4416

ROMANOVSKİ UZAYLARINDA ÖLÇÜDE AYRILABİLME VE METRİK YOĞUNLUĞU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK)

Bahri TURAN

Haziran 1988

ANKARA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Danışman

Doç. Dr. Seyit Ahmet Kılıç

Sınav Jürisi

<u>Başkan :</u> Prof.Dr.H.Hilmi HACISALİHOĞLU

<u>Üye :</u> Prof.Dr.Ali Osman ASAR

<u>Üye :</u> Doç.Dr.Seyit Ahmet KILIÇ

Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Esaslarına uygundur.

ROMANOVSKİ UZAYLARINDA

ÖLÇÜDE AYRILABİLME VE METRİK YOĞUNLUĞU

(Yüksek Lisans Tezi)

Bahri TURAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 1988

ÖZ

Bu çalışmada doğru üzerindeki metrik ayrışımı bilgisinin Romanovski uzayında ölçüde ayrılabilmeye genişletilmesi yapılmıştır. X'in herhangibir E altkümesinin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şartın E ve E^c kümelerinin ölçüde ayrılabilir olduğu gösterilmiştir. Lebesque yoğunluğunun iki formu incelenmiş ölçülebilir ve ölçülemeyen kümeler üzerinde Lebesque yoğunluk teoremi ispatlanmıştır. Yoğunluk ve dağılmış noktalar kavramları tanımlanmış, $E_1 \subset X$, $E_2 \subset X$ gibi iki kümenin ölçüde ayrılmış olduğu ve olmadığı zaman nelerin olduğu araştırılmıştır. Bizim tanımladığımız Lebesque yoğunluğunun hemen hemen her noktası diğer anlamdaki Lebesque yoğunluğunun bir noktası olduğu ve bunun tersininde doğruluğu gösterilmiştir. Son olarak bu yoğunluk fonksiyonlarının ölçülebilir oldukları gösterilmiştir. Bu çalışmadaki bütün notasyonlar, tanımlar ve diğer kavramlar aynen (7) den alınmıştır.

ON SEPARATION IN MEASURE AND METRIC DENSITY IN ROMANOVSKI SPACES

(M. Sc. Thesis)

Bahri TURAN
GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
June 1988

ABSTRACT

In this paper, the notion of metric separation on the line is extended to a notion of separation in measure in a Romanovski space. It is shown that a set $E \subset X$ is a measurable if and only if E and E^c are separated in measure. Two forms of Lebesque density are discussed, and a Lebesque density theorem is proven for measurable and non-mensurable sets. A study is made, in terms of points of density and dispersion, of when two sets $E_1 \subset X$ and $E_2 \subset X$ are separated in measure and of what happens when they are not. It is shown that almost every point of Lebesque density in one of our senses is a point of Lebesque density in the other sense and conversely. It is shown that the density functions are measurable. Throughout this work, the notation, definitions and conventions of (7) are adopted.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Seyit Ahmet Kılıç'a teşekkürlerimi ve en derin saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

B Ö L Ü M 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

TANIM 1.1: X bir Hausdorf topolojik uzayı μ, X üzerinde Borel ölçüsü, yani μ ölçüsünün tanım kümesi $\mathbf{B}(X)$ olsun. $\mathbf{B}(X) \subset \mathbf{F}$ olacak şekilde X üzerinde $\mathbf{F}$ σ-cebiri verilsin. Eğer,

R1. X'in herbir K kompakt altkümesi için $\mu(K)<\infty$,

R2. Herbir $A \in \mathbf{F}$ için

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) : A \subset V, V \text{ açık}\}$$

R3. X'in herbir açık V altkümesi için

$$\mu(V) = \operatorname{Sup}\{\mu(K) : K \subset V, K \text{ kompakt}\}$$

özellikleri sağlanıyorsa μ pozitif ölçüsüne regülerdir denir.

TANIM 1.2: X topolojik uzayının altkümelerinden oluşan bir $\mathbf{A}$ ailesi için aşağıdaki aksiyonlar sağlanıyorsa $\mathbf{A}$ ya temel kümelerin ailesi denir.

AKSİYOM I : $\mathbf{A}$ ailesi X'in topolojisi için bir bazdır.

AKSİYOM II: Eğer $A \in \mathbf{A}$ ise A nın kapanışı $(\bar{A})$ kompakttır.

U açık bir küme olsun. Sonlu ve ikişer ikişer ayrık $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri için

(i) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset U$

(ii) $\mu(U - \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 0$

özellikleri sağlanıyorsa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dizisine U kümesinin bir ayırışımı denir ve S_U ile gösterilir.

AKSİYOM III : A ve A' **A**'nın elemanı ve $A' \subset A$ ise $A' \in S_A$ olacak şekilde bir S_A ayrışımı vardır.

AKSİYOM IV : **A**'nın herhangi iki A ve A' kümeleri için enazından $S_{A \cap A'}$ ayrışımı vardır.

AKSİYOM V : **A**'nın herhangibir A kümesi ve $\epsilon > 0$ sayısı için $A' \in S_A$ iken $\mu(A') < \epsilon$ olacak şekilde bir S_A ayrışımı vardır.

AKSİYOM VI : **A**'nın A,A',A'' kümeleri için $A' \in S_{A''}$ olacak şekilde $S_{A''}$ ayrışımı var olsun. Eğer $A' \subset A$ ise $A'' \subset A$ dır.

AKSİYOM VII : **A**'nın herbir A kümesi ve $\epsilon > 0$ sayısı için $\mu(A-A') < \epsilon$ ve $\overline{A'} \subset A$ olacak şekilde bir $A' \in \mathbb{A}$ vardır.

AKSİYOM VIII: X'in herhangibir K kompakt kümesi ve K kümesini kapsayan herhangibir U açık kümesi verilsin. **A**'nın bir A kümesi için $\mu(A) < \epsilon$ ve $\bar{A} \cap K \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı varsa $A \subset U$ dır. (Bu aksiyoma regülerliğin birinci özelliği denir.)

AKSİYOM IX : X'in herbir K kompakt altkümesine karşılık **A** dan seçilen K'nın herhangi A, A_i $i = 1,2,\ldots,m$ altkümeleri için $\mu(A_i) < \mu(A)$ ve $A_i \cap A \neq \emptyset$ olduğunda $\mu(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) < \lambda\mu(A)$ olacak şekilde $\lambda > 0$ sayısı vardır.

(Bu aksiyona regülerliğin ikinci özelliği denir.)

AKSİYOM X : **A**'nın bir A elemanı ve $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda $\bar{A} \subset A'$ ve $\mu(A-A') < \epsilon$ olacak şekilde **A**'nın bir A' elemanı vardır.

Herhangibir uzayda temel kümelerden bahsedebilmek için yani bu uzay üzerinde temel kümeler ailesini tanımlayabilmek için uzayın T_1-uzayı ve lokal kompakt olması yeterlidir (7).

Ayrıca **A**'nın herhangibir A kümesi için $0 < \mu(A) < \infty$ olduğu, A kümesinin sınırının ölçüsünün sıfır olduğu ve **A** temel kümelerine sahip olan bir uzayda tek nokta kümelerinin ölçüsünün sıfır olduğu bu aksiyomların bazı sonuçları olarak verilmiştir (7),(4).

X lokal kompakt metrik uzay μ negatif olmayan sayılabilir toplamsal, Borel kümeleri ile kapanışı kompakt kümelerin sonlu bir fonksiyonu olsun. Bu μ fonksiyonu kapanışı kompakt kümeler ile Borel kümeleri üzerinde bir regüler ölçüye genişletilebilir (4),(7).

X lokal kompakt metrik uzay olsun. Her metrik uzay Hausdorf uzayı her Housdorf uzayıda T_1-uzayı olduğundan X, T_1-uzayı ve lokal kompakt olur. Dolayısıyla üzerinde **A** temel kümeler ailesini tanımlayabiliriz.

TANIM 1.3: X lokal kompakt metrik uzay **A**, X üzerinde temel kümelerin ailesi ve μ yukarda sözü edilen regüler ölçü olmak üzere (X,**A**,μ) üçlüsüne Romanovski uzayı denir.

Her metrik uzay ikinci sayılabilir olduğundan X uzayı ikinci sayılabilirdir. Buradan sayılabilir bir topoloji tabanına sahiptir. Dolayısıyla X'in herhangibir A altkümesi için

$$T_A = \{(V_k) : A \subset \bigcup_{k \in I} V_k \ , \ I \text{ sayılabilir}\}$$

ailesi tanımlanabilir.

TANIM 1.4: X'in herbir A altkümesi için

$$\mu^{\star}(A) = \inf\{\sum_{k \in I} \mu(V_k) : (V_k) \in T_A\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye μ ölçüsünün ürettiği dış ölçü denir.

TANIM 1.5: Herhangibir X topolojik uzayı kompakt kümelerin sayılabilir birleşimi olarak yazılabiliyorsa bu uzaya σ-kompakttır denir.

TANIM 1.6: X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir sayıda kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa bu ölçüye σ-sonlu ölçü adı verilir.

ÖNERME 1.7 : Herbir lokal kompakt Hausdorf uzayı sayılabilir topolojik baza sahip ise bu uzay σ-kompaktır (1).

SONUÇ 1.8 : X Romanovski uzayı σ-kompakttır.

SONUÇ 1.9 : X Romanovski uzayı üzerindeki μ regüler ölçüsü σ-sonludur.

İSPAT :

X σ-kompakt olduğundan K_i kompakt kümeler olmak üzere

$$X = \bigcup_{i \in I} K_i, \ I \text{ sayılabilir.}$$

şeklinde yazılabilir. TANIM 1.1, R1 den istenen görülür.

TANIM 1.10 : $\mathbb{F}$, X'in açık altkümelerinin bir ailesi olsun. X'in herhangibir A altkümesi verilsin. Eğer herbir $x \in A$ ve $\epsilon > 0$ sayısı için $x \in B$ ve $\mu(B) < \epsilon$ olacak biçimde $\mathbb{F}$ de bir B elemanı varsa $\mathbb{F}$ ailesine A kümesinin Vitali anlamda bir örtüsüdür denir.

SONUÇ 1.11 : $\mathbb{A}$ temel kümeler ailesi X'in dolayısıyla herbir A altkümesi için bir Vitali örtüsüdür.

İSPAT :

$\mathbb{A}$ temel kümeler ailesi herhangibir $x \in X$ noktası için bir komşuluklar tabanıdır (4). Herhangibir $x \in X$ noktası için $x \in A'$, $x \in A''$ olacak şekilde $A' \in \mathbb{A}$, $A'' \in \mathbb{A}$ kümeleri vardır.

$$A_1 = A'$$
$$A_2 = A' \cap A''$$

olsun. $x \in A_1$, $x \in A_2$ ve $A_1 \supset A_2$ dır. $\mathbb{A}$ komşuluklar tabanı olduğundan

$$x \in A_3 \subset A_1 \cap A_2$$

olacak şekilde $A_3 \in \mathbb{A}$ kümesi vardır. $A_2 \in \mathbb{A}$, $A_3 \in \mathbb{A}$ olduğundan

$$x \in A_4 \subset A_2 \cap A_3$$

olacak şekilde $A_4 \in \mathbb{A}$ kümesi vardır. Bu şekilde devam ederek $\mathbb{A}$ da herbir n için x elemanını kapsayan, azalan bir (A_n) dizisi elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\{x\}) = 0$$

elde edilir. Buradanda herbir $\epsilon > 0$ sayısı için $\mu(A_n) < \epsilon$ olacak şekilde bir n doğalsayısının varlığı bulunur. Sonuç olarak herbir $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ sayısı için $x \in A_n$ ve $\mu(A_n) < \epsilon$ olacak şekilde $\mathbb{A}$'nın bir A_n elemanı bulunmuş olur. Buda $\mathbb{A}$ ailesinin X'in Vitali anlamda bir örtüsü olması demektir.

BÖLÜM 2

ÖLÇÜDE AYRILABİLME

$(X,\mathbf{A},\mu)$ bir Romanovski uzayı ve μ^*, μ ölçüsünün ürettiği dış ölçü olsun.

TANIM 2.1 : X'in iki altkümesi E_1 ve E_2 olsun. Herbir $\epsilon > 0$ sayısı için $\mu(U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) < \epsilon$ olacak şekilde E_1 kümesini kapsıyan $U_{1,\epsilon}$, E_2 kümesini kapsayan $U_{2,\epsilon}$ açık kümeleri varsa E_1 ve E_2 kümeleri μ^* dış ölçüsüne göre ayrıktır denir ve bu durum kısaca m.s. ile gösterilir.

SONUÇ 2.2 : E_1 ve E_2 kümeleri m.s. olsun. X'in herhangibir A,B altkümeleri için $A \cap E_1$ ve $B \cap E_2$ kümeleri m.s. olur.

İSPAT :

E_1 ve E_2 m.s. olduğundan herbir $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\mu(U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) < \epsilon$$

olacak şekilde E_1 kümesini kapsayan $U_{1,\epsilon}$, E_2 kümesini kapsayan $U_{2,\epsilon}$ açık kümeleri vardır. $A \cap E_1 \subset E_1$ ve $B \cap E_2 \subset E_2$ olduğundan $A \cap E_1 \subset U_{1,\epsilon}$ ve $B \cap E_2 \subset U_{2,\epsilon}$ olur. Buradan herbir $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\mu(U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) < \epsilon$$

olacak şekilde $A \cap E_1$ kümesini kapsayan $U_{1,\epsilon}$, $B \cap E_2$ kümesini kapsayan $U_{2,\epsilon}$ açıkları bulunmuş olur. Buradan

TANIM 2.1 gereği $A \cap E_1$ ve $B \cap E_2$ kümeleri m.s. olur.

YARDIMCI ÖNERME 2.3 : E_1 ve E_2 kümeleri m.s. ise $\mu^{\star}(E_1 \cup E_2) = \mu^{\star}(E_1) + \mu^{\star}(E_2)$ dır. Eğer $\{E_i\}$ ikişer ikişer m.s. olan kümelerin bir dizisi ise $\mu^{\star}(\cup E_i)=\Sigma\mu^{\star}(E_i)$ dır.

İSPAT :

E_1 ve E_2 kümeleri m.s. ise herbir $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E_1 \subset U_{1,\epsilon} \ , \ E_2 \subset U_{2,\epsilon} \quad \text{ve} \quad (U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) < \epsilon$$

olacak şekilde $U_{1,\epsilon}$ ve $U_{2,\epsilon}$ açık kümeleri vardır. $\mu^{\star}$ dış ölçüsünün tanımından X'in herhangibir E altkümesi ve $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E \subset U_{\epsilon} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{\epsilon}) < \mu^{\star}(E) + \epsilon$$

olacak şekilde U_{ϵ} açık kümesi vardır. Buradan

$$E_1 \cup E_2 \subset U_{\epsilon} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{\epsilon}) < \mu^{\star}(E_1 \cup E_2) + \epsilon$$

olacak şekilde U_{ϵ} açık kümesi vardır. $i = 1,2$ olmak üzere $U_{i,\epsilon} \supset E_i$ ve $U_{\epsilon} \supset E_1 \cup E_2$ olduğundan $U_{\epsilon} \cap U_{i,\epsilon} \supset E_i$ olur ve $\mu(U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) < \epsilon$ olduğundanda $\mu(U_{\epsilon} \cap U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) < \epsilon$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\mu^{\star}(E_1) + \mu^{\star}(E_2) &\leq \mu(U_{\epsilon} \cap U_{1,\epsilon}) + \mu(U_{\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) \\
&= \mu[(U_{\epsilon} \cap U_{1,\epsilon}) \cup (U_{\epsilon} \cap U_{2,\epsilon})] \\
&+ \mu(U_{\epsilon} \cap U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) \\
&< \mu[(U_{\epsilon} \cap U_{1,\epsilon}) \cup (U_{\epsilon} \cap U_{2,\epsilon})] + \epsilon
\end{aligned}$$

$$= \mu[U_\epsilon \cap (U_{1,\epsilon} \cup U_{2,\epsilon})] + \epsilon$$

$$\leq \mu(U_\epsilon) + \epsilon$$

$$< \mu^\star(E_1 \cup E_2) + 2\epsilon$$

dır. ϵ sayısı keyfi olduğundan

$$\mu^\star(E_1) + \mu^\star(E_2) \leq \mu^\star(E_1 \cup E_2)$$

bulunur. Tersine olarak dış ölçünün alttoplamsallık özelliğinden

$$\mu^\star(E_1 \cup E_2) \leq \mu^\star(E_1) + \mu^\star(E_2)$$

dır. Bu ikisinden

$$\mu^\star(E_1 \cup E_2) = \mu^\star(E_1) + \mu^\star(E_2)$$

elde edilir.

İkinci kısmı tümevarımla ispatlayalım. İfadenin $n = m$ için doğru olduğunu varsayıp $n = m + 1$ için doğruluğunu gösterelim. $\bigcup_{n=1}^{m+1} E_n = (\bigcup_{n=1}^{m} E_n) \cup E_{m+1}$ olduğundan $\bigcup_{n=1}^{m} E_n$ ve E_{m+1} kümelerinin m.s. olduğunu gösterirsek ıspatın ilk kısmından istenen çıkar. $\{E_i\}$ ikişer ikişer m.s. olduğundan $i \neq j$ doğalsayılar ve $k > 0$ sayısı için

$$E_i \subset U_{i,k}, \quad E_j \subset U_{j,k} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{i,k} \cap U_{j,k}) < k$$

olacak şekilde $U_{i,k}$ ve $U_{j,k}$ açık kümeleri vardır.

$k = \epsilon/m$ olarak alalım. $U_m = \bigcup_{i=1}^{m} U_{i,k}$, $U_{m+1,k}$ açık kümeleri için $\bigcup_{n=1}^{m} E_n \subset U_m$ ve $E_{m+1} \subset U_{m+1,k}$ dır. Herbir $k > 0$ dolayısıyla $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\mu(U_m \cap U_{m+1,k}) = \mu[(\bigcup_{i=1}^{m} U_{i,k}) \cap U_{m+1,k}]$$

$$= \mu[(U_{1,k} \cap U_{m+1,k}) \cup \ldots \cup (U_{m,k} \cap U_{m+1,k})]$$

$$\leqslant \mu(U_{1,k} \cap U_{m+1,k}) + \ldots + \mu(U_{m,k} \cap U_{m+1,k})$$

$$< m.k$$

$$= \epsilon$$

olacak şekilde $\bigcup_{n=1}^{m} E_n$ kümesini kapsayan U_m, E_{m+1} kümesini kapsayan $U_{m+1,k}$ açık kümeleri bulunduğundan TANIM 2.1 den $\bigcup_{n=1}^{m} E_n$ ve E_{m+1} kümeleri m.s. olur. Buda istenendir.

öyleyse tümevarım ilkesi nedeniyle

$$\mu^{\star}(\cup E_i) = \Sigma\mu^{\star}(E_i)$$

bulunmuş olur.

TEOREM 2.4 : X'in herhangibir E altkümesinin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart E ve E^C kümelerinin m.s. olmasıdır.

İSPAT :

E kümesi ölçülebilir olsun. Herbir $\epsilon > 0$ sayısı için

$$F \subset E \subset G \quad \text{ve} \quad \mu(G-F) < \epsilon$$

olacak şekilde F kapalı kümesi ve G açık kümesi vardır. $F \subset E$ ve F kapalı küme ise $E^C \subset F^C$ ve F^C açıktır.

$U_{1,\epsilon} = G$, $U_{2,\epsilon} = F^C$ olarak alırsak her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E \subset U_{1,\epsilon} \,,\; E^C \subset U_{2,\epsilon} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) < \epsilon$$

olacak şekilde $U_{1,\epsilon}$ ve $U_{2,\epsilon}$ açık kümeleri bulunmuş olur. Buda E ve E^c kümelerinin m.s. olması demektir.

Şimdi E ve E^c kümeleri m.s. olsunlar SONUÇ 2.2 den X'in herhangibir A altkümesi için $A \cap E$ ve $A \cap E^c$ kümeleri m.s. olur. YARDIMCI ÖNERME 2.3 den

$$\mu^{\star}(A) = \mu^{\star}[(A \cap E) \cup (A \cap E^c)] = \mu^{\star}(A \cap E) + \mu^{\star}(A + E^c)$$

olur ki buda E kümesinin ölçülebilir olması demektir.

(Genişletilmiş Vitali Örtme Teoremi) TEOREM 2.5: $\mu^{\star}(E) < \infty$ ve $\mathbf{F}$, E kümesinin Vitali anlamda bir örtüsü olsun. Bu durumda verilen $\epsilon > 0$ sayısı için

(i) $\quad \mu^{\star}(E - \bigcup_{i=1}^{k} A_i) < \epsilon$

(ii) $\quad \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) < \mu^{\star}(E) + \epsilon$

olacak şekilde sonlu ve ikişer ikişer ayrık $\{A_1, A_2 \ldots, A_k\} \subset F$ dizisi vardır.

İSPAT :

$\epsilon > 0$ sayısı verilsin $\mu(U) < \mu^{\star}(E) + \epsilon$ olacak şekilde U, E kümesini kapsayan açık bir küme olsun. $\mathbb{A}$ temel kümeler ailesi X'in topolojisi için bir baz ve topoloji ikinci sayılabilir olduğundan $\mathbb{A}$ ailesinde

$$X = \cup \mathbb{A}'_n$$

olacak şekilde $\{A'_n\}$ dizisi vardır. $E_1 = E \cap A'_1$, $E_m = E \cap (A'_m - \bigcup_{i=1}^{m-1} A'_i)$ olmak üzere $\{E_m\}$ dizisini tanımlıyalım. $E = \cup E_m$ ve $\{E_m\}$ dizisi ikişer ikişer m.s. olur.

Şimdi $\{E_m\}$ dizisinin ikişer ikişer m.s. olduğunu gösterelim. k ve ℓ doğalsayılar olmak üzere $k \neq \ell$ olsun. $k < \ell$ alabiliriz, aksi durumda rollerini değiştiririz.

$E_k = E \cap (A'_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A'_i)$, $E_\ell = E \cap (A'_\ell - \bigcup_{i=1}^{\ell-1} A'_i)$ olur. A'_k kümesinin ölçülebilir olduğu ve TEOREM 2.4 gözönüne alınırsa A'_k ve A'^c_k kümeleri m.s. olur. SONUÇ 2.2 den

$$A'_k \cap (\bigcap_{i=1}^{k-1} A'^c_i) \text{ ve } A'^c_k \cap (\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\ell-1} A'^c_i) = \bigcap_{i=1}^{\ell-1} A'^c_i$$

kümeleri m.s. olur. Buradan

$$E \cap [A'_k \cap (\bigcap_{i=1}^{k-1} A'^c_i)] \text{ ve } E \cap [A'_\ell \cap (\bigcap_{i=1}^{\ell-1} A'^c_i)]$$

kümeleri, dolayısıyla E_k ve E_ℓ kümeleri m.s. olur. Herhangi $k \neq \ell$ doğal sayı çifti için doğru olduğundan $\{E_m\}$ dizisi ikişer ikişer m.s. olur. YARDIMCI ÖNERME 2.3 den

$$\mu^*(E) = \mu^*(\cup E_m) = \Sigma\, \mu^*(E_m) < \infty$$

bulunur. Buradan herbir $\epsilon > 0$ için $\sum_{m=N+1}^{\infty} \mu^*(E_m) < \epsilon/2$ olacak şekilde bir N doğalsayısı vardır. Herbir $E_m \subset A'_m$ olduğundan $\bigcup_{m=1}^{N} E_m \subset \bigcup_{m=1}^{N} A'_m$ dır. TANIM 1.2, AKSİYOM II gözönüne alınırsa $\bigcup_{m=1}^{N} E_m$ kümesinin kapanışı kompakttır. Genel Vitali Örtme Teoreminden $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\mu^*(\bigcup_{m=1}^{N} E_m - \bigcup_{i=1}^{k} A_i) < \epsilon/2$$

olacak şekilde sonlu ve ikişer ikişer ayrık $\{A_1, A_2 \ldots A_k\} \subset \mathbf{F}$ dizisi vardır (4).

$$\mu^{*}(E - \bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \mu^{*}(\cup E_m - \bigcup_{i=1}^{k} A_i)$$

$$= \mu^{*}[(\bigcup_{m=1}^{N} E_m - \bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cup (\bigcup_{m=N+1}^{\infty} E_m - \bigcup_{i=1}^{k} A_i)]$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2$$

$$= \epsilon$$

bulunur.

(2)

F, E kümesinin Vitali anlamda bir örtüsü olduğundan her $x \in E$ elemanı ve herhangibir $\epsilon > 0$ sayısı için

$$x \in A_{\epsilon,x} \quad \text{ve} \quad \mu(A_{\epsilon,x}) < \epsilon$$

olacak şekilde enazbir $A_{\epsilon,x} \in$ **F** vardır. Buradan $\epsilon = 1$ için $x \in A_{1,x}$ ve $\mu(A_{1,x}) < 1$ olacak şekilde enazbir $A_{1,x} \in$ **F** vardır. $\epsilon = 1/2$ için $x \in A_{2,x}$ ve $\mu(A_{2,x}) < 1/2$ olacak şekilde $A_{2,x} \in$ **F** vardır. Bu şekilde devam ederek $\epsilon = 1/n$ için $x \in A_{n,x}$ ve $\mu(A_{n,x}) < 1/n$ olacak şekilde enazbir $A_{n,x} \in$ **F** vardır. Sonuç olarak h.h. $x \in E$ elemanına bağlı olarak **F** de $x \in \bar{A}_{n,x}$, $\mu(A_{n,x}) \to 0$ olacak şekilde $\{A_{n,x}\}$ dizisi bulunur.

(Özellik : X lokal kompakt Hausdorf uzayı K, X'in kompakt bir altkümesi ve U, K kümesini içine alan X'in açık bir altkümesi olsun. Bu durumda $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$ olacak şekilde X'in kapanışı kompakt bir V açık kümesi vardır (1).)

Şimdi yukarda seçilen U açığını düşünelim. TANIM 1.1 R3'den $\epsilon > 0$ sayısı için

$$C \subset U \quad \text{ve} \quad \mu(U) < \mu(C) + \epsilon$$

olacak şekilde C kompakt kümesi vardır. Yukardaki özellikten $C \subset V_1 \subset \bar{V} \subset U$ olacak şekilde kapanışı kompakt V_1 açık kümesi vardır. Yine aynı özellikten $\bar{V}_1 \subset V_2 \subset \bar{V}_2 \subset U$ olacak şekilde kapanışı kompakt V_2 açık kümesi vardır. Bu şekilde yeteri kadar devam ederek E kümesini h.h. kapsayan ve U içinde kalan bir K kompakt kümesi bulunur. Herbir n,x için $x \in \bar{A}_{n,x}$ ve $x \in K$ olduğundan $\bar{A}_{n,x} \cap K \neq \emptyset$ dir. TANIM 1.2-AKSİYOM VIII den herbir n,x için $A_{n,x} \subset U$ bulunur. $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \subset \mathbf{F}$ alt ailesinin herhangibir A_m elemanı $A_{n,x}$ kümelerinin keyfi birleşimleri olduğundan $1 \leqslant m \leqslant k$ biçimindeki herbir m için $A_m \subset U$ buradanda $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subset U$ bulunur. Öyleyse

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \leqslant \mu(U) < \mu^*(E) + \epsilon$$

olur.

YARDIMCI ÖNERME 2.6 : E_1 ve E_2 kümeleri m.s. ise $E_1 \subset E_1'$, $E_2 \subset E_2'$ ve $\mu(E_1' \cap E_2') = 0$ olacak şekilde E_1' ve E_2' ölçülebilir kümeleri vardır.

İSPAT :

E_1 ve E_2 kümeleri m.s. ise TANIM 2.1. den

$$E_1 \subset U_{1,\epsilon} \ , \ E_2 \subset U_{2,\epsilon} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) < \epsilon$$

olacak şekilde $U_{1,\epsilon}$ ve $U_{2,\epsilon}$ açık kümeleri vardır. $\epsilon = 1$ için

$$E_1 \subset U_{1,1}, \ E_2 \subset U_{2,1} \quad \text{ve} \ \mu(U_{1,1} \cap U_{2,1}) < 1$$

olacak şekilde $U_{1,1}$ ve $U_{2,1}$ açık kümeleri vardır.

$\epsilon = 1/2$ için

$$E_1 \subset U_{1,2} \;,\; E_2 \subset U_{2,2} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{1,2} \cap U_{2,2}) < 1/2$$

olacak şekilde $U_{1,2}$ ve $U_{2,2}$ açık kümeleri vardır. Bu şekilde devam edildiğinde $\epsilon = 1/n$ için

$$E_1 \subset U_{1,n} \;,\; E_2 \subset U_{2,n} \quad \text{ve} \quad (U_{1,n} \cap U_{2,n}) < 1/n$$

olacak şekilde $U_{1,n}$ ve $U_{2,n}$ açık kümeleri vardır. Sonuç olarak herbir n için $E_1 \subset U_{1,n}$ ve $E_2 \subset U_{2,n}$ olacak şekilde $\{U_{1,n}\}$, $\{U_{2,n}\}$ dizileri elde edilir.

$$E_1' = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{1,n} \;,\; E_2' = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{2,n}$$

olsun. Bunların ölçülebildiği ve $E_1 \subset E_1'$, $E_2 \subset E_2'$ olduğu açıktır. Şimdi $\mu(E_1' \cap E_2') = 0$ olduğunu gösterelim. $A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_{1,i}$, $B_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_{2,i}$ olmak üzere $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ dizilerini tanımlayalım. $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ dizileri azalan dolayısıyla $\{A_n \cap B_n\}$ dizisi azalandır. Herbir n için

$$A_n \cap B_n \subset U_{1,n} \cap U_{2,n}$$

dır. Buradan

$$\mu(A_n \cap B_n) \leq \mu(U_{1,n} \cap U_{2,n}) < 1/n$$

dır. Limit durumunda

$$\lim_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) = \mu[\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n)] = \mu[(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{1,n}) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{2,n})] = 0$$

bulunur.

TEOREM 2.7 : (i) E kümesi ölçülebilir, E_1 ve E_2 kümeleri m.s. olmak üzere $E = E_1 \cup E_2$ ise E_1 ve E_2 kümeleri ölçülebilirdir ve $\mu(E) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ dır.

(ii) E_1 ve E_2 sonlu dış ölçümlü ve m.s. olmayan iki küme olsun. E_1 kümesinin bir B_1 altkümesi E_2 kümesinin bir B_2 altkümesi için $\mu^\star(B_i) > \mu^\star(E_i) - p$, $i = 1,2$ olacak şekilde bir $p > 0$, $p < \min\{\mu^\star(E_1), \mu^\star(E_2)\}$ sayısı varsa B_1 ve B_2 kümeleri m.s. değildirler.

İSPAT :

(i) Önce $\mu^\star(E) < \infty$ olduğunu varsayalım. E_1 ve E_2 kümeleri m.s. olduğundan YARDIMCI ÖNERME 2.6 dan

$$E_1 \subset E_1^\star \; , \; E_2 \subset E_2^\star \quad \text{ve} \quad \mu(E_1^\star \cap E_2^\star) = 0$$

olacak şekilde $E_1^\star$ ve $E_2^\star$ ölçülebilir kümeleri vardır. $G = (E \cap E_1^\star) - E_1$ kümesini tamamlayalım.

$$\begin{aligned} G &= (E \cap E_1^\star) - E_1 \\ &= [(E_1 \cup E_2) \cap E_1^\star] \cap E_1^c \\ &= (E_1 \cap E_1^\star \cap E_1^c) \cup (E_2 \cap E_1^\star \cap E_1^c) \\ &= E_2 \cap E_1^\star \cap E_1^c \end{aligned}$$

dır. Burada $G \subset E_1^\star$ ve $G \subset E_2 \subset E_2^\star$ olur. Dolayısıyla $G \subset E_1^\star \cap E_2^\star$ buradanda $\mu(G) \leqslant \mu(E_1^\star \cap E_2^\star) = 0$

olacağından $\mu^\star(G) = 0$ olur ki bu G nin,dolasıyla G^c kümesinin ölçülebilir olması demektir. $E_1 = (E \cap E_1^\star) - G$ şeklinde yazılabileceğinden ve ölçülebilir kümelerin keşişimi ölçülebilir olduğundan E_1 kümesi ölçülebilirdir. $E_2 = E - E_1$ olduğundan E_2 kümesininde ölçülebilirliği açıktır.

Şimdi $\mu^*(E) = \infty$ durumuna bakalım. **A** temel kümeler ailesinden herbir n için

$$\mu(A_n) < \infty \quad \text{ve} \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olacak şekilde $\{A_n\}$ dizisi vardır. $E \cap A_n \subset A_n$ olduğundan $\mu^*(E \cap A_n) \leq \mu(A_n) < \infty$ dır. E_1 ve E_2 kümeleri m.s. olduğundan SONUÇ 2.2 nedeniyle herbir n için $E_1 \cap A_n$ ve $E_2 \cap A_n$ kümeleri m.s. olur. İspatın ilk kısmından herbir n için $E_1 \cap A_n$ ve $E_2 \cap A_n$ kümeleri ölçülebilirdir. $E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_1 \cap A_n)$, $E_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_2 \cap A_n)$ olduğundan E_1 ve E_2 kümeleri ölçülebilirdir.

$$\mu(E) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

şeklinde yazılabileceği ise E_1 ve E_2 kümelerinin m.s. olmasından açıktır.

(ii) E_1 ve E_2 kümeleri m.s. değil ise enazbir $\epsilon > 0$ sayısı ve $U_{i,\epsilon} \supset E_i$, $i = 1,2$ açık kümeleri için

$$\mu(U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) \geq \epsilon$$

dır. $i = 1,2$ için

$$\mu^*(B_i) > \mu^*(E_i) - \epsilon/8$$

olmak üzere E_1 kümesinin B_1, E_2 kümesinin B_2 altkümelerini alalım. Ayrıca

$$\mu(U_i) < \mu^\star(E_i) + \epsilon/8$$

olacak şekilde E_1 kümesini kapsayan U_1, E_2 kümesini kapsayan U_2 açıklarını alalım. B_i kümesini kapsayan herbir U_i'' açık kümesi için $U_i' = U_i \cap U_i''$ açık kümelerini tanımlayalım. Buradan $B_i \subset U_i' \subset U_i$ dir. $\mu(U_i) < \mu^\star(E_i) + \epsilon/8$ ve $\mu^\star(B_i) > \mu^\star(E_i) - \epsilon/8$ olduğundan

$$\mu(U_i) < \mu^\star(B_i) + \epsilon/4$$

olur. Dolayısıyla

$$\mu(U_i - U_i') = \mu(U_i) - \mu(U_i') < \mu(U_i) - \mu^\star(B_i) < \epsilon/4$$

bulunur. $U_1 \cap U_2 - U_1' \cap U_2' \subset (U_1 - U_1') \cup (U_2 - U_2')$ olduğundan

$$\mu(U_1 \cap U_2 - U_1' \cap U_2') \leqslant \mu(U_1 - U_1') + \mu(U_2 - U_2')$$

$$\mu(U_1 \cap U_2) - \mu(U_1' \cap U_2') \leqslant \mu(U_1 - U_1') + \mu(U_2 - U_2')$$

$$\mu(U_1' \cap U_2') \geqslant \mu(U_1 \cap U_2) - \mu(U_1 - U_1') - \mu(U_2 - U_2')$$

$$\mu(U_1' \cap U_2') > \epsilon - \epsilon/4 - \epsilon/4 = \epsilon/2$$

bulunur. Herbir $B_i \subset U_i''$ açık kümeleri için

$$\mu(U_1'' \cap U_2'') \geqslant \mu(U_1' \cap U_2') > \epsilon/2$$

olacağından B_1 ve B_2 kümeleri m.s. değil bulunur.

BÖLÜM 3

METRİK YOĞUNLUĞU

3.1. Yoğunluk Fonksiyonları

X'in herhangibir E altkümesi ve $A \in \mathbb{A}$ kümesi verilsin. A'da E kümesine ve dış ölçüye bağlı olarak

$$m^{\star}(E,A) = \mu^{\star}(E \cap A)/\mu(A)$$

şeklinde $m^{\star}(E,A)$ tanımlansın. Herhangibir $x \in X$ için

$$\overline{\Phi}_n^{\star}(E,x) = \sup\{m^{\star}(E,A) : x \in \overline{A},\ \mu(A) < 1/n\}$$

$$\overline{\Psi}_n^{\star}(E,x) = \sup\{m^{\star}(E,A) : x \in A,\ \mu(A) < 1/n\}$$

$$\underline{\Phi}_n^{\star}(E,x) = \inf\{m^{\star}(E,A) : x \in \overline{A},\ \mu(A) < 1/n\}$$

$$\underline{\Psi}_n^{\star}(E,x) = \inf\{m^{\star}(E,A) : x \in A'\ \mu(A) < 1/n\}$$

$$\overline{\Phi}^{\star}(E,x) = \lim_{n\to\infty} \overline{\Phi}_n^{\star}(E,x)$$

$$\underline{\Phi}^{\star}(E,x) = \lim_{n\to\infty} \underline{\Phi}_n^{\star}(E,x)$$

$$\overline{\Psi}^{\star}(E,x) = \lim_{n\to\infty} \overline{\Psi}_n^{\star}(E,x)$$

$$\underline{\Psi}^{\star}(E,x) = \lim_{n\to\infty} \underline{\Psi}_n^{\star}(E,x)$$

olsun. $\overline{\Phi}^{\star}(E,x)$ ve $\underline{\Phi}^{\star}(E,x)$'e sırasıyla x noktasında E kümesinin üst ve alt dış yoğunluğu denir.

$\overline{\Psi}^{\star}(E,x)$ ve $\underline{\Psi}^{\star}(E,x)$'e sırasıyla x noktasında E kümesinin üst ve alt kısıtlanmış dış yoğunluğu denir.

Eğer $\overline{\Phi}^{\star}(E,x) = \underline{\Phi}^{\star}(E,x)$ ise x noktasında E kümesinin dış yoğunluğunun bir ortak değeri vardır denir ve $\Phi^{\star}(E,x)$ ile gösterilir.

Aynı şekilde $\Psi^{\star}(E,x)$ katlanmış dış yoğunluğu tanımlanır.

Eğer E kümesi ölçülebilir ise simgeler üzerindeki yıldızları kaldırarak ve deyimler önündeki "dış" sözcüğünü kaldırarak benzer tanımlar yapilır.

SONUÇ 3.1.1 :X'in bir E altkümesi ve $x \in X$ noktası için

$$0 \leqslant \underline{\Phi}^{\star}(E,x) \leqslant \underline{\Psi}^{\star}(E,x) \leqslant \overline{\Psi}^{\star}(E,x) \leqslant \overline{\Phi}^{\star}(E,x) \leqslant 1$$

dir.

İSPAT :

Yukardaki tanımlardan kolaylıkla görülür.

Eğer $\overline{\Phi}^{\star}(E,x) = 0$ ise $\Phi^{\star}(E,x) = \Psi^{\star}(E,x) = 0$ dır. Bu özelliği sağlayan x noktalarına E kümesinin dağılmış (dispersion) noktaları denir.

Eğer $\underline{\Phi}^{\star}(E,x) = 1$ ise $\Phi^{\star}(E,x) = \Psi^{\star}(E,x) = 1$ dir. Bu özelliği sağlayan x noktalarına E kümesinin dış yoğun noktaları denir.

Eğer $\overline{\Psi}^{\star}(E,x) = 0$ ise $\Psi^{\star}(E,x) = 0$ dır. Bu özelliği sağlayan x noktalarına E kümesinin kısıtlı dağılmış (restricted dispersion) noktaları denir.

Eğer $\underline{\Psi}^{\star}(E,x) = 1$ ise $\Psi^{\star}(E,x) = 1$ dir. Bu özelliği sağlayan x noktalarına E kümesinin kısıtlı dış yoğun noktaları denir.

Bu tanımlardan açıktır ki E kümesinin herbir dış-yoğun noktası E kümesinin kısıtli dış yoğun noktasıdır.

E kümesinin herbir dağılmış noktasıda E kümesinin kısıtlı dağılmış noktasıdır.

3.2. E_1 ve E_2 kümeleri m.s. Olduğunda Yoğunluk Fonksiyonlarıyla İlişkisi

YARDIMCI ÖNERME 3.2.1: E_1 ve E_2 kümeleri m.s. ise $i \neq j$, $i = 1,2$ için E_i kümesinin h.h. x noktasında $\Phi^{\star}(E_j,x) = 0$ dır. Böylece E_i kümesinin h.h. x noktası E_j kümesinin dağılmış noktasıdır.

İSPAT :

$B_i' = \{x \in E_i : \bar{\Phi}^{\star}(E_j,x) > 0\}$ olmak üzere $\mu^{\star}(B_i') = 0$ olduğunu göstermek yetecektir. $\mu^{\star}(B_i') > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $B_i = \{x \in B_i' : \bar{\Phi}^{\star}(E_j,x) > c\}$ kümesinin ölçüsü sıfırdan büyük olacak şekilde $0 < c < 1$ sayısı vardır. Böyle olmasın. Yani $0 < c < 1$ biçimindeki her c sayısı için $\mu^{\star}(B_i) = 0$ olsun. $x \in B_i'$ ise $\bar{\Phi}^{\star}(E_j,x) > 0$ dır. Buradan $0 < c' < 1$ ve $\bar{\Phi}^{\star}(E_j,x) > c' > 0$ olacak şekilde bir c' sayısı vardır. Bu ise $x \in B_i$ olması demektir. Böylece $B_i' \subset B_i$ bulunur. Dolayısıyla

$$\mu^{\star}(B_i') \leqslant \mu^{\star}(B_i) = 0 \text{ ise } \mu^{\star}(B_i') = 0$$

olur ki bu kabulle çelişir. O halde $\mu^{\star}(B_i) > 0$ dır. Özel olarak bu B_i kümesinin ölçüsünü sonlu farzedebiliriz. E_1 ve E_2 kümeleri m.s. olduğundan her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E_1 \subset U_1 \;,\; E_2 \subset U_2 \quad \text{ve} \quad \mu(U_1 \cap U_2) < \epsilon$$

olacak şekilde U_1 ve U_2 açık kümeleri vardır. Herbir $x \in B_i$ için

$$\bar{\Phi}^{\star}(E_j,x) = \lim_{n\to\infty}(\sup\{m^{\star}(E_j,A): x\in\bar{A},\ \mu(A) < 1/n\}) > c$$

dir.

$$\bar{\Phi}_n^{\star}(E_j,x) = \sup\{m^{\star}(E_j,A)\ :\ x\in\bar{A},\ \mu(A) < 1/n\}$$

olduğundan $\{\bar{\Phi}_n^{\star}(E_j,x)\}$ dizisi azalandır. Buradan herbir n için

$$\lim_{n\to\infty}\bar{\Phi}_n^{\star}(E_j,x) \leqslant \bar{\Phi}_n^{\star}(E_j,x)$$

dır. Dolayısıyla herbir n için

$$\bar{\Phi}_n^{\star}(E_j,x) \geqslant \Phi^{\star}(E_j,x) > c$$

bulunur. $n = 1$ için

$\bar{\Phi}_1^{\star}(E_j,x) > c$ ise $x\in\bar{A}_{1,x}$, $\mu(A_{1,x}) < 1$ ve

$m^{\star}(E_j,A_{1,x}) > c$

olacak şekilde enazbir $A_{1,x}\in\mathbb{A}$ vardır. $n = 2$ için

$\bar{\Phi}_2^{\star}(E_j,x) > c$ ise $x\in\bar{A}_{2,x}$, $\mu(A_{2,x}) < 1/2$ ve

$m^{\star}(E_j,A_{2,x}) > c$

olacak şekilde enazbir $A_{2,x}\in\mathbb{A}$ vardır. Bu şekilde devam ederek n. adımda

$\bar{\Phi}_n^{\star}(E_j,x) > c$ ise $x\in\bar{A}_{n,x}$, $\mu(A_{n,x}) < 1/n$ ve

$m^{\star}(E_j,A_{n,x}) > c$

olacak şekilde enazbir $A_{n,x}\in\mathbb{A}$ vardır. O halde h.h. $x\in B_i$ için $x\in\bar{A}_{n,x}$, $\mu(A_{n,x}) \to 0$ ve $m^{\star}(E_j,A_{n,x}) > c$ olacak şekilde $\mathbb{A}$ da $\{A_{n,x}\}$ dizisi vardır. Genişletilmiş Vitali Örtme Teoreminin ispatında gösterildiği gibi herbir n,x için $A_{n,x} \subset U_i$ dır. Genişletilmiş Vitali Örtme Teoreminden $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\text{(i)} \quad \mu^{\star}(B_i - \bigcup_{m=1}^{k} A_m) < \epsilon$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m) < \mu^{\star}(B_i) + \epsilon$$

olacak biçimde temelde $\{A_{n,x}\}$ dizisinin elemanlarından oluşan sonlu ve ikişer ikişer ayrık $A_1, A_2, \ldots, A_k$ alt ailesi vardır. Buradan

$$\mu^{\star}(B_i) + \epsilon > \sum_{m=1}^{k} (A_m) \geq \sum_{m=1}^{k} \mu^{\star}(B_i \cap A_m) > \mu^{\star}(B_i) - \epsilon \quad (3.2.1.1)$$

dır. Eşitsizliğin ilk iki kısmı (ii) şartından ve $\mu(A_m) \geq \mu^{\star}(B_i \cap A_m)$ $m = 1,2,\ldots,k$ olmasından çıkar. Şimdi son parçasının doğruluğunu gösterelim. $\bigcup_{m=1}^{k} A_m$ kümesi ölçülebilirdir. TEOREM 2.4 den $\bigcup_{m=1}^{k} A_m$ ve $(\bigcup_{m=1}^{k} A_m)^c$ kümeleri m.s., SONUÇ 2.2 den $B_i \cap (\bigcup_{m=1}^{k} A_m)$ ve $B_i \cap (\bigcup_{m=1}^{k} A_m)^c$ kümeleri m.s. olur. $B_i = [B_i \cap (\bigcup_{m=1}^{k} A_m)] \cup [B_i \cap (\bigcup_{m=1}^{k} A_m)^c]$ olduğu ve YARDIMCI ÖNERME 2.3. kullanılırsa

$$\mu^{\star}(B_i) = \mu^{\star}[B_i \cap (\bigcup_{m=1}^{k} A_m)] + \mu^{\star}[B_i - (\bigcup_{m=1}^{k} A_m)]$$

dır. $\{A_m\}$ dizisinin ayrık olduğu ve (i) gözönüne alınırsa

$$\mu^{\star}(B_i) < \sum_{m=1}^{k} \mu^{\star}(B_i \cap A_m) + \epsilon$$

ve dolayısıyla

$$\mu^{\star}(B_i) - \epsilon < \sum_{m=1}^{k} \mu^{\star}(B_i \cap A_m)$$

bulunur. $m = 1,2,\ldots,k$ için A_m, $A_{n,x}$ kümelerinin keyfi birleşimi olduğundan herbir m için $A_m \subset U_i$ ayrıca $E_j \subset U_j$ ve $\mu(U_1 \cap U_2) < \epsilon$ olduğundan

$$\epsilon > \mu(U_1 \cap U_2) \geqslant \sum_{m=1}^{k} \mu^{*}(E_j \cap A_m) \qquad (3.2.1.2)$$

bulunur. Ayrıca herbir m için $m^{*}(E_j, A_m) > c$ olacağı açıktır. $m^{*}(E_j, A_m) = \mu^{*}(E_j \cap A_m)/\mu(A_m) > c$ ise $\mu^{*}(E_j \cap A_m) > c\mu(A_m)$ bulunur. Öyleyse

$$\sum_{m=1}^{k} \mu^{*}(E_j \cap A_m) > c \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m) \qquad (3.2.1.3)$$

dır. (3.2.1.1) eşitsizliğinde $\sum_{m=1}^{k} \mu(A_m) > \mu^{*}(B_i) - \epsilon$ idi, $c > 0$ olduğundan

$$c \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m) > c[\mu^{*}(B_i) - \epsilon] \qquad (3.2.1.4)$$

elde edilir. (3.2.1.2), (3.2.1.3), (3.2.1.4) eşitsizliklerinden

$$\epsilon > \mu(U_1 \cap U_2) \geqslant \sum_{m=1}^{k} \mu^{*}(E_j \cap A_m) > c \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m) > c[\mu^{*}(B_i) - \epsilon]$$

dır. Sonuç olarak $\epsilon > [c\,\mu^{*}(B_i) - \epsilon]$ ise $(1 + c)\epsilon > c\mu^{*}(B_i)$ ve buradan

$$(1 + 1/c)\epsilon > \mu^{*}(B_i)$$

olur. ϵ sayısı keyfi olduğundan bu $\mu^{*}(B_i) > 0$ olmasıyla çelişir. O halde kabul yanlıştır. Yani $\mu^{*}(B_i') = 0$ dır.

YARDIMCI ÖNERME 3.2.2: Eğer E_1 kümesinin h.h. x noktasında $\underline{\Phi}^{*}(E_2, x) = 0$ ise E_1 ve E_2 kümeleri m.s. olur.

İSPAT :

Önce $\mu^{*}(E_1) < \infty$ olduğunu varsayalım.

$B_1 = \{x \in E_1 : \underline{\Phi}^{*}(E_2, x) = 0\}$ olsun. Hipotezden $\mu^{*}(B_1) = \mu^{*}(E_1)$ olacaktır. Herhangibir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde herbir

$x \in B_1$ için $\underline{\Phi}^{\star}(E_2,x) < \epsilon$ dır.

$$\underline{\Phi}_n^{\star}(E_2,x) = \inf\{m^{\star}(E_2,A) : x \in \bar{A},\ \mu(A) < 1/n\}$$

olduğundan $\{\underline{\Phi}_n^{\star}(E\ ,x)\}$ dizisi artandır. Buradan herbir n için

$$\underline{\Phi}_n^{\star}(E_2,x) \leqslant \lim_{n\to\infty} \underline{\Phi}_n^{\star}(E_2,x) = \underline{\Phi}^{\star}(E_2,x) < \epsilon$$

dolayısıyla $\underline{\Phi}_n^{\star}(E_2,x)$ tanımından $n = 1$ için

$$\underline{\Phi}_1^{\star}(E_2,x) < \epsilon \text{ ise } x \in \bar{A}_{1,x},\ \mu(A_{1,x}) < 1 \text{ ve } m^{\star}(E_2,A_{1,x}) < \epsilon$$

olacak şekilde enazbir $A_{1,x} \in \mathbb{A}$ vardır. $n = 2$ için

$$\underline{\Phi}_2^{\star}(E_2,x) < \epsilon \text{ ise } x \in \bar{A}_{2,x},\ \mu(A_{2,x}) < 1/2 \text{ ve } m^{\star}(E_2,A_{2,x}) < \epsilon$$

olacak şekilde enazbir $A_{2,x} \in \mathbb{A}$ vardır. Bu şekilde devam ederek n. adım için

$$\underline{\Phi}_n^{\star}(E_2,x) < \epsilon \text{ ise } x \in \bar{A}_{n,x},\ \mu(A_{n,x}) < 1/n \text{ ve } m^{\star}(E_2,A_{n,x}) < \epsilon$$

olacak şekilde $A_{n,x} \in \mathbb{A}$ vardır. Öyleyse h.h. $x \in B$ için $x \in \bar{A}_{n,x}$, $\mu(A_{n,x}) \to 0$ ve $m^{\star}(E_2,A_{n,x}) < \epsilon$ olacak şekilde $\mathbb{A}$ da bir $\{A_{n,x}\}$ dizisi vardır. Genişletilmiş Vitali Örtme Teoreminden temelde $\{A_{n,x}\}$ dizilerinin elemanlarından oluşan sonlu ve ikişer ikişer ayrık $\{A_1,A_2,\ldots,A_k\} \subset \mathbb{A}$ alt ailesi için

$$\sum_{i=1}^{k} \mu^{\star}(B_1 \cap A_i) > \mu^{\star}(B_1) - \epsilon \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) < \mu^{\star}(B_1) + \epsilon \qquad (3.2.2.1)$$

(3.2.1 YARDIMCI ÖNERME'nin ispatında (3.2.1.1) eşitsizlik)

$U_1 = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ olsun. $\{A_i\}$ dizisi ikişer ikişer ayrık olduğundan $i \neq j$ için $A_i \cap E_1$ ve $A_j \cap E_1$ kümeleri m.s. olur. Ayrıca U_1 ölçülebilir olduğundan TEOREM 2.4 den U_1 ve U_1^c kümeleri m.s., SONUÇ 2.2 den de $E_1 \cap U_1$ ve $E_1 \cap U_1^c = E_1-(U_1 \cap E_1)$ kümeleri m.s. olur. YARDIMCI ÖNERME 2.3, (3.2.2.1) eşitsizliğinin birinci parçası ve $B_1 \subset E_1$ olmasından

$$\mu^*(U_1 \cap E_1) = \mu^*[(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cap E_1] = \sum_{i=1}^{k} \mu^*(A_i \cap E_1)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{k} \mu^*(A_i \cap B_1) > \mu^*(B_1)-\epsilon = \mu^*(E_1)-\epsilon \qquad (3.2.2.2)$$

eşitsizliği yazılır.

$E_1 = (U_1 \cap E_1) \cup [E_1-(U_1 \cap E_1)]$, $U_1 \cap E_1$ ve $E_1-(U_1 \cap E_1)$ kümelerinin m.s. olması ve YARDIMCI ÖNERME 2.3 düşünülürse

$$\mu^*(E_1) = \mu^*(U_1 \cap E_1) + \mu^*[E_1-(U_1 \cap E_1)]$$

dır. Bu eşitlik ve (3.2.2.2) eşitsizliğinden

$$\epsilon > \mu^*(E_1) - \mu^*(U_1 \cap E_1) = \mu^*[E_1-(U_1 \cap E_1)]$$

dır. Buradan $\mu(U_1') < \epsilon$ olacak şekilde $E_1-U_1 \cap E_1$ kümesini kapsayan bir U_1' açık kümesi vardır. (3.2.2.1) eşitsizliğinin ikinci parçasından ve herbir i için $m^*(E_2,A_i) < \epsilon$ olmasından

$$\mu^*(U_1 \cap E_2) = \sum_{i=1}^{k} \mu^*(A_i \cap E_2) < \epsilon \quad \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) < \epsilon[\mu^*(B_1) + \epsilon]$$

elde edilir. Buradan $\mu(U_1'') < \epsilon[\mu^*(B_1) + \epsilon]$ olacak şekilde $U_1 \cap E_2$ kümesini kapsayan U_1'' açık kümesi vardır. U_1 ölçülebilir olduğundan U_1 ve U_1^c kümeleri m.s. dolayısıyla U_1 ve $U_1^c \cap E_2 = E_2- (U_1 \cap E_2)$ kümeleri m.s. olur. Buradan her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E_2 - (U_1 \cap E_2) \subset U_2' \quad \text{ve} \quad \mu(U_1 \cap U_2') < \epsilon$$

olacak şekilde U_2' açık kümesi vardır. Bu seçilişlerle

$$E_1 \subset U_1 \cup U_1' \text{ , } E_2 \subset U_1'' \cup U_2' \quad \text{ve}$$

$$\mu[(U_1 \cup U_1') \cap (U_1'' \cup U_2')] \leqslant \mu(U_1'') + \mu(U_1 \cap U_2') + \mu(U_1')$$

$$< \epsilon[\mu^\star(B_1) + \epsilon] + 2\epsilon$$

bulunur. Sonuç olarak herbir $\epsilon > 0$ için

$$E_1 \subset U_{1,\epsilon} = U_1 \cup U_1' \text{ , } E_2 \subset U_{2,\epsilon} = U_1'' \cup U_2' \quad \text{ve } \mu(U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) < \epsilon$$

olacak şekilde $U_{1,1}$ ve $U_{2,1}$ açık kümeleri bulunmuş olur. Buradanda E_1 ve E_2 kümeleri m.s. olduğu bulunur.

Şimdi $\mu^\star(E_i) = \infty$ için bakalım. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'$ ve $\mu(A_n') < \infty$ olacak şekilde **A** da bir $\{A_n'\}$ dizisi vardır. $E_{i,1} = E_i \cap A_1'$, $E_{i,n} = E_i \cap (A_n' - \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m')$ $i = 1,2,$ $n = 1,2 \ldots$ olsun. $\mu^\star(E_i \cap A') \leqslant \mu(A') < \infty$ olduğundan dolayı ispatın ilk kısmından

$$E_{1,1} \subset U_{1,1} \text{ , } E_{2,1} \subset U_{2,1} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{1,1} \cap U_{2,1}) < 1$$

olacak şekilde $U_{1,1}$ ve $U_{2,1}$ açık kümeleri vardır. Bu şekilde devam edildiğinde herhangibir n doğalsayısı için

$$\mu^\star(E_i \cap A_n') \leqslant \mu(A_n') < \infty \quad \text{olduğundan}$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_{1,k} \subset U_{1,n} \text{ , } \bigcup_{k=1}^{n} E_{2,k} \subset U_{2,n} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{1,n} \cap U_{2,n}) < 1/n$$

olacak şekilde $U_{1,n}$ ve $U_{2,n}$ açık kümeleri vardır.

$H_1 = \lim\inf U_{1,n}$ $H_2 = \lim\inf U_{2,n}$ olarak alırsak

$$E_1 \subset H_1 \ , \ E_2 \subset H_2 \quad \text{ve} \quad \mu(H_1 \cap H_2) = 0$$

olmak üzere H_1 ve H_2 açık kümeleri bulunmuş olur ki buda E_1 ve E_2 kümelerinin m.s. olması demektir.

TEOREM 3.2.3: Aşağıdaki iki özellikten herbiri E_1 ve E_2 kümelerinin m.s. olması için gerekli ve yeterlidir.

(i) $i \neq j$, $i = 1,2$ ve h.h. $x \in E_i$ için $\Phi^*(E_j,x) = 0$

(ii) $i \neq j$, $i = 1,2$ ve h.h. $x \in E_i$ için $\Psi^*(E_j,x) = 0$

İSPAT :

SONUÇ 3.1.1, YARDIMCI ÖNERME 3.2.1 ve 3.2.2 gözönüne alındığında kolaylıkla görülür.

TEOREM 3.2.4: E ölçülebilir bir küme ise h.h. $x \in E$ için $\Phi^*(E^c,x) = 0$ dır.

İSPAT :

TEOREM 2.4 den E ölçülebilir olduğundan E ve E^c kümeleri m.s. olur. TEOREM 3.2.3 den E ve E^c kümeleri m.s. ise h.h. $x \in E$ için $\Phi^*(E^c,x) = 0$ olur.

3.3. E_1 ve E_2 Kümeleri m.s. Olmadığında Yoğunluk Fonksiyonlarıyla ilişkisi

TEOREM 3.3.1 : E_1 ve E_2 kümeleri m.s. değil ve $i \neq j$, $i = 1,2$ için $E_i(E_j) = \{x \in E_i : \bar{\Phi}^*(E_j,x) > 0\}$,

$E_i(E_j)^{\sim} = \{x \in E_i : \overline{\Psi}^{\star}(E_j, x) > 0\}$ olsun. Bu durumda $\mu^{\star}[E_i(E_j)] = \mu^{\star}[E_j(E_i)] > 0$ ve $\mu^{\star}[E_i(E_j)^{\sim}] = \mu^{\star}[E_j(E_i)^{\sim}] > 0$ dır.

İSPAT :

Önce $\mu^{\star}[E_i(E_j)] > 0$ ve $\mu^{\star}[E_i(E_j)^{\sim}] > 0$ olduğunu gösterelim. TEOREM 3.2.3 ve E_1 ve E_2 kümelerinin m.s. değil olduğu gözönüne alınırsa istenen görülür. Şimdi $\mu^{\star}[E_i(E_j)] = \mu^{\star}[E_j(E_i)]$ olduğunu gösterelim. Önce $\mu^{\star}[E_1(E_2)] < \mu^{\star}[E_2(E_1)]$ olduğunu varsayalım. $E_1(E_2)$ kümesini kapsayan ve $\mu(U_1) < \mu^{\star}[(E_2(E_1)]$ özelliğini sağlayan U_1 açık kümesini alalım. Öncelikle böyle bir U_1 açık kümesinin varlığını gösterelim. $\mu^{\star}$ dış ölçüsünün tanımından her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E_1(E_2) \subset U \quad \text{ve} \quad \mu(U) < \mu^{\star}[E_1(E_2)] + \epsilon$$

olacak şekilde U açık kümesi vardır. $\mu^{\star}[E_1(E_2)] < \mu^{\star}[E_2(E_1)]$ olduğundan

$$\mu^{\star}[E_1(E_2)] < r < \mu^{\star}[E_2(E_1)]$$

olacak şekilde bir $r > 0$ reel sayısı vardır.
$\epsilon = r - \mu^{\star}[E_1(E_2)]$ alındığında karşılık gelen açık kümeye U_1 dersek

$$\mu(U_1) < \mu^{\star}[E_1(E_2)] + r - \mu^{\star}[E_1(E_2)] = r < \mu^{\star}[E_2(E_1)]$$

bulunur. Öleyse bu şartlarda bir U_1 açık kümesi seçebiliriz. U_1 kümesinin ölçülebildiği ve TEOREM 2.4 den U_1 ve U_1^c kümeleri m.s. olur SONUÇ 2.2 den $U_1 \cap E_2(E_1)$ ve $U_1^c \cap E_2(E_1)$ kümeleri m.s. olur.

$E_2(E_1) = [U_1 \cap E_2(E_1)] \cup [U_1^c \cap E_2(E_1)]$ olması ve YARDIMCI ÖNERME 2.3 den

$$\mu^*[E_2(E_1)] = \mu^*[U_1 \cap E_2(E_1)] + \mu^*[U_1^c \cap E_2(E_1)]$$
$$\leq \mu(U_1) + \mu^*[U_1^c \cap E_2(E_1)]$$
$$< \mu^*[E_2(E_1)] + \mu^*[U_1^c \cap E_2(E_1)]$$

bulunur. Oysa $\mu^*[U_1^c \cap E_2(E_1)] = 0$ dır. Olmadığını varsayalım. Yani $\mu^*[U_1^c \cap E_2(E_1)] > 0$ olsun. U_1 ve U_1^c kümeleri m.s. olduğundan SONUÇ 2.2 den $\underline{U_1 \cap E_1 \text{ ve } U_1^c \cap E_2(E_1)}$ kümeleri m.s. olur. $E_1(E_2) = \{x \in E_1 : \bar{\Phi}^*(E_2,x) > 0\} \subset E_1 \subset U_1$ olmasından $\{x \in X : \bar{\Phi}^*(E_2,x) = 0\} \supset U_1^c$ dır. Buradan $U_1^c \cap E_1 \subset \{x \in E_1 : \bar{\Phi}^*(E_2,x) = 0\}$ dır. Öyleyse h.h. $x \in U_1^c \cap E_1$ için $\bar{\Phi}^*(E_2,x) = 0$ dır. $E_2(E_1) \subset E_2$ olduğundan $\bar{\Phi}^*(E_2(E_1), x) \leq \bar{\Phi}^*(E_2,x) = 0$ ve dolayısıyla $\bar{\Phi}^*(E_2(E_1),x) = 0$ dır. YARDIMCI ÖNERME 3.2.2 den $U_1^c \cap E_1$ ve $E_2(E_1)$ kümeleri ve böylece $\underline{U_1^c \cap E_1 \text{ ve } U_1^c \cap E_2(E_1)}$ kümeleri m.s. olur.

$U_1 \cap E_1$ ve $U_1^c \cap E_2(E_1)$ kümeleri m.s. ise her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$U_1 \cap E_1 \subset U_1', \quad U_1^c \cap E_2(E_1) \subset U_2 \text{ ve } \mu(U_1' \subset U_2) < \epsilon/2$$

olacak şekilde U_1' ve U_2 açık kümeleri vardır.

$U_1^c \cap E_1$ ve $U_1^c \cap E_2(E_1)$ kümeleri m.s. ise her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$U_1^c \cap E_1 \subset U_1'' \text{ ve } \mu(U_1'' \cap U_2) < \epsilon/2$$

olacak şekilde U_1'' açık kümesi vardır. Bu seçilişlere göre $U_1' \cup U_1'' \supset (U_1 \cap E_1) \cup (U_1^c \cap E_1) = E_1$,

$U_2 \supset U_1^c \cap E_2(E_1)$ ve her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\mu[(U_1' \cup U_1'') \cap U_2] = \mu[(U_1' \cap U_2) \cup (U_1'' \cap U_2)]$$
$$\leqslant \mu(U_1' \cap U_2) + \mu(U_1'' \cap U_2)$$
$$< \epsilon/2 + \epsilon/2$$
$$= \epsilon$$

olur ki buda E_1 ve $U_1^c \cap E_2(E_1)$ kümelerinin m.s. olması demektir. YARDIMCI ÖNERME 3.2.1 den

$$\text{h.h. } x \in U_1^c \cap E_2(E_1) \text{ için } \quad \Phi^\star(E_1,x) = 0$$

dır. Şimdi kabulümüze dönelim. $\mu^\star[U_1^c \cap E_2(E_1)] > 0$ ise $\Phi^\star(E_1,x) = 0$ olacak şekilde $U_1^c \cap E_2(E_1)$ kümesinin enazbir x elemanı dolayısıyla $E_2(E_1)$ kümesinin $\Phi^\star(E_1,x) = 0$ olacak şekilde enazbir x elemanı vardır. Bu ise $E_2(E_1)$ kümesinin tanımıyla çelişir. O halde

$$\mu^\star[U_1^c \cap E_2(E_1)] = 0 \quad \text{dır.} \qquad (3.3.1.1)$$

Bu değeri ilk bulduğumuz eşitsizlikte yerine yazarsak

$$\mu^\star[E_2(E_1)] < \mu^\star[E_2(E_1)]$$

bulunur. Buda $\mu^\star[E_2(E_1)] = \mu^\star[E_2(E_1)]$ olmasıyla çelişir. o halde $\mu^\star[E_1(E_2)] < \mu^\star[E_2(E_1)]$ olamaz.

Aynı şekilde $\mu^\star[E_2(E_1)] < \mu^\star[E_1(E_2)]$ kabul ederek ve yapılan işlemlerde $E_1(E_2)$ yerine $E_2(E_1)$ alarak bu kabülünde olamayacağı gösterilir. Buradan

$$\mu^\star[E_1(E_2)] = \mu^\star[E_2(E_1)]$$

bulunur.

Benzer olarak TEOREM 3.2.3 gözönüne alınarak $\Phi^{\star}(E,x)$ yerine $\Psi^{\star}(E,x)$ kullanılabileceğinden aynı yolu takip ederek

$$\mu^{\star}[E_1(E_2)^{\sim}] = \mu^{\star}[E_2(E_1)^{\sim}]$$

bulunur.

YARDIMCI ÖNERME 3.3.2 : E_1 ve E_2 kümeleri m.s. değil ve $i \neq j$, $i = 1,2$ için $c = \mu^{\star}[E_i(E_j)]$, $\tilde{c} = \mu^{\star}[E_i(E_j)^{\sim}]$ olsun. Bu durumda

$$c = \tilde{c} = \inf\{\mu(U_1 \cap U_2) : U_i \text{ açık küme ve } U_i \supset E_i\}$$

dir.

İSPAT :

$d = \inf\{\mu(U_1 \cap U_2) : U_i$ açık küme ve $U_i \supset E_i\}$ olsun. Önceki önermeden $d = \mu^{\star}[E_1(E_2)]$ olduğunu göstermek yeter.

I. Durum : $\mu^{\star}[E_1(E_2)] < \infty$ ve $\mu^{\star}(E_i) < \infty$ olsun. h.h. $x \in E_1(E_2)$ elemanınına bağlı olarak $x \in \bar{A}_{n,x}$, $(A_{n,x}) \to 0$ olacak şekilde $\mathbf{A}$ da $\{A_{n,x}\}$ dizisi vardır. Genelleştirilmiş Vitali Örtme Teoreminden $\epsilon > 0$ sayısı için

(i) $\quad \mu^{\star}[E_1(E_2) - \bigcup_{m=1}^{k} A_m] < \epsilon/3$

(ii) $\quad \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m) < \mu^{\star}[E_1(E_2)] + \epsilon/3$

olacak şekilde sonlu ve ikişer ikişer ayrık $\{A_1,\ldots,A_k\} \subset \mathbf{A}$ alt ailesi vardır. $E_1(E_2)$ kümesinin tanımından

$$E_1(E_2) = \{x \in E_1 : \bar{\Phi}^{\star}(E_2,x) > 0\}$$

dır. Buradan

$$E_1 \cap E_1(E_2)^c = \{x \in E_1 : \overline{\Phi}^{\star}(E_2,x) = 0\}$$

dır. Dolayısıyla

$$\text{h.h. } x \in E_1 \cap E_1(E_2)^c \text{ için } \overline{\Phi}^{\star}(E_2,x) = 0$$

olur. SONUÇ 3.1.1 düşünülürse

$$\text{h.h. } x \in E_1 \cap E_1(E_2)^c \text{ için } \Phi^{\star}(E_2,x) = 0$$

dır. TEOREM 3.2.3 den $E_1 \cap E_1(E_2)^c = E_1 - E_1(E_2)$ ve E_2 kümeleri m.s. olur. O halde herbir $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E_1 - E_1(E_2) \subset U_1' \,,\; E_2 \subset U_2 \text{ ve } \mu(U_1' \cap U_2) < \epsilon/3$$

olacak şekilde U_1' ve U_2 açık kümeleri vardır. (i) özelliğinden

$$U_1'' \supset E_1(E_2) - \bigcup_{m=1}^{k} A_m \quad \text{ve} \quad \mu(U_1'') < \epsilon/3$$

olacak şekilde U_1'' açık kümesi vardır. $U_1 = \bigcup_{m=1}^{k} A_m \cup U_1' \cup U_1''$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $U_1 \supset E_1, U_2 \supset E_2$ ve her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}
\mu(U_1 \cap U_2) &= \mu[((\bigcup_{m=1}^{k} A_m) \cup U_1' \cup U_1'') \cap U_2] \\
&\leqslant \mu[(\bigcup_{m=1}^{k} A_m) \cap U_2] + \mu(U_1' \cap U_2) + \mu(U_1'' \cap U_2) \\
&< \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m) + \epsilon/3 + \mu(U_1'') \\
&< \mu^{\star}[E_1(E_2)] + \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\
&= \mu^{\star}[E_1(E_2)] + \epsilon
\end{aligned}$$

dır. d nin tanımı gereği $d \leqslant \mu(U_1 \cap U_2)$ olur. Buradan $d < \mu^{\star}[E_1(E_2)] + \epsilon$ bulunur. ϵ sayısı keyfi olduğundan

$$d \leqslant \mu^{\star}[E_1(E_2)]$$

elde edilir.

Diğer yönden E_1 kümesini kapsayan U_1 ve E_2 kümesini kapsayan herbir U_2 açık kümelerini gözönüne alalım. $Z_2 = U_1^c \cap E_2(E_1)$ olsun. TEOREM 3.3.1'in ispatında (3.3.1.1) den $\mu^*(Z_2) = 0$ dır.

$$
\begin{aligned}
E_2(E_1)-Z_2 &= E_2(E_1) \cap [U_1^c \cap E_2(E_1)]^c \\
&= E_2(E_1) \cap [(U_1 \cup E_2(E_1)^c] \\
&= E_2(E_1) \cap U_1 \\
&\subset U_1
\end{aligned}
$$

Ayrıca

$$E_2(E_1)-Z_2 = E_2(E_1) \cap U_1 \subset E_2(E_1) \subset E_2 \subset U_2$$

olduğundan

$$E_2(E_1)-Z_2 \subset U_1 \cap U_2$$

dır. Öyleyse

$$
\begin{aligned}
\mu(U_1 \cap U_2) &\geqslant \mu^*[E_1(E_2)-Z_2] \\
&= \mu^*[E_1(E_2)]-\mu^*(Z_2) \\
&= \mu^*[E_1(E_2)]
\end{aligned}
$$

dır. Bu şarttaki herbir U_1 ve U_2 açık kümeler için doğru olduğundan

$$d \geqslant \mu^*[E_1(E_2)]$$

olur. Sonuç olarak

$$d = \mu^*[E_1(E_2)]$$

elde edilir.

II. Durum : $\mu^*[E_1(E_2)] < \infty$ ve $\mu^*(E_i) = \infty$ olsun.

μ, X üzerinde σ-sonlu olduğundan $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ve $\mu(A_n) < \infty$ olacak şekilde **A** da bir $\{A_n\}$ dizisi vardır. O halde $\mu^*[E_1(E_2) \cap A_1] < \infty$ ve $\mu^*(E_i \cap A_1) < \infty$ dır. H.h $x \in E_1(E_2) \cap A_1$ için **A** da $x \in \bar{A}_{n,x}$, $\mu(A_{n,x}) \to 0$ olacak şekilde bir $\{A_{n,x}\}$ dizisi vardır. Genişletilmiş Vitali örