T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BETA KESİRLİ TÜREV İÇEREN BAZI MATEMATİKSEL MODELLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SENA ALAKUŞ

DENİZLİ, OCAK - 2025

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BETA KESİRLİ TÜREV İÇEREN BAZI MATEMATİKSEL MODELLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SENA ALAKUŞ

DENİZLİ, OCAK - 2025

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

SENA ALAKUŞ

ÖZET

BETA KESİRLİ TÜREV İÇEREN BAZI MATEMATİKSEL MODELLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
SENA ALAKUŞ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR., ALİ KURT)

DENİZLİ, OCAK - 2025

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kesirli türev kavramı, gelişimi, kesirli türev ile ilişkili bazı özel fonksiyonlar, çeşitli kesirli türev tanımları ve bu türev kavramı ile ilgili literatürde yer alan çalışmalara değinilmiştir.

İkinci bölümde, Beta kesirli türev içeren bazı matematiksel modellerin analitik çözümlerini bulmak için önemli rol oynayan homojen denge prensibi açık bir şekilde ifade edilmiş ve Modifiye Kudryashov yöntemi ele alınmıştır.

Üçüncü bölüm tezin orijinal kısmını içermektedir. Dört farklı beta kesirli mertebeden denklemden ilki Chafee-Infante ve diğerleri Geophysical KdV, Sığ su dalgası, Gilson–Pickering denklemleridir. Burada denklemlerin tam çözümleri Modifiye Kudryashov yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve elde edilen çözümlerin üç boyutlu grafiklerine her çözümün altında yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Beta türev, Kesirli kısmi türevli diferansiyel denklem, Analitik çözüm

ABSTRACT

ANALYTICAL SOLUTIONS OF SOME MATHEMATICAL MODELS INVOLVING THE BETA FRACTIONAL DERIVATIVE
MSC THESIS
SENA ALAKUŞ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS
(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR., ALİ KURT)

DENİZLİ, JANUARY 2025

This thesis study consists of four chapters. In the first chapter, the concept of fractional derivative, its development, some special functions related to fractional derivative, various definitions of fractional derivative, and the studies in the literature regarding this derivative concept are mentioned.

In the second part, the principle of homogeneous balance technique, which plays an important role in finding analytical solutions of some mathematical models containing Beta fractional derivatives, is clearly expressed, and the Modified Kudryashov method is discussed.

The third part contains the original part of the thesis. The first of the four different beta fractional order equations is Chafee-Infante and the others are Geophysical KdV, shallow water wave, Gilson–Pickering equations. Here, the exact solutions of the equations were obtained using the Modified Kudryashov method, and three-dimensional graphs of the obtained solutions are included under each solution.

In the fourth part, conclusions and recommendations are given.

KEYWORDS: Beta derivative, Franctional partial differantional equation, Analytical solution

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$	: n. Mertebeden Türev Operatörü
$\mathbf{D}(\,)$	: Kesirli Mertebeden Türev Operatörü
$\boldsymbol{\Gamma}(\,)$	: Gamma Fonksiyonu
$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{a},\mathbf{b})$	: İki Parametreli Beta Fonksiyonu
$\mathbf{erf}(\,)$	: Hata Fonksiyonu
${}_{a}^{RL}D_t^{p}(\,)$	: Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden Türev Operatörü
${}_{a}^{RL}D_t^{-p}(\,)$	: Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden İntegral Operatörü
${}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{C}}\mathbf{D}_{\mathbf{k}}^{\alpha}(\,)$	: Caputo Kesirli Mertebeden Türev Operatörü
${}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{GL}}\mathbf{D}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{p}}(\,)$	: Grünwald-Letnikov Kesirli Mertebeden Türev Operatörü
${}_{a}^{GL}D_t^{-p}(\,)$	: Grünwald-Letnikov Kesirli Mertebeden İntegral Operatörü
$\mathbf{D}_0^{\alpha}(\,)$	: Hadamard Kesirli Mertebeden Türev Operatörü
$\mathbf{D}_{\mathbf{t}}^{\beta}(\,)$	: Beta Mertebeden Kesirli Türev Operatörü
$\mathbf{D}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{n}\beta}(\,)$	: n Kez Ardışık Beta Türev Operatörü
$\mathbf{D}_{\mathbf{x}}^{\beta}(\,)$	: x’e Göre Beta Mertebeden Kesirli Kısmi Türev Operatörü

ÖNSÖZ

Tez çalışmamı tamamlamamda bana öncülük eden, desteklerini esirgemeyerek, çalışmam için gerekli motivasyon, görüş ve önerilerini her daim benimle paylaşan, tüm çalışmam boyunca bilgi ve yönlendirmeleri ile bana ışık tutan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ali KURT'a teşekkürlerimi sunarım. Her şey için minnettarım.

Ayrıca, bu süreçte bana benden daha çok inanarak, manevi olarak hep yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen değerli annem Zeliha, babam Recep, abim Yasin, kıymetli eşi Cemre ve sevgili dostlarım Emine, Gül, Kıymet, Ali ve Ahmet'e teşekkür etmek istiyorum, destekleriniz olmadan bu çalışmayı tamamlamam mümkün olmazdı.

Son olarak, yanımda bulunan tüm arkadaşlarım ve aileme teşekkür ederim.

Sena ALAKUŞ

1. GİRİŞ

Türev nedir sorusu ile karşılaştığımızda, bağımlı değişkenin (y) bağımsız değişkene (x) göre değişim miktarını ifade ettiğini söyleyebiliriz.

Türev kavramı ilk kez 1666 yılında karşımıza çıktı ve bu kavram Newton tarafından geliştirildi. Newton ile aynı zamanlarda Leibniz de bu konu üzerine araştırmalar yapmaya başlamıştı. Leibniz, türev kavramı ile aynı zamanda diferansiyel denklemler üzerinde de çalışmalarda bulunmuş ve türev hesabı için kullanılan $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)$ ifadesini ilk kez ortaya atmıştır (Candoğan 2019).

Yüzyıllar öncesinde başlayan, geliştirilen ve zamanla iyileştirilen tam mertebeli diferansiyel denklemler, bilimin çeşitli alanlarındaki problemlerin modellenmesinde kullanılmaktadır. Zaman içerisindeki gözlemlere göre bazı durumlarda tam mertebeli olarak ifade edilen diferansiyel denklemler yetersiz kalmıştır. Örneğin, tam sayılı türevler genel anlamda lineer sistemler ve durumlar için uygundur, doğa ve mühendislik uygulamalarında karşılaşılan birçok farklı sistem lineer olmayan ve belirsiz davranışlarda bulunur. Bazı mühendislik ve fizik sistemlerinde örneğin, viskozite veya ısı transferleri süreçleri gibi durumlar için arayışlar sürmektedir. Tam mertebeli diferansiyel denklemler doğada karşılaştığımız bunlar gibi farklı durumlara istediğimiz cevabı veremeyebilmekte ve farklı soru işaretlerine neden olmaktadır. Soru işaretleri oluşturan ve eksikliği hissedilen bu durumlar kesirli türev tanımı ile karşılaşmamıza olanak sağlamıştır. Kesirli türev tanımı karşımıza ilk olarak 1695 yılında türev ve integral ile ilgili çalışmalardan yola çıkarak L'Hospital'in Leibniz'e " $f(x)$ fonksiyonu için $f^{(n)}(x)$ tam sayılı türevinde n'yi, $n = \frac{1}{2}$ şeklinde alırsak ne olur?" sorusunu sorması ve Leibniz'in bu soru üzerine "Görünürde bir paradoks, ancak bir gün bundan faydalı sonuçlar çıkacaktır." şeklinde karşılık vermesiyle ortaya çıkmıştır. Bu soru, kesirli türevi gündeme getirmiş ve birçok matematikçinin dikkatini çekerek kesirli mertebeden türev üzerine araştırmalar yapmasına imkân sağlamıştır.

Leibniz’in 1716 yılında vefat etmesinden sonra kesirli mertebeden türev ile ilgili çalışmalar devam etmiştir. Leibniz’den sonra 1783 yılında Leonard Euler bu alanda temelleri oluşturmuş ve faktöriyel terimini genelleştirerek matematikte önemli bir kavram olan “Gamma fonksiyonunu” tanıtmıştır ve bu fonksiyonun kesirli analizde önemli bir yeri vardır (Weilbeer 2005). 1813 yılında Joseph Louis Lagrange, 1822 yılında Joseph Fourier (Stinga 2022). 1823 yılında Niels Henrik Abel, 1829 yılında Augustin-Louis Cauchy, 1832 yılında Liouville, 1847 yılında ise Riemann-Liouville ortak çalışma yapmışlardır, Riemann ve Liouville kesirli türevler için formel matematiksel tanımını vererek Riemann-Liouville kesirli türev operatörünü geliştirmişlerdir (Sökmen 2012). Bu tanım ile kesirli türevlerin teorik temellerini olgunlaştırmışlar ve günümüz modern kesirli analiz çalışmaları için temeller oluşturmuşlardır. 1930 yılında Paul Levy, kesirli türevler ile ilgili “olasılıksal yaklaşım” geliştirmiş ve kesirli türevin daha fazla uygulama alanında kullanılmasına imkan sağlamıştır (Benson 1998). 1974 yılında Oldham ve Spanier ortak çalışması ile kesirli türevin farklı alanlarda kullanılmasını incelemişler ve diğer bilim dallarında fizik, mühendislik gibi alanlarda da nasıl uygulanabileceğini bir çalışma ile anlatmışlardır (Karcı 2014). 1998 yılında Podlubny ise kesirli türev üzerine geniş çaplı bir kitap “Fractional Differantial Equations” yazmıştır ve bu kitap, kesirli analiz araştırmaları için önemli bir başvuru kaynağı haline gelmiştir (Podlubny 1998). Podlubny'nin çalışmaları, modern kesirli türev uygulamalarını geliştirmiştir.

Kısaca Kesirli türev tanımı, L’Hospital’in Leibniz’i merakla sorduğu soru ile başlamış, ardından Euler, Fourier, Liouville gibi günümüzde birçok faydası olan matematikçilerle geliştirilmiş ve Riemann-Liouville yaklaşımı ile güçlenmiş ve olgunlaşmıştır. 20. yüzyılda bu tanım, Oldham ve Spanier ile modern uygulamalarda hayat bulmuş ve günümüzde birçok bilim dalında kullanılmaktadır.

Kesirli türevdeki çeşitlilik, problemin doğasına uygun olan tanımın seçilmesine ve dolayısıyla en uygun çözümün elde edilmesine imkân sağlamıştır. Günümüzde popüler olan kesirli türev tanımları arasında ise Riemann-Liouville, Beta, Conformable, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl, Hadamard, Atanga-Baleanu bulunmaktadır.

Kesirli türev, matematik, fizik ve mühendislik alanlarında problemlerin modellenmesi ve çözümlenmesinde daha iyi sonuçlar sağlayabilir. Kesirli türevler, dinamik sistemlerin kontrol teorisinde (Selvam ve Govindaraj 2024), viskoelastisite problemlerinin formülasyonunda ve çözümünde, materyallerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin modellemesinde, ses sinyallerinin modellenmesinde (Sun, ve diğ. 2018), biyolojide, çeşitli materyallerin özelliklerinin tanımlanmasında (Özpınar 2020) ve elektrokimyada (Oldham 2010) kullanılmaktadır. Ayrıca ısı iletimi, elektrik, mekanik, kaos, fraktal gibi alanlarda da kesirli hesabın kullanıldığı gözlemlenmektedir (Atangana 2015).

Bundan sonraki aşamada kesirli türevlerin kullanılması ile ilgili diğer konu ve çalışmalarda olduğu gibi avantajlarına, kesirli türevin kriterlerine, literatürde sık sık karşılaştığımız ve daha önce de bahsi geçen popüler bazı kesirli türev tanımlarına yer verilecektir.

1.1 Kesirli Türevin Avantajları

1- Düzensiz difüzyon olayı fizik, kimya ve biyoloji alanlarında gözlemlenir. Bu tür olayları karakterize etmek için sabit mertebeden kesirli difüzyon denklemleri kullanılmaya başlanmış ve büyük bir başarı elde edilmiştir. Ancak, sabit mertebeden kesirli difüzyon denklemlerinin, homojen olmayan veya heterojen ortamlarda bazı karmaşık difüzyon süreçlerini karakterize edemediği tespit edilmiştir (Atangana 2015). Ek olarak, gözenekli ortamdaki difüzyon sürecini ele aldığımızda, ortam yapısının veya dış alanının zamanla değişmesi durumunda, sabit mertebeden kesirli difüzyon denklemi modeli bu tür olguları iyi karakterize etmek için kullanılamaz. Bununla birlikte, bazı biyolojik difüzyon süreçlerinde, parçacıkların konsantrasyonu difüzyon modelini belirler. Buradaki sorunları çözmek için değişken mertebeli (VO) kesirli difüzyon denklemi modellerinin kullanılması önerilmektedir.

