MODÜLLERİN DİK TOPLAMLARININ İNJEKTİFLİĞİNİN KAPSAMI

EXTENT OF THE INJECTIVITY OF DIRECT SUMS OF MODULES

BERANUR GÜLMEZ FINDIKLI

Doç. Dr. SULTAN EYLEM TOKSOY

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2025

ÖZET

MODÜLLERİN DİK TOPLAMLARININ İNJEKTİFLİĞİNİN KAPSAMI

Beranur GÜLMEZ FINDIKLI
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sultan Eylem TOKSOY
(Ocak 2025), 79 sayfa

Bu tezde son zamanlarda yapılan çalışmalarda bir halkada injektif sağ modüllerin dik toplamı injektiftir ancak ve ancak o halka sağ Noether halkadır gerçeğinden esinlenilerek belirli modüllerin injektiflik bölgelerinin bir halkanın ne ölçüde Noether olduğunu ölçmeye hizmet edebileceğini göstermek için ortaya atılan bir yöntem sunulmuştur. Bu yöntem için tanımlanmış olan kararlı injektiflik bölgeleri, kararlı modüller ve Noether eşik kavramları verilmiştir. Noether halkaların zıt kavramı olarak tanımlanmış uçucu halkalar için yapılmış bazı karakterizasyonlar sunulmuştur. Uçucu halka örneklerinin yanı sıra ne Noether ne de uçucu olan halkaların örnekleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İnjektif Modül, İnjektiflik Bölgesi, Kararlı İnjektiflik Bölgesi, Kararlı Modül, Noether Eşik, Noether Halka, Uçucu Halka.

ABSTRACT

EXTENT OF THE INJECTIVITY OF DIRECT SUMS OF MODULES

Beranur GÜLMEZ FINDIKLI

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sultan Eylem TOKSOY

(January 2025), 79 pages

In this thesis, we present a method inspired by the fact that a ring is a right Noetherian ring if and only if the direct sums of injective right modules is injective, which is introduced in recent studies to show how the injectivity domains of certain modules can serve to measure the extent to which a ring is Noetherian. The notions of stable injectivity domains, stable modules and Noetherian threshold, which are defined for this purpose, are presented. Some characterizations of volatile rings, which are introduced as a notion opposite to Noetherianness, examples of volatile rings and examples of rings that are neither Noetherian nor volatile are given.

Keywords: Injective Module, Injectivity Domain, Stable Injectivity Domain, Stable Module, Noetherian Threshold, Noetherian Ring, Volatile Ring.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca benden değerli bilgisini ve desteğini esirgemeyen, bana yol gösteren ve beni her zaman cesaretlendiren tez danışmanım sayın Doç. Dr. Sultan Eylem TOKSOY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu süreçte hep yanımda oldukları ve beni destekledikleri için sevgili eşim Yiğit FINDIKLI ve teyzem Nurgül AKIN'a teşekkür ederim.

Son olarak beni bu günlere getiren ve her zaman en büyük destekçim olan anne ve babama teşekkür ederim.

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 123F110 nolu TÜBİTAK-1001 projesi kapsamında finansal olarak desteklenmiştir. Bu destek için TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Beranur GÜLMEZ FINDIKLI

Ocak 2025, Ankara

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SİMGELER

$\mathrm{Mod}\text{-}R$	Sağ R-modüllerin kategorisi
$\mathrm{SSMod}\text{-}R$	Yarıbasit sağ R-modüllerin sınıfı
$\mathrm{Soc}(M)$	M modülünün temeli
$\mathrm{Rad}(M)$	M modülünün radikali
Çek(f)	f homomorfizmasının çekirdeği
Gör(f)	f homomorfizmasının görüntüsü
$\bigoplus_{i\in I} M_i$	M_i R-modüllerinin dik toplamı
$\prod_{i\in I} M_i$	M_i R-modüllerinin dik çarpımı
$E(M)$	M R-modülünün injektif bürümü
$E_M(N)$	N R-modülünün M-injektif bürümü
$\leq$	Alt modül
$\trianglelefteq$	Büyük alt modül
$\ll$	Küçük alt modül
$\mathrm{ann}_R(X)$	M R-modülünün alt kümesi X'in sağ sıfırlayıcısı
$\mathrm{Hom}_R(M,N)$	M'den N'ye tüm R-modül homomorfizmaları
$\sigma[M]$	Mod-R kategorisinin M tarafından alt üretilmiş alt kategorisi
R	Birimli değişmeli halka
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$	$\mathcal{C}$ kategorisindeki bütün objeler
$\circ$	Fonksiyon bileşkesi

1. GİRİŞ

İnjektif modüller, modül kategorilerindeki en önemli homolojik nesneler arasındadır. Hem Modül ve Halka Kuramında hem de Homolojik Cebirde çok önemli bir role sahiptirler. Herhangi bir modülün injektifliğini belirlemek oldukça zor olabilir. Modül Teorisindeki yeni bir eğilim, bir özelliğin yalnızca tam olarak ne zaman karşılandığını değil, aynı zamanda belirli bir modülün o özelliği tam olarak karşılamıyorsa ne ölçüde karşıladığını ölçebilen mekanizmalar geliştirerek modüllerin özelliklerinin incelenmesini genişletir. Bu yaklaşım, yalnızca özelliği karşılayan modülleri değil, aynı zamanda kısmen veya hatta minimum düzeyde sağlayan modülleri de dikkate almaya izin verir. Son yıllarda bir modülün injektifliğini ölçmek için artan bir ilgi gören bir fikir olan injektiflik bölgesi kavramı ortaya çıkmıştır. Bu mekanizmada modüller için ölçüm aracı portföylerdir. Eğer bir modül sınıfı bir modülün injektiflik bölgesi ise o sınıfa (*injektif*) *portföy* ve bir R halkası üzerindeki tüm sağ R-modüllerin olası tüm (injektif) portföylerinin sınıfına da R halkasının (*injektif*) *profili* denir. Profil teorisi ile ilgili çalışmalar Alahmadi vd. tarafından başlatılmıştır ([1]). Son on dört yılda ise çeşitlilik içinde büyümektedir. Bir halkanın Noether olmasının belirli modüllerin injektifliği tarafından belirlendiği bilinmektedir ([2]). López-Permouth ve Saraç bu ölçünün mutlak olmadığını bunun yerine, bu belirli modüllerin injektiflik bölgelerinin bir halkanın ne ölçüde Noether olduğunu ölçmeye hizmet ettiğini göstermişlerdir ([3]). López-Permouth ve Saraç tarafından bir R halkasının injektif profilindeki portföyler katmanlar olarak düşünülmüş ve injektiflik bölgesi bir $\mathcal{A}$ portföyü olan her modül ailesinin dik toplamının da injektif bölgesi $\mathcal{A}$ portföyü oluyorsa $\mathcal{A}$'ya *kararlı portföy* denmiştir ve şu soru sorulmuştur: R halkasının injektif profilinin ortalarında bir yerde bu portföyün altında kalan her katmanın kararlı hale geldiği bir injektif portföy var mıdır? Bu soru evet olarak cevaplanmış ve bu injektif portföye *Noether eşik* denmiştir. Ayrıca injektif profilde injektif portföyü kararlı olan modüllerin sadece yoksul modüller olduğu halkalar *uçucu halkalar* olarak adlandırılmış ve uçucu halka örnekleri verilmiştir ([3]). Bu tezde öncelikle gerekli tüm ön bilgiler verilecek daha sonra da [3] makalesinde elde edilen sonuçlar ve örnekler derlenerek ilgili konuları inceleyen tüm araştırmacılar için bütünleşik bir referans kaynağı sunulacaktır.

Bölüm 2'de tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak temel bilgiler, tanımlar, teoremler verilmiştir.

Bölüm 3'te kararlı injektiflik bölgeleri sunulmuştur. Bir injektif portföyün kararlı olması için gerek ve yeter koşulun o portföyün Noether eşik tarafından içerilmesi olduğu gösterilmiştir (bkz. Teorem 3.3.6). Teorem 3.3.10 ile kararlı R-modüller karakterize edilmiştir. Sonuç 3.3.11'de ise Noether eşiğin hangi R-modülün injektiflik bölgesi olduğu verilmiştir.

Bölüm 4'te uçucu halkalar ele alınmıştır. Şu sonuçlar verilmiştir: R sağ Noether halkadır ancak ve ancak $\mathcal{N} = Mod - R$'dir (bkz. Teorem 4.1.1 (1)). R halkası sağ Noether halkadır ancak ve ancak her portföy kararlıdır (bkz Teorem 4.1.1 (2)). Bir R halkasının sağ uçucu halka olması için ise gerek ve yeter koşul $\mathcal{N} = SSMod - R$'dir (bkz. Teorem 4.1.3). R halkası sağ yarı Artin halka olsun. O zaman R halkasının sağ uçucu halka olması için gerek ve yeter koşul sağ V-halka olmasıdır (bkz. Önerme 4.1.4). R herhangi bir halka olsun. R halkasının sağ uçucu halka olması için gerek ve yeter koşul yoksul yarıbasit bir sağ R-modülün var olması ve her kararlı sağ R-modülün V-modül olmasıdır (bkz. Önerme 4.1.14). Bir R halkası sağ V-halka olsun. R halkasının sağ uçucu halka olması için gerek ve yeter koşul yoksul yarıbasit bir sağ R-modülün var olmasıdır (bkz. Sonuç 4.1.15). Bir R halkasının sağ uçucu halka olması için gerek ve yeter koşul injektif sağ R-modüllerin dik toplamının, $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$, var olması ve bu dik toplamın yoksul sağ R-modül olmasıdır (bkz. Sonuç 4.1.17). Ayrıca örneklere yer verilmiştir. R halkası sağ yarı Artin ve sağ V-halka olsun. O halde R halkası sağ uçucu halkadır (bkz. Örnek 4.2.1). X bir topolojik uzay ve $C(X)$, X topolojik uzayı üzerindeki reel değerli sürekli fonksiyonlar halkası olsun. $C(X)$ uçucu halkadır (bkz. Örnek 4.2.2). Bu uçucu halka örneklerinin yanı sıra ne Noether ne de uçucu olan halka örneği verilmiştir (bkz. Örnek 4.2.3).

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde diğer bölümlerde ihtiyaç duyulacak bazı ön bilgiler verilmektedir.

2.1 Modüller, Alt Modüller ve Modül Homomorfizmaları

Tanım 2.1.1. [4, s.10] R halkası ve $(M,+)$ abel grubu için $f : M \times R \to M$ fonksiyonu verilmiş olsun. $f(m,r) \in M$ elemanı mr ile gösterilmek üzere her $r,s \in R$ ve her $m,n \in M$ için:

(1) $(m+n)r = mr + nr$

(2) $m(r+s) = mr + ms$

(3) $m(rs) = (mr)s$

(4) $m \cdot 1 = m$

ise M *sağ R-modül* olarak isimlendirilir. M_R ile gösterilir. Benzer koşulları sağlayan bir $g : R \times M \to M$ fonksiyonu için M *sol R-modül* olarak isimlendirilir.

Örnek 2.1.1. *[4, s.11]*

(1) Her A abel grubu bir $\mathbb{Z}$-modüldür.

(2) F bir cisim ise F üzerindeki bütün vektör uzayları F-modüldür.

Tanım 2.1.2. M sağ R-modülünün bir N alt kümesi de R-modülse, yani her $r,s \in R$ ve $m,n \in N$ için $mr + ns \in N$ ise N alt kümesine M sağ R-modülünün bir *alt modülü* denir ve $N \leq M$ ile gösterilir. Ayrıca kendisinden ve sıfırdan başka alt modülü olmayan sıfırdan farklı modüle *basit modül* denir.

Tanım 2.1.3. M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün sıfırdan farklı N alt modülü ve herhangi bir N' alt modülü için $N' \subseteq N$ iken $N = N'$ ya da $N' = 0$ oluyorsa N alt modülüne M sağ R-modülünün bir *minimal alt modülü* denir.

Tanım 2.1.4. M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün kendisinden farklı K alt modülü ve herhangi bir $K^{'}$ alt modülü için $K \subseteq K^{'}$ iken $K = K^{'}$ ya da $K^{'} = M$ oluyorsa K alt modülüne M sağ R-modülünün *maksimal alt modülü* denir.

Tanım 2.1.5. M ve N iki sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünden N sağ R-modülüne olan $f : M \longrightarrow N$ fonksiyonu, her $m, k \in M$ ve $r \in R$ için

$$f(m+k) = f(m) + f(k)$$

$$f(mr) = f(m)r$$

eşitliklerini gerçeklerse, f fonksiyonuna *homomorfizma* veya *modül homomorfizması* denir. $f : M \longrightarrow N$ bir homomorfizmaysa M sağ R-modülünün

$$\text{Çek}(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$$

alt modülüne f homomorfizmasının *çekirdeği* ve N sağ R-modülünün

$$f(M) = \text{Gör}(f) = \{f(m) \mid m \in M\}$$

alt modülüne f homomorfizmasının *görüntüsü* denir. Birebir homomorfizmaya *monomorfizma*, örten homomorfizmaya *epimorfizma* denir. Hem monomorfizma hem epimorfizma olan homomorfizmalar ise *izomorfizma* ismini alır.

$N \leq M$ ve $m \in M$ olsun. M sağ R-modülünün $m + N = \{m + n \mid n \in N\}$ alt kümesine, M sağ R-modülünün N alt modülüne göre *sol yansınıfı* denir ve bütün sol yansınıfların kümesi M/N ile gösterilir. M/N sol yansınıfların kümesi $m_1, m_2 \in M$, $r \in R$ olmak üzere $(m_1+N)+(m_2+N) = (m_1+m_2)+N$ ve $r(m_1+N) = rm_1+N$ şeklinde tanımlı işlemlerle bir modül olur. Bu modüle *faktör modül* veya *bölüm modülü* denir. Ayrıca $\sigma(m) = m + N$ ile tanımlanan $\sigma : M \longrightarrow M/N$ homomorfizması bir epimorfizmadır ve bu epimorfizma *doğal epimorfizma* olarak isimlendirilir.

M ve N birer sağ R-modül olmak üzere M sağ R-modülünden N sağ R-modülüne olan tüm homomorfizmaların kümesi bir gruptur ve $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.6. *[4, Önerme 2.1](Modüler Kural) Bir M sağ R-modülünün L, K, N alt modülleri için $K \leq N$ olsun. O halde $N \cap (K + L) = K + (N \cap L)'dir$.*

Kanıt. $x \in N \cap (K + L)$ olsun. $n \in N$, $k \in K$ ve $l \in L$ olmak üzere $x = n = k + l$ şeklinde yazılabilir. $K \leq N$ olduğu için $k \in N$'dir. $n = k + l$ ise $l = n - k \in N \cap L$'dir. Dolayısıyla $x = k + l \in K + (N \cap L)$ olur. $N \cap (K + L) \subseteq K + (N \cap L)$'dir.

Diğer yön için $k + x \in K + (N \cap L)$ $(k \in K, x \in N \cap L)$ olsun. $k + x \in K + L$'dir. $K \leq N$ olduğu için $k \in N$ ve $x \in N \cap L$ olduğu için $x \in N$'dir. Dolayısıyla $k + x \in N \cap (K + L)$'dir. $K + (N \cap L) = N \cap (K + L)$'dir. □

Lemma 2.1.7. *(Zorn Lemma) X boştan farklı kısmi sıralı bir küme olsun. X kümesindeki her zincirin X kümesinde bir üst sınırı varsa X kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır.*

Tanım 2.1.8. [5, s.37] M bir sağ R-modül ve A, M sağ R-modülünün boştan farklı bir alt kümesi olsun. $\mathrm{Ann}_R(A) = \{r \in R \mid \text{ her } a \in A \text{ için } ar = 0\}$ kümesi A'nın *sağ sıfırlayıcısı* olarak isimlendirilir. Özel olarak bir $a \in M$ için $\mathrm{ann}_R(a) = \{r \in R \mid ar = 0\}$ kümesi a elemanının *sağ sıfırlayıcısıdır*. Benzer şekilde sol sıfırlayıcı da tanımlanabilir.

Tanım 2.1.9. [5, s.346] M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün alt modüllerinin kafesi bir zincir oluşturuyorsa, yani M sağ R-modülünün herhangi iki alt modülü içerme bağıntısına göre karşılaştırılabiliyorsa, M sağ R-modülüne *tekserili modül* denir.

Teorem 2.1.10. *[4, Teorem 3.2](I.izomorfizma teoremi) M ve N sağ R-modüller, $f : M \longrightarrow N$ bir homomorfizma olsun. O zaman $M/Çek(f) \cong Gör(f)$ gerçeklenir. Özel olarak f bir epimorfizma ise $M/Çek(f) \cong N$ dir.*

Kanıt. $K = \text{Çek}(f)$ olsun. $f' : M/K \longrightarrow \text{Gör}(f)$ dönüşümü her $m \in M$ için $f'(m+K) = f(m)$ olarak tanımlansın. $m, n \in M$ için $m + K = n + K$ ise $m - n \in K$'dir. Bu durumda $f(m-n) = 0$'dır. O halde $f(m) = f(n)$ dolayısıyla f' iyi tanımlıdır. Aynı zamanda $f'((m+$

$K) + (n+K)) = f^{'}((m+n)+K) = f(m+n) = f(m)+f(n) = f^{'}(m+K)+f^{'}(n+K)$ ve $r \in R$ için $f^{'}(r(m+K)) = f^{'}(rm+K) = f(rm) = rf(m) = rf^{'}(m+K)$ olduğu için $f^{'}$ dönüşümü bir homomorfizmadır. $f^{'}(m+K) = f^{'}(n+K)$ ise $f(m) = f(n)$'dir. O halde $f(m-n) = 0$'dir. $m-n \in K$'dır. Dolayısıyla $m+K = n+K$ yani $f^{'}$ bir monomorfizmadır. Son olarak her $n \in$ Gör(f) için $f(m) = n$ olacak şekilde bir $m \in M$ olduğu için $n = f(m) = f^{'}(m+K)$'dır $f^{'}$ bir epimorfizmadır. f homomorfizması bir epimorfizma olduğunda ise Gör$(f) = N$ olacağı için $M/$Çek$(f) \cong N$'dir. □

Teorem 2.1.11. *(II.izomorfizma teoremi) M bir sağ R-modül, N ve K M sağ R-modülünün alt modülleri olsun. O zaman*

$$(N+K)/K \cong N/(N\cap K)$$

dir.

Kanıt. $f : N \longrightarrow (N+K)/K$ homomorfizması her $n \in N$ için $f(n) = n+K$ ile tanımlansın. $k \in K$ olmak üzere $(n+k)+K = n+K = f(n)$ olduğu için f epimorfizmadır. Çek$(f) = \{n \in N \mid f(n) = 0\} = \{n \in N \mid n \in K = N \cap K$'dir. Teorem 2.1.10'dan $N/(N\cap K) \cong (N+K)/K$'dir. □

Teorem 2.1.12. *(III.izomorfizma teoremi) M bir sağ R-modül, K ve N M sağ R-modülünün $K \leq N$ olan alt modülleri olsun. O zaman*

$$(M/K)/(N/K) \cong M/N$$

'dir.

Kanıt. $f : M/K \longrightarrow M/N$ dönüşümü her $m \in M$ için $f(m+K) = m+N$ ile tanımlansın. $m_1, m_2 \in M$ için $m_1 + K = m_2 + K$ olsun. O halde $m_1 - m_2 \in K \leq N$'dir. Buradan $m_1 + N = m_2 + N$ olduğu için f iyi tanımlıdır. Aynı zamanda $r, s \in R$ için $f(r(m_1+K)+s(m_2+K)) = f((rm_1+sm_2)+K) = (rm_1+sm_2)+N = r(m_1+N)+s(m_2+N) = rf(m_1+K)+sf(m_2+K)$ olduğu için f bir homomorfizmadır. f bir epimorfizmadır çünkü her $m+N \in M/N$ için $f(m+K) = m+N$'dir. Son olarak Çek$(f) = \{m+K \mid m \in N\} = N/K$ olduğu için Teorem 2.1.10'dan $(M/K)/(N/K) \cong M/N$'dir. $\square$

2.2 Dik Çarpım ve Dik Toplam

Tanım 2.2.1. [4, s.25] Herhangi $\{M_k \mid k \in K\}$ sağ R-modüller topluluğunun $\prod_{k\in K} M_k = \{m : K \longrightarrow \bigcup_{k\in K} M_k \mid \forall k \in K, m(k) \in M_k\}$ kartezyen çarpımının $m \in \prod_{k\in K} M_k$ için $m(k)$ yerine m_k; m yerine de $(m_k)_{k\in K}$ gösterimini kullanacağız. Kartezyen çarpımın (m_k) ve (n_k) gibi iki elemanın toplamı $(m_k) + (n_k) = (m_k + n_k)$ ve $r \in R$ ile çarpımı $(m_k)r = (m_k r)$ olarak tanımlandığında $\prod_{k\in K} M_k$ kartezyen çarpımının bir sağ R-modül olduğu kolayca görülebilir. Bu $\prod_{k\in K} M_k$ sağ R-modülüne M_k sağ R-modüllerinin *dik çarpımı* denir.

