n, y_n) \leq sd(x_n, x) + s^2d(x, y) + s^2d(y, y_n)$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülebilir. Burada ilk eşitsizlikten $n \rightarrow \infty$ için alt limit ikinci eşitsizlikten üst limit alınırsa sırası ile

$$\frac{1}{s^2}d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq s^2d(x, y)$$

eşitsizlikleri bulunur ki bunlar birlikte dikkate alınarak istenen eşitsizlikler bulunur. \square

Lemma 2.3. (X, d) bir b -metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ ve her $k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1, 2^n\}$ için

$$d(x_0, x_k) \leq s^n \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) \quad (2.2.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İspat için tümevarım metodunu kullanacağız. $k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1, 2^n\}$ için (2.2.1) eşitsizliğini $P(n)$ olarak tanımlayalım. O zaman $P(0)$ ve hatta $P(1)$ in doğru olduğu açıktır. Şimdi $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ önermesinin doğru olduğunu gösterelim. Öncelikle $P(n)$ nedeniyle $k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1, 2^n\}$ için

$$d(x_0, x_k) \leq s^n \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1})$$

eşitsizliği doğrudur. Diğer taraftan her $k \in \{2^n + 1, 2^n + 2, \dots, 2^{n+1} - 1, 2^{n+1}\}$ için yine $P(n)$ den

$$\begin{aligned} d(x_0, x_k) &\leq s(d(x_0, x_{2^n}) + d(x_{2^n}, x_k)) \\ &\leq s \left(s^n \sum_{i=0}^{2^n-1} d(x_i, x_{i+1}) + s^n \sum_{i=2^n}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) \right) \\ &= s^{n+1} \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu istenen önermenin doğruluğunu gösterir. \square

Lemma 2.4. (X, d) bir b -metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \gamma d(x_n, x_{n-1}) \quad (2.2.2)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \in [0, 1)$ sabitinin var olduğunu kabul edelim. O zaman $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

İspat. Öncelikle (2.2.2) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \gamma^n d(x_1, x_0)$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi her $m, k \in \mathbb{N}$ ve $p = \lfloor \log_2 k \rfloor$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_{m+k}) &\leq sd(x_{m+1}, x_{m+2}) + sd(x_{m+2}, x_{m+k}) \\ &\leq sd(x_{m+1}, x_{m+2}) + s^2 d(x_{m+2}, x_{m+2^2}) + s^2 d(x_{m+2^2}, x_{m+k}) \\ &\leq sd(x_{m+1}, x_{m+2}) + s^2 d(x_{m+2}, x_{m+2^2}) \\ &\quad + s^3 d(x_{m+2^2}, x_{m+2^3}) + s^3 d(x_{m+2^3}, x_{m+k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \leq \sum_{n=1}^p s^n d(x_{m+2^{n-1}}, x_{m+2^n}) + s^{p+1} d(x_{m+2^p}, x_{m+k}) \end{aligned}$$

elde edilebilir. O zaman

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_{m+k}) & \leq \sum_{n=1}^p s^{2n} \left(\sum_{i=m}^{m+2^{n-1}-1} d(x_{2^{n-1}+i}, x_{2^{n-1}+i+1}) \right) \\ & \quad + s^{2(p+1)} \left(\sum_{i=m}^{m+k-2^p-1} d(x_{2^p+i}, x_{2^p+i+1}) \right) \\ & \leq \sum_{n=1}^{p+1} s^{2n} \left(\sum_{i=m}^{m+2^{n-1}-1} d(x_{2^{n-1}+i}, x_{2^{n-1}+i+1}) \right) \\ & \leq d(x_0, x_1) \left(\sum_{n=1}^{p+1} s^{2n} \left(\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \gamma^{m+2^{n-1}+i} \right) \right) \\ & \leq \frac{d(x_0, x_1) \gamma^m}{1-\gamma} \sum_{n=1}^{p+1} s^{2n} \gamma^{2^{n-1}} \\ & = \gamma^m \frac{d(x_0, x_1)}{1-\gamma} \sum_{n=1}^{p+1} \gamma^{2n \log_\gamma s + 2^{n-1}} \end{aligned}$$

olur. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n \log_\gamma s + 2^{n-1} - n) = \infty$ olduğundan $M > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda

$$2n \log_\gamma s + 2^{n-1} - n \geq M$$

eşitsizliğini sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $n \geq n_0$ için

$$\gamma^{2n \log_\gamma s + 2^{n-1}} \leq \gamma^M \gamma^n$$

olur. Bu ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{2n \log_\gamma s + 2^{n-1}}$$

serisinin yakınsak olduğunu gösterir. Bu serinin toplamına S dersek, $m, k \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{m+1}, x_{m+k}) \leq \gamma^m \frac{d(x_0, x_1) S}{1-\gamma}$$

eşitsizliği bulunur ki bu $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. \square

Lemma 2.5. (X, d) bir b -metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} d(x_n, x_{n+1})$$

serisi yakınsak olacak biçimde bir $\gamma > \log_2 s$ sabiti varsa o zaman $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