2- Değiştirilmiş Riemann-Liouville kesirli türev olan Jumarie (Fırat 2023) tanımında, herhangi bir sürekli fonksiyonun türevlenebilir olması gerekmez; bir sabitin kesirli türevi sıfırdır ve daha önemlisi, bu tanım tüm fonksiyonlar için orijindeki tekilliği ortadan kaldırır (Atangana 2015).

3- Riemann-Liouville kesirli türevinde, keyfi bir fonksiyonun orijinde sürekli ve diferansiyellenebilir olması gerekmez (Atangana 2015).
4- Caputo kesirli türevlerinin en büyük avantajlarından biri, tamsayı mertebeli başlangıç ve sınır koşullarını problem formülasyonuna dahil edebilmesidir. Buna ek olarak, herhangi bir sabitin türevi sıfırdır. Caputo türevi, gerçek dünyadaki problemlerin modellenmesinde daha sıklıkla kullanılan bir kesirli operatördür (Atangana 2015).
5- Doğası gereği yerel olan kesirli türevler, son derece düzensiz ve hiçbir yerde diferansiyellenebilir olmayan fonksiyonların kesirli diferansiyellenebilme özelliklerini incelemede faydalıdır (Atangana 2015).
6- Yerel kesirli türevler, Leibniz kuralı ve zincir kuralını sağlar, bu da onları analitik olarak güçlü bir araç haline getirir (Atangana 2015).
7- Kesirli analiz, sistem analizinin gelişiminin önceki işlemlere olan bağımlılığını kapsamlı şekilde dikkate alarak kolayca ifade edebilir. Ancak tamsayı hesabı, yerellik karakteristiği sebebiyle sistemin geçmiş yapısını ifade etmekte yetersiz kalmaktadır (Atangana 2015).
8- Kesirli analizle ifade edilen teorik modeller, tam sayılı mertebeyle ifade edilen modellere nazaran deneysel verilerle daha uyumludur. Karmaşık fiziksel mekanik problemleri tanımlarken, kesirli analiz ile ifade edilen modelin daha net bir fiziksel anlamı ve daha basit bir ifadesi olduğu ortaya konulmuştur (Atangana 2015).

1.2 Kesirli Türev Operatör Kriterleri

Bu bölümde, kesirli türev olarak adlandırılacak operatörün sağlaması gereken kriterleri belirteceğiz. *D* bir operatör olsun, o zaman *D* aşağıdaki koşulları sağlıyorsa kesirli türev olarak adlandırılır (Atangana 2015):

1- Seçilen bir giriş değerindeki bir fonksiyonun kesirli türevi, bu giriş değerine yakın fonksiyonun değişim hızını gösterir.

2- Sıfırıncı mertebeden $D(f)$, f'yi verir.

3- $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere D kesirli türev operatörü doğrusaldır, yani;

$$D\big(af(t) + bg(t)\big) = aD\big(f(t)\big) + bD\big(g(t)\big).$$

4- $a \in \mathbb{R}$ için D kesirli türev operatörü, sabit ile çarpım kuralını sağlar, yani;

$$D(af) = aD(f).$$

5- D kesirli türev operatörü, toplam kuralını sağlar, yani;

$$D(f + g) = D(f) + D(g).$$

6- D kesirli türev operatörü, çıkarma kuralını sağlar, yani;

$$D(f - g) = D(f) - D(g).$$

7- D kesirli türev operatörü, çarpım kuralını sağlar, yani $h(x) = f(x)g(x)$ fonksiyonu;

$$D\big(h(x)\big) = D\big(f(x)\big)g(x) + f(x)D\big(g(x)\big).$$

8- D kesirli türev operatörü, zincir kuralını sağlar, yani f ve g fonksiyonları için, $h(x) = f\big(g(x)\big)$ olmak üzere,

$$D\big(h(x)\big) = D\big(f(x)\big)g'(x) = f'(x)D\big(g(x)\big).$$

9- f fonksiyonunun tersi bir g fonksiyonu ise, $g\big(f(x)\big) = x$ ve $f\big(g(y)\big) = y$ olması durumunda

$$D(g) = \frac{I(t,\beta)}{D\big(f(g)\big)}.$$

10- D kesirli türev operatörü, çarpmaya göre tersi kuralını sağlar, $h(x) = \frac{1}{f(x)}$, $(f(x) \neq 0)$ olmak üzere,

$$D\big(h(x)\big) = -\frac{D\big(f(x)\big)}{\big(f(x)\big)^2}.$$

11- D kesirli türev operatörü, bölüm kuralını sağlar, yani f ve g fonksiyonları için g'nin sıfır olmadığı her yerde;

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f)g - D(g)f}{g^2}.$$

12- Herhangi bir açık aralıkta $D\big(f(x)\big) > 0$ ise o zaman f bu aralıkta artandır.

13- Herhangi bir açık aralıkta $D\big(f(x)\big) < 0$ ise o zaman f bu aralıkta azalandır.

14- Herhangi bir açık aralıkta $D\big(f(x)\big) = 0$ ise o zaman f bu aralıkta sabittir.

15- D kesirli türev operatörü yukarıdaki kriterleri sağlar ve G , D operatörünün tersidir, o zaman G kesirli integral operatörüdür.

16- D kesirli türev operatörü, geriye dönük uyumluluğu sağlar, yani mertebe tamsayı olduğunda, D tamsayı mertebeli türevlerle aynı sonuçları verir.

1.3 Bazı Özel Fonksiyonlar

1.3.1 Gamma Fonksiyonu

Kesirli mertebeden türevin en bilinen fonksiyonlarından biridir. Leonard Euler, $n!$ kavramını genelleştirerek, faktöriyelin sadece tam sayılar için değil, kompleks ve kesirli sayıları da ele alarak temelini oluşturmuştur. $\Gamma(t)$ şeklinde ifade edilir. Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\, e^{-x}\, dx, \qquad t > 0$$

şeklinde tanımlanır (Miller ve Ross 1993) ve genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak da bilinmektedir.

Temel Özellikleri:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$$

$$\Gamma(x) = (x-1)!, \qquad x \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

şeklinde ele alınır.

1.3.2 Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu, $\beta(a,b)$ şeklinde ifade edilir. Gamma fonksiyonu ile iç içedir.

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx$$

burada $a > 0$ ve $b > 0$ koşulları sağlanır. Bu fonksiyon, olasılık-istatistik dağılımlarının incelenmesi, kalkülüs ve matematiksel analiz alanlarında kullanılmaktadır (Yang ve Zhang 2019).

Temel Özellikleri:

1.Simetri: $\beta(a,b) = \beta(b,a)$ eşitliğini sağlar, yani fonksiyon simetriktir.

2.Gamma fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasındaki ilişki:

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

şeklinde ifade edilir (Miller ve Ross 1993).

1.3.3 Hata Fonksiyonu (erf):

Hata fonksiyonu (erf)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır. Hata fonksiyonu (Aggarwal 2019) genel olarak fizik, mühendislik, olasılık ve istatistik alanlarında kullanılır. Normal ya da Gauss dağılımının birikimli dağılım fonksiyonunu (CDF) hesaplamak için kullanılır. Hata oranları ya da bir durumun belirli bir sürede gerçekleşmesi beklenen olasılığını tespit etmek için kullanılır.

Temel Özellikleri:

1.Simetri: $\operatorname{erf}(-a) = -\operatorname{erf}(a)$ eşitliğini sağlar, yani hata fonksiyonu simetrikliği sağlar.

2.Asimptotik davranış: $\lim_{a \to \infty} \operatorname{erf}(a) = 1$' e yaklaşır.

3.Komplemanter hata fonksiyonu: Sıklıkla hata fonksiyonu tümleyeni ile kullanılır ve (erfc) şeklinde gösterilir.

$$\operatorname{Erfc}(a) = 1 - \operatorname{erf}(a)$$

1.4 Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral Yaklaşımları

Sıkça karşılaştığımız kesirli mertebeden türev ve integral yaklaşımlarından en yaygın ve klasik olanları bu bölümde ele alınmıştır. Uzun yıllardır birçok bilimsel çalışmalara katkı sağlamış olan kesirli türev tanımlarından bazıları; Riemann-Louville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Hadamard, Atanga-Baleanu'dir.

1.4.1 Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegral Yaklaşımı

f fonksiyonu $\forall\ (a, t)$ sonlu aralığında sürekli, aynı zamanda $0 \leq a < t$, ve $p > 0$ olmak üzere p. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}_{a}^{RL}D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde ele alınmaktadır (Podlubny 1998).

$k - \alpha > 0$ olmak üzere α sayısını ele alırsak, $(k - \alpha)$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}_{a}^{RL}D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau,\ (0 < \alpha \leq 1) \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu integralin yakınsak olması için $\alpha > 0$ olmalıdır. (1.1) ifadesinde $p = k - \alpha$ alınırsa

$${}_{a}^{RL}D_t^{p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau$$

$$= \frac{d^k}{dt^k}\left({}_{a}^{RL}D_t^{-(k-p)} f(t)\right), (k-1 \leq p < k) \tag{1.2}$$

sonucuna ulaşılır (Podlubny 1998).

1.4.2 Caputo Kesirli Türev ve İntegral Yaklaşımı

Rimeman-Liouville kesirli mertebeden türev tanımı, kesirli mertebeden türev ve integraller teorisinin gelişimi üzerinde büyük rol oynamıştır. Bununla beraber modern teknolojinin gelişimi ile oluşan taleplerin ve saf matematiksel yaklaşımın daha iyi tanımlanması için teorik olarak geliştirilmesi ve revize edilmesi gerektiği ortaya çıkmıştır. Özellikle viskoelastike (Bhangale 2023) ve kalıtsal katı madde özelliklerini daha iyi açıklamak için kesirli mertebeden türevlerin kullanıldığı farklı birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarla kesirli diferansiyel denklemler türetilmiştir. Ortaya çıkan bu denklemleri formüle etmek için ise uygun başlangıç koşulları gerekli hale gelmiştir. Uygulamalı problemlerin fiziksel olarak daha iyi açıklanabilir olması için başlangıç koşullarının $f'(a), f''(a) \ldots$ vs. gibi kullanılmasına fırsat tanıyan kesirli türev tanımlarına gereksinim duyulmuştur. Fakat Riemann-Liouville yaklaşımı $k = a$ da Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevinin limit değerlerini içeren başlangıç koşul şartını içermektedir. Örneğin;

burada b_t , $t = 1,2, \ldots, n$ verilen sabitlerdir, yani;

$$\lim_{k \to a} {}^{RL}_{a}D_k^{\alpha-1} f(k) = b_1,$$

$$\lim_{k \to a} {}^{RL}_{a}D_k^{\alpha-2} f(k) = b_2,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{k \to a} {}^{RL}_{a}D_k^{\alpha-n} f(k) = b_n \tag{1.3}$$

şeklinde ifade edilir. Bu şekilde başlangıç koşulları kullanılan keyfi bir başlangıç değer problemleri matematiksel şekilde çözülmüştür fakat çözümleri faydalı olmamış ve pratikte kullanışsız olmuştur. Böyle başlangıç koşullarının fiziksel yorumu bulunmamaktadır (Podlubny 1998).

Bu durum bir sorun haline gelmiştir ve Caputo tarafından geliştirilen; $f'(a), f''(a), \ldots$ gibi tamsayı mertebeden türevlerin $k = a$ noktasındaki limit değerlerini içeren kesirli mertebeden türevleri bulunan diferansiyel denklemler için önerilen başlangıç-değer problemlerinin başlangıç koşullarını formülize eden Caputo yaklaşımı ile çözülmüştür. f fonksiyonu, n kez sürekli diferansiyellenebilir olması şartı ile Caputo tarafından kesirli mertebeden türev tanımı,

$${}^{C}_{a}D_k^{\alpha} f(k) = D^{\alpha-n} D^n f(k) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^k \frac{f^{(n)}(\tau)}{(k-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \ (n-1 < \alpha < n) \tag{1.4}$$

şeklinde ifade edilmiştir (Podlubny 1998).

