



**(3+1)-BOYUTLU B-TİPİ KADOMTSEV-PETVİASHVİLİ
DENKLEMİ İÇİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MÜNEVVER GÖKÇEM GÜLSEV

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
ARALIK – 2024**

**(3+1)-BOYUTLU B-TİPİ KADOMTSEV-PETVİASHVİLİ
DENKLEMİ İÇİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MÜNEVVER GÖKÇEM GÜLSEV

ORCID ID:0009-0003-1171-8931

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ ULVİYE DEMİRBİLEK
ORCID ID:0000-0002-5767-1089**

**MERSİN
ARALIK – 2024**

ÖZET

(3+1)-BOYUTLU B-TİPİ KADOMTSEV–PETVIASHVILI DENKLEMİ İÇİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLER

Bu çalışmada, doğrusal olmayan dalga dinamiklerini tanımlayan, çok boyutlu sistemlerde karmaşık yapılar sergileyen ve özellikle sıvı yüzey dalgaları, plazma fiziği ve optik solitonlar gibi birçok fiziksel fenomenin anlaşılması ve modellenmesi açısından büyük bir öneme sahip olan (3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili (KP) denkleminin analitik ve nümerik çözümlerine odaklanılmıştır.

Analitik çözümler için alt-denklemler ve Sardar alt-denklemler yöntemleri uygulanmış ve doğrusal olmayan denklemler için tam çözümler elde edilmiştir. Nümerik çözüm yöntemi olarak ise Rezidual Kuvvet Serisi Metodu (RKSM) kullanılmıştır. Çalışmada, elde edilen çözümler Mathematica yazılımı kullanılarak 2D, 3D ve kontur grafiklerle görselleştirilmiştir. Bu görselleştirmeler, çözümlerin fiziksel anlamını ve davranışlarını daha iyi değerlendirebilmemize olanak tanımıştır. Ayrıca belirli parametrelerle analitik ve nümerik çözümler arasında karşılaştırmalar yapılarak yöntemlerin doğruluğu ve etkinliği analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: (3+1)-Boyutlu KP Denklemi, Alt-Denklem Yöntemi, Sardar Alt-Denklem Yöntemi, Rezidual Kuvvet Serisi Metodu, Tam Çözümler.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ulviye Demirbilek, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS FOR THE (3+1)-DIMENSIONAL B-TYPE KADOMTSEV–PETVIASHVILI EQUATION

In this study, the analytical and numerical solutions of the (3+1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili (KP) equation, which is an important mathematical model describing nonlinear wave dynamics, exhibiting complex structures in multidimensional systems, and particularly significant for understanding and modeling various physical phenomena such as surface waves, plasma physics, and optical solitons, are focused on.

For the analytical solutions, the sub-equation and Sardar sub-equation methods were applied, and exact solutions for nonlinear equations were obtained. The Residual Power Series Method (RKSM) was employed as the numerical solution method. The obtained solutions were visualized using 2D, 3D, and contour plots with the help of Mathematica software. These visualizations allowed for a better evaluation of the physical meaning and behavior of the solutions. Additionally, comparisons between the analytical and numerical solutions were made for specific parameters, and the accuracy and effectiveness of the methods were analyzed.

Keywords: (3+1)-Dimensional KP Equation, Sub-Equation Method, Sardar Sub-Equation Method, Residual Power Series Method, Exact Solutions.

Advisor: Asst. Prof. Dr. Ulviye Demirbilek, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın gerekleőtirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaőan, bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan her sorun yaőadıęımda yanına ekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden hiçbir zaman esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düőündüęüm kıymetli ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren Dr. Öğret. Üyesi Ulviye DEMİRBEK hocama teőekkürü bir borç biliyor ve őükranlarımı sunuyorum.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN KAPAK	i
İÇ KAPAK	ii
ONAY	iii
ETİK BEYAN	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
TABLolar DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	5
3.1. Temel kavramlar	5
3.2. Balans Dengeleme Yöntemi	6
3.3. Analitik ve Nümerik Çözüm Metotları	7
3.4. Alt-Denklem Metodu	8
3.5. Sardar Alt-Denklemi	8
3.6. Rezidual Kuvvet Seri Metodu (RKSM)	11
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	13
4.1. (3+1)-Boyutlu B-Tipi Kadomtsev-Petviashvili Denklemi	14
4.1.1. Alt Denklem Metodu Uygulamaları	14
4.1.2. Sardar Alt Denklem Metodu Uygulamaları	25
4.1.3. Rezidual Kuvvet Seri Metodu	50
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	59
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	65

TABLÖLAR DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 1. Denklemin tam çözümü ile nümerik olarak elde edilen üç farklı çözüm (v_1, v_2, v_3) arasındaki karşılaştırması ve mutlak hataları	53
Tablo 2. Denklemin tam çözümü ile RKSM ile elde edilen $u_1 = u_1(x, y, z, t)$, $u_2 = u_2(x, y, z, t)$ ve $u_3 = u_3(x, y, z, t)$ çözümlerinin karşılaştırması	57



ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 4.1. Denklem (4.9)' da elde edilen $v_{1,1}(x, y, z, t)$ ' in $\alpha = 1; \beta = 0.27; \gamma = 0.51; \varepsilon = -0.33; \kappa_1 = -1; \kappa_2 = 1; \kappa_3 = -1; y = 0.1; z = 0.1$ ve $t=0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği	23
Şekil 4.2. Denklem (4.13)' te elde edilen $v_{1,3}(x, y, z, t)$ 'ün $\alpha = -1; \beta = 0.27; \gamma = 0.51; \varepsilon = 0.33; \kappa_1 = 1; \kappa_2 = 1; \kappa_3 = 1; y = 0.1; z = 0.1$ ve $t=0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği	24
Şekil 4.3. Denklem (4.17)' de elde edilen $v_{1,5}(x, y, z, t)$ ' in $\varepsilon = 0; \alpha = 1; \beta = 0.27; \gamma = 0.51; \varepsilon = -0.33; \kappa_1 = -1; \kappa_2 = 1; \kappa_3 = -1; y = 0.1; z = 0.1$ ve $t=0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği	24
Şekil 4.4. Denklem (4.22)' de elde edilen $v_{1,7}(x, y, z, t)$ ' nin $\alpha = 1; \beta = 0.27; \gamma = 0.51; \varepsilon = -0.33; \kappa_1 = -1; \kappa_2 = 1; \kappa_3 = -1; y = 0.1; z = 0.1$ ve $t=0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği	25
Şekil 4.5. Denklem (4.42)' de elde edilen $v_{2,1}(\xi)$ ' in $\alpha = 1; \beta = 0.3; \gamma = 0.21; \gamma = 0.7; y = 0.1; z = 0.1; p = 1; q = 1; \varepsilon_2 = 0.5; \omega = 0.9$ ve $\varrho_0 = 0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği	49
Şekil 4.6. Denklem (4.44)' te elde edilen $v_{2,2}(\xi)$ ' nin $\alpha = -1; \beta = 0.3; \gamma = 0.21; \gamma = 0.7; y = 0.1; z = 0.1; p = 1; q = 1; \varepsilon_2 = 0.5; \omega = 0.9$ ve $\varrho_0 = 0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği	49
Şekil 4.7. Denklem (4.68)' de elde edilen $v_{2,14}(\xi)$ ' ün $\alpha = 1; \beta = -0.5; \gamma = 0.9; \gamma = 0.7; y = 0.1; z = 0.1; p = 1; q = -1; \varepsilon_2 = 0.5; \omega = 0.9;$ $\varrho_0 = 0.5$ ve $\varrho_2 = 0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği	50
Şekil 4.8. Denklem (4.1) denkleminde yer alan $v_{1,1}(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=0.95; \beta=1; \gamma=1; \varepsilon = -1; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.2; \kappa_3=0.2; y=2; z=2; t=0.9$ değerleri için analitik çözüm grafiği	54
Şekil 4.9. Denklem (4.11) denkleminde elde edilen $v_3(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=0.95; \beta=1; \gamma=1; \varepsilon = -1; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.2; \kappa_3=0.2; y=2; z=2; t=0.9$ değerleri için nümerik çözüm grafiği	54
Şekil 4.10. (4.1) ve (4.11) denklemlerinden elde edilen $v_{1,1}(x, y, z, t)$ ve $v_3(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=0.95; \beta=1; \gamma=1; \varepsilon = -1; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.2; \kappa_3=0.2; y=2; z=2; t=0.9$ değerlerine göre mutlak hata grafiği	54

Şekil 4.11. (4.17) denkleminde yer alan $u_{1.5}(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=2; \beta=0.3; \gamma=4; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.8; \kappa_3=0.2; y=3; z=3; t=0.9$ değerleri için analitik çözüm grafiği	58
Şekil 4.12. Denklem (4.146)'da elde edilen $u_3(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=2; \beta=0.3; \gamma=4; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.8; \kappa_3=0.2; y=3; z=3; t=0.9$ değerleri için nümerik çözüm grafiği	58
Şekil 4.13. (4.17) ve (4.146) denklemlerinden elde edilen $u_{1.5}(x, y, z, t)$ ve $u_3(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=2; \beta=0.3; \gamma=4; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.8; \kappa_3=0.2; y=3; z=3; t=0.9$ değerlerine göre mutlak hata grafiği	58

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simgesi	Tanım
R	Reel sayılar
η	Eta
ν	Nu
ρ	Rho
Υ	Upsilon
ξ	Xi
RKSM	Rezidual Kuvvet Serisi Metodu



1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, matematik tarihinde derin kökleri olan ve modern bilim ile mühendisliğin gelişiminde kritik bir rol oynayan bir araştırma alanıdır. 17. yüzyılda, diferansiyel denklemler teorisine yönelik önemli bir gelişim süreci başlamıştır. Bu dönemde Blaise Pascal ve John Wallis gibi önde gelen matematikçiler, integral ve diferansiyel hesabın temellerini atmışlardır (Pascal, 1647a, 1654b; Wallis, 1655a, 1685b). Pascal, diferansiyel denklemleri olasılık ve hidrodinamik alanlarda kullanarak bu alanda ilerlemeye katkıda bulunmuştur. Bu sürecin ardından, 17. yüzyılın sonlarına doğru Newton ve Leibniz, diferansiyel denklemler teorisini literatüre kazandırarak bu alanın gelişiminde dönüm noktası olmuşlardır (Leibniz, 1684; Newton, 1687).

18. ve 19. yüzyıllarda, diferansiyel denklemler teorisi önemli ölçüde derinleştirilmiş ve Brook Taylor ve Colin Maclaurin, diferansiyel hesaplamalar ve bunların mühendislik problemlerine uygulanması konusundaki çalışmalarıyla bu alana katkı sağlamışlardır (Taylor, 1715; Maclaurin, 1742). Aynı zamanda Jean-Baptiste Joseph Fourier, Carl Friedrich Gauss, Pierre-Simon Laplace, Siméon Denis Poisson ve Henri Poincaré (Laplace, 1799; Poisson, 1812; Fourier, 1822; Gauss, 1839; Poincaré, 1892) gibi matematikçiler de bu alana büyük katkılarda bulunmuştur. Fourier'in ısı iletimi üzerine yaptığı çalışmalar, kısmi diferansiyel denklemlerin kullanımının önemini ortaya koymuştur. Gauss ve Laplace, yerçekimi ve elektriksel potansiyellerin analizinde diferansiyel denklemleri kullanarak bu alandaki teorik temelleri güçlendirmiştir. Poincaré ise dinamik sistemler ve kaos teorisi alanlarındaki çalışmalarıyla diferansiyel denklemlerin uygulanabilirliğini genişletmiş ve diferansiyel denklemler teorisinin temellerine katkı sağlamıştır. Poisson, potansiyel teorisi ve dalga denklemleri üzerine yaptığı çalışmalarla diferansiyel denklemler alanına büyük katkı sağlamış ve bu denklemlerin fiziksel sistemlere uygulanabilirliğini artırmıştır.

20. yüzyıla gelindiğinde, diferansiyel denklemler matematik ve mühendisliğin vazgeçilmez bir parçası haline gelmiş, birçok alt alanın doğmasına zemin hazırlamıştır. Kısmi diferansiyel denklemler, özellikle birden fazla değişkene bağlı sistemlerin modellenmesinde kullanılmıştır. Fiziksel olayların daha gerçekçi anlaşılmasını mümkün kılarak akışkanlar dinamiği, ısı transferi, elektromanyetik alanlar ve kuantum mekaniği gibi çeşitli alanlarda temel bir araç olmuştur (Ahmad vd., 2020; İlhan vd., 2021; Liu ve Feng, 2023).

Kısmi diferansiyel denklemler (KDD), birden fazla bağımsız değişkene bağlı olarak çalışan ve çok boyutlu sistemlerin modellenmesinde kullanılan önemli bir matematiksel araçtır. KDD'ler, doğrusal (lineer) ve doğrusal olmayan denklemler olmak üzere iki gruba ayrılabilir. Doğrusal olmayan denklemler karmaşık yapıları nedeniyle daha zordur ve bu nedenle daha gelişmiş çözüm yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tür denklemler, kaotik sistemler, dinamik süreçler ve kontrol teorisi gibi alanlarda sıklıkla karşılaşılabılır ve karmaşıklıkları nedeniyle hem analitik hem de nümerik çözüm yöntemleri kullanılarak çözülür.

Analitik çözüm yöntemleri, denklemin doğasında bulunan matematiksel özellikleri derinlemesine anlamamıza olanak tanır ve tam çözümler sunar. Bu yöntemlerden bazıları, modifiye edilmiş genişletilmiş tanh-fonksiyon yöntemi ve modifiye edilmiş genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi, yeni genişletilmiş hiperbolik fonksiyon yöntemi (Demirbilek vd., 2024; Şenol vd., 2024) şeklindedir. Ancak, çoğu doğrusal olmayan diferansiyel denklem analitik olarak çözülemeyecek kadar karmaşıktır. Bu durumda, nümerik çözüm yöntemleri devreye girer ve bilgisayar tabanlı tekniklerle yaklaşık çözümler elde edilir. Nümerik yöntemler arasında Homotopi renormalizasyon yöntemi (Yang ve Liao, 2023), Laplace Adomian ayrışım yöntemi (Adeniji vd., 2023) ve rezidual kuvvet serisi metodu (RKSM) (Alquran, 2014) gibi teknikler yer alır. Bu yöntemler, diferansiyel denklemlerin çözülmesinde etkili araçlar olarak karşımıza çıkar.

Bu çalışmanın amacı, (3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili denklemi için yeni analitik ve nümerik çözüm yöntemlerinin uygulanabilirliğini araştırmak ve bu yöntemlerin denklemlerin fiziksel davranışlarını anlamadaki katkılarını ortaya koymaktır. Analitik çözümler için alt-denklemler ve Sardar alt-denklemler yöntemleri, nümerik çözümler için ise rezidual kuvvet serisi metodu (RKSM) kullanılarak farklı çözüm yaklaşımlarının etkinliği ve kullanım alanları değerlendirilecektir. Bu bağlamda, elde edilen çözümler 2D, 3D ve kontur grafikleriyle görselleştirilerek dalga hareketleri gibi fiziksel davranışların derinlemesine analizi yapılacak, analitik ve nümerik çözümler karşılaştırılarak yöntemlerin avantaj ve sınırlılıkları belirlenecektir. Çalışma, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler alanında yeni çözüm yöntemlerinin önemini ve uygulanabilirliğini vurgulamayı hedeflemektedir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Doğrusal olmayan denklemler, matematiksel modelleme ve analizde çözüme ulaşmayı oldukça zorlaştıran karmaşık yapılardır. Bu tür denklemler, doğrusal olmayan olayların dinamik özelliklerini ve uzay yapısını incelemek için doğrusal olmayan evrim denklemleri (NLEE'ler) şeklinde ifade edilir. Ancak, doğrusal olmayan terimler içerdikleri için bu denklemlerin analitik yöntemlerle doğrudan çözümleri güçleşir ve çoğu durumda kesin çözümler elde etmek mümkün olmaz. Bu tür denklemlerin çözümünde analitik yöntemler kullanılırken belirli basitleştirmeler yapılması gerekir; özel durumlar incelenir, simetri özellikleri kullanılır veya belirli kabullerle denklemler daha yönetilebilir hale getirilir. Analitik çözümlerde doğrusal olmayan terimlerin özellikleri ve sistemin sınır koşulları gibi faktörler dikkatle ele alınmalıdır. Ancak, denklemlerin karmaşıklığı nedeniyle çoğu zaman yalnızca yaklaşık çözümler bulunabilir. Bu durumda, analitik yöntemlerin yetersiz kaldığı veya doğrudan çözüm sağlamanın mümkün olmadığı durumlarda, nümerik çözümler devreye girerek karmaşık sistemler için yaklaşık çözümler sunar. Mathematica, Maple, MATLAB ve Python gibi yazılımlar da bu nümerik çözüm süreçlerinde önemli rol oynar.

Doğrusal olmayan evrim denklemlerinin tam çözümlerine yönelik literatürde birçok çalışma mevcuttur. Wang (1996), birleşik KdV-Burgers denkleminin tam çözümlerini homojen dengeleme yöntemi kullanarak elde etmiştir. Zhang (2006), çalışmasında genelleştirilmiş bir F-genişletme yöntemini KdV-Burgers-Kuramoto denklemi üzerine uygulanmıştır. Zeng (2023), değişken katsayılı birleşik KdV denklemlerinin tam çözümlerini, kuadratik Jacobi eliptik fonksiyon genişletmesi yöntemi kullanılarak elde etmiştir. Bu çalışmada dokuz çift kuadratik Jacobi eliptik fonksiyon çözümü bulunmuştur ve her dalga çözüm çiftinin matematiksel formda simetrik olduğu belirtilmiştir.

Seadawy (2012), zayıf doğrusal olmayan hidrodinamik dalgalanmaların evrimini modellemek için iki boyutlu doğrusal olmayan Schrödinger denklemi kullanmıştır. Bu çalışmada denklem, fonksiyon dönüşüm yöntemi ile adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek yeni tam çözümler elde edilmiştir. Ghanbari (2021), doğrusal olmayan Schrödinger denklemlerinin tam çözümlerini elde etmek için genelleştirilmiş F-genişletme yöntemi ve homojen dengeleme yöntemi gibi analitik yöntemleri kullanmıştır. Bu yöntemleri kullanarak NLS denklemlerinin yeni tam çözümlerini elde etmiş, doğrusal olmayan dalga denklemlerinin dinamik özelliklerini ve evrim süreçlerini daha iyi anlamaya yönelik önemli katkılar sağlamıştır. Ahmad (2023), makalesinde Kerr yasası doğrusal olmayanlığı içeren uyumlu rezonant doğrusal olmayan Schrödinger denklemini ele almış ve bu denklemin yeni analitik çözümlerini sunmuştur. Çalışmada \exp -fonksiyon yöntemi, modifiye edilmiş $\exp(-\Phi(\eta))$ -genişletme fonksiyon yöntemi ve $\exp(-\Phi(\eta))$ -genişletme fonksiyon yöntemi kullanılarak trigonometrik, üstel, periyodik, parlak, tekil, karanlık ve rasyonel çözümler ile bunların kısıtlama koşulları elde edilmiştir.

Mahmud vd. (2023), araştırmasında (2+1)-boyutlu integro-diferansiyel Konopelchenko-Dubrovsky evrim denklemi için dalga çözümlerini matematiksel olarak oluşturmak amacıyla

genişletilmiş rasyonel sinh-cosh yöntemi ve modifiye edilmiş genişletilmiş tanh-fonksiyon yöntemi başarıyla uygulanmış çeşitli karmaşık hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyonlar cinsinden tekil ve periyodik dalga çözümleri elde edilmiştir. Gu vd., (2023) ise (2+1)-boyutlu Konopelchenko–Dubrovsky denkleminin bazı trigonometrik çözümlerini ve kestirilebilirliği olan haydut (rogue) dalgalarını elde etmişlerdir.