İspat. Öncelikle $\alpha = \gamma \log_s 2$ diyelim. O zaman $\gamma > \log_2 s$ olduğundan $\alpha > 1$ dir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)(n+2) - \alpha n^2] = -\infty$$

olacağından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s^{[(n+1)(n+2) - \alpha n^2]} = 0$$

olur. Bu ise $\left\{ s^{[(n+1)(n+2) - \alpha n^2]} \right\}$ reel terimli dizisinin veya buna denk olarak $\left\{ \frac{s^{(n+1)(n+2)}}{2^{m^2}} \right\}$ reel terimli dizisinin sınırlı olduğunu gösterir. Diğer taraftan

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} [(x+1)(x+2) - \alpha x^2] = 2 + \frac{9}{4(\alpha-1)}$$

olduğundan

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{s^{(n+1)(n+2)}}{2^{m^2}} \leq s^{2 + \frac{9}{4(\alpha-1)}}$$

olur. Şimdi $s^{2 + \frac{9}{4(\alpha-1)}} = M$ dersek her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq M \sum_{i=n}^{\infty} i^{\gamma} d(x_i, x_{i+1}) \quad (2.2.3)$$

olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten, $l = \left\lfloor \sqrt{\log_2(m+1)} \right\rfloor$ dersek $2^{l^2} - 1 \leq m \leq 2^{(l+1)^2} - 1$ olacağından

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq s(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+m})) \\ &\leq s d(x_{n+2^{0^2}-1}, x_{n+2^{1^2}-1}) \\ &\quad + s^2 d(x_{n+2^{1^2}-1}, x_{n+2^{2^2}-1}) + s^2 d(x_{n+2^{2^2}-1}, x_{n+m}) \\ &\quad \vdots \\ &\leq \sum_{i=0}^{l-1} s^{i+1} d(x_{n+2^{i^2}-1}, x_{n+2^{(i+1)^2}-1}) + s^l d(x_{n+2^{l^2}-1}, x_{n+m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=0}^{l-1} s^{i+1} s^{(i+1)^2} \left(\sum_{j=2^{i^2}}^{2^{(i+1)^2-1}} d(x_{n+j-1}, x_{n+j}) \right) \\
&\quad + s^{(l+1)} s^{(l+1)^2} \left(\sum_{j=2^{l^2}}^{2^{(l+1)^2-1}} d(x_{n+j-1}, x_{n+j}) \right) \\
&= \sum_{i=0}^l s^{i+1} s^{(i+1)^2} \left(\sum_{j=2^{i^2}}^{2^{(i+1)^2-1}} d(x_{n+j-1}, x_{n+j}) \right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^{(i+1)(i+2)}}{(2^{i^2})^\gamma} \left(\sum_{j=2^{i^2-1}}^{2^{(i+1)^2-1}} (j+1)^\gamma d(x_{n+j-1}, x_{n+j}) \right) \\
&\leq M \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^\gamma d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \\
&\leq M \sum_{i=0}^{\infty} (n+i)^\gamma d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \\
&= M \sum_{i=n}^{\infty} i^\gamma d(x_i, x_{i+1})
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu (2.2.3) eşitsizliğin doğru olduğunu gösterir. O zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma d(x_n, x_{n+1})$$

serisi yakınsak olduğundan (2.2.3) eşitsizliği dikkate alınarak $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. \square

Lemma 2.6. (X, d) bir b -metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n d(x_n, x_{n+1})$$

serisi yakınsak olacak biçimde bir $\alpha > 1$ sabiti varsa o zaman $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

İspat. $\alpha > 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n d(x_n, x_{n+1})$$

serisinin yakınsak olduğunu kabul edelim. O zaman herhangi $\gamma > \log_2 s$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\gamma d(x_n, x_{n+1})}{\alpha^n d(x_n, x_{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\gamma}{\alpha^n} = 0$$

olur. Böylece karşılaştırma testinin limit formu gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} d(x_n, x_{n+1})$$

serisi yakınsaktır. O zaman yukarıdaki lemmadan $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. \square

Lemma 2.7. (X, d) bir b -metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

olacak biçimde bir dizi olsun. Bu durumda eğer $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi değilse o zaman aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ ve $\{m(k)\}, \{n(k)\}$ pozitif tam sayı dizileri vardır:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq s\varepsilon, \\ \frac{\varepsilon}{s} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq s^2\varepsilon \\ \frac{\varepsilon}{s} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq s^2\varepsilon \\ \frac{\varepsilon}{s^2} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq s^3\varepsilon. \end{aligned}$$

2.3. Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bilindiği gibi metrik sabit nokta teoreminin en temel teoremi Banach sabit nokta teoremidir. Bu teorem bir tam metrik uzaydan kendisine tanımlı her büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktasının var olduğunu ve hatta her Picard dizisinin bu sabit noktaya yakınsadığını söylemektedir. Bu teoremde büzülme sabitinin $[0, 1)$ aralığında olması gerektiği iyi bilinmektedir. Bu teoremin b -metrik uzaydaki karşılığı için aşağıdaki teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 2.1. (X, d) bir tam b -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $0 \leq \lambda < \frac{1}{s}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \tag{2.3.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve üstelik her Picard dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. O zaman (2.3.1) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \quad (2.3.2)$$

olduğu elde edilebilir. Böylece $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ için üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq s[d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n)] \\ &\leq sd(x_m, x_{m+1}) + s^2[d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_n)] \\ &\quad \vdots \\ &\leq sd(x_m, x_{m+1}) + s^2(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots \\ &\quad + s^{n-m-1}[d(x_{n-2}, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n)] \\ &\leq sd(x_m, x_{m+1}) + s^2(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots \\ &\quad + s^{n-m-1}d(x_{n-2}, x_{n-1}) + s^{n-m}d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (2.3.2) eşitsizliği ve $\lambda s < 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq [s\lambda^m, s^2\lambda^{m+1} + \cdots + s^{n-m}\lambda^{n-1}]d(x_0, x_1) \\ &\leq s\lambda^m[1 + s\lambda + (s\lambda)^2 + \cdots + (s\lambda)^{n-m-1}]d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{s\lambda^m}{1 - s\lambda}d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. (X, d) bir tam b -metrik uzay olduğundan $\lim x_n = z$ yani $\lim d(x_n, z) = 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Son olarak