1.4.3 Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve İntegral Yaklaşımı

f, sürekli bir fonksiyon olsun. $(k = 1,2,\dots,m+1)$, f^k türev fonksiyonları da $[a,t]$ aralığında sürekli ve $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $(m \le p < m+1)$ için $p.$ mertebeden f fonksiyonunun Grünwald-Letnikov kesirli türevi (Podlubny 1998);

$$ {}_{a}^{GL}D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) $$

$$ = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau $$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanımda

$$ \binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-r+1)}{r!} $$

şeklinde ifade edilmiştir.

f fonksiyonunun $p.$ mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integrali, f fonksiyonu $[a,t]$ aralığında sürekli olmak koşuluyla

$$ {}_{a}^{GL}D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \qquad (1.5) $$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$ \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+r+1)}{r!} $$

olarak alınmıştır.

Burada f fonksiyonun türevi (f'), $[a,t]$ aralığında sürekli, öyleyse (1.5) denkleminin sağına bir kez kısmi integrasyon uygulandığında

$$ {}_{a}^{GL}D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(\mathrm{p}+1)} + \frac{1}{\Gamma(\mathrm{p}+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau $$

denklemi elde edilir. Bu fonksiyona $l+1$ defa kısmi integrasyon uygulanabilir, o zaman (1.5) denklemi ile

$$ {}_{a}^{GL}D_{t}^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{l} \frac{f^{k}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(\mathrm{p}+\mathrm{k}+1)} + \frac{1}{\Gamma(\mathrm{p}+\mathrm{l}+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{p+m}\, f^{(l+1)}(\tau) d\tau $$

denklemi elde edilir (Podlubny 1998).

1.4.4 Hadamard Kesirli Türev ve İntegral Yaklaşımı

$h(z)$ fonksiyonu, sonlu (a,b) aralığında sürekli ve n kere diferansiyellenebilir olsun, $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak şartıyla, $h(z)$ fonksiyonunun Hadamard kesirli türevi

$$ D_{0}^{\alpha}\left(h(z)\right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(z \frac{d}{dz}\right)^{n} \int_{0}^{z} (\log \tfrac{z}{t})^{n-\alpha-1} \frac{h(t)}{t}\, dt, \qquad (a < z < b) $$

şeklinde tanımlanmıştır (Atangana 2015).

1.5 Beta Kesirli Türevi, İntegrali, Bazı Tanım ve Teoremler

Bu bölümde beta kesirli türevi, integrali, bazı tanım ve teoremler ele alınacaktır.

Tanım 1.5.1: $a \in \mathbb{R}$ ve $g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, g fonksiyonunun β-türevi;

$$ D_{t}^{\beta}\left(g(t)\right) = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{g(t + \varepsilon\,(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta}) - g(t)}{\varepsilon} & , t \geq 0, 0 < \beta \leq 1 \\ g(t) & , t \geq 0, \beta = 0 \end{cases} $$

şeklinde ifade edilir. Burada Γ, gamma fonksiyonudur.

Yukarıda verilen tanımda limit mevcutsa, g fonksiyonunun β- türevlenebilir olduğu açıktır. $\beta = 1$ için, $D_{t}^{\beta}\left(g(t)\right) = \frac{d}{dt}\,(g(t))$ olduğu görülür.

Bununla birlikte, diğer kesirli türevlerden farklı olarak, bir fonksiyonun β-türevi, birinci mertebeden türev gibi aynı şekilde belirli bir noktada yerel olarak tanımlanabilir (Atangana 2015).

Teorem 1.5.1: Beta kesirli türev operatörü, bölüm (1.2) de ifade edilen olan kriterleri sağlamaktadır (Atangana 2015).

Teorem 1.5.2: $f\colon [a,\infty] \to \mathbb{R}$ şeklinde verilen bir f fonksiyonu $x_0 \geq a,\ \beta \in [0,1]$ olacak şekilde x_0 noktasında β- türevli ise x_0'da süreklidir (Atangana 2015).

İspat: f fonksiyonunun β- türevlenebilir olduğunu kabul edelim,

$$D_t^{\beta}\big(f(t_0)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t_0 + \varepsilon(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta}\right) - f(t_0)}{\varepsilon}$$

Ancak,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f\ (t_0 + \varepsilon(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta}) - f(t_0)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t_0 + \varepsilon(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta}\right) - f(t_0)}{\varepsilon}\ \varepsilon$$

$$= D_f^{\beta}\big(f(t_0)\big).0 = 0$$

Buradan,

$$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} f\left(t_0 + \varepsilon\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)$$

$$= \left(\lim_{\varepsilon\to 0} f\left(t_0 + \varepsilon\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_0)\right) + f(t_0)$$

$$= 0 + f(t_0) = f(t_0)$$

şeklinde ifade edilir. Buradan;

$$t = t_0 + \varepsilon\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$$

olduğunu varsayalım,

$$\varepsilon = \frac{(t - t_0)}{\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}}$$

Böylece,

$$\lim_{\frac{(t-t_0)}{\left(t_0+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}} \to 0} f(t) = f(t_0) \qquad (1.6)$$

$\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \neq 0$ olduğundan (1.6) denklemini tekrar ifade edebiliriz,

$\lim_{t-t_0 \to 0} f(t) = f(t_0)$ ya da $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$

şeklinde ispat tamamlanmaktadır (Atangana 2015).

Teorem 1.5.3: (Ortalama Değer Teoremi)

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon belirtilen $[a, b]$ kapalı aralığında β - türevlenebilir ve $a < b$ için (a, b) açık aralığında türevlenebilirdir. O zaman (a, b) açık aralığında öyle bir c noktası vardır ki;

$$D_t^{\beta}\left(f(c)\right) = h(\beta, c, a, b)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Denklemde h

$$h(\beta, c, a, b) = \frac{(b - a)\left[(c + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta} + (c + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{-\beta}\right]}{b(b + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta} - a(a + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta}}$$

olarak ifade edilmektedir (Atangana 2015).

Teorem 1.5.4: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, olmak üzere sürekli bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ kapalı aralığında f fonksiyonunun 2β- türevi

$$D_t^{2\beta}\big(f(t)\big) = D_t^{\beta}\left(D_t^{\beta}\big(f(t)\big)\right), \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

şeklinde ifade edilir. Genel olarak f fonksiyonunun $n\beta$- türevi

$$D_t^{n\beta}\big(f(t)\big) = D_t^{\beta}\left(D_t^{(n-1)\beta}\big(f(t)\big)\right), \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

şeklinde verilir (Atangana 2015).

Uyarı 1: Bir fonksiyonun $n\beta$- türevinin, o fonksiyonun önceki $(n-1)\beta$- türevleri hakkında bilgi verdiği açıktır.

Örneğin;

$$D_t^{2\beta}\big(f(t)\big) = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \left[(1-\beta)\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{-\beta} f' + \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f''\right]$$

bu durum, başka herhangi bir türev tarafından sağlanmayan özgün bir bellek özelliği verir. $\beta = 1$ için, f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevine karşılık gelir, yani klasik türevlere geri dönüldüğü şeklinde ifade edilir (Atangana 2015).

Sonuç 1.5.5: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $\alpha \neq \beta$ ise,

$$D_t^{\beta}\left(D_t^{\alpha}\big(f(t)\big)\right) \neq D_t^{\alpha}\left(D_t^{\beta}\big(f(t)\big)\right)$$

şeklinde ifade edilir (Atangana 2015).

Tanım 1.5.6: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f'nin β-integrali (a,b) açık aralığında aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$I_t^{\beta}\big(f(t)\big) = \int_0^t \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(x)dx.$$

Burada verilen integral Atangana β-integrali olarak adlandırılmaktadır. (Atangana 2015).

Teorem 1.5.7: f sürekli bir fonksiyon olsun. O halde,

$$D_t^\beta\left(I_t^\beta\big(f(t)\big)\right) = f(t)$$

olur.

f fonksiyonu her $x \geq a$ için β- türevlenebilir olsun. O halde;

$$I_t^\beta\left(D_t^\beta\big(f(t)\big)\right) = f(t) - f(a)$$

olarak gösterilir (Atangana 2015).

İspat: $f, (a, b)$ açık aralığında sürekli bir fonksiyon olsun ve $F(t) = I_t^\beta\big(f(t)\big)$ olarak ifade edilsin. β- kesirli türev tanımından,

$${}_a^A D_t^\beta\left({}_a^A I_t^\beta\big(f(t)\big)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F\left(t + \varepsilon(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta}\right) - F(t)}{\varepsilon}$$

burada $F(t) = I_t^\beta\big(f(t)\big)$ koyduğumuzda denklem,

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I_t^\beta\big(f(t)\big)\left(t + \varepsilon(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta}\right) - I_t^\beta\big(f(t)\big)}{\varepsilon}$$

olarak yazılır, öyleyse

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_a^{\left(t + \varepsilon(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta}\right)} (x + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta - 1}\, f(x)dx - \int_a^t f(x)\,(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}\,\mathrm{dx}}{\varepsilon}$$

denklem yazılabilir. Burada $\varepsilon \to h$ ve $h \to 0$ olacak şekilde

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{(t+h)} f(x)dx - \int_a^t f(x)\ \mathrm{dx}}{h} = f(t).$$

bulunur (Atangana 2015).

Tanım 1.5.8: f fonksiyonu, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere iki değişkenli bir fonksiyon olsun. Öyleyse f fonksiyonunun x değişkenine göre β- kısmi türevi,

$$D_x^{\beta}\big(f(x,y)\big) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta},\ y\big) - f(x,y)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır (Atangana 2015).

Teorem 1.5.9: f, $[a,\infty]$ aralığında $\mathbb{R}$ de tanımlı yerel türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu kabul edelim; bu durumda f, β- türevlenebilir de olur (Atangana 2015).

İspat: f türevlenebilir ise, aşağıdaki işlemde limit mevcuttur.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

Bu durumda aşağıdaki işlemin limitinin de var olduğunu ifade ederiz.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}. \tag{1.7}$$

Burada eğer $\varepsilon = h\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$ olarak alırsak, bu durumda $h = \varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$,

olacağı ifade edilir. Sonuç olarak (1.7) yeniden formüle edilebilir.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)}{\varepsilon} = {}_0^A D_t^{\beta}\big(f(t)\big).$$

İspat tamamlanır (Atangana 2015).

Yukarıdaki teorem ve tanımlarda da bahsedildiği üzere β- kesirli türev birçok temel teoremde kullanılır ve yerel türevin sağladığı özelliklerin çoğunu sağlamaktadır. Kesirli türevin sağladığı bu avantaj ve kriterler; matematik, fizik ve mühendislik alanlarında kullanılmış, bilimsel birçok popüler olan çalışmalara konu olmuş ve grafiklerin doğruluğunu sağlamaya yardımcı olmuştur. Bir sonraki kısımda geçtiğimiz dönemde birçok makale ve çalışmaya konu olmuş β- kesirli türevin kullanıldığı çalışmalardan söz edilecektir.

Chakrabarty ve diğ. (2024) yayınladıkları makalesinde β −kesirli türevi, M-kesirli türevi ve çeşitli türevler yardımıyla Kerr yasası CGL modeli kullanarak optik soliton çözümlerini türetmişler ve bu çözümleri klasik türevlerle karşılaştırmış ve bunlar üzerinden analiz sunmuşlardır. Demirbilek (2024) yayınladıkları makalesinde β −kesirli türevi, M-kesirli türevi kullanarak, kesirli parametrelerin kesirli doğrusal olmayan yoğunluk bağımlı reaksiyon difüzyon denkleminin soliton dalgalarının dinamik tepkisi üzerindeki etkilerini araştırmışlardır, soliton dalgalarının dinamiklerinin anlaşılmasını sağlamışlardır. Alsayaad ve diğ. (2024) yayınladığı makalesinde değiştirilmiş Sardar alt denklemi yaklaşımı, Beta kesirli türevli $(1 + 1)$ boyutlu zaman kesirli bağlı doğrusal olmayan Schrödinger modelinin soliton çözümlerini bularak optik çözümler elde etmişlerdir. Zhang ve diğ. (2024) makalesinde çift zincirli DNA'nın dinamiklerini anlamak için kaos teorisini ve kesirli türevleri kullanmış, bunun ile birlikte hem tekil hem de periyodik çözümler sunmuştur. Talafha ve diğ. (2024) çalışmasında kapalı form dalga çözümleri, $(4 + 1) -$ boyutlu kesirli Davey–Stewartson-Kadomtsev–Petviashvili denklemi, değiştirilmiş yardımcı denklem yöntemi ve Jacobi eliptik fonksiyon yöntemi kullanarak araştırmalar yapmışlardır. Serbest parametrelerin genlikler ve dalga davranışları üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Kurt ve diğ. (2024) çalışmasında beta türevi ile lazer termonükleer füzyonunda ortaya çıkan göreli elektronların bir modeli olan doğrusal olmayan Klein-Fock-Gordon (KFG) denkleminin kesin ve yarı analitik çözümlerini elde etmişlerdir, elektron modellemesi üzerine çalışma yapan kişilere yeni bir bakış açısı sağlamışlardır. Aljohani ve diğ. (2024) makalesinde kesirli Sasa-Satsuma denkleminin soliton çözümlerini elde etmek için ilk kez genişletilmiş doğrudan cebirsel yöntemi uygulamışlardır. Optik fiberlerde ultra kısa darbelerin iletimi ve etkileşimi üzerine yeni yaklaşımlar sunmuşlar ve literatürde daha önce bulunmayan yeni çözümler önermişlerdir. Kurt ve Alakuş (2024) makalesinde beta kesirli türev içeren Chafee-Infante denkleminin tam çözümlerini ele almış ve genel çözümde Wolfram Mathematica kullanılarak ayrıklaştırma, normalizasyon veya indirgemeye gerek duymadan 3 boyutlu grafikler ile çözümlerin fiziksel ve geometrik davranışları incelenmiştir.

