TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SAĞLIK BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NESTED LOGİT MODEL: TEORİ VE BİR UYGULAMASI

İrem DAĞLI

BİYOİSTATİSTİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Beyza DOĞANAY

ANKARA

2025

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SAĞLIK BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NESTED LOGİT MODEL: TEORİ VE BİR UYGULAMASI

İrem DAĞLI

BİYOİSTATİSTİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Beyza DOĞANAY

ANKARA

2025

ETİK BEYAN

Ankara Üniversitesi

Sağlık Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak hazırlayıp sunduğum "Nested Logit Model: Teori ve Bir Uygulaması" başlıklı tez; bilimsel ahlak ve değerlere uygun olarak tarafımdan yazılmıştır. Tezimin fikir/hipotezi tümüyle tez danışmanım ve bana aittir. Tezde yer alan deneysel çalışma/araştırma tarafımdan yapılmış olup, tüm cümleler, yorumlar bana aittir.

Yukarıda belirtilen hususların doğruluğunu beyan ederim.

Öğrencinin Adı Soyadı: İrem DAĞLI

Tarih:

İmza:

KABUL VE ONAY

ÖZET

Nested Logit Model: Teori ve bir Uygulama

Bu tez çalışmasında, biyoistatistik alanında karar verme, olasılık tahmin etme ve buna ilişkin modelleme süreçlerinde iç içe logit modelin detaylı bir şekilde ele alınması ve uygulama alanlarındaki etkinliğinin incelenmesi amaçlanmıştır. İç içe logit modelin, bağımlı değişkenin üç veya daha fazla kategoriye ayrıldığı ve seçim süreçlerinin hiyerarşik veya yapısal ilişkiler içerdiği durumlarda bağımlı değişkenlerin olası sonuçlarını daha gerçekçi bir şekilde modelleme imkanı sunduğu bilinmektedir. Tez kapsamında modelin teorik altyapısı ve işleyiş prensipleri detaylı bir şekilde açıklanmış, özellikle hiyerarşik yapılar ve bağımlı kategoriler arasındaki ilişkileri anlamadaki gücü vurgulanmıştır. Modelin uygulanabilirliğini göstermek amacıyla, SEER veri tabanından alınan bir veri seti üzerinde çalışılarak, üçüncü seviye kolon kanseri hastalarında cerrahi müdahale yöntemlerinin seçimine etki eden faktörler incelenmiş ve yaş, tümör bölgesi ve tümör evresi gibi bağımsız değişkenlerin olasılıksal etkileri iç içe logit modeli kapsamında değerlendirilmiştir. Elde edilen sonuçlar, modelin bu tür karmaşık karar yapılarında anlamlı sonuçlar üretebildiğini göstermektedir. Ayrıca, genellikle sosyal bilimler ve fen bilimlerinde kullanılan bu modelin sağlık çalışmalarında da etkili bir araç olarak kullanılabileceği ve özellikle klinik karar destek sistemlerine entegre edilerek önemli katkılar sağlayabileceği ortaya konulmuştur.

Anahtar Sözcükler: İç İçe Logit Model, Karar Verme Süreçleri, Log-toplam Katsayısı, Multinomial Logit, Seçim Modellemesi

SUMMARY

Nested Logit Model: Theory and an Application

In this thesis, the aim is to thoroughly address the nested logit model in the field of biostatistics, focusing on decision-making, probability estimation, and related modeling processes, as well as to evaluate its effectiveness in practical applications. It is known that the nested logit model provides a more realistic modeling capability for dependent variables when the dependent variable is divided into three or more categories and the decision-making processes involve hierarchical or structural relationships. Within the scope of the thesis, the theoretical framework and operational principles of the model are explained in detail, with a particular emphasis on its strength in understanding hierarchical structures and the relationships between dependent categories. To demonstrate the model's applicability, a dataset from the SEER database was analyzed to examine the factors influencing the choice of surgical intervention methods in stage III colon cancer patients. Variables such as age, tumor location, and tumor stage were evaluated for their probabilistic effects using the nested logit model. The results indicate that the model can produce meaningful outcomes in such complex decision structures. Furthermore, it has been shown that this model, which is generally used in social and natural sciences, can also be an effective tool in health studies and can provide significant contributions when integrated into clinical decision support systems.

Keywords: Decision-Making Processes, Discrete Choice Modeling, Log-sum Parameter, Multinomial Logit, Nested Logit Model

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında seçim olasılıklarının modellenmesi için kullanılan yöntemler arasında yer alan nested (iç içe) logit modelin teorik açıdan detaylı olarak incelenmesi ve üçüncü seviye kolon kanseri hastalarında cerrahi müdahale yöntemlerinin seçimine etki eden faktörlerin bu model yardımıyla incelenerek ilgili bağımsız değişkenlerin olasılıksal etkileri iç içe logit modeli kapsamında değerlendirilmesi amaçlanmıştır.

Bu çalışmanın her aşamasında değerli bilgi ve rehberliğiyle beni yönlendiren, sabırla destek olan, motivasyon sağlayan ve akademik gelişimime büyük katkı sağlayan kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Beyza DOĞANAY'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca farklı bir şehirden yürüttüğüm tez çalışmamda destekleri benim için çok daha fazla önem kazanan ve her ihtiyacım olduğunda ivedi bir şekilde destek sağlayan Ankara Üniversitesi Biyoistatistik Anabilim Dalı çalışanlarına çok teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana verdikleri sevgi, destek ve motivasyonla her zaman yanımda olan sevgili annem Ayşe DAĞLI ve babam Şemun DAĞLI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte varlığıyla beni neşelendiren ve sakinleştiren, bilgisayar başında geçirdiğim uzun saatlere sabırla eşlik eden sevgili kedim Bade'ye çok teşekkür ederim.

SİMGELER VE KISALTMALAR

AIC	Akaike Bilgi Kriteri
BIC	Bayesci Bilgi Kriteri
e^{β}	Odds Oranı Tahmini
G^2	Olabilirlik Oranı İstatistiği
IIA	İlgisiz Alternatiflerden Bağımsızlık
McF R	McFadden'in Düzeltilmiş R2'si
OR	Odds Oranı
SH	Standart Hata
β	Katsayı Tahminleri
λ	Log-sum Katsayısı
π	Olasılık Değeri

ŞEKİLLER

ÇİZELGELER

1. GİRİŞ

Klasik doğrusal modeller bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasında doğrusal bir ilişki olduğunu varsayar. Bu modellerin uygulanması için modele ilişkin hata terimlerinin normal dağılması ve bağımsız olması, varyansların homojen olması gibi varsayımların karşılanması gerekir. Nominal veya ordinal kategorik veri tipindeki bağımlı değişkenlerin klasik doğrusal modeller ile modellenmesi, bu varsayımların sağlanmasının zorluğu nedeniyle yetersiz görülmektedir. Daha geniş bir veri tipi yelpazesine hitap eden genelleştirilmiş doğrusal modeller kategorik veri tipindeki bağımlı değişkenlerin modellenmesinde kullanılmaktadır (Liao, 1994).

Logit model, genelleştirilmiş doğrusal modeller ailesindendir ve iki sonuçlu (*binary*) bağımlı değişkenlerin modellenmesinde kullanılır. Logit model, bağımlı değişkenin olasılıklarını modellemek için logit fonksiyonunu kullanır, bu sayede bağımlı değişkenin 0 veya 1 gibi iki değerli olduğu durumlarda uygun tahminler sağlar.

Multinomial logit modeli, logit modelinin genişletilmiş bir versiyonudur ve bağımlı değişkenin üç veya daha fazla kategoriye sahip olduğu durumlarda kullanılır. Bu model, her bir kategori için ayrı bir olasılık tahmini yapar ve seçenekler arasında tercihleri modellemek için genelleştirilmiş bir logit fonksiyonu kullanır. Multinomial logit model, bağımlı değişkenin birden fazla alternatif içeren ve seçimlerin birbirleriyle ilişkili olduğu durumlarda uygulanabilir.

Nested (iç içe) logit modeli, multinomial logit modelinin genişletilmiş bir versiyonudur ve daha karmaşık seçim yapıları için kullanılır (Train, 2009). Bu model, alternatiflerin belirli "yuvalar” altında organize edilmesini sağlar, böylece bağımlı değişkenlerin hiyerarşik yapısını ve alternatifler arasındaki ilişkileri daha gerçekçi bir şekilde modelleyebilir. İç içe logit modeli, özellikle bağımlı değişkenlerin çoklu kategorilere ayrıldığı ve seçim süreçlerinin hiyerarşik veya yapısal ilişkiler içerdiği durumlarda kullanışlıdır.

Buradaki amaç, iç içe logit modeli detaylı bir şekilde incelemek ve bu modelin bir uygulamasını gerçekleştirmektir

1.1. Tarihçe

Logit modelinin temelleri, psikolog R. Duncan Luce tarafından atılmıştır. Luce, 1959 yılında yayımladığı çalışmasında seçim olasılıklarını açıklayan bir model geliştirmiştir. Bu model, "bağımsız alternatifler özelliği" (*Independence of Irrelevant Alternatives, IIA*) olarak bilinen bir özelliği içermektedir. Luce'nin bu çalışması, seçimlerin bağımsız alternatifler varsayımı altında nasıl yapıldığını gösteren bir formül sunmuştur. 1960 yılında Jacob Marschak, Luce'nin modelini genişleterek, bu modelin fayda maksimizasyonu ile tutarlı olduğunu göstermiştir. Marschak'ın çalışması, logit modelinin ekonomik teori ile nasıl uyumlu olduğunu anlamamıza yardımcı olmuştur.

1974 yılında Daniel McFadden, logit modelinin temel özelliklerini ve faydalı yönlerini ayrıntılı bir şekilde ele almış ve logit modelinin gözlemlenmeyen faydanın aşırı değer dağılımına sahip olduğunu göstermiştir. Bu çalışma, modelin matematiksel ve teorik temellerini güçlendirmiştir. 1978 yılında McFadden, iç içe logit modelinin teorik temellerini atmıştır. Bu model, alternatiflerin belirli yuvalar altında organize edilmesini sağlar ve alternatifler arasındaki bağlılıkları daha gerçekçi bir şekilde modellemeye olanak tanır. 1985 yılında Ben-Akiva ve Lerman, "*Discrete Choice Analysis: Theory and Application*" adlı kitaplarında iç içe logit modelinin pratik uygulamaları ve teorik temellerini detaylı bir şekilde ele almış ve modelin uygulama alanlarını ve avantajlarını kapsamlı bir şekilde tartışmışlardır. Daniel Little McFadden, 2000 yılında James Heckman ile birlikte Nobel Ekonomi Ödülü'ne layık görülmüştür. McFadden'in ödülü kazanma nedeni, "ayrık seçimlerin analizi için geliştirdiği teori ve yöntemler" olarak açıklanmıştır. Bu ödül, McFadden'in bireylerin çeşitli seçenekler arasındaki tercihlerini anlamak için geliştirdiği yenilikçi ekonomik modeller ve analitik tekniklerin önemini vurgulamaktadır.

İç içe logit modeli, çeşitli alanlarda geniş bir uygulama kapasitesine sahip olup, farklı seçim analizlerinde oldukça etkili bir araç olarak öne çıkmaktadır. Ulaşım araştırmalarında, Ben-Akiva ve Lerman'ın 1985 tarihli "*Discrete Choice Analysis*" adlı kitabı, bu modelin ulaşım modları ve rotaları üzerindeki uygulamalarını detaylandırmıştır. McFadden da ulaşım seçimlerinde modelin kullanımını gösteren çalışmalar yayınlamıştır.

Pazarlama ve tüketici davranışlarında, Kenneth Train'in 1987'deki otomobil talebi üzerine yaptığı analizler (*Qualitative Choice Analysis-Theory, Econometrics and an Application to Automobile Demand*), ve Hensher ve Green'in 2002 tarihli çalışmaları (*Specification and Estimation of the Nested Logit Model: Alternative Normalisations*) ve

Heiss'in 2002 tarihli çalışmaları (*Specification(s) of Nested Logit Models, Structural Choice Analysis with Nested Logit Models*) modelin etkili bir şekilde nasıl uygulandığını ortaya koyar.

Sağlık ekonomisinde, Heiss'in 2005 tarihli çalışması (*Healthy, Wealthy, and Knowing Where to Live*) sağlık harcamaları ve sigorta tercihlerinde logit modellerinin kullanımını incelemiştir. Gonzalez Ortuzar'ın 2009 tarihli çalışması (*On Confounding Preference Heterogeneity and Income Effect in Discrete Choice Models*) seçim modelleri ile gelir etkeni üzerindeki ilişkiyi genel olarak ele almıştır. Şehir planlama ve konut seçimlerinde, Bhat'ın 1998 tarihli araştırmaları, konut tercihleri ve yerleşim yerlerinin analizi ve ayrıca başlangıç saatleri seçimi için modelin nasıl uygulandığını gösterir. Enerji ekonomisinde, Greene, Hensher ve Rose'un 2003 tarihli çalışması (*Applied Choice Analysis*) enerji tüketimi tercihleri ve pazar tercihleri konularında modelin kullanımını ele almıştır.