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq s[d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz)] \\ &= s[d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz)] \\ &\leq s[d(z, x_{n+1}) + \lambda d(x_n, z)] \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(z, Tz) = 0$ yani $z = Tz$ elde edilir. Sabit noktanın tek olduğu (2.3.1) eşitsizliğinden görülebilir. \square

Dikkat edilirse Teorem 2.1 de büzülme katsayısı olan λ nın $\frac{1}{s}$ den küçük olması gerektiği şeklinde kısıtlayıcı bir durum kabul edilmiştir. Ancak Lemma 2.4 dikkate alınarak bu kısıtlama zayıflatılabilmektedir. Böylece aşağıdaki teorem elde edilmektedir.

Teorem 2.2. (X, d) bir tam b -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için (2.3.1) eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve üstelik her Picard dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat. Teorem 2.1 in ispatında olduğu gibi $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisinin göz önüne alalım. O zaman (2.3.1) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n)$$

olduğu elde edilebilir. Lemma 2.4 den $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. (X, d) bir tam b -metrik uzay olduğundan $\lim x_n = z$ yani $\lim d(x_n, z) = 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Son olarak

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq s[d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz)] \\ &= s[d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz)] \\ &\leq s[d(z, x_{n+1}) + \lambda d(x_n, z)] \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(z, Tz) = 0$ yani $z = Tz$ elde edilir. Sabit noktanın tek olduğu (2.3.1) eşitsizliğinden görülebilir. \square

Örnek 2.6. $X = \mathbb{R}$ ve $d(x, y) = (x - y)^2$ olsun. O zaman $s = 2$ olmak üzere (X, d) bir b -metrik uzaydır. $T : X \rightarrow X$ dönüşümü $Tx = \sqrt{\frac{2}{3}}x$ olarak tanımlansın. Bu durumda (2.3.1) eşitsizliğini sağlayan λ sabitlerinin en küçüğü $\lambda = \frac{2}{3}$ olur. Bu ise Teorem 2.1 in bu örneğe uygulanamayacağını göstermektedir.

Aşağıdaki teorem ise Kannan sabit nokta teoremini b -metrik uzaydaki karşılığı olarak dikkate alınabilir.

Teorem 2.3. (X, d) bir tam b -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda [d(x, Tx) + d(y, Ty)] \quad (2.3.3)$$

eşitsizliğin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki üç koşuldaki biri sağlanıyorsa T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve üstelik her Picard dizisi bu sabit noktaya yakınsar:

(i) T dönüşümü süreklidir,

(ii) $\lambda s < 1$

(iii) $s < 2$.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. O zaman (2.3.3) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda [d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n-1}, x_n)]$$

veya

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_{n-1}, x_n)$$

olduğu elde edilebilir. $\frac{\lambda}{1-\lambda} < 1$ olduğundan Lemma 2.4 den $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülebilir. (X, d) bir tam b -metrik uzay olduğundan $\lim x_n = z$ yani $\lim d(x_n, z) = 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq s[d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz)] \\ &= s[d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz)] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Şimdi eğer (i) hipotezi sağlanırsa $d(Tx_n, Tz) \rightarrow 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınarak $d(z, Tz) = 0$ yani $z = Tz$ elde edilir.

Şimdi de (ii) sağlansın. O zaman

$$d(z, Tz) \leq s[d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz)]$$

$$\begin{aligned}
&= s[d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz)] \\
&\leq s[d(z, x_{n+1}) + \lambda [d(x_n, Tx_n) + d(z, Tz)]] \\
&= sd(z, x_{n+1}) + s\lambda d(x_n, x_{n+1}) + s\lambda d(z, Tz)
\end{aligned}$$

ve böylece

$$(1 - s\lambda)d(z, Tz) \leq sd(z, x_{n+1}) + s\lambda d(x_n, x_{n+1})$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(z, Tz) = 0$ bulunur.

Son olarak (iii) hipotezinin sağlanması halinde (ii) nin varlığı açık olduğundan bu durumda da sabit nokta mevcuttur.

Sabit noktanın tek olduğu (2.3.3) eşitsizliğinden görülebilir. \square

Reich sabit nokta teoreminin b -metrik versiyonu ise aşağıdadır.

Teorem 2.4. (X, d) bir tam b -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca negatif olmayan α, β, γ sabitleri $\alpha + \beta + \gamma < 1$ eşitsizliğini sağlamak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty) \quad (2.3.4)$$

eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki üç koşuldaki biri sağlanıyorsa T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve üstelik her Picard dizisi bu sabit noktaya yakınsar:

(i) T dönüşümü süreklidir,

(ii) $\beta s < 1$

(iii) $\gamma s < 1$.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. O zaman (2.3.4) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta d(x_n, x_{n+1}) + \gamma d(x_{n-1}, x_n)$$

veya

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \gamma}{1 - \beta} d(x_{n-1}, x_n)$$

olduğu elde edilebilir. $\frac{\alpha+\gamma}{1-\beta} < 1$ olduğundan Lemma 2.4 den $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülebilir. (X, d) bir tam b -metrik uzay olduğundan $\lim x_n = z$ yani $\lim d(x_n, z) = 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq s[d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz)] \\ &= s[d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz)] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Şimdi eğer (i) hipotezi sağlanırsa $d(Tx_n, Tz) \rightarrow 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınarak $d(z, Tz) = 0$ yani $z = Tz$ elde edilir.

Şimdi de (ii) sağlansın. O zaman

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq s[d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz)] \\ &= s[d(z, x_{n+1}) + d(Tz, Tx_n)] \\ &\leq s[d(z, x_{n+1}) + \alpha d(z, x_n) + \beta d(z, Tz) + \gamma d(x_n, x_{n+1})] \end{aligned}$$

ve böylece

$$(1 - s\beta)d(z, Tz) \leq s[d(z, x_{n+1}) + \alpha d(z, x_n) + \gamma d(x_n, x_{n+1})]$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(z, Tz) = 0$ bulunur.

Son olarak (iii) hipotezinin sağlanması halinde

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq s[d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz)] \\ &= s[d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz)] \\ &\leq s[d(z, x_{n+1}) + \alpha d(z, x_n) + \beta d(x_n, x_{n+1}) + \gamma d(z, Tz)] \end{aligned}$$

ve böylece

$$(1 - s\gamma)d(z, Tz) \leq s[d(z, x_{n+1}) + \alpha d(z, x_n) + \beta d(x_n, x_{n+1})]$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(z, Tz) = 0$ bulunur.

Sabit noktanın tek olduğu (2.3.4) eşitsizliğinden görülebilir. □

Aşağıdaki teorem benzer ispat metodu kullanılarak ispatlanabilir.

Teorem 2.5. (X, d) bir tam b -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca $q \in [0, \frac{1}{s})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq q \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2}(d(x, Ty) + d(y, Tx)) \right\} \quad (2.3.5)$$

eşitsizliğin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda eğer T dönüşümü sürekli veya $s < 2$ ise T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve üstelik her Picard dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. O zaman (2.3.5) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq q \max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_n, Tx_n), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})) \right\} \\ &= q \max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2}d(x_{n-1}, x_{n+1}) \right\} \\ &\leq q \max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{s}{2}[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi en az bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{s}{2}[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \right\} = d(x_n, x_{n+1})$$

olması durumunda son eşitsizlik bir çelişki teşkil eder. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q \max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), \frac{s}{2}[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \right\} \quad (2.3.6)$$

olmalıdır. Şimdi eğer

$$\max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), \frac{s}{2}[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \right\} = d(x_{n-1}, x_n)$$

ise (2.3.6) dan

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq qd(x_{n-1}, x_n) \quad (2.3.7)$$

olur. Eğer

$$\max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), \frac{s}{2} [d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \right\} = \frac{s}{2} [d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]$$

ise yine (2.3.6) dan

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{qs}{2} [d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]$$

veya

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{qs}{2 - qs} d(x_{n-1}, x_n) \quad (2.3.8)$$

elde edilir. Böylece her iki durum dikkate alınır (2.3.7) ve (2.3.8) den

$$\gamma = \max \left\{ q, \frac{qs}{2 - qs} \right\} < 1$$

denirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \gamma d(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilir. $\gamma < 1$ olduğundan Lemma 2.4 den $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülebilir. (X, d) bir tam b -metrik uzay olduğundan $\lim x_n = z$ yani $\lim d(x_n, z) = 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq s[d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz)] \\ &= s[d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz)] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eğer T sürekli ise yukarıdaki eşitsizlikten $z = Tz$ elde edilir.

Şimdi $s < 2$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq s[d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz)] \\ &= s[d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz)] \\ &\leq sd(z, x_{n+1}) \\ &\quad + sq \max \left\{ d(x_n, z), d(x_n, Tx_n), d(z, Tz), \frac{1}{2}(d(x_n, Tz) + d(z, Tx_n)) \right\} \\ &= sd(z, x_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +sq \max \left\{ d(x_n, z), d(x_n, x_{n+1}), d(z, Tz), \frac{1}{2}(d(x_n, Tz) + d(z, x_{n+1})) \right\} \\
\leq & sd(z, x_{n+1}) \\
& +sq \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_n, z), d(x_n, x_{n+1}), d(z, Tz), \\ \frac{1}{2}(s[d(x_n, z) + d(z, Tz)] + d(z, x_{n+1})) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(z, Tz) \leq \max \left\{ sq, \frac{s^2q}{2} \right\} d(z, Tz)$$

elde edilir ki bu $d(z, Tz) = 0$ olması ile mümkündür.

Sabit noktanın tek olduğu (2.3.5) eşitsizliğinden görülebilir. \square

Caristi sabit nokta teoreminin b -metrik versiyonu için aşağıdaki teorem dikkate alınabilir.