Verilen bu çalışmalar sadece geçtiğimiz bir yıl içinde ele alınmış ve hepsi birer makale haline getirilmiştir. Öncesinde de birçok çalışma yer almaktadır. Son olarak bahsettiğimiz Kurt ve Alakuş’un (2024) yapmış olduğu çalışma, bu tez çalışması sonucunda elde edilen bulgulardan yararlanarak makale haline dönüştürülmüştür.

Bu tez çalışmasında Beta kesirli mertebeden türevli denklemler ele alınmış ve denklemlerin çözümlerinde Modifiye Kudryashov yöntemi kullanılmıştır. Beta kesirli türev kullanılarak elde edilen bu denklem çözümleri ve bu çözümlerin grafikleri daha önce literatürde rastlanmadığından bu konuda öncü olma özelliğine sahiptir. Dolayısıyla yapılan çalışmalar neticesinde orijinal sonuçlar ve grafikler elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, ilk olarak yöntem ve denklemler için önemli rol oynayan homojen denge prensibi açık bir şekilde ele alınacak ve daha sonrasında Modifiye Kudryashov yöntemi açıklanarak denklemlerde uygulama alanları ve grafikleri gösterilecektir.

2.1 Homojen Denge Prensibi

Homojen denge sayısı, toplam şeklinde verilen tam çözümün üst sınırını ifade eder. Lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında sabit bir sayı elde edilir. Bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim $\frac{d^q u}{d\varepsilon^q}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim $u^p\left(\frac{d^r u}{d\varepsilon^r}\right)^s$ şeklinde verilsin. $u = \tau^N$ dönüşümü yapılırsa p, q, r, s pozitif tam sayı ve N homojen denge sayısı olmak üzere homojen denge bağıntısı $N + q = Np + s(N + r)$ şeklinde elde edilir. Bu denklemde N pozitif homojen denge sayısına ulaşılır (Tasbozan ve diğ. 2016).

2.2 Modifiye Kudryashov Yöntemi

Bu bölümde denklemin çözümünde kullandığımız Modifiye Kudryashov Yöntemi kısaca ifade edilecektir. Kesirli mertebeden lineer olmayan kısmı türevli diferansiyel denklem (Kurt ve Alakuş 2024);

$$F\left(u, \frac{\delta^\beta u}{\delta t^\beta}, \frac{\delta u}{\delta x}, \frac{\delta^\beta}{\delta t^\beta}\left(\frac{\delta^\beta u}{\delta t^\beta}\right), \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}, \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta^\beta u}{\delta t^\beta}\right), \ldots\right) = 0 \tag{2.1}$$

olmak üzere, burada $u = u(x, t)$ aranan fonksiyon ve F, bazı fonksiyon ve özel değişkenlere bağlı lineer olmayan terimler içeren aynı zamanda $u(x, t)$ fonksiyonunun yüksek mertebeden türevli terimlerini içeren polinomdur. Ele alınan yöntem dört adım ile açıklanacaktır.

Adım 1. $\xi = mx + \frac{n\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta}$ olmak üzere; zincir kuralı yardımı ile (2.1) denklemi

$$G(U, U', U'', \dots) = 0 \tag{2.2}$$

lineer olmayan tam mertebeden adi diferansiyel denklem formuna indirgenir. Burada $G, U(\xi)$ fonksiyonunu ve türevlerini içeren bir polinom olup, U' ifadesi ise U'nun yeni bağımsız değişken ξ'ye göre tam mertebeden adi türevlerini ifade etmektedir.

Adım 2. (2.2) denkleminin çözümünün

$$U(\xi) = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi^i(\xi) + a_0 \tag{2.3}$$

formunda olduğunu kabul edelim. Burada $a_N \neq 0$ ve $a_i(i = 1,2, \dots, N)$ keyfi sabitleri daha sonra belirlenecektir. N sayısı ise homojen denge prensibi ile bulunur. (2.3) denklemindeki $\phi(\xi)$ fonksiyonu

$$\phi'(\xi) = (\phi^2(\xi) - \phi(\xi))\ln(k) \tag{2.4}$$

diferansiyel denklemini sağlayan bir fonksiyon olsun.

Burada $k > 1$ ve (2.4) denkleminin genel çözümü

$$\phi(\xi) = \frac{1}{1 + dk^{\xi}} \tag{2.5}$$

formundadır.

Adım 3. (2.3) denklemini (2.4) denklemi ile birlikte (2.2) denkleminde yerine yazarsak ve $\phi^i(\xi)$ fonksiyonlarının katsayılarını sıfıra eşitlersek $a_i(i = 0,1,2, \dots, N)$, m ve n'ye bağlı cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi bilgisayar programı yardımı ile çözülerek aranan değerler bulunur.

Adım 4. İlk üç adımda elde edilen değerler (2.3) denklemi ve (2.5) denklemi kullanılarak yerine yazılırsa (2.1) kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin genel çözümü elde edilir.

3. BULGULAR

3.1 Beta Kesirli Mertebeden Chafee-Infante Denkleminin Çözümü

Bu bölümde Modifiye Kudryashov yöntemi kullanılarak beta kesirli mertebeden chafee-infante denkleminin genel çözümü elde edilecektir. Chafee-Infante denklemi, ısı transferi ve faz geçişleri gibi fiziksel ifadelerde, ekosistem modellemelerinin biyolojik analizlerinde, kimyasal reaksiyonların yayılımındaki davranış değişikliklerini çözümlemede önemli ve büyük bir yere sahiptir.

Beta zaman kesirli mertebeden Chafee-Infante denklemi (Kurt ve Alakuş 2024);

$$D_t^{\beta}u - D_{xx}u + \lambda(u^3 - u) = 0 \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada zincir kuralı ile birlikte

$$\xi = mx + \frac{n\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta} \tag{3.2}$$

dalga dönüşümü kullanılarak (3.1) denklemi

$$nu'(\xi) - m^2u''(\xi) + \lambda((u(\xi))^3 - u(\xi)) = 0 \tag{3.3}$$

şeklinde lineer olmayan tam mertebeli adi diferansiyel denkleme dönüşür. Bu lineer olmayan denklem çözümünün

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i\phi^i(\xi)$$

olduğu kabul edilir. N'yi bulmak için (3.3) denkleminde homojen denge yöntemi kullanılırsa, en yüksek mertebeli lineer terim $u''(\xi)$ ve lineer olmayan terim u^3 olmak üzere

$$N + 2 = 3N$$

olup $N = 1$ bulunur. O halde (3.3) denkleminin çözümünün aşağıdaki gibi

$$u(\xi) = a_0 + a_1\phi(\xi) \tag{3.4}$$

olduğu kabul edilir. $\phi(\xi)$, (2.4) diferansiyel denklemini sağlayan bir fonksiyon olup (2.4)'in çözümü (2.5) denklemi ile verilir. Şimdi (3.4) denklemi (2.4) denkleminde kullanılarak (3.3)'de yerine yazılır ve ortaya çıkan sonuç $\phi^i(\xi)$ kuvvetlerine göre düzenlenir ve ilgili fonksiyon kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenir ise aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{gathered}
a_0^3\lambda - a_0\lambda = 0 \\
3a_0^2a_1\lambda - a_1m^2\,log^2(k) - a_1n\,log(k) - a_1\lambda = 0 \\
a_1^3\lambda - 2a_1m^2\,log^2(k) = 0 \\
3a_0a_1^2\lambda + 3a_1m^2\,log^2(k) + a_1n\,log(k) = 0
\end{gathered} \tag{3.5}$$

(3.5) denklem sistemi bilgisayar programı yardımı ile çözülürse

$$n = \frac{3\lambda}{2\,log(k)},\ \ a_0 = -1,\ \ m = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,log(k)},\ \ a_1 = 1$$

$$n = -\frac{3\lambda}{2\,log(k)},\ \ a_0 = 0,\ \ m = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,log(k)},\ \ a_1 = \pm 1$$

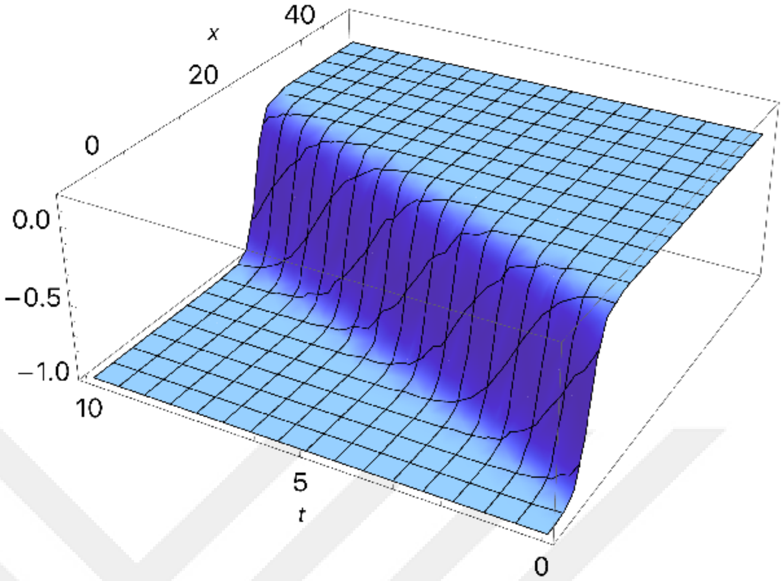
$$n = \frac{3\lambda}{2\,log(k)},\ \ a_0 = \pm 1,\ \ m = \mp\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,log(k)},\ \ a_1 = \mp 1$$

$$n = -\frac{3\lambda}{2\,log(k)},\ \ a_0 = 0,\ \ m = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,log(k)},\ \ a_1 = \mp 1$$

$$n = \frac{3\lambda}{2\,log(k)},\ \ a_0 = 1,\ \ m = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,log(k)},\ \ a_1 = -1$$

elde edilen çözüm setleri (2.5) denkleminde (3.4) denklemi ve dalga dönüşümü kullanılarak yerine yazılırsa sırasıyla aşağıdaki gibi genel çözümler elde edilir.