1.2. ODDS ve ODDS Oranı (OR)

Odds, bir olayın gözlenmesi olasılığının gözlenmemesi olasılığına oranıdır. π: bir olayın gözlenme olasılığı olmak üzere,

$$\text{Odds} = \pi /(1- \pi)$$

Odds oranı ise iki odds'un birbirine oranıdır. Odds oranı (OR), bir maruziyet ile bir sonuç arasındaki ilişkiyi değerlendiren bir ölçüttür. Bu oran, belirli bir maruziyetin/durumun varlığında bir sonucun gerçekleşme olasılığını, aynı sonucun maruziyetin/durumun yokluğunda gerçekleşme olasılığı ile karşılaştırır. Başka bir ifade ile, OR, maruziyetin sonucu etkileme derecesini belirler ve bu etkiyi nicel olarak ifade eder. Odds, bir olayın meydana gelme olasılığına karşı, meydana gelmeme olasılığının oranını ifade ederken; OR, iki grup arasındaki odds'ların karşılaştırılmasıdır. Genellikle bir maruziyetin/durumun bir sonuç üzerindeki etkisini değerlendirmek için kullanılır. OR, özellikle tıp, epidemiyoloji ve sosyal bilimler gibi alanlarda, risk değerlendirmesi ve karar verme süreçlerinde önemli bir araçtır (Alpar, 2017).

OR=1 ise maruziyet/durum, sonucun olasılığını etkilemez,

OR>1 ise maruziyet/durum, sonucun olasılığını artırır,

OR<1 ise maruziyet/durum, sonucun olasılığını azaltır.

1.3. Logit Kavramı ve Logit Modeller ile İlişkisi

Logit, odds'un doğal logaritmasıdır.

$$\text{Logit}(\pi(x)) = \log(\ \pi(x) / (1 - \pi(x))\ )$$

Genelleştirilmiş doğrusal modeller normal dağılım göstermeyen değişkenleri modelleme yöntemlerini de kapsar. Burada bağımlı değişkeni, bağımsız değişkenlere doğrusal bir yapı ile bağlayan bir bağlantı fonksiyonu kullanılır. Bu bağlantı fonksiyonu bağımlı değişkenin dağılımına göre şekillenir ve bağımlı değişkenin beklenen değerini, bağımsız değişkenlerin doğrusal kombinasyonuna dönüştürür. Bağlantı fonksiyonları olasılığın lineer modelleme için uygun bir formata dönüştürülmesini sağlarlar. Logit modelinde bağlantı fonksiyonu logit fonksiyonudur (Liao, 1994).

Bağımlı değişkenin kategorik veri tipinde olması durumunda, modelde amaçlanan, bağımlı değişkenin kategori olasılıklarını bağımsız değişkenler aracılığıyla açıklamaktır. Bu bağlamda, bağlantı fonksiyonları modeldeki bağımlı değişkenin yapısına göre biçimlendirilir. İkili bağımlı değişkenler için kullanılan logit modelinde, bağlantı fonksiyonu olayın gerçekleşme olasılığının gerçekleşmeme olasılığına oranının doğal logaritmasını alır. Bu, iki sonuçlu bir bağımlı değişken için temel bir bağlantı fonksiyonudur. Üç veya daha fazla kategoriye sahip bağımlı değişkenler için kullanılan multinomial logit modellerinde ise her bir alternatifin olasılığı, diğer alternatiflerin üssel fonksiyonları ile hesaplanır ve tüm alternatiflerin toplamına göre normalize edilir. Böylece, bağımlı değişkenin her bir kategoriye ait olasılığı belirlenir. İç içe logit modelinde ise alternatifler gruplar halinde organize edilir ve bu iç içe yapıya uygun olarak tahmin edilen olasılıklar ile bağlantı fonksiyonları oluşturulur. Bu model, alternatiflerin belirli yuvalarda gruplanmasını ve yuvalar arasındaki ilişkilerin dikkate alınmasını sağlar, dolayısıyla bağlantı fonksiyonları bu yapıya uygun şekilde düzenlenir

1.4. İki Yanıtlı Logit Model ve Multinomial Logit Model

Bağımlı değişkenin kategorik nominal veri türünde olduğu durumlarda, bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleyerek bağımlı değişkenin belirli kategorilerden birine düşme olasılığını tahmin eden bir modeldir. Bu model, her kategori için olasılıkları hesaplayarak, bağımsız değişkenlerin etkisini değerlendirir. Burada öncelikle logit modelin matematiksel ve teorik temelleri ve fayda maksimizasyonu ile ilişkisi açıklanacaktır.

J alternatifli bir olayın/seçimin j. alternatifle sonuçlanması belirleyen faktörlerin bir kısmı gözlemlenebilir/ölçülebilir iken bir kısmı gözlemlenemez. Ölçülemeyen faktörlerin varlığı nedeniyle kesin bir sonuca ulaşılmaz ve seçimin/sonucun bir olasılığı türetilir. Bu olasılık gözlemlenen ve gözlemlenemeyen parametrelerin fonksiyonunun beklenen değeridir. Burada beklenen değer, gözlemlenemeyen faktörlerin tüm olası değerleri üzerine kuruludur. Dolayısıyla gözlemlenemeyen faktörlerin belirli bir sonuca yol açmaları olasılıkları üzerine çalışılır.

Benzer şekilde olayın j. alternatifle sonuçlanmasının sağladığı faydanın bir kısmı belirli parametrelerle açıklanabilir ve ölçülebilirken, geriye kalan fayda gözlemlenemeyen veya ölçülemeyen ve rastgele olduğu kabul edilen bir kısımdan oluşur. Fayda maksimizasyonundan türetilen modeller, fayda maksimizasyonunu içermeyen karar verme süreçlerini temsil etmek için de kullanılır. Modeller, açıklayıcı değişkenlerin seçim/olay sonucuyla ilişkisini tanımlamak olarak da görülebilir. Model, olayın en yüksek faydayı sağlayan alternatifle sonuçlanması üzerine kuruludur. Yani, seçim/olay alternatif i ile sonuçlanıyorsa i sonucunun faydasının diğer tüm olası sonuçların faydasından fazla olduğu düşünülür. Burada fayda fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$U_{nj} = V_{nj} + \varepsilon_{nj}, \forall_j$$

Burada ε_{nj}, gerçek fayda U_{nj} ile ölçülebilen fayda V_{nj} arasındaki farktır. Dolayısıyla ε_{nj}'nin özellikleri, örneklemin dağılımı ve V_{nj}'nin belirlenme şekline bağlıdır. Buradan çıkarılacak önemli sonuç, kurulan modelin ε_{nj} üzerine yapılan varsayımlara göre farklılık gösterecek olmasıdır (Train, 2009). Olayın alternatif i ile sonuçlanması olasılığı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P_{ni} = Prob\ \ U_{ni} > U_{nj}$$

$$= Prob(V_{ni} + \epsilon_{ni} > V_{nj} + \epsilon_{nj})$$

$$P_{ni} = Prob(\epsilon_{nj} - \epsilon_{ni} < V_{ni} - V_{nj}), \quad \forall_{i \neq j} \quad \text{(Eşitlik 1.4.1)}$$

Burada olayın alternatif i ile sonuçlanması, alternatif j ile sonuçlanmasına göre 1 birim daha fazla fayda sağlıyorsa bile, alternatif j'nin ölçülemeyen faydası i'ninkinden 1 birimden fazla büyükse, olay alternatif j ile sonuçlanır. Aslında bu olayın alternatif j ile sonuçlanma olasılığı, $\epsilon_{nj} - \epsilon_{ni} > 1$ olması olasılığıdır. Farklı seçim modellerinin gözlemlenmeyen faktörlerin dağılım varsayımları üzerine kurulu olduğu daha önce belirtilmişti (Bölüm 1.4). Bu örnekten elde edilmesi gereken önemli bilgi ise tahmin edilen/modellenen olasılığı, olası sonuçların gözlemlenemeyen fayda farklarının belirlemesidir.

Logit model, ε_{nj}'leri bağımsız ve aynı dağılıma sahip ekstrem değerler (iid extreme value) olarak kabul eder. Ekstrem değer dağılımları veri setindeki en yüksek ve en küçük değerlerin dağılımını belirlemek için kullanılır. Logit modelde bu Gumbel dağılımıdır. Logit formülünün gözlemlenmeyen fayda dağılımı ile olan ilişkisi, Marley tarafından geliştirilmiş; Luce ve Suppes (1965) tarafından alıntılanan çalışmada, ekstrem değer dağılımının logit formülüne yol açtığı gösterilmiştir. McFadden (1974) bu analizi tamamlayarak, logit formülünün seçim olasılıkları için geçerli olduğunu ve gözlemlenmeyen faydanın ekstrem değer dağılımına sahip olduğunu göstermiştir. Gumbel dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) ve kümülatif dağılım fonksiyonu (CDF) aşağıdaki gibidir.

$$f\left(\varepsilon_{nj}\right) = \mathrm{e}^{-\varepsilon_{nj}}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\varepsilon_{nj}}}$$

$$F\left(\varepsilon_{nj}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\varepsilon_{nj}}}$$

Gumbel dağılımının ortalaması sıfır değildir, fakat burada ortalama önemsizdir. Eşitlik 1.4.1'de gösterildiği ve açıklandığı gibi sadece fayda farkları önemlidir. Eğer ε_{nj} ve ε_{ni}'ler bağımsız ve aynı dağılıma sahip aşırı değer dağılımı gösteriyorsa, $\varepsilon^* = \varepsilon_{nj}$ - ε_{ni}'ler de lojistik dağılıma uyar.

$$F\left(\varepsilon^*\right) = \frac{e^{\varepsilon^*}}{1 + e^{\varepsilon^*}}$$

Bu formül iki sonuçlu (binary) logit modeli tanımlamak için kullanılır. McFadden'e (1974) göre, olayın alternatif i ile sonuçlanma olasılığı, Eşitlik 1.4.1'den,

$$P_{ni} = Prob(\epsilon_{nj} < \epsilon_{ni} + V_{ni} - V_{nj}), \quad \forall_{i \neq j}$$

dir ve $F\ \varepsilon_{ni}\ = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\varepsilon_{ni}}}$ olduğuna göre, ε_{ni}'lerin bilindiği varsayımı ile her ε_{nj}'nin $\epsilon_{ni}+V_{ni}-V_{nj}$ noktasındaki kümülatif yoğunluk fonksiyonudur. Bu fonksiyon daha önce $F\ \varepsilon_{nj}\ = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\varepsilon_{nj}}}$ olarak verilmişti. Bu kümülatif dağılımın tüm $i \neq j$'ler için toplamı bireysel kümülatif dağılımların çarpımıdır.

$$P_{ni}|\varepsilon_{ni} = \prod_{j\neq i} e^{-e^{\epsilon_{ni}+V_{ni}-V_{nj}}}$$

Fakat ε_{ni}'ler gerçekte bilinmediğinden seçim olasılığı, ε_{ni} üzerinde P_{ni} integralidir. Bunun sonucu olarak logit seçim olasılıklarının formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_{ni} = \frac{e^{V_{ni}}}{\sum_j e^{V_{nj}}}$$

ve burada temsilci fayda lineer olarak ifade edildiğinde ($V_{nj} = \beta x_{nj}$) logit olasılıkları,

$$P_{ni} = \frac{e^{\beta x_{ni}}}{\sum_j e^{\beta x_{nj}}}$$

olarak elde edilir.

1.5 ve 1.6. bölümlerinde sırasıyla iki yanıtlı logit model ve multinomial logit model, model varsayımları ve katsayı-odds oranlarının yorumlanması açısından incelenecek 1.7 ve 1.8 bölümlerinde sırasıyla katsayı kestirimleri ve modelin geçerliliği-uyum iyiliği göstergeleri iki model için ortak olarak incelenecektir.

1.5. İki Yanıtlı (Binary) Logit Model

İki yanıtlı logit model, bağımlı değişkenin yalnızca iki olası sonuç (1 veya 0) alabileceği durumları analiz etmek için kullanılan istatistiksel bir yöntemdir. Bu model, özellikle bir olayın gerçekleşme olasılığını (örneğin, bir hastalığın varlığı gibi) belirlemek amacıyla, bağımsız değişkenlerin etkisini değerlendirmeyi hedefler. Burada bağımlı değişken, Bernoulli dağılımına sahip olup, $P(y=1) = \pi$ olayın gerçekleşme olasılığı iken $P(y=0) = (1-\pi)$ olayın gerçekleşmeme olasılığıdır. Bu bağlamda, model, bağımsız değişkenlerin, bağımlı değişkenin olası sonuçları üzerindeki etkisini ortaya koyarak, belirli bir olayın meydana gelme olasılığının tahmin edilmesini hedefler. Bernoulli dağılımının beklenen değeri E(Y) = π'dir. Kategorik bir bağımlı değişkeni dağılımına göre belirlenecek bir bağlantı fonksiyonunun bağımsız değişkenlerin doğrusal bir fonksiyonu halinde ifade etmek için kullanıldığından daha önce bahsedilmişti. İki yanıtlı bağımlı değişkenler için kullanılan logit modelde, bağlantı fonksiyonu olayın gerçekleşme olasılığının gerçekleşmeme olasılığına oranının (odds) doğal logaritmasını alır. Yani kategorik bağımlı değişkene ilişkin odds'un doğal logaritması; bağımsız değişkenlerin doğrusal bir fonksiyonu olarak ifade edilir. Bu yaklaşımla model aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\log \frac{\pi}{1-\pi} = \log \frac{P\ y=1}{P\ y=0} = {}_{k=1}^{K} \beta_{jk}\, x_k,$$

j: bağımlı değişken kategorisi,

j=1,2

K: bağımsız değişken sayısı,

k: bağımsız değişken

1.5.1. Model Varsayımları

Modelde bağımlı değişken iki kategorili olmalıdır ve modele bağımlı değişkeni açıklayan ve aralarında yüksek korelasyon bulunmayan bağımsız değişkenler dahil edilmelidir. Model kurulurken kullanılan gözlemler birbirinden bağımsızdır (bir gözlemin sonucu diğerini etkilememelidir).