Tanım 2.2.2. [4, s.25] $\prod_{k\in K} M_k$ sağ R-modülünün

$$\bigoplus_{k\in K} M_k = \{(m_k) \in \prod_{k\in K} M_k \mid \text{en çok sonlu sayıda } k \in K \text{ için } m_k \neq 0\}$$

alt modülüne M_k sağ R-modüllerinin *dik toplamı* denir.

K indis kümesinin sonlu olması durumunda $\prod_{k\in K} M_k = \bigoplus_{k\in K} M_k$'dır.

Her $n \in K$ için $p_n((m_k)) = m_n$ ile bir $p_n : \prod_{k\in K} M_k \longrightarrow M_n$ fonksiyonunu tanımlayalım. p_n'nin (veya bunun $\bigoplus_{k\in K} M_k$'ya kısıtlanmışının) epimorfizma olduğu kolayca görülebilir. p_n'ye n. *projeksiyon* denir. Diğer taraftan her $n \in K$ için $i_n : M_n \longrightarrow \bigoplus_{k\in K} M_k$ içerme fonksiyonu $k = n$ için $m_k = m$ ve $k \neq n$ için $m_k = 0$ olmak üzere $i_n(m) = (m_k)$ ile tanımlansın. Bu fonksiyon bir monomorfizmadır.

Tanım 2.2.3. [5, s.66] M bir sağ R-modül olsun. $N \leq M$ için $M = N \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq M$ varsa N alt modülüne M sağ R-modülünün *dik toplam terimi* denir.

Teorem 2.2.4. *[4, Teorem 4.1] Her $k \in K$ için M_k sağ R-modül olmak üzere $f_k : M_k \longrightarrow A$ bir homomorfizmalar topluluğu olsun. Bu durumda her $k \in K$ için $f_k = f \circ i_k$ olacak şekilde* *tek bir $f : \bigoplus_{k\in K} M_k \longrightarrow A$ homomorfizması vardır. Diğer bir deyişle, her $k \in K$ için*

$$\begin{tikzcd} M_k \arrow[r, "i_k"] \arrow[dr, "f_k"'] & \bigoplus_{n\in K} M_n \arrow[d, dashed, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde tek bir f homomorfizması vardır.

Kanıt. $f : \bigoplus_{k\in K} M_k \longrightarrow A$ fonksiyonu $f((m_k)) = \sum_{k\in K} f_k(m_k)$ ile tanımlansın. f'nin bir homomorfizma olduğu açıktır. Her $k \in K$ ve her $m \in M$ için $i_k(m)$ elemanının sadece k. bileşeni sıfırdan farklı olduğu için $(f \circ i_k)(m) = f(i_k(m)) = f_k(m)$ ve buradan da

$$f \circ i_k = f_k$$

elde edilir. Bu özelliğe sahip diğer homomorfizma g olsun. Yani, her $k \in K$ için $f_k = g \circ i_k$ ise keyfi $(m_k) \in \bigoplus_{k\in K} M_k$ için

$$g(m_k) = g(\sum_{k\in K} i_k(m_k)) = \sum_{k\in K}(gi_k)(m_k) = \sum_{k\in K} f_k(m_k) = f((m_k))$$

olduğundan $g = f$ elde edilir. □

Teorem 2.2.5. *[4, Teorem 4.2] Her $k \in K$ için M_k bir sağ R-modül olmak üzere $f_k : A \longrightarrow M_k$ bir homomorfizmalar topluluğu olsun. Bu durumda her $k \in K$ için $f_k = p_k \circ f$ olacak şekilde tek bir $f : A \longrightarrow \prod_{k\in K} M_k$ homomorfizması vardır. Diğer bir deyişle, her $k \in K$ için*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, dashed, "f"'] & M_k \\ \prod_{n\in K} M_n \arrow[ur, "p_k"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde tek bir f homomorfizması vardır.

Kanıt. $f : A \longrightarrow \prod_{n\in K} M_n$ fonksiyonu $f(a) = (f_n(a))$ ile tanımlansın. f'in bir homomorfizma olduğu kolayca görülür. Her $a \in A$ ve her $k \in K$ için $(p_k \circ f)(a) =$

$p_k(f(a)) = p_k((f_n(a))) = f_k(a)$ olduğundan, $p_k \circ f = f_k$ elde edilir. Aynı özelliğe sahip diğer bir homomorfizma $g : A \longrightarrow \prod_{n\in K} M_n$ ise, her $a \in A$ ve her $k \in K$ için $p_k(g(a)) = f_k(a) = p_k(f(a))$ olduğundan, $g(a), f(a) \in \prod_{n\in K} M_n$ elemanlarının tüm bileşenleri aynıdır. Böylece, her $a \in A$ için $g(a) = f(a)$ olmasından $g = f$ elde edilir. $\square$

2.3 Tam Diziler

Burada belirtilmeyen tanımlar, teoremler ve önermeler [4], [5] kaynaklarında bulunabilir.

Tanım 2.3.1. $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, sağ R-modüllerin bir ailesi olsun.

$$\ldots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots$$

homomorfizmalar dizisine her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\text{Gör}(f_{n+1}) = \text{Çek}(f_n)$$

şartını sağlıyorsa bir *tam dizi* denir.

Önerme 2.3.2. *[5, Proposition 3.12] M ve N sağ R-modülleri ve $f : M \longrightarrow N$ homomorfizması için aşağıdakiler sağlanır:*

(1)

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \tag{1}$$

tam dizi ise f bir monomorfizmadır.

(2)

$$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0 \tag{2}$$

tam dizi ise f bir epimorfizmadır.

(3)

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0 \tag{3}$$

tam dizi ise f izomorfizmadır.

Tanım 2.3.3. K, L, M birer sağ R-modül olsun.

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

dizisi tam ise yani f monomorfizma g epimorfizma ise bu diziye *kısa tam dizi* denir. Ayrıca eğer $f^{'} : L \longrightarrow K$ homomorfizması $f^{'} \circ f = 1_K$ olacak şekilde varsa bu diziye *parçalanan kısa tam dizi* denir.

Teorem 2.3.4. *[4, Teorem 5.2] K, L, M sağ R-modülleri için*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

bir kısa tam dizi olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

(1) $f^{'} \circ f = 1_K$ olacak şekilde bir $f^{'} : L \longrightarrow K$ homomorfizması vardır;

(2) Gör(f) alt modülü L sağ R-modülünün dik toplam terimidir;

(3) $g \circ g^{'} = 1_M$ olacak şekilde $g^{'} : M \longrightarrow L$ homomorfizması vardır.

Bu durumda $L \cong K \oplus M$'dir.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ Gör(f) alt modülünün L sağ R-modülünde bir dik toplam terimi olduğunu göstermek için Gör$(f) \oplus$ Çek$(f^{'}) = L$ olduğu gösterelim. Bunun için bir $a \in L$ alalım. $f^{'}(a - (f \circ f^{'})(a)) = f^{'}(a) - ((f^{'} \circ f) \circ f^{'})(a) = f^{'}(a) - f^{'}(a) = 0$ olduğu için $a - (f \circ f^{'})(a) \in$ Çek$(f^{'})$'dir. O halde

$$a = f(f^{'}(a)) + (a - (f \circ f^{'})(a)) \in \text{Gör}(f) + \text{Çek}(f^{'})$$

elde ederiz. Diğer taraftan $f(x) \in$ Gör$(f) \cap$ Çek$(f^{'})$ aldığımızda

$$x = (f^{'} \circ f)(x) = f^{'}(f(x)) = 0$$

olur. Dolayısıyla Gör$(f) \cap$ Çek$(f')=0$'dir. Böylece Gör$(f) \oplus$ Çek$(f')=L$'dir. Gör(f) alt modülü L sağ R-modülünün bir dik toplam terimidir.

$(2) \Rightarrow (3)$ Kabul edelim ki $L=$ Gör$(f) \oplus A$ olacak şekilde bir $A \leq L$ alt modülü var olsun. $A \cap$ Çek$(g)=A \cap$ Gör$(f)=0$ olduğu için $g|_A$ bir monomorfizmadır. Ayrıca g bir epimorfizma olduğu için her $m \in M$ için $g(l)=m$ olacak şekilde bir $l \in L$ vardır. $k \in K$ ve $a \in A$ olmak üzere kabulden $l=f(k)+a$ şeklinde yazılabilir. O zaman

$$m=g(l)=(g \circ f)(k)+g(a)=g(a)$$

dır. Dolayısıyla $g|_A$ bir epimorfizmadır. Böylelikle $g|_A$ bir izomorfizmadır. $g|_A$'nın tersinin değer kümesi genişletilerek bir $g' : M \longrightarrow L$ monomorfizması elde edilir. Bu g' için $g \circ g'=1_A$ olduğu da açıktır.

$(3) \Rightarrow (1)$ Her $x \in L$ için $g(x-(g' \circ g)(x))=g(x)-((g' \circ g) \circ g)(x)=0$ olduğu için $x-(g' \circ g)(x) \in$ Çek$(g)=$ Gör(f)'dir. O zaman

$$x-(g' \circ g)(x)=f(y)$$

olacak şekilde bir $y \in K$ bulunur ve f monomorfizma olduğu için bu şekilde bir y elemanı tektir. O zaman $f' : L \longrightarrow K$ fonksiyonu $f'(x)=y$ şeklinde tanımlanabilir. $f'(x)=y$ ve $f'(x')=y'$ ise $x-(g' \circ g)(x)=f(y)$ ve $x'-(g' \circ g)(x')=f(y')$ olur. O zaman $(x+x')-(g' \circ g)(x+x')=(x-(g' \circ g)(x))+(x'-(g' \circ g)(x'))=f(y)+f(y')=f(y+y')$'dir. Dolayısıyla $f'(x+x')=y+y'=f'(x)+f'(x')$ elde edilir. Diğer taraftan $r \in R$ icin $rx-(g' \circ g)(rx)=r(x-(g' \circ g)(x))=rf(y)=f(ry)$ olduğu için $f'(rx)=ry=rf'(x)$'dir. f' homomorfizmadır. Son olarak her $y \in K$ için $f(y)-(g' \circ g)(f(y))=f(y)-g'((g \circ f)(y))=f(y)-g'(0)=f(y)$ olduğundan $f'(f(y))=y$'dir. $f' \circ f=1_K$'dir. $\square$

Lemma 2.3.5. *[4, Lemma 5.3] Tam satırlı*

$$\begin{tikzcd} & & G \arrow[dl, dashed, "s"'] \arrow[d, "h"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

diyagramının $f \circ s = h$ *olacak şekilde bir* $s : G \longrightarrow A$ *homomorfizmasıyla tamamlanabilmesi için gerek ve yeter koşul* $g \circ h = 0$ *olmasıdır. Ayrıca bu şekilde* s *homomorfizması tek türlüdür.*

Kanıt. $f \circ s = h$ olacak şekilde bir $s : G \longrightarrow A$ homomorfizması var olsun. O halde $g \circ h = g \circ f \circ s = 0 \circ s = 0$'dir.

Tersine $g \circ h = 0$ olsun. Keyfi $x \in G$ için $g(h(x)) = 0$'dır. Dolayısıyla $h(x) \in$ Çek(g)'dir. Diyagram tam satırlı olduğu için $h(x) \in$ Gör(f) olmalıdır. O halde bir $a \in A$ için $h(x) = f(a)$'dir. f bir monomorfizma olduğu için a tek türlüdür. Bu durumda $s(x) = a$ olarak tanımlanan $s : G \longrightarrow A$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. $s(x) = a$, $s(y) = b$ ve $r \in R$ ise $h(x) = f(a)$, $h(y) = f(b)$'dir. Buradan

$$h(x + y) = h(x) + h(y) = f(a) + f(b) = f(a + b)$$

$$h(rx) = rh(x) = rf(a) = f(ra)$$

olacağı için $s(x+y) = a+b = s(x)+s(y)$, $s(rx) = ra = rs(x)$'dir. s bir homomorfizmadır. Keyfi $x \in G$ için $a \in A$ olmak üzere $h(x) = f(a)$'dir. O halde $f(s(x)) = f(a) = h(x)$'dir.

diyagramı degişmeli yapan $s : G \longrightarrow A$ homomorfizması tek olmasın yani $f \circ s^{'} = h$ olacak şekilde bir $s^{'} : G \longrightarrow A$ homomorfizması var olsun. Her $a \in G$ için $f(s^{'}(a)) = h(a) = f(s(a))$'dir ve f monomorfizma olduğu için $s^{'}(a) = s(a)$'dır. □

Lemma 2.3.6. *[4, Lemma 5.4] Tam satırlı*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "s"] & 0 \\ & G & & \end{tikzcd}$$

diyagramının $s \circ g = h$ olacak şekilde bir $s : C \longrightarrow G$ homomorfizması ile tamamlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $h \circ f = 0$ olmasıdır. Ayrıca bu şekildeki s homomorfizması tek türlüdür.

Kanıt. Lemma 2.3.5'in duali olarak yapılabilir. □

2.4 Sonlu Üretilmiş ve Eşsonlu Üretilmiş Modüller

Tanım 2.4.1. [5, s.123] M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün alt modüllerinden oluşan her $\mathcal{A}$ sınıfı için $\sum \mathcal{A} = M$ iken $\sum \mathcal{F} = M$ olacak şekilde sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ varsa, M sağ R-modülüne *sonlu üretilmiş modül* denir.

Tanım 2.4.2. [5, s.124] M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün alt modüllerinden oluşan her $\mathcal{A}$ sınıfı için $\bigcap \mathcal{A} = 0$ ise $\bigcap \mathcal{F} = 0$ olacak şekilde sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ varsa M sağ R-modülüne *eşsonlu üretilmiş modül* denir.

Önerme 2.4.3. *[5, Proposition 10.1] Bir M sağ R-modülü için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) M sonlu üretilmiş sağ R-modüldür;

(2) Her $i \in I$ için $N_i \leq M$ olmak üzere $M = \sum_{i \in I} N_i$ ise $M = \sum_{i \in F} N_i$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq I$ alt kümesi vardır;

(3) $M = \sum_{i \in I} Gör(f_i)$ şartını sağlayan her $f_i : K_i \longrightarrow M$ homomorfizma ailesi için $M = \sum_{i \in F} Gör(f_i)$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq I$ alt kümesi vardır;

(4) Her $\{K_i\}_{i \in I}$ sağ R-modül ailesi ve $f : \bigoplus_{i \in I} K_i \longrightarrow M$ epimorfizması için $f|_{\bigoplus_{i \in F} K_i} : \bigoplus_{i \in F} K_i \longrightarrow M$ epimorfizma olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq I$ alt kümesi vardır;

(5) $m_1, m_2, ..., m_n \in M$ *elemanları vardır öyle ki* $i = 1, 2, ..., n$ *olmak üzere* $m_i \in$ *Gör*(f) *olacak şekilde her* $f : T \longrightarrow M$ *homomorfizması epimorfizmadır.*

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ Tanım 2.4.1'den açıktır.

$(2) \Rightarrow (3)$ Hipotezde $N_i =$ Gör(f_i) alınırsa sağlanır.

$(3) \Rightarrow (4)$ $f : \bigoplus_{i\in I} K_i \longrightarrow M$ bir epimorfizma ve $f_i = f|_{K_i} : K_i \longrightarrow M$ olsun. Buradan

$$M = \text{Gör}(f) = f(\bigoplus_{i\in I} K_i) = \sum_{i\in I} f_i(K_i) = \sum_{i\in I} \text{Gör}(f_i)$$

dir. Hipotezden $M = \sum_{i\in F} \text{Gör}(f_i)$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq I$ alt kümesi vardır.

$$M = \sum_{i\in F} \text{Gör}(f_i) = \sum_{i\in F} f_i(K_i) = \sum_{i\in F} f(K_i) = f(\sum_{i\in F} K_i)$$

olur. $f|_{\bigoplus_{i\in F} K_i}$ bir epimorfizmadır.

$(4) \Rightarrow (1)$ $f : \bigoplus_{m\in M} mR \longrightarrow M$ homomorfizması $f((mr_m)) = \sum_{m\in M} mr_m$ olarak tanımlansın. f homomorfizmasının bir epimorfizma oldugu açıktır. O halde hipotezden $g : \bigoplus_{i=1}^{n} m_iR \longrightarrow M$ epimorfizma olacak şekilde M sağ R-modülünün bir $m_1, m_2, ..., m_n$ alt kümesi vardır. Bu durumda

$$M = \text{Gör}(g) = g(\bigoplus_{i=1}^{n} m_iR) = \sum_{i=1}^{n} g(m_iR) = \sum_{i=1}^{n} m_iR$$

yazılabilir. M sonlu üretilmiş sağ R-modüldür.

$(1) \Rightarrow (5)$ M sonlu üretilmiş sağ R-modül olsun. $m_1, m_2, ..., m_n \in M$ için $M = \sum_{i=1}^{n} m_iR$ yazılabilir. $f : T \longrightarrow M$, her $i = 1, 2, ..., n$ için $m_i \in$ Gör(f) olacak şekilde bir homomorfizma olsun. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $m_i \in$ Gör(f) olduğundan $m_iR \subseteq$ Gör(f)'dir. O halde $M = m_1R + m_2R + ... + m_nR \subseteq$ Gör(f) ise $M =$ Gör(f) olur. f epimorfizmadır. □

Önerme 2.4.4. *[5, Proposition 10.2] Bir sağ* R*-modül* M *için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) $\mathcal{A}$, M sağ R-modülünün alt modüllerinin herhangi bir sınıfı olsun. $\bigcap_{N\in\mathcal{A}} N = 0$ ise sonlu bir $F \subseteq \mathcal{A}$ alt kümesi için $\bigcap_{N\in F} N = 0$'dır;

(2) $\bigcap_{i\in I}$ Çek$(f_i) = 0$ şartını sağlayan her $f_i : M \longrightarrow U_i$ homomorfizma ailesi için sonlu bir $F \subseteq I$ alt kümesi vardır öyle ki $\bigcap_{i\in F}$ Çek$(f_i) = 0$'dır;

(3) Her $f : M \longrightarrow \prod_{i\in I} U_i$ monomorfizması için sonlu bir $F \subseteq I$ alt kümesi vardır öyle ki p_F doğal projeksiyon olmak üzere $p_F \circ f : M \longrightarrow \prod_{i\in F} U_i$ bileşkesi bir monomorfizmadır.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ Her $i \in I$ için Çek(f_i), M sağ R-modülünün bir alt modülü olduğu için hipotezden $\bigcap_{i\in I}$ Çek$(f_i) = 0$ ise sonlu bir $F \subseteq I$ alt kümesi için $\bigcap_{i\in F}$ Çek$(f_i) = 0$'dır.

$(2) \Rightarrow (3)$ $f : M \longrightarrow \prod_{i\in I} U_i$ monomorfizma olsun. Her $i \in I$ için $f_i : M \longrightarrow U_i$ homomorfizma ailesi ve $p_i : \prod_{i\in I} U_i \longrightarrow U_i$ i. projeksiyonu düşünüldüğünde $f_i = p_i \circ f$'dir. f monomorfizma olduğu için Çek$(f) = 0$'dır. Aynı zamanda Çek$(f) = \bigcap_{i\in I}$ Çek(f_i) olduğu için $\bigcap_{i\in I}$ Çek$(f_i) = 0$ olur. Hipotezden sonlu bir $F \subseteq I$ alt kümesi vardır öyle ki $\bigcap_{i\in F}$ Çek$(f_i) = 0$'dır. $\bigcap_{i\in F}$ Çek$(f_i) =$ Çek$(p_F \circ f)$ olduğu için Çek$(p_F \circ f) = 0$'dir.

$(3) \Rightarrow (1)$ M sağ R-modülünün alt modüllerinin $\bigcap_{i\in I} N_i = 0$ koşulunu sağlayan ailesi $\mathcal{A} = \{N_i\}_{i\in I}$ olsun. $U_i = M/N_i$ alınsın. $f : M \longrightarrow \prod_{i\in I} U_i$ homomorfizması $m \in M$ için $f(m) = (m + N_i)$ olarak tanımlansın. f'nin bir homomorfizma olduğu kolayca görülebilir. p_i doğal projeksiyon olmak üzere $p_i \circ f = \sigma_i : M \longrightarrow M/N_i$ doğal epimorfizmadır.

$$\text{Çek}(f) = \bigcap_{i\in I} \text{Çek}(p_i \circ f) = \bigcap_{i\in I} \text{Çek}(\sigma_i) = \bigcap_{i\in I} N_i = 0$$

olduğu için f monomorfizmadır. Hipotezden $p_F \circ f$ monomorfizma olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq I$ alt kümesi vardır. O halde

$$\bigcap_{i\in F} N_i = \bigcap_{i\in F} \text{Çek}(\sigma_i) = \bigcap_{i\in F} \text{Çek}(p_i \circ f) = \text{Çek}(p_F \circ f) = 0$$

olur.

$\square$

Teorem 2.4.5. *[5, Theorem 8.1] Bir M sağ R-modülünün $X \subseteq M$ üreteç kümesi varsa*

$$R^{(X)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

epimorfizması vardır.

Kanıt. X, M sağ R-modülünün üreteç kümesi olsun. Her bir $x \in X$ için $\rho_x(r) = xr$ ile tanımlı $\rho_x : R \longrightarrow M$ soldan çarpma dönüşümü homomorfizma olduğu için $\rho = \bigoplus_{x \in X} \rho_x$ ile tanımlanan ρ bir homomorfizmadır. Aynı zamanda Gör$(\rho) = \sum_{x \in X} \rho_x = \sum_{x \in X} xR = M$ olduğu için ρ epimorfizmadır. $\square$

2.5 Yarıbasit Modüller

Tanım 2.5.1. [5, s.116] Bir M sağ R-modülü basit alt modüllerinin dik toplamı şeklinde gösterilebiliyorsa M sağ R-modülüne *yarıbasit modül* denir. Başka bir deyişle $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ M sağ R-modülünün basit alt modüllerinin sınıfı olmak üzere $M = \bigoplus_{\alpha \in I} S_\alpha$ ise M bir yarıbasit sağ R-modüldür.

Lemma 2.5.2. *[5, Lemma 9.2] $\{S_i\}_{i \in I}$, M sağ R-modülünün basit alt modüllerinin sınıfı ve $M = \sum_{i \in I} S_i$ olsun. O halde M sağ R-modülünün her U alt modülü için $M = U \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt kümesi vardır.*

Kanıt. U, M sağ R-modülünün kendisinden farklı bir alt modülü ve $\Gamma = \{L \subseteq I \mid \sum_{i \in L} S_i = \bigoplus_{i \in L} S_i$ ve $U \cap (\bigoplus_{i \in L} S_i) = 0\}$ olsun. O halde bir $i \in I$ için $S_i \nsubseteq U$'dur. $S_i \cap U \leq S_i$ ve S_i basit bir alt modül olduğu için $S_i \cap U = 0$'dır. $\{i\} \subseteq I$ ve $\{i\} \in \Gamma$ olduğu için Γ boştan farklıdır.

Λ, Γ'da bir zincir ve $T = \bigcup_{L \in \Lambda} L$ olsun. $i, i_1, i_2, ..., i_k \in T$ olmak üzere $x_i = x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_k} \in S_i \cap (\sum_{x=1}^{k} S_{i_x})$ olsun. Λ bir zincir olduğu için her $x \in \{0, 1, ..., k\}$ için $L_x \subseteq L_y$ olacak şekilde bir $y \in \{0, 1, ..., k\}$ vardır. $L_y \in \Gamma$ olduğu için $S_i \cap (\sum_{x=1}^{k} S_{i_x}) = 0$'dır.

$u = \sum_{x=1}^{k} s_{i_x} \in U \cap (\sum_{i \in T} S_i)$ ise $u = \sum_{x=1}^{k} s_{i_x} \in U \cap (\sum_{i \in L_y} S_i) = 0$'dır. Dolayısıyla $T \in \Gamma$ ve tanımı gereği Λ'da bir üst sınırdır.

Zorn Lemma'dan Γ'da bir maksimal J elemanı vardır. Yani $\sum_{j \in J} S_j = \bigoplus_{j \in J} S_j$ ve $U \cap \bigoplus_{j \in J} S_j = 0$'dır. $Z = U \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)$ olsun. Her $i \in I$ için $S_i \cap Z \leq S_i$ ve S_i basit alt modül olduğu için ya $S_i \cap Z = S_i$ ya da $S_i \cap Z = 0$'dır.

Her $i \in I$ için $S_i \cap Z = S_i$ ise $S_i \subseteq Z$ olur. $M = Z = U \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)$'dir.

Her $i \in I$ için $S_i \cap Z = 0$ ise $S_i \cap (\bigoplus_{j \in J} S_j) = 0$'dır. $x_{j_0} = \sum_{j \neq j_0} x_j + x_i$ elemanı düşünülürse $x_i = x_{j_0} - \sum_{j \neq j_0} x_j \in (\bigoplus_{j \in J} S_j) \cap S_i = 0$'dır. Dolayısıyla $x_{j_0} = 0$'dır. $V = J \cup \{i\}$ olsun. $\sum_{v \in V} S_v = \bigoplus_{v \in V} S_v$'dir. Her $i \in I$ için $S_i \cap (U \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)) = 0$ ise $U \cap (S_i \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)) = 0$'dır. Dolayısıyla $U \cap (\bigoplus_{v \in V} S_v) = 0$'dır. $V \in \Gamma$ olur. Fakat bu durum J'nin maksimal oluşu ile çelişir o halde $S_i \cap Z = S_i$ olmalıdır.

□

Teorem 2.5.3. *[6, Proposition 4.1] Bir M sağ R-modülünün yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul her alt modülünün bir dik toplam terimi olmasıdır.*

Kanıt. M yarıbasit sağ R-modül olsun. O halde her $i \in I$ için S_i, M sağ R-modülünün basit alt modülü olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$'dir. Lemma 2.5.2'den her $U \leq M$ ve bir $J \subseteq I$ alt kümesi için $M = U \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)$ olur. U, M sağ R-modülünün bir dik toplam terimidir.

Tersine U, M sağ R-modülünün bir alt modülü ve U alt modülünün basit alt modüllerinin ailesi $\{S_i\}_{i \in I}$ olsun. $K = \sum_{i \in I} S_i \neq U$ olsun. K, M sağ R-modülünün alt modülü olduğu için hipotezden $M = K \oplus N$ olacak şekilde bir $N \leq M$ vardır. O halde Önerme 2.1.6 ile

$$U = U \cap M = U \cap (K \oplus N) = K \oplus (U \cap N)$$

eşitliği elde edilebilir. $\sum_{i \in I} S_i \neq U$ kabul edildigi için $U \cap N \neq 0$'dır. O halde en az bir sıfırdan farklı $n \in U \cap N$ elemanı vardır. $0 \neq nR \leq M$'dir. Şimdi $\Gamma = \{L \leq nR \mid n \notin L\}$ olsun. Zorn Lemma'dan Γ'nın bir W maksimal elemanı vardır. Yani $n \notin W \leq M$'dir.

Tekrar hipotezden bir $X \leq M$ için $M = W \oplus X$'dir. O halde Önerme 2.1.6 ile

$$nR = nR \cap M = nR \cap (W \oplus X) = W \oplus (nR \cap X)$$

elde edilebilir. W, Γ'nın tanımından nR'de maksimal olduğu için $nR \cap X \cong nR/W$ basittir. $nR \cap X \subseteq U$ olduğu için bir $i \in I$ için $nR \cap X \subseteq S_i$'dir. $nR \cap X \subseteq K$'dir. O halde $nR \cap X \subseteq K \cap N = 0$'dır. $n \neq 0$ seçildiği için çelişki elde edilir. $K = U$ olmalıdır. $\square$

2.6 Büyük ve Küçük Alt Modüller

Tanım 2.6.1. [4, s.88] M sıfırdan farklı bir sağ R-modül ve $N \leq M$ olsun. N'nin M'nin sıfırdan farklı her alt modülü ile kesişimi sıfırdan farklı ise, diğer bir deyişle her $U \leq M$ için $U \cap N = 0$ eşitliğinden $U = 0$ elde ediliyorsa, N'ye M'nin ***büyük alt modülü*** denir ve $N \trianglelefteq M$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6.2. [4, s.88] M bir sağ R-modül ve $N \leq M$ olsun. N'nin sadece M ile toplamı M'ye eşitse, yani her $U \leq M$ için $N + U = M$ eşitliğinden $U = M$ elde edilirse, N'ye M'nin ***küçük alt modülü*** denir ve $N \ll M$ şeklinde gösterilir.

Bir $f : M \longrightarrow N$ monomorfizması için Gör$(f) \trianglelefteq N$ ise f homomorfizmasına ***büyük monomorfizma*** denir.

Bir $g : N \longrightarrow K$ epimorfizması için Çek$(g) \ll N$ ise g homomorfizmasına ***küçük epimorfizma*** denir.

Tanım 2.6.3. [7, s.512] R bir halka ve S bir sağ R-modül olsun. Bir M sağ R-modülü için $S \subset M$ ve M'nin $S \cap T = 0$ olacak şekilde tek T alt modülü 0 ise M'ye S'nin ***büyük genişlemesi*** denir.

Tanım 2.6.4. [4, s.93] M bir sağ R-modül ve $K \leq M$ olsun.

(1) $K \cap N = 0$ ve N bu koşula göre maksimal ise, yani $K \cap N' = 0$ ve $N \leq N' \leq M$ durumunda $N = N'$ ise, N alt modülüne K'nın M içindeki bir *bütünleyeni* denir.

(2) $K + L = M$ ve L bu koşula göre minimal ise, yani $K + L^{'} = M$ ve $L^{'} \leq L$ iken $L^{'} = L$ ise, L alt modülüne K alt modülünün *tümleyeni* denir.

Önerme 2.6.5. *[4, Önerme 9.8] M bir sağ R-modül ve $K, L \leq M$ olmak üzere $K \cap L = 0$ olsun. Bu durumda K'nın M içinde L'yi içeren bir bütünleyeni vardır.*

Kanıt. $\Gamma = \{X \leq M \mid L \leq X, K \cap X = 0\}$ olsun. $L \in \Gamma$ olduğu için $\Gamma \neq \varnothing$ ve Γ'nın her tam sıralı alt kümesinin tüm elemanlarının birleşimi Γ'da olduğu için bir üst sınırdır. O halde Zorn Lemma'dan Γ'da bir N maksimal elemanı vardır. Yani K alt modülünün M içinde bir bütünleyeni vardır. □

Önerme 2.6.6. *[5, Proposition 5.21] M bir sağ R-modül, $N \leq M$ ve $N^{'}$, N alt modülünün bütünleyeni olsun. O halde $N \oplus N^{'} \trianglelefteq M$'dir.*

Kanıt. $0 \neq L \leq M$ ve $(N \oplus N^{'}) \cap L = 0$ olsun. O halde $N \cap (N^{'} + L) = 0$'dır. Fakat bu durum $N^{'}$ alt modülünün maksimal oluşu ile çelişir. O halde $N \oplus N^{'} \trianglelefteq M$'dir. □

2.7 Temel (Socle) ve Radikal

Tanım 2.7.1. [8, s.25] M bir sağ R-modül olsun. M'nin tüm basit alt modüllerinin toplamı M sağ R-modülünün *temeli* olarak isimlendirilir ve $\mathrm{Soc}(M)$ ile gösterilir. Tanımı gereği $\mathrm{Soc}(M)$ bir yarıbasit modüldür. Ayrıca M'nin yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{Soc}(M) = M$ olmasıdır.

Tanım 2.7.2. [8, s.179] M bir sağ R-modül olsun. M'nin tüm maksimal alt modüllerinin arakesiti M sağ R-modülünün *radikali* olarak isimlendirilir ve $\mathrm{Rad}(M)$ ile gösterilir. M'nin maksimal alt modülü yoksa o halde $\mathrm{Rad}(M) = M$'dir.

Teorem 2.7.3. *[5, Proposition 9.7] M bir sağ R-modül olsun. Buna göre*

$$\mathrm{Soc}(M) = \bigcap \{N \subseteq M \mid N, M\text{'nin büyük alt modülüdür}\}$$

olur.

Kanıt. $\{S_i\}_{i\in I}$, M sağ R-modülünün tüm basit alt modüllerinin sınıfı olsun. O halde $\mathrm{Soc}(M) = \sum_{i\in I} S_i$'dir. $N \trianglelefteq M$ olsun. Her $i \in I$ için $S_i \cap N \neq 0$'dır. Dolayısıyla her $i \in I$ için $S_i \leq N$'dir. $\mathrm{Soc}(M)$ her büyük alt modül tarafından içeriliyor olduğundan $\mathrm{Soc}(M) \subseteq \bigcap\{N \mid N \trianglelefteq M\}$'dir.

Diğer taraf için $H = \bigcap\{N \mid N \trianglelefteq M\}$ ve $N \leq H$ olsun. Önerme 2.6.5'ten N alt modülünün bir $N^{'} \leq M$ bütünleyeni vardır. Önerme 2.6.6'dan $N + N^{'} = N \oplus N^{'} \trianglelefteq M$'dir. O halde $N \leq H \leq N \oplus N^{'}$'dir. Önerme 2.1.6'dan

$$H = H \cap (N \oplus N^{'}) = N \oplus (H \cap N^{'})$$

elde edilir. N alt modülü H alt modülünde dik toplam terimidir. Dolayısıyla H yarıbasittir. Buradan $H \leq \mathrm{Soc}(M)$'dir. □

Teorem 2.7.4. *[5, Corollary 9.10] M bir sağ R-modül olsun. O halde aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) M'nin sıfırdan farklı herhangi bir alt modülü basit bir modül içerir;

(2) $\mathrm{Soc}(M)$, M'nin büyük alt modülüdür.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ $K \leq M$ olmak üzere $\mathrm{Soc}(M) \cap K = 0$ ve $K \neq 0$ olsun. O halde hipotezden K bir basit modül içerir. Bu basit modül S ile gösterilsin. S, M'nin basit alt modülü olduğundan $\mathrm{Soc}(M)$'nin tanımından $S \leq \mathrm{Soc}(M)$ olur. O halde $S \leq \mathrm{Soc}(M) \cap K$ elde edilir. Fakat bu durum $\mathrm{Soc}(M) \cap K = 0$ kabulü ile çelişir. O halde $\mathrm{Soc}(M)$, M'nin büyük alt modülüdür.

$(2) \Rightarrow (1)$ K, M'nin sıfırdan farklı bir alt modülü olsun. $\mathrm{Soc}(M)$, M'nin büyük alt modülü olduğundan $\mathrm{Soc}(K) = K \cap \mathrm{Soc}(M) \neq 0$'dır. Bu nedenle K alt modülünün basit bir alt modülü vardır. □

2.8 Noether ve Artin Modüller

Tanım 2.8.1. [9, 3.35 Definitions] $(P, \preceq)$ boş olmayan kısmi sıralı bir küme olsun. P kümesinin $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere P_i elemanlar ailesi için

$$P_1 \preceq P_2 \preceq ... \preceq P_i \preceq P_{i+1} \preceq ...$$

şeklindeki artan dizisi bir k. adımda sabitleniyorsa, yani bir $k \in \mathbb{N}$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $P_k = P_{i+k}$ oluyorsa, P kısmi sıralı kümesine *artan zincir koşulunu sağlıyor* denir.

Tanım 2.8.2. [9, s.123] $\mathcal{S}_M$ ile M sağ R-modülünün alt modüllerinin ailesi gösterilsin. $(\mathcal{S}_M, \subseteq)$ kısmi sıralı kümesi artan zincir koşulunu sağlıyorsa M'ye bir *Noether modül* denir. Yani her $i \in \mathbb{N}$ için $M_i \in \mathcal{S}_M$ olmak üzere

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq ...$$

artan dizisi bir $k \in \mathbb{N}$ için sabitleniyorsa M Noether sağ R-modüldür.

Tanım 2.8.3. [9, 3.37 Definitions] R bir halka olsun. R halkasının tüm sağ ideallerinin ailesi $\mathcal{I}_R$ olsun. $(\mathcal{I}_R, \subseteq)$ kısmi sıralı kümesi artan zincir koşulunu sağlıyorsa R halkasına *sağ Noether halka* denir. Başka bir deyişle R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul R halkasının sağ ideallerinden oluşan

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq ...$$

artan zincirinin sabitlenmesidir.

Tanım 2.8.4. [9, 7.3 Definition] R bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. M aşağıdaki denk koşullardan birini sağlıyorsa *Artin modül* olarak isimlendirilir.

(1) M'nin

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq ... \supseteq G_i \supseteq G_{i+1} \supseteq ...$$

şeklindeki alt modüllerinin bir ailesi $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ise bir $k \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \in \mathbb{N}$ için $G_k = G_{k+i}$'dir.

(2) M'nin alt modüllerinin boştan farklı her ailesi bir minimal eleman içerir.

Tanım 2.8.5. [9, 7.6 Definition] R bir halka olsun. R halkası aşağıdaki denk koşullardan birini sağlıyorsa *sağ Artin halka* olarak isimlendirilir.

(1) R halkasının sağ ideallerinin

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_i \supseteq I_{i+1} \supseteq ...$$

olan ailesi $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ için bir $k \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \in \mathbb{N}$ için $I_k = I_{k+i}$'dir.

(2) R halkasının sağ ideallerinin boştan farklı her ailesinin bir minimal elemanı vardır.

Önerme 2.8.6. *[5, Proposition 10.9] Bir M sağ R-modülü için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) M Noether sağ R-modüldür;

(2) M'nin tüm alt modülleri sonlu üretilmiştir;

(3) M'nin alt modüllerinin boştan farklı her kümesinin bir maksimal elemanı vardır.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (3)$ M bir Noether sağ R-modül olsun. $\mathcal{A}$, M sağ R-modülünün alt modüllerinin herhangi bir ailesi olsun. $N_1 \in \mathcal{A}$ ve N_1 alt modülü $\mathcal{A}$'da maksimal olmasın. O halde $N_1 \subsetneqq N_2$ olacak şekilde bir $N_2 \in \mathcal{A}$ vardır. N_2 de $\mathcal{A}$'da maksimal olmasın. O halde $N_1 \subsetneqq N_2 \subsetneqq N_3$ olacak şekilde bir $N_3 \in \mathcal{A}$ vardır. Bu şekilde devam edilirse M sağ R-modülünün alt modüllerinden oluşan artan bir dizi elde edelir. Eğer $\mathcal{A}$'da bir maksimal eleman yoksa

$$N_1 \subsetneqq N_2 \subsetneqq N_3 \subsetneqq ... \subsetneqq N_m \subsetneqq ...$$

dizisi hiçbir adımda sabitlenmez. Bu durum M sağ R-modülünün Noether modül olmasıyla çelişir. O halde en az bir $k \in \mathbb{N}$ için $N_k = N_{k+i}$'dir. Dolayısıyla N_k, $\mathcal{A}$'da maksimaldir.

$(3) \Rightarrow (2)$ $K \leq M$ ve $\mathcal{L}$, K alt modülünün tüm sonlu üretilmiş alt modüllerinin bir ailesi olsun. Hipotezden $\mathcal{L}$'nin N gibi bir maksimal elemanı vardır. $N \neq K$ kabul edelim. O halde bir $m \in K \backslash N$ vardır. $N_1 = N + Rm$ olsun. N_1 sonlu üretilmiş ve K'nin alt modülü olduğu için $N_1 \in \mathcal{L}$'dir. $N \leq N_1$ olduğundan bu durum N'nin maksimal oluşuyla çelişir. O zaman $N = K$'dır. K sonlu üretilmiştir.

$(2) \Rightarrow (1)$ M'nin alt modüllerinden oluşan

$$N_1 \leq N_2 \leq ... \leq N_m \leq ...$$

artan dizisini alalım. $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ olsun. $N \leq M$ olduğundan N sonlu üretilmiştir. O halde bazı $m_1, m_2, ..., m_k \in N$ için $N = Rm_1 + Rm_2 + ... + Rm_k$ yazılır. Her $i = 1, 2, ..., k$ için $m_i \in N_{t_i}$ ve $s = max\{t_1, ..., t_k\}$ olsun. Yani her $i = 1, 2, ..., k$ için $m_i \in N_s$'dir. O zaman $N \leq N_s$'dir. Diğer taraftan $N_s \leq N$'dir. O halde $N_s = N_{s+1} = ...$ olur. Yani M Noether sağ R-modüldür. $\square$

Önerme 2.8.7. *[5, Proposition 10.10] Bir M sağ R-modülü için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) M Artin sağ R-modüldür;

(2) M'nin tüm bölüm modülleri eşsonlu üretilmiştir;

(3) M'nin alt modüllerinin boştan farklı her kümesinin minimal elemanı vardır.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (3)$ $\mathcal{A}$, M sağ R-modülünün alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun. $\mathcal{A}$'da bir minimal eleman olmadığını kabul edersek $\mathcal{A}$'nın elemanlarından yani M sağ R-modülünün alt modüllerinden oluşan azalan dizi bir adımda sabitlenmez bu durum M sağ R-modülünün Artin modül oluşuyla çelişir.

$(3) \Rightarrow (2)$ $N \leq M$ olsun. $\mathcal{A}$, M/N bölüm modülünün alt modüllerinin $\bigcap \mathcal{A} = 0$ koşulunu sağlayan ailesi olsun. $\mathcal{A}$'daki her eleman $N \leq U \leq M$ olmak üzere U/N formundadır ve $\bigcap_{U/N \in \mathcal{A}} U = N$'dir. Kabulden $\mathcal{B} = \{U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}$ ve her $i = 1, 2, ..., n$ için $U_i/N \in \mathcal{A}\}$ kümesinin bir minimal elemanı vardır. Bu minimal elemana

$X = U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_m$ olsun. O halde $N \leq X$'tir. $N \neq X$ olsun. O halde $X \nsubseteq U$ olacak şekilde bir U elemanı vardır. Bu durumda $Y = U \cap U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_m$ alındığında $Y \lneq X$ ve $Y \in \mathcal{B}$ olur. Bu durum X'in minimal olmasıyla çelişir. O zaman $N = X$ buradan $\bigcap_{i=1}^{m}(U_i/N) = 0$ olur. Sonuç olarak M/N bölüm modülü eşsonlu üretilmiştir.