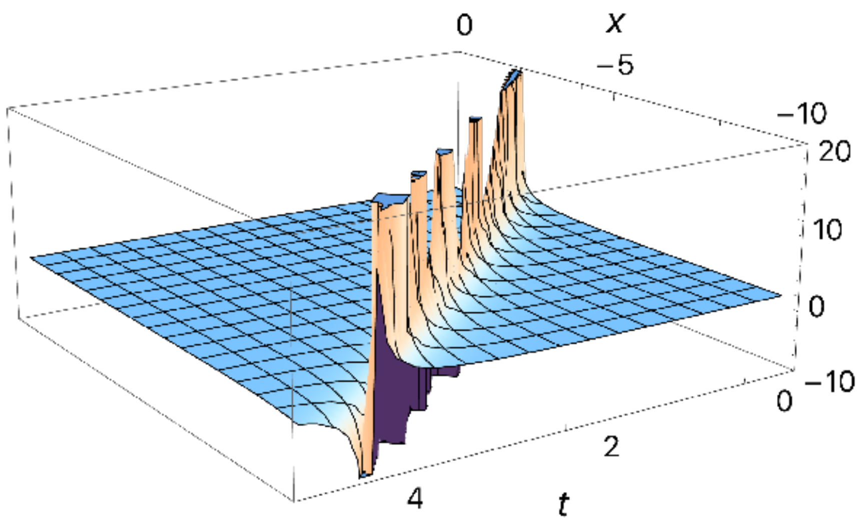
$$u_1(x,t) = -1 + \frac{1}{1 + dk^{-\frac{x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,log(k)} + \frac{3\lambda\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{2\beta\,log(k)}}}$$



Şekil 3. 1: $u_1(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\lambda = 1.7, \beta = 0.9, k = 2.7, d = 2$

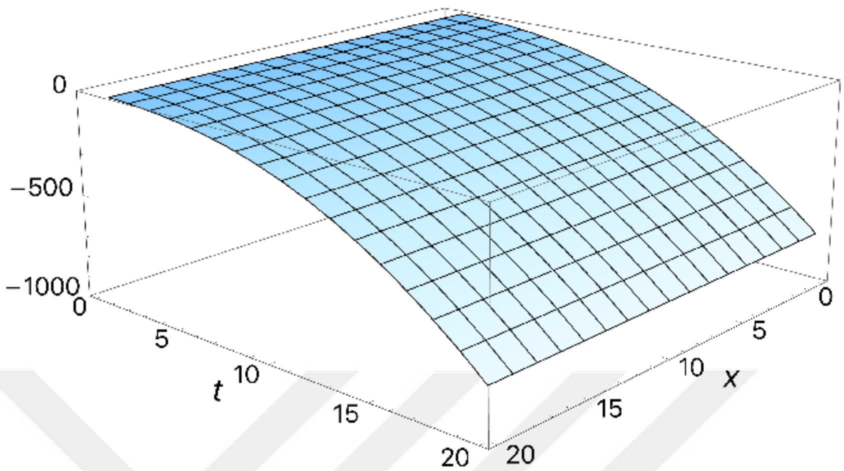
$$u_2(x,t) = -\frac{1}{1 + dk^{-\frac{x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,log(k)} - \frac{3\lambda\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{2\beta\,log(k)}}}$$



Şekil 3. 2: $u_2(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\beta = 0.9,\ \lambda = 0.9,\ k = 2,\ d = -1$

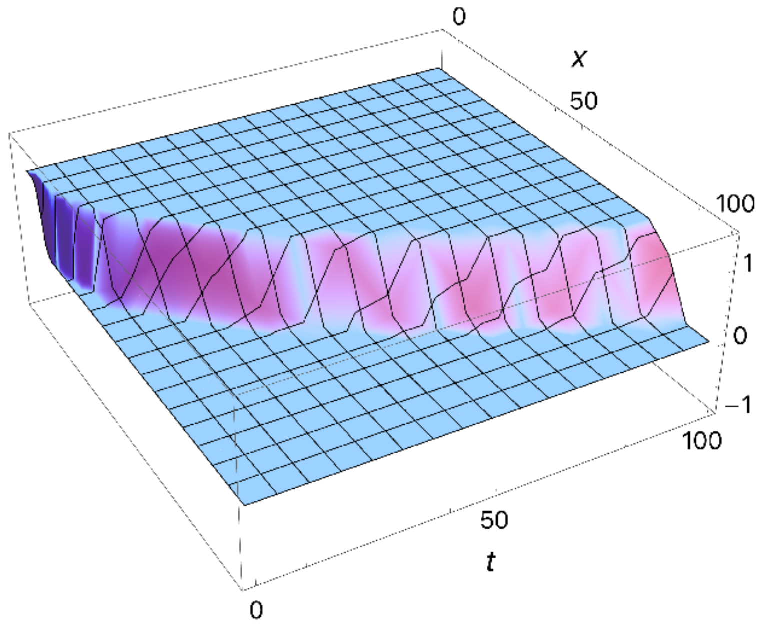
$$u_3(x,t) = \frac{1}{1 + dk^{-\frac{x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\log(k)} - \frac{3\lambda\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{2\beta\log(k)}}}$$



Şekil 3. 3: $u_3(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\beta = 2.5$, $\lambda = 1.02$, $k = 4.9$, $d = 1$

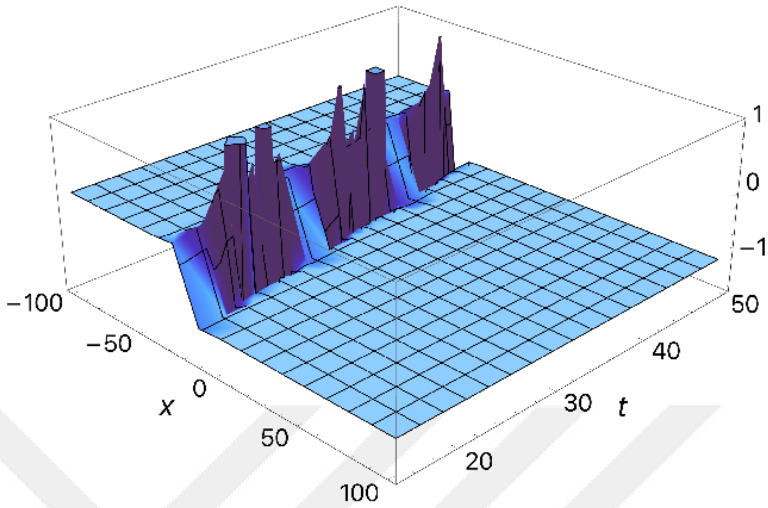
$$u_4(x,t) = 1 - \frac{1}{1 + dk^{-\frac{x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\log(k)} + \frac{3\lambda\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{2\beta\log(k)}}}$$



Şekil 3. 4: $u_4(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\beta = 0.5$, $\lambda = 3.9$, $k = 9.9$, $d = 10$

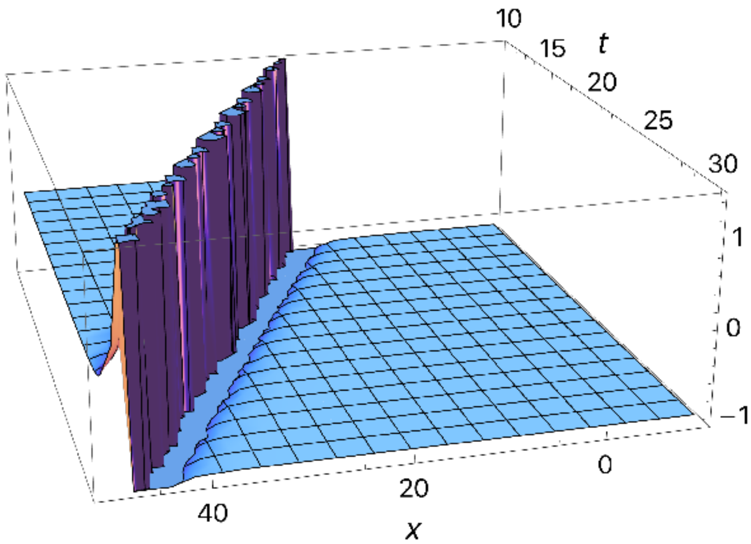
$$u_5(x,t) = -1 + \frac{1}{1 + dk^{\frac{x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,log(k)} + \frac{3\lambda\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{2\beta\,log(k)}}}$$



Şekil 3. 5: $u_5(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\beta = 0.9$, $\lambda = 0.5$, $k = 1.9$, $d = -1.8$

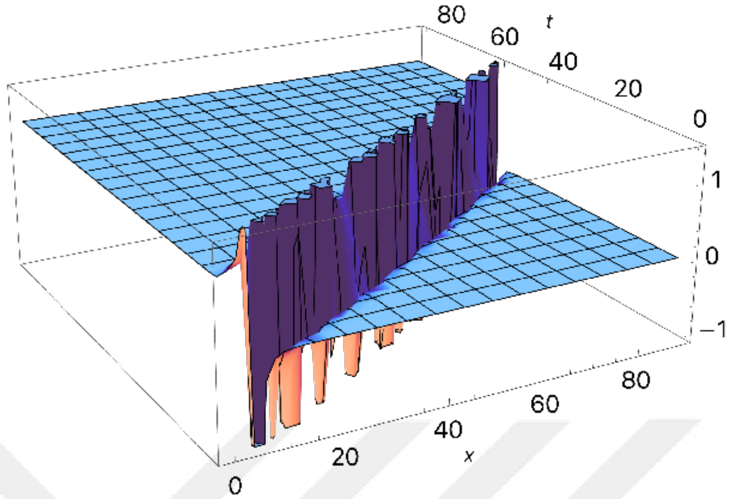
$$u_6(x,t) = -\frac{1}{1 + dk^{\frac{x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,log(k)} - \frac{3\lambda\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{2\beta\,log(k)}}}$$



Şekil 3. 6: $u_6(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\beta = 0.9$, $\lambda = 0.9$, $k = -3.9$, $d = -3.5$

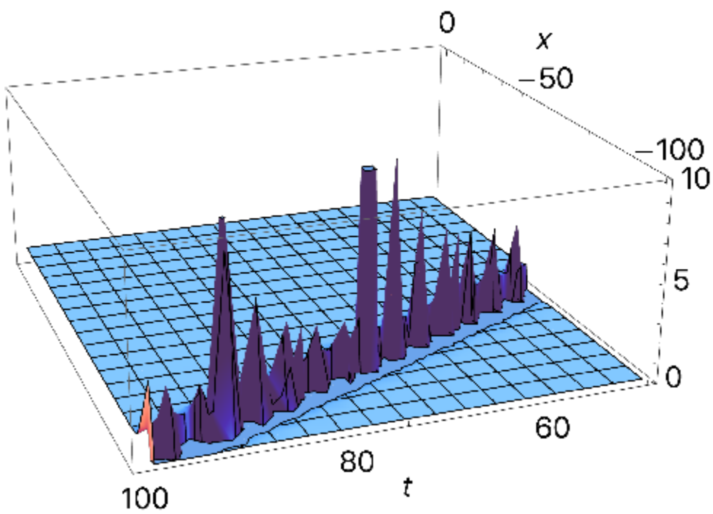
$$u_7(x,t) = \frac{1}{1 + dk^{\frac{x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,log(k)} - \frac{3\lambda\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{2\beta\,log(k)}}}$$



Şekil 3. 7: $u_7(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\beta = 0.9,\ \lambda = 0.9,\ k = 20,\ d = -0.5$

$$u_8(x,t) = 1 - \frac{1}{1 + dk^{\frac{x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,log(k)} + \frac{3\lambda\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{2\beta\,log(k)}}}$$



Şekil 3. 8: $u_8(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\beta = 0.9,\ \lambda = 0.5,\ k = 2, d = -0.1$

3.2 Beta Kesirli Mertebeden Geophysical KdV Denkleminin Çözümü

Bu bölümde Modifiye Kudryashov yöntemi kullanılarak beta kesirli mertebeden Geophysical KdV denkleminin genel çözümü elde edilecektir. Bu denklem, dalga hareketlerinin modellenmesi ve birçok jeofiziksel süreçleri tanımlamak için kullanılmaktadır. Örneğin; okyanus dalgalarının içsel dalgalanmalarında ve kıyı dalga hareketlerinde, atmosferik dalgalanmaların incelenmesinde, gelgit ve tsunami dalgalarının jeofiziksel süreçlerinin modellenmesinde, nehir yataklarında oluşan taşkın dalgalarının hareketinin incelenmesinde, yeraltı su dalgalanmalarında su hareketlerinin uzun süreli incelenmesinde, jeotermal sistemlerde sıcak su hareketleri ve su buharlaşması gibi davranışların incelenmesinde, dalgaların kırınım ve yayılım özelliklerinin araştırılmasında önemli rol oynamaktadır.