Daha çok üzerinde durulan varsayım ise model tahmin hatalarının birbirinden bağımsız olmasıdır. Bu bağımsızlık, bir alternatifin gözlemlenmeyen fayda kısmının, diğer alternatifin gözlemlenmeyen fayda kısmıyla ilişkili olmadığı anlamına gelir. Bu varsayım, modelin doğru bir şekilde tanımlanmasıyla sağlanır. Daha önce ifade edildiği gibi, hatalar (ε_{nj}); gerçek fayda (U_{nj}) ile ölçülebilen fayda (V_n) arasındaki farktır. Yani, bir olayın j. olası kategoriyle sonuçlanmasına sebep olan tüm değişkenler gerçek faydayı oluştururken, aynı zamanda ölçülebilen değişkenler ölçülen faydayı oluşturur. Dolayısıyla, modelin iyi bir şekilde kurgulanması başka bir deyişle, bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkene ait olası kategorileri yeterince açıklaması, hataların beyaz gürültü haline gelmesini sağlar. Bu durumda, hatalar sabit varyanslı ve sıfır ortalamalı bir dağılım gösterir ve her gözlem için eşit derecede rastgele dağılır.

1.5.2. Katsayı ve Odds Oranlarının Yorumlanması

İki yanıtlı logit model, bağımlı değişkenin olası sonuçlarını bağımsız değişkenlerin lineer bir fonksiyonu olarak ifade etmek amacıyla odds'un doğal logaritması kullanılarak oluşturulmaktadır. Odds'un pay ve paydasını oluşturan olasılık değerlerini [0,1] arasında değerler alırken odds'un doğal logaritmasının görüntü kümesi $(-\infty, \infty)$ olur. Dolayısıyla tahmin edilen ilk β_j parametreleri için ilgili bağımsız değişkenin bağımlı değişkene ait yanıt olasılıklarını (P(y=1) veya P(y=0)) arttırdığı veya azalttığı yönünde yorum yapılabilir. Amaçlanan olasılık tahminin gerçekleştirilmesi için ise model odds cinsinden yazılır.

$$\log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = \log\left(\frac{P(y=1)}{P(y=0)}\right) = \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_k$$

$$e^{\log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)} = e^{\log\left(\frac{P(y=1)}{P(y=0)}\right)} = e^{\sum_{k=1}^{K} \beta_k x_k}$$

$$\frac{\pi}{1-\pi} = \frac{P(y=1)}{P(y=0)} = e^{\sum_{k=1}^{K} \beta_k x_k}$$

Burada elde edilen e^{β_k} değerleri, k. bağımsız değişkenin bağımlı değişken üzerindeki odds oranına marjinal etkisini ifade eder. Bu değerler, tahmin edilmek istenen olasılıklarla doğrusal bir ilişki içindedir ve ilgili bağımsız değişkenin olasılık üzerindeki çarpımsal etkisi olarak yorumlanır. Yani, bir bağımsız değişkenin bir birimlik değişiminin, odds oranında nasıl bir değişim yarattığını ifade ederler. Bu, modelin içindeki her bir bağımsız değişkenin, sonuç değişkeninin olasılığı üzerindeki etkisinin açıklanmasını sağlar.

1.6. Multinomial Logit Model

Multinomial logit model, bağımlı kategorik değişkenin üç veya daha fazla yanıtlı olduğu durumları analiz etmek için kullanılan istatistiksel bir yöntemdir. Burada, bağımsız değişkenlerin olası kategoriler üzerindeki etkileri aynı anda değerlendirilir. Multinomial logit modelde incelenen bağımlı değişken, birbirinden ayrık ve nominal bir yapıya sahip J adet olası kategoriye sahiptir. İki yanıtlı bağımlı değişkenler için kullanılan logit modelde, bağlantı fonksiyonu olayın gerçekleşme olasılığının gerçekleşmeme olasılığına oranının doğal logaritması idi. Multinomial logit modelde uygulanan bağlantı fonksiyonu da buna benzerdir. Olası yanıt kategorilerinden bir tanesi referans olarak belirlenerek oluşturulan J-1 adet odds'un doğal logaritması incelenir. Bağımlı değişkenin j. kategori ile sonuçlanma olasılığı,

$$\pi_j = P\ Y = j \ = \begin{cases} \dfrac{e^{\sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} x_k}}{1+ \sum_{j=1}^{J-1} e^{\sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} x_k}}, & j = 1, \ldots, J-1 \\ \dfrac{1}{1+ \sum_{j=1}^{J-1} e^{\sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} x_k}}, & j = J \end{cases} \qquad \text{(Eşitlik 1.6.1)}$$

j= 1,…,J-1

j: bağımlı değişken kategorisi,

K: bağımsız değişken sayısı,

k: bağımsız değişken

J: referans bağımlı değişken kategorisi

olmak üzere; multinomial bağlantı fonksiyonu, $log(\frac{\pi_j}{\pi_J})$, bağımlı değişkenin J. kategorisi referans kategori olarak belirlendiğinde (bu seçimin bir önemi yoktur, herhangi bir kategori seçilebilir), her j kategorisi için (j=1,…,J−1), j. kategoriyi J. kategori ile karşılaştıran J-1 tane logiti temsil eder. Ek olarak, iki yanıtlı logit model için kullanılan bağlantı fonksiyonunun, multinomial bağlantı fonksiyonunun J=2 için özel bir hali olduğu açıktır. Multinomial bağlantı fonksiyonunda, Eşitlik 1.6.1'de verilen olasılık kullanılırsa multinomial logit model aşağıdaki gibi elde edilir.

$$log\ \frac{\pi_j}{\pi_J} = \log \frac{P\ Y=j}{P\ Y=J} = \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} + x_k, \quad \text{j=1,…J-1}$$

1.6.1. Model Varsayımları

Bağımlı değişken ikiden fazla kategorilidir. İki sonuçlu logit model varsayımları burada da benzerlik gösterir. Modele bağımlı değişkeni açıklayan ve aralarında yüksek korelasyon bulunmayan bağımsız değişkenler dahil edilir. Model kurulurken kullanılan gözlemler birbirinden bağımsızdır (bir gözlemin sonucu diğerini etkilememelidir). Model tahmin hatalarının birbirinden bağımsız olması; iki yanıtlı logit model başlığı altında açıklandığı gibi modelin iyi bir şekilde kurgulanmasıyla yani bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkene ait olası kategorileri yeterince açıklaması ile sağlanır. Ayrıca bağımlı değişkene ait kategori sayısı ikiden fazla olduğu için belirtilmelidir ki, hiçbir bağımlı değişken kategorisi için logit olasılığı sıfır olmaz, sıfır olduğu düşünülüyorsa bu kategori modele dahil edilmez. Multinomial Logit Modele özel olarak ilgisiz alternatiflerden bağımsızlık varsayımı (IIA) aşağıda ayrıca incelenmiştir.

<u>İlgisiz Alternatiflerden Bağımsızlık Varsayımı (IIA: Independence from Irrelevant Alternatives):</u>

Modelin bağımlı değişkenine ait iki sonuç kategorisine ait olasılık oranları sadece bu sonuç kategorilerine bağlıdır. Olayın i. kategori ile sonuçlanma olasılığının j. kategori ile sonuçlanma olasılığına oranı diğer sonuç kategorilerinin varlığına veya özelliklerine bağlı değildir. Aşağıdaki OR sadece i. ve j. kategoriye ilişkin bilgilerden etkileneceği açıktır.

$$\frac{\pi_{ni}}{\pi_{nj}} = \frac{\dfrac{e^{\beta_{ik}x_k}}{1+\sum_{j=1}^{J-1} e^{\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}x_k}}}{\dfrac{e^{\beta_{jk}x_k}}{1+\sum_{j=1}^{J-1} e^{\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}x_k}}} = \frac{e^{\beta_{ik}x_k}}{e^{\beta_{jk}x_k}} = e^{\beta_{ik}x_k-\beta_{jk}x_k}$$

IIA için iki tür test önerilmektedir. İlk test, modelin bağımlı değişken kategorilerinin bir alt kümesi üzerinde yeniden oluşturulması ile gerçekleştirilir. Eğer IIA geçerliyse, iki modele de dahil edilen i. ve j. alternatiflerine ait odds oranlarının her iki modelde de aynı olması beklenir. Bu durumda, elde edilen β katsayı tahminlerinin de benzer olacağı öngörülür. Eğer katsayı tahminleri iki model için de istatistiksel olarak farklılık göstermiyorsa, IIA varsayımı sağlanmış olur. Bu, alt küme parametrelerinin tam küme parametreleriyle benzerliğini test ederek IIA'nın geçerliliğini değerlendirmek anlamına gelir (Hausman ve McFadden, 1984). İkinci test ise, modelin alternatif bağımlı değişken kategorileriyle yeniden yapılandırılmasıdır. Eğer ilk modeldeki iki değişkenin odds oranı, yeni eklenen bağımlı değişken kategorisinden etkileniyorsa, bu durum IIA varsayımının ihlali anlamına gelir. Bu etki, β katsayı tahminlerine de yansıyacağından, her iki modelin parametrelerinin benzerliğini test ederek IIA varsayımı test edilir. McFadden (1987) bu testin temel yöntemlerini geliştirmiştir, ardından Train vd. (1989) bu testin logit model için de nasıl kolaylıkla gerçekleştirileceğini göstermiştir.

IIA özelliği, alternatif kategorilerin sabit ve iyi tanımlanabilir olduğu durumlarda geçerlidir ve bazı avantajlar sunar. Örneğin, modelin daha az sayıda alternatif üzerinde kurulabilmesi, aynı sonuçlara ulaşmayı mümkün kılar. Bu, hem bilgisayar üzerinde zaman tasarrufu sağlar hem de analizin karmaşıklığını azaltır. Böylece, araştırmacılar daha etkili bir şekilde sonuçlara ulaşabilir ve verileri yorumlama sürecini kolaylaştırabilir. IIA varsayımı bazı durumlarda gerçekçi olsa da, Chipman (1960) ve Debreu (1960) tarafından ilk kez belirtildiği gibi, bazı durumlarda açıkça uygunsuzdur (Train, 2009). Literatürde bu durumu açıklamak için sıklıkla kullanılan bir seçim modeli vardır. Bu örnekte, bireylerin işe gitmek için araba ve otobüs gibi iki seçeneği olduğu varsayılır. Yeni bir otobüs seçeneği eklendiğinde, araba tercih etme olasılığı, ilk modeldeki otobüs seçeneğiyle aynı oranda azalmaz. Başka bir ifade ile, arabayla ilk otobüs arasındaki OR sabit kalmaz; yeni otobüsün tanıtılması, bu oranı değiştirir. Bu durum, IIA varsayımının gerçek hayattaki her duruma uygun olmadığını gösterir. Bu durum iç içe (nested) logit model gibi modellere ihtiyaç doğurmuştur. Ve iç içe logit model başlığı altında da ayrıca incelenecektir.

Öte yandan sağlık araştırmalarında IIA varsayımı incelenmek istenirse, bir hastalığın varlığı veya yokluğu test edilirken, modele hastalığın başlangıcı kategorisi eklendiğinde hastalığın yokluğu olasılığı değişmez fakat varlığı kategorisinin olasılığı azalır. Dolayısıyla ilk OR sabit kalmaz. Fakat ek olarak belirtilmelidir ki, hastalığın başlangıcı kategorisi doktorlar veya araştırmacı tarafından hastalığın varlığı kategorisinden farklı bir kategori olarak değerlendiriliyorsa bu durum modele başlangıçta dahil edilmelidir. Burada oluşan durum IIA'nın uyumsuzluğu değil, modelin iyi tanımlanmamış olmasıdır. Multinomial logit model, hastane tercihleri açısından kullanıldığında, durum yine araba ve otobüs modeline benzer. Örneğin, başlangıçta özel bir hastane ile iki farklı kamu hastanesi kategorisi üzerinden kurgulanan bir modele sonradan yeni bir kamu hastanesi eklendiğinde, bu yeni hastane, ikamet edilen konuma bağlı olarak diğer devlet hastanelerinin seçilme olasılığını azaltma eğiliminde olacaktır. Bu durum, ilk modelde elde edilen özel hastane ile kamu hastanesi arasındaki odds oranını değiştirecektir ve IIA varsayımı sağlanmayacaktır.

1.6.2. Katsayı ve Odds Oranlarının Yorumlanması

Multinomial logit model katsayılarının yorumlanması iki yanıtlı logit model ile benzerlik gösterir. Burada da model, bağımlı değişkenin olası sonuçlarını bağımsız değişkenlerin lineer bir fonksiyonu olarak ifade etmek amacıyla oddsun doğal logaritması kullanılarak oluşturulmaktadır. Oddsun doğal logaritmasının görüntü kümesinin $(-\infty, \infty)$

olması sebebi ile tahmin edilen ilk β_j parametreleri için ilgili bağımsız değişkenin bağımlı değişkene ait yanıt olasılıklarını arttırdığı veya azalttığı yönünde yorum yapılabilir. Amaçlanan olasılık tahminin gerçekleştirilmesi için model odds cinsinden yazılır.

$$log\left(\frac{\pi_j}{\pi_J}\right) = \log\left(\frac{P(Y=j)}{P(Y=J)}\right) = \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} + x_k$$

$$e^{log\left(\frac{\pi_j}{\pi_J}\right)} = e^{\log\left(\frac{P(Y=j)}{P(Y=J)}\right)} = e^{\sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} + x_k}$$

$$\frac{\pi_j}{\pi_J} = \frac{P(Y=j)}{P(Y=J)} = e^{\sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} + x_k}$$

Burada elde edilen $e^{\beta_{jk}}$ değerleri, k. bağımsız değişkenin bağımlı değişkenin j. kategorisi üzerindeki odds oranına marjinal etkisini ifade eder. Bu değerler, tahmin edilmek istenen olasılıklarla doğrusal bir ilişki içindedir ve ilgili bağımsız değişkenin j. alternatifinin olasılığı üzerindeki çarpımsal etkisi olarak yorumlanır. Yani, bir bağımsız değişkenin bir birimlik değişiminin, j. alternatifin odds oranında nasıl bir değişim yarattığını gösterir. Bu, modeldeki her bir bağımsız değişkenin, belirli bir alternatifin seçim olasılığı üzerindeki etkisinin daha iyi açıklanmasını sağlar. Böylece, multinomial logit modelde bağımsız değişkenlerin her birinin farklı alternatifler üzerindeki etkileri daha net yorumlanır.

1.7. Katsayı Kestirimleri

Logit modellerde katsayı kestirimleri genellikle En Çok Olabilirlik Yöntemi (EÇO) ile gerçekleştirilir. EÇO yöntemi kapsamında, gözlemlenen verinin olasılığını, bilinmeyen parametrelerin bir fonksiyonu olarak ifade eden bir olabilirlik fonksiyonu oluşturulur. Bu fonksiyon, belirli bir veri setinin elde edilme olasılığını maksimum yapan parametre değerlerini bulmayı hedefler. Elde edilen bu değerler, modelin veriye en iyi uyum sağladığı ve gözlemlenen verinin en olası şekilde ortaya çıktığı parametrelerdir. Böylece, modelin kurulumunda kullanılan veri setinin elde edilme olasılığını en üst düzeye çıkaran parametre tahminleri elde edilir ve sonuç olarak model, gözlemlenen veriyi en iyi şekilde temsil eder. Olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\beta) = \prod_{k=1}^{K} (P(y_k|x_k;\beta')^{I_k}$$

veya logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$LL(\beta) = \sum_{k=1}^{K} I_k \ln(P(y_k\,|x_k;\beta))$$

olarak ifade edilir. Burada k. deneme için olay ilgili kategori ile sonuçlanmışsa I_k 1 değerini, aksi durumda 0 değerini alır.

Bu şekilde modeli oluştururken kullanılan verilerin (y_k), model parametreleri seti (β') altındaki olasılığı ifade edilmiş olunur. Bu fonksiyonu maksimum yapan β değerleri en çok olabilirlik tahmin edicileridir. Olabilirlik fonksiyonunun maksimum noktasında her bir parametreye göre türevi sıfırdır. Buradan aşağıdaki eşitlik kullanılarak elde edilen denklemlerin eşanlı çözümü için köklere, yani en çok olabilirlik tahmin edicilerine ulaşılır.

$$\frac{dLL(\beta)}{d\beta} = 0$$

En çok olabilirlik tahmin etme yöntemini logit modelde uygulamak için $P(y_k|x_k;\beta)$ yerine daha önce belirtilen logit olasılıkları yerleştirildiğinde olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir (Akiva, 1997).

$$LL(\beta) = \sum_{k=1}^{K} \ln(P(y_k\,|x_k;\beta'))$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \ln(\frac{e^{\beta' x_k}}{1+\sum_{j=1}^{J-1} e^{\beta' x_k}})$$

$$= \sum_{k=1}^{K}(\beta'^{x_k} - \ln(1+\sum_{j=1}^{J-1} e^{\beta' x_k}))$$

Buna göre $\frac{dLL(\beta)}{d\beta} = 0$ denkleminin çözümü birden fazla bağımsız değişken, yani birden fazla β mevcutsa bazı özel sayısal yöntemlerle gerçekleştirilir. Bu yöntemlerden en sık kullanılanı Newton-Rapshon yöntemidir.

1.7.1. Newton-Raphson Yöntemi

Newton-Raphson yöntemi, Isaac Newton (1643-1727) ve Joseph Raphson (1648-1715) adına ithaf edilen, kök bulmak için kullanılan bir yöntemdir ve aşağıdaki yineleme yöntemiyle çalışır (Tiriana, 2023).

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Burada x_k, k. iterasyonun tahminini; $f(x_k)$, fonksiyonun x_k. noktasındaki tahminini ve $f'(x_k)$, fonksiyonun türevini ve x_k noktasındaki eğimini (yani doğrusal yaklaşımın eğimini) temsil eder.

Çözüm için rasgele bir x_0 başlangıç değeri seçilir. x_0 başlangıç değerinin sonuca yakın tahmin edilmesi iterasyon adımlarını dolayısıyla çözüm süresini kısaltır. $x_1, x_2, \ldots, x_n$'ler için iterasyon gerçekleştirilir. $x_{k+1} - x_k$ değerleri belirli bir tölerans değerine (ε) yakın olduğunda, yani $x_{k+1} - x_k < \varepsilon$ koşulu sağlandığında, bu çözümün yeterince uygun olduğu söylenir ve iterasyon durdurulur. Tolerans değerinin hesaplama süresi ve çözümün doğruluğu arasında bir denge oluşturacak şekilde seçilmesi tavsiye edilir.

1.8. Modelin Geçerliliği ve Uyum İyiliği Göstergeleri

Logit modellerde, katsayı yorumlarının geçerliliğini sağlamak için öncelikle modelin geçerliliği değerlendirilmelidir. Bu, modelde yer alan bağımsız değişkenlerin, yalnızca sabit terim (β_0) bulunan bir modelle kıyaslandığında bağımlı değişkeni daha anlamlı bir şekilde açıklayıp açıklamadığını test etmek anlamına gelir. Başka bir ifade ile, bağımsız değişkenlerin etkisinin anlamlı olup olmadığını belirlemek için modelin uygunluğu incelenir. Bu adım, modelin geçerliliği konusunda güvenilir sonuçlar elde etmek için kritik öneme sahiptir. Aşağıda belirtilen testler farklı bağımsız değişkenlerin dahil edildiği modelleri karşılaştırılmasında da kritik bir önem arz etmektedir.

1.8.1. Olabilirlik Oranı Test İstatistiği (G^2)

Sadece sabit terimden oluşan modelin log olabilirlik değeri L_0, serbestlik derecesi sd_0 ve bağımsız değişkenlerin eklendiği modelin log olabilirlik değeri L_1, serbestlik derecesi sd_1 olarak tanımlandığında, Olabilirlik Oranı Testi istatistiği aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$G^2 = -2(L_0 - L_1)$$

G^2 test istatistiği $sd_1 - sd_0$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımı gösterir (Liao, 1994).

$$G^2 \sim \chi^2_{(sd_1 - sd_0)}$$

Burada,

$$G^2 \geq \chi^2_{(sd_1 - sd_0)}$$

ise modele eklenen bağımsız değişkenlerin, yalnızca sabit terim içeren modele kıyasla modelin açıklayıcılığını arttırdığı sonucuna varılır. Bu, modelin istatistiksel olarak anlamlı olduğunu gösterir.

1.8.2. Akaike Bilgi Kriteri (AIC)

Akaike Bilgi Kriteri (AIC), logit modelin uyumunu değerlendirirken kullanılan bir ölçüttür. AIC, modelin veriye ne ölçüde uyduğunu ve modelin karmaşıklığını dikkate alarak, farklı modeller arasında karşılaştırma yapma imkanı sunar. Her model için ayrı ayrı hesaplanan AIC değerlerinin karşılaştırılmasıyla, hangi modelin daha yüksek uyum sağladığı belirlenir. AIC formülü aşağıdaki gibidir.

$$AIC = -2L + 2k$$

Burada L modelin log olabilirliğini ve k modeldeki parametre sayısını temsil eder. Formülde yer alan k, AIC'ın karmaşıklığı da hesaba kattığını gösterir ve bu, AIC'ın bir avantajı olarak değerlendirilir. Karşılaştırılan Akaike bilgi kriterlerinden en küçük olan, uyumu en yüksek modele aittir yorumu yapılır (Akaike, 1974).

1.8.3. Bayesci Bilgi Kriteri (BIC)

Bayesci Bilgi Kriteri (BIC), AIC gibi modelin uyumunu ve karmaşıklığını dikkate alarak farklı modeller arasında karşılaştırma yapmak için kullanılır. L modelin log olabilirliğini, k parametre sayısını ve n gözlem sayısını temsil etmek üzere aşağıdaki gibi formüle edilmiştir.

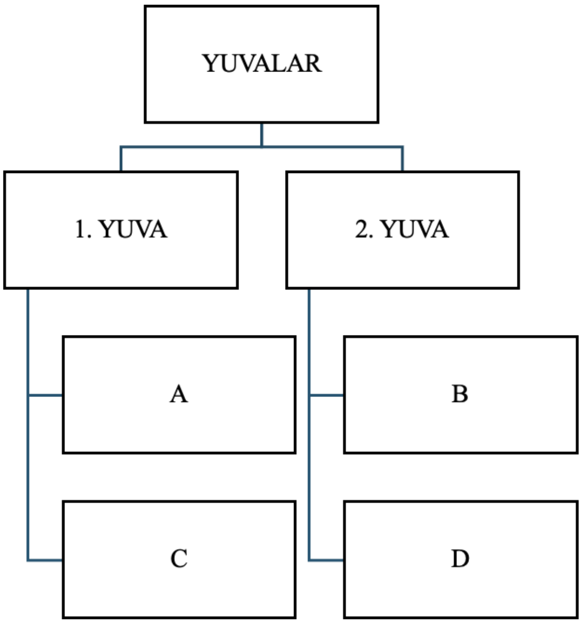
$$BIC = -2L + k * ln(n)$$

Bayesci Bilgi Kriteri en küçük olan modelin karşılaştırılan modeller arasında en uyumlu olduğu yorumu yapılır

1.9. İç İçe (Nested) Logıt Model

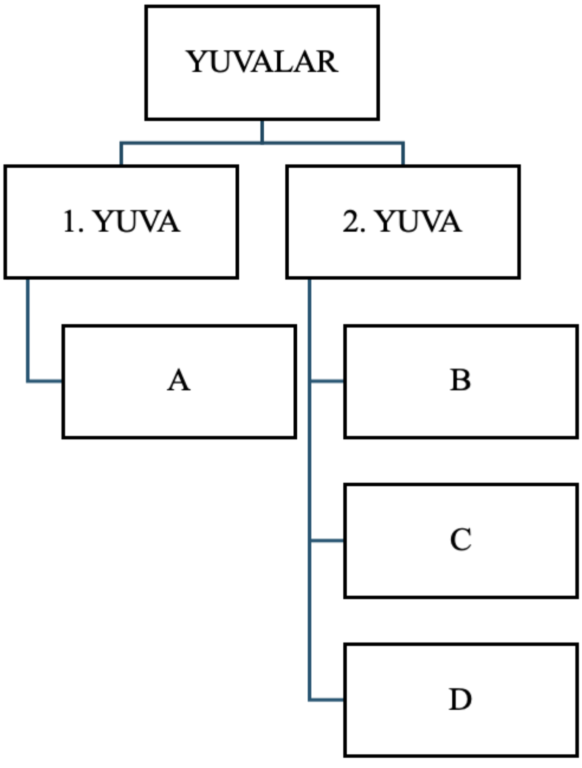
İç içe logit model, üç veya daha fazla kategorili bir bağımlı değişkenin bağımsız değişken veya değişkenler ile olan ilişkisini, bağımlı değişkenin kategorilerini belirli gruplar (yuvalar) içine ayırarak inceleyen istatistiksel bir yöntemdir. Yuva yapısı, benzer özelliklere sahip kategorilerin bir araya getirilmesiyle oluşturulur.

Dört kategorili bir bağımlı değişkenin kategorilerinin A, B, C ve D olduğu bir durumda; A ve C kategorileri ile B ve D kategorileri, kendi içlerinde benzer özellikler taşıyorsa, iç içe logit modelin düzeni Şekil 1.1 İç içe logit model 1 gibi gösterilebilir:



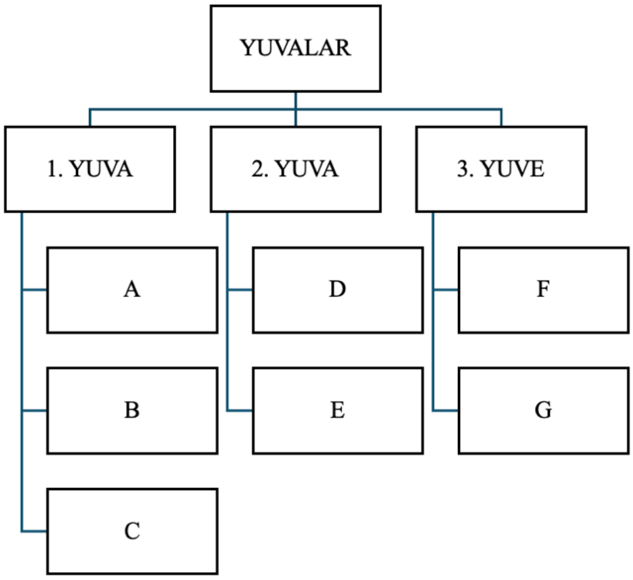
Şekil 1.1. İç içe logit model diagramı 1

A, B ve C kategorilerinin kendi içinde benzerlik göstermesi durumunda ise model Şekil 1.2 İç içe logit model diagramı 2 gibi oluşturulur.