$(2) \Rightarrow (1)$ M sağ R-modülünün alt modüllerinin bir azalan

$$N_1 \geq N_2 \geq ... \geq N_m \geq ...$$

dizisi alınsın. $N = \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i$ olsun. $\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i/N = (\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i)/N = N/N = 0$'dır. $N \leq M$ olduğu için kabulden M/N bölüm modülü eşsonlu üretilmiştir. O halde $\bigcap_{i=1}^{k}(N_i/N) = 0$ olacak şekilde en az bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. $\bigcap_{i=1}^{k}(N_i/N) = (\bigcap_{i=1}^{k} N_i)/N$ olduğu için $N = \bigcap_{i=1}^{k} N_i$ olur. $N = N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_k = N_k$ ise $N_k = N_{k+1} = ...$ olur. O halde M sağ R-modülü Artin modüldür. $\square$

Önerme 2.8.8. *[5, Proposition 10.12]* $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *sağ R-modüller K, M, N'nin bir kısa tam dizisi olsun. M Artindir (Noetherdir) ancak ve ancak K ve N Artindir (Noetherdir).*

Sonuç 2.8.9. *[5, Corollary 10.13] $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ olsun. M Artindir (Noetherdir) ancak ve ancak her $i = 1, \ldots, n$ için M_i Artindir (Noetherdir).*

Önerme 2.8.10. *[5, Proposition 10.15] Bir sağ R-modül olan M için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) $\operatorname{Rad} M = 0$ *ve M Artin sağ R-modüldür;*

(2) $\operatorname{Rad} M = 0$ *ve M eşsonlu üretilmiş sağ R-modüldür;*

(3) M yarıbasit ve sonlu üretilmiş sağ R-modüldür;

(4) M yarıbasit ve Noether sağ R-modüldür;

(5) M sağ R-modülü, basit alt modüllerinin sonlu dik toplamıdır.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ M Artin sağ R-modül olduğu için Önerme 2.8.7'den her alt modülü eşsonlu üretilmiştir. Özel olarak M eşsonlu üretilmiş sağ R-modüldür.

$(2) \Rightarrow (5)$ M sağ R-modülünün tüm maksimal alt modüllerinin sınıfı $\{N_i\}_{i\in I}$ olsun. $f : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M/N_i$ homomorfizması $f(m) = m + N_i$ olarak tanımlanırsa Çek$(f) = \bigcap_{i\in I} N_i$ olur. Kabulden $\bigcap_{i\in I} N_i = \operatorname{Rad} M = 0$ dolayısıyla f bir monomorfizmadır. M eşsonlu üretilmiş sağ R-modül olduğundan Önerme 2.4.4'ten sonlu bir $F \subseteq I$ alt kümesi için $f' : M \longrightarrow \prod_{i\in F} M/N_i$ homomorfizması vardır. Her $i \in I$ için N_i, M sağ R-modülünün maksimal alt modülü olduğu için M/N_i bölüm modülü basit modüldür. O halde $\prod_{i\in F} M/N_i = \bigoplus_{i\in F} M/N_i$ yarıbasittir. Buradan $F' \subseteq F$ için $M \cong \bigoplus_{i\in F'} M/N_i$'dir.

$(5) \Rightarrow (1)$ n bir doğal sayı ve $S_1, S_2, ..., S_n$ alt modülleri M sağ R-modülünün basit alt modülleri olmak üzere $M = S_1 \oplus S_2 \oplus ... \oplus S_n$ olsun. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $T_i = S_1 \oplus S_2 \oplus ... \oplus S_{i-1} \oplus S_{i+1} \oplus ... \oplus S_n$ olsun. O zaman $S_i \cong M/T_i$'dir. Dolayısıyla her i için T_i, M sağ R-modülünün maksimal alt modülüdür. $\operatorname{Rad} M \leq \bigcap_{i=1}^{n} T_i = 0$ olduğu için $\operatorname{Rad} M = 0$'dır. Ayrıca her $i = 1, \ldots, n$ için S_i Artindir. Bu yüzden M sağ R-modülü Artindir.

$(3) \Rightarrow (5)$ M yarıbasit ve sonlu üretilmiş bir sağ R-modül olsun. O halde her $i \in I$ için S_i, M sağ R-modülünün basit alt modülü olmak üzere $M = \bigoplus_{i\in I} S_i$ ve $k = 1, 2, ..., n$ için $m_k \in M$ olmak üzere $M = Rm_1 + Rm_2 + ... + Rm_n$'dir. Dolayısıyla $k = 1, 2, ..., n$ için her m_k sonlu bir $\bigoplus_{i\in F_k} S_i$ dik toplamının içinde yer alır. Sonuç olarak $M = \bigoplus_{i\in \bigcup_{k=1}^{n} F_k} S_i$ yazılır.

$(5) \Rightarrow (3)$ n bir doğal sayı ve $S_1, S_2, ..., S_n$ alt modülleri M sağ R-modülünün basit alt modülleri olmak üzere $M = S_1 \oplus S_2 \oplus ... \oplus S_n$ olsun. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $0 \neq s_i \in S_i$ olmak üzere $M = S_1 \oplus S_2 \oplus ... \oplus S_n = s_1R \oplus s_2R \oplus ... \oplus s_nR$ şeklinde yazılır. Sonuç olarak M sonlu üretilmiş sağ R-modüldür.

$(5) \Rightarrow (4)$ n bir doğal sayı ve $S_1, S_2, ..., S_n$ alt modülleri M sağ R-modülünün basit alt modülleri olmak üzere $M = S_1 \oplus S_2 \oplus ... \oplus S_n$ olsun. O halde M sağ R-modülü yarıbasittir. Her bir S_i Noether modül olduğu için Sonuç 2.8.9'dan M Noether sağ R-modüldür.

$(4) \Rightarrow (3)$ M sağ R-modülü Noether modül olsun. M sağ R-modülünün tüm alt modülleri sonlu üretilmiştir. Özel olarak M sonlu üretilmiş sağ R-modüldür. $\square$

Sonuç 2.8.11. *[5, Corollary 10.16] M bir yarıbasit sağ R-modül olsun. O halde aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) M Artin sağ R-modüldür;

(2) M Noether sağ R-modüldür;

(3) M sonlu üretilmiş sağ R-modüldür;

(4) M eşsonlu üretilmiş sağ R-modüldür.

Önerme 2.8.12. *[5, Proposition 10.19] Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) R sağ Noether halkadır;

(2) Her sonlu üretilmiş sağ R-modül Noetherdir;

(3) Her sonlu üretilmiş sağ R-modülün her alt modülü sonlu üretilmiştir.

Kanıt. $(2) \Rightarrow (1)$ R halkası sağ R-modül olarak alındığında devirli modül olduğu için sonlu üretilmiştir dolayısıyla Noether halkadır.

$(1) \Rightarrow (3)$ R sağ Noether halka, M sonlu üretilmiş bir sağ R-modül olsun. O halde $m_1, m_2, ..., m_n \in M$ $(n \in \mathbb{N})$ için $M = m_1R + m_2R + ... + m_nR$ şeklinde yazılır. $f : R_R^{(n)} \longrightarrow M$ homomorfizması $r_1, r_2, ..., r_n \in R$ ve $m_1, m_2, ..., m_n \in M$ olmak üzere $f((r_1, r_2, ..., r_n)) = m_1r_1 + m_2r_2 + ... + m_nr_n$ olarak tanımlansın. f homomorfizmasının epimorfizma olduğu kolayca görülür. O halde $M \cong R_R^{(n)}/\text{Çek}(f)$'dir. R halkası Noether halka olduğu için $R_R^{(n)}$ Noetherdir. O halde Önerme 2.8.8'den M sağ R-modülü Noetherdir. Dolayısıyla M sağ R-modülünün tüm alt modülleri sonlu üretilmiştir.

$(2) \Rightarrow (3)$ M sonlu üretilmiş bir sağ R-modül olsun. Hipotezden alt modülleri sonlu üretilmiştir. Önerme 2.8.6'dan M Noether sağ R-modüldür. $\square$

2.9 Kategoriler ve Funktorlar

Tanım 2.9.1. [4, s.49] Bir $\mathcal{C}$ kategorisi

(1) $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ objeler sınıfından;

(2) Her $A, B \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ için $f : A \longrightarrow B$ morfizmalarından oluşan $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ sınıfından;

(3) Her $A, B, C \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ ve $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ morfizmaları için *bileşke* olarak isimlendirilen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$ ile tanımlı $g \circ f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$ fonksiyonlarından oluşur öyle ki;

   (a) Her $A, B, C, D \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ ve $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$, $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$ için

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

   (birleşme kuralı) sağlanır.

   (b) Her $A \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ ve her $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ için $f \circ 1_A = f$, $1_A \circ g = g$ olacak şekilde bir $1_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ *birim morfizması* vardır.

Örnek 2.9.1. *[4, s.49] Set kategorisinin objeleri tüm kümelerdir.*

$$\mathrm{Mor}_{Set}(X, Y)$$

X kümesinden Y kümesine olan tüm fonksiyonları ifade eder ve morfizmaların bileşkesi fonksiyonların alışılmış bileşkesidir.

Örnek 2.9.2. *[4, s.49] R bir halka olsun. Sağ R-modüller kategorisi* Mod-R *ile gösterilir. Bu kategorinin tüm objeleri sağ R-modüller, morfizmaları ise modül homomorfizmalarıdır.*

Tanım 2.9.2. Bir $\mathcal{C}'$ kategorisi aşağıdaki koşulları sağlarsa $\mathcal{C}$ kategorisinin *alt kategorisi* olarak isimlendirilir:

(1) $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$.

(2) Her $A, B \in \mathcal{C}'$ icin $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A, B) \subset \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

(3) $\mathcal{C}'$ kategorisindeki herhangi iki morfizmanın bileşkesi $\mathcal{C}$ kategorisindeki ile aynıdır.

(4) Her $A \in \mathcal{C}'$ için $\mathcal{C}'$ kategorisindeki 1_A birim morfizması $\mathcal{C}$ kategorisindeki ile aynıdır.

Ayrıca $\mathcal{C}'$ bir $\mathcal{C}$ kategorisinin alt kategorisi olmak üzere her $A, B \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}')$ için $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ oluyorsa $\mathcal{C}'$ alt kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin *tam alt kategorisi* denir.

Tanım 2.9.3. [4, s.51] $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olsunlar. $\mathcal{C}$ kategorisindeki her A objesini $\mathcal{D}$ kategorisindeki $F(A)$ objesine, $\mathcal{C}$ kategorisindeki her $f : A \longrightarrow B$ morfizmini $\mathcal{D}$ kategorisindeki $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ morfizmine karşılık getiren $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dönüşümü,

(1) $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ icin $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ item[(2)] Her $A \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ icin $F(1_A) = 1_{F(A)}$

koşullarını sağlıyorsa *kovaryant (düz değişimli) funktor* olarak adlandırılır.

Tanım 2.9.4. [4, s.51] $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olsunlar. $\mathcal{C}$ kategorisindeki her A objesini $\mathcal{D}$ kategorisindeki $F(A)$ objesine, $\mathcal{C}$ kategorisindeki her $f : A \longrightarrow B$ morfizmini $\mathcal{D}$ kategorisindeki $F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)$ morfizmine karşılık getiren $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dönüşümü,

(1) $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ icin $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

(2) Her $A \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$

koşullarını sağlıyorsa *kontravaryant (ters değişimli) funktor* olarak adlandırılır.

Örnek 2.9.3. *[4, s.56] M ve N sağ R-modüller olsun. Tüm $f : M \longrightarrow N$ homomorfizmalar kümesini $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ile gösterelim. $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ homomorfizmalarının toplamını her $m \in M$ için $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$ olarak tanımlayalım.* $0 : M \longrightarrow N$

homomorfizmasını her $m \in M$ için $0(m) = 0$ olarak ve bir $f : M \longrightarrow N$ homomorfizması verildiğinde $-f : M \longrightarrow N$ homomorfizmasını $(-f)(m) = -f(m)$ olarak tanımlayalım. Gerekli eşitlikler bu tanımlarla kontrol edildiğinde $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ bir abel gruptur. Bu gruba homomorfizmalar grubu *denir. Kategori dilinde $\mathrm{Hom}_R(M, N) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Mod}\,-R}(M, N)$'dir. $f : N \longrightarrow K$ bir homomorfizma ise*

$$\mathrm{Hom}_R(M, f) : \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, K)$$

fonksiyonunu f_* ile gösterelim ve $f_*(g) = f \circ g$ ile tanımlayalım. f_* iki homomorfizmanın bileşkesi olarak tanımlandığı için bir homomorfizmadır. Ayrıca

$$\mathrm{Hom}_R(M, f + h)(g) = (f + h) \circ g = f \circ g + h \circ g$$

$$= \mathrm{Hom}_R(M, f)(g) + \mathrm{Hom}_R(M, h)(g)$$

$$= (\mathrm{Hom}_R(M, f) + \mathrm{Hom}_R(M, h))(g)$$

olduğu için $\mathrm{Hom}_R(M, -) : \mathrm{Mod}\,-R \longrightarrow Ab$ bir kovaryant funktordur. Benzer şekilde $f : M \longrightarrow K$ homomorfizması için

$$f^* = \mathrm{Hom}_R(f, N) : \mathrm{Hom}_R(K, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

homomorfizmasını $f^*(g) = g \circ f$ ile tanımlayarak bir

$$\mathrm{Hom}_R(-, N) : \mathrm{Mod}\,-R \longrightarrow Ab$$

kontravaryant funktoru elde edilir.

Tanım 2.9.5. [4, s.53] $F : R - Mod \longrightarrow Ab$ kovaryant funktor olsun.

(1) Her

$$\ldots \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \ldots$$

tam dizisi için

$$\ldots \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \ldots$$

dizisi tam ise F funktoruna *tam funktor* denir.

(2) Her

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

tam dizisi için

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

dizisi tam ise F funktoruna *soldan tam funktor* denir.

(3) Her

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

tam dizisi için

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$$

dizisi tam ise F funktoruna *sağdan tam funktor* denir.

Teorem 2.9.6. *[4, Teorem 7.3] Her M sağ R-modülü için $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ soldan tam ve kovaryant ve $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ soldan tam ve kontravaryant funktordur.*

Kanıt.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

bir tam dizi olsun. Bu tam dizi için

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(M, C)$$

dizisi düşünüldüğünde $h \in$ Çek(f_*) ise her $m \in M$ için

$$f(h(m)) = (f \circ h)(m) = f_*(h)(m) = 0(m) = 0$$

ve f bir monomorfizma olduğu için $h(m) = 0$'dır. Dolayısıyla Çek$(f_*) = 0$ olur. Böylece f_* bir monomorfizmadır. $u \in$ Gör(f_*) olsun. O zaman $u = f_*(v) = f \circ v$ olacak şekilde bir $v \in \mathrm{Hom}(M, A)$ vardır. $g_*(u) = g_*(f \circ v) = g \circ f \circ v = 0 \circ v = 0$'dır. Dolayısıyla $u \in$ Çek(g_*)'dır. $u \in$ Çek(g_*) olsun. O zaman $g \circ u = g_*(u) = 0$'dır. Lemma 2.3.5'ten $u = f \circ s = f_*(s) \in$ Gör(f_*) olacak şekilde bir $s \in \mathrm{Hom}(M, A)$ vardır. Çek(g_*) = Gör(f_*)'dır. $\mathrm{Hom}(M, -)$ kovaryant funktoru soldan tamdır.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

bir tam dizi olsun. Bu tam dizi için

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(B, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(A, M)$$

dizisi düşünüldüğünde $u \in$ Çek(g^*) olsun. g bir epimorfizma olduğu için her $c \in C$ için $g(b) = c$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

$$u(c) = (u \circ g)(b) = g^*(u)(b) = 0(b) = 0$$

dır. Böylece g^* bir monomorfizmadır. $v \in$ Gör(g^*) ise $v = g^*(u) = u \circ g$ olacak şekilde bir $u \in \mathrm{Hom}(C, M)$ vardır. O zaman $f^*(v) = f^*(u \circ g) = u \circ g \circ f = u \circ 0 = 0$'dır. Yani $v \in$ Çek(f^*)'dır. $u \in$ Çek(f^*) yani $v \circ f = f^*(v) = 0$ olsun. O zaman Lemma 2.3.6'dan $v = s \circ g = g^*(s) \in$ Gör(g^*) olacak şekilde bir $s \in \mathrm{Hom}(C, M)$ vardır. Çek(f^*) = Gör(g^*)'dır. $\mathrm{Hom}(-, M)$ kontravaryant funktoru tamdır. □

2.10 Wisbauer Sınıfları

Tanım 2.10.1. [5, s.105] $\mathcal{U}$, sağ R-modüllerin bir sınıfı ve M bir sağ R-modül olsun. A indis kümesi ve $\alpha \in A$ için $U_\alpha \in \mathcal{U}$ olmak üzere $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sınıfı ve

$$\bigoplus_{\alpha \in A} U_\alpha \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

epimorfizması varsa M'ye $\mathcal{U}$*-üretilmiş* veya $\mathcal{U}$ *tarafindan üretilmiş* modül denir. $\mathcal{U}$ sınıfının tek modülden oluşması yani $\mathcal{U} = \{U\}$ olması durumunda

$$U^{(A)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

epimorfizması varsa M'ye U*-üretilmiş* veya U *tarafindan üretilmiş* modül denir.

Tanım 2.10.2. [10, s.118] M bir sağ R-modül olsun. Bir N sağ R-modülü M-üretilmiş bir modülün alt modülüne izomorf ise N'ye M *tarafindan alt üretilmiş* modül denir.

Tanım 2.10.3. [10, s.118] M bir sağ R-modül olsun. Sağ R-modüller kategorisinin bütün objeleri M tarafından alt üretilmiş olan tam alt kategorisine bir *Wisbauer sınıfı* denir ve $\sigma[M]$ ile gösterilir.

Tanım 2.10.4. R bir halka olsun. Sağ R-modüllerden oluşan $\mathcal{C}$ sınıfı alt modüller, faktör modüller ve dik toplam altında kapalı ise bu sınıfa bir *kalıtsal önburulma sınıfı* denir.

Önerme 2.10.5. *[10, 15.1] Bir M sağ R-modülü için $\sigma[M]$ bir kalıtsal önburulma sınıfıdır.*

Kanıt. $\sigma[M]$'den bir N sağ R-modülü alalım. Tanımı gereği $N \cong T$ olacak şekilde bir M-üretilmiş K sağ R-modülünün alt modülü T vardır. $\phi : N \longrightarrow T$ izomorfizma olsun. Herhangi bir $N' \leq N$ için $\phi(N') \leq T$ olduğundan $\sigma[M]$ alt modüller altında kapalıdır. Benzer şekilde faktör modüller altında da kapalıdır. $\sigma[M]$'deki sağ R-modüllerin bir ailesi $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, her bir $\lambda \in \Lambda$ için M_λ sağ R-modülü M-üretilmiş ve $N_\lambda \subset M_\lambda$ olsun. O halde $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \subset \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$'dır. $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ dik toplamı M-üretilmiş olduğu için $\bigoplus_{\lambda\in\lambda} N_\lambda$ dik toplamı $\sigma[M]$ sınıfına aittir. $\square$

2.11 İnjektif Modüller

Bu kısımda ise bu tez için özellikle önemli olan injektif modüllere odaklanılacak, sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak özellikleri verilecektir.

Tanım 2.11.1. [4, s.71] M bir sağ R-modül olsun. Her $f : A \longrightarrow B$ monomorfizması ve $g : A \longrightarrow M$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir $h : B \longrightarrow M$ homomorfizması varsa M sağ R-modülüne *injektif modül* denir.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Teorem 2.11.2. *(Baer Kriteri) Bir M sağ R-modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul R halkasının her I idealinin ve $f : I \longrightarrow M$ homomorfizmasının bir $g : R \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebilmesidir.*

Tanım 2.11.3. [4, s.76] D bir grup olsun. Her n pozitif tam sayısı için $nD = D$ ise D grubuna *bölünebilir grup* denir.

Teorem 2.11.4. *[4, Teorem 8.9] R bir halka olsun. D bölünebilir grup ise $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ injektif sağ R-modüldür.*

Kanıt. $f : A \longrightarrow B$ bir monomorfizma ve $g : A \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ bir homomorfizma olsun. $h : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D) \longrightarrow D$ fonksiyonu her $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ için $h(\alpha) = \alpha(1)$ olarak tanımlansın. Her $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ için

$$h(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(1) = \alpha(1) + \beta(1)$$

olduğu için h bir grup homomorfizmasıdır. D injektif grup olduğu için (bkz. [4, Teorem 8.6]), $p \circ f = h \circ g$ olacak şekilde bir $p : B \longrightarrow D$ homomorfizması vardır. $q : B \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ fonksiyonu her $b \in B$ ve her $r \in R$ için $q(b)(r) = p(br)$ ile tanımlansın. q fonksiyonunun iyi tanımlı ve bir modül homomorfizması olduğu kolayca kontrol edilebilir. $a \in A$ olsun. Her $r \in R$ için

$$((q \circ f)(a))(r) = q(f(a))(r) = p(f(a)r) = (p \circ f)(ar) = (h \circ g)(ar)$$

$$= (g(ar))(1) = (g(a)r)(1) = g(a)(r.1) = g(a)r$$

olduğundan $q \circ f = g$'dir. $\square$

Teorem 2.11.5. *[5, Proposition 18.6] Her sağ R-modül bir injektif sağ R-modüle gömülebilir.*

Kanıt. M bir sağ R-modül olsun. O halde Teorem 2.4.5'ten bir $X \subseteq M$ ve $f : \mathbb{Z}^{(X)} \longrightarrow M$ epimorfizması vardır. O halde Teorem 2.1.10'dan

$$M \cong \mathbb{Z}^{(X)}/\text{Çek}(f) \leq \mathbb{Q}^X/\text{Çek}(f)$$

ve bölünebilir abel grupların dik çarpımları ve faktörleri de bölünebilir abel grup olduğu için M bölünebilir olur. Teorem 2.11.4'ten $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ injektif sağ R-modüldür. $M \cong \text{Hom}_R(R, M) \leq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ olduğu için istenen sağlanır. $\square$

Teorem 2.11.6. *[4, Teorem 8.11] Bir M sağ R-modülü için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) *M injektif sağ R-modüldür;*

(2) $\text{Hom}_R(-, M)$ *funktoru tamdır;*

(3) $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *şeklinde olan her kısa tam dizi parçalanandır.*

(4) *M sağ R-modülü, D bölünebilir bir grup olmak üzere,* $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ *şeklinde bir modülün dik toplam terimine izomorftur.*

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) $f : A \longrightarrow B$ bir monomorfizma ve $\alpha : A \longrightarrow M$ bir homomorfizma olsun. M injektif sağ R-modül olduğu için

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\beta : B \longrightarrow M$ homomorfizması vardır. $\alpha \in \text{Hom}_R(A, M)$ için $f^*(\beta) = \beta \circ f = \alpha$ olacak şekilde bir $\beta : B \longrightarrow M$ homomorfizması vardır. Dolayısıyla f^* epimorfizmadır. Yani $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ funktoru sağdan tam funktordur. Teorem 2.9.6'dan $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ funktoru soldan tam funktordur. Dolayısıyla $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ funktoru tam funktordur.

(2) $\Rightarrow$ (3) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ kısa tam dizisine $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ funktorunu uygulandığında

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M, M) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi elde edilir. Bu kısa tam diziye göre f^* epimorfizma olduğu için $1_M \in \mathrm{Hom}_R(M, M)$ için $p \circ f = f^*(p) = 1_M$ olacak şekilde bir $p : N \longrightarrow M$ homomorfizması yani $p \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ elemanı vardır. Dolayısıyla Teorem 2.3.4'ten $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalanandır.

(3) $\Rightarrow$ (4) Teorem 2.11.5'ten D bölünebilir grup olmak üzere bir $f : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ monomorfizması vardır. $\sigma : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)/\text{Gör}(f)$ doğal epimorfizma olmak üzere

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)/\text{Gör}(f) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi parçalanandır. Teorem 2.3.4'den M sağ R-modülü, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ sağ R-modülünün bir dik toplam terimine izomorftur.

(4) $\Rightarrow$ (1) Teorem 2.11.4'ten $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ sağ R-modülü injektif modüldür. M sağ R-modülü, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ sağ R-modülünün bir dik toplam terimine izomorf olduğu için injektif modüldür. □

Lemma 2.11.7. *[11, Lemma 3.28] M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün injektif modül olması için gerek ve yeter koşul M sağ R-modülünün kendisinden başka büyük genişlemesi olmamasıdır.*

Kanıt. Kabul edelim ki M injektif sağ R-modül olsun. E sağ R-modülü M sağ R-modülünün $M \subsetneq E$ olacak şekilde bir büyük genişlemesi olsun. Teorem 2.11.6'dan

$E = M \oplus N$ olacak şekilde bir $N \neq 0$ alt modülü vardır. Bu durumda $N \cap M = 0$ olduğundan $M \subseteq E$ büyük genişleme değildir. O halde M sağ R-modülünün kendisinden başka büyük genişlemesi yoktur.

Tersine M sağ R-modülünün kendisinden başka büyük genişlemesi olmasın. Teorem 2.11.5'ten M sağ R-modülü bir I injektif sağ R-modülüne gömülebilir yani $f : M \longrightarrow I$ monomorfizması vardır. Zorn Lemma'dan $S \cap \text{Gör}(f) = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir $S \subseteq I$ alt modülü vardır. O zaman I/S faktör modülünde sıfırdan farklı herhangi bir S'/S alt modülü M sağ R-modülünün görüntüsüyle kesişmez. Yani $M \cong \text{Gör}(f) \cong (\text{Gör}(f) \oplus S)/S \trianglelefteq I/S$'dir. Kabulden $(\text{Gör}(f) \oplus S)/S = I/S$ olmalıdır. Bu $I = \text{Gör}(f) \oplus S$ olduğu anlamına gelir. Teorem 2.11.6'dan M injektif sağ R-modüldür. □

2.12 İnjektif Bürüm

Tanım 2.12.1. [4, s.99] R bir halka ve N bir sağ R-modül olsun. E injektif sağ R-modülüne $f : N \longrightarrow E$ büyük monomorfizmasıyla beraber N'nin *injektif bürümü* denir ve $E(N)$ ile gösterilir.

Ayrıca her modülün injektif bürümü vardır ve injektif bürüm izomorfizma farkıyla tektir.

Önerme 2.12.2. *[5, 18.12] R bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman aşağıdaki koşullar sağlanır:*

(1) M'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul $M = E(M)$ olmasıdır.

(2) Bir N sağ R-modülü için $M \trianglelefteq N$ ise $E(M) = E(N)$'dir.

(3) Her $\alpha \in A$ için M_α sağ R-modül olmak üzere $\bigoplus_{\alpha \in A} E(M_\alpha)$ sağ R-modülü injektif ise

$$E(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in A} E(M_\alpha)\text{'dır.}$$

Kanıt. (1) Tanım 2.12.1'den açıktır.

(2) $M \trianglelefteq N$ olsun. $N \trianglelefteq E(N)$ olduğu için [4, Teorem 9.1 (4)]'ten $M \trianglelefteq E(N)$'dir. O halde $E(N)$ injektif sağ R-modülü ve $M \longrightarrow E(N)$ içerme homomorfizması M sağ R-modülü için bir injektif bürümdür.

(3) $\bigoplus_{\alpha\in A} E(M_\alpha)$ sağ R-modülü injektif modül olsun. Her $\alpha \in A$ için $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow E(M_\alpha)$ monomorfizması düşünüldüğünde

$$f : \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in A} E(M_\alpha)$$

monomorfizması yazılabilir. Her bir $\alpha \in A$ için Gör$(f_\alpha) \trianglelefteq E(M_\alpha)$ olduğu için [4, Sonuç 9.3]'ten Gör$(f) \trianglelefteq \bigoplus_{\alpha\in A} E(M_\alpha)$'dır. $\square$

Önerme 2.12.3. *[12, Proposition 2.24] M bir sağ R-modül ve $0 \neq m \in M$ olsun. O zaman bir S basit sağ R-modülü ve $\phi : M \longrightarrow E(S)$ homomorfizması vardır öyle ki $\phi(m) \neq 0$'dır.*

Kanıt. m elemanı sıfırdan farklı olduğu için $ann_R(m) \neq M$'dir. Dolayısıyla R halkasının bir maksimal I ideali tarafından içerilir. Öyleyse her $r \in R$ için $\phi'(mr) = r + I$ ile tanımlanan $\phi' : mR \longrightarrow R/I$ dönüşümü iyi tanımlıdır ve homomorfizmadır. $S = R/I$ alınırsa I maksimal ideal olduğu için $R/I = S$ basit sağ R-modüldür. i_1 ve i_2 içerme dönüşümleri olmak üzere;

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & mR \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\phi'"'] & M \arrow[ddl, dashed, "\phi"] \\ & S = R/I \arrow[d, "i_2"'] & \\ & E(S) & \end{tikzcd}$$

diyagramı düşünüldüğünde $E(S)$ injektif sağ R-modül olduğu için $\phi(m) = \phi'(m) \neq 0$ olacak şekilde bir $\phi : M \longrightarrow E(S)$ homomorfizması vardır. $\square$

Teorem 2.12.4. *[12, Theorem 4.1] Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) R halkası Noether halkadır;

(2) İnjektif sağ R-modüllerin dik toplamı injektiftir;

(3) Basit sağ R-modüllerin injektif bürümlerinin dik toplamı injektiftir.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ R halkası Noether halka, $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ injektif sağ R-modüllerin bir ailesi ve $f : I \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$ bir homomorfizma olsun. R halkası Noether halka olduğu için Önerme 2.8.6'dan I ideali sonlu üretilmiştir. O halde sonlu bir $F \subseteq \Lambda$ indis kümesi için $f(I) \subseteq \bigoplus_{\alpha\in F} E_\alpha$'dır. $\bigoplus_{\alpha\in F} E_\alpha$ sağ R-modülü injektif modül olduğu için f homomorfizması $g|_I = f$ olacak şekilde bir $g : R \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$ homomorfizmasına genişletilebilir. Teorem 2.11.2'den $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$ sağ R-modülü injekif modüldür.

$(2) \Rightarrow (1)$ R halkasının ideallerinin artan bir dizisi

$$I_1 \leq I_2 \leq ...$$

ve $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ olsun. $a \in I$ ise sonlu tanesi hariç her $i \in \mathbb{N}$ için $a \in I_i$'dir. O halde $a \in I$ için $p_i(f(a)) = a + I_i$ ile tanımlanan

$$f : I \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(R/I_i)$$

homomorfizması vardır. Hipotezden $\bigoplus_{i=1}^{\infty} E(R/I_i)$ sağ R-modülü injektif modül olduğu için Lemma 2.13.10'dan her $a \in I$ için $f(a) = xa$ olacak şekilde bir $x \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(R/I_i)$ vardır. $k = 0, 1, ...$ olmak üzere $p_{n+k}(x) = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçilsin. O halde seçilen $n \in \mathbb{N}$ için

$$I/I_{n+k} = p_{n+k}(f(I)) = p_{n+k}(xI) = p_{n+k}(x)I = 0'\text{dır.}$$

Başka bir deyişle her $k = 0, 1, ...$ için $I_n = I_{n+k}$'dır. Yani

$$I_1 \leq I_2 \leq ...$$

artan dizisi seçilen n. adımda sabitlenir. O halde R halkası Noether halkadır.

$(2) \Rightarrow (3)$ Açıktır.

$(3) \Rightarrow (1)$ R halkasının sağ ideallerinden oluşan sabitlenmeyen artan bir dizi

$$I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n \subset ...$$

ve $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ olsun. I, R halkasının bir sağ idealidir ve her $k \in \mathbb{N}$ için $I/I_k \neq 0$'dir. Önerme 2.12.3'ten bir S_k basit sağ R-modülü ve $\alpha_k : I/I_k \longrightarrow E(S_k)$ homomorfizması vardır. $\sigma : I \longrightarrow I/I_k$ doğal epimorfizma olmak üzere $\alpha_k \circ \sigma = \phi_k : I \longrightarrow E(S_k)$ olsun. Her $r \in I$ ve $k = 1, 2, 3, ...$ olmak üzere $\phi(r) = (\phi_k(r))_{k=1}^{\infty}$ ile $\phi : I \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{\infty} E(S_k)$ dönüşümü tanımlansın ve $\bigoplus_{k=1}^{\infty} E(S_k) = N$ olsun. Herhangi $r \in I$ için bir k_0 vardır öyle ki her $k \geq k_0$ için $r \in I_k$'dir. O halde her $k \geq k_0$ için $\phi_k(r) = 0$'dır. ϕ iyi tanımlıdır ve bir homomorfizmadır. Hipotezden N injektif sağ R-modül olduğu için ϕ homomorfizması bir $\psi : R \longrightarrow N$ homomorfizmasına genişletilebilir. R sağ R-modül olarak devirli olduğu için bir $n \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\psi(R) \subseteq \bigoplus_{k=1}^{n} E(S_k)$'dir. O halde her $k > n$ için ϕ_k homomorfizması sıfır olur fakat bu bir çelişkidir. □

2.13 Bağıl İnjektif Modüller

Tanım 2.13.1. [13, s.1] M ve N sağ R-modüller olsun. N'nin her K alt modülü için herhangi bir $\varphi : K \longrightarrow M$ homomorfizması bir $\psi : N \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebiliyorsa M'ye N-*injektif modül* denir. Diğer bir deyişle, tam satırlı her

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\psi : N \longrightarrow M$ homomorfizmasıyla tamamlanabiliyorsa M sağ R-modülüne N-*injektif modül* denir.

Önerme 2.13.2. *[13, Proposition 1.3] M ve N birer sağ R-modül olsun. M, N-injektif ise N'nin her K alt modülü için M, hem K-injektiftir hem de N/K-injektiftir.*

Kanıt. $L \leq K$ ve $\varphi : L \longrightarrow M$ bir homomorfizma olsun. M sağ R-modülü N-injektif olduğu için φ homomorfizması bir $\psi : N \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebilir. ψ homomorfizmasının K alt modülüne kısıtlanışı olan $\psi|_K$ homomorfizması düşünüldüğünde her $n \in L$ için $\psi|_K(n) = \psi(n) = \varphi(n)$ olduğu için M sağ R-modülü K-injektiftir.

$X/K \leq N/K$ ve $\varphi : X/K \longrightarrow M$ bir homomorfizma olsun. $\sigma : N \longrightarrow N/K$ ve $\sigma' : X \longrightarrow X/K$ doğal epimorfizmaları belirtsin. M sağ R-modülü N-injektif olduğu için $\varphi \circ \sigma'$ homomorfizması bir $\theta : N \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebilir. $\theta(K) = \varphi(\sigma'(K)) = \varphi(0) = 0$'dır. Dolayısıyla Çek$(\sigma) \leq$ Çek(θ)'dir. Sonuç olarak $\psi \circ \sigma = \theta$ olacak şekilde bir $\psi : N/K \longrightarrow M$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\sigma'"'] & N \arrow[d, "\sigma"] \arrow[ddl, dashed, "\theta"] \\
X/K \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & N/K \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

Her $x \in X$ için $\psi(x + K) = \psi(\sigma(x)) = \theta(x) = \varphi(\sigma'(x)) = \varphi(x)$'dir. Böylece φ homomorfizması bir ψ homomorfizmasına genişletilebilir. Yani M sağ R-modülü N/K-injektiftir. $\square$

Önerme 2.13.3. *[13, Proposition 1.4] Bir M sağ R-modülünün N-injektif modül olması için gerek ve yeter koşul her $n \in N$ için M'nin nR-injektif modül olmasıdır.*

Kanıt. Önerme 2.13.2'den M sağ R-modülü N-injektif modül ise her $n \in N$ için nR-injektiftir.

Tersine M sağ R-modülü her $n \in N$ için nR-injektif olsun. $X \leq N$ ve $\varphi : X \longrightarrow M$ bir homomorfizma olsun. $S = \{(L, \psi) \mid X \leq L \leq N, \psi : L \longrightarrow M$ homomorfizma ve $\psi|_X = \varphi\ \}$ şeklinde tanımlanan S kümesi $(X, \varphi) \in S$ olduğu için boştan farklıdır. S'de aşağıdaki gibi bir bağıntı tanımlayalım:

$$(L, \psi) \preceq (L', \psi') \Leftrightarrow L \leq L' \text{ ve } \psi'|_L = \psi.$$

S kümesi bu bağıntıya göre kısmi sıralı bir kümedir. $\Gamma = \{(L_i, \psi_i)\}_{i\in I}$ kümesi S'de bir zincir olsun. $T = \bigcup_{i\in I} L_i$ alınsın. $x \in T$ ise bir $(L_i, \psi_i) \in \Gamma$ için $x \in L_i$'dir. $\psi : T \longrightarrow M$ fonksiyonu $\psi(x) = \psi_i(x)$ olarak tanımlansın. Başka bir $(L_j, \psi_j) \in \Gamma$ için $x \in L_j$ ise Γ iyi sıralı olduğundan ya $(L_i, \psi_i) \preceq (L_j, \psi_j)$ ya da $(L_j, \psi_j) \preceq (L_i, \psi_i)$'dir. $(L_i, \psi_i) \preceq (L_j, \psi_j)$ olsun. Bu durumda $\psi_j|_L = \psi_i$ olduğundan $\psi_j(x) = \psi_i(x)$ elde edilir. Diğer durumda da benzer şekilde $\psi_j(x) = \psi_i(x)$ elde edilir. Dolayısıyla ψ iyi tanımlıdır. ψ'nin bir homomorfizma olduğu ve $\psi|_X = \varphi$ olduğu açıktır. Ayrıca $(T, \psi) \in S$ ve her $(L_i, \psi_i) \in \Gamma$ için $(L_i, \psi_i) \preceq (T, \psi)$'dir. Yani (T, ψ) ikilisi Γ için bir üst sınırdır. Zorn Lemma'dan S kümesinde bir maksimal eleman vardır. Bu eleman (L, ψ) ikilisi olsun. $L \neq N$ olsun. O halde bir $n \in N \backslash L$ elemanı vardır. $K = \{r \in R \mid nr \in L\}$ olsun. (L, ψ)'nin maksimal oluşundan $L \trianglelefteq N$ seçilebilir. O halde $nK \neq 0$'dır. $k \in K$ olmak üzere $\mu(nk) = \psi(nk)$ olarak tanımlanan $\mu : nK \longrightarrow M$ homomorfizması bir $\upsilon : nR \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebilir. $\chi : L + nR \longrightarrow M$ homomorfizması $l \in L$ olmak üzere $\chi(l + nr) = \psi(l) + \upsilon(nr)$ ile tanımlansın. $l + nr = 0$ ise $r \in K$ olacağı için $\chi(l+nr) = \psi(l)+\upsilon(nr) = \psi(l)+\mu(nr) = \psi(l)+\psi(nr) = \psi(l+nr)$'dir. Dolayısıyla χ iyi tanımlıdır. Fakat bu durum (L, ψ) ikilisinin maksimal oluşu ile çelişir. Buradan $L = N$'dir ve $\varphi : X \longrightarrow M$ homomorfizması $\psi : T \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebilir. M sağ R-modülü N-injektif modüldür. □

Önerme 2.13.4. *[13, Proposition 1.5] Bir M sağ R-modülünün $(\bigoplus_{i\in I} N_i)$-injektif modül olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için M'nin N_i-injektif modül olmasıdır.*

Kanıt. Her $i \in I$ için M sağ R-modülü N_i-injektif modül olsun. $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$, $X \leq N$ ve $\varphi : X \longrightarrow M$ bir homomorfizma olsun. Lemma 2.1.7'den N sağ R-modülünün $X \subset X'$ olacak şekildeki X' alt modülü için $\varphi : X \longrightarrow M$ homomorfizmasının bir $X' \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişletilemediğini kabul edelim. O halde $X \trianglelefteq N$ dir. İddiamız $X = N$ olduğudur. Bunu göstermek için tersini kabul edelim yani $X \neq N$ olsun. O zaman $n \notin X$ olmak üzere $j \in I$ için $n \in N_j$ vardır. M sağ R-modülü N_j-injektif modül olduğundan Önerme 2.13.2'den nR-injektiftir. Önerme 2.13.3'e benzer şekilde $\varphi : X \longrightarrow M$ homomorfizması bir $\psi : X + nR \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebilir. Bu durum

$\varphi : X \longrightarrow M$ homomorfizmasının maksimal oluşuyla çelişir. O halde $X = N$ olmalıdır. Buradan M sağ R-modülü N-injektif modüldür. Tersi Önerme 2.13.2'den açıktır. $\square$

Önerme 2.13.5. *[13, Proposition 1.6] Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α bir sağ R-modül olmak üzere, $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ sağ R-modülünün N-injektif modül olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in \Lambda$ için M_α sağ R-modülünün N-injektif modül olmasıdır.*

Kanıt. $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ sağ R-modülü N-injektif modül ve $M = \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ olsun. O halde $X \leq N$ alt modülü için $\varphi : X \longrightarrow M$ homomorfizması $\psi : N \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebilir. Ayrıca $p_\alpha : M \longrightarrow M_\alpha$ projeksiyon olmak üzere $\theta = p_\alpha \circ \varphi$ olarak alınan $\theta : X \longrightarrow M_\alpha$ homomorfizması $\theta' = p_\alpha \circ \psi$ olarak alınan $\theta' : N \longrightarrow M_\alpha$ homomorfizmasına genişletilebilir. Başka bir deyişle aşağıdaki diyagram değişmeli olur.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[dl, dashed, "\psi"] \arrow[ddl, dashed, "\theta' = p_\alpha\psi"] \\
& M \arrow[d, "p_\alpha"'] & \\
& M_\alpha &
\end{tikzcd}$$

Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α sağ R-modülü N-injektif modüldür. Tersi $i_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$ homomorfizması düşünülerek benzer şekilde yapılabilir. $\square$

Sonuç 2.13.6. *F sonlu bir indis kümesi olmak üzere, $\{M_\alpha\}_{\alpha\in F}$ sağ R-modüllerin bir ailesi ve N bir sağ R-modül olsun. $\bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$ N-injektif modüldür ancak ve ancak her $\alpha \in F$ için M_α N-injektif modüldür.*

Teorem 2.13.7. *[13, Theorem 1.7] $\{M_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ sağ R-modüllerin bir ailesi olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ bir N-injektif modüldür;

(2) Her sayılabilir $I \subseteq \Lambda$ alt kümesi için $\bigoplus_{i\in I} M_i$ bir N-injektif modüldür;

(3) Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α bir N-injektif modüldür ve herhangi bir $a \in N$ ve $m_i \in M_{\alpha_i}$ olmak üzere $\bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{ann}_R(m_i) \geq \operatorname{ann}_R(a)$ koşulunu sağlayan farklı $\alpha_i \in \Lambda$ değerleri için $\left\{\bigcap_{i \geq n} \operatorname{ann}_R(m_i) : (n \in \mathbb{N})\right\}$ artan dizisi sabitlenir.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ dik toplamı N-injektif modül ise Önerme 2.13.5'ten her $\alpha \in \Lambda$ için M_α sağ R-modülü N-injektif modüldür. Yine Önerme 2.13.5'ten herhangi $I \subseteq \Lambda$ için $\bigoplus_{i\in I} M_i$ dik toplamı N-injektif modüldür.

$(2) \Rightarrow (3)$ Önerme 2.13.5'ten her $\alpha \in \Lambda$ için M_α sağ R-modülü N-injektif modüldür. $x = (m_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} M_{\alpha_i}$ elemanını göz önünde bulundurursak $\varphi : ar \longrightarrow xr$ dönüşümü aR'den $\prod_{i=1}^{\infty} M_{\alpha_i}$'ye iyi tanımlı bir homomorfizmadır. $I = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{i\geq n} \operatorname{ann}_R(m_i))$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $\bar{\varphi} = \varphi|_{aI}$ olsun. O zaman $\bar{\varphi} : aI \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_{\alpha_i}$ bir homomorfizmadır. $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_{\alpha_i}$ sağ R-modülü N-injektif modül olduğu için Önerme 2.13.3'ten aR-injektif modüldür. O halde $\bar{\varphi}$, $\psi : aR \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_{\alpha_i}$ homomorfizmasına genişletilebilir. $F \subseteq \mathbb{N}$ sonlu alt kümesi için

$$xI = \bar{\varphi}(aI) = \psi(aI) \leq \psi(aR) = \psi(a)R \leq \bigoplus_{i\in F} M_{\alpha_i}$$

olur. $F = \{1, 2, 3, ..., k-1\}$ olsun. Buna göre her $i \geq k$ için $m_i I = 0$ olacağından $I = \bigcap_{i\geq k} \operatorname{ann}_R(m_i)$ olur. Bu nedenle $\bigcap_{i\geq n} \operatorname{ann}_R(m_i)$ artan dizisi k. terimde sabitlenir.

$(3) \Rightarrow (1)$ $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ modülünün N-injektif modül olmadığını kabul edelim. Önerme 2.13.3'ten bir $a \in N$ için $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ sağ R-modülü aR-injektif modül değildir. O halde R halkasının bir K sağ ideali vardır öyle ki $f : aK \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ homomorfizması $aR \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ homomorfizmasına genişletilemez. Önerme 2.13.5'ten tüm sonlu $F \subseteq \Lambda$ alt kümeleri için $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ modülü N-injektif modüldür. Bu yüzden herhangi sonlu $F \subseteq \Lambda$ alt kümesi için $f(aK) \nleq \bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$'dir. Ancak $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ modülü N-injektif olduğundan $f : aK \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ homomorfizması bir $g : aR \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ homomorfizmasına genişletilebilir. Şimdi $m = g(a)$ olsun. m_α, $m \in \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$'nin α. bileşeni olmak üzere $\operatorname{ann}_R(a) \leq \operatorname{ann}_R(m) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \operatorname{ann}_R(m_\alpha)$ olduğu açıktır. $k \in K$ olmak üzere $S_k = \{\alpha \in \Lambda \mid m_\alpha k \neq 0\}$ olsun. O halde her $k \in K$ için S_k, Λ'nın sonlu bir alt kümesidir. Fakat herhangi sonlu $F \subseteq \Lambda$ için $mK = f(aK) \nleq \bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$ olduğundan

$I = \bigcup_{k\in K} S_k$ sonlu değildir. Tümevarımla $\alpha_j \in S_{k_j}$ ve $\alpha_j \notin \bigcup_{i=1}^{j-1} S_{k_i}$ olacak şekilde bir $k_i \in K$ $(i \in \mathbb{N})$ ve $\alpha_j \in \Lambda$ seçilebilir. m_i, m'nin α_i. bileşeni olsun. O zaman $\mathrm{ann}_R(a) \leq \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{ann}_R(m_i)$'dir ve $\bigcap_{i\geq n} \mathrm{ann}_R(m_i)$ artan dizisi sabitlenmez. Bu ise kabul ile çelişir. $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ N-injektiftir. □

Sonuç 2.13.8. *[13, Corollary 1.8] $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$ modülünün N-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $i \in \mathbb{N}$ için M_i sağ R-modülünün N-injektif modül olması ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{ann}_R(m_i) \geq \mathrm{ann}_R(a)$ koşulunu sağlayan her $a \in N$ ile her $m_i \in M_i$ seçimi için $\bigcap_{i\geq n} \mathrm{ann}_R(m_i)$ $(n \in \mathbb{N})$ artan dizisinin sabitlenmesidir.*

Teorem 2.13.9. *[13, Theorem 1.11] N bir sağ R-modül olsun. N-injektif modüllerin dik toplamlarının N-injektif modül olması için gerek ve yeter koşul N sağ R-modülünün her devirli alt modülünün Noether modül olmasıdır.*

Kanıt. Her $x \in N$ için xR Noether modül ve M_α sağ R-modülleri N-injektif modüller olmak üzere $M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ olsun. $B \leq xR$ ve $\varphi : B \longrightarrow M$ homomorfizma olsun. B alt modülü sonlu üretilmiş olduğundan sonlu bir $F \subseteq \Lambda$ alt kümesi için $\varphi(B) \leq \bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$ olur. $\bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$ sağ R-modülü N-injektif modül olduğu için $\varphi : B \longrightarrow M$ homomorfizması $\psi : xR \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$ homomorfizmasına genişletilebilir. O halde $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ dik toplamı xR-injektif modüldür. Önerme 2.13.3'ten M sağ R-modülü N-injektif modüldür.

Tersine N-injektif modüllerin dik toplamının N-injektif olduğu kabul edilsin. $x \in N$ olmak üzere xR devirli alt modülünün Noether modül olduğunu göstermek için $\mathrm{ann}_R(x) = \{r \in R \mid xr = 0\}$ olmak üzere

$$\mathrm{ann}_R(x) = B_0 \leq B_1 \leq B_2 \leq ...$$

artan dizisi alınsın. $M_i = E(R/B_i)$ $i \in \mathbb{N}$ olsun. Her bir M_i sağ R-modülü N-injektif modül olduğu için kabulden $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$ sağ R-modülü N-injektif modüldür. $\{m_i = 1 + B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ kümesi göz önünde bulundurulursa bir $n \in \mathbb{N}$ için Sonuç 2.13.8'den $\bigcap_{i\geq n} \mathrm{ann}_R(m_i)$ artan dizisi sabitlenir. Aynı zamanda

$$\mathrm{ann}_R(m_i) = \{s \in R \mid (s + B_i)m_i = 0\}$$

$$= \{s \in R \mid (s + B_i)(1 + B_i) = 0\}$$

$$= \{s \in R \mid s + B_i = 0\}$$

olduğu için $\mathrm{ann}_R(m_i) = B_i$'dir. Bu durumda

$$B_n = \mathrm{ann}_R(m_n) = \bigcap_{i \geq n} \mathrm{ann}_R(m_i)$$

olur.

$$B_1 \leq B_2 \leq ...$$

dizisi sabitlenir. O halde xR Noether modüldür. □

Lemma 2.13.10. *[5, The Injective Test Lemma 18.3] Bir M sağ R-modülü için aşağıdaki koşullar denktir.*

(1) M injektif sağ R-modüldür;

(2) M sağ R-modülü R-injektif modüldür;

(3) R halkasının her $I \leq R_R$ ideali için ve her $h : I \longrightarrow M$ homomorfizması için bir $x \in M$ vardır öyle ki h, x ile soldan çarpma homomorfizmasıdır. Başka bir deyişle her $a \in I$ için $h(a) = xa$'dır.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ Açıktır.

$(2) \Rightarrow (1)$ R_R üreteç olduğu için açıktır.

$(2) \Rightarrow (3)$ M sağ R-modülü R-injektif, $I \leq R_R$ ve $h : I \longrightarrow M$ bir homomorfizma olsun. M sağ R-modülü R-injektif olduğu için bir $h^{'}|_I = h$ olacak şekilde bir $h^{'} : R \longrightarrow M$ homomorfizması vardır. $x = h^{'}(1)$ olsun. O halde her $a \in I$ için $h(a) = h^{'}(a) = h^{'}(1)a = xa$ olur.

$(3) \Rightarrow (2)$ $I \leq R_R$, $x \in M$ ve her $a \in I$ için $h(a) = xa$ olsun. O zaman $\rho : R \longrightarrow M$, x ile soldan çarpma homomorfizması h homomorfizmasının genişlemesidir. M sağ R-modülü R-injektiftir. □

Tanım 2.13.11. [10, 17.8] R bir halka, M bir sağ R-modül ve N, $\sigma[M]$'de bir modül olsun. E, M-injektif sağ R-modülüne $f : N \longrightarrow E$ büyük monomorfizmasıyla beraber N'nin *$\sigma[M]$'deki injektif bürümü* veya *M-injektif bürümü* denir. $E_M(N)$ ile gösterilir.

Bu iki tanımdan çıkarılabileceği gibi N sağ R-modülünün injektif bürümü $E(N)$, N sağ R-modülünün $\sigma[R] = \mathrm{Mod}\text{-}R$'daki injektif bürümüdür yani $E(N) = E_R(N)$'dir.

2.14 Yarı Artin Halkalar ve Modüller

Tanım 2.14.1. [14], [15, Definition and Proposition 7.32A] R bir halka olsun. Bütün basit sağ R-modüller injektif ise R halkasına *sağ V-halka* denir.

Tanım 2.14.2. [16, s.27] R bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. Her basit sağ R-modül M-injektif ise M sağ R-modülüne *V-modül* denir.

Tanım 2.14.3. [8, s.182] M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün sıfırdan farklı her faktörünün büyük temeli varsa M sağ R-modülüne *yarı Artin* modül denir. Bir R halkası sağ R-modül olarak yarı Artin modül ise *sağ yarı Artin halka* ismini alır.

Örnek 2.14.1. *[17, s.589] D bir cisim ve U_D, D üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı olsun. $T = End(U_D)$, $K = \mathrm{Soc}(T)$ ve R, T'nin K tarafından üretilmiş althalkası ise R sağ yarı Artindir.*

Önerme 2.14.4. *[8, Chapter 8 Proposition 2.5] Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) R halkası sağ yarı Artindir.

(2) Her sağ R-modül yarı Artin modüldür.

(3) Sıfırdan farklı her sağ R-modülün sıfırdan farklı temeli vardır.

(4) Her sağ R-modül, temelinin büyük genişlemesidir.

Önerme 2.14.5. *[8, Chapter 8 Proposition 2.1] M bir sağ R-modül olsun. M yarı Artin ve Noether modül ise sonlu kompozisyon uzunluğuna sahiptir.*

Kanıt. M Noether ve yarı Artin sağ R-modül olsun. M sağ R-modülü yarı Artin olduğu için bir basit alt modülü S_0 vardır. Yine M sağ R-modülü yarı Artin olduğu için M/S_0 sağ R-modülü bir basit modül S_1/S_0 içerir. Bu durumda S_0, S_1 sağ R-modülünün maksimal alt modülüdür. Bu şekilde her bir $i \in \mathbb{N}$ için M/S_i sağ R-modülünün basit bir alt modül içermesini kullanarak elde edilen

$$0 < S_0 < S_1 < S_2 < ... < S_i < ...$$

artan dizisi M sağ R-modülü Noether olduğu için bir k. adımda sabitlenir. Eğer $M \neq S_k$ olsaydı M/S_k basit bir S_{k+1}/S_k modülünü içerirdi fakat bu durum yukarıdaki artan dizinin k. adımda sabitlenmesi ile çelişir. O halde $M = S_k$ olmalıdır. Her $i \in \mathbb{N}$ için S_{i+1}/S_i basit olduğu için M sağ R-modülü sonlu kompozisyon uzunluğuna sahiptir. □

3. KARARLI İNJEKTİFLİK BÖLGELERİ

López-Permouth ve Saraç [3], bir halkanın ne ölçüde Noether olduğunu ölçmek için ilk kez kullanılan bakış açısıyla modüllerin injektiflik bölgelerinden ve injektif profilinden yararlanmıştır. Bu fikir aslında ne zaman bir yoksul (poor) sağ R-modül P'yi herhangi bir sağ R-modül M'ye eklersek ekleyelim $P \oplus M$'nin yine yoksul kalacağı yani R halkasının injektif profilini injektif portföylerin katman bulutları şeklinde düşünürsek bir yoksul modülün katman bulutunun bir R halkasının injektif profilindeki yerinin her zaman sabit kalacağı gerçeğinden doğmuştur. Diğer taraftan bir R halkasının injektif profiline en tepeden baktığımızda profildeki portföyleri katmanlar olarak düşünürsek eğer katman bulutları çok kırılgandır. O halde şu soruyu sormak oldukça doğaldır: bir R halkasının injektif profilinin ortalarında bir yerde bu portföyün altında kalan her şeyin kararlı hale geldiği bir injektif portföyü var mıdır? Bu sorunun cevabı López-Permouth ve Saraç tarafından evet olarak cevaplanmış ve bu injektif portföye *Noether eşik* denmiştir (bkz. [3]). Noether eşik bir R halkasının injektif profili içindeki kararlı ve kararsız injektif portföyleri birbirinden ayırır. Tezin bu bölümünde kararlı injektiflik bölgeleri ve Noether eşik kavramları sunulmuştur. Noether eşiğin bir portföy olduğu ve hangi modülün injektiflik bölgesi olduğu verilmiştir.

3.1 İnjektiflik Bölgeleri

Tanım 3.1.1. [3, s.1470] Bir sağ R-modül M için $\mathcal{I}n^{-1}(M) = \{N \in \mathrm{Mod}-R \mid M$ sağ R-modülü N-injektif$\}$ sınıfı M sağ R-modülünün *injektiflik bölgesi* olarak isimlendirilir.

Önerme 3.1.2. *[3, s.1470] M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün injektiflik bölgesi $\mathcal{I}n^{-1}(M)$ bir kalıtsal önburulma sınıfıdır.*

Kanıt. $\mathcal{I}n^{-1}(M)$, Önerme 2.13.2'den alt modüller ve faktör modüller altında kapalıdır. Son olarak Önerme 2.13.4'ten dik toplam altında kapalıdır. □

Tanım 3.1.3. [1, s.7] Bir M sağ R-modülü için $\mathcal{I}n^{-1}(M) = \mathrm{SSMod}-R$ ise M sağ R-modülüne *yoksul modül* denir.

Önerme 3.1.4. *[18, Proposition 1] Her R halkası için bir yoksul R-modül vardır.*

Kanıt. R herhangi bir halka ve $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ yarıbasit olmayan devirli sağ R-modüllerin temsil sınıfı olsun. Her $\gamma \in \Gamma$ için A_γ yarıbasit olmadığı için kendisinden farklı büyük alt modül K_γ seçilebilir. Şimdi $T = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma$ olsun. B yarıbasit olmayan devirli sağ R-modül ve T sağ R-modülü B-injektif modül olsun. O zaman bir $\gamma \in \Gamma$ elemanı vardır öyle ki $B \cong A_\gamma$'dir. Böylece B modülünün K_γ'ya izomorf olan kendisinden farklı bir büyük alt modülü N vardır. O zaman N alt modülü B-injektif olur ki bu bir çelişkidir. O halde T yoksul modüldür. □

Lemma 3.1.5. *[19] M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün yoksul modül olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{I}n^{-1}(M)$ sınıfındaki her devirli modülün yarıbasit olmasıdır.*

Kanıt. M sağ R-modülü yoksul modül ise Tanım 3.1.3'ten $\mathcal{I}n^{-1}(M)$ sınıfındaki tüm modüller yarıbasittir. Dolayısıyla devirli modüller de yarıbasit olur.

Tersine $N \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$ ve her $n \in N$ için nR yarıbasit olsun. $N = \sum_{n\in N} nR$ ve yarıbasit modüllerin toplamı yarıbasit olduğundan N yarıbasittir. M sağ R-modülü yoksul modüldür.

□

Önerme 3.1.6. *[1, Proposition 3.1] R bir halka olsun. O zaman*

$$\bigcap_{M\in \mathrm{Mod}-R} \mathcal{I}n^{-1}(M) = \mathrm{SSMod}-R'dir.$$

Kanıt. S bir yarıbasit sağ R-modül olsun. Teorem 2.5.3'ten S sağ R-modülünün her alt modülü S sağ R-modülünde bir dik toplam terimidir. Bu yüzden her $K \leq S$ ve $f : K \longrightarrow S$ monomorfizması için Teorem 2.3.4'ten $e \circ f = 1_K$ olacak şekilde bir $e : S \longrightarrow K$ homomorfizması vardır. M bir sağ R-modül, $f : K \longrightarrow S$ monomorfizma ve $g : K \longrightarrow M$ homomorfizma olsun. O halde $h : S \longrightarrow M$ homomorfizması $g \circ e = h$ olarak alınırsa $h \circ f = g \circ e \circ f = g \circ 1_K = g$ olur. M sağ R-modülü S-injektif modüldür.

Tersine $N \in \bigcap_{M\in Mod-R} \mathcal{I}n^{-1}(M)$ alındığında tüm sağ R-modüller N-injektif olur. $T \leq N$ için T alt modülü N-injektif modüldür. O halde $f : T \longrightarrow N$ monomorfizması ve 1_T :

$T \longrightarrow T$ homomorfizması için $h \circ f = 1_T$ olacak şekilde bir $h : N \longrightarrow T$ homomorfizması vardır. O zaman f homomorfizması kesittir. T alt modülü N sağ R-modülünün bir dik toplam terimidir. Teorem 2.5.3'ten N sağ R-modülü yarıbasit modüldür. □

Lemma 3.1.7. *R bir halka ve her $i \in \mathbb{N}$ için M_i bir sağ R-modül olsun. O halde*

$$\mathcal{I}n^{-1}(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{I}n^{-1}(M_i)'\textit{dir.}$$

Kanıt. $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \prod_{i=1}^{n} M_i$ olduğundan Önerme 2.13.5'ten kolayca elde edilir. □

3.2 Bir Halkanın İnjektif Profili

Tanım 3.2.1. [3, s.1470] $\mathcal{A}$ sağ R-modüllerin bir sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{I}n^{-1}(M) = \mathcal{A}$ olacak şekilde bir M sağ R-modülü varsa $\mathcal{A}$ sınıfına *portföy* ya da *injektif portföy* denir.

Tanım 3.2.2. [3, s.1470] Sağ R-modüller kategorisindeki tüm portföylerin sınıfına R halkasının *sağ profili* ya da R halkasının *sağ injektif profili* denir ve $i\mathcal{P}(R)$ ile gösterilir.

Lemma 3.2.3. *[20, Lemma 2.2] R bir halka olsun. $\mathcal{X} \leq i\mathcal{P}(R)$ ise $\bigcap \mathcal{X}$ bir portföydür.*

Kanıt. Her $\mathcal{A} \in \mathcal{X}$ için $\mathcal{A} = \mathcal{I}n^{-1}(M_{\mathcal{A}})$ olsun. Her sağ R-modül için Önerme 2.13.5 sağlandığından $\mathcal{I}n^{-1}(\prod_{\mathcal{A}\in\mathcal{X}} M_{\mathcal{A}}) = \bigcap \mathcal{X}$ olur. □

3.3 Kararlı İnjektiflik Bölgeleri

Tanım 3.3.1. [3, s.1471]

(1) $\mathcal{A}$ bir portföy olsun. İnjektiflik bölgesi $\mathcal{A}$ olan tüm sağ R-modüllerin dik toplamlarının injektiflik bölgesi de $\mathcal{A}$ ise $\mathcal{A}$ portföyüne *kararlı portföy* denir.

(2) N bir sağ R-modül olsun. N-injektif modüllerin ailesinin herhangi dik toplamı N-injektif ise N sağ R-modülüne *kararlı modül* denir.