Teorem 2.6. (X, d) bir tam b -metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\phi : X \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon ve $\alpha > 1$ olmak üzere aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(i) T dönüşümü sürekli olsun,

(ii) her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq \phi(x) - \alpha\phi(Tx)$$

eşitsizliği sağlansın.

Bu durumda T dönüşümünün en az bir sabit noktası vardır ve üstelik her Picard dizisi bir sabit noktaya yakınsar.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. (ii) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \phi(x_n) - \alpha\phi(x_{n+1})$$

yazılabilir. Böylece

$$\alpha^n d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \phi(x_n) - \alpha^{n+1} \phi(x_{n+1})$$

olduğundan bu bize $\{\alpha^n \phi(x_n)\}$ reel terimli dizinin azalan olduğunu gösterir. Aynı zamanda bu dizi alttan sınırlı olduğundan yakınsaktır. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha^n \phi(x_n) - \alpha^{n+1} \phi(x_{n+1})]$$

teleskopik serisi yakınsak olacağından Karşılaştırma kriteri gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n d(x_n, x_{n+1})$$

serisi de yakınsaktır. O zaman Lemma 2.6 dan $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) bir tam b -metrik uzay olduğundan $\lim x_n = z$ yani $\lim d(x_n, z) = 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Böylece T nin sürekliliğinden $d(x_{n+1}, Tz) = d(Tx_n, Tz) \rightarrow 0$ elde edilir. Yani $\{x_n\}$ dizisi hem z hem de Tz ye yakınsak olduğundan $z = Tz$ elde edilir. \square

Teorem 2.7. (X, d) bir tam b -metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon ve $\gamma > \log_2 s$ olmak üzere aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(i) her $t > 0$ için $\phi(t) < t$,

(ii) her $t > 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma \phi^n(t)$$

serisi yakınsak,

(iii) her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y))$$

Bu durumda T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve üstelik her Picard dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. (iii) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n^\gamma d(x_n, x_{n+1}) \leq n^\gamma \phi^n(d(x_0, x_1))$$

olduğu elde edilebilir. (ii) ve Karşılaştırma kriterinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} d(x_n, x_{n+1})$$

serisi yakınsaktır. Böylece Lemma 2.5 den $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) bir tam b -metrik uzay olduğundan $\lim x_n = z$ yani $\lim d(x_n, z) = 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Diğer taraftan (i) ve (iii) nedeniyle T süreklidir. Böylece $d(x_{n+1}, Tz) = d(Tx_n, Tz) \rightarrow 0$ elde edilir. Yani $\{x_n\}$ dizisi hem z hem de Tz ye yakınsak olduğundan $z = Tz$ elde edilir. Sabit noktanın tekliği yine (i) ve (iii) den görülebilir. \square



3 . ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Kapalı bağıntıyla elde edilen bazı sabit nokta sonuçları

Bu bölümde, önce bazı özelliklere sahip bir kapalı bağıntı ele alacağız ve birkaç örnek vereceğiz. Ardından, bu bağıntıdan yola çıkarak b -metrik uzaylarda bir genel sabit nokta teoremi sunacağız.

Aşağıdaki özellikleri sağlayan $F : \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bütün fonksiyonların sınıfını \mathcal{F} ile gösterelim:

(F1) $F(t_1, \dots, t_6)$ fonksiyonu t_5 ve t_6 değişkenlerine göre artmayan olsun.

(F2) $u > 0$ için

$$F(u, v, v, u, u + v, 0) \leq 0$$

veya

$$F(u, v, u, v, 0, u + v) \leq 0$$

olması $u \leq hv$ olacak biçimde bir $h \in [0, 1)$ sabitinin var olmasını gerektirsin.

(F3) $u > 0$ için $F(u, u, 0, 0, u, u) > 0$ olsun.

Bunun yanı sıra $s \geq 1$ için \mathcal{F}_s sınıfı da \mathcal{F} sınıfına ait sürekli ve aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyonların sınıfı olsun:

(Fs1) $F(t_1, \dots, t_6)$ fonksiyonu t_1 değişkenine göre azalmayan olsun.

(Fs2) $u > 0$ için $F(\frac{u}{s}, 0, 0, u, u, 0) > 0$ veya $F(\frac{u}{s}, 0, u, 0, 0, u) > 0$ olsun.

Buna göre $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}$ olduğu açıktır. Şimdi bu sınıflara ait bir kaç fonksiyon örneği verelim.

Örnek 3.1. $\lambda \in [0, 1)$ olmak üzere $F(t_1, \dots, t_6) = t_1 - \lambda t_2$ olsun. O zaman her $s \geq 1$ için $F \in \mathcal{F}_s$ dir.

Örnek 3.2. α, β, γ negatif olmayan reel sayılar ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere $F(t_1, \dots, t_6) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - \gamma t_4$ olsun. O zaman $F \in \mathcal{F}$ dir. Aynı zamanda eğer $s\beta < 1$ veya $s\gamma < 1$ ise $F \in \mathcal{F}_s$ dir.

Örnek 3.3. $q \in [0, 1)$ olmak üzere $F(t_1, \dots, t_6) = t_1 - q \max \{t_2, t_3, t_4, \frac{t_5+t_6}{2}\}$ olsun. O zaman $F \in \mathcal{F}$ dir. Aynı zamanda eğer $qs < 1$ ise $F \in \mathcal{F}_s$ dir.

Örnek 3.4. $c \in [0, 1)$ olmak üzere $F(t_1, \dots, t_6) = t_1 - c \{t_2 + |t_3 - t_4|\}$ olsun. O zaman $F \in \mathcal{F}$ dir. Aynı zamanda eğer $cs < 1$ ise $F \in \mathcal{F}_s$ dir.

Örnek 3.5. α, β negatif olmayan reel sayılar ve $\alpha + \beta < 1$ olmak üzere $F(t_1, \dots, t_6) = t_1 - \alpha \max \{t_2, t_3, t_4\} - \beta \frac{t_5+t_6}{2}$ olsun. O zaman $F \in \mathcal{F}$ dir. Aynı zamanda eğer $(2\alpha + \beta)s < 2$ ise $F \in \mathcal{F}_s$ dir.

Teorem 3.1. (X, d) bir tam b -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $F \in \mathcal{F}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$F \left(d(Tx, Ty), d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty)}{s}, \frac{d(y, Tx)}{s} \right) \leq 0 \quad (3.1.1)$$

eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. O zaman eğer T sürekli ise bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi z noktasına yakınsar.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. $n \geq 0$ için $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Kısıklık olması açısından $n \geq 0$ için $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ gösterimini kullanalım. Eğer $d_{n_0} = 0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa x_{n_0} noktası T nin bir sabit noktası olur. Ayrıca bu durumda $\{x_n\}$ dizisi n_0 dan sonra tamamen x_{n_0} terimlerine sahip olacağından x_{n_0} noktasına yakınsar. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $d_n > 0$ olsun. O zaman (3.1.1) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F \left(d(Tx_n, Tx_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n+1}, Tx_{n+1}), \frac{1}{s}d(x_n, Tx_{n+1}), \frac{1}{s}d(x_{n+1}, Tx_n) \right) \leq 0$$

elde edilir ki buradan da her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F \left(d(x_{n+1}, x_{n+2}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}), \frac{d(x_n, x_{n+2})}{s}, 0 \right) \leq 0$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlik ve (F1) koşulundan

$$F(d_{n+1}, d_n, d_n, d_{n+1}, d_n + d_{n+1}, 0) \leq 0$$

elde edilir. Şimdi de (F2) dikkate alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d_{n+1} \leq h d_n$$

veya denk olarak

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq h d(x_n, x_{n+1})$$

olacak biçimde bir $h \in [0, 1)$ sabiti vardır. Böylece Lemma 2.4 dikkate alınırsa $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. (X, d) tam b -metrik uzay olduğundan $\lim x_n = z$ yani $\lim d(x_n, z) = 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. T dönüşümü sürekli olduğundan $\lim d(x_{n+1}, Tz) = \lim d(Tx_n, Tz) = 0$ olur ki $\{x_n\}$ dizisinin limitinin tek olması gerektiğinden $z = Tz$ elde edilir. Şimdi de w noktası da T nin bir başka sabit noktası ise $d(z, w) > 0$ olup (3.1.1) eşitsizliğinden

$$F\left(d(Tz, Tw), d(z, w), d(z, Tz), d(w, Tw), \frac{d(z, Tw)}{s}, \frac{d(w, Tz)}{s}\right) \leq 0$$

veya denk olarak

$$F\left(d(z, w), d(z, w), 0, 0, \frac{d(z, w)}{s}, \frac{d(w, z)}{s}\right) \leq 0$$

elde edilir. Böylece (F1) den

$$F(d(z, w), d(z, w), 0, 0, d(z, w), d(z, w)) \leq 0,$$

bulunur ki bu (F3) ile çelişir. O zaman T nin sabit noktası tekdir. □

Teorem 3.1 de \mathcal{F}_s sınıfını dikkate alırsak T üzerindeki süreklilik koşulunu kaldırabiliriz.

Teorem 3.2. (X, d) bir tam b -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $F \in \mathcal{F}_s$ olmak üzere her $x, y \in X$ için (3.1.1) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. O zaman T dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi

z noktasına yakınsar.

İspat. Teorem 3.1 nin ispatında olduğu gibi $\{x_n\}$ iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu ve dolayısıyla bir $z \in X$ noktasına yakınsadığı gösterilebilir. Şimdi $d(z, Tz) > 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman (3.1.1) eşitsizliğinden

$$F \left(d(Tx_n, Tz), d(x_n, z), d(x_n, Tx_n), d(z, Tz), \frac{d(x_n, Tz)}{s}, \frac{d(z, Tx_n)}{s} \right) \leq 0$$

veya denk olarak

$$F \left(d(x_{n+1}, Tz), d(x_n, z), d(x_n, x_{n+1}), d(z, Tz), \frac{d(x_n, Tz)}{s}, \frac{d(z, x_{n+1})}{s} \right) \leq 0$$

elde edilir. Böylece F nin sürekli olduğu dikkate alınır Lemma 2.2, (F1) ve (Fs1) ile beraber

$$F \left(\frac{d(z, Tz)}{s}, 0, 0, d(z, Tz), d(z, Tz), 0 \right) \leq 0$$

elde edilir ki bu (Fs2) ile çelişir. O zaman $d(z, Tz) = 0$ olmalıdır. Sabit noktanın tekliği yine (F3) den elde edilir. \square

Teorem 3.1 veya Teorem 3.2 de F fonksiyonunu özel seçerek Teorem 2.2, Teorem 2.3 ve Teorem 2.4 de dahil olmak üzere pek çok sabit nokta teoremleri elde edilebilir. Burada Örnek 3.4 ve Örnek 3.5 ile birlikte elde edilen sonuçları verelim.

Sonuç 3.1. (X, d) bir tam b -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $c \in [0, 1)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq c \{d(x, y) + |d(x, Tx) - d(y, Ty)|\}$$

eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. O zaman eğer aşağıdaki iki koşuldan biri sağlanırsa T dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi z noktasına yakınsar:

- T süreklidir,
- $sc < 1$ dir.

Sonuç 3.2. (X, d) bir tam b -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\alpha, \beta \in [0, 1)$

ve $\alpha + \beta < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \max \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\} + \beta \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2s}$$

eşitsizliğin sağlandığını kabul edelim. O zaman eğer aşağıdaki iki koşuldan biri sağlanırsa T dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi z noktasına yakınsar:

- T süreklidir,
- $(2\alpha + \beta)s < 2$ dir.

3.2. b -metrik uzayda yakın Lipschitz dönüşümü

Bu kesimde tezin giriş bölümünde bahsedilen yakın Lipschitz dönüşümü kavramının b -metrik uzay versiyonunu tanımlayarak bu tür dönüşümler için bir sabit nokta teoremi sunacağız. Öncelikle hatırlanacağı gibi bir (X, d) b -metrik uzayında tanımlı T dönüşümü eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \lambda \geq 0$$

eşitsizliğini sağlıyorsa T dönüşümüne bir Lipschitz dönüşümü denir. Ayrıca her Lipschitz dönüşümünün sürekli olduğu açıktır.

Tanım 3.1. Let (X, d) bir b -metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\{\alpha_n\}$ de \mathbb{R}_+ da $\alpha_n \rightarrow 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x, y \in X$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq \lambda_n \{d(x, y) + \alpha_n\} \quad (3.2.1)$$

olacak biçimde $\lambda_n \geq 0$ sabitleri varsa T dönüşümüne $\{\alpha_n\}$ dizisine göre yakın Lipschitz dönüşümü denir. (3.2.1) eşitsizliğini sağlayan λ_n sabitlerinin infimumuna dönüşümün yakın Lipschitz sabiti denir ve $\eta(T^n)$ ile gösterilir.

Örnek 3.6. $X = [0, 2]$ kümesi $d(x, y) = (x - y)^2$ biçiminde tanımlı b -metriği ile dona-

tılsın. $T : X \rightarrow X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} x - \frac{1}{4} & x > 1 \\ \frac{1}{2} & , x \leq 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman T dönüşümü sürekli olmadığından bir Lipschitz dönüşümü değildir. Ancak rutin hesaplamalarla

$$\alpha_n = \begin{cases} 16 & n \leq 4 \\ \frac{1}{n} & , n > 4 \end{cases}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq \frac{n}{2^n} \{d(x, y) + \alpha_n\}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülebilir. O zaman T dönüşümü bir yakın Lipschitz dönüşümüdür.

Teorem 3.3. (X, d) bir tam b -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ sürekli ve yakın Lipschitz sabiti $\eta(T^n)$ olan bir yakın Lipschitz dönüşümü olsun. Eğer

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\eta(T^n)} < 1, \quad (3.2.2)$$

ise T dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktaya sahiptir, üstelik her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi z noktasına yakınsar.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $n \geq 0$ için $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Kısalık olsun diye $n \geq 0$ için $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ gösterimini kullanalım. Eğer $d_{n_0} = 0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa x_{n_0} noktası T nin bir sabit noktası olur. Ayrıca bu durumda $\{x_n\}$ dizisi n_0 dan sonra tamamen x_{n_0} terimlerine sahip olacağından x_{n_0} noktasına yakınsar. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $d_n > 0$ olsun. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < d_n = d(T^n x_0, T^{n+1} x_0) \leq \eta(T^n) \{d(x_0, x_1) + \alpha_n\} \quad (3.2.3)$$

olur. Şimdi $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\eta(T^n)} = \delta$ diyelim. O zaman (3.2.2) ve (3.2.3) den $0 < \delta < 1$ olmalıdır. Şimdi de $\alpha \in (1, \frac{1}{\delta})$ sabitini seçelim. Böylece $M = \sup \alpha_n$ olmak üzere (3.2.3) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha^n d_n \leq \alpha^n \eta(T^n) \{d(x_0, x_1) + M\} \quad (3.2.4)$$

elde edilir. (3.2.4) eşitsizliğinin her iki yanından toplam almakla beraber

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n d_n \leq \{d(x_0, x_1) + M\} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \eta(T^n)$$

yazılabilir. Buradan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha^n \eta(T^n)} = \alpha \delta < 1$$

olduğundan Cauchy kök testi dikkate alınır

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \eta(T^n) < \infty$$

olur. Böylece karşılaştırma testi nedeniyle

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n d_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n d(x_n, x_{n+1}) < \infty$$

bulunur ki Lemma 2.6 dan $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam b -metrik uzay olduğundan $\lim x_n = z$ yani $\lim d(x_n, z) = 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. T dönüşümü sürekli olduğundan $\lim d(x_{n+1}, Tz) = \lim d(Tx_n, Tz) = 0$ olur ki $\{x_n\}$ dizisinin limitinin tek olması gerektiğinden $z = Tz$ elde edilir. Şimdi de w noktası da T nin bir başka sabit noktası ise $d(z, w) > 0$ olup

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d(z, w) &= \sum_{n=1}^{\infty} d(T^n z, T^n w) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(T^n) \{d(z, w) + \alpha_n\} \\ &\leq \{d(z, w) + M\} \sum_{n=1}^{\infty} \eta(T^n) < \infty \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\sum_{n=1}^{\infty} d(z, w) = \infty$ olması ile çelişir. O zaman T nin sabit noktası tekdir. \square

4 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, b -metrik uzayları üzerinde yapılan sabit nokta teorisinin temel prensipleri ve sonuçları incelenmiştir. Çalışmanın ana amacı, b -metrik uzayların yapısını ve bu yapılar altında sabit nokta teoremlerinin nasıl uygulanabileceğini keşfetmektir. Bu bağlamda, çalışmanın temel katkıları, sabit nokta teoremlerinin daha geniş bir çerçevede anlaşılmasına ve yeni kavramların, özellikle de yakın Lipschitz dönüşümlerinin, b -metrik uzaylarda nasıl işlediğine dair önemli bulgular sunmaktadır.

İlk bölümde yapılan kaynak taraması ve teorik altyapı, sabit nokta teorisinin matematiksel analiz ve fonksiyonel analizdeki rolünü bir kez daha vurgulamıştır. Sabit nokta teoremleri, pek çok matematiksel ve uygulamalı alanda çözüm bulunabilirlik garantisi sağlaması açısından önemlidir. Çalışmanın bu teoriyi b -metrik uzaylarda incelemesi, klasik analiz yöntemlerinin ötesine geçerek, metrik uzayların ve bunların üzerinde tanımlanan fonksiyonların daha derinlemesine bir analizini mümkün kılmaktadır.

İkinci bölümde, b -metrik uzaylarının özellikleri detaylı bir şekilde ele alınmış ve sabit nokta teoremlerinin ispatlarında kullanılan lemmalar ayrıntılı olarak sunulmuştur. Burada yapılan katkı, sabit nokta teorisinin uygulama alanlarının genişletilmesine yardımcı olacak yeni metrik yapılarının tanımlanması olmuştur. Bu, özellikle analizdeki mevcut metodolojileri farklı bir perspektiften gözden geçirme imkânı sunmuştur.

Üçüncü bölümde ise iki ana kısımda yapılan çalışma, tezin orijinal katkılarından birini oluşturmuştur. İlk kısımda, kapalı bağıntılar kullanılarak elde edilen genel sabit nokta teoremi, mevcut literatürdeki bazı önemli sabit nokta teoremlerine benzer sonuçlar üretmiş ancak daha geniş bir çerçevede ve daha genel koşullar altında geçerli olmuştur. Bu sonuç, teorik açıdan önemli bir ilerleme olarak değerlendirilebilir. İkinci kısımda ise, b -metrik uzayda yakın Lipschitz dönüşümlerinin incelenmesi, sabit nokta teorisinin yeni bir alanına ışık tutmuş ve bu tür dönüşümler için özel bir sabit nokta teoremi geliştirilmiştir. Bu sonuçlar, yakın Lipschitz dönüşümlerinin analizinde daha etkili yöntemler sunabilir ve fonksiyonel analizde yeni araştırma alanlarına kapı arala-

yabilir.

Çalışmanın genel olarak, b -metrik uzayların özelliklerini ve sabit nokta teorisinin bu uzaylar üzerindeki etkilerini daha derinlemesine anlamamıza katkı sağladığı söylenebilir. Ayrıca, yakın Lipschitz dönüşümlerinin b -metrik uzaylar üzerindeki etkilerini incelemek, yalnızca teorik değil, aynı zamanda uygulamalı alanda da önemli sonuçlar doğurabilir.



KAYNAKLAR

- [1] A. Aghajani, M. Abbas and J. R. Roshan, Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b -metric spaces, *Math. Slovaca*, 64 (4) (2014), 941-960.
- [2] M. Boriceanu, M. Bota and A. Petrusel, Multivalued fractals in b -metric spaces, *Cent. Eur. J. Math.*, 8 (2) (2010), 367-377.
- [3] M. F. Bota, L. Guran and A. Petrusel, New fixed point theorems on b -metric spaces with applications to coupled fixed point theory, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, (2020), 22:74.
- [4] S. Czerwik, Nonlinear set-valued contraction mappings in b -metric spaces, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 46 (2) (1998), 263-276.
- [5] R. Miculescu and A. Mihail, Caristi-Kirk type and Boyd&Wong-Browder-Matkowski-Rus type fixed point results in b -metric spaces, *Filomat*, 31 (14) (2017), 4331-4340.
- [6] R. Miculescu and A. Mihail, New fixed point theorems for set-valued contractions in b -metric spaces, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19 (2017), 2153-2163.
- [7] Z. D. Mitrovic, Fixed point results in b -metric spaces, *Fixed Point Theory*, 20 (2) (2019), 559-566.
- [8] D. R. Sahu, Fixed points of demicontinuous nearly Lipschitzian mappings in Banach spaces, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 46 (4) (2005), 653-666.
- [9] T. Suzuki, Basic inequality on a b -metric space and its applications, *Journal of Inequalities and Applications*, (2017), 2017:256.