Şekil 1.2 İç içe logit model diagramı 2

İç içe yapı oluşturulurken yuva sayısı ve yuvalara dahil edilen kategori sayıları da benzer özellik gösteren kategorilere göre belirlenir.



Şekil 1.3 İç içe logit model diagramı 3

İç içe logit model ile bir olaya ait olası sonuçların tahmini olasılıkları daha esnek bir şekilde incelenebilmektedir. Özellikle karmaşık süreçlerin modellenmesinde etkili bir modeldir.

Bağımlı değişkene ait iki sonuç kategorisine ilişkin olasılık oranlarının yalnızca bu kategorilere bağlı olduğunu ifade eden IIA varsayımına Bölüm 1.6.1'de Multinomial logit modele ilişkin olarak değinilmiştir. Bu varsayımın sağlanmasının, modelin iyi bir şekilde yapılandırılmasına veya bağımsız değişkenlerin etkilerinin ölçülebilir olmasına bağlı olduğu vurgulanmıştır. Ayrıca, gerçek dünyada bazı durumlarda bu varsayımın sağlanamadığı da belirtilmiştir. Multinomial logit ve iç içe logit modelleri, bağımlı değişkenin kategori sayısı açısından farklılık göstermezler. Yani her iki model de, aynı sayıda sonuç kategorisine sahip olan durumlarda kullanılabilir. Bağımlı değişkene ait kategorilerin gruplanabildiği durumlarda iç içe logit modelin kullanımı uygundur. Yuva yapısı, benzer özelliklere sahip kategorilerin bir araya getirilmesiyle oluşturulur. bu sayede her yuva içindeki olası sonuçlar arasında bağımsızlık varsayımının geçerli olduğu durumlarda olasılıklar daha doğru tahminlenir. Yani burada,

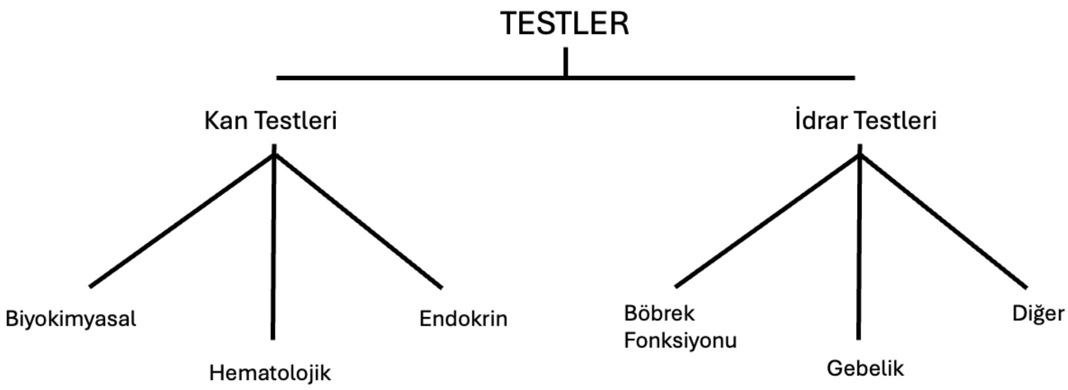
- Farklı yuvalardaki alternatifler için IIA geçerli değildir. (Farklı yuvalarda bulunan iki alternatif için, olasılıkların oranı, her iki yuvada bulunan diğer alternatiflerin özelliklerine bağlı olabilir).
- Her yuva içinde IIA geçerlidir. Aynı yuva içinde bulunan iki alternatif için, olasılıkların oranı diğer tüm alternatiflerin özelliklerinden veya varlığından bağımsızdır.

İç içe logit modelde IIA varsayımı daha esnek bir şekilde uygulanır. Yani iç içe logit modelde alternatifler arasındaki etkileşimler dikkate alındığından daha gerçekçi sonuçlar elde edilir. Multinomial logit modelin IIA varsayımını katı bir şekilde kabul etmesi, iç içe logit modelin oluşturulmasına neden olmuştur. Dolayısıyla daha karmaşık yapıların modellenmesinde multinomial logit model yerine iç içe logit model tercih edilir.

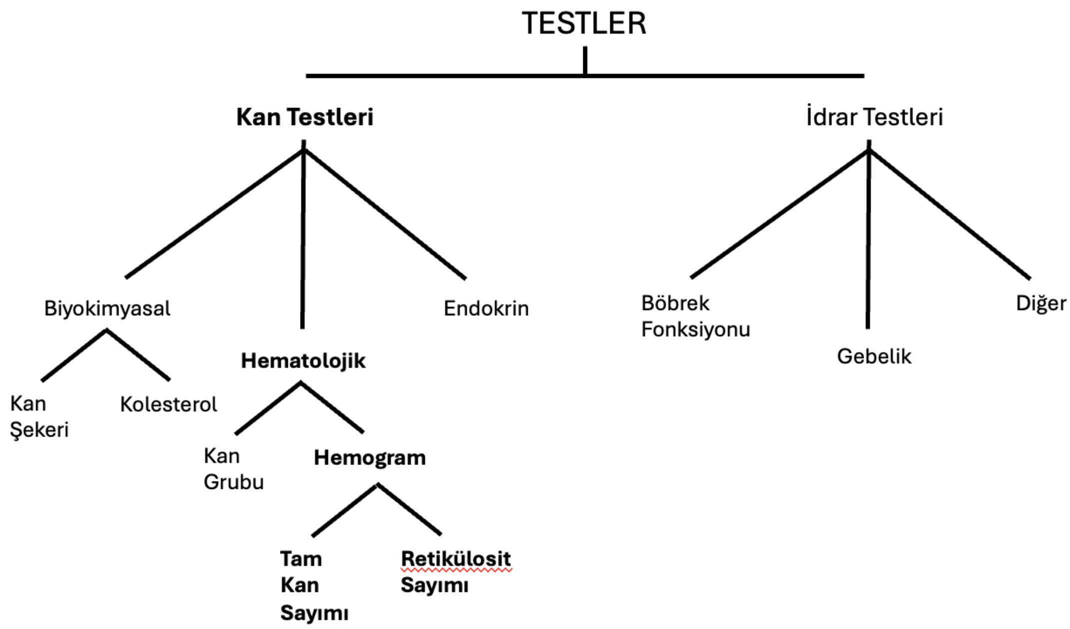
IIA varsayımı, yuva yapılarını oluştururken dikkate alınmalıdır. Şekil 1.1 İç içe logit model diagramı 1 gibi bir iç içe yapı için, bağımlı değişkene ait A alternatifi kaldırıldığında, B ve D kategorilerinin olasılık oranları aynı kalır (olayın B ve D alternatifleri ile sonuçlanma olasılıkları benzer şekilde etkilenir veya etkilenmez). Fakat farklı yuvalara gruplandırılmış C ve B kategorilerinin olasılık oranları değişir. Daha önce belirtildiği gibi, farklı yuvalardaki alternatifler için bağımsızlık varsayımı geçersiz, aynı yuva içindeki alternatifler için geçerlidir.

İç içe logit model, Şekil 1.3 İç içe logit model diagramı 3'te gösterildiği gibi üç (veya daha fazla) yuvadan oluştuğunda ise farklı yuvalardaki iki kategoriye ait olasılık oranlarının sadece bu iki kategorinin bulunduğu yuvalara eklenen veya çıkarılan kategorilerden etkilenmesi beklenir. Şekil 1.3 İç içe logit model diagramı 3'e göre, A (1.yuvadan) ve D (2. yuvadan) kategorilerine ait olasılık oranı 3. yuvaya bir kategori eklenmesinden veya çıkarılmasından etkilenmez.

İç içe logit model yapılarında, verilen örneklerde görüldüğü gibi, verinin yapısına bağlı olarak iç içe kurulan yuva sayısı değişkenlik gösterir. Şekil 1.1 Şekil 1.2 ve Şekil 1.3 olarak verilen örneklerden daha büyük boyutlu yapılar oluşturulabilir. Bu örneklerde yapının anlaşılabilmesi için yuvalara 1. yuva gibi başlıklar eklenmişti (bu gösterimler seviye bildirmiyor idi). Örneğin, alternatiflerin daha detaylı alt gruplara ayrılması gerektiğinde, model bu çok katmanlı yapıyı destekleyecek şekilde genişletilir. İç içe logit model, iç içe (alt alta) oluşturulan yuvaların sayısına göre adlandırılır; diagramın en uzun dalının seviyesi baz alınır. Şekil 1.4 İki seviyeli iç içe logit modelde testler kan testi ve idrar testi olmak üzere ikiye ayrılmış daha sonra kan ve idrar testleri de kendi içlerinde çeşitlendirilerek ayrı bir yuva yapısı oluşturulmuştur. Bu dengeli diagramda iki dalda da iç içe iki yuva bulunmaktadır. Dolayısıyla bu model iki seviyeli iç içe logit model olarak adlandırılır. Şekil 1.5'te ise hematolojik test türlerinin sınıflandırıldığı bir yuva ve bu yuvanın içine de hemogram testlerinin sınıflandırıldığı bir yuva daha eklenmiştir. Bu model dört seviyeli iç içe logit model olarak adlandırılır. Şekil 1.5 Dört seviyeli iç içe logit model'de görüleceği üzere, diagramın sağ tarafı hala iki seviyelidir fakat adlandırma yapılırken en uzun dal yapısı dikkate alınmıştır.



Şekil 1.4 İki seviyeli iç içe logit model



Şekil 1.5 Dört seviyeli iç içe logit model

1.10. İki Seviyeli İç İçe (Nested) Logit Model

İki seviyeli iç içe logit model, bağımlı değişkenin kategorilerini, yuvalar arasında hiyerarşik bir yapı içinde, iç içe geçmiş iki seviyede modelleyen bir yapıdır. Bu model, alternatifler arasındaki bağımlılıkları ve gruplar arası ilişkiyi dikkate alarak seçim olasılıklarını hesaplar.

Logit modelin temel mantığının açıklandığı Bölüm 1.4'te; ε_{nj}'nin gerçek fayda olan U_{nj} (ölçülebilen ve ölçülemeyen tüm bağımsız değişkenleri içeren) ile sadece modelde yer alan ve ölçülebilen değişkenleri içeren fayda V_{nj} arasındaki fark olduğu ve kurulan modelin ε_{nj}'lerin özelliklerine veya varsayımlarına göre farklılık gösterdiği vurgulanmıştı. Ek olarak standart bir logit modelde ε_{nj}'lerin bağımsız ve aynı dağılıma sahip ekstrem değerler (IID extreme value) olarak kabul edildiği belirtilmişti. İç içe logit modelde ε_{nj}'lerin kümülatif dağılımı *Generalized Extreme Value* (GEV) dağılımı olarak kabul edilir (Train, 2009). Ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$e^{-\ {}_{k=1}^{K}(\ {}_{j\in B_k} e^{-\frac{\epsilon_{nj}}{\lambda_k}})^{\lambda_k}}$$

GEV, standart logit modele yol açan ε_{nj} dağılımının genelleştirilmiş halidir. Burada da her ε_{nj}'nin marjinal dağılımı tek değişkenli aşırı değer dağılımıdır. İç içe logit modelde farklı yuvalar içindeki bağımlı değişken kategorileri için ε_{nj}'lerin korelasyonu sıfır iken, aynı yuva içindeki bağımlı değişken kategorilerine ait ε_{nj}'ler arasında korelasyon vardır. λ_k parametresi k yuvası içindeki alternatiflere ait ε_{nj}'ler arasındaki bağımsızlık derecesini gösterir. λ_k, log-toplam katsayısı olarak adlandırılır. λ_k yüksekse ε_{nj}'ler arasında daha güçlü bağımsızlık, daha düşük korelasyon vardır şeklinde yorumlanır. Dolayısıyla (1-λ_k) korelasyonu temsil eder. Korelasyon daha karmaşık bir ölçüdür fakat (1-λ_k) ile temsil edilebilir (McFadden, 1974). Tüm k'lar için $\lambda_k = 1$ yani tüm yuvalardaki tüm alternatifler arasında bağımsızlık varsa GEV dağılımı bağımsız aşırı değer terimlerinin çarpımı olarak ifade edilebilir. Bu durumda iç içe logit model multinomial logit modele indirgenmiş olur. Bu açıklama standart logit modeller ile iç içe logit model arasındaki farkı anlamaya yardımcı niteliktedir.

Logit modellerin amacı olan olasılık tahmini, iç içe logit modelde olasılıkların tanımlanması açısından standart logit modellere göre daha karmaşık bir hal almaktadır.

Modelin yapısını anlatmak için gösterilen diagramlardan da tahmin edileceği üzere bu modelde bir olayın belirli bir kategori ile sonuçlanma olasılığı koşullu olasılık ile gösterilebilir. Bir olayın belirli bir yuva içerisindeki bir kategori ile sonuçlanması için öncelikle bu yuvanın seçilmiş olması gerekir. Bu yapı koşullu olasılık ile açıklanır. Ayrıca burada verilen olasılığı daha net anlatabilmek için modele giren değişkenleri sınıflamakta fayda vardır. Bu model kurulurken gerçekleştirilen bir işlem değildir sadece verilen koşullu olasılığın anlaşılması için uygulanacaktır. Daha önce gözlemlenen/ölçülebilen ve modele dahil edilen bağımsız değişkenler V_{nj} (n: deneme sayısı, j: bağımlı değişken kategorisi) olarak tanımlanmıştı (Bölüm 1.4). V_{nj}'yi aynı yuvadaki her alternatif için sabit olan W_{nk} (k: ilgili yuva) ve bu yuva içindeki bağımlı değişken kategorilerine göre değişen Y_{nj} (j, k. yuva içinde bulunan bir bağımlı değişken kategorisi) olarak iki ayrı parça halinde düşünülürse, bağımlı değişkene ait j alternatif kümesinin K adet yuvaya $(B_1, B_2, \dots, B_k)$ ayrıldığı bir iç içe logit model için bir olayın i. kategori ile sonuçlanma olasılığı P_{ni} aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$P_{ni} = P_{ni\backslash B_k} * P_{nB_k}$$

$$P_{nB_k} = \frac{e^{W_{nk}+\lambda_k I_{nk}}}{\sum_{l=1}^{K} e^{W_{nl}+\lambda_l I_{nl}}}$$

$$P_{ni\backslash B_k} = \frac{e^{Y_{ni}/\lambda_k}}{\sum_{j\in B_k} e^{Y_{nj}/\lambda_k}}$$

$$I_{nk} = ln \sum_{j\in B_k} e^{Y_{nj}/\lambda_k}$$

$P_{ni\backslash B_k}$: olayın B_k yuvasından bir alternatif ile sonuçlandığı durumda i. alernatif ile sonuçlanma koşullu olasılığı,

P_{nB_k}: olayın B_k yuvasından bir alternatif ile sonuçlanma marjinal olasılığı

I_{nk}: alt modelden gelen bilgiyi üst modele aktararak alt ve üst modelleri bağlar (Ben-Akiva, 1973). Alt modelin paydasının logaritmasıdır yani n. olayın ilgili kategori ile sonuçlanmasının beklenen faydasıdır. B_k yuvasının kapsayıcı değeri (*inclusive value*) olarak da adlandırılır. $\lambda_k I_{nk}$ n. olayın k. yuvadaki bir kategori ile sonuçlanmasının beklenen faydasıdır. Burada üst model kavramı ile yuva seçimi, alt model kavramı ile ise bu yuva seçildikten sonra bu yuvadaki kategorilerin seçimi anlatılmaktadır. İki seçenekli logit model ve multinomial logit model kavramları düşünüldüğünde alt ve üst modelin de birer logit olduğu anlaşılmaktadır.

Bağımlı değişkenin B_k yuvasındaki i. kategorisi için olasılık açık olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$P_{ni} = \frac{e^{V_{ni}/\lambda_k}\left(\sum_{j \in B_k} e^{V_{nj}/\lambda_k}\right)^{\lambda_k - 1}}{\sum_{l=1}^{K}\left(\sum_{j \in B_l} e^{V_{nj}/\lambda_l}\right)^{\lambda_l}} \qquad \text{(Eşitlik 1.10.1)}$$

1.10.1. Model Varsayımları

İç içe (nested) logit model, multinomial logit modelin IIA (Independent of Irrelevant Alternatives) varsayımının, gerçek hayatı yansıtan veri setlerine her zaman uygun olmaması nedeniyle geliştirilmiştir. Bu modele, IIA varsayımının ihlal edildiği durumların daha iyi modellenmesi amacıyla gereksinim duyulmuştur. Bu nedenle, Bölüm 1.10'un girişinde modelin açıklanması sırasında modelin multinomial model ile farkını oluşturan IIA varsayımına dair bilgiler ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Ek olarak, tüm varsayımlar aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Bağımlı değişken ikiden fazla kategorilidir. Modele bağımlı değişkeni açıklayan ve aralarında yüksek korelasyon bulunmayan bağımsız değişkenler dahil edilir.

Model kurulurken kullanılan gözlemler birbirinden bağımsızdır (bir gözlemin sonucu diğerini etkilememelidir). Model tahmin hatalarının birbirinden bağımsız olması; diğer logit model başlıkları altında açıklandığı gibi modelin iyi bir şekilde kurgulanmasıyla yani bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkene ait olası kategorileri yeterince açıklaması ile sağlanır. Ayrıca bağımlı değişkene ait kategori sayısı ikiden fazla olduğu için belirtilmelidir ki, hiçbir bağımlı değişken kategorisi için logit olasılığı sıfır olmaz, sıfır olduğu düşünülüyorsa bu kategori modele dahil edilmez.

Aynı yuvadaki herhangi iki alternatif için, olasılıkların oranı, diğer tüm alternatiflerin özelliklerinden veya varlığından bağımsızdır. Yani, her yuvanın içinde IIA geçerlidir.

Farklı yuvalardaki herhangi iki alternatif için, olasılıkların oranı, iki yuvadaki diğer alternatiflerin özelliklerine bağlı olabilir. Farklı yuvalardaki alternatifler için genel olarak IIA geçerli değildir.

1.10.2. Katsayı Kestirimleri

Logit modellerde katsayı kestirimlerinin genellikle En Çok Olabilirlik Yöntemi (EÇO) ile gerçekleştirildiği bilgisi ve yönteme ilişkin detaylar Bölüm 1.7'de verilmiştir. İç içe logit modelde yöntem değişmemektedir. Katsayı kestirimleri için Eşitlik 1.10.1'de tanımlanan olasılığın log-olabilirlik fonksiyonuna yerleştirilmesi ve bu fonksiyonu maksimum yapan köklerin elde edilmesi ile tutarlı ve etkin parametre değerleri elde edilir (Brownstone ve Small, 1989).

Literatürde iç içe logit model için seçim olasılıklarının, marjinal ve koşullu logit olasılıklarına ayrılabilmesi özelliğinden faydalan bir katsayı kestirim yöntemi olan ardışık tahmin yöntemi de yer almaktadır. İlk olarak, yuva içindeki alternatiflerin seçimi için alt modeller tahmin edilir. Tahmin edilen katsayılar kullanılarak her alt model için kapsayıcı değer hesaplanır. İç içe logit modelde bazı parametreler birden fazla alt modelde yer alır. Üst ve alt modellerin ayrı ayrı tahmin edilmesi, modelde ortak olan bu parametreler için ayrı tahminler yapılmasına yol açar. Bu tahminler en çok olabilirlik yöntemi ile gerçekleştirilen eşanlı çözüme dayanan parametreler kadar etkin değildir (Train, 2009). Dolayısıyla tercih edilmemektedir.

1.10.3. Katsayı ve ODDS Oranlarının Yorumlanması

Katsayı ve Odds Oranlarının yorumlanması açısından multinomial logit model ile farklılık göstermemektedir. Yorumlar yine referans kategoriye göre yapılır. Ancak tahmin edilen olasılıkların, oluşturulan yuva yapısına bağlı olarak üretilen koşullu olasılıklar olduğu unutulmamalıdr.

1.10.4. Modelin Geçerliliği ve Uyum İyiliği Göstergeleri

Modelin geçerliliğinin incelenmesi ve uyum iyiliği göstergeleri açısından standart logit modeller ve iç içe logit model arasında fark yoktur. Bölüm 1.8'de aktarılan bilgiler iç içe logit model için de geçerlidir.

İç içe logit modelin değerlendirilmesine özel olarak üzerinde durulması gereken nokta, λ_k log-toplam katsayısının değerlendirilmesidir. Bu katsayı, modelin yapısal doğruluğunu ve yuvadaki alternatifler arasındaki bağımlılık düzeyini belirlemede kritik bir rol oynar. Yani λ_k, yuvaların iç içe logit model yapısına uygun şekilde tanımlandığını ve veri setinin bu modele uygunluğunu doğrulamak için incelenmelidir. λ_k, en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilen parametrelerden biridir. [0,1] aralığında olmalıdır fakat $\lambda_k = 1$ durumunda tüm yuvalardaki tüm alternatifler arasında bağımsızlık vardır. Bu durumda iç içe logit yerine multinomial logit model tercih edilmelidir veya yuva yapısı daha iyi oluşturularak λ_k tekrar test edilebilir.

2. GEREÇ VE YÖNTEM

2.1.Uygulama Verisi

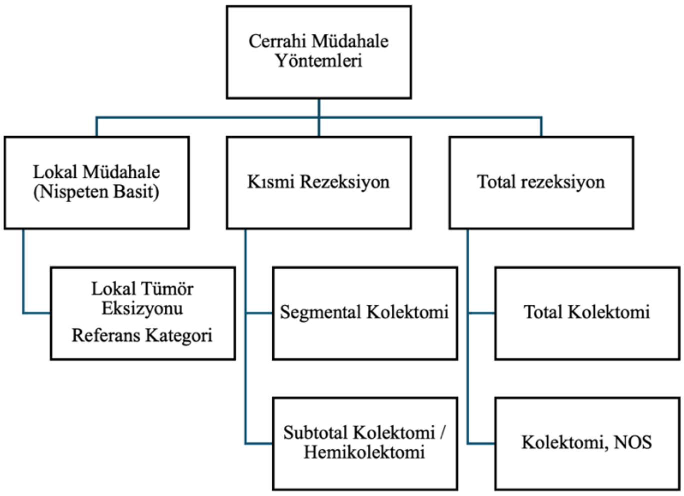
Bu tez kapsamında, SEER veri tabanından alınan bir veri seti üzerinde, üçüncü evre kolon kanseri hastalarına uygulanan cerrahi müdahale yöntemleri, bu yöntemlerin büyüklük ve önem seviyelerine göre iç içe bir yapı halinde sınıflandırılmıştır. Cerrahi müdahale yöntem türlerinin tercih edilmesinde etkili olan parametreler belirlenmiş ve bu parametrelerle olan ilişkileri açıklanarak, tercih olasılıkları iç içe logit model kullanılarak tahmin edilmiştir.

Kullanılan veri seti, 68.014 gözlem (satır) ve 18 değişken (sütun) içermektedir. Gözlemler, her bir hasta için sağlık verilerini temsil etmektedir. Bu veriler, kanser hastalarının demografik özellikleri (yaş, cinsiyet ve her hasta için eşsiz kimlik bilgisi), tanı yılı, tümör evresi, lenf nodu durumu, cerrahi müdahale türü, kanserli hücre bölgesi ve hayatta kalma bilgilerini içermektedir.

Bağımlı değişken, Cerrahi müdahale türü ("Type of Surgery category Primary Site") olarak belirlenmiştir. Bu değişken, "Lokal tümör Eksizyonu", "Segmental Kolektomi", "Subtotal Kolektomi / Hemikolektomi", "Total Kolektomi " ve " Kolektomi, NOS" kategorilerine sahiptir.

Yaş, tümör evresi ve kanserli hücre bölgesi parametreleri modelde bağımsız değişken olarak yer almaktadır. tümör evresi parametresi tümörün boyutunu ve çevre dokulara invazyon derecesini ifade eden bir değişkendir. Sayısal değeri arttıkça tümörün boyutu büyür ve çevre dokulara yayılma derecesi artar. Kategorileri 11, 12, 13 ve 14 olarak belirtilmiştir. Örneğin, 11 küçük bir tümörü tanımlarken, 14 büyük ve çevre dokulara ciddi şekilde yayılan bir tümörü temsil eder. Yaş, iki kategorili bir değişken olarak modele dahil edilmiş olup ilk grup 45 yaş ve altı hastaları, ikinci grup 45 yaş üzeri hastaları temsil etmektedir. Kanserli hücre bölgesi parametresi veri seti içinde kısaca Bölge olarak adlandırılmıştır. “cecum”, “ascending colon”, “hepatic flexure”, “transverse colon”, “splenic flexture, “descending colon” ve “sigmoid colon” kategorilerine sahiptir.

İç içe logit modeli oluşturan yuvalar Şekil 2.1 Cerrahi müdahale yöntemleri yuva yapısı’nda verilmiştir.



Şekil 2.1. Cerrahi müdahale yöntemleri yuva yapısı

2.2. Kullanılan Paketler

Modelin kurulması için açık kaynak kodlu R programlama dili paketlerinden; “readr (Wickham vd., 2024)”, “dplyr (Wickham vd., 2023)”, “tidyr (Wickham vd., 2024”, “mlogit (Croissant, 2020)”, “nestedLogit (Fox vd, 2023)” ve “broom (Robinson vd., 2024)” kullanılmıştır. İç içe logit modelin oluşturulabilmesi için gereken temel fonksiyonlar “mlogit” paketindeki “mlogit.data” ve “mlogit” fonksiyonlarıdır.

Uygulama gerçekleştirilirken veri seti R yazılımı üzerinde seer olarak adlandırılmıştır. Veri setine dahil olan kategorik değişkenler R üzerinde faktör olarak tanımlanıp kategorilerine uygun etiketler eklendikten sonra kullanılan temel kodlar aşağıdaki gibidir.

Veri seti her bir gözlem ile bağımlı değişkenin her bir kategorisinin eşleşmesini içerecek şekilde uzun formata dönüştürülmüştür. Bu doğrultuda ilgili gözlem ile bu gözlem (hasta) için gerçekleşen müdahale tipinin eşleştiği satıra bir, bu gözleme ait diğer satırlara sıfır değerini atayan bir mantık değişkeni oluşturulmuştur:

seer_long <- expand.grid(Patient_ID = unique(seer$Patient_ID), Surgery = levels(seer$Type_of_Surgery_category_Primary_Site)) %>% left_join(seer, by =

c("Patient_ID" = "Patient_ID")) %>% mutate(choice = as.logical(Type_of_Surgery_category_Primary_Site == Surgery)).

Bağımlı değişkene ait seçimin sonucu gösteren argüman *choice,* gözleme ait eşsiz tanımlayıcı değişkeni belirten argüman *chid.var,* bağımlı değişkenin olası sonuçlarını (tüm kategorilerini) temsil eden argüman *alt.var* olmak üzere veri, multinomial logit modeli oluşturan *mlogit* fonksiyonuna uygun hale getirilmiştir (bu yapının *dfidx()* fonksiyonu ile oluşturulması da yaygındır):

seer_mlogit <- mlogit.data(seer_long, choice = "choice", shape = "long", chid.var = "Patient_ID", alt.var = "Surgery")

mlogit() fonksiyonu temelde multinomial logit modelini uygular. *mlogit()* fonksiyonunun *nests* argümanı ile model iç içe logit modele dönüşür. Bağımlı değişkene ait yuva yapıları tanımlanmıştır:

nests <- list(Less_invasive = c("Lokal Tümör Eksizyonu"), Partial_resection = c("Segmental Kolektomi", "Subtotal Kolektomi/hemikolektomi"), Total_resection = c("Total Kolektomi", "Kolektomi, NOS"))

Model *mlogit()* fonksiyonu ile oluşturulmuştur.

model <- mlogit(choice ~ 1 | T_stage + Age +Primary_site, data = seer_mlogit, nests = nests, un.nest.el = TRUE, reflevel = "Lokal Tümör Eksizyonu")

Model katsayıları, katsayılara ilişkin p değerleri, modele ait log-toplam katsayısı elde edilmiştir:

summary(model)

Odds oranları elde edilmiştir:

exp(coef(model))

3. BULGULAR

3.1. Tanımlayıcı İstatistikler

Veri setinde bulunan kanser hastalarına uygulanmasına karar verilen cerrahi müdahale yöntemleri 2000-2019 yıllarına aittir. Veri setine dahil edilen hastaların %52,2'si kadın, %47,8'i erkektir. Cerrahi müdahale tipi, kanserli hücrelerin normal hücreler ile benzerliği sınıflandıran hücre diferansiyasyonu değişkeni ve kanser hücrelerinin bölgesini sınıflandıran bölge değişkenine ait frekans tabloları Çizelge 3.1 Frekans ve yüzde tablosu'nda verilmiştir. Bağımlı ve bağımsız değişkenlere ilişkin çapraz tablolar; Çizelge 3.2 Cerrahi müdahale yöntemi ve tümör evresi çapraz tablosu, Çizelge 3.3 Cerrahi müdahale yöntemi ve yaş çapraz tablosu ve Çizelge 3.4 Cerrahi müdahale yöntemi ve bölge çapraz tablosu çizelgelerinde verilmiştir.

Çizelge 3.1. Frekans ve yüzde tablosu

Cinsiyet	**Frekans**	**Yüzde**
KADIN	35.469	52,17
ERKEK	32.518	47,83
Yaş	**Frekans**	**Yüzde**
45 yaş ve altı	5.123	7,53
45 yaş üzeri	62.891	92,47
Cerrahi Müdahale Yöntemi	**Frekans**	**Yüzde**
Lokal Tümör Eksizyonu	208	0,31
Segmental Kolektomi	26.745	0,00
Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	38.980	57,31
Total Kolektomi	1.670	2,46
Kolektomi, NOS	405	0,60
<NA>	6	0,01
Tümörün Evresi	**Frekans**	**Yüzde**
11	3.237	4,76
12	5.627	8,27
13	45.185	66,43
14	13.960	20,53
<NA>	5	0,01
Bölge	**Frekans**	**Yüzde**
Cecum	16.560	24,35
Ascending colon	12.932	19,01
Hepatic flexure	3.154	4,64
Transverse colon	6.024	8,86
Splenic flexure	2.638	3,88
Descending colon	4.512	6,63
Sigmoid colon	22.194	32,63
Hücre Derecelendirme	**Frekans**	**Yüzde**
İyi Diferansiye	3.506	5,15
Orta Derecede Diferansiye	46.099	67,78
Zayıf Diferansiye	15.508	22,80
Diferansiye Olmamış	1.797	2,64
<NA>	1.104	1,62

Çizelge 3.2. Cerrahi müdahale yöntemi ve tümör evresi çapraz tablosu

Çapraz Tablo	**Tümör Evresi**			
Cerrahi Müdahale Yöntemi	**11**	**12**	**13**	**14**
Lokal Tümör Eksizyonu	122	8	61	17
Segmental Kolektomi	1.694	2.564	17.770	4.715
Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	1.340	2.919	26.242	8.476
Total Kolektomi	54	94	848	674
Kolektomi, NOS	27	41	260	77

Çizelge 3.3. Cerrahi müdahale yöntemi ve yaş çapraz tablosu

Çapraz Tablo	**Yaş**	
Cerrahi Müdahale Yöntemi	**45 yaş ve altı**	**45 yaş üzeri**
Lokal Tümör Eksizyonu	17	191
Segmental Kolektomi	2.374	24.371
Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	2.464	36.516
Total Kolektomi	236	1.434
Kolektomi, NOS	31	374

Çizelge 3.4. Cerrahi müdahale yöntemi ve bölge çapraz tablosu

Çapraz Tablo	**Bölge**						
Cerrahi Müdahale Yöntemi	**Cecum**	**Ascending Colon**	**Hepatic Flexure**	**Transverse colon**	**Splenic flexure**	**Descending Colon**	**Sigmoid colon**
Lokal Tümör Eksizyonu	8	34	6	18	5	16	121
Segmental Kolektomi	2.206	1.649	377	2.395	1.068	1.473	17.577
Subtotal Kolektomi/ hemikolektomi	13.966	10.979	2.699	3.385	1.463	2.865	3.623
Total Kolektomi	315	202	66	182	88	127	690
Kolektomi, NOS	62	66	6	43	14	31	183

3.2. Model Sonuçlarının Yorumlanması

Üçüncü seviye kolon kanseri hastalarında uygulanan cerrahi müdahale yöntemlerinin seçiminde yaş, kanser hücresinin bulunduğu bölge ve tümör evresi bağımsız değişkenlerinin etkileri, Şekil 2.1'deki iç içe yuvalandırılmış yapı çerçevesinde modellendiğinde; bu değişkenlerin her bir cerrahi yöntemin tercih edilme olasılığına olan katkıları Çizelge 3.5 İç içe logit model katsayı tahminleri'ne göre değerlendirilmiştir.

Kullanılan veri setinde, [0,1] aralığında yer alan bir log-toplam katsayısı, farklı iç içe yapılar veya farklı bağımsız değişkenlerin modele eklenmesi ile elde edilememiştir. Bu katsayının 1'e eşit ya da 1'e yakın olması, yuvalardaki tüm alternatifler arasında bağımsızlık olduğunu ve bu durumda iç içe logit model yerine multinomial logit modelin daha uygun olduğunu gösterir. Ancak burada kurulan modelde elde edilen -0,03 değerindeki log-toplam katsayısı sıfıra oldukça yakındır. Bu durum, iç içe logit modelin kullanılmasının yuva yapıları arasındaki ilişkiler açısından anlamlı olduğunu desteklemektedir. Modelin uygulanmasında farklı bir varsayım bulunmamaktadır.

Model, veri setinde bulunan diğer bağımsız değişkenler ile de oluşturulmuş fakat diğer bağımsız değişkenlerin modele katkı sağlamadığı görülmüştür.

Mevcut modeldeki yuva yapısı kaldırılarak multinomial logit model elde edilmiş, bağımsız değişkenler kaldırılarak boş model elde edilmiş ve bu üç model Çizelge 3.5 model karşılaştırmaları doğrultusunda karşılaştırılmıştır. İç iç logit modeli loglik ve AIC katsayılarının diğer modellere kıyasla daha küçük olması sebebi ile modeli diğer modellerden daha iyi açıkladığı yorumu yapılmıştır. Çizelge 3.5 Model karşılaştırmaları'nda; Nested Logit olarak ifade edilen model yaş, kanser hücresinin bulunduğu bölge ve tümör evresi bağımsız değişkenlerini içerirken (uygulamada kullanılan model), Nested2 Logit modeli sadece kanser hücresinin bulunduğu bölge ve tümör evresi bağımsız değişkenlerini içermektedir.

Çizelge 3.5. Model karşılaştırmaları

Model	logLik	rho2	rho20	AIC	BIC	nobs
Null Model	-48994.14	0.0000	0.4964	97998.27	NA	60451
Multinomial Logit	-36519.43	0.2546	0.6246	73126.85	NA	60451
Nested Logit	-36518.25	0.2546	0.6247	73126.51	NA	60451
Nested2 logit	-36550.82	0.2540	0.6243	73183.64	NA	60451

ODDS oranları cerrahi müdahale yöntemi seçimi kategorilerinden, modelde referans seçilen lokal tümör eksizyonu ile tabloda belirtilen cerrahi yöntem kategorisine aittir ve bu oran modelde oluşturulan yuva yapısı kapsamında tabloda belirtilen bağımsız değişken kategorisinin etkisini aynı bağımsız değişkene ait referans kategorinin etkisi ile karşılaştırarak vermektedir.

$$OR = \frac{ODDS_{BD_{mevcut\ kategori}}}{ODDS_{BD_{referans\ kategori}}}$$

Burada yorumlar teori anlatımında değinildiği üzere OR>1 iken olasılık artma yüzdesi; OR<1 iken olasılık azalma yüzdesi olarak hesaplanır. İlgili bağımsız değişken kategorisinin etkisi, bağımlı değişkenin referans kategorisine göre (1-OR)*100 formulü ile olasılık azalma yüzdesini verirken; (OR-1)*100 ile olasılık artış yüzdesini verir. OR=1 ise ilgili bağımsız değişkenin etkisinden söz edilemez.

Böylece, her bir bağımsız değişkenin cerrahi yöntem tercihlerine olan olasılıksal katkısı yuvalar arası ilişkiler doğrultusunda değerlendirilmiştir. Yorumlarda lokal tümör eksizyonu referans kategorisi LTE olarak belirtilmiştir.

- Tümör evresi değişkeninin, cerrahi müdahale seçiminde etkisi istatistiksel olarak anlamlıdır (tüm katsayılar için p<0,001). Hastada evre 11 yerine evre 12 tespit edilmesi durumunda total kolektomi seçilme olasılığı LTE seçilme olasılığının 11,78 katıdır. Kolektomi seçilme olasılığı LTE seçilme olasılığının 11,76 katı, Subtotal Kolektomi/hemikolektomi seçilme olasılığı LTE seçilme olasılığının 9,86 katı ve Segmental Kolektomi seçilme olasılığı ise LTE seçilme olasılığının 9,88 katıdır.

- Hastada evre 11 yerine evre 13 tespit edildiğinde total kolektomi seçilme olasılığı LTE seçilme olasılığının 7,26 katı, kolektomi seçilme olasılığı LTE seçilme olasılığının 7,31 katı, Subtotal Kolektomi/hemikolektomi seçilme olasılığı LTE seçilme olasılığının 6,09 katı ve Segmental Kolektomi seçilme olasılığı ise LTE seçilme olasılığının 6,13 katıdır.

- Hastada evre 11 yerine evre 14 tespit edildiğinde, total kolektomi seçilme olasılığı LTE seçilme olasılığının 19,74 katı, kolektomi seçilme olasılığı LTE seçilme olasılığının 20,34 katı, Subtotal Kolektomi/hemikolektomi seçilme olasılığı LTE seçilme olasılığının 7,74 katı ve Segmental Kolektomi seçilme olasılığı ise LTE seçilme olasılığının 7,81 katıdır.
- Yaş değişkenine ait β katsayıları istatistiksel olarak anlamlı değildir (sırasıyla p=0,562; p=0,564; p=0,081; p=0,073) ve bağımlı değişken kategorileri arasında yapılan seçimde etkili olmadığını görülmektedir. Bu değişken modelin log-sum katsayısı açısından anlamlı bir etki oluşturduğu için modelden çıkarılmamıştır.

- Kanserli hücrelerinin ascending colon bölgesinde görülmesi, cerrahi müdahale yöntemi seçiminde bağımlı değişken kategorileri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark oluşturmaktadır ($p<0,05$). β katsayılarının negatif, OR'nin 1'den küçük olması bu etkinin negatif yönlü olduğunu göstermektedir. Kanserli hücrelerinin ascending colon bölgesinde görülmesi cerrahi müdahale yönteminin referans kategori olan LTE olarak seçilmesine göre; segmental kolektomi veya subtotal kolektomi olarak seçilme olasılığını %62, total kolektomi ve kolektomi seçilme olasılığını %63 azaltır.

- Kanserli hücrelerinin hepatic flexure bölgesinde görülmesi, cerrahi müdahale yöntemi seçiminde bağımlı değişken kategorileri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark yaratmamaktadır. OR'lere göre, Kanserli hücrelerinin hepatic flexure bölgesinde görülmesi cerrahi müdahale yönteminin referans kategori olan LTE olarak seçilmesine göre; segmental kolektomi olarak seçilme olasılığını %35, subtotal kolektomi olarak seçilme olasılığını %34, total kolektomi olarak seçilme olasılığını 49%, kolektomi seçilme olasılığını %53 arttırır.

- Kanserli hücrelerinin transversa colon bölgesinde görülmesi cerrahi müdahale yönteminin referans kategori olan LTE olarak seçilmesine göre; segmental kolektomi olarak seçilme olasılığını %72, subtotal kolektomi olarak seçilme olasılığını %71 azaltır. Bu tahminler istatistiksel olarak anlamlıdır ($p<0,05$). Kanserli hücrelerinin transversa colon bölgesinde görülmesi cerrahi müdahale yönteminin referans kategori olan LTE olarak seçilmesine göre; total kolektomi olarak seçilme olasılığını 48%, kolektomi seçilme olasılığını ise %40 azaltır. Bu katsayılar istatistiksel olarak anlamlı bulunmamıştır (sırasıyla $p=0,204$ $p=0,199$).

- Kanserli hücrelerinin splenic flexure bölgesinde görülmesi, cerrahi müdahale yöntemi seçiminde bağımlı değişken kategorileri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark yaratmamaktadır. OR'lere göre, kanserli hücrelerinin splenic flexure bölgesinde görülmesi cerrahi müdahale yönteminin referans kategori olan LTE olarak seçilmesine göre; segmental kolektomi olarak seçilme olasılığını %48, subtotal kolektomi olarak seçilme olasılığını %46 azaltırken, total kolektomi olarak seçilme olasılığını 1%, kolektomi seçilme olasılığını %2 arttırır.

- Kanserli hücrelerinin descending colon bölgesinde görülmesi, cerrahi müdahale yöntemi seçiminde bağımlı değişken kategorileri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark yaratmamaktadır. OR'lere göre, kanserli hücrelerinin splenic flexure bölgesinde görülmesi cerrahi müdahale yönteminin referans kategori olan LTE olarak seçilmesine göre; segmental kolektomi olarak seçilme olasılığını %60, subtotal kolektomi olarak seçilme olasılığını %59, total kolektomi veya kolektomi seçilme olasılığını %33 azaltır.

- Kanserli hücrelerinin sigmoid colon bölgesinde görülmesi cerrahi müdahale yönteminin referans kategori olan LTE olarak seçilmesine göre; segmental kolektomi olarak seçilme olasılığını %79, subtotal kolektomi olarak seçilme olasılığını %77 azaltır. Bu sonuçlar istatistiksel olarak anlamlıdır ($p<0,001$). Kanserli hücrelerinin sigmoid colon bölgesinde görülmesi cerrahi müdahale yönteminin referans kategori olan LTE olarak seçilmesine göre; total kolektomi veya kolektomi seçilme olasılığını %57 azaltır ($p<0,05$).

Çizelge 3.6. İç içe logit model katsayı tahminleri

Değişken	β	SH	p	OR	Alt_95 (OR)	Üst_95 (OR)
(Intercept):Segmental Kolektomi	6,17	0,63	<0,001	479,51	140,24	1639,57
(Intercept):Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	6,13	0,63	<0,001	460,41	134,65	1574,28
(Intercept):Total Kolektomi	2,35	0,65	<0,001	10,48	2,95	37,19
(Intercept):Kolektomi, NOS	2,40	0,65	<0,001	10,99	3,10	39,02
Evre 12:Segmental Kolektomi	2,29	0,55	<0,001	9,88	3,38	28,85
Evre 12:Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	2,29	0,55	<0,001	9,86	3,38	28,79
Evre 12:Total Kolektomi	2,47	0,57	<0,001	11,78	3,86	35,97
Evre 12:Kolektomi, NOS	2,46	0,57	<0,001	11,76	3,85	35,92
Evre 13:Segmental Kolektomi	1,81	0,27	<0,001	6,13	3,60	10,44
Evre 13:Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	1,81	0,27	<0,001	6,09	3,57	10,37
Evre 13:Total Kolektomi	1,98	0,30	<0,001	7,26	4,00	13,16
Evre 13:Kolektomi, NOS	1,99	0,30	<0,001	7,31	4,03	13,25
Evre 14:Segmental Kolektomi	2,06	0,39	<0,001	7,81	3,61	16,87
Evre 14:Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	2,05	0,39	<0,001	7,74	3,58	16,71
Evre 14:Total Kolektomi	2,98	0,42	<0,001	19,74	8,72	44,67
Evre 14:Kolektomi, NOS	3,01	0,42	<0,001	20,34	8,99	46,03
Yaş (>45):Segmental Kolektomi	-0,26	0,45	0,562	0,77	0,32	1,85
Yaş (>45):Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	-0,26	0,45	0,564	0,77	0,32	1,85
Yaş (>45):Total Kolektomi	-0,79	0,45	0,081	0,45	0,19	1,10
Yaş (>45):Kolektomi, NOS	-0,81	0,45	0,073	0,44	0,18	1,08
Bölge Ascending colon:Segmental Kolektomi	-0,97	0,48	<0,05	0,38	0,15	0,97
Bölge Ascending colon:Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	-0,97	0,48	<0,05	0,38	0,15	0,96
Bölge Ascending colon:Total Kolektomi	-0,99	0,48	<0,05	0,37	0,14	0,96
Bölge Ascending colon:Kolektomi, NOS	-1,00	0,48	<0,05	0,37	0,14	0,95
Bölge Hepatic flexure:Segmental Kolektomi	0,30	1,08	0,783	1,35	0,16	11,17
Bölge Hepatic flexure:Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	0,29	1,08	0,784	1,34	0,16	11,14
Bölge Hepatic flexure:Total Kolektomi	0,40	1,09	0,712	1,49	0,18	12,62
Bölge Hepatic flexure:Kolektomi, NOS	0,42	1,09	0,698	1,53	0,18	12,89
Bölge Transverse colon:Segmental Kolektomi	-1,29	0,52	<0,05	0,28	0,10	0,77
Bölge Transverse colon:Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	-1,25	0,52	<0,05	0,29	0,10	0,79
Bölge Transverse colon:Total Kolektomi	-0,67	0,53	0,204	0,51	0,18	1,44
Bölge Transverse colon:Kolektomi, NOS	-0,68	0,53	0,199	0,51	0,18	1,43
Bölge Splenic flexure:Segmental Kolektomi	-0,66	0,82	0,419	0,52	0,10	2,56
Bölge Splenic flexure:Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	-0,62	0,82	0,447	0,54	0,11	2,66
Bölge Splenic flexure:Total Kolektomi	0,01	0,82	0,991	1,01	0,20	5,07
Bölge Splenic flexure:Kolektomi, NOS	0,02	0,82	0,985	1,02	0,20	5,11
Bölge Descending colon:Segmental Kolektomi	-0,92	0,61	0,131	0,40	0,12	1,31
Bölge Descending colon:Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	-0,89	0,61	0,142	0,41	0,12	1,35
Bölge Descending colon:Total Kolektomi	-0,40	0,62	0,521	0,67	0,20	2,26
Bölge Descending colon:Kolektomi, NOS	-0,40	0,62	0,519	0,67	0,20	2,25
Bölge Sigmoid colon:Segmental Kolektomi	-1,54	0,43	<0,001	0,21	0,09	0,50
Bölge Sigmoid colon:Subtotal Kolektomi/hemikolektomi	-1,46	0,43	<0,001	0,23	0,10	0,54
Bölge Sigmoid colon:Total Kolektomi	-0,85	0,43	<0,05	0,43	0,18	1,00
Bölge Sigmoid colon:Kolektomi, NOS	-0,85	0,43	<0,05	0,43	0,18	1,00
Log-toplam	-0,03					

β: regresyon katsayısı, SH: standart hata

4. TARTIŞMA

İç içe logit model, bağımlı değişken kategorilerine ilişkin olasılık tahminleri sağlaması ile oldukça faydalıdır. Kategorik verileri modellemesi ve kısıtlayıcı varsayımlarının olmaması da tercih edilmesi için önemli etkenlerdendir. Bununla birlikte, bağımlı ve bağımsız değişkenlerin kategorilerinin sayısının artması durumunda yorumlamada zorluklar ve karmaşalar ortaya çıkabilmektedir. Özellikle, bağımsız değişkenlere ait kategorilerden bir kısmının istatistiksel olarak anlamlı, bir kısmının ise anlamsız olması, ilgili değişkenin modele dahil edilmesi gerektiğinde, anlamsız kategoriler arasında birçok yorumlanamayacak karşılaştırmanın gerçekleşmesine neden olmaktadır. Ayrıca, model sonuçlarında karşılaştırmaların referans kategoriye göre yapılması, referans kategori dışındaki iki kategori arasında yorum yapma gerekliliği doğduğunda ek zorluklar yaratmaktadır. Bu tür durumlarda, yeni bir referans değişken belirlenmesi ya da mevcut referans değişkenin verilerinin modele yeniden dahil edilerek yeni oranların elde edilmesi gerekmektedir. Bu gereklilikler, modelin uygulama sürecinde dikkatli bir planlama ve sonuçların yorumlanmasında özenli bir yaklaşımı zorunlu kılmaktadır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu araştırmada, üçüncü seviye kolon kanseri hastalarına uygulanan cerrahi müdahale yöntemlerinin seçiminde, yaş, kanser hücresinin bulunduğu bölge ve tümör evresi değişkenlerinin olasılıksal katkıları iç içe logit model kullanılarak değerlendirilmiştir. Model, hiyerarşik yapıdaki cerrahi yöntemlerin olasılık tahminleri için ilgili bağımsız değişkenlerin karar süreçlerine olan etkilerini ortaya koymuştur.

Model sonuçları, cerrahi müdahale tercihleri ile ilgili çıkarımlar sağlamakla birlikte, karşılaştırmaların yalnızca referans kategoriye göre yapılması, alternatif kategoriler arasında doğrudan kıyaslama yapılmasını güçleştirmiştir.

Araştırmanın bulgularına dayanarak aşağıdaki öneriler paylaşılmıştır.

İç içe logit modeli, hiyerarşik yapılar için güçlü bir araç olmakla birlikte, bağımsız değişkenlerin seçimi dikkatli bir şekilde yapılmalıdır. Anlamsız kategorilerin etkilerini azaltmak için, ön değerlendirme süreçleri ile değişkenlerin önemi analiz edilmelidir.

Karşılaştırmaların daha geniş bir bakış açısıyla yapılabilmesi için, farklı referans kategoriler kullanılarak alternatif oranların hesaplanması önerilir. Böylece model sonuçlarının çeşitliliği artırılabilir.

Bu model, sosyal bilimler alanlarında daha çok tercih edilmektedir. Hasta özelliklerine dayalı bireyselleştirilmiş tedavi seçeneklerinin belirlenmesi gibi sağlık araştırmaları için de faydalı olacaktır.

Modelin genişletilmesi, farklı hasta gruplarında uygulanması ve literatürde yer alan diğer yöntemlerle karşılaştırılması, daha kapsamlı çıkarımlar yapılmasına olanak sağlayabilir.

KAYNAKLAR

Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification

Aldrich, J.H. and Nelson, F.D. (1984). Linear Probability, Logit and Probit Models.

Alpar, R. (2017). Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemler

Ben-Akiva, M. and McFadden, D. (1997). Modeling Methods for Discrete Choice Analysis

Bierlaire, M. and Lotan, T. (1996). On The Overspecification of Multinomial and Nested Logit Models Due to Alternative Specific Constants

Brownstone and Small, (1989). Efficient Estimation of Nested Logit Models

Chandra, M. and Chalumuri, R.S. (2014). Mode Choice Analysis Using Generalized Nested Logit Model.

Commenges, D. and Rondeau, V. (2006). Relationship between Derivatives of the Observed and Full Loglikelihoods and Application to Newton-Raphson Algorithm

Davitadze, A. (2024). Modeling Consumer Choice between Public and Private Health Care in Russia

Fox, J. (1997). Applied Regression Analysis, Linear Models, and Related Methods

Friendly, M. and Fox, J. (2023). Nested-dichotomies Logistic Regression Models (R Documentary)

Harrell, F.E. (2001). Regression Modeling Strategies with Application toLinear Models, Logistic Regression and Survival Analysis

Hildebrandt, L., Abe, M. & Boztuğ, Y. (2014). Investigating the competitive assumption of Multinomial Logit models of brand choice by nonparametric modeling

Liao, T.F. (1994). Interpretting Probability Models Logit, Probit, and Other Generalized Linear Models

Lin, Y.H. (2024). Bilevel Competitive Facility Location and Design Under a Nested Logit Model

McFadden, D. (1976). The Measurement of Urban Travel Demand

Morey, E. (1998). TWO RUMs uncloaked: Nested-logit models of site choice and nested-logit models of participation and site choice

Silbernhorn, N. Bozkurt, Y. Hildebrandt, L. (2007). Estimation with the Nested Logit Model: Specifications and Software Particularities

Tiriana, J.G. (2023). On the Newton-Raphson Method and Its Modifications

Train, K. (2009). Discrete Choice Methods with Simulation