Lemma 3.3.2. *[3, Lemma 2.1] $\mathcal{A}$ bir portföy olsun. $M \in \text{Mod-}R$ için $\mathcal{A} = \sigma[M]$ kabul edelim. Aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) $\mathcal{A}$ kararlıdır;

(2) M kararlıdır;

(3) $\mathcal{A}$ portföyünün her elemanı kararlıdır.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ $\mathcal{A}$ kararlı bir portföy olsun. $\mathcal{A}$ portföy olduğu için bir L sağ R-modülü için $\mathcal{I}n^{-1}(L) = \mathcal{A}$'dır. $\{M_i\}_{i\in I}$ her $i \in I$ için M-injektif sağ R-modüllerin bir ailesi olsun. O halde her $i \in I$ için $\mathcal{A} = \sigma[M] \subseteq \mathcal{I}n^{-1}(M_i)$'dir. Lemma 3.1.7'den

$$\mathcal{I}n^{-1}(L \oplus M_i) = \mathcal{I}n^{-1}(L) \cap \mathcal{I}n^{-1}(M_i) = \mathcal{A}$$

elde edilir. $\mathcal{A}$ kararlı portföy olduğundan

$$\mathcal{I}n^{-1}(\bigoplus_{i\in I}(L \oplus M_i)) = \mathcal{A}$$

olur. Diğer taraftan yine $\mathcal{A}$ portföyü kararlı olduğu için $\mathcal{I}n^{-1}(L^{(I)}) = \mathcal{A}$'dır. Ayrıca

$$\bigoplus_{i\in I}(L \oplus M_i) \cong L^{(I)} \oplus (\bigoplus_{i\in I} M_i)$$

olduğu için

$$\mathcal{A} = \mathcal{I}n^{-1}(\bigoplus_{i\in I}(L \oplus M_i)) = \mathcal{I}n^{-1}(L^{(I)}) \cap \mathcal{I}n^{-1}(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \mathcal{A} \cap \mathcal{I}n^{-1}(\bigoplus_{i\in I} M_i)$$

olur. Buradan $M \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}n^{-1}(\bigoplus_{i\in I} M_i)$ sonucunu elde edilir.

$(2) \Rightarrow (3)$ M kararlı bir sağ R-modül olsun. Teorem 2.13.9'dan bir modül kararlı ise alt modülleri de kararlıdır. Aynı zamanda M sağ R-modülünün bir bölüm modülünün devirli alt modülleri, M sağ R-modülünün devirli alt modüllerinin homomorfik görüntüsü olduğu için yine Teorem 2.13.9'dan kararlılık homomorfik görüntü altında korunur. O halde sadece dik toplam altında korunduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\{M_i\}_{i\in I}$ kararlı sağ R-modüllerin bir ailesi olsun. Dik toplam sonlu karaktere sahip olduğundan I indis kümesi sonlu alınabilir. $I = \{1, 2, ..., n\}$ olsun. $\bigoplus_{i\in I} M_i$ sağ R-modülünün $c = (m_1, m_2, ..., m_n)$ tarafından üretilen bir devirli alt modülü C olsun. $m_1R \oplus m_2R \oplus ... \oplus m_nR$ sağ R-modülünün alt modülü olduğundan C Noether sağ R-modüldür ve Teorem 2.13.9'den her m_iR Noetherdir. O halde $\sigma[M]$'nin tüm elemanları kararlıdır.

$(3) \Rightarrow (1)$ $\mathcal{A}$ portföyünün tüm elemanları kararlı olsun. Özel olarak M sağ R-modülü de kararlıdır. $\{M_i\}_{i\in I}$ injektiflik bölgesi $\mathcal{A}$ olan sağ R-modüllerin bir ailesi olsun. M sağ R-modülü kararlı modül olduğu için $\bigoplus_{i\in I} M_i$ sağ R-modülü M-injektif modüldür. O halde

$$\mathcal{A} = \sigma[M] \subseteq \mathcal{I}n^{-1}(\bigoplus_{i\in I} M_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathcal{I}n^{-1}(M_i) = \mathcal{A}$$

olur. O halde $\mathcal{A}$ portföyü kararlıdır. $\square$

Tanım 3.3.3. [3, s.1472] Devirli alt modülleri Noether olan bir modüle *yerel Noether modül* denir.

Tanım 3.3.4. [3, s.1473] Tüm yerel Noether sağ R-modüllerin sınıfı R halkasının *sağ Noether eşiği* olarak adlandırılır. Bu sınıf $\mathcal{N}$ ile gösterilsin. $\mathcal{N}$ bir Wisbauer sınıfıdır. Yani R halkasının sağ Noether eşiği aşağıdaki sınıftır:

$$\mathcal{N} = \{N \in \text{Mod-}R \mid N\text{'nin her devirli alt modülü Noether modüldür}\}.$$

Alternatif olarak Teorem 2.13.9'dan $\mathcal{N}$ sınıfının tüm kararlı sağ R-modüllerden oluştuğu söylenebilir. Yani

$$\mathcal{N} = \{N \in \text{Mod-}R \mid N \text{ kararlı sağ } R\text{-modül}\}$$

olarak da yazılabilir.

Uyarı 3.3.5. [3, s.1473] Bir R halkasının Noether eşiği, $\mathcal{N}$, bir kalıtsal önburulma sınıfıdır, $\mathrm{SSMod}\text{-}R \subseteq \mathcal{N}$'dir ve dolayısıyla $\mathcal{N}$ bir portföydür.

Teorem 3.3.6. *[3, Theorem 2.2] R herhangi bir halka olsun.*

(1) Sağ R-modüllerin herhangi bir ailesi $\{M_i\}_{i\in I}$ için

$$\mathcal{N} \cap \bigcap_{i\in I} \mathcal{I}n^{-1}(M_i) \subseteq \mathcal{I}n^{-1}(\bigoplus_{i\in I} M_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathcal{I}n^{-1}(M_i)$$

(2) Bir portföyün kararlı portföy olması için gerek ve yeter koşul Noether eşik tarafından içerilmesidir.

Kanıt. (1) $N \in \mathcal{N} \cap \bigcap_{i\in I} \mathcal{I}n^{-1}(M_i)$ olsun. N sağ R-modülünün her devirli alt modülü Noether modül olduğundan N sağ R-modülü kararlı modüldür. Aynı zamanda her $i \in I$ için M_i sağ R-modülü N-injektif modül olduğundan $\bigoplus_{i\in I} M_i$ sağ R-modülü N-injektif modüldür.

(2) Bir $\mathcal{A}$ portföyü kararlı ise Lemma 3.3.2'den tüm elemanları kararlıdır. O halde $\mathcal{N}$ sınıfı tarafından içerilir. Tersine $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ ise tüm elemanlar kararlıdır. O halde $\mathcal{A}$ portföyü kararlı portföydür. $\square$

Önerme 3.3.7. *[21, Proposition 1.2] $\mathcal{W}$ sağ R-modüllerin bir sınıfı ve M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) $\mathcal{W}$ sınıfındaki her eleman M-injektiftir ve M sağ R-modülünün her N alt modülü için $L_\alpha \leq M$ olmak üzere $N = \bigcap L_\alpha$'dır öyle ki M/L_α sağ R-modülü $\mathcal{W}$ sınıfındaki bir elemana gömülebilir.

(2) $\mathcal{W}$ sınıfındaki her eleman M-injektiftir ve her $m \in M$ ve $H \leq mR$ için $\mathrm{Hom}_R(mR/H, L) \neq 0$ olacak şekilde bir $L \in \mathcal{W}$ vardır.

(3) M sağ R-modülünün her N alt modülü için $L_\alpha \leq M$ olmak üzere $N = \bigcap L_\alpha$'dır öyle ki M/L_α sağ R-modülü $\mathcal{W}$ sınıfındaki bir elemana gömülebilir ve her $m \in M$

ve herhangi $N \leq mR$ için $L \in \mathcal{W}$ olan $f : N \longrightarrow L$ homomorfizmasının mR sağ R-modülüne genişlemesi vardır.

Önerme 3.3.8. *[21, Proposition 1.3] $\mathcal{W}$ sağ R-modüllerin bir sınıfı ve M sonlu üretilmiş bir sağ R-modül olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) M sağ R-modülü Noether modüldür, $\mathcal{W}$ sınıfındaki her eleman M-injektiftir ve M sağ R-modülünün her N alt modülü için $L_\alpha \leq M$ olmak üzere $N = \bigcap L_\alpha$'dır öyle ki M/L_α sağ R-modülü $\mathcal{W}$ sınıfındaki bir elemana gömülebilir.

(2) $\sigma[\mathcal{W}]$ sınıfındaki tüm elemanlar M-injektiftir ve M sağ R-modülünün her N alt modülü için $L_\alpha \leq M$ olmak üzere $N = \bigcap L_\alpha$'dır öyle ki M/L_α sağ R-modülü $\sigma[\mathcal{W}]$ sınıfındaki bir elemana gömülebilir.

(3) Sayılabilir çokluktaki $W_i \in \mathcal{W}$ elemanlarının her dik toplamı M-injektiftir ve M sağ R-modülünün her N alt modülü için $L_\alpha \leq M$ olmak üzere $N = \bigcap L_\alpha$'dır öyle ki M/L_α sağ R-modülü $\mathcal{W}$ sınıfındaki bir elemana gömülebilir.

Önerme 3.3.9. *[3, Proposition 2.7] R herhangi bir halka, $\mathcal{W}$ sağ R-modüllerin bir sınıfı ve M bir sağ R-modül olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın.*

(1) $\mathcal{W}$ sınıfının tüm elemanları M-injektif modüldür.

(2) M sağ R-modülünün her devirli alt faktörü C için $\mathrm{Hom}_R(C, D) \neq 0$ olacak şekilde bir $D \in \mathcal{W}$ vardır.

O zaman M sağ R-modülünün kararlı olması için gerek ve yeter koşul sayılabilir çokluktaki $W_i \in \mathcal{W}$ elemanlarının dik toplamlarının M-injektif olmasıdır.

Kanıt. Önerme 3.3.7 ve Önerme 3.3.8'den elde edilir. □

Teorem 3.3.10. *[3, Theorem 2.8] M bir sağ R-modül olsun. O halde aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) M sağ R-modülü kararlı modüldür;

(2) M sağ R-modülünün sayılabilir çokluktaki basit alt faktörleri olan $S_1, S_2, ...$ için $\bigoplus_{i=1}^{\infty} E_M(S_i)$ sağ R-modülü M-injektif modüldür.

(2$'$) Her A indis kümesi için $(\alpha \in A)$ S_α, M sağ R-modülünün basit alt faktörü olmak üzere $\bigoplus_{\alpha \in A} E_M(S_\alpha)$ sağ R-modülü M-injektif modüldür.

(3) M sağ R-modülünün sayılabilir çokluktaki basit alt faktörleri $S_1, S_2, ...$ için $\bigoplus_{i=1}^{\infty} E(S_i)$ sağ R-modülü M-injektif modüldür.

(3$'$) Her A indis kümesi için $(\alpha \in A)$ S_α, M sağ R-modülünün basit alt faktörü olmak üzere $\bigoplus_{\alpha \in A} E(S_\alpha)$ sağ R-modülü M-injektif modüldür.

(4) $S_1, S_2, ...$ sayılabilir çoklukta basit sağ R-modüller olmak üzere, $\bigoplus_{i=1}^{\infty} E(S_i)$ sağ R-modülü M-injektif modüldür.

(4$'$) Her basit sağ R-modül S_α $(\alpha \in A)$ için $\bigoplus_{\alpha \in A} E(S_\alpha)$ sağ R-modülü M-injektif modüldür.

Kanıt. $\{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, $\sigma[M]$'deki basit modüllerin temsil kümesi olsun ve $\{S_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ tüm basit sağ R-modüllerin temsil kümesi olsun. Bir $\mathcal{W}$ sınıfını $\{E(S_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, $\{E_M(S_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ veya $\{E(S_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ alıp Önerme 3.3.9 uygulanırsa $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$ sağlanır. $(2) \Leftrightarrow (2)'$, $(3) \Leftrightarrow (3)'$ ve $(4) \Leftrightarrow (4)'$ denklikleri Teorem 2.13.7 kullanılarak elde edilir. □

Sonuç 3.3.11. *[3, Corollary 2.9] R bir halka ve $\{S_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ basit sağ R-modüller sınıfının temsil kümesi olsun. $Q = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} E(S_\gamma)$ olmak üzere $\mathcal{N} = \mathcal{I}n^{-1}(Q^{(\mathbb{N})})$'dir.*

4. UÇUCU HALKALAR

López-Permouth ve Saraç tarafından injektif modüllerin kararlı olmasının diğer tüm modüllerin kararlı olmasını gerektirdiği durum karakterize edilmiştir. Diğer taraftan injektif profilde injektif portföyü kararlı olan modüllerin sadece yoksul modüller olduğu halkalar da düşünülmüş bu halkalara da *uçucu* halkalar denmiştir (bkz. [3]). Bu bölümde uçucu halka kavramı, bazı karakterizasyonları ve örnekleri verilmiştir.

4.1 Uçucu Halkalar

Teorem 4.1.1. *[3, Theorem 3.1] R bir halka olsun.*

(1) R halkasının sağ Noether halka olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{N} = \mathrm{Mod}\text{-}R$ olmasıdır.

(2) R halkasının sağ Noether halka olması için gerek ve yeter koşul her portföyün kararlı olmasıdır.

Kanıt. (1) R sağ Noether halka olsun. Tanım 3.3.4'ten $\mathcal{N}$ her devirli alt modülü Noether modül olan sağ R-modüllerden oluşur. Önerme 2.8.12'den her devirli sağ R-modül Noether modüldür. Dolayısıyla $\mathcal{N} = \mathrm{Mod}\text{-}R$'dir. Tersine $\mathcal{N} = \mathrm{Mod}\text{-}R$ ise her sağ R-modül yerel Noetherdir. Dolayısıyla Önerme 2.8.12'den R halkası sağ Noether halkadır.

(2) R bir sağ Noether halka, $\mathcal{A}$ bir portföy ve her $\alpha \in \Lambda$ için M_α bir sağ R-modül olmak üzere $\mathcal{I}n^{-1}(M_\alpha) = \mathcal{A}$ olsun. $M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ ise her $\alpha \in \Lambda$ ve her $N \in \mathcal{A}$ için M_α sağ R-modülü N-injektiftir. R sağ Noether halka olduğu için Teorem 2.13.9'dan her $N \in \mathcal{A}$ için M sağ R-modülü N-injektiftir. $\mathcal{I}n^{-1}(M) = \mathcal{A}$'dır. $\mathcal{A}$ portföyü kararlı portföydür. Tersine bir R halkasının injektif profilindeki her $\mathcal{A}$ portföyü kararlı ise injektif sağ R-modüllerin dik toplamı injektiftir. O zaman Teorem 2.12.4'den R halkası sağ Noether halkadır. □

Tanım 4.1.2. [3, s.1477] R bir halka olsun. R halkasının injektif profilindeki tek kararlı portföy yarıbasit sağ R-modüller sınıfı $\mathrm{SSMod}\text{-}R$ ise R halkasına *sağ uçucu halka* denir.

Teorem 4.1.3. *[3, Theorem 3.2] Bir R halkasının sağ uçucu halka olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{N} = \mathrm{SSMod}\text{-}R$ olmasıdır.*

Önerme 4.1.4. *[3, Proposition 3.6] R halkası sağ yarı Artin halka olsun. O zaman R halkasının sağ uçucu halka olması için gerek ve yeter koşul sağ V-halka olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ R sağ uçucu halka ve S basit bir sağ R-modül olsun. S sağ R-modülü injektif olmasın. O halde $E(S) \neq S$'dir. Dolayısıyla $E(S)/S$ sıfırdan farklıdır. R yarı Artin halka olduğu için $E(S)/S$ sağ R-modülü basit bir alt modül içermelidir. U/S, $E(S)/S$ sağ R-modülü tarafından içerilen basit alt modül olsun. O halde $S \subset U$ olacak şekilde kompozisyon uzunluğu 2 olan bir tekserili U sağ R-modülü vardır. Fakat U sağ R-modülü yarıbasit değildir. Bu durum R halkasının sağ uçucu halka olmasıyla çelişir çünkü $U \in \mathcal{N}$'dir. O halde $E(S) = S$'dir. Yani S injektif sağ R-modüldür.
$(\Leftarrow)$ Tersi Örnek 4.2.1 ile verilmiştir. □

Tanım 4.1.5. [18, Definition 1][22, s.110] M bir sağ R-modül olsun. Eğer her $N \leq M$ için $\mathrm{Soc}(M/N)$, M/N sağ R-modülünün bir dik toplam terimi ise M sağ R-modülüne *ufalanan* modül denir.

Tanım 4.1.6. [10, 13.4] $\mathcal{U}$ sağ R-modüllerin bir sınıfı ve M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün

$$Tr(\mathcal{U}, M) = \sum \{\text{Gör}(h) \mid h \in \mathrm{Hom}(U, M), U \in \mathcal{U}\}$$

alt modülü M sağ R-modülünün $\mathcal{U}$ sınıfındaki *izi* olarak isimlendirilir.

Tanım 4.1.7. [11, s.84] M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün sıfırdan farklı herhangi iki alt modülünün arakesiti sıfırdan farklı ise (denk olarak sıfırdan farklı alt modülleri parçalanamaz ise veya sıfırdan farklı alt modülleri büyük alt modül ise) M sağ R-modülüne *düzgün modül* denir.

Tanım 4.1.8. [11, Definition 6.2] M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün n tane düzgün alt modülün dik toplamı şeklinde yazılabilen bir büyük alt modülü V varsa n sayısına

M sağ R-modülüne n *düzgün boyutlu* veya *Goldie boyutlu* denir. Düzgün boyut (Goldie boyut) $u.dimM$ ile gösterilir. Diğer taraftan böyle bir n sayısı yoksa $u.dimM = \infty$'dir.

Uyarı 4.1.9. [18, Remark 1] B ufalanan devirli sağ R-modül olsun. O zaman B sağ R-modülünün her faktörü sonlu düzgün boyuta sahiptir. Aksi taktirde B'nin bir faktörü $B^{'}$ bir I sonsuz indis kümesi için sıfırdan farklı A_i devirli alt modüllerinin dik toplamı $\bigoplus_{i \in I} A_i$'yi içerir. Her A_i sağ R-modülünde bir T_i maksimal alt modülü alırsak ve $T = \bigoplus_{i \in I} T_i$ ile gösterirsek, B'/T'nin temeli $\mathrm{Soc}(B^{'}/T)$ sonsuz olur ki bu bu durumda bu temel $B^{'}/T$ sağ R-modülünün dik toplam terimi olamaz. Bu bir çelişkidir.

Tanım 4.1.10. [10, s.351] M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün her öz alt modülü küçük alt modül ise M sağ R-modülüne *oyuk modül* denir.

Tanım 4.1.11. [10, s.351] M bir sağ R-modül olsun. Eğer M'nin yalnız bir tek maksimal alt modülü, yani diğer tüm öz alt modülleri içeren bir öz alt modülü, varsa M'ye bir *yerel modül* denir.

Teorem 4.1.12. *[18, Theorem 1] Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) Bir yoksul yarıbasit sağ R-modül vardır.

(2) Ufalanan her devirli sağ R-modül yarıbasittir.

(3) Ufalanan her sağ R-modül yarıbasittir.

(4) Her Noether fakat Artin olmayan devirli sağ R-modül, radikalinin temeli sıfırdan farklı bir faktöre sahiptir.

(5) Her Noether fakat Artin olmayan sağ R-modül, radikali sıfırdan farklı bir faktöre sahiptir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) S yoksul yarıbasit bir sağ R-modül olsun. Ufalanan, devirli yarıbasit olmayan bir B sağ R-modülü var olsun. S sağ R-modülü yoksul olduğu için B sağ R-modülünün $E(S)$'deki izi $Tr(B, E(S))$, S tarafından içerilmez. Bu B sağ R-modülünün $E(S)$'de S tarafından içerilmeyen bir homomorfik görüntüsü olduğu anlamına gelir. O zaman B'nin temeli büyük olan ve yarıbasit olmayan bir faktörü vardır. Bu durum kabul ile çelişir.

$(2) \Rightarrow (3)$ Ufalanan modüllerin devirli alt modülleri de ufalanan olduğu için açıktır.

$(2) \Rightarrow (4)$ Ufalanan her devirli sağ R-modül yarıbasit olsun. N Noether fakat Artin olmayan devirli bir sağ R-modül olsun. O halde N yarıbasit değildir. Kabulden N'nin temeli parçalanmayan bir B faktörü vardır. $\mathrm{Soc}(B)$ sonlu üretilmiş olduğundan B sağ R-modülü B'de dik toplam terimi olmayan V'nin bir basit alt modülünü içerir. Çünkü aksi takdirde B'nin tüm basit alt modülleri dik toplam terimi olurdu ve B'den her seferde bir basit modülü ayırarak $\mathrm{Soc}(B)$, B'den $\mathrm{Soc}(B)$'nin kompozisyon serisi uzunluğu kadar adımda ayrılabilirdi. O zaman bir çelişki elde edilirdi. Şimdi $V \subseteq \mathrm{Rad}(B)$'dir. Aksi takdirde B, V'yi içermeyen bir maksimal alt modül M'ye sahip olurdu ve bu $B = M \oplus V$ olduğu anlamına gelirdi. Bu ise yukarıdaki argümanla çelişirdi. O halde $\mathrm{Soc}(\mathrm{Rad}(B)) \neq 0$'dır.

$(4) \Rightarrow (5)$ Açıktır.