Lineer olmayan fizik denklemlerinin dinamik ve davranış çeşitliliğini derinlemesine incelemek ve tam çözümlerine ulaşmak amacıyla geliştirilen çeşitli tekniklerin kullanımı, halen yaygın bir araştırma alanı olarak önemini korumaktadır. Bu tekniklerden bazıları, genişletilmiş tanh-fonksiyon yöntemi (Fan, 2000), birinci integral yöntemi (Lu, 2012), sinh-Gordon denklemi genişletme yöntemi (Esen, vd., 2018), Hirota yöntemi (Zhou vd., 2022), homotopi analiz yöntemi (Hosseini vd., 2022) basitleştirilmiş iki-doğrusal yöntem (Akinyemi, 2023), genişletilmiş genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -genişletme yöntemi (Mohanty vd., 2023), genişletilmiş doğrudan cebirsel yöntemi (Rehman vd., 2023), geliştirilmiş doğrusal olmayan Riccati denklemi yöntemi ve geliştirilmiş alt-denklemler yöntemi (Oluwasegun vd., 2024) gibi yöntemlerdir.

Nümerik çözümler uygulanırken hata kontrolü, hesaplama hassasiyeti ve çözüm hızını optimize etmek amacıyla parametre ayarlarına dikkat etmek de kritik önem taşır. Adomian ayrışma (Wazwaz, 1999), rezidual kuvvet serisi (Şenol vd., 2024) ve homotopi pertürbasyon (Liao, 2005) yöntemleri gibi nümerik yöntemler, belirli başlangıç koşullarıyla iteratif süreçler sayesinde çözüme adım adım yaklaşmayı sağlar. Bu yöntemlerin her biri, doğrusal olmayan terimleri belirli seriler veya pertürbasyon teknikleri ile ayrıştırarak, karmaşık problemlerin çözümünü iteratif adımlarla elde etmeye çalışır. Adomian ayrışma yöntemi doğrusal olmayan kısımları seriler halinde ayırırken, rezidual kuvvet serisi yöntemi hata terimlerini minimize ederek iteratif çözüme ulaşır. Homotopi pertürbasyon yöntemi ise, problemi homotopi parametresi kullanarak basit bir problemden karmaşık bir probleme adım adım geçiş sağlayan bir yapı kurar. Tüm bu yöntemler, doğrusal olmayan denklemlerin çözümünde başlangıç koşullarını kullanarak çözümü her iterasyonda daha fazla yaklaşmak üzere yapılandırır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ileriki bölümlerde kullanılacak olan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler alanında yeni çözüm yöntemlerinin uygulanabilirliği üzerine bazı temel bilgiler sunulmuştur. Altı alt bölümden oluşan bu kısımda sırasıyla; ilgili temel kavramlar, Balans dengeleme yöntemi, analitik çözüm metotları, alt-denkleme metodu, Sardar alt-denkleme, rezidual kuvvet seri metodu (RKSM) ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir.

3.1. Temel kavramlar

Tanım 3.1.1. Herhangi bir değişkene bağlı bir fonksiyonda bu değişkene göre türev alınıyorsa bu değişkene bağımsız değişken, türevi alınan değişkene ise bağımlı değişken denir (Hasanov-Uzgören vd., 2002).

Tanım 3.1.2. Bir fonksiyonun sınırlı mertebeden türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir (Hasanov-Uzgören vd., 2002).

Tanım 3.1.3. Diferansiyel denklem, bir bağımsız değişkenin bilinmeyen fonksiyon ya da fonksiyonlarını kapsıyorsa bu denkleme adi diferansiyel denklem denir. Genel olarak aşağıdaki şekildedir (Hasanov-Uzgören vd., 2002):

$$g(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0$$

Örnek 3.1.1.

$$xy'' + y' = x^2 (y')^2$$

Tanım 3.1.5. Bir diferansiyel denklem, en az iki bağımsız değişkeni ve bilinmeyen bir fonksiyonu kapsıyorsa bu denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. Genel olarak,

$$g(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0$$

şekindedir (Hasanov-Uzgören vd., 2002).

Örnek 3.1.2.

$$v_x = \rho v_t \quad (\text{Isı Denklemi})$$

Tanım 3.1.7. Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir (Pişkin, 2018).

Tanım 3.1.8. Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin derecesine diferansiyel denklemin derecesi denir (Pişkin, 2018).

Örnek 3.1.3.

$$(v_{xxx})^4 + v v_y^5 - 4v = 0 \quad (3.4.)$$

$$v_{xxx} + x^2 v_y - y^3 v = 0 \quad (3.5.)$$

(3.4) denklemi üçüncü mertebede ve dördüncü dereceden, (3.5) denklemi üçüncü mertebeye birinci derecedendir.

Tanım 3.1.10. Bir kısmi diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevleri birinci dereceden ve bunlar denklemde çarpım şeklinde bulunmuyorsa denkleme lineer diferansiyel denklem denir (Pişkin, 2018).

Tanım 3.1.11. Bir kısmi diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevleri denklemde çarpım şeklinde bulunuyorsa denkleme lineer olmayan diferansiyel denklem denir (Pişkin, 2018).

3.2. Balans Dengeleme Yöntemi

Sonlu seri şeklinde verilen bir tam çözümün üst sınırına homojen denge sayısı denir. Lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemde, denklemin mertebesi ile lineer olmayan terim arasından bu denge sabiti elde edilir.

Bir adi diferansiyel denklemde denklemin mertebesinden lineer terim $\frac{d^m v}{d\varepsilon^m}$ ve denklemin mertebesinden lineer olmayan terimi $v^p \left(\frac{d^k v}{d\varepsilon^k} \right)^r$ şeklinde kabul edelim. Bu terime $v = \tau^p$ dönüşümü

uygulanırsa p, m, k, r pozitif tam sayı ve q homojen denge sayısı için homojen denge bağıntısı bu şekilde

$$q + m = qm + r(q + k) \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu denklemden $q > 0$ homojen denge sayısına ulaşılır.

3.3. Analitik ve Nümerik Çözüm Metotları

Kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözüm yöntemleri, tam çözümleri elde etmek ve matematiksel ifadelerle sonuçları formüle etmek için kullanılan önemli yaklaşımlardır. Bu yöntemler, doğrusal olmayan denklemlerin çözümlerini sınıflandırmada ve parametrik ifadeler yoluyla analitik çözümler türetmede etkili bir yöntemlerdir. Nümerik çözüm yöntemleri ise, özellikle analitik çözümlerin zor veya imkânsız olduğu durumlarda devreye girer ve denklemleri yaklaşık olarak çözmek için etkili bir araç sunar.

Bu bölümde, aşağıdaki doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler aşağıdaki şekilde ele alınmaktadır:

$$G(v, v_t, v_x, v_{xx}, \dots) = 0. \quad (3.7)$$

Burada, $v = v(x, y, \dots, t)$ bilinmeyen bir fonksiyon ve G ise v ve türevlerini içeren polinom fonksiyonudur. Denklem (3.7)'yi çözmek için kullanılan dalga dönüşümü şu şekildedir:

$$v(\xi) = v(x, t), \quad \xi = k(x - \omega t). \quad (3.8)$$

Burada k dalga sayısını ve ω ise dalganın hızını veren sabitlerdir. Bu dönüşüm kullanarak, denklem (3.7), aşağıdaki şekilde adi diferansiyel denklem formuna indirgenir:

$$H(v(\xi), v'(\xi), v''(\xi), v'''(\xi), \dots) = 0. \quad (3.9)$$

Burada

$$v = v(\eta), \quad v' = \frac{dv}{d\xi}, \quad v'' = \frac{d^2v}{d\xi^2}, \dots \quad (3.10)$$

dır.

3.4. Alt-Denklem Metodu

Bu yöntemde, denklem (3.8)'in bir çözümü, aşağıdaki formda varsayılır:

$$\nu(\xi) = \varrho_0 + \sum_{i=1}^m \varrho_i \mathcal{H}^i(\xi), \quad \varrho_m \neq 0. \quad (3.11)$$

$\varrho_i (i = \overline{0, m})$ değerleri ise daha sonra belirlenecek sabitlerdir. Buradaki m değeri denklemdeki doğrusal olmayan terimler ve en yüksek mertebeden türevi dengelenerek bulunur. $\mathcal{H}(\xi)$ fonksiyonu ise aşağıdaki Riccati diferansiyel denklemin bir çözümüdür:

$$\mathcal{H}'(\xi) = \varepsilon + \mathcal{H}^2(\xi), \quad \varepsilon = \text{sabit}. \quad (3.12)$$

Bu yöntemde, $\mathcal{H}(\xi)$ 'nin belirli durumlarına göre çözümler çeşitli sınıflara ayrılır. Bu sınıflandırma, parametrelerin işareti ve büyüklüğüne bağlı olarak farklı çözüm türlerini ifade eder.

$$\mathcal{H}(\xi) = \begin{cases} -\sqrt{-\varepsilon} \tanh(\sqrt{-\varepsilon}\xi), & \varepsilon < 0, \\ -\sqrt{-\varepsilon} \coth(\sqrt{-\varepsilon}\xi), & \varepsilon < 0, \\ \sqrt{\varepsilon} \tan(\sqrt{\varepsilon}\xi), & \varepsilon > 0, \\ -\sqrt{\varepsilon} \cot(\sqrt{\varepsilon}\xi), & \varepsilon > 0, \\ -\frac{1}{\xi + \theta}, & \varepsilon = 0, \text{ ve } \theta = \text{sabit}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Denklem (3.13)'ten yararlanarak denklem (3.11) ve gerekli türevleri denklem (3.9)'da yerine yazarak, $\mathcal{H}'(\xi)$ 'ye göre bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin katsayıları sıfıra eşitlenerek, matematiksel paket program yardımlarıyla bilinmeyen katsayı değerleri hesaplanır. Böylece denklem (3.7)'nin analitik çözümleri elde edilir.

3.5. Sardar Alt-Denklemi Metodu

Denklem (3.9)'un sonlu seri çözümü

$$v(\xi) = \varrho_0 + \sum_{i=1}^m \varrho_i \mathcal{H}^i(\xi), \quad \varrho_m \neq 0 \quad (3.14)$$

biçimindedir. Burada ϱ_i , ($i = 1, 2, \dots, m$) bilinmeyen sabitlerdir. m ise homojen denge sabitidir. $\mathcal{H}(\xi)$ çözümün genel yapısını belirleyen temel bir fonksiyon olup, aynı zamanda aşağıdaki gibi bir diferansiyel denklemi sağlar:

$$(\mathcal{H}'(\xi))^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \mathcal{H}^2(\xi) + \mathcal{H}^4(\xi). \quad (3.15)$$

Burada, ε_1 , ε_2 bilinmeyen sabitlerdir. Bu parametrelere göre aşağıdaki şekillerde tanımlanabilir (Batool, F., Suleman, M. S., Demirbilek, U., vd., 2024).

Durum 1: Eğer, $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ ise

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^\pm(\xi) &= \pm \sqrt{-pq\varepsilon_2} \operatorname{sech}_{pq}(\sqrt{\varepsilon_2}\xi), \\ \mathcal{H}_2^\pm(\xi) &= \pm \sqrt{-pq\varepsilon_2} \operatorname{csch}_{pq}(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \end{aligned}$$

burada

$$\operatorname{sech}_{pq}(\xi) = \frac{2}{pe^\xi + qe^{-\xi}}, \quad \operatorname{csch}_{pq}(\xi) = \frac{2}{pe^\xi - qe^{-\xi}}$$

dır.

Durum 2: Eğer, $\varepsilon_1 = 0$, ve $\varepsilon_2 < 0$ ise

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3^\pm(\xi) &= \pm \sqrt{-pq\varepsilon_2} \operatorname{sec}_{pq}(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi), \\ \mathcal{H}_4^\pm(\xi) &= \pm \sqrt{-pq\varepsilon_2} \operatorname{csc}_{pq}(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \end{aligned}$$

burada

$$\sec_{pq}(\xi) = \frac{2}{pe^{i\xi} + qe^{-i\xi}}, \quad \csc_{pq}(\xi) = \frac{2}{pe^{i\xi} - qe^{-i\xi}}$$

dır.

Durum 3: Eğer, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ ise

$$\mathcal{H}_5^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-\varepsilon_2}{2}} \tanh_{pq} \left(\sqrt{\frac{-\varepsilon_2}{2}} \xi \right),$$

$$\mathcal{H}_6^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-\varepsilon_2}{2}} \coth_{pq} \left(\sqrt{\frac{-\varepsilon_2}{2}} \xi \right),$$

$$\mathcal{H}_7^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-\varepsilon_2}{2}} \left(\tanh_{pq}(\sqrt{-2\varepsilon_2}\xi) \pm i\sqrt{pq} \operatorname{sech}_{pq}(\sqrt{-2\varepsilon_2}\xi) \right),$$

$$\mathcal{H}_8^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-\varepsilon_2}{2}} \left(\coth_{pq}(\sqrt{-2\varepsilon_2}\xi) + \sqrt{pq} \operatorname{csch}_{pq}(\sqrt{-2\varepsilon_2}\xi) \right),$$

$$\mathcal{H}_9^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-\varepsilon_2}{8}} \left(\tanh_{pq} \left(\sqrt{\frac{-\varepsilon_2}{8}} \xi \right) + \coth_{pq} \left(\sqrt{\frac{-\varepsilon_2}{8}} \xi \right) \right)$$

burada

$$\tanh_{pq}(\xi) = \frac{pe^\xi - qe^{-\xi}}{pe^\xi + qe^{-\xi}}, \quad \coth_{pq}(\xi) = \frac{pe^\xi + qe^{-\xi}}{pe^\xi - qe^{-\xi}}$$

dır.

Durum 4: Eğer $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ ise

$$\mathcal{H}_9^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-\varepsilon_2}{2}} \tan_{pq} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{2}} \xi \right),$$

$$\mathcal{H}_{10}^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-\varepsilon_2}{2}} \cot_{pq} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{2}} \xi \right),$$

$$\mathcal{H}_{11}^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{2}} \left(\tan_{pq}(\sqrt{2\varepsilon_2}\xi) \pm \sqrt{pq} \operatorname{sec}_{pq}(\sqrt{2\varepsilon_2}\xi) \right),$$

$$\mathcal{H}_{12}^{\pm}(\xi) = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{2}} \left(\cot_{pq} \left(\sqrt{2\varepsilon_2} \xi \right) \pm \sqrt{pq} \csc_{pq} \left(\sqrt{2\varepsilon_2} \xi \right) \right),$$

$$\mathcal{H}_{13}^{\pm}(\xi) = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{8}} \left(\tan_{pq} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{8}} \xi \right) \pm \cot_{pq} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{8}} \xi \right) \right),$$

$$\tan_{pq}(\xi) = -i \frac{pe^{i\xi} - qe^{-i\xi}}{pe^{i\xi} + qe^{-i\xi}}, \quad \cot_{pq}(\xi) = i \frac{pe^{i\xi} - qe^{-i\xi}}{pe^{i\xi} + qe^{-i\xi}}$$

dır.

3.6. Rezidual Kuvvet Seri Metodu (RKSM)

RKSM, nümerik bir teknik olarak diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan etkili bir yöntemdir. Bu teknik, genellikle başlangıçta bir tahmin seçilerek, diferansiyel denklemi kuvvet serisi formunda ifade etmeye dayanır. Daha sonra bu serinin, denklem içinde yerine konulmasıyla, kalan terimlerin sıfıra yakınsadığı varsayılır. Bu yaklaşım, denklemlere yaklaşık çözümler üretmek için pratik bir yol sunar. Tam çözüme ulaşmanın zor veya imkânsız olduğu durumlarda, nümerik yöntemler sıklıkla tercih edilir ve RKSM, bu yöntemlerden biridir. Ayrıca, doğrusal olmayan diferansiyel denklemler üzerinde uygulanarak detaylı bir şekilde tanımlanabilir.

Bu yöntemi tanıtmak için, lineer olmayan bir diferansiyel denklem olan,

$$\nu(x, t) = M[X]\nu(x, t) + N[X]\nu(x, t) = q(x, t), \quad (3.16)$$

Denklemini ele alalım. Burada, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\varrho - 1 < \varrho \leq \varrho$, için $M[x]$ lineer bir operatördür ve $N[x]$ lineer olmayan bir operatördür. RKSM yöntemi ile,

$$g_0(x) = \nu(x, 0) = g(x), \quad (3.17)$$

başlangıç koşulu $t = 0$ için kesirli kuvvet serisinin açılımı hesaplanabilir. Çözüm ise,

$$g_{a-1}(x) = D_t^{(\varrho-1)\omega} \nu(x, 0) = h(x) \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilir. Verilen çözümün açılım formu da,

$$v(x,t) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} g_{\varrho}(x) \frac{t^{\varrho}}{\varrho!}, \quad 0 \leq t < \mathbb{R} \quad (3.19)$$

şeklinde gösterilir. Şimdi ise $v(x,t)$ ' nin k -ıncı kesiği olan $v_k(x,t)$,

$$v_k(x,t) = \sum_{\varrho=0}^k g_{\varrho}(x) \frac{t^{\varrho}}{\varrho!}, \quad 0 \leq t < \mathbb{R} \quad (3.20)$$

şeklinde ifade edilir. $k=0$ için RKSM çözümü $v_0(x,t) = g(x)$ olarak ifade edilir ve buradan göre, $k=1$ için RKSM yaklaşık çözümü şu şekilde elde edilir

$$v_1(x,t) = g_0(x)t. \quad (3.21)$$

Burada rezidual fonksiyonu (3.16) denklemi ile ilişkilendirerek aşağıdaki ifadeyi elde ederiz,

$$\text{Res} = v(x,t) + M[X]v(x,t) + N[X]v(x,t) - q(x,t), \quad (3.22)$$

k -ıncı rezidual fonksiyonu Res_k ise,

$$\text{Res}_k = v_k(x,t) + M[X]v_k(x,t) + N[X]v_k(x,t) - q(x,t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

formunu elde ederiz. $k=1$ için, denklemin rezidü fonksiyonu $\text{Res}_1(x,t)$ ifadesi elde edilir, böylelikle $t=0$ için $\text{Res}_1(x,0) = 0$ koşulunu sağladığında, $g_1(x)$ bulunmuş olur ve $v_1(x,t)$ için birinci RKSM yaklaşık çözümünü elde ederiz. Daha sonra, her adımda $k = 1, 2, 3, \dots$ için farklı $g_k(x)$ ifadeleri elde edilir. Bu şekilde, kesirli kuvvet serileri kullanılarak, her adımda daha yakın bir yaklaşım elde edilerek daha yakın sonuca ulaşılabileceği ifade edilebilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm, (3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili Denklemi için analitik ve nümerik çözüm yöntemlerinin ele alındığı üç alt başlıktan oluşmaktadır. Analitik çözüm yöntemleri olarak Alt Denklem ve Sardar Alt Denklem yöntemleri uygulanmış ve bu yöntemler sonucunda denklemin periyodik, hiperbolik, üstel, rasyonel ve hipergeometrik türden çözümleri elde edilmiştir. Nümerik çözüm yöntemi olarak ise Rezidual kuvvet serisi metodu (RKSM) kullanılmış ve denkleme ilişkin sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. (3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili Denklemi

(3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili Denklemi, fizik, mühendislik, biyomedikal sistemler, jeofizik ve matematik gibi çeşitli disiplinlerde ortaya çıkan doğrusal olmayan dinamik süreçleri modellemek için kullanılmaktadır. Bu denklem, akışkan dinamiği, enerji transferi, malzeme bilimi, veri iletişim sistemleri ve kimyasal reaksiyon kinetiği gibi farklı alanlarda karşılaşılan karmaşık sistemlerin analizine olanak sağlamaktadır.

Bu tez çalışmasında ele alınan (3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili denklemi aşağıdaki tanımlanmaktadır (Wazwaz, 2024):

$$9v_{xt} + v_{xxxxx} - 5(v_{xxy} + v_{yy}) + 15(v_{xx}v_{xxx} + v_x v_{xxx} - v_x v_{xy} - v_{xx}v_y) + 45(v_x)^2 v_{xx} + \kappa_1 v_{xx} + \kappa_2 v_{xy} + \kappa_3 v_{xz} = 0. \quad (4.1)$$

Burada $v = v(x, y, z, t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur. κ_1, κ_2 ve κ_3 reel sabitlerdir.

$$v''(\xi)(5\beta^2 - 9\alpha\omega + \alpha^2\kappa_1 + \alpha\beta\kappa_2 + \alpha\gamma\kappa_3 - 30a^2\beta v'(\xi) + 45\alpha^4 v'(\xi)^2 + 15\alpha^5 v^{(3)}(\xi)) + 5(-\alpha^3\beta + 3\alpha^5 v'(\xi))v^{(4)}(\xi) + \alpha^6 v^{(6)}(\xi). \quad (4.2)$$

Burada,

$$v(x, y, z, t) = v(\xi) \text{ ve } \xi = \kappa_1 x + \kappa_2 y + \kappa_3 z - \omega t \quad (4.3)$$

dalga dönüşümü uygulanıp bir kez integre edilirse

$$\begin{aligned} & \alpha^6 v^{(5)}(\xi) - 5\alpha^3 \beta v^{(3)}(\xi) + 15\alpha^4 v'(\xi)^3 - 15\alpha^2 \beta v'(\xi)^2 + \alpha^2 \kappa_1 v'(\xi) \\ & + \alpha \beta \kappa_2 v'(\xi) + \alpha \gamma \kappa_3 v'(\xi) - 9\alpha \omega v'(\xi) + 5\beta^2 v'(\xi) + 15\alpha^5 v^{(3)}(\xi) v'(\xi) \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir.

(4.4) denkleminde $v'(\xi) = \psi(\xi)$ dönüşümü yapılır ise

$$\begin{aligned} & \alpha^6 \psi^{(4)}(\xi) + 15\alpha^5 \psi(\xi) \psi''(\xi) + 15\alpha^4 \psi(\xi)^3 - 5\alpha^3 \beta \psi''(\xi) - 15\alpha^2 \beta \psi(\xi)^2 \\ & + \alpha^2 \kappa_1 \psi(\xi) + \alpha \beta \kappa_2 \psi(\xi) + \alpha \gamma \kappa_3 \psi(\xi) - 9\alpha \omega \psi(\xi) + 5\beta^2 \psi(\xi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir.

Bu indirgeme sonucunda oluşan adi diferansiyel denklemde yer alan $\psi^{(4)}(\xi)$ ve $\psi(\xi)^3$ terimlerine homojen denge prensibi uygulanır. Dengeleme bağıntısı $m + 2 = 2m$ olarak yazılır ve bu bağıntı çözüldüğünde dengeleme sabiti $m = 2$ olarak bulunur.

4.1.1. Alt-Denklem Metodu Uygulamaları

Burada, $m = 2$ değeri denklem (3.11) denklemini göz önünde bulundurulduğunda sonlu seri denklemini şu şekilde olur:

$$\psi = a_0 + a_1 \mathcal{H}(\xi) + a_2 \mathcal{H}(\xi)^2. \quad (4.6)$$

(4.6) denklemini ve gerekli türevleri (4.5) adi diferansiyel denklemde yerine yazdığımızda $\mathcal{H}^i(\xi)$ 'ye göre bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{cases}
\mathcal{H}(\xi)^6 = 120\alpha^6 \varrho_2 + 90\alpha^5 \varrho_2^2 + 15\alpha^4 \varrho_2^3 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi)^5 = 24\alpha^6 \varrho_1 + 120\alpha^5 \varrho_1 \varrho_2 + 45\alpha^4 \varrho_1 \varrho_2^2 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi)^4 = 30\alpha^5 \varrho_1^2 - 30\alpha^3 \beta \varrho_2 + 240\alpha^6 \varepsilon \varrho_2 + 90\alpha^5 \varrho_0 \varrho_2 \\
+ 45\alpha^4 \varrho_1^2 \varrho_2 - 15\alpha^2 \beta \varrho_2^2 + 120\alpha^5 \varepsilon \varrho_2^2 + 45\alpha^4 \varrho_0 \varrho_2^2 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi)^3 = -10\alpha^3 \beta \varrho_1 + 40\alpha^6 \varepsilon \varrho_1 + 30\alpha^5 \varrho_0 \varrho_1 + 15\alpha^4 \varrho_1^3 \\
- 30\alpha^2 \beta \varrho_1 \varrho_2 + 150\alpha^5 \varepsilon \varrho_1 \varrho_2 + 90\alpha^4 \varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi)^2 = -15\alpha^2 \beta \varrho_1^2 + 30\alpha^5 \varepsilon \varrho_1^2 + 45\alpha^4 \varrho_0 \varrho_1^2 + 5\beta^2 \varrho_2 - 40\alpha^3 \beta \varepsilon \varrho_2 \\
+ 136\alpha^6 \varepsilon^2 \varrho_2 - 9\alpha \omega \varrho_2 + \alpha^2 \kappa_1 \varrho_2 + \alpha \beta \kappa_2 \varrho_2 + \alpha \gamma \kappa_3 \varrho_2 - 30\alpha^2 \beta \varrho_0 \varrho_2 \\
+ 120\alpha^5 \varepsilon \varrho_0 \varrho_2 + 45\alpha^4 \varrho_2^2 \varrho_2 + 30\alpha^5 \varepsilon^2 \varrho_2^2 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi)^1 = 16\alpha^6 \varepsilon^2 \varrho_1 + 30\alpha^5 \varepsilon^2 \varrho_1 \varrho_2 + 30\alpha^5 \varepsilon \varrho_0 \varrho_1 + 45\alpha^4 \varrho_0^2 \varrho_1 - 10\alpha^3 \beta \varepsilon \varrho_1 \\
- 30\alpha^2 \beta \varrho_0 \varrho_1 + \alpha^2 \kappa_1 \varrho_1 + \alpha \beta \kappa_2 \varrho_1 + \alpha \gamma \kappa_3 \varrho_1 - 9\alpha \omega \varrho_1 + 5\beta^2 \varrho_1 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi)^0 = 5\beta^2 \varrho_0 - 9\alpha \omega \varrho_0 + \alpha^2 \kappa_1 \varrho_0 + \alpha \beta \kappa_2 \varrho_0 + \alpha \gamma \kappa_3 \varrho_0 - 15\alpha^2 \beta \varrho_0^2 \\
+ 15\alpha^4 \varrho_0^3 - 10\alpha^3 \beta \varepsilon^2 \varrho_2 + 16\alpha^6 \varepsilon^3 \varrho_2 + 30\alpha^5 \varepsilon^2 \varrho_0 \varrho_2 = 0.
\end{cases}$$

Bu cebirsel denklem sistem çözüldüğünde ϱ_0 , ϱ_1 , ϱ_2 ve ω değerleri için üç durum elde edilir.

Durum 1:

$$\varrho_0 = -2\alpha\varepsilon, \quad \varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = -2\alpha, \quad \omega = \frac{16\alpha^6 \varepsilon^2 + 20\alpha^3 \beta \varepsilon + \alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2}{9\alpha}. \quad (4.7)$$

Çözüm 1. $\varepsilon < 0$ için

$$\psi_{1.1}(\xi) = \varrho_0 + \varrho_1 \left(-\sqrt{-\varepsilon} \tanh(\sqrt{-\varepsilon} \xi) \right) + \varrho_2 \left(-\sqrt{-\varepsilon} \tanh(\sqrt{-\varepsilon} \xi) \right)^2 \quad (4.8)$$

bulunur. (4.8) denklemi bir kez integralenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$v_{1.1}(x, y, z, t) = -\frac{2\alpha\varepsilon \tanh\left(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)\right)}{\sqrt{-\varepsilon}} \quad (4.9)$$

çözümü elde edilir.

Çözüm 2. $\varepsilon < 0$ için

$$\psi_{1.2}(x, y, z, t) = \varrho_0 + \varrho_1\left(-\sqrt{-\varepsilon} \coth\left(\sqrt{-\varepsilon}\xi\right)\right) + \varrho_2\left(-\sqrt{-\varepsilon} \coth\left(\sqrt{-\varepsilon}\xi\right)\right)^2 \quad (4.10)$$

bulunur.

(4.10) denklemi bir kez integrallenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$v_{1.2}(x, y, z, t) = -\frac{2\alpha\varepsilon \coth\left(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + y\beta + z\gamma - \omega t)\right)}{\sqrt{-\varepsilon}} \quad (4.11)$$

çözümü elde edilir.

Çözüm 3. $\varepsilon > 0$ için

$$\psi_{1.3}(x, y, z, t) = \varrho_0 + \varrho_1\left(\sqrt{\varepsilon} \tan\left(\sqrt{\varepsilon}\xi\right)\right) + \varrho_2\left(\sqrt{\varepsilon} \tan\left(\sqrt{\varepsilon}\xi\right)\right)^2 \quad (4.12)$$

bulunur. (4.12) denklemi bir kez integrali alınır ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$v_{1.3}(x, y, z, t) = -2\alpha\sqrt{\varepsilon} \tan\left(\sqrt{\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)\right) \quad (4.13)$$

çözümü elde edilir.

Çözüm 4. $\varepsilon > 0$ için

$$\psi_{1.4}(x, y, z, t) = \varrho_0 + \varrho_1 \left(\sqrt{\varepsilon} \cot \left(\sqrt{\varepsilon} \xi \right) \right) + \varrho_2 \left(\sqrt{\varepsilon} \cot \left(\sqrt{\varepsilon} \xi \right) \right)^2 \quad (4.14)$$

bulunur. (4.14) denklemini bir kez integrallenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$v_{1.4}(x, y, z, t) = 2\alpha \sqrt{\varepsilon} \cot[\sqrt{\varepsilon}(x\alpha + y\beta + z\gamma - \omega t)] \quad (4.15)$$

çözümü elde edilir.

Çözüm 5. $\varepsilon = 0$ için

$$\psi_{1.5}(x, y, z, t) = \varrho_0 + \frac{\varrho_1}{\xi} + \left(\frac{1}{\xi} \right)^2 \varrho_2 \quad (4.16)$$

bulunur. (4.16) denklemini bir kez integrallenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$v_{1.5}(x, y, z, t) = \frac{2\alpha}{\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t} \quad (4.17)$$

çözümü elde edilir.

Durum 2:

$$\begin{aligned} \varrho_0 &\rightarrow \frac{-60\alpha^3\varepsilon - \sqrt{15}\sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} + 15\beta}{60\alpha^2}, \varrho_1 \rightarrow 0, \varrho_2 \rightarrow -2\alpha, \\ \omega &\rightarrow \frac{1}{72\alpha} \left(176\alpha^6\varepsilon^2 - 80\alpha^3\beta\varepsilon + 8\alpha^2\kappa_1 - 4\sqrt{15}\alpha^3\varepsilon\sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{15}\beta\sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} + 8\alpha\beta\kappa_2 + 8\alpha\gamma\kappa_3 + 25\beta^2 \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Çözüm 1. $\varepsilon < 0$ için

$$\psi_{1.6}(x, y, z, t) = \varrho_0 + \varrho_1 \left(-\sqrt{-\varepsilon} \tanh(\sqrt{-\varepsilon}\xi) \right) + \varrho_2 \left(-\sqrt{-\varepsilon} \tanh(\sqrt{-\varepsilon}\xi) \right)^2 \quad (4.19)$$

bulunur. (4.19) denklemini bir kez integrallenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} v_{1.6}(x, y, z, t) &= 2\alpha\sqrt{\varepsilon} \tan^{-1} \left(\tan(\sqrt{\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)) \right) \\ &\quad - \frac{1}{4\alpha^2} \left(-\beta(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right) + 4\alpha^3\varepsilon(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \\ &\quad + \sqrt{\beta^2 - \frac{8}{3}\alpha^3\beta\varepsilon + \frac{112\alpha^6\varepsilon^2}{15}}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \\ &\quad + 8\alpha^3\sqrt{\varepsilon} \tan(\sqrt{\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)) \end{aligned} \quad (4.20)$$

çözümü elde edilir.

Çözüm 2. $\varepsilon < 0$ için

$$\psi_{1.7}(x, y, z, t) = \varrho_0 + \varrho_1 \left(-\sqrt{-\varepsilon} \coth(\sqrt{-\varepsilon}\xi) \right) + \varrho_2 \left(-\sqrt{-\varepsilon} \coth(\sqrt{-\varepsilon}\xi) \right)^2 \quad (4.21)$$

bulunur. (4.21) denklemini bir kez integrallenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
v_{1,7}(x, y, z, t) = & \frac{1}{4\alpha^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} 8\alpha^3 \varepsilon \coth[\sqrt{-\varepsilon} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)] \right. \\
& \text{Hypergeometric2F1} \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \tanh(\sqrt{-\varepsilon} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t))^2 \right) \\
& + \beta (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) - 4\alpha^3 \varepsilon (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \\
& \left. - \sqrt{\beta^2 - \frac{8}{3} \alpha^3 \beta \varepsilon + \frac{112\alpha^6 \varepsilon^2}{15}} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

çözümü elde edilir.

Çözüm 3. $\varepsilon > 0$ için

$$\psi_{1,8}(x, y, z, t) = \varrho_0 + \varrho_1 \left(\sqrt{\varepsilon} \tan(\sqrt{\varepsilon} \xi) \right) + \varrho_2 \left(\sqrt{\varepsilon} \tan(\sqrt{\varepsilon} \xi) \right)^2 \tag{4.23}$$

bulunur. (4.23) denklemini bir kez integrallenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
v_{1,8}(x, y, z, t) = & 2\alpha \sqrt{\varepsilon} \tan^{-1} \left(\tan \sqrt{\varepsilon} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right) \\
& \left(-\frac{1}{4\alpha^2} - \beta (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) - 4\alpha^3 \varepsilon (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right. \\
& + \sqrt{\beta^2 - \frac{8}{3} \alpha^3 \beta \varepsilon + \frac{112\alpha^6 \varepsilon^2}{15}} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \\
& \left. + 8\alpha^3 \sqrt{\varepsilon} \tan \sqrt{\varepsilon} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

çözümü elde edilir.

Çözüm 4. $\varepsilon > 0$ için

$$\psi_{1,9}(x, y, z, t) = \varrho_0 + \varrho_1 \left(\sqrt{\varepsilon} \cot(\sqrt{\varepsilon} \xi) \right) + \varrho_2 \left(\sqrt{\varepsilon} \cot(\sqrt{\varepsilon} \xi) \right)^2 \tag{4.25}$$

bulunur. (4.25) denklemini bir kez integrallenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
v_{1,9}(x, y, z, t) &= 2\alpha\sqrt{\varepsilon} \tan^{-1}\left(\tan\left(\sqrt{\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)\right)\right) \\
&+ \cot\left(\sqrt{\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)\right) \\
&- \frac{1}{60\alpha^2}\left(-15\beta + 60\alpha^3\varepsilon + \sqrt{15}\sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2}\right)(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

çözümü elde edilir.

Çözüm 5. $\varepsilon = 0$ için

$$\psi_{1.10}(x, y, z, t) = \varrho_0 + \frac{\varrho_1}{\xi} + \left(\frac{1}{\xi}\right)^2 \varrho_2 \tag{4.27}$$

bulunur. (4.27) denklemini bir kez integralenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
v_{1.10}(x, y, z, t) &= \frac{2\alpha}{(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)} \\
&+ \frac{\beta}{4\alpha^2}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) - \alpha\varepsilon(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \\
&- \frac{1}{4\alpha^2}\sqrt{\beta^2 - \frac{8}{3}\alpha^3\beta\varepsilon + \frac{112\alpha^6\varepsilon^2}{15}}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

çözümü elde edilir.

Durum 3.

$$\begin{aligned}
\varrho_0 &\rightarrow \frac{15\beta - 60\alpha^3\varepsilon + \sqrt{15}\sqrt{112\alpha^6\varepsilon^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 15\beta^2}}{60\alpha^2}, \varrho_1 \rightarrow 0, \varrho_2 \rightarrow -2\alpha, \\
\omega &\rightarrow \frac{1}{72\alpha}\left(+25\beta^2 - 80\alpha^3\beta\varepsilon + 176\alpha^6\varepsilon^2 - \sqrt{15}\beta\sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2}\right. \\
&\left.+ 4\sqrt{15}\alpha^3\varepsilon\sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} + 8\alpha^2\kappa_1 + 8\alpha\beta\kappa_2 + 8\alpha\gamma\kappa_3\right)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Çözüm 1. $\varepsilon < 0$ için

$$\psi_{1.11} = \varrho_0 + \varrho_1 \left(-\sqrt{-\varepsilon} \coth(\sqrt{-\varepsilon} \xi) \right) + \varrho_2 \left(-\sqrt{-\varepsilon} \coth(\sqrt{-\varepsilon} \xi) \right)^2 \quad (4.30)$$

bulunur. (4.30) denklemini bir kez integrallenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} v_{1.11}(x, y, z, t) = & +2\alpha\sqrt{\varepsilon} \left(\tan^{-1} \left(\tan \left(\sqrt{\varepsilon} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right) \right) \right) \\ & + \cot \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{1}{72\alpha} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right) \\ & - \frac{1}{60\alpha^2} \left(15\beta + -60\alpha^3\varepsilon + \sqrt{15} \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Çözüm 2. $\varepsilon < 0$ için

$$\psi_{1.12} = \varrho_0 + \varrho_1 \left(-\sqrt{-\varepsilon} \tanh(\sqrt{-\varepsilon} \xi) \right) + \varrho_2 \left(-\sqrt{-\varepsilon} \tanh(\sqrt{-\varepsilon} \xi) \right)^2 \quad (4.32)$$

bulunur. (4.32) denklemini bir kez integrallenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} v_{1.12}(x, y, z, t) = & 2\alpha\sqrt{\varepsilon} \tan^{-1} \left(\tan \left(\sqrt{\varepsilon} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right) \right) \\ & - \frac{1}{2160\alpha^3} \left(-36\sqrt{15}\alpha^2 x \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \right. \\ & - 36\sqrt{15}y\alpha\beta \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} + 5\sqrt{15}t\beta^2 \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \\ & - 36\sqrt{15}z\alpha\gamma \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} + 20\sqrt{15}t\alpha^3\beta\varepsilon \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \\ & - 32\sqrt{15}t\alpha^6\varepsilon^2 \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} + 4\sqrt{15}t\alpha^2\kappa_1 \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \\ & + 4\sqrt{15}t\alpha\beta\kappa_2 \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} + 4\sqrt{15}t\alpha\gamma\kappa_3 \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \\ & + 15(\beta - 4\alpha^3\varepsilon) (-36x\alpha^2 - 36y\alpha\beta + 5t\beta^2 - 36z\alpha\gamma - 20t\alpha^3\beta\varepsilon \\ & + 32t\alpha^6\varepsilon^2 + 4t\alpha(\alpha\kappa_1 + \beta\kappa_2 + \gamma\kappa_3)) \\ & \left. + 4320\alpha^4\sqrt{\varepsilon} \tan \left(\sqrt{\varepsilon} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Çözüm 3. $\varepsilon > 0$ için

$$\psi_{1.13} = \varrho_0 + \varrho_1 \left(\sqrt{\varepsilon} \tan \left(\sqrt{\varepsilon} \xi \right) \right) + \varrho_2 \left(\sqrt{\varepsilon} \tan \left(\sqrt{\varepsilon} \xi \right) \right)^2 \quad (4.34)$$

bulunur. (4.34) denklemini bir kez integralenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} v_{1.13}(x, y, z, t) = & 2\alpha\sqrt{\varepsilon} \tan^{-1} \left(\tan \left(\sqrt{\varepsilon} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right) \right) \\ & - \frac{1}{2160\alpha^3} \left(\begin{aligned} & 5\sqrt{15}t\beta^2 \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \\ & -36\sqrt{15}x\alpha^2 \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \\ & -36\sqrt{15}y\alpha\beta \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \\ & -32\sqrt{15}t\alpha^6\varepsilon^2 \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} + 20\sqrt{15}t\alpha^3\beta\varepsilon \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \\ & -36\sqrt{15}z\alpha\gamma \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} + 4\sqrt{15}t\alpha\gamma\kappa_3 \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \\ & +4\sqrt{15}t\alpha\beta\kappa_2 \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} + 4\sqrt{15}t\alpha^2\kappa_1 \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \\ & +15(\beta - 4\alpha^3\varepsilon)(-36x\alpha^2 - 36y\alpha\beta - 36z\alpha\gamma + 32t\alpha^6\varepsilon^2) \\ & -20t\alpha^3\beta\varepsilon + 4t\alpha(\alpha\kappa_1 + \beta\kappa_2 + \gamma\kappa_3) + 5\beta^2t \end{aligned} \right) \\ & +4320\alpha^4\sqrt{\varepsilon} \tan \left(\sqrt{\varepsilon} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Çözüm 4. $\varepsilon > 0$ için

$$\psi_{1.14} = \varrho_0 + \varrho_1 \left(\sqrt{\varepsilon} \cot \left(\sqrt{\varepsilon} \xi \right) \right) + \varrho_2 \left(\sqrt{\varepsilon} \cot \left(\sqrt{\varepsilon} \xi \right) \right)^2 \quad (4.36)$$

bulunur. (4.36) denklemini bir kez integralenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

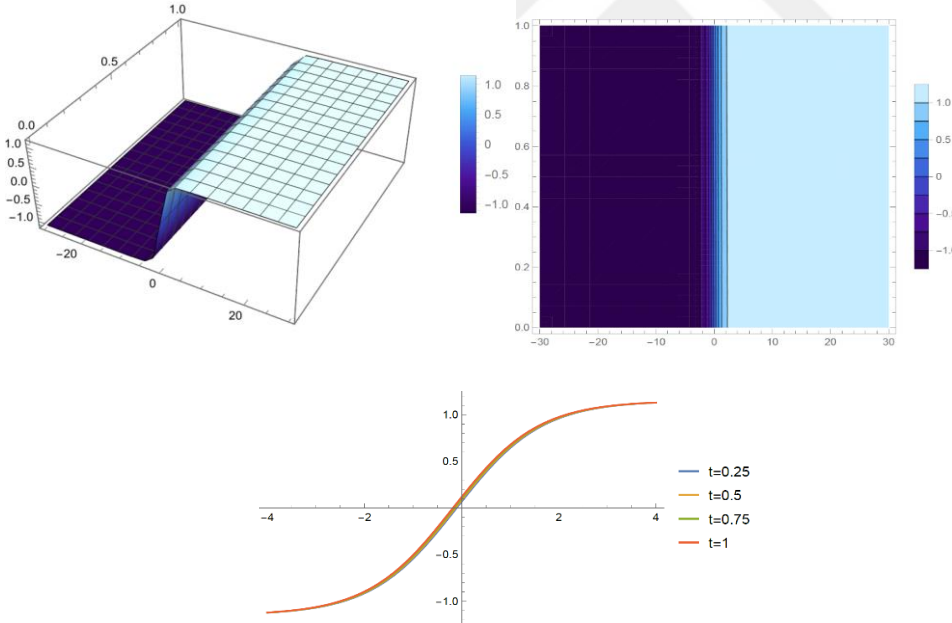
$$\begin{aligned} v_{1.14}(x, y, z, t) = & 2\alpha\sqrt{\varepsilon} \left(\tan^{-1} \left(\tan \left(\sqrt{\varepsilon} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right) \right) \right) \\ & - \cot \left(\sqrt{\varepsilon} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \right) \\ & + \frac{1}{60\alpha^2} \left(15\beta - 60\alpha^3\varepsilon + \sqrt{15} \sqrt{15\beta^2 - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 112\alpha^6\varepsilon^2} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Çözüm 5. $\varepsilon = 0$ için

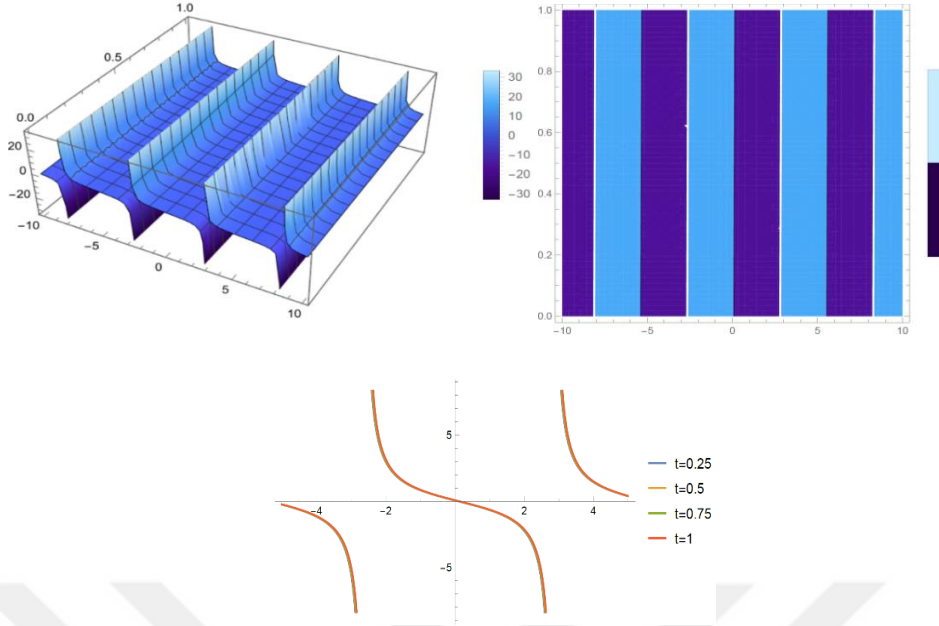
$$\psi_{1.15} = \varrho_0 + \frac{\varrho_1}{\xi} + \varrho_2 \left(\frac{1}{\xi} \right)^2 \quad (4.38)$$

bulunur. (4.38) denklemini bir kez integrallenir ve (4.3) dönüşümü tekrar göz önünde bulundurulursa

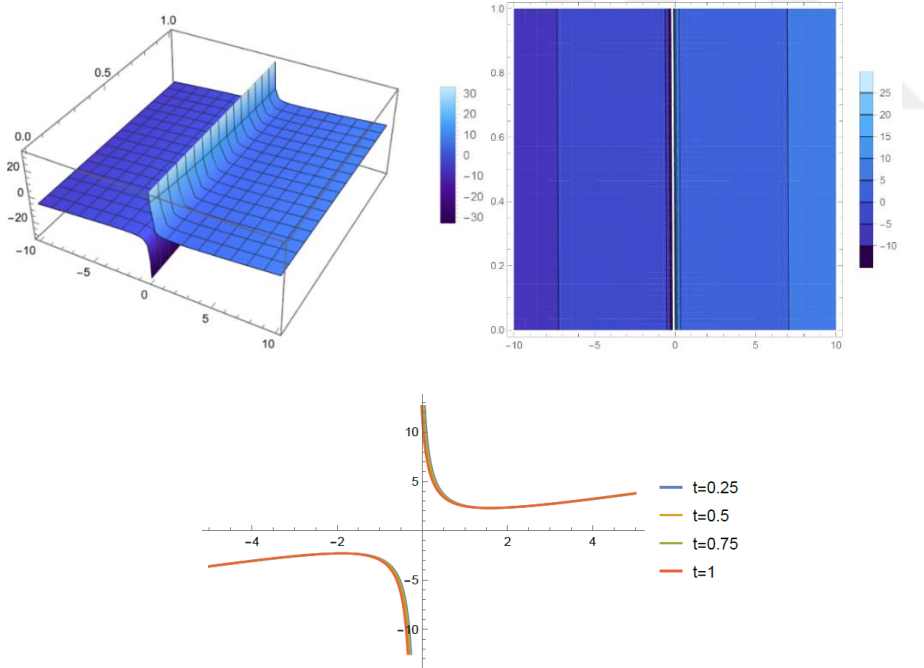
$$\begin{aligned} v_{1.15}(x, y, z, t) = & \frac{2\alpha}{(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)} \\ & + \frac{\beta(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)}{4\alpha^2} - \alpha\varepsilon(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \\ & + \frac{1}{4\alpha^2} \sqrt{\beta - \frac{8}{3}\alpha^3\beta\varepsilon + \frac{112\alpha^6\varepsilon^2}{15}} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) \end{aligned} \quad (4.39)$$



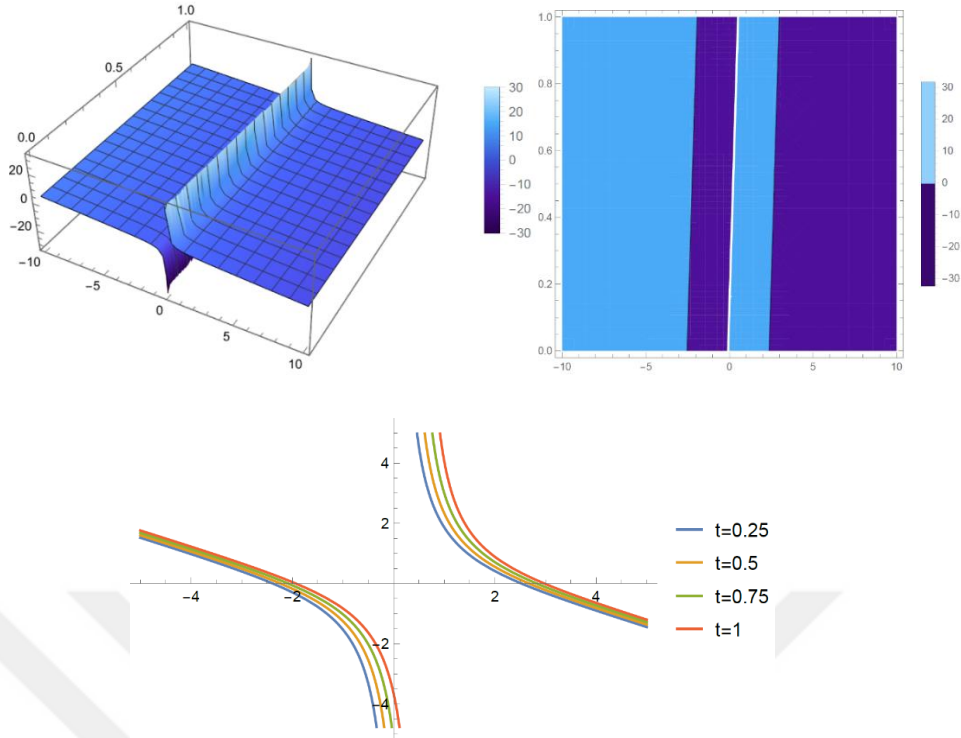
Şekil 4.1. Denklem (4.9)' da elde edilen $v_{1,1}(x, y, z, t)$ ' in $\alpha = 1$; $\beta = 0.27$; $\gamma = 0.51$; $\varepsilon = -0.33$; $\kappa_1 = -1$; $\kappa_2 = 1$; $\kappa_3 = -1$; $y = 0.1$; $z = 0.1$ ve $t=0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği



Şekil 4.2. Denklem (4.13)' te elde edilen $v_{1,3}(x, y, z, t)$ 'ün $\alpha = -1$; $\beta = 0.27$; $\gamma = 0.51$; $\varepsilon = 0.33$; $\kappa_1 = 1$; $\kappa_2 = 1$; $\kappa_3 = 1$; $y = 0.1$; $z = 0.1$ ve $t=0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği



Şekil 4.3. Denklem (4.17)' de elde edilen $v_{1,5}(x, y, z, t)$ ' in $\varepsilon = 0$; $\alpha = 1$; $\beta = 0.27$; $\gamma = 0.51$; $\varepsilon = -0.33$; $\kappa_1 = -1$; $\kappa_2 = 1$; $\kappa_3 = -1$; $y = 0.1$; $z = 0.1$ ve $t=0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği



Şekil 4.4. Denklem (4.22)' de elde edilen $u_{1,7}(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha = 1$; $\beta = 0.27$; $\gamma = 0.51$; $\varepsilon = -0.33$; $\kappa_1 = -1$; $\kappa_2 = 1$; $\kappa_3 = -1$; $y = 0.1$; $z = 0.1$ ve $t=0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği

4.1.2. Sardar Alt-Denklem Metodu Uygulamaları

$m = 2$ dengeleme sabiti (3.11) eşitliğinde yerine yazıldığında, aşağıdaki sonlu seri elde edilir:

$$\psi(\xi) = \varrho_0 + \varrho_1 \mathcal{H}(\xi) + \varrho_2 \mathcal{H}(\xi)^2. \quad (4.40)$$

Elde edilen (4.40) denklemi (4.5) denkleminde yerine yazılırsa $\mathcal{H}^i[\xi]$ ' ye cebirsel denklem sistemi oluşturur. Bu sistem, problemin temel parametrelerine bağlı olarak farklı çözüm yaklaşımlarını gerektirebilir.

$$\begin{cases}
\mathcal{H}(\xi)^6 : 120\alpha^6 \varrho_2 + 90\alpha^5 \varrho_2^2 + 15\alpha^4 \varrho_2^3 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi)^5 : 24\alpha^6 \varrho_1 + 120\alpha^5 \varrho_1 \varrho_2 + 45\alpha^4 \varrho_1 \varrho_2^2 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi)^4 : 120\alpha^6 \varepsilon_2 \varrho_2 + 60\alpha^5 \varepsilon_2 \varrho_2^2 + 30\alpha^5 \varrho_1^2 + 90\alpha^5 \varrho_0 \varrho_2 + 45\alpha^4 \varrho_0 \varrho_2^2 + 45\alpha^4 \varrho_1^2 \varrho_2 - 30\alpha^3 \beta \varrho_2 \\
\quad - 15\alpha^2 \beta \varrho_2^2 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi)^3 : 20\alpha^6 \varepsilon_2 \varrho_1 + 75\alpha^5 \varepsilon_2 \varrho_1 \varrho_2 + 30\alpha^5 \varrho_0 \varrho_1 + 15\alpha^4 \varrho_1^3 + 90\alpha^4 \varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 - 10\alpha^3 \beta \varrho_1 \\
\quad - 30\alpha^2 \beta \varrho_1 \varrho_2 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi)^2 : 16\alpha^6 \varepsilon_2^2 \varrho_2 + 72\alpha^6 \varepsilon_1 \varrho_2 + 15\alpha^5 \varepsilon_2 \varrho_1^2 + 30\alpha^5 \varepsilon_1 \varrho_2^2 + 60\alpha^5 \varepsilon_2 \varrho_0 \varrho_2 + 45\alpha^4 \varrho_0 \varrho_1^2 + 45\alpha^4 \varrho_0^2 \varrho_2 \\
\quad - 20\alpha^3 \beta \varepsilon_2 \varrho_2 \\
\quad - 15\alpha^2 \beta \varrho_1^2 - 30\alpha^2 \beta \varrho_0 \varrho_2 + \alpha^2 \kappa_1 \varrho_2 + \alpha \beta \kappa_2 \varrho_2 + \alpha \gamma \kappa_3 \varrho_2 - 9\alpha \omega \varrho_2 + 5\beta^2 \varrho_2 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi) : \alpha^6 \varepsilon_2^2 \varrho_1 + 12\alpha^6 \varepsilon_1 \varrho_1 + 15\alpha^5 \varepsilon_2 \varrho_0 \varrho_1 + 30\alpha^5 \varepsilon_1 \varrho_1 \varrho_2 + 45\alpha^4 \varrho_0^2 \varrho_1 - 5\alpha^3 \beta \varepsilon_2 \varrho_1 \\
\quad - 30\alpha^2 \beta \varrho_0 \varrho_1 + \alpha^2 \kappa_1 \varrho_1 + \alpha \beta \kappa_2 \varrho_1 + \alpha \gamma \kappa_3 \varrho_1 - 9\alpha \omega \varrho_1 + 5\beta^2 \varrho_1 = 0, \\
\mathcal{H}(\xi)^0 : 8\alpha^6 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varrho_2 + 30\alpha^5 \varepsilon_1 \varrho_0 \varrho_2 + 15\alpha^4 \varrho_0^3 - 10\alpha^3 \beta \varepsilon_1 \varrho_2 - 15\alpha^2 \beta \varrho_0^2 + \alpha^2 \kappa_1 \varrho_0 \\
\quad + \alpha \beta \kappa_2 \varrho_0 + \alpha \gamma \kappa_3 \varrho_0 - 9\alpha \omega \varrho_0 + 5\beta^2 \varrho_0 = 0.
\end{cases}$$

Bu cebirsel denklem sisteminin çözüm kümesi için, bilinmeyen parametrelerin değerlerine bağlı olarak 3 farklı senaryo ile karşılaşılır. Bu parametreler yardımıyla sırasıyla ilk önce (4.5) adi diferansiyel denklemin çözümü olan $\psi(\xi)$ fonksiyonu bulunur, daha sonra bu fonksiyonun 1 kez integre edilmesiyle (4.1) kısmi diferansiyel denklemin çözümü olan $\nu(\xi)$ çözüm fonksiyonu elde edilir. (Burada $\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t$ dir.)

$$\text{Durum 1. } \varrho_1 = 0, \varrho_2 = -2\alpha, \beta = \frac{8\alpha^4 \varepsilon_1 (2\alpha \varepsilon_2 + 9\varrho_0) + 2\alpha^2 \varrho_0 (8\alpha^2 \varepsilon_2^2 + 30\alpha \varepsilon_2 \varrho_0 + 15\varrho_0^2)}{5(4\alpha^2 \varepsilon_1 + \varrho_0 (4\alpha \varepsilon_2 + 3\varrho_0))},$$

$$\begin{aligned}
\omega = & \frac{1}{45(4\alpha^2 \varepsilon_1 + \varrho_0 (4\alpha \varepsilon_2 + 3\varrho_0))^2} \times \\
& \times (960\alpha^9 \varepsilon_1^3 + 16\alpha^4 \varepsilon_1^2 (16\alpha^5 \varepsilon_2^2 + 4\alpha^3 \varepsilon_2 (21\alpha \varrho_0 + \kappa_2) + 99\alpha^3 \varrho_0^2 + 18\alpha^2 \kappa_2 \varrho_0 + 5\alpha \kappa_1 + 5\gamma \kappa_3) \\
& + \varrho_0^2 (256\alpha^7 \varepsilon_2^4 + 64\alpha^5 \varepsilon_2^3 (15\alpha \varrho_0 + \kappa_2) + 16\alpha^2 \varepsilon_2^2 (18\alpha^2 \varrho_0 (5\alpha \varrho_0 + \kappa_2) + 5\alpha \kappa_1 + 5\gamma \kappa_3))) \\
& + \varrho_0^2 (60\alpha \varepsilon_2 \varrho_0 (5\alpha^2 \varrho_0 (3\alpha \varrho_0 + \kappa_2) + 2\alpha \kappa_1 + 2\gamma \kappa_3) + 45\varrho_0^2 (\alpha^2 \varrho_0 (5\alpha \varrho_0 + 2\kappa_2) + \alpha \kappa_1 + \gamma \kappa_3)) \\
& + 4\alpha^2 \varepsilon_1 \varrho_0 (128\alpha^6 \varepsilon_2^3 + 16\alpha^4 \varepsilon_2^2 (21\alpha \varrho_0 + 2\kappa_2) + 8\alpha \varepsilon_2 (9\alpha^2 \varrho_0 (5\alpha \varrho_0 + 2\kappa_2) + 5\alpha \kappa_1 + 5\gamma \kappa_3)) \\
& + 4\alpha^2 \varepsilon_1 \varrho_0 (3\varrho_0 (\alpha^2 \varrho_0 (15\alpha \varrho_0 + 28\kappa_2) + 10\alpha \kappa_1 + 10\gamma \kappa_3))).
\end{aligned}$$

Durum 1' e göre çözümler aşağıdaki şekil edilir:

Çözüm 1. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 = 0$ için

$$\psi_{2,1}(\xi) = \pm \left(\varrho_0 + \frac{8\alpha\varepsilon_2 pq}{\left((p-q)\sinh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + (p+q)\cosh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \right), \quad (4.41)$$

$$\nu_{2,1}(\xi) = \pm \left(\varrho_0 \xi - \frac{4\alpha\sqrt{\varepsilon_2}q}{p\sinh(2\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + p\cosh(2\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + q} \right). \quad (4.42)$$

Çözüm 2. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\psi_{2,2}(\xi) = \pm \left(\varrho_0 - \frac{8\alpha\varepsilon_2 pq}{\left((p+q)\sinh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + (p-q)\cosh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \right), \quad (4.43)$$

$$\nu_{2,2}(\xi) = \pm \left(\xi\varrho_0 + \frac{4\alpha\sqrt{\varepsilon_2}q}{p\sinh(2\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + p\cosh(2\sqrt{\varepsilon_2}\xi) - q} \right). \quad (4.44)$$

Çözüm 3. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\psi_{2,3}(\xi) = \pm \left(\varrho_0 + \frac{8\alpha\varepsilon_2 pq}{\left((p+q)\cos(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + i(p-q)\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \right), \quad (4.45)$$

$$\nu_{2,3}(\xi) = \pm \left(\xi\varrho_0 - \frac{4i\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}q}{ip\sin(2\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + p\cos(2\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + q} \right). \quad (4.46)$$

Çözüm 4. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\psi_{2,4}(\xi) = \pm \left(\varrho_0 - \frac{8\alpha\varepsilon_2 pq}{\left((p-q)\cos(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + i(p+q)\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \right), \quad (4.47)$$

$$v_{2.4}(\xi) = \pm \left(\xi \varrho_0 + \frac{4i\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}q}{ip \sin(2\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + p \cos(2\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) - q} \right). \quad (4.48)$$

Çözüm 5. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\psi_{2.5}(\xi) = \pm \left(\varrho_0 + \frac{\alpha\varepsilon_2 \left((p+q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p-q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p-q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p+q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2} \right), \quad (4.49)$$

$$v_{2.5}(\xi) = \pm \left(\alpha\varepsilon_2\xi + \xi\varrho_0 - \frac{2\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}q}{p \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + p \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + q} \right). \quad (4.50)$$

Çözüm 6. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\psi_{2.6}(\xi) = \pm \left(\varrho_0 + \frac{\alpha\varepsilon_2 \left((p-q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p+q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p+q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p-q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2} \right), \quad (4.51)$$

$$v_{2.6}(\xi) = \pm \left(\alpha\varepsilon_2\xi + \xi\varrho_0 - \frac{4\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}pq \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)}{(p-q) \left((p+q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p-q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)} \right). \quad (4.52)$$

Çözüm 7. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\psi_{2.7}(\xi) = \pm \left[\frac{\alpha \varepsilon_2 \left((p+q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p-q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + 2i\sqrt{pq} \right)^2}{\left((p-q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)^2} + \frac{\varrho_0 \left((p-q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)^2}{\left((p-q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \right], \quad (4.53)$$

$$v_{2.7}(\xi) = \pm \left(\alpha \varepsilon_2 \xi + \xi \varrho_0 + \frac{2\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2} \left(2pq \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + i(p+q)\sqrt{pq} \right)}{(p+q) \left((p-q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)} \right). \quad (4.54)$$

Çözüm 8. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\psi_{2.8}(\xi) = \pm \frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \left((p-q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + 2\sqrt{pq} \right)}{\sqrt{2} \left((p+q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p-q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)}, \quad (4.55)$$

$$v_{2.8}(\xi) = \pm \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} e^{\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi} \left(pe^{\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi} + 2i\sqrt{pq} - qe^{-\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi} \right)}{\sqrt{2} \left(pe^{2\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi} + q \right)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\alpha}{2} \left[\xi \varrho_0 + \frac{4iq}{q - e^{\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi} \sqrt{pq}} - \frac{2i\sqrt{p}\sqrt{q} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{pe^{\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}}}{\sqrt{q}} \right)}{\sqrt{pq}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4\sqrt{p}\sqrt{q} \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{pe^{\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}}}{\sqrt{q}} \right)}{\sqrt{pq}} \right] \right. \\ \left. - \ln \left(e^{\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi} \right) + 2 \log \left(q - pe^{2\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi} \right) - \ln \left(pe^{2\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi} + q \right) \varepsilon_2 \right). \quad (4.56)$$

Çözüm 9. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\psi_{2,9}(\xi) = \pm \left[\varrho_0 + \frac{\alpha \varepsilon_2 \left((p^2 - q^2) \sinh \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}} \right) + (p^2 + q^2) \cosh \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}} \right) \right)^2}{\left((p - q) \sinh \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}} \right) + (p + q) \cosh \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}} \right) \right)^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\left((p + q) \sinh \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}} \right) + (p - q) \cosh \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}} \right) \right)^2} \right], \quad (4.57)$$

$$\nu_{2,9}(\xi) = \pm \left[- \frac{4\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}p^2q^2 \sinh \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}} \right)}{(p - q)(p + q) \left((p - q) \sinh \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}} \right) + (p + q) \cosh \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}} \right) \right)} \times \right. \\ \left. \times \left((p + q) \sinh \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}} \right) + (p - q) \cosh \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}} \right) \right) + \alpha \varepsilon_2 \xi + \varrho_0 \xi \right]. \quad (4.58)$$

Çözüm 10. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\psi_{2,10}(\xi) = \pm \left[\varrho_0 + \frac{\alpha \varepsilon_2 \left((p - q) \cos \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}} \right) + i(p + q) \sin \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}} \right) \right)^2}{\left((p + q) \cos \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}} \right) + i(p - q) \sin \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}} \right) \right)^2} \right], \quad (4.59)$$

$$\nu_{2,10}(\xi) = \pm \left[\alpha \varepsilon_2 \xi + \xi \varrho_0 + \frac{4i\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2}pq \sin \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}} \right)}{(p + q) \left((p - q) \sin \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}} \right) - i(p + q) \cos \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}} \right) \right)} \right]. \quad (4.60)$$

Çözüm 11. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\psi_{2.11}(\xi) = \pm \left[\varrho_0 + \frac{\alpha \varepsilon_2 \left((p+q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}}\right) + i(p-q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p-q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}}\right) + i(p+q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2} \right], \quad (4.61)$$

$$\nu_{2.11}(\xi) = \pm \left[\alpha \varepsilon_2 \xi + \xi \varrho_0 - \frac{4i\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2}pq \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}}\right)}{(p-q) \left((p+q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}}\right) - i(p-q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}}\right) \right)} \right]. \quad (4.62)$$

Çözüm 12. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\psi_{2.12}(\xi) = \pm \left[\varrho_0 - \frac{\alpha \varepsilon_2 \left((p+q) \sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) - i(p-q) \cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) + 2\sqrt{pq} \right)^2}{\left((p+q) \cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) + i(p-q) \sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) \right)^2} \right], \quad (4.63)$$

$$\nu_{2.12}(\xi) = \pm \left[\alpha \varepsilon_2 \xi + \xi \varrho_0 - \frac{2\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2} \left(2pq \sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) + (p+q)\sqrt{pq} \right)}{(p+q) \left((p+q) \cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) + i(p-q) \sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) \right)} \right]. \quad (4.64)$$

Çözüm 13. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\psi_{2.13}(\xi) = \pm \left[\frac{\alpha \varepsilon_2 \left(i(p-q) \sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) + (p+q) \cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) + 2\sqrt{pq} \right)^2}{\left((p-q) \cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) + i(p+q) \sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{\varrho_0 \left((p-q) \cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) + i(p+q) \sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) \right)^2}{\left((p-q) \cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) + i(p+q) \sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) \right)^2} \right], \quad (4.65)$$

$$\nu_{2.13}(\xi) = \pm \left[\alpha \varepsilon_2 \xi + \xi \varrho_0 + \frac{2\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2} \left((p-q)\sqrt{pq} - 2ipq \sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) \right)}{(p-q) \left((p+q) \sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) - i(p-q) \cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) \right)} \right]. \quad (4.66)$$

Çözüm 14. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\psi_{2,14}(\xi) = \pm \left[\varrho_0 - \frac{\varepsilon_2 \varrho_2 \left((p^2 + q^2) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}}\right) + i(p^2 - q^2) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{2 \left((p+q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}}\right) + i(p-q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\varepsilon_2 \varrho_2 \left((p^2 + q^2) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}}\right) + i(p^2 - q^2) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p-q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}}\right) + i(p+q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)^2} \right], \quad (4.67)$$

$$\nu_{2,14}(\xi) = \pm \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_2 \xi \varrho_2 + \xi \varrho_0 + \frac{i\sqrt{2} \sqrt{\varepsilon_2} q^2 \varrho_2}{-ip^2 \sin(\sqrt{2} \sqrt{\varepsilon_2} \xi) + p^2 (-\cos(\sqrt{2} \sqrt{\varepsilon_2} \xi)) + q^2} \right). \quad (4.68)$$

Durum 2.

$$\varrho_0 = -\frac{4\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \alpha^2 (3\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2)}{3\sqrt[3]{\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 (16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1 \varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3 \varepsilon_2^3 - 45\alpha^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2}} - \frac{4\alpha \varepsilon_2}{3} \\ + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^{2/3} \sqrt[3]{\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 (16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1 \varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3 \varepsilon_2^3 - 45\alpha^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2}, \\ \varrho_1 = 0, \varrho_2 = -4\alpha, \\ \omega = \frac{1}{9} \left(\alpha \kappa_1 + 2 \left(\frac{2}{5} \right)^{2/3} \alpha^2 \kappa_2 \sqrt[3]{\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 (16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1 \varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3 \varepsilon_2^3 - 45\alpha^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2} \right. \\ \left. + \varepsilon_1 \left(-48\alpha^5 - \frac{12\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \alpha^4 \kappa_2}{\sqrt[3]{\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 (16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1 \varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3 \varepsilon_2^3 - 45\alpha^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2}} \right) \right. \\ \left. + \varepsilon_2^2 \left(16\alpha^5 + \frac{4\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \alpha^4 \kappa_2}{\sqrt[3]{\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 (16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1 \varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3 \varepsilon_2^3 - 45\alpha^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2}} \right) + \gamma \kappa_3 \right),$$

$$\beta = \frac{2\alpha^2 \left(2\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 (16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3\varepsilon_2 (2\varepsilon_2^2 - 9\varepsilon_1) \right)^{2/3}}{5^{2/3} \sqrt[3]{\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 (16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 5\alpha^3\varepsilon_2 (2\varepsilon_2^2 - 9\varepsilon_1)}} + \frac{4\sqrt[3]{10}\alpha^4 (\varepsilon_2^2 - 3\varepsilon_1)}{5^{2/3} \sqrt[3]{\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 (16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 5\alpha^3\varepsilon_2 (2\varepsilon_2^2 - 9\varepsilon_1)}}.$$

Çözüm 1. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\psi_{2.15}(\xi) = \pm \left(\frac{4\sqrt[3]{5} \sqrt[3]{2\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 \varepsilon_2^6 + 5\alpha^3 \varepsilon_2^3}}}{15} + \frac{45^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2}{15 \sqrt[3]{2\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 \varepsilon_2^6 + 5\alpha^3 \varepsilon_2^3}}} + \frac{4\alpha\varepsilon_2}{15} \left(\frac{60pq}{\left((p-q) \sinh(\sqrt{\varepsilon_2} \xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{\varepsilon_2} \xi) \right)^2} - 5 \right) \right), \quad (4.69)$$

$$\nu_{2.15}(\xi) = \pm \left(\frac{240\alpha \sqrt{\varepsilon_2} pq \sinh(\sqrt{\varepsilon_2} \xi)}{15(p+q) \left((p-q) \sinh(\sqrt{\varepsilon_2} \xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{\varepsilon_2} \xi) \right)} - \frac{4}{3} \alpha \varepsilon_2 \xi + \frac{4\sqrt[3]{5} \xi \sqrt[3]{2\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 \varepsilon_2^6 + 5\alpha^3 \varepsilon_2^3}}}{15} + \frac{4.5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2 \xi}{15 \sqrt[3]{2\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 \varepsilon_2^6 + 5\alpha^3 \varepsilon_2^3}}} \right). \quad (4.70)$$

Çözüm 2. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\psi_{2.16}(\xi) = \pm \frac{4\alpha\varepsilon_2}{15} \left(- \frac{60pq}{\left((p+q) \sinh(\sqrt{\varepsilon_2} \xi) + (p-q) \cosh(\sqrt{\varepsilon_2} \xi) \right)^2} - 5 \right) + \frac{4}{15} \left(\frac{5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2}{\left(5\alpha^3 \varepsilon_2^3 + 2\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 \varepsilon_2^6} \right)^{1/3}} + 5^{1/3} \left(5\alpha^3 \varepsilon_2^3 + 2\sqrt{5} \sqrt{\alpha^6 \varepsilon_2^6} \right)^{1/3} \right), \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned}
\nu_{2.16}(\xi) = & \pm \left(\frac{240\alpha\sqrt{\varepsilon_2}pq \sinh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi)}{15(p-q)\left((p+q)\sinh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + (p-q)\cosh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi)\right)} \right. \\
& \left. - \frac{4}{3}5\alpha\varepsilon_2\xi + \frac{4}{15} \left(\sqrt[3]{5\xi^3\sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right) \right). \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Çözüm 3. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned}
\psi_{2.17}(\xi) = & \pm \frac{4}{15} \left(\alpha\varepsilon_2 \left(-5 + \frac{60pq}{\left((p+q)\cos(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + i(p-q)\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi)\right)^2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2}{\left(5\alpha^3\varepsilon_2^3 + 2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6}\right)^{1/3}} + 5^{1/3} \left(5\alpha^3\varepsilon_2^3 + 2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6}\right)^{1/3} \right), \tag{4.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{2.17}(\xi) = & \pm \frac{4}{15} \left(-5\alpha\varepsilon_2\xi + \frac{60i\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}pq \sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi)}{(p+q)\left((p-q)\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) - i(p+q)\cos(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi)\right)} \right. \\
& \left. + \sqrt[3]{5\xi^3\sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right). \tag{4.74}
\end{aligned}$$

Çözüm 4. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned}
\psi_{2.18}(\xi) = & \pm \frac{4}{15} \left(\alpha\varepsilon_2 \left(-5 - \frac{60pq}{\left((p-q)\cos(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + i(p+q)\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi)\right)^2} \right) \right. \\
& \left. + \sqrt[3]{5\xi^3\sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right), \tag{4.75}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{2.18}(\xi) = & \pm \frac{4}{15} \left(-5\alpha\varepsilon_2\xi - \frac{60i\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}pq \sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi)}{(p-q)\left((p+q)\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) - i(p-q)\cos(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi)\right)} \right. \\
& \left. + \sqrt[3]{5\xi^3\sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right). \tag{4.76}
\end{aligned}$$

Çözüm 5. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.19}(\xi) = & \pm \frac{1}{15} \left[-20\alpha\varepsilon_2 + \frac{30\alpha\varepsilon_2 \left((p+q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p-q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p-q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p+q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2} \right. \\ & \left. + 2\sqrt[3]{5} \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{2 \cdot 5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right], \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} \nu_{2.19}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left[5\alpha\varepsilon_2\xi + \frac{60\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}pq \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)}{(p+q) \left((p-q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p+q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)} \right. \\ & \left. + \sqrt[3]{5}\xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2 \xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right]. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Çözüm 6. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.20}(\xi) = & \pm \frac{1}{15} \left[-20\alpha\varepsilon_2 + \frac{30\alpha\varepsilon_2 \left((p-q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p+q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p+q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p-q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2} \right. \\ & \left. + 2\sqrt[3]{5} \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{2 \cdot 5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right], \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \nu_{2.20}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left[5\alpha\varepsilon_2\xi - \frac{60\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}pq \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)}{(p-q) \left((p+q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p-q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)} \right. \\ & \left. + \sqrt[3]{5}\xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2 \xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right]. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Çözüm 7. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.21}(\xi) = & \pm \frac{1}{15} \left(-20\alpha\varepsilon_2 \right. \\ & + \frac{30\alpha\varepsilon_2 \left((p+q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p-q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + 2i\sqrt{pq} \right)^2}{\left((p-q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \\ & \left. + 2\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{2 \cdot 5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right), \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} v_{2.21}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left(5\alpha\varepsilon_2\xi + \frac{30\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2} \left(2pq \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + i(p+q)\sqrt{pq} \right)}{(p+q) \left((p-q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)} \right. \\ & \left. + \sqrt[3]{5}\xi\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2 \xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Çözüm 8. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.22}(\xi) = & \pm \frac{1}{15} \left(\frac{30\alpha\varepsilon_2 \left((p-q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + 2\sqrt{pq} \right)^2}{\left((p+q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p-q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \right. \\ & \left. - 20\alpha\varepsilon_2 + 2\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{2 \cdot 5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right), \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} v_{2.22}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left(5\alpha\varepsilon_2\xi - \frac{30\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2} \left(2pq \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (q-p)\sqrt{pq} \right)}{(p-q) \left((p+q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p-q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)} \right. \\ & \left. + \sqrt[3]{5}\xi\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2 \xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Çözüm 9. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.23}(\xi) = & \pm \frac{1}{30} \left[\frac{60\alpha\varepsilon_2 \left((p^2 - q^2) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p^2 + q^2) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p - q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + (p + q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)^2} \right] \times \\ & \times \frac{1}{\left((p + q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + (p - q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)^2} \\ & - 40\alpha\varepsilon_2 + 4\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{45^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \nu_{2.23}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left[\frac{60\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}p^2q^2 \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)}{(p - q)(p + q) \left((p - q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + (p + q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)} \right] \times \\ & \times \left((p + q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + (p - q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right) \\ & + \sqrt[3]{5}\xi\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} + 5\alpha\varepsilon_2\xi. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Çözüm 10. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.24}(\xi) = & \pm \frac{1}{15} \left[-20\alpha\varepsilon_2 + \frac{30\alpha\varepsilon_2 \left((p - q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + i(p + q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p + q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + i(p - q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2} \right] \\ & + 2\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{25^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned}
\nu_{2.24}(\xi) = & \mp \frac{2}{15} \left(\sqrt[3]{5\xi^3} \sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3} + \frac{5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + 5\alpha\varepsilon_2\xi \right. \\
& \left. + \frac{60i\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2}pq \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right)}{(p+q)\left((p-q)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right) - i(p+q)\cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right)\right)} \right). \tag{4.88}
\end{aligned}$$

Çözüm 11. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\begin{aligned}
\psi_{2.25}(\xi) = & \pm \frac{1}{15} \left(-20\alpha\varepsilon_2 + \frac{30\alpha\varepsilon_2 \left((p+q)\cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right) + i(p-q)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p-q)\cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right) + i(p+q)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right) \right)^2} \right. \\
& \left. + 2\sqrt[3]{5}\sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3} + \frac{2 \cdot 5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right), \tag{4.89}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{2.25}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left(-\frac{60i\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2}pq \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right)}{(p-q)\left((p+q)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right) - i(p-q)\cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right)\right)} \right. \\
& \left. + 5\alpha\varepsilon_2\xi + \sqrt[3]{5\xi^3} \sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3} + \frac{5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right). \tag{4.90}
\end{aligned}$$

Çözüm 12. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\begin{aligned}
\psi_{2.26}(\xi) = & \pm \frac{1}{15} \left(-20\alpha\varepsilon_2 - \frac{30\alpha\varepsilon_2 \left((p+q)\sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2\xi}\right) - i(p-q)\cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2\xi}\right) + 2\sqrt{pq} \right)^2}{\left((p+q)\cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2\xi}\right) + i(p-q)\sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2\xi}\right) \right)^2} \right. \\
& \left. + 2\sqrt[3]{5}\sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3} + \frac{2 \cdot 5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right), \tag{4.91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{2.26}(\xi) = \pm \frac{2}{15} & \left(-\frac{30\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2} \left(2pq \sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + (p+q)\sqrt{pq} \right)}{(p+q)\left((p+q)\cos(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + i(p-q)\sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)} \right. \\
& \left. + 5\alpha\varepsilon_2\xi + \sqrt[3]{5\xi^3\sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right). \tag{4.92}
\end{aligned}$$

Çözüm 13. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\begin{aligned}
\psi_{2.27}(\xi) = \pm \frac{1}{15} & \left(-20\alpha\varepsilon_2 + \frac{30\alpha\varepsilon_2 \left(i(p-q)\sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + (p+q)\cos(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + 2\sqrt{pq} \right)^2}{\left((p-q)\cos(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + i(p+q)\sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \right. \\
& \left. + 2\sqrt[3]{5\xi^3\sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{2 \cdot 5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right), \tag{4.93}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{2.27}(\xi) = \pm \frac{2}{15} & \left(5\alpha\varepsilon_2\xi + \frac{30\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2} \left((p-q)\sqrt{pq} - 2ipq \sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)}{(p-q)\left((p+q)\sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) - i(p-q)\cos(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)} \right. \\
& \left. + \sqrt[3]{5\xi^3\sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right). \tag{4.94}
\end{aligned}$$

Çözüm 14. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\begin{aligned}
\psi_{2.28}(\xi) = \pm \frac{1}{30} & \left(-40\alpha\varepsilon_2 + \frac{60\alpha\varepsilon_2 \left((p^2+q^2)\cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + i(p^2-q^2)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p+q)\cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + i(p-q)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)^2} \times \right. \\
& \times \left((p-q)\cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + i(p+q)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)^2 + \frac{4 \cdot 5^{2/3} \alpha^2 \varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \\
& \left. + 4\sqrt[3]{5\xi^3\sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right), \tag{4.95}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{2,28}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left[\frac{60\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2}p^2q^2 \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)}{(p-q)(p+q) \left((p+q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + i(p-q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)} \right] \times \\
& \times \left((p-q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + i(p+q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right) + 5\alpha\varepsilon_2\xi \\
& + \sqrt[3]{5\xi^3} \sqrt{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \Big]. \tag{4.96}
\end{aligned}$$

Durum 3.

$$\begin{aligned}
\varrho_0 = & \frac{1}{3}i(-1 \pm \sqrt{3}i) \left(\frac{2}{5}\right)^{2/3} \sqrt[3]{\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6(16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3\varepsilon_2^3 - 45\alpha^3\varepsilon_1\varepsilon_2} \\
& + \frac{2(1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{2}{5}\alpha^2(3\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2)}}{3\sqrt[3]{\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6(16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3\varepsilon_2^3 - 45\alpha^3\varepsilon_1\varepsilon_2}} - \frac{4\alpha\varepsilon_2}{3}, \\
\varrho_1 = & 0, \quad \varrho_2 = -4\alpha, \\
\omega = & \left(-6\alpha^4\varepsilon_1 \left(40\alpha\sqrt[3]{\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6(16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3\varepsilon_2^3 - 45\alpha^3\varepsilon_1\varepsilon_2} \right. \right. \\
& + \sqrt[3]{25^{2/3}}(-1 \mp i\sqrt{3})\kappa_2 \Big) + 2\alpha^4\varepsilon_2^2 \left(40\alpha(-45\alpha^3\varepsilon_1\varepsilon_2 + 10\alpha^3\varepsilon_2^3 + \right. \\
& \left. \sqrt[3]{\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6(16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3\varepsilon_2^3 - 45\alpha^3\varepsilon_1\varepsilon_2} + \sqrt[3]{25^{2/3}}(-1 \mp i\sqrt{3})\kappa_2 \right) + \\
& \left. \sqrt[3]{\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6(16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3\varepsilon_2^3 - 45\alpha^3\varepsilon_1\varepsilon_2} \right. \\
& \left. \left(5\alpha\kappa_1 + 2^{2/3}(-1 \pm \sqrt{3}i)\alpha^2\kappa_2\sqrt[3]{5\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6(16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 50\alpha^3\varepsilon_2^3 - 225\alpha^3\varepsilon_1\varepsilon_2} \right. \right. \\
& \left. \left. + 5\gamma\kappa_3 \right) / 45\sqrt[3]{\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6(16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3\varepsilon_2^3 - 45\alpha^3\varepsilon_1\varepsilon_2}, \\
\beta = & \left(\alpha^2 \left(6\sqrt[3]{5}(1 \pm i\sqrt{3})\alpha^2\varepsilon_1 \pm i(-2\sqrt[3]{5}(\sqrt{3} \mp i)\alpha^2\varepsilon_2^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt[3]{2}(\sqrt{3} \pm i)\left(\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6(16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 10\alpha^3\varepsilon_2^3 - 45\alpha^3\varepsilon_1\varepsilon_2\right)^{2/3} \right) \right) \Big) / \\
& 5^{2/3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6(16\varepsilon_2^6 - 144\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 297\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 108\varepsilon_1^3)} + 5\alpha^3\varepsilon_2^3 - \frac{45}{2}\alpha^3\varepsilon_1\varepsilon_2}.
\end{aligned}$$

Çözüm 1. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.29}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left(10\alpha\varepsilon_2 \left(\frac{12pq}{\left((p-q)\sinh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + (p+q)\cosh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)^2} - 1 \right) \right. \\ & \left. + \sqrt[3]{5}(-1 \pm \sqrt{3}i) \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \mp \frac{i5^{2/3}(\sqrt{3} \mp i)\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right), \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \nu_{2.29}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left(\frac{120\alpha\sqrt{\varepsilon_2}pq\sinh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi)}{(p+q)\left((p-q)\sinh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + (p+q)\cosh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)} - 10\alpha\varepsilon_2\xi \right. \\ & \left. + \sqrt[3]{5}(-1 \pm \sqrt{3}i)\xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \mp \frac{5^{2/3}i(\sqrt{3} \mp i)\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right). \end{aligned} \quad (4.98)$$

Çözüm 2. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.30}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left(10\alpha\varepsilon_2 \left(\frac{12pq}{\left((p+q)\sinh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + (p-q)\cosh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)^2} - 1 \right) \right. \\ & \left. \mp \sqrt[3]{5}i(\sqrt{3} + i) \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right), \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \nu_{2.30}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left(-10\alpha\varepsilon_2\xi - \frac{120\alpha\sqrt{\varepsilon_2}pq\sinh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi)}{(p-q)\left((p+q)\sinh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + (p-q)\cosh(\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)} \right. \\ & \left. \mp \sqrt[3]{5}i(\sqrt{3} + i)\xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Çözüm 3. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.31}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left(10\alpha\varepsilon_2 \left(-1 + \frac{12pq}{\left((p+q)\cos(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + i(p-q)\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \right) \right. \\ & \left. \mp \sqrt[3]{5i(\sqrt{3}+i)} \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right), \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \nu_{2.31}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left(-10\alpha\varepsilon_2\xi \mp \frac{5^{2/3}(\pm 1 + \sqrt{3}i)\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right. \\ & + i \left(\frac{120\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}pq\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi)}{(p+q)\left((p-q)\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) - i(p+q)\cos(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)} \right. \\ & \left. \left. + \sqrt[3]{5}(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)\xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Çözüm 4. $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.32}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left(10\alpha\varepsilon_2 \left(-1 - \frac{12pq}{\left((p-q)\cos(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + i(p+q)\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \right) \right. \\ & \left. \mp \frac{5^{2/3}(\pm 1 + \sqrt{3}i)\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} + \sqrt[3]{5}(\pm\sqrt{3}i - 1) \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right), \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} \nu_{2.32}(\xi) = & \pm \frac{2}{15} \left(-10\alpha\varepsilon_2\xi - \frac{120i\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}pq\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi)}{(p-q)\left((p+q)\sin(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) - i(p-q)\cos(\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)} \right. \\ & \left. \mp \sqrt[3]{5i(\sqrt{3}+i)} \xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 + 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Çözüm 5. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\psi_{2.33}(\xi) = \pm \frac{1}{30} \left[\frac{60\alpha\varepsilon_2 \left((p+q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p-q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p-q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p+q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2} - 40\alpha\varepsilon_2 \right. \\ \left. \mp 2\sqrt[3]{5i}(\sqrt{3}+i)\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \pm \frac{2 \cdot 5^{2/3} (1+i\sqrt{3})\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right], \quad (4.105)$$

$$v_{2.33}(\xi) = \pm \frac{1}{15} \left[\frac{120\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}pq \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)}{(p+q) \left((p-q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p+q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)} + 10\alpha\varepsilon_2\xi \right. \\ \left. \mp \sqrt[3]{5i}(\sqrt{3}+i)\xi\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right]. \quad (4.106)$$

Çözüm 6. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\psi_{2.34}(\xi) = \pm \frac{1}{30} \left[\frac{60\alpha\varepsilon_2 \left((p-q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p+q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p+q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p-q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2} - 40\alpha\varepsilon_2 \right. \\ \left. - 2\sqrt[3]{5}(\mp 1 + \sqrt{3}i)\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{2 \cdot 5^{2/3}(\pm 1 + i\sqrt{3})\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right], \quad (4.107)$$

$$v_{2.34}(\xi) = \pm \frac{1}{15} \left[\frac{120\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}pq \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)}{(p-q) \left((p+q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p-q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)} + 10\alpha\varepsilon_2\xi \right. \\ \left. \mp \sqrt[3]{5i}(\sqrt{3}+i)\xi\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{5^{2/3}(\pm 1 + \sqrt{3}i)\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right]. \quad (4.108)$$

Çözüm 7. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.35}(\xi) = & \pm \frac{1}{30} (-40\alpha\varepsilon_2 \\ & + \frac{60\alpha\varepsilon_2 \left((p+q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p-q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + 2i\sqrt{pq} \right)^2}{\left((p-q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \\ & \mp 2\sqrt[3]{5i}(\sqrt{3}+i) \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{25^{2/3}(\pm 1 + i\sqrt{3})\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}}, \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$\begin{aligned} \nu_{2.35}(\xi) = & \pm \frac{1}{30} \left(20\alpha\varepsilon_2\xi + \frac{120\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2} \left(2pq \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + i(p+q)\sqrt{pq} \right)}{(p+q) \left((p-q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)} \right. \\ & \left. \mp 2\sqrt[3]{5i}(\sqrt{3}+i) \xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{25^{2/3}(\pm 1 + i\sqrt{3})\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right). \end{aligned} \quad (4.110)$$

Çözüm 8. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.36}(\xi) = & \pm \frac{1}{30} \left(\frac{60\alpha\varepsilon_2 \left((p-q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + 2\sqrt{pq} \right)^2}{\left((p+q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p-q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \right. \\ & \left. - 40\alpha\varepsilon_2 - 2\sqrt[3]{5}(\mp 1 + \sqrt{3}i) \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{25^{2/3}(\pm 1 + i\sqrt{3})\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right), \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} \nu_{2.36}(\xi) = & \pm \frac{1}{30} \left(20\alpha\varepsilon_2\xi - \frac{120\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2} \left(2pq \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (q-p)\sqrt{pq} \right)}{(p-q) \left((p+q) \sinh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) + (p-q) \cosh(\sqrt{2}\sqrt{-\varepsilon_2}\xi) \right)} \right. \\ & \left. - 2\sqrt[3]{5}(\mp 1 + \sqrt{3}i) \xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{25^{2/3}(\pm 1 + i\sqrt{3})\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right). \end{aligned} \quad (4.112)$$

Çözüm 9. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 < 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.37}(\xi) = & \pm \frac{1}{30} \left[\frac{60\alpha\varepsilon_2 \left((p^2 - q^2) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + (p^2 + q^2) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p - q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + (p + q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)^2} \times \right. \\ & \times \frac{1}{\left((p + q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + (p - q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)^2 - 40\alpha\varepsilon_2} \\ & \left. - 2\sqrt[3]{5i}(\mp 1 + \sqrt{3}i) \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{25^{2/3}(\pm 1 + i\sqrt{3})\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right], \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} \nu_{2.37}(\xi) = & \pm \frac{1}{15} \left[\frac{120\sqrt{2}\alpha\sqrt{-\varepsilon_2}p^2q^2 \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)}{(p - q)(p + q) \left((p - q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + (p + q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)} \times \right. \\ & \times \frac{1}{\left((p + q) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) + (p - q) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right)} \\ & \left. + \sqrt[3]{5}(-1 \pm \sqrt{3}i) \xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \mp \frac{i5^{2/3}(\sqrt{3} \mp i)\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} + 10\alpha\varepsilon_2\xi \right]. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Çözüm 10. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.38}(\xi) = & \pm \frac{1}{30} \left[-40\alpha\varepsilon_2 + \frac{60\alpha\varepsilon_2 \left((p - q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + i(p + q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p + q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + i(p - q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2} \right. \\ & \left. - 2\sqrt[3]{5}(\mp 1 + \sqrt{3}i) \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{25^{2/3}(\pm 1 + i\sqrt{3})\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right], \end{aligned} \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned}
v_{2.38}(\xi) = & \pm \frac{1}{15} \left[10\alpha\varepsilon_2\xi + \frac{120i\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2}pq \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)}{(p+q)\left((p-q)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) - i(p+q)\cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)\right)} \right. \\
& \left. \mp \sqrt[3]{5}(-1 \pm \sqrt{3}i)\xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3} + \frac{5^{2/3}(\pm 1 + \sqrt{3}i)\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right]. \quad (4.116)
\end{aligned}$$

Çözüm 11. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\begin{aligned}
\psi_{2.39}(\xi) = & \pm \frac{1}{30} \left[-40\alpha\varepsilon_2 + \frac{60\alpha\varepsilon_2 \left((p+q)\cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + i(p-q)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p-q)\cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) + i(p+q)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) \right)^2} \right. \\
& \left. - 2\sqrt[3]{5}(\mp 1 + \sqrt{3}i)\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3} + \frac{2 \cdot 5^{2/3}(\pm 1 + i\sqrt{3})\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right], \quad (4.117)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{2.39}(\xi) = & \pm \frac{1}{15} \left[-\frac{120i\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2}pq \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)}{(p-q)\left((p+q)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right) - i(p-q)\cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi}{\sqrt{2}}\right)\right)} + 10\alpha\varepsilon_2\xi \right. \\
& \left. \mp \sqrt[3]{5}(-1 \pm \sqrt{3}i)\xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3} + \frac{5^{2/3}(\pm 1 + \sqrt{3}i)\alpha^2\varepsilon_2^2\xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right]. \quad (4.118)
\end{aligned}$$

Çözüm 12. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\begin{aligned}
\psi_{2.40}(\xi) = & \pm \frac{1}{30} \left(-40\alpha\varepsilon_2 \right. \\
& \left. - \frac{60\alpha\varepsilon_2 \left((p+q)\sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) - i(p-q)\cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) + 2\sqrt{pq} \right)^2}{\left((p+q)\cos\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) + i(p-q)\sin\left(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi\right) \right)^2} \right. \\
& \left. - 2\sqrt[3]{5}(\mp 1 + \sqrt{3}i)\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3} + \frac{2 \cdot 5^{2/3}(\pm 1 + i\sqrt{3})\alpha^2\varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6} - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \right), \quad (4.119)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{2.40}(\xi) = \pm \frac{1}{30} & \left(20\alpha\varepsilon_2\xi - \frac{120\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2} \left(2pq \sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + (p+q)\sqrt{pq} \right)}{(p+q) \left((p+q) \cos(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + i(p-q) \sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)} \right. \\
& \left. - 2\sqrt[3]{5}(\mp 1 + \sqrt{3}i) \xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{2 \cdot 5^{2/3} (\pm 1 + \sqrt{3}i) \alpha^2 \varepsilon_2^2 \xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right). \quad (4.120)
\end{aligned}$$

Çözüm 13. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

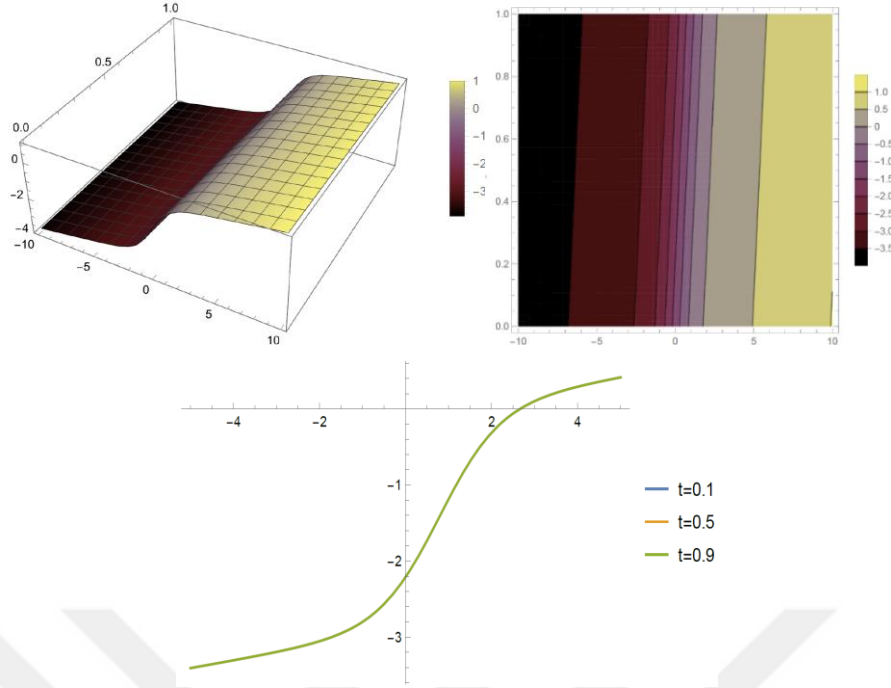
$$\begin{aligned}
\psi_{2.41}(\xi) = \pm \frac{1}{30} & \left(-40\alpha\varepsilon_2 \right. \\
& + \frac{60\alpha\varepsilon_2 \left(i(p-q) \sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + (p+q) \cos(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + 2\sqrt{pq} \right)^2}{\left((p-q) \cos(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) + i(p+q) \sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)^2} \\
& \left. - 2\sqrt[3]{5}(\mp 1 + \sqrt{3}i) \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{2 \cdot 5^{2/3} (\pm 1 + i\sqrt{3}) \alpha^2 \varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right), \quad (4.121)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{2.41}(\xi) = \pm \frac{1}{30} & \left(20\alpha\varepsilon_2\xi + \frac{120\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2} \left((p-q)\sqrt{pq} - 2ipq \sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)}{(p-q) \left((p+q) \sin(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) - i(p-q) \cos(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2}\xi) \right)} \right. \\
& \left. - 2\sqrt[3]{5}(\mp 1 + \sqrt{3}i) \xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{2 \cdot 5^{2/3} (\pm 1 + i\sqrt{3}) \alpha^2 \varepsilon_2^2 \xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} \right). \quad (4.122)
\end{aligned}$$

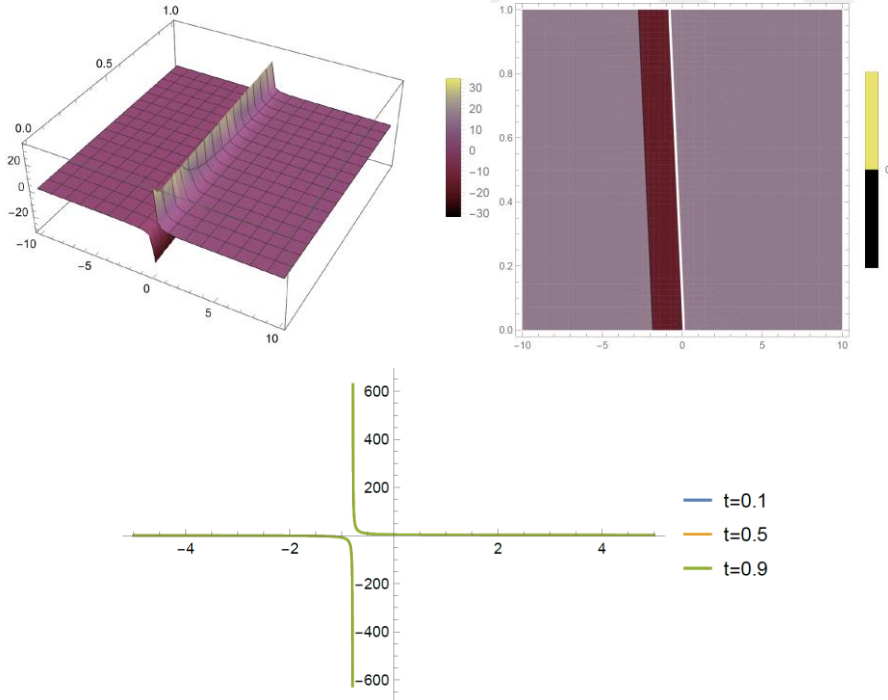
Çözüm 14. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2^2}{4}$ ve $\varepsilon_2 > 0$ için

$$\begin{aligned} \psi_{2.42}(\xi) = & \pm \frac{1}{30} (-40\alpha\varepsilon_2 \\ & + \frac{60\alpha\varepsilon_2 \left((p^2 + q^2) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right) + i(p^2 - q^2) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right) \right)^2}{\left((p+q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{2\sqrt{2}}\right) + i(p-q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{2\sqrt{2}}\right) \right)^2} \times \\ & \times \frac{1}{\left((p-q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{2\sqrt{2}}\right) + i(p+q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{2\sqrt{2}}\right) \right)^2} \\ & - 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{5} (\mp 1 + \sqrt{3}i) \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} + \frac{2 \cdot 5^{2/3} (\pm 1 + i\sqrt{3}) \alpha^2 \varepsilon_2^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}}, \end{aligned} \quad (4.123)$$

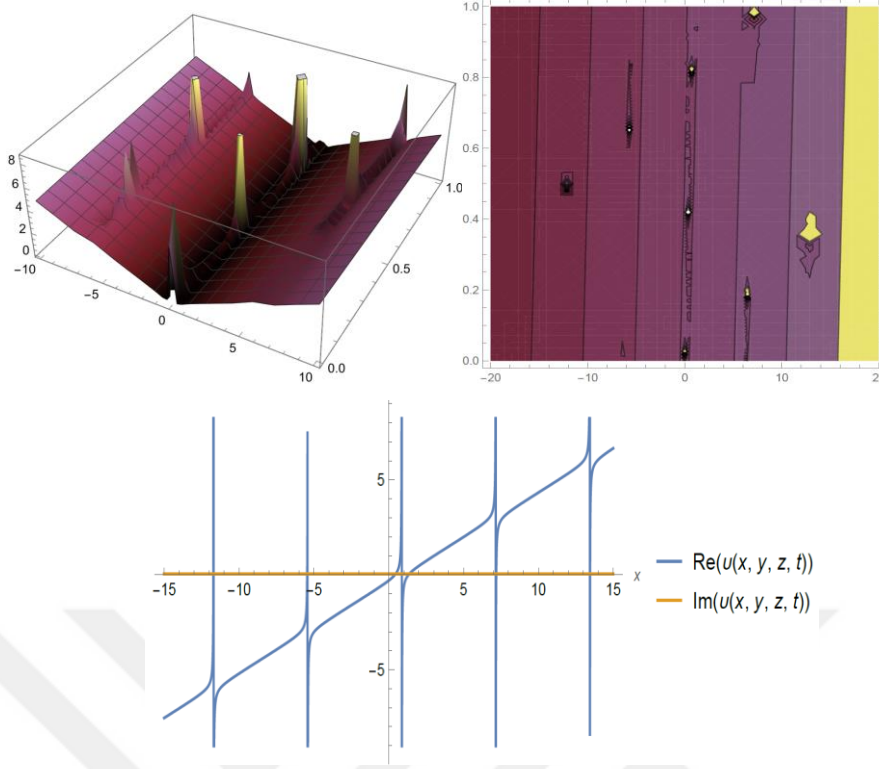
$$\begin{aligned} \upsilon_{2.42}(\xi) = & \pm \frac{1}{15} \left(\frac{120\sqrt{2}\alpha\sqrt{\varepsilon_2} p^2 q^2 \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{\sqrt{2}}\right)}{(p-q)(p+q) \left((p+q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{2\sqrt{2}}\right) + i(p-q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{2\sqrt{2}}\right) \right)} \right) \times \\ & \times \frac{1}{\left((p-q) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{2\sqrt{2}}\right) + i(p+q) \sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2\xi}}{2\sqrt{2}}\right) \right)} \\ & + \sqrt[3]{5} (\mp 1 + \sqrt{3}i) \xi \sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}} \mp \frac{i 5^{2/3} (\sqrt{3} \mp i) \alpha^2 \varepsilon_2^2 \xi}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}\sqrt{\alpha^6\varepsilon_2^6 - 5\alpha^3\varepsilon_2^3}}} + 10\alpha\varepsilon_2\xi \Big). \end{aligned} \quad (4.124)$$



Şekil 4.5. Denklem (4.42)' de elde edilen $v_{2,1}(\xi)$ ' in $\alpha = 1; \beta = 0.3; \gamma = 0.21; \gamma = 0.7; y = 0.1; z = 0.1; p = 1; q = 1; \varepsilon_2 = 0.5; \omega = 0.9$ ve $\varrho_0 = 0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği



Şekil 4.6. Denklem (4.44)' te elde edilen $v_{2,2}(\xi)$ ' nin $\alpha = -1; \beta = 0.3; \gamma = 0.21; \gamma = 0.7; y = 0.1; z = 0.1; p = 1; q = 1; \varepsilon_2 = 0.5; \omega = 0.9$ ve $\varrho_0 = 0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği



Şekil 4.7. Denklem (4.68)' de elde edilen $v_{2.14}(\xi)$ 'ün $\alpha = 1; \beta = -0.5; \gamma = 0.9; \gamma = 0.7; y = 0.1; z = 0.1; p = 1; q = -1; \varepsilon_2 = 0.5; \omega = 0.9; \varrho_0 = 0.5$ ve $\varrho_2 = 0.1$ değerleri için analitik çözüm grafiği

4.1.3. Rezidual Kuvvet Seri Metodu Uygulamaları

Öncelikle bu bölümde, Alt-denklemlerle elde edilen analitik çözümlerden herhangi ikisine $t = 0$ uygulanarak bir başlangıç koşulu belirlenecektir.

İlk olarak (4.9) denklemini için

$$v_{1.1}(x, y, z, 0) = -\frac{2\alpha\varepsilon \tanh(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z))}{\sqrt{-\varepsilon}}, \quad (4.125)$$

biçiminde başlangıç koşulu elde edilir.

(3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili

$$\begin{aligned} 9v_{xt} + v_{xxxxx} - 5(v_{xxy} + v_{yy}) + 15(v_{xx}v_{xxx} + v_x v_{xxx} - v_x v_{xy} - v_{xx}v_y) \\ + 45(v_x)^2 v_{xx} + \kappa_1 v_{xx} + \kappa_2 v_{xy} + \kappa_3 v_{xz} = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (4.126)$$

denklemini için RKSM çözümü (3.19) şeklindedir. Denklem için k -inci rezidual fonksiyonunun genel formu aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \text{Re } s\nu_k &= 9(\nu_k)_{,xt} + (\nu_k)_{,xxxxx} - 5\left((\nu_k)_{,xxy} + (\nu_k)_{,yy}\right) \\ &+ 15\left((\nu_k)_{,xx}(\nu_k)_{,xxx} + (\nu_k)_{,x}(\nu_k)_{,xxx} - (\nu_k)_{,x}(\nu_k)_{,xy} - (\nu_k)_{,xx}(\nu_k)_{,y}\right) \\ &+ 45\left((\nu_k)_{,x}\right)^2(\nu_k)_{,xx} + \kappa_1(\nu_k)_{,xx} + \kappa_2(\nu_k)_{,xy} + \kappa_3(\nu_k)_{,xz} = 0. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Burada $\nu_k = \nu_k(x, y, z, t)$ olmak üzere birinci RKSM nümerik çözümü için $\text{Re } s\nu_k$ ve $\nu_k(x, y, z, t)$ ifadelerine $k = 1$ yazıldığında

$$\begin{aligned} \text{Res } \nu_1 &= \kappa_3 f_{,xz} + \kappa_2 f_{,xy} + \kappa_1 f_{,xx} + 45 f_{,xx} f_x^2 - 5(f_{,xxy} - f_{,yy}) \\ &+ 15(-f_x f_{,xy} - f_y f_{,xx} + f_{,xx} f_{,xxx} + f_x f_{,xxx} + f_{,xxxx} + 9(f_1)_{,x}) \end{aligned} \quad (4.128)$$

elde edilir. Burada $f = f(x, y, z)$ ve $f_1 = f_1(x, y, z)$ dir. $t = 0$ için elde edilen (4.125) başlangıç koşulu (4.128) te yerine yazılıp integral alınırsa $f_1 = f_1(x, y, z)$ değeri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$f_1 = \frac{2}{9} \varepsilon (16\alpha^6 \varepsilon^2 + 20\alpha^3 \beta \varepsilon + \alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2) \text{sech}^2(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z)). \quad (4.129)$$

Dolayısıyla $\nu_1 = \nu_1(x, y, z, t)$ çözümü

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{2}{9} \varepsilon t (16\alpha^6 \varepsilon^2 + 20\alpha^3 \beta \varepsilon + \alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2) \text{sech}^2(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z)) \\ &- \frac{2\alpha \varepsilon \tanh(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z))}{\sqrt{-\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4.130)$$

biçimindedir.

Böylece, birinci RKSM çözümü elde edilmiş olur. Benzer şekilde $k = 2$ için $\text{Re } s\nu_2$ ifadesinin bir defa türevi alınıp $t = 0$ yazılırsa, aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} \text{Re } s\nu_2 &= 45(f_1)_{,xx} f_x^2 + 90(f_1)_{,x} f_{,xx} f_x + 15\left(-(f_1)_{,x} f_{,xy} - f_x (f_1)_{,xy}\right. \\ &\left. - (f_1)_{,y} f_{,xx} - f_y (f_1)_{,xx} + (f_1)_{,xx} f_{,xxx} + f_{,xx} (f_1)_{,xxx} + (f_1)_{,x} f_{,xxx} + f_x (f_1)_{,xxx}\right) \\ &+ \kappa_3 (f_1)_{,xz} + \kappa_2 (f_1)_{,xy} + \kappa_1 (f_1)_{,xx} + 9(f_2)_{,x} - 5\left((f_1)_{,xxy} - (f_1)_{,yy}\right) + (f_1)_{,xxxxx} \end{aligned} \quad (4.131)$$

elde edilir. Burada $f = f(x, y, z)$, $f_1 = f_1(x, y, z)$ ve $f_2 = f_2(x, y, z)$ dir. (4.125) başlangıç koşulu ve f_1 değeri (4.131) de yerine yazılırsa $Re s v_2 = 0$ eşitliğinden ve alınan integral sonucunda $f_2 = f_2(x, y, z)$ değeri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$f_2 = -\frac{4\varepsilon^2 (16\alpha^6 \varepsilon^2 + 20\alpha^3 \beta \varepsilon + \alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)^2}{81\alpha\sqrt{-\varepsilon}} \times \tanh(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z)) \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z)). \quad (4.132)$$

Böylece $v_2 = v_2(x, y, z, t)$ çözümü şu şekilde elde edilir:

$$v_2 = -\frac{2\varepsilon^2 t^2 (16\alpha^6 \varepsilon^2 + 20\alpha^3 \beta \varepsilon + \alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)^2}{81\alpha\sqrt{-\varepsilon}} \times \tanh(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z)) \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z)) \quad (4.133)$$

$$+ \frac{2}{9} \varepsilon t (16\alpha^6 \varepsilon^2 + 20\alpha^3 \beta \varepsilon + \alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2) \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z))$$

$$- \frac{2\alpha \varepsilon \tanh(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z))}{\sqrt{-\varepsilon}}.$$

Bu ifade ikinci RKSM değeridir.

Benzer şekilde uygulamaya devam edilirse f_3 ve v_3 değerleri aşağıdaki şekildedir:

$$f_3 = -\frac{4\varepsilon^2 (16\alpha^6 \varepsilon^2 + 20\alpha^3 \beta \varepsilon + \alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)^3}{729\alpha^2} \times (\cosh(2\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z)) - 2) \operatorname{sech}^4(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z)), \quad (4.134)$$

$$v_3 = -\frac{2\varepsilon^2 t^3 (16\alpha^6 \varepsilon^2 + 20\alpha^3 \beta \varepsilon + \alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)^3}{2187\alpha^2} \times (\cosh(2\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z)) - 2) \operatorname{sech}^4(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z))$$

$$- \frac{2\varepsilon^2 t^2 (16\alpha^6 \varepsilon^2 + 20\alpha^3 \beta \varepsilon + \alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)^2}{81\alpha\sqrt{-\varepsilon}} \times \tanh(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z)) \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z)) \quad (4.135)$$

$$+ \frac{2}{9} \varepsilon t (16\alpha^6 \varepsilon^2 + 20\alpha^3 \beta \varepsilon + \alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2) \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z))$$

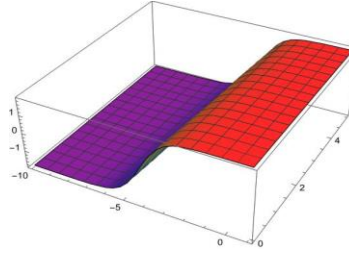
$$- \frac{2\alpha \varepsilon \tanh(\sqrt{-\varepsilon}(\alpha x + \beta y + \gamma z))}{\sqrt{-\varepsilon}}.$$

Böylece, üçüncü RKSM değeri elde edilmiştir. Aşağıda (3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili denkleminin RKSM ile elde edilen nümerik çözümleri, analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Bu çözümleri elde etmek için Wolfram Mathematica yazılımı kullanılmıştır. Tablo 1’de RKSM ile hesaplanan v_3 nümerik çözümünün analitik çözümle karşılaştırılmasından elde edilen mutlak hata değerleri sunulmuştur.

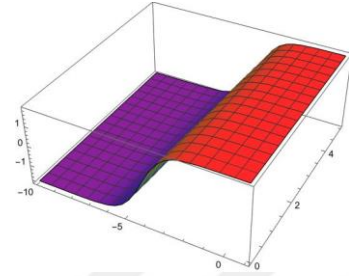
Tablo 1. Denklemin tam çözümü ile nümerik olarak elde edilen üç farklı çözüm (v_1, v_2, v_3) arasındaki karşılaştırması ve mutlak hataları

x	$v_1(x, y, z, t)$	$v_2(x, y, z, t)$	$v_3(x, y, z, t)$	Tam Çözüm	Mutlak Hata (v_1)	Mutlak Hata (v_2)	Mutlak Hata (v_3)
0.0	1.8985	1.89848	1.89848	1.89848	2.17239×10^{-5}	1.27648×10^{-6}	5.65196×10^{-8}
0.1	1.89876	1.89874	1.89874	1.89874	1.79692×10^{-5}	1.05611×10^{-6}	4.67845×10^{-8}
0.2	1.89897	1.89896	1.89896	1.89896	1.48629×10^{-5}	8.73715×10^{-7}	3.87198×10^{-8}
0.3	1.89915	1.89914	1.89914	1.89914	1.22931×10^{-5}	7.22767×10^{-7}	3.20408×10^{-8}
0.4	1.8993	1.89929	1.89929	1.89929	1.01673×10^{-5}	5.97863×10^{-7}	2.65109×10^{-8}
0.5	1.89942	1.89941	1.89941	1.89941	8.40890×10^{-6}	4.94521×10^{-7}	2.19333×10^{-8}
0.6	1.89952	1.89951	1.89951	1.89951	6.95448×10^{-6}	4.09026×10^{-7}	1.81447×10^{-8}
0.7	1.8996	1.8996	1.8996	1.8996	5.75153×10^{-6}	3.383×10^{-7}	1.50096×10^{-8}
0.8	1.89967	1.89967	1.89967	1.89967	4.75659×10^{-6}	2.79796×10^{-7}	1.24155×10^{-8}
0.9	1.89973	1.89972	1.89972	1.89972	3.93372×10^{-6}	2.31405×10^{-7}	1.02693×10^{-8}
1.0	1.89978	1.89977	1.89977	1.89977	3.25317×10^{-6}	1.91379×10^{-7}	8.49375×10^{-9}

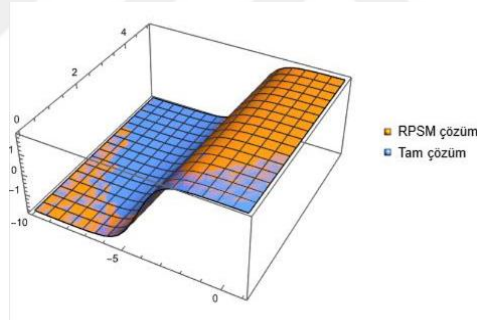
Bu tablo, denklemin tam çözümü ile nümerik olarak elde edilen üç farklı çözüm (v_1, v_2, v_3) arasındaki karşılaştırmayı ve mutlak hataları göstermektedir. Tablo incelendiğinde, v_1, v_2, v_3 çözümlerinin tümünün tam çözüme oldukça yakın bir şekilde sonuç verdiği görülmektedir. Özellikle v_2 ve v_3 , tam çözüme göre daha küçük mutlak hatalara (10^{-7} ve 10^{-9} mertebesinde) sahipken, v_1 'in mutlak hatası biraz daha yüksek (10^{-6} mertebesinde) olsa da kabul edilebilir bir düzeydedir. Hataların tümünde x değeri arttıkça azalan bir eğilim gözlenmekte, bu da nümerik çözümlerin tam çözüme giderek daha iyi bir şekilde yaklaştığını göstermektedir. Bu durum, kullanılan nümerik yöntemin doğruluğunu ve etkinliğini desteklemekte olup, yöntemin özellikle küçük hata toleransları gerektiren problemlerde başarılı bir şekilde uygulanabileceğini ortaya koymaktadır.



Şekil 4.8. Denklem (4.1) denkleminde yer alan $v_{1,1}(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=0.95; \beta=1; \gamma=1; \varepsilon=-1; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.2; \kappa_3=0.2; y=2; z=2; t=0.9$ değerleri için analitik çözüm grafiği



Şekil 4.9. Denklem (4.11) denkleminde elde edilen $v_3(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=0.95; \beta=1; \gamma=1; \varepsilon=-1; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.2; \kappa_3=0.2; y=2; z=2; t=0.9$ değerleri için nümerik çözüm grafiği



Şekil 4.10. (4.1) ve (4.11) denklemlerinden elde edilen $v_{1,1}(x, y, z, t)$ ve $v_3(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=0.95; \beta=1; \gamma=1; \varepsilon=-1; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.2; \kappa_3=0.2; y=2; z=2; t=0.9$ değerlerine göre mutlak hata grafiği

Son olarak Alt-denklemlerle elde edilen analitik çözümlerden biri olan (4.17) denklemine $t = 0$ uygulanarak bir başlangıç koşulu belirlenir. Bu işlem sonucunda, (4.17) denklemleri için

$$u_{1,5}(x, y, z, 0) = \frac{2\alpha}{\alpha x + \beta y + \gamma z} \quad (4.136)$$

biçiminde başlangıç koşulu elde edilir.

(3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili denklemi için RKSM çözümü (3.19) şeklindedir.

Denklemin k-ıncı rezidual fonksiyonunun genel formu

$$\begin{aligned} \text{Res } u_k &= 9(u_k)_{,xt} + (u_k)_{,xxxxx} - 5\left((u_k)_{,xxy} + (u_k)_{,yy}\right) \\ &+ 15\left((u_k)_{,xx}(u_k)_{,xxx} + (u_k)_{,x}(u_k)_{,xxx} - (u_k)_{,x}(u_k)_{,xy} - (u_k)_{,xx}(u_k)_{,y}\right) \\ &+ 45\left((u_k)_{,x}\right)^2 (u_k)_{,xx} + \kappa_1(u_k)_{,xx} + \kappa_2(u_k)_{,xy} + \kappa_3(u_k)_{,xz} = 0. \end{aligned} \quad (4.137)$$

biçimindedir. Burada $u_k = u_k(x, y, z, t)$ olmak üzere birinci RKSM nümerik çözümü için $\text{Res } u_k$ ve $u_k(x, y, z, t)$ ifadelerine $k = 1$ yazıldığında

$$\begin{aligned} \text{Res } u_1 &= \kappa_3 f_{,xz} + \kappa_2 f_{,xy} + \kappa_1 f_{,xx} + 45 f_{,xx} f_x^2 - 5(f_{,xxy} - f_{,yy}) \\ &+ 15(-f_x f_{,xy} - f_y f_{,xx} + f_{,xx} f_{,xxx} + f_x f_{,xxx} + f_{,xxxx} + 9(f_1)_{,x}) \end{aligned} \quad (4.138)$$

elde edilir. Burada $f = f(x, y, z)$ ve $f_1 = f_1(x, y, z)$ dir. $t = 0$ için elde edilen (4.136) başlangıç koşulu (4.138) 'de yerine yazılıp integral alınırsa $f_1 = f_1(x, y, z)$ değeri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$f_1 = \frac{2(\alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)}{9(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2}. \quad (4.139)$$

Dolayısıyla $u_1 = u_1(x, y, z, t)$ çözümü

$$u_1 = \frac{2\alpha}{\alpha x + \beta y + \gamma z} + \frac{2(\alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)}{9(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2} t \quad (4.141)$$

biçimindedir.

Böylece, birinci RKSM çözümü elde edilmiş olur. Benzer şekilde $k = 2$ için $\text{Res } u_2$ ifadesinin bir defa türevi alınıp $t = 0$ yazılırsa, aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} \text{Resu}_2 = & 45(f_1)_{xx} f_x^2 + 90(f_1)_x f_{xx} f_x + 15\left(-(f_1)_x f_{xy} - f_x (f_1)_{xy}\right. \\ & \left. -(f_1)_y f_{xx} - f_y (f_1)_{xx} + (f_1)_{xx} f_{xxx} + f_{xx} (f_1)_{xxx} + (f_1)_x f_{xxxx} + f_x (f_1)_{xxxx}\right) \\ & + \kappa_3 (f_1)_{xz} + \kappa_2 (f_1)_{xy} + \kappa_1 (f_1)_{xx} + 9(f_2)_x - 5\left((f_1)_{xxy} - (f_1)_{yy}\right) + (f_1)_{xxxxx} \end{aligned} \quad (4.142)$$

elde edilir. Burada $f = f(x, y, z)$, $f_1 = f_1(x, y, z)$ ve $f_2 = f_2(x, y, z)$ dir. (4.136) başlangıç koşulu ve f_1 değeri (4.142) 'de yerine yazılırsa $\text{Resu}_2 = 0$ eşitliğinden ve alınan integral sonucunda $f_2 = f_2(x, y, z)$ değeri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$f_2 = \frac{4(\alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)^2}{81\alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z)^3}. \quad (4.143)$$

Böylece $u_2 = u_2(x, y, z, t)$ çözümü şu şekilde elde edilir:

$$u_2 = \frac{2\alpha}{\alpha x + \beta y + \gamma z} + \frac{2(\alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)}{9(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2} t + \frac{2(\alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)^2}{81\alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z)^3} t^2. \quad (4.144)$$

Bu ifade ikinci RKSM değeridir.

Benzer şekilde uygulamaya devam edilirse f_3 ve u_3 değerleri aşağıdaki şekildedir:

$$f_3 = \frac{4(\alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)^3}{243\alpha^2(\alpha x + \beta y + \gamma z)^4} \quad (4.145)$$

ve

$$\begin{aligned} u_3 = & \frac{2\alpha}{\alpha x + \beta y + \gamma z} + \frac{2(\alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)}{9(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2} t + \frac{2(\alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)^2}{81\alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z)^3} t^2 \\ & + \frac{2(\alpha^2 \kappa_1 + \alpha \beta \kappa_2 + \alpha \gamma \kappa_3 + 5\beta^2)^3}{729\alpha^2(\alpha x + \beta y + \gamma z)^4} t^3 \end{aligned} \quad (4.146)$$

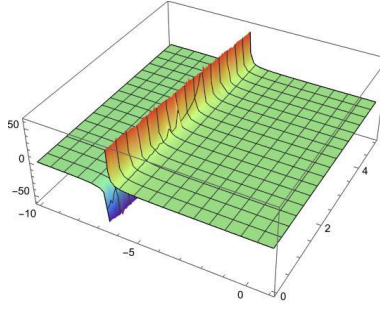
dir.

Böylece, üçüncü RKSM değeri elde edilmiştir. Aşağıda (3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili denkleminin RKSM ile elde edilen nümerik çözümleri, analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Bu çözümleri elde etmek için Wolfram Mathematica yazılımı kullanılmıştır. Tablo 2’de RKSM ile hesaplanan nümerik çözümünün analitik çözümle karşılaştırılmasından elde edilen mutlak hata değerleri sunulmuştur.

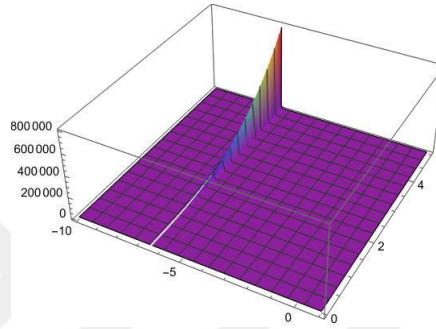
Tablo 2. Denklemin tam çözümü ile RKSM ile elde edilen $u_1 = u_1(x, y, z, t)$, $u_2 = u_2(x, y, z, t)$ ve $u_3 = u_3(x, y, z, t)$ çözümlerinin karşılaştırması

x	$u_1(x, y, z, t)$	$u_2(x, y, z, t)$	$u_3(x, y, z, t)$	Tam Çözüm	Mutlak Hata (u_1)	Mutlak Hata (u_2)	Mutlak Hata (u_3)
0.0	0.317685	0.317872	0.317876	0.317877	0.000191349	4.69473×10^{-6}	1.15185×10^{-7}
0.1	0.312721	0.312899	0.312903	0.312903	0.000182648	4.41283×10^{-6}	1.06615×10^{-7}
0.2	0.307909	0.308079	0.308083	0.308083	0.000174467	4.15178×10^{-6}	9.37999×10^{-8}
0.3	0.303243	0.303406	0.303409	0.30341	0.000166767	3.99975×10^{-6}	9.16619×10^{-8}
0.4	0.298716	0.298872	0.298875	0.298875	0.000159513	3.6851×10^{-6}	8.5134×10^{-8}
0.5	0.294322	0.294471	0.294475	0.294475	0.000152674	3.47636×10^{-6}	7.9152×10^{-8}
0.6	0.290056	0.290199	0.290202	0.290202	0.000146221	3.28219×10^{-6}	7.36748×10^{-8}
0.7	0.285911	0.286048	0.286051	0.286051	0.000140126	3.1014×10^{-6}	6.86428×10^{-8}
0.8	0.281883	0.282015	0.282018	0.282018	0.000134366	2.93288×10^{-6}	6.4078×10^{-8}
0.9	0.277968	0.278094	0.278096	0.278096	0.000128916	2.77565×10^{-6}	5.97614×10^{-8}
1.0	0.274159	0.274288	0.274283	0.274283	0.000123758	2.62882×10^{-6}	5.58403×10^{-8}

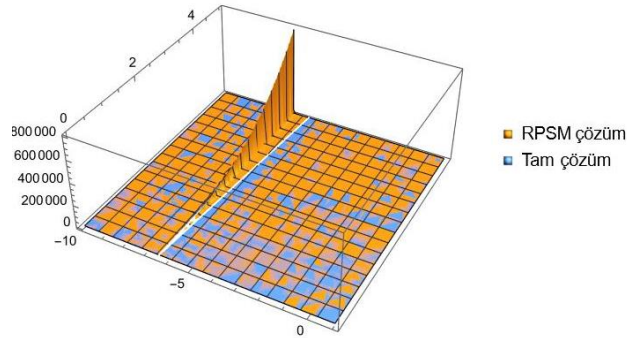
Bu tablo, denklemin tam çözümü ile RKSM ile elde edilen $u_1 = u_1(x, y, z, t)$, $u_2 = u_2(x, y, z, t)$ ve $u_3 = u_3(x, y, z, t)$ çözümlerinin karşılaştırmasını sunmaktadır. İlk sütun x -değerlerini temsil ederken, sonraki sütunlar sırasıyla nümerik çözümleri ve tam çözümü göstermektedir. Son üç sütunda ise her bir nümerik çözümün tam çözümle olan mutlak hataları verilmiştir. Tablo 2 incelendiğinde u_1 , u_2 ve u_3 çözümlerinin tam çözüme çok yakın olduğu ve mutlak hataların her bir durumda sabit ve oldukça küçük bir değer civarında (10^{-4} , 10^{-6} ve 10^{-8} mertebesinde) kaldığı görülmektedir. Ayrıca, x -değerleri arttıkça hataların düştüğü de söylenebilir. Bu, nümerik yöntemin güvenilirliğini ve doğruluğunu işaret ederken, tüm nümerik çözümlerin benzer bir performans gösterdiğini ve tam çözüme olan yakınlıklarının dengeli olduğunu ortaya koymaktadır.



Şekil 4.11. (4.17) denkleminde yer alan $u_{1.5}(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=2; \beta=0.3; \gamma=4; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.8; \kappa_3=0.2; y=3; z=3; t=0.9$ değerleri için analitik çözüm grafiği



Şekil 4.12. Denklem (4.146)'da elde edilen $u_3(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=2; \beta=0.3; \gamma=4; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.8; \kappa_3=0.2; y=3; z=3; t=0.9$ değerleri için nümerik çözüm grafiği



Şekil 4.13. (4.17) ve (4.146) denklemlerinden elde edilen $u_{1.5}(x, y, z, t)$ ve $u_3(x, y, z, t)$ 'nin $\alpha=2; \beta=0.3; \gamma=4; \kappa_1=0.95; \kappa_2=0.8; \kappa_3=0.2; y=3; z=3; t=0.9$ değerlerine göre mutlak hata grafiği

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, (3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili denklemi için analitik ve nümerik çözüm yöntemleri kullanılarak özgün ve literatüre yeni katkılar sağlayan çözümler elde edilmiştir. Çalışma kapsamında, analitik çözüm yöntemlerinden Alt Denklem ve Sardar-Alt Denklem metotları, sayısal çözüm yöntemi olarak ise Rezidual Kuvvet Serisi metodu (RKSM) bu denkleme uygulanmıştır. Analitik yöntemlerin uygulanması sonucunda, denklemin periyodik, hiperbolik, üstel, rasyonel ve hiper geometrik türden farklı yapılar sergileyen çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca, bu çözümler incelenen denklemin daha önce literatürde yer almayan yeni matematiksel yapılar sunduğunu ortaya koymuştur. Çalışma hem teorik hem de uygulamalı çözüm yöntemlerinin başarısını ortaya koyarken, bu yöntemlerin diğer doğrusal olmayan diferansiyel denklemler üzerinde de uygulanabilirliğine yönelik güçlü bir temel sunmaktadır.

Yöntemlerin doğruluğu ve etkinliği detaylı bir şekilde analiz edilmiş, teorik sonuçlar grafiklerle desteklenmiştir. Belirli parametreler üzerinden elde edilen çözümler, 3 boyutlu yüzey grafikleri, kontur çizimleri ve 2 boyutlu grafiklerle görselleştirilmiş; sonuçların teorik doğruluğu görsel yollarla desteklenmiştir. Bu görseller ise, yöntemlerin güvenilirliğini ve analizlerin tutarlılığını net bir şekilde göstermektedir.

Tezde sunulan analitik ve nümerik çözümler, yalnızca teorik matematik açısından değil, aynı zamanda fiziksel modellerin dinamik davranışlarını anlamak için de büyük önem taşımaktadır. Çözümler, dalga yayılımı, enerji transferi ve doğrusal olmayan fiziksel süreçlerin modellenmesi gibi birçok alanda uygulanabilir bir temel sunmaktadır. Bunun yanı sıra, kullanılan yöntemlerin esnek yapısı, klasik doğrusal olmayan denklemler kadar, kesirli türevli doğrusal olmayan diferansiyel denklemler üzerinde de uygulanabilirliğini göstermektedir. Bu yöntemlerin, daha karmaşık fiziksel sistemlerin ve mühendislik uygulamalarının modellenmesine yönelik olarak genişletilmesi güçlü bir potansiyele sahiptir. Özellikle, kesirli türevli sistemlerin fiziksel anlamlarının daha detaylı incelenmesi ve bu tür sistemlerde elde edilen çözümlerin doğruluğu ile etkinliğinin artırılması, gelecekteki çalışmalar için önemli bir araştırma alanı sunmaktadır. Bu bağlamda, tezde sunulan yöntemler ve elde edilen sonuçlar, doğrusal olmayan denklemlerle ilgili teorik ve uygulamalı çalışmalar için sağlam bir temel oluşturmaktadır.



KAYNAKLAR

Ahmad, J., & Mustafa, Z. (2023). "Dynamics of exact solutions of nonlinear resonant Schrödinger equation utilizing conformable derivatives and stability analysis." *The European Physical Journal D*, Vol. 77, No. 6, pp. 123.

Adeniji, A. A., Mogbojuri, O. A., Kekana, M. C., & Fadugba, S. E. (2023). "Numerical solution of rotavirus model using Runge-Kutta-Fehlberg method, differential transform method and Laplace Adomian decomposition method." *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 82, No. 1, pp. 323-329.

Ahmad, H., Seadawy, A. R., & Khan, T. A. (2020). "Study on numerical solution of dispersive water wave phenomena by using a reliable modification of variational iteration algorithm." *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 177, No. 1, pp. 13–23.

Akinyemi, L. (2023). "Shallow ocean soliton and localized waves in extended $(2 + 1)$ -dimensional nonlinear evolution equations." *Journal of Physics A*, Vol. 463, pp. 128668.

Akinyemi, L., Şenol, M., & Iyiola, O. S. (2021). "Exact solutions of the generalized multidimensional mathematical physics models via sub-equation method." *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 182, pp. 211-233.

Alquran, M. (2014). "Analytical solutions of fractional foam drainage equation by residual power series method." *Mathematical Sciences*, Vol. 8, No. 4, pp. 153-160.

Batool, F., Suleman, M. S., Demirbilek, U., Rezazadeh, H., Khedher, K. M., Alsulamy, S., & Ahmad, H. (2024). Studying the impacts of M -fractional and beta derivatives on the nonlinear fractional model. *Optical and Quantum Electronic*, 56(2), 164.

Demirbilek, U., Nadeem, M., Çelik, F. M., Bulut, H., & Şenol, M. (2024). "Generalized extended $(2+ 1)$ -dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation in fluid dynamics: analytical solutions, sensitivity and stability analysis." *Nonlinear Dynamics*, Vol. 112, pp. 1-16.

Esen, A., Sulaiman, T. A., Bulut, H., & Baskonus, H. M. (2018). "Optical solitons and other solutions to the conformable space-time fractional Fokas-Lenells equation." *Optik*, Vol. 167, No. 6, pp. 150–156.

Fan, E. (2000). "Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations." *Physics Letters A*, Vol. 277, No. 4-5, pp. 212-218.

Fourier, J.-B. J. (1822). *The Analytical Theory of Heat*. Firmin Didot, Paris, France.

Gauss, C. F. (1839). “General principles on the attraction and repulsion forces acting inversely as the square of the distance.” *Göttingen Royal Society*, Vol. 1, pp. 1–30.

Ghanbari, B. (2021). “Abundant exact solutions to a generalized nonlinear Schrödinger equation with local fractional derivative.” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 44, No. 11, pp. 8759-8774.

Hasanov E., Gökhan Uzgören ve Alinur Büyükaksoy. *Diferansiyel Denklemler Teorisi*. İstanbul: Papatya Yayınları, 2002.

Hosseini, K., Ilie, M., Mirzazadeh, M., Baleanu, D., Park, C., & Salahshour, S. (2022). “The Caputo-Fabrizio time-fractional Sharma-Tasso-Olver-Burgers equation and its valid approximations.” *Communications in Theoretical Physics*, Vol. 74, No. 7, pp. 075003.

Ilhan, O. A., Abdulazeez, S. T., Manafian, J., Azizi, H., & Zeynalli, S. M. (2021). “Multiple rogue and soliton wave solutions to the generalized Konopelchenko-Dubrovsky-Kaup-Kupershmidt equation arising in fluid mechanics and plasma physics.” *Modern Physics Letters B*, Vol. 35, No. 23, pp. 2150383.

Laplace, P.-S. (1799). *Treatise on Celestial Mechanics*. J.B.M. Duprat, Paris, France.

Leibniz, G. W. (1684). “Nova methodus pro maximis et minimis.” *Acta Eruditorum*, Vol. 10, No. 10, pp. 467-473.

Liao, S. (2005). “Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method.” *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 169, No. 2, pp. 1186-1194.

Liu, F., & Feng, Y. (2023). “The modified generalized Kudryashov method for nonlinear space-time fractional partial differential equations of Schrödinger type.” *Results in Physics*, Vol. 53, No. 1, pp. 106914.

Lu, B. (2012). “The first integral method for some time fractional differential equations.” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 395, No. 2, pp. 684-693.

Maclaurin, C. (1742). *A Treatise of Fluxions*. T. W. and T. Ruddimans, Edinburgh, Scotland.

Mahmud, A. A., Tanriverdi, T., & Muhamad, K. A. (2023). “Exact traveling wave solutions for (2+ 1)-dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation by using the hyperbolic trigonometric functions methods.” *International Journal of Mathematics and Computer in Engineering*, Vol. 1, No. 1, pp. 11-24.

Mohanty, S. K., Kravchenko, O. V., Deka, M. K., Dev, A. N., & Churikov, D. V. (2023). “The exact solutions of the (2+1)-dimensional Kadomtsev–Petviashvili equation with variable coefficients by extended generalized G'/G -expansion method.” *Journal of King Saud University-Science*, Vol. 35, No. 1, pp. 102358.

Newton, I. (1687). *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Royal Society, London.

Oluwasegun, K., Ajibola, S., Akpan, U., Akinyemi, L., & Şenol, M. (2024). “Investigation of oceanic wave solutions to a modified (2+1)-dimensional nonlinear Schrödinger coupled system. *Modern Physics Letters B*, 2550036.

Poincaré, H. (1892). *New Methods of Celestial Mechanics*. Gauthier-Villars, Paris, France.

Poisson, S. D. (1812). “Memoir on the theory of sound.” *Journal of the Polytechnic School*, Vol. XI, pp. 319–392.

Pascal, B. (1647). *New Experiments Concerning the Vacuum*. Pierre Le Petit, Paris, France.

Pascal, B. (1654). *Treatise on the Arithmetical Triangle*, Paris, France.

Pişkin E., *Teori ve Çözümlü Problemlerle Kısmi Türevli Denklemler*. Ankara: Seçkin Yayınları, 2018.

Rehman, H. U., Ullah, N., Asjad, M. I., & Akgül, A. (2023). “Exact solutions of convective–diffusive Cahn–Hilliard equation using extended direct algebraic method.” *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 39, No. 6, pp. 4517-4532.

Seadawy, A. R. (2012). “Exact solutions of a two-dimensional nonlinear Schrödinger equation.” *Applied Mathematics Letters*, Vol. 25, No. 4, pp. 687-691.

Şenol, M., Gençyiğit, M., Demirbilek, U., Akinyemi, L., & Rezazadeh, H. (2024). “New analytical wave structures of the (3+ 1)-dimensional extended modified Ito equation of seventh-order.” *Journal of Applied Mathematics and Computing*, Vol. 70, No. 3, pp. 2079-2095.

Şenol, M., Gençyiğit, M., Koksal, M. E., & Qureshi, S. (2024). “New analytical and numerical solutions to the $(2+ 1)$ -dimensional conformable cpKP–BKP equation arising in fluid dynamics, plasma physics, and nonlinear optics.” *Optical and Quantum Electronics*, Vol. 56, No. 3, pp. 352.

Taylor, B. (1715). *The Direct and Inverse Method of Increments*, London, England.

Wallis, J. (1655). *The Arithmetic of Infinitesimals*. L. Lichfield, Oxford, England.

Wallis, J. (1685). *A Treatise of Algebra, Both Historical and Practical*. J. Playford, London, England.

Wang, M. (1996). “Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation.” *Physics Letters A*, Vol. 213 No. 5-6, pp. 279-287.

Wazwaz, A. M. (1999). “A reliable modification of Adomian decomposition method.” *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 102, No. 1, pp. 77-86.

Yang, Y., & Liao, S. (2023). “Comparison between homotopy analysis method and homotopy renormalization method in fluid mechanics.” *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, Vol. 97, pp. 187-198.

Wazwaz, A. M. (2024). “Study on a $(3+ 1)$ -dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili equation in nonlinear physics: Multiple soliton solutions, lump solutions, and breather wave solutions.” *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 189, pp. 115668.

Zeng, X., Wu, X., Liang, C., Yuan, C., & Cai, J. (2023). “Exact solutions for coupled variable coefficient KdV equation via quadratic Jacobi’s elliptic function expansion.” *Symmetry*, Vol. 15, No. 5, pp. 1021.

Zhang, S. (2006). “New exact solutions of the KdV–Burgers–Kuramoto equation.” *Physics Letters A*, Vol. 358, No. 5-6, pp. 414-420.