Beta zaman kesirli mertebeden Geophysical KdV denklemi (Naowarat ve diğ. 2023);

$$D_t^{\beta} u + \rho D_x u + \Omega D_{xx} u + \eta D_{xxx} u = 0 \tag{3.6}$$

şeklinde verilmektedir. Burada zincir kuralı ile birlikte

$$\xi = mx + \frac{n\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta} \tag{3.7}$$

dalga dönüşümü kullanılarak (3.7) denklemi

$$2nu(\xi) + 2m\rho u(\xi) + m\Omega u(\xi)^2 + 2m^3 \eta u''(\xi) = 0 \tag{3.8}$$

şeklinde lineer olmayan tam mertebeli adi diferansiyel denkleme dönüşür. Bu lineer olmayan denklem çözümünün

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i \phi^i(\xi)$$

olduğu kabul edilir ve N'yi bulmak için (3.8) denkleminde homojen denge yöntemi kullanılırsa, en yüksek mertebeli lineer terim $u''(\xi)$ ve lineer olmayan terim u'' ele alınarak

$$N + 2 = 2N$$

olup $N = 2$ bulunur. O halde (3.8) denkleminin çözümünün aşağıdaki gibi

$$u(\xi) = a_0 + a_1\phi(\xi) + a_2\phi^2(\xi) \tag{3.9}$$

olduğu kabul edilir. $\phi(\xi)$, (2.4) diferansiyel denklemini sağlayan bir fonksiyon olup (2.4)'in çözümü (2.5) denklemi ile verilir. Şimdi (3.9) denklemi (2.4) denkleminde kullanılarak (3.8)'de yerine yazılır ve ortaya çıkan sonuç $\phi^i(\xi)$ kuvvetlerine göre düzenlenir ve ilgili fonksiyon kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenir ise aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$2a_0 n + 2a_0 m\rho + {a_0}^2 m\Omega = 0,$$

$$2a_1 n + 2a_1 m\rho + 2a_0 a_1 m\Omega + 2a_1 m^3\eta\, log(k)^2 = 0,$$

$${a_2}^2 m\Omega + 12a_2 m^3\eta\, log(k)^2 = 0 \tag{3.10}$$

$$2a_2 n + 2a_2 m\rho + {a_1}^2 m\Omega + 2a_0 a_2 m\Omega - 6a_1 m^3\eta\, log(k)^2 + 8a_2 m^3\eta\, log(k)^2 = 0,$$

$$2a_1 a_2 m\Omega + 4a_1 m^3\eta\, log(k)^2 - 20a_2 m^3\eta\, log(k)^2 = 0,$$

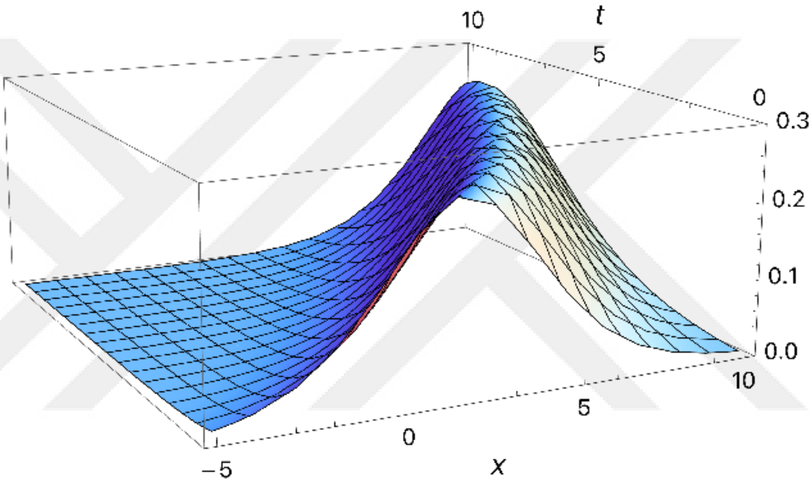
(3.10) denklem sistemi bilgisayar programı yardımı ile çözülürse

$$n = \pm\frac{12\sqrt{3a_1}\rho\sqrt{\Omega} + \sqrt{3}{a_1}^{\frac{3}{2}}\Omega^{\frac{3}{2}}}{72\sqrt{\eta}\, log(k)},\ \ a_0 = 0,\ \ m = \mp\frac{\sqrt{a_1\Omega}}{2\sqrt{3\eta}\, log(k)},\ \ a_2 = -a_1$$

$$n = \pm\frac{12\sqrt{3a_1}\rho\sqrt{\Omega} \mp \sqrt{3}{a_1}^{\frac{3}{2}}\Omega^{\frac{3}{2}}}{72\sqrt{\eta}\, log(k)},\ \ a_0 = -\frac{a_1}{6},\ \ m = \mp\frac{\sqrt{a_1\Omega}}{2\sqrt{3\eta}\, log(k)},\ \ a_2 = -a_1$$

elde edilen çözüm setleri (2.5) denkleminde (3.9) denklemi kullanılarak yerine yazılırsa sırasıyla aşağıdaki gibi genel çözümler elde edilir.

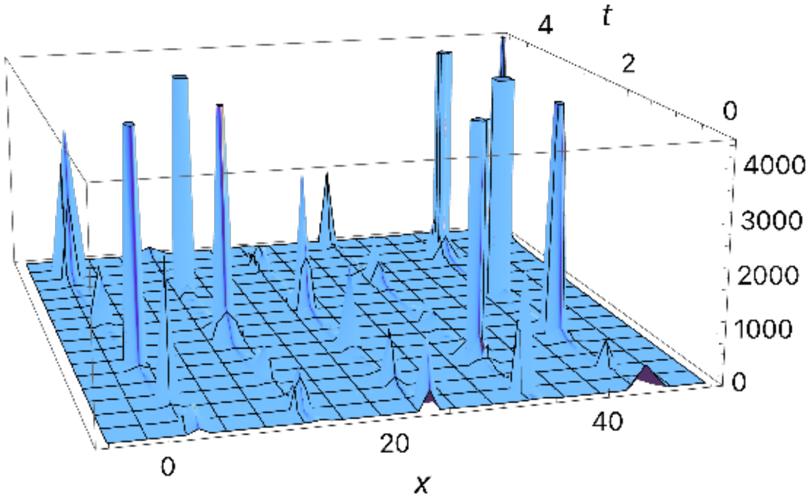
$$u_1(x,t) = \frac{a_1}{1 + dk^{-\frac{x\sqrt{a_1\Omega}}{2\sqrt{3\eta}\log(k)} + \frac{\sqrt{a_1\Omega}(12\rho + a_1\Omega)\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{24\sqrt{3}\beta\sqrt{\eta}\log(k)}}} - \frac{a_1}{\left(1 + dk^{-\frac{x\sqrt{a_1\Omega}}{2\sqrt{3\eta}\log(k)} + \frac{\sqrt{a_1\Omega}(12\rho + a_1\Omega)\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{24\sqrt{3}\beta\sqrt{\eta}\log(k)}}\right)^2}$$



Şekil 3. 9: $u_1(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\beta = 0.7,\ \rho = 1,\ \Omega = 5,\ \eta = 1,\ a_1 = 1, k = 2, d = 1$

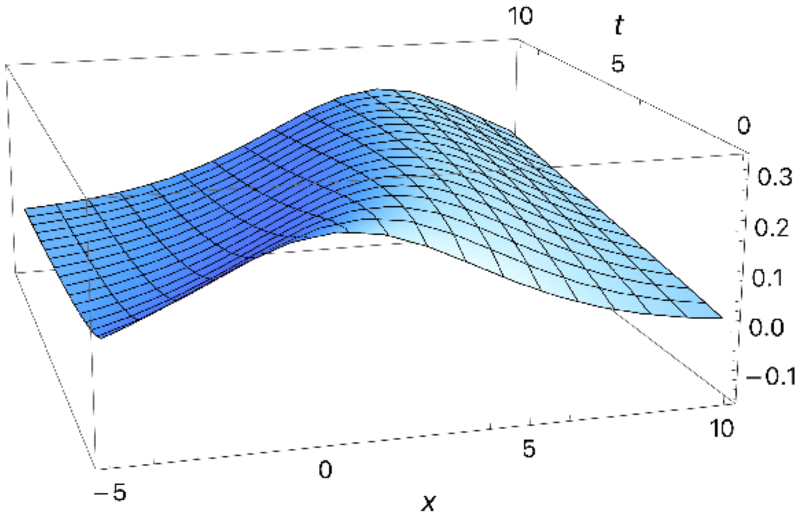
$$u_2(x,t) = -\frac{a_1}{6} + \frac{a_1}{1 + dk^{-\frac{x\sqrt{a_1\Omega}}{2\sqrt{3\eta}\log(k)} + \frac{\left(12\sqrt{3a_1}\rho\sqrt{\Omega} - \sqrt{3}a_1^{\frac{3}{2}}\Omega^{\frac{3}{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{72\beta\sqrt{\eta}\log(k)}}} - \frac{a_1}{\left(1 + dk^{-\frac{x\sqrt{a_1\Omega}}{2\sqrt{3\eta}\log(k)} + \frac{\left(12\sqrt{3a_1}\rho\sqrt{\Omega} - \sqrt{3}a_1^{\frac{3}{2}}\Omega^{\frac{3}{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{72\beta\sqrt{\eta}\log(k)}}\right)^2}$$



Şekil 3. 10: $u_2(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\beta = 0.5, \rho = -1, \Omega = 3, \eta = -1,\ a_1 = 1.5, k = -1.5,\ d = 1$

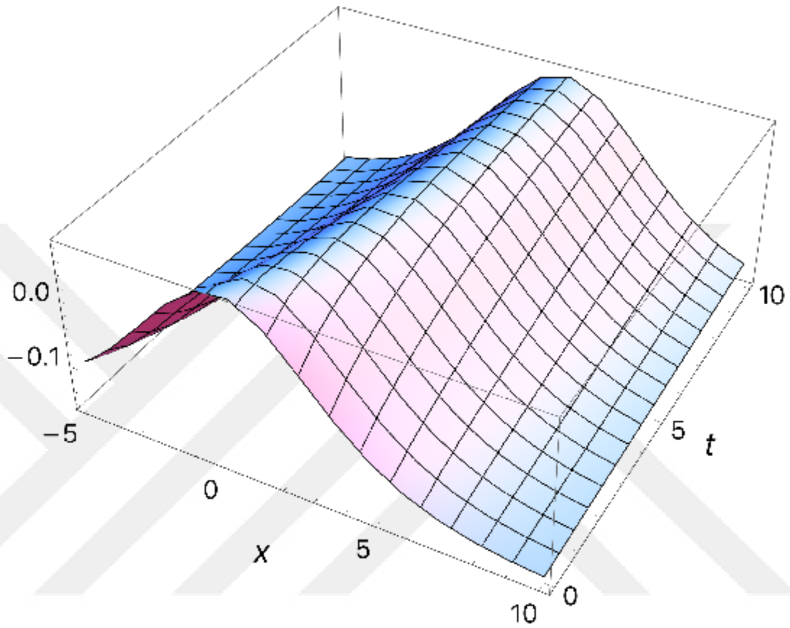
$$u_3(x,t) = \frac{a_1}{1 + dk^{\frac{x\sqrt{\mathbf{a_1}\Omega}}{2\sqrt{3\eta}\,log(k)} + \frac{\left(-12\sqrt{3a_1}\rho\sqrt{\Omega} - \sqrt{3}a_1^{\frac{3}{2}}\Omega^{\frac{3}{2}}\right)\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{72\beta\sqrt{\eta}\,log(k)}}} - \frac{a_1}{\left(1 + dk^{\frac{x\sqrt{\mathbf{a_1}\Omega}}{2\sqrt{3\eta}\,log(k)} + \frac{\left(-12\sqrt{3a_1}\rho\sqrt{\Omega} - \sqrt{3}a_1^{\frac{3}{2}}\Omega^{\frac{3}{2}}\right)\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{72\beta\sqrt{\eta}\,log(k)}}\right)^2}$$



Şekil 3. 11: $u_3(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\beta = 0.4,\ \rho = 1, \Omega = 2, \eta = 1, a_1 = 1, k = 2, d = 2$

$$u_4(x,t) = -\frac{a_1}{6} + \frac{a_1}{1 + dk^{\frac{x\sqrt{\mathbf{a_1}\Omega}}{2\sqrt{3\eta}\,log(k)} + \frac{\left(-12\sqrt{3a_1}\rho\sqrt{\Omega}+\sqrt{3}a_1^{\frac{3}{2}}\Omega^{\frac{3}{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{72\beta\sqrt{\eta}\,log(k)}}} - \frac{a_1}{\left(1 + dk^{\frac{x\sqrt{\mathbf{a_1}\Omega}}{2\sqrt{3\eta}\,log(k)} + \frac{\left(-12\sqrt{3a_1}\rho\sqrt{\Omega}+\sqrt{3}a_1^{\frac{3}{2}}\Omega^{\frac{3}{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{72\beta\sqrt{\eta}\,log(k)}}\right)^2}$$



Şekil 3. 12: $u_4(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $\beta = 0.4, \rho = 1, \Omega = 3, \eta = 1, a_1 = 1, k = 2, d = 2$

3.3 Beta Kesirli Mertebeden Sığ Su Dalgası Denkleminin Çözümü

Bu bölümde Modifiye Kudryashov yöntemi kullanılarak beta kesirli mertebeden sığ su dalgası denkleminin genel çözümü elde edilecektir. Sığ su dalgası denklemleri, dalga hareketlerini ve su akışını etkin bir şekilde ele alarak doğa olaylarının analizi ve akışkanlar mekaniği gibi birçok alanda analiz yapma imkânı sağlar.

Beta zaman kesirli mertebeden Sığ Su Dalgası denklemi (Kurt ve diğ. 2020)

$$D_x\left(D_t^{\beta}u + \frac{3}{2}uD_xu + \frac{1}{4}D_{xxx}u\right) + \frac{3}{4}D_{yy}u = 0 \qquad (3.11)$$

olarak verilmektedir. Burada zincir kuralı ile birlikte

$$\xi = mx + yk + \frac{n\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta} \tag{3.12}$$

dalga dönüşümü kullanılarak (3.11) denklemi

$$\left(\frac{3k^2}{4} + mn\right)u'(\xi) + \frac{3}{2}m^2u(\xi)u'(\xi) + \frac{1}{4}m^4u'''(\xi) = 0 \tag{3.13}$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüşür. Bu lineer olmayan denklem çözümünün

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i\phi^i(\xi)$$

olduğu kabul edilir ve N'yi bulmak için (3.13) denkleminde homojen denge yöntemi kullanılırsa, en yüksek mertebeli lineer olmayan terim $u(\xi)u'(\xi)$ ve lineer olmayan terim $u'''den$

$$N + 3 = 2N + 1$$

olup $N = 2$ bulunur. O halde (3.13) denkleminin çözümünün aşağıdaki gibi

$$u(\xi) = a_0 + a_1\phi(\xi) + a_2\phi^2(\xi) \tag{3.14}$$

olduğu kabul edilir. $\phi(\xi)$, (2.4) diferansiyel denklemini sağlayan bir fonksiyon olup (2.4) 'in çözümü (2.5) denklemi ile verilir. Şimdi (3.14) denklemi (2.4) denkleminde kullanılarak (3.13) 'de yerine yazılır ve ortaya çıkan sonuç $\phi^i(\xi)$ kuvvetlerine göre düzenlenir ve ilgili fonksiyon kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenir ise aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$-\frac{3}{2}a_0a_1m^2\log(p) - a_1\left(\frac{3k^2}{4} + mn\right)\log(p) - \frac{1}{4}a_1m^4\log(p)^3 = 0$$

$$\frac{3}{2}a_0a_1m^2\log(p)-\frac{3}{2}a_1{}^2m^2\log(p)-3a_0a_2m^2\log(p)+a_1\left(\frac{3k^2}{4}+mn\right)\log(p)$$
$$-2a_2\left(\frac{3k^2}{4}+mn\right)\log(p)+\frac{7}{4}a_1m^4\log(p)^3-2a_2m^4\log(p)^3=0$$

$$3a_2{}^2m^2\log(p)+6a_2m^4\log(p)^3=0 \qquad (3.15)$$

$$\frac{3}{2}a_1{}^2m^2\log(p)+3a_0a_2m^2\log(p)-\frac{9}{2}a_1a_2m^2\log(p)+2a_2\left(\frac{3k^2}{4}+mn\right)\log(p)$$
$$-3a_1m^4\log(p)^3+\frac{19}{2}a_2m^4\log(p)^3=0$$

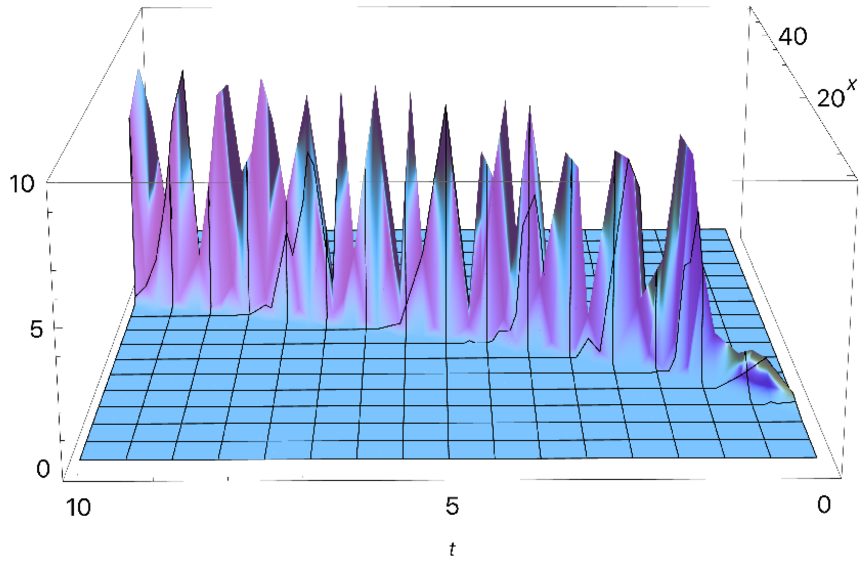
$$\frac{9}{2}a_1a_2m^2\log(p)-3a_2{}^2m^2\log(p)+\frac{3}{2}a_1m^4\log(p)^3-\frac{27}{2}a_2m^4\log(p)^3=0$$

(3.15) denklem sistemi bilgisayar programı yardımı ile çözülürse

$$n=\frac{-3k^2-6a_0m^2-m^4\log(p)^2}{4m},\quad a_1=2m^2\log(p)^2,\quad a_2=-2m^2\log(p)^2$$

elde edilen uygun çözüm seti (2.5) denkleminde (3.14) denkleminde kullanılarak yerine yazılırsa sırasıyla aşağıdaki gibi bir genel çözüm elde edilir.

$$u_1(x,t)=a_0-\frac{(2m^2\log(p)^2)}{\left(1+dp^{mx+ky+\frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}(-3k^2-6a_0m^2-m^4\log(p)^2)}{4m\beta}}\right)^2}$$
$$+\frac{(2m^2\log(p)^2)}{\left(1+dp^{mx+ky+\frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}(-3k^2-6a_0m^2-m^4\log(p)^2)}{4m\beta}}\right)}$$



Şekil 3. 13: $u_1(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $m = 4.8,\ \beta = 0.4,\ k = 2.9, d = 30, a_0 = 0.05,\ y = 0.05, p = 2.5$

3.4 Beta Kesirli Mertebeden Gilson–Pickering Denkleminin Çözümü

Burada Modifiye Kudryashov yöntemi kullanılarak beta kesirli mertebeden Gilson–Pickering denkleminin genel çözümü elde edilecektir. Gilson–Pickering denklemi, optik ve nonlineer optik soliton incelenmesinde yani, ışık sinyallerinin uzun mesafeli etkin olduğu durumlarda bozulmadan iletilebileceğini inceler. Plazma fiziği, Bose-Einstein yoğunlaşmaları, su dalgaları ve hidrodinamik, matematiksel fizik ve analitik çözümler, kaotik dinamikler ve soliton etkileşimleri gibi birçok doğrusal olmayan dalga teorisini modellemek için kullanılır ve bu karmaşık sistemlerin incelenmesini, anlaşılmasını sağlar.

Beta zaman kesirli mertebeden Gilson–Pickering denklemi (Kai ve diğ. 2022);

$$D_t^{\beta} u - \epsilon D_{xx} D_t^{\beta} u + 2\kappa D_x u - u D_{xxx} u - \alpha u D_x u - \gamma D_x u D_{xx} u = 0 \qquad (3.16)$$

şeklinde verilmektedir. Denklemde zincir kuralı ile birlikte

$$\xi = mx + \frac{n\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta} \qquad (3.17)$$

dalga dönüşümü kullanılarak (3.16) denklemi

$$nu'(\xi) + 2m\kappa u'(\xi) - m\alpha u(\xi)u'(\xi) - m^3\gamma u'(\xi)u''(\xi) - m^2 n\epsilon u'''(\xi) - m^3 u(\xi)u'''(\xi) = 0 \qquad (3.18)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüşür. Bu lineer olmayan denklem çözümünün

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i \phi^i(\xi)$$

olduğu kabul edilir ve N'yi bulmak için (3.18) denkleminde homojen denge yöntemi kullanılarak, en yüksek mertebeli lineer terim $u(\xi)u'''(\xi)$ve lineer olmayan terim $u'''den$

$$N + 3 = 2N + 1$$

olup $N = 2$ bulunur. O halde (3.18) denkleminin çözümünün aşağıdaki gibi

$$u(\xi) = a_0 + a_1\phi(\xi) + a_2\phi^2(\xi) \qquad (3.19)$$

olduğu kabul edilir. $\phi(\xi)$, (2.4) diferansiyel denklemini sağlayan bir fonksiyon olup (2.4) 'in çözümü (2.5) denklemi ile verilir. Şimdi (3.19) denklemi (2.4) denkleminde kullanılarak (3.18) 'de yerine yazılır ve ortaya çıkan sonuç $\phi^i(\xi)$ kuvvetlerine göre düzenlenir ve ilgili fonksiyon kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenir ise aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$-a_1 n \log(k) + a_0 a_1 m\alpha \log(k) - 2a_1 m\kappa \log(k) + a_0 a_1 m^3 \log(k)^3 + a_1 m^2 n\epsilon \log(k)^3 = 0$$

$$a_1 n \log(k) - 2a_2 n \log(k) - a_0 a_1 m\alpha \log(k) + a_1{}^2 m\alpha \log(k) + 2a_0 a_2 m\alpha \log(k) + 2a_1 m\kappa \log(k) - 4a_1 m\kappa \log(k) - 7a_0 a_1 m^3 \log(k)^3 + a_1{}^2 m^3 \log(k)^3 + 8a_0 a_2 m^3 \log(k)^3 + a_1{}^2 m^3\gamma \log(k)^3 - 7a_1 m^2 n\epsilon \log(k)^3 + 8a_2 m^2 n\epsilon \log(k)^3 = 0$$

$$2a_2 n\log(k) - {a_1}^2 m\alpha\log(k) - 2a_0 a_2 m\alpha\log(k) + 3a_1 a_2 m\alpha\log(k) + 4a_2 m\kappa\log(k) + 12a_0 a_1 m^3\log(k)^3 - 7{a_1}^2 m^3\log(k)^3 - 38a_0 a_2 m^3\log(k)^3 + 9a_1 a_2 m^3\log(k)^3 - 4{a_1}^2 m^3\gamma\log(k)^3 + 6a_1 a_2 m^3\gamma\log(k)^3 + 12a_1 m^2 n\epsilon\log(k)^3 - 38a_2 m^2 n\epsilon\log(k)^3 = 0$$

$$-24{a_2}^2 m^3\log(k)^3 - 12{a_2}^2 m^3\gamma\log(k)^3 = 0 \qquad (3.20)$$

$$-3a_1 a_2 m\alpha\log(k) + 2{a_2}^2 m\alpha\log(k) - 6a_0 a_1 m^3\log(k)^3 + 12{a_1}^2 m^3\log(k)^3 + 54a_0 a_2 m^3\log(k)^3 - 45a_1 a_2 m^3\log(k)^3 + 8{a_2}^2 m^3\log(k)^3 + 5{a_1}^2 m^3\gamma\log(k)^3 - 22a_1 a_2 m^3\gamma\log(k)^3 + 8{a_2}^2 m^3\gamma\log(k)^3 - 6a_1 m^2 n\epsilon\log(k)^3 + 54a_2 m^2 n\epsilon\log(k)^3 = 0$$

$$-2{a_2}^2 m\alpha\log(k) - 6{a_1}^2 m^3\log(k)^3 - 24a_0 a_2 m^3\log(k)^3 + 66a_1 a_2 m^3\log(k)^3 - 38{a_2}^2 m^3\log(k)^3 - 2{a_1}^2 m^3\gamma\log(k)^3 + 26a_1 a_2 m^3\gamma\log(k)^3 - 28{a_2}^2 m^3\gamma\log(k)^3 - 24a_2 m^2 n\epsilon\log(k)^3 = 0$$

$$-30a_1 a_2 m^3\log(k)^3 + 54{a_2}^2 m^3\log(k)^3 - 10a_1 a_2 m^3\gamma\log(k)^3 + 32{a_2}^2 m^3\gamma\log(k)^3 = 0$$

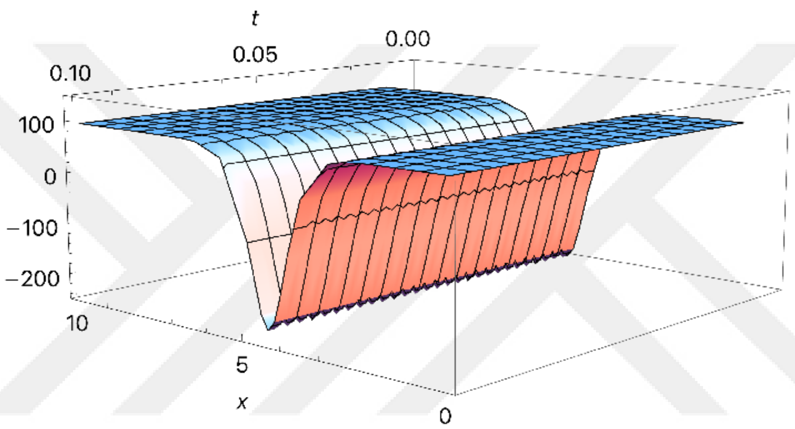
(3.20) denklem sistemi bilgisayar programı yardımı ile çözülürse

$$a_0 = \frac{2\epsilon\kappa}{1 + m^2\epsilon\log(k)^2},\ \ a_1 = -\frac{24m^2\epsilon^2\kappa\log(k)^2}{-1 + m^4\epsilon^2\log(k)^4},\ \ \gamma = -2,$$
$$\alpha = \frac{n + 2m\kappa - m^4 n\epsilon^2\log(k)^4}{2m\epsilon\kappa},\ \ a_2 = \frac{24m^2\epsilon^2\kappa\log(k)^2}{-1 + m^4\epsilon^2\log(k)^4}$$

$$n = -\left(\frac{\left(2(-a_1 m\kappa + 6{a_0}^2 m^3\log(k)^2 + a_0 a_1 m^3\log(k)^2)\right)}{(-a_1 + 12a_0 m^2\epsilon\log(k)^2 + a_1 m^2\epsilon\log(k)^2)}\right),\ \ \gamma = -2,$$
$$\alpha = \frac{\left(m^2\log(k)^2\,(-12a_0 - a_1 + 24\epsilon\kappa + a_1 m^2\epsilon\log(k)^2)\right)}{(-a_1 + 12a_0 m^2\epsilon\log(k)^2 + a_1 m^2\epsilon\log(k)^2)},\qquad a_2 = -a_0$$

elde edilen uygun çözüm seti (2.5) denkleminde (3.19) denkleminde kullanılarak yerine yazılırsa sırasıyla aşağıdaki gibi bir genel çözüm elde edilir.

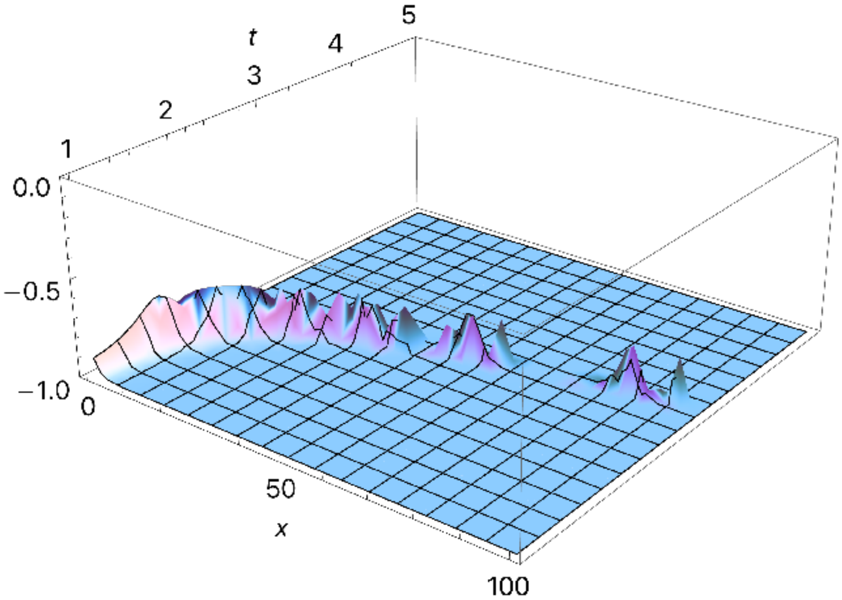
$$u_1(x,t) = \frac{2\epsilon\kappa}{1+m^2\epsilon\log(k)^2} + \frac{24m^2\epsilon^2\kappa\log(k)^2}{\left(1+dk^{mx+\frac{n\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta}}\right)^2\left(-1+m^4\epsilon^2\log(k)^4\right)} - \frac{24m^2\epsilon^2\kappa\log(k)^2}{\left(1+dk^{mx+\frac{n\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta}}\right)\left(-1+m^4\epsilon^2\log(k)^4\right)}$$



Şekil 3. 14: $u_1(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $m = 1.8, \beta = 0.8, k = 5.5, d = 0.000001, \epsilon = 1, \kappa = 500, n = 1.\times 10^{-7}$

$$u_2(x,t) = a_0 - \frac{a_1}{\left(1+dk^{mx-\frac{2\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\left(-a_1m\kappa+6a_0{}^2m^3\log(k)^2+a_0a_1m^3\log(k)^2\right)}{\beta\left(-a_1+12a_0m^2\epsilon\log(k)^2+a_1m^2\epsilon\log(k)^2\right)}}\right)^2} + \frac{a_1}{\left(1+dk^{mx-\frac{2\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\left(-a_1m\kappa+6a_0{}^2m^3\log(k)^2+a_0a_1m^3\log(k)^2\right)}{\beta\left(-a_1+12a_0m^2\epsilon\log(k)^2+a_1m^2\epsilon\log(k)^2\right)}}\right)}$$



Şekil 3. 15: $u_2(x,t)$ fonksiyonu için $3D$ grafiği

ve özel değerleri $m = 1.8, \beta = 5.1, k = 1.5, d = 10, \epsilon = 30, \kappa = 90, a_0 = -1, a_1 = 1$

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, beta kesirli türev içeren denklemler olan Chafee-Infante Geophysical KdV, Sığ Su Dalgası ve Gilson–Pickering denklemleri ele alınmıştır. Ele alınan beta kesirli türev içeren denklemler homojen denge prensibi, dalga dönüşümü ve zincir kuralı yardımı ile indirgenmiş ve Modifiye Kudryashov yöntemi kullanılarak tam çözümleri Wolfram Mathematica programı aracılığıyla çözülmüştür. Elde edilen çözümler literatürde ilk olma özelliğine sahiptir ve bazı özel değerler kabul edilerek üç boyutlu grafikleri de elde edilmiştir.

Sonuç olarak, Modifiye Kudryashov yöntemi, beta kesirli türev içeren bazı matematiksel modellerin analitik çözümleri için etkili ve oldukça kullanışlı olduğu açıktır.

5. KAYNAKLAR

Alakuş, S., and Kurt, A., "NEW WAVE SOLUTIONS OF TIME FRACTIONAL CHAFEE-INFANTE EQUATION WITH BETA DERIVATIVE", *Maltepe Journal of Mathematics*, *6*(1), 15-23, (2024).

Aggarwal, S., "A Survey-cum-Tutorial on Approximations to Gaussian Q Function for Symbol Error Probability Analysis Over Nakagami-mFading Channels", *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, *21*(3), 2195-2223, (2019).

Alkahtani, B. S. T., & Atangana, A., "Controlling the wave movement on the surface of shallow water with the Caputo–Fabrizio derivative with fractional order", *Chaos, Solitons & Fractals*, *89*, 539-546, (2016).

Batool, F., Suleman, M. S., Demirbilek, U., Rezazadeh, H., Khedher, K. M., Alsulamy, S., and Ahmad, H., "Studying the impacts of M-fractional and beta derivatives on the nonlinear fractional model", *Optical and Quantum Electronics*, *56*(2), 164, (2024).

Benson, D. A., *The fractional advection-dispersion equation: Development and application*. Reno: UMI, (1998).

Bhangale, N., Kachhia, K. B., & Gómez-Aguilar, J. F., "Fractional viscoelastic models with Caputo generalized fractional derivative", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *46*(7), 7835-7846, (2023).

Candoğan, Z. Ö., "Beta kesirli türevi ve uygulamaları", Master's thesis, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Uşak, 1-2, (2019).

Claiborne, A. L., Miller, H., "Parsonage, D. and Ross, R. P., Protein-sulfenic acid stabilization and function in enzyme catalysis and gene regulation", *The FASEB journal*, *7*(15), 1483-1490, (1993).

Chakrabarty, A. K., Roshid, M. M., Rahaman, M. M., Abdeljawad, T., and Osman, M. S., "Dynamical analysis of optical soliton solutions for CGL equation with Kerr law nonlinearity in classical, truncated M-fractional derivative, beta fractional derivative, and conformable fractional derivative types”, *Results in Physics*, *60*, 107636, (2019).

Fırat, Ö. “*Diferensiyel Denklemlerin Conformable Diferensiyel Dönüşüm Çözümleri*”, Selçuk Üniversitesi, Konya, (2023).

Han, T., Zhang, K., Jiang, Y., and Rezazadeh, H., “Chaotic pattern and solitary solutions for the (21)-dimensional beta-fractional double-chain DNA system”, *Fractal and Fractional*, *8*(7), 415, (2024).

Jhangeer, A., Ehsan, H., Riaz, M. B., and Talafha, A. M., “Impact of fractional and integer order derivatives on the (4+ 1)-dimensional fractional Davey–Stewartson-Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 100966, (2024).

Kai, Y., Li, Y., & Huang, L., “Topological properties and wave structures of Gilson–Pickering equation”, *Chaos, Solitons & Fractals*, *157*, 111899, (2022).

KARCI, A., *Fractional order derivative and relationship between derivative and complex functions*, *2*(1), 44-54, (2014).

Kurt, A., Tozar, A., & Tasbozan, O., “Applying the new extended direct algebraic method to solve the equation of obliquely interacting waves in shallow waters”, *Journal of Ocean University of China*, *19*, 772-780, (2020).

Milici, C., Drăgănescu, G., and Machado, J. T., “*Introduction to fractional differential equations”*, Switzerland: Springer Nature (2018).

Nadeem, M., Liu, F., and Alsayaad, Y., “Analyzing the dynamical sensitivity and soliton solutions of time-fractional Schrödinger model with Beta derivative”, *Scientific Reports*, *14*(1), 8301, (2024).

Naowarat, S., Saifullah, S., Ahmad, S., & De la Sen, M., “Periodic, singular and dark solitons of a generalized geophysical KdV equation by using the tanh-coth method”, *Symmetry*, *15*(1), 135, (2023).

Oldham, K. B., “Fractional differential equations in electrochemistry”, *Advances in Engineering software*, *41*(1), 9-12, (2010).

Özpınar, F., “Kesirli Mertebe Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Ayrık Homotopi Perturbasyon Metodu ile Çözümü”, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, *20*(2), 213-221, (2020).

Podlubny, I. “Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications”, Amsterdam: Elsevier, (1998).

Selvam, A. P., Govindaraj, V. “Investigation of controllability and stability of fractional dynamical systems with delay in control”, *Mathematics and Computers in Simulation*, *220*, 89-104, (2024).

Shafique, T., Abbas, M., Hamed, Y. S., Iqbal, M. K., & Aljohani, A. F., “Study on the fractional Sasa–Satsuma equation of optical solitons in optical fibers and telecommunications”, *Optical and Quantum Electronics*, *56*(10), 1650, (2024).

Sökmen, Y. “Genelleştirilmiş caputo kesirli türevi ve uygulamaları” *Master's thesis, Ahi Evran Üniversitesi*, (2012).

Stinga, P. R., “Fractional derivatives: Fourier, elephants, memory effects, viscoelastic materials, and anomalous diffusions”, *AMS, arXiv preprint arXiv:2212.02279*, (2022).

Sun, H., Zhang, Y., Baleanu, D., Chen, W., & Chen, Y., “A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *64*, 213-231, (2018).

Tasbozan, O., Çenesiz, Y., and Kurt, A., “New solutions for conformable fractional Boussinesq and combined KdV-mKdV equations using Jacobi elliptic function expansion method”, *The European Physical Journal Plus*, *131*, 1-14, (2016).

Yang, Y., and Zhang, H. H., *Fractional calculus with its applications in engineering and technology*, Morgan & Claypool Publishers, (2019).

Yalcinkaya, I., Tasbozan, O., Kurt, A., and Ahmad, H., “Solution approximations for a mathematical model of relativistic electrons with beta derivative”, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 39(3), 469-485, (2024).