$(5) \Rightarrow (2)$ Kabul edelim ki B ufalanan, yarıbasit olmayan devirli bir sağ R-modül olsun. O halde Uyarı 4.1.9'dan B'nin her faktörü sonlu düzgün boyuta sahiptir. Bu durumda B sağ R-modülü basit temele sahip, yerel olmayan, oyuk ve düzgün bir alt faktöre sahip olamaz. O halde [23, Proposition 1]'den B sağ R-modülü Noether modüldür fakat yarıbasit olmadığı için Artin modül değildir. Şimdi B'nin bir C faktörünün radikalinin sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Bu durumda $\mathrm{Rad}(C)$, sıfırdan farklı devirli bir D sağ R-modülünü ve bu modülün maksimal alt modülü E'yi içerir. Ayrıca $D \ll C$'dir. Ufalanan tanımı gereği D/E, C/E'nin dik toplam terimidir. Ancak bu durum $D/E \ll C/E$ olması ile çelişir.

$(2) \Rightarrow (1)$ Her ufalanan devirli sağ R-modül yarıbasit olsun. Γ, basit sağ R-modüllerin izomorfizma sınıflarının tam temsil kümesi ve $S = \bigoplus_{B \in \Gamma} B^{(R)}$ olsun. S sağ R-modülünün yoksul modül olduğu gösterilmelidir. Öncelikle Γ sınıfının ve S sağ R-modülünün seçimi gereği, herhangi bir devirli sağ R-modülün temeli S sağ R-modülüne gömülebilir. A yarıbasit olmayan devirli bir sağ R-modül ve S sağ R-modülü A-injektif olsun. Hipotezden A sağ R-modülünün L/C gibi bir yarıbasit alt faktörü vardır ve L/C sağ R-modülü

A/C sağ R-modülünde parçalanmaz. Lemma 2.1.7'den A/C sağ R-modülünün $L//C \cap K/C \neq 0$ olacak şekilde bir K/C maksimal alt modülü vardır. Varsayım gereği $(L/C \oplus K/C)/K/C \trianglelefteq A/C/K/C$'dir. O halde A/C sağ R-modülünün L/C sağ R-modülüne izomorf büyük temeli vardır. S sağ R-modülü A-injektif olduğu için Önerme 2.13.2'den A/K-injektiftir. Bu nedenle $\mathrm{Soc}(A/K) \longrightarrow S$ monomorfizması $f : A/K \longrightarrow S$ homomorfizmasına genişletilebilir. Burada f monomorfizmadır. Fakat bu durum bir çelişkidir çünkü $f(A/K)$ yarıbasit değildir. O zaman S yoksuldur. $\square$

Sonuç 4.1.13. *[18, Corollary 2] Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) Yoksul yarıbasit sağ R-modül vardır.

(2) Yerel Noether sağ V-modüller sadece yarıbasit sağ R-modüllerdir.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ M yerel Noether sağ V-modül ve N, M sağ R-modülünün bir faktörü olsun. O halde [24, 2.5]'ten $\mathrm{Soc}(N)$ M-injektiftir. Önerme 2.13.2'den $\mathrm{Soc}(N)$ N-injektiftir böylece $\mathrm{Soc}(N)$, N'nin bir dik toplam terimidir. O halde M sağ R-modülü ufalanandır. Teorem 4.1.12'den istenen sağlanır.

$(2) \Rightarrow (1)$ M ufalanan devirli sağ R-modül olsun. O zaman Teorem 4.1.12 $(5) \Rightarrow (2)$'den M Noether sağ R-modüldür. S basit bir sağ R-modül, $A \leq M$ ve $f : A \longrightarrow S$ sıfırdan farklı bir homomorfizma olsun. O halde M sağ R-modülü ufalanan olduğu için $M/\text{Çek}(f) = A/\text{Çek}(f) \oplus B$ olacak şekilde bir $B \leq M/\text{Çek}(f)$ vardır. O halde $M \longrightarrow M/\text{Çek}(f)$, $M/\text{Çek}(f) \longrightarrow A/\text{Çek}(f)$ ve $A/\text{Çek}(f) \longrightarrow S$ kanonik dönüşümlerinin bileşkesi $f : A \longrightarrow S$ homomorfizmasını $M \longrightarrow S$ homomorfizmasına genişletir. Dolayısıyla her basit sağ R-modül M-injektiftir. O zaman hipotez gereği M sağ R-modülü yarıbasittir. Teorem 4.1.12'den yoksul yarıbasit sağ R-modül vardır. $\square$

Önerme 4.1.14. *[3, Proposition 3.8] R herhangi bir halka olsun. R halkasının sağ uçucu halka olması için gerek ve yeter koşul yoksul yarıbasit bir sağ R-modülün var olması ve her kararlı sağ R-modülün V-modül olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Bu kısım Sonuç 4.1.13'ten açıktır.

$(\Leftarrow)$ Bir yoksul yarıbasit sağ R-modül var ve her kararlı sağ R-modül V-modül olsun. Kabul edelim ki R halkasının Noether eşiği $\mathcal{N}$'de yarıbasit olmayan bir N sağ R-modülü bulunsun. O zaman Sonuç 4.1.13 (2)'den N, V-modül olamaz. Bu durum hipotez ile çelişir çünkü hipotez gereği her kararlı sağ R-modülün V-modül olması gerekir. Sonuç olarak R sağ uçucu halkadır. □

Sonuç 4.1.15. *[3, Corollary 3.9] Bir R halkası sağ V-halka olsun. R halkasının sağ uçucu halka olması için gerek ve yeter koşul yoksul yarıbasit bir sağ R-modülün var olmasıdır.*

Önerme 4.1.16. *[3, Proposition 3.10] R bir halka ve $\{S_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ basit sağ R-modüllerin temsil kümesi olsun. $Q = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} E(S_\gamma)$ ise aşağıdaki koşullar sağlanır:*

(1) R halkası sağ Noether halkadır ancak ve ancak $Q^{(\mathbb{N})}$ injektif modüldür.

(2) R halkası sağ uçucu halkadır ancak ve ancak $Q^{(\mathbb{N})}$ yoksul modüldür.

Kanıt. (1) Teorem 2.12.4'ten R halkasının Noether halka olması için gerek ve yeter koşul basit sağ R-modüllerin injektif bürümlerinin dik toplamının injektif olmasıdır. O halde R halkası Noether halka ise Q injektif modüldür. $Q^{(\mathbb{N})} = Q \oplus Q \oplus ...$ olduğu için $Q^{(\mathbb{N})}$ injektiftir. Yine Teorem 2.12.4'ten tersi de doğrudur.

(2) R halkası sağ uçucu halka ise $\mathcal{N} = \mathrm{SSMod}\text{-}R$'dir. Sonuç 3.3.11'den $\mathcal{I}n^{-1}(Q^{(\mathbb{N})}) = \mathcal{N}$'dir. Yani $Q^{(\mathbb{N})}$ modülünün injektiflik bölgesi $\mathrm{SSMod}\text{-}R$ olur. Dolayısıyla $Q^{(\mathbb{N})}$ bir yoksul modüldür. Tersine $Q^{(\mathbb{N})}$ modülü yoksul ise injektiflik bölgesi $\mathrm{SSMod}\text{-}R$'dir. Sonuç 3.3.11'den $\mathcal{I}n^{-1}(Q^{(\mathbb{N})}) = \mathcal{N}$ olduğu için $\mathcal{N} = \mathrm{SSMod}\text{-}R$'dir. Yani R halkası sağ uçucu halkadır. □

Sonuç 4.1.17. *[3, Proposition 3.11] Bir R halkasının sağ uçucu halka olması için gerek ve yeter koşul $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ şeklinde injektif sağ R-modüllerin dik toplamı olan bir yoksul sağ R-modülün var olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ R halkası sağ uçucu halka ise Önerme 4.1.16 (2)'den injektif sağ R-modüller dik toplamı şeklinde bir yoksul sağ R-modül vardır.

($\Leftarrow$) Diğer taraftan her $\gamma \in \Gamma$ için E_γ injektif sağ R-modül olmak üzere $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ sağ R-modülü bir yoksul modül olsun. Yani $\mathcal{I}n^{-1}(\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma) = \mathrm{SSMod}\text{-}R$ olsun. Her $\gamma \in \Gamma$ için E_γ injektif sağ R-modül olduğu için $\mathcal{I}n^{-1}(E_\gamma) = \mathrm{Mod}\text{-}R$'dir. Dolayısıyla $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{I}n^{-1}(E_\gamma) = \mathrm{Mod}\text{-}R$ olur. Teorem 3.3.6'dan $\mathcal{N} \cap \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{I}n^{-1}(E_\gamma) = \mathrm{SSMod}\text{-}R$ elde edilir. O halde $\mathcal{N} = \mathrm{SSMod}\text{-}R$ olmalıdır. Buradan R halkası bir sağ uçucu halkadır. □

4.2 Örnekler

Örnek 4.2.1. *[3, Example 3.5] R halkası sağ yarı Artin, sağ V-halka olsun. O halde R halkası sağ uçucu halkadır.*

Kanıt. M yerel Noether sağ R-modül ve C, M sağ R-modülünün bir devirli alt modülü olsun. R halkası sağ yarı Artin halka olduğu için Önerme 2.14.4'dan $\mathrm{Soc}(C) \trianglelefteq C$'dir. M yerel Noether sağ R-modül olduğu için C devirli alt modülü Noether modüldür. Böylelikle $\mathrm{Soc}(C)$ Noetherdir ve Önerme 2.14.5'ten sonlu kompozisyon uzunluğuna sahiptir dolayısıyla sonlu sayıda basit modülün toplamıdır. R halkası V-halka olduğu için tüm basit sağ R-modüller injektiftir. Yani $\mathrm{Soc}(C)$ sonlu sayıda injektif modülün toplamı ve dolayısıyla injektiftir. Lemma 2.11.7'den $\mathrm{Soc}(C) = C$ olmalıdır. O halde C yarıbasit modüldür. O halde M sağ R-modülünün her devirli alt modülü yarıbasittir ve böylece M yarıbasittir. □

Örnek 4.2.2. *[3, Example 3.4] Bir X topolojik uzayı üzerindeki reel değerli sürekli fonksiyonlar halkası $C(X)$ bir uçucu halkadır.*

Kanıt. $C(X)$ halkasının kendisinden farklı bir I ideali için $C(X)/I$ Noether ise $C(X)/I$ yarıbasittir ifadesinin doğruluğunun gösterilmesi yeterli olacaktır. O halde $C(X)$ halkasının kendisinden farklı bir I ideali için $C(X)/I$ Noether olsun. Q/I, $C(X)/I$ bölüm halkasının $\sqrt{Q/I} = P/I$ olacak şekilde bir asıl ideali olsun. Eğer P ideali $C(X)$ halkasının maksimal ideali değilse [25, 14.8 ve 14.12]'den $C(X)/P$ bölüm halkası zincir formunda sonsuz sayıda asal ideal içerir. Fakat bu $C(X)/P$ bölüm halkasının Noether olması ile çelişir. O halde P ideali $C(X)$ halkasının bir maksimal idealidir ve [26, Corollary 2.6]'dan $Q = P$'dir. I ideali

$C(X)$ halkasının sonlu tane asıl idealinin arakesiti olarak yazılabildiğinden, I kendisini içeren sonlu tane maksimal idealin arakesitidir. O halde $C(X)/I$ yarıbasittir. $\square$

Örnek 4.2.3. *[3, Example 3.3]* Γ, $[0,\infty)$ *aralığının reel sayıların bilinen sıralaması ile iyi sıralı alt kümelerinin sınıfı olsun.* S *bir halka ve* X*,* S *halkasının elemanları ile çarpma altında değişmeli bir değişken olsun.* $a_\gamma \in S$ *ve* $G \in \Gamma$ *için*

$$\sum_{\gamma \in G} a_\gamma X^\gamma$$

formundaki formal kuvvet serilerinden oluşan R *doğal toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır. Detaylı bilgi için [27] kaynağına bakılabilir.*

(1) Yukarıdaki gibi tanımlanan R *halkası için* F *bir cisim olmak üzere* $S = F$ *alınırsa* R *halkası bir uçucu halkadır.*

(2) Yukarıdaki gibi tanımlanan R *halkası için* $S = \mathbb{Z}$ *alınırsa* R *halkası ne Noether ne de uçucu halkadır.*

Tanım 4.2.1. [28, Definition 1.1] S bir halka ve A, S halkasının bir sağ ideali olsun. O zaman

$$\mathbb{I}_S(A) = \{x \in S \mid xA \subseteq A\}$$

alt halkasına A idealinin S halkasındaki *idealleştiricisi* denir.

Örnek 4.2.4. *[28, Definition 1.1]* $S = M_2(\mathbb{Z})$ $A = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ *olsun. O zaman* A*,* S *halkasının sağ ideali* B *ise sol idealidir. Bu durumda*

$$\mathbb{I}(A) = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} = \mathbb{I}(B)'dir.$$

Tanım 4.2.2. [28, Definition 2.1 ve 2.2] S bir halka ve A, S halkasının bir sağ ideali olsun. T, $A \subset T \subseteq \mathbb{I}(A)$ olacak şekilde bir alt halka ise T alt halkasına A idealinin *alt idealleştiricisi* denir. O zaman $1_S \in T$ ve A, T halkasının idealidir. $SA = S$ ise A idealine *üretken ideal* denir. Örneğin S basit halka ise sıfırdan farklı her sağ ideali üretkendir.

Tanım 4.2.3. [28, Definition 3.1] S bir halka ve A, S halkasının bir sağ ideali olsun. Eğer S/A sağ S-modül olarak yarıbasit (zorunlu olarak sonlu uzunlukta) ise A *yarımaksimal ideal* oalrak adlandırılır. Dahası eğer U basit sağ S-modülü ve $n \geq 1$ için $S/A \cong U^{(n)}$ ise A idealine *U tipli izomaksimal ideal* denir.

Tanım 4.2.4. [28, Definition 4.1] S bir halka olsun. A, S halkasının U tipli izomaksimal üretken sağ ideali ise $R = \mathbb{I}_S(A)$, *U tipli temel idealleştirici* olarak isimlendirilir.

Teorem 4.2.5. *[28, Theorem 4.4] $R = \mathbb{I}_S(A)$, $S/A = U^{(n)}$ olan U tipli temel idealleştirici olsun. O zaman U sağ R-modül olarak uzunluğu 2 olan bir tekserili modüldür.*

Aşağıdaki örnekte, S bir sağ uçucu halka iken R halkasının ne sağ uçucu ne de sağ Noether olduğu bir $R \subset S$ sonlu halka genişlemesi verilmiştir.

Örnek 4.2.5. *[3, Example 3.7] S yarıbasit Artin olmayan, yarı Artin, V-halka ve A, S halkasının $SA = S$ koşulunu sağlayan bir sağ ideali olsun. S/A bir basit sağ S-modüldür. $R = \mathbb{I}_S(A)$, A idealinin S halkasındaki idealleştiricisi olsun. $U = S/A$ ile gösterelim. O zaman Teorem 4.2.5'ten U sağ R-modülü uzunluğu 2 olan tekserili bir modüldür. O halde R halkası uçucu halka değildir. Ayrıca Sonuç 2.8.11'den S halkası Noether halka değildir. O halde [28, Theorem 4.19]'dan R halkası da Noether halka değildir.*

5. SONUÇ

Modül Teorisindeki yeni bir eğilim, bir özelliğin yalnızca tam olarak ne zaman karşılandığını değil, aynı zamanda belirli bir modülün o özelliği tam olarak karşılamıyorsa ne ölçüde karşıladığını ölçebilen mekanizmalar geliştirerek modüllerin özelliklerinin incelenmesini genişletir. Bu yaklaşım, yalnızca özelliği karşılayan modülleri değil, aynı zamanda kısmen veya hatta minimum düzeyde sağlayan modülleri de dikkate almaya izin verir. Son yıllarda bir modülün injektifliğini ölçmek için artan bir ilgi gören bir fikir olan injektiflik bölgesi kavramı ortaya çıkmıştır. Bir modülün injektiflik bölgesi, belirli bir modülün injektiflik derecesini ölçmek için tek mekanizma olmasa da iyi bir mekanizmadır. Bu mekanizmada modüller için ölçüm aracı portföylerdir. Son zamanlarda yapılan çalışmalar bir halkanın injektif profilinin o halkanın özelliklerini anlamaya çalışırken dikkate alınması gereken ilginç bir yapı olduğu gerçeğine ışık tutmuştur. Profil teorisi çeşitlilik içinde büyümektedir. Bu tür çalışmalar bir halka üzerindeki çeşitli modüllerin injektiflik derecesini ölçen bir yapı oluşturmayı amaçlayan bir makale olan [1] ile başlamış ve başlangıcından bu yana çeşitli yönlerde genişletilmiştir. López-Permouth ve Saraç [3], literatüre ilk kez kullanılan farklı bir bakış açısıyla katkı sağlamayı hedeflemişlerdir. Bir halkanın Noether olmasının belirli modüllerin injektifliği tarafından belirlendiği bilinmektedir. López-Permouth ve Saraç [3], bu ölçünün mutlak olmadığını, bunun yerine, bu belirli modüllerin injektiflik bölgelerinin bir halkanın ne ölçüde Noether olduğunu ölçmeye hizmet ettiğini göstermişlerdir.

Bu tezde [3] makalesinde ele alınan kararlı injektiflik bölgeleri ve uçucu halkalar kavramları incelenmiştir. Öncelikle sonuç ve örneklerin anlaşılmasını sağlayacak kapsamlı bir ön bilgiler bölümü hazırlanmış ve sonra bu kavramlar hakkında elde edilen sonuçlar ve örnekler derlenerek profil teorisi üzerine çalışmak isteyen tüm araştırmacılar için Türkçe bir referans kaynağı sunulmaya çalışılmıştır. Burada ele alınan kavramların, kullanılan yaklaşım ve yöntemlerin yeni araştırmalara yön vereceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] A. N. Alahmadi, M. Alkan, and S. R. López-Permouth. Poor modules: the opposite of injectivity. *Glasgow Mathematical Journal Trust*, pages 7–17, **2010**.

[2] C. Faith and E. A. Walker. Direct-sum representations of injective modules. *Transactions of the American Mathematical Society*, 103 (3):509–535, **1962**.

[3] S. R. López-Permouth and B.Saraç. On the extent of the injectivity of direct sums of modules. *Quaestiones Mathematicae*, 184:1469–1480, **2022**.

[4] R. Alizade and A. Pancar. *Homoloji Cebire Giriş*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, **1999**.

[5] F. W. Anderson and K. R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*. Springer-Verlag, **1992**.

[6] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, **1979**.

[7] E. Matlis. Injective modules over noetherian rings. *Pacific Journal of Mathematics*, pages 511–528, **1958**.

[8] B. Stenström. *Rings of Quotients An Introduction to Methods of Ring Theory*. Springer-Verlag, **1975**.

[9] R. Y. Sharp. *Steps in Commutative Algebra*. London Mathematical Society Student Texts 51. Cambridge University Press, **2000**.

[10] R. Wisbauer. *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach Science Publisher, **1991**.

[11] T. Y. Lam. *Lectures on Modules and Rings*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, **1999**.

[12] D. W. Sharpe and P. Vamos. *Injective Modules*. Cambridge University Press, **1972**.

[13] S. Mohammad and B. Muller. *Continuous and Discrete Modules*. Cambridge University Press, **1990**.

[14] G. O. Michler and O. E. Villamayor. On rings whose simple modules are lnjective. *Journal of Algebra*, 25:185–201, **1973**.

[15] C. Faith. *Algebra: Rings, Modules and Categories I.* Springer, **1973**.

[16] N. V. Dung and P. F. Smith. On semi-artinian v-modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, pages 27–37, **1992**.

[17] G. Baccella. Semiartinian v-rings and semiartinian von neumann regular rings. *Journal of Algebra*, pages 587–612, **1995**.

[18] N. Er, S. R. López-Permouth, and N. Sökmez. Rings whose modules have maximal or minimal injectivity domains. *Journal of Algebra*, pages 404–417, **2011**.

[19] A. N. Alahmadi, M. Alkan, and S. López-Permouth. Poor modules: The opposite of injectivity. *Glasgow Math. J.*, 52A:7–17, **2010**.

[20] S. R. López-Permouth and J. E. Simental. Characterizing rings in term of the extent of the injectivity and projectivity of their modules. *Journal of Algebra*, pages 56–69, **2012**.

[21] S. S. Page and M. F. Yousif. Relative injectivity and chain conditions. *Communications in Algebra*, pages 899–924, **1989**.

[22] R. Alizade, Y. M. Demirci, B. N. Türkmen, and E. Türkmen. On rings with one middle class of injectivity domains. *Mathematical Communications*, pages 109–126, **2022**.

[23] N. Er. Some remarks on a question of faith. In *Rings, Modules and Representations*, volume 480, pages 133–137. **2009**.

[24] N. V. Dung, D. V. Hunynh, P. F. Smith, and R. Wisbauer. *Extending Modules*. Pitman Research Notes Mathematics Series 313. Longman Scientific and Technical, **1994**.

[25] L. Gillman and M. Jerison. *Rings of Continuous Functions*. The University Series in Higher Mathematics. D. Van Nostrand Company, **1960**.

[26] M. A. Mulero. Algebraic properties of rings of continuous functions. *Fundamenta Mathematicae*, pages 55–66, **1996**.

[27] B. H. Neumann. On ordered division rings. *American Mathematical Society*, 66:202–252, **1949**.

[28] L. S. Levy and J. C. Robson. *Hereditary Noetherian Prime Rings and Idealizers*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, **2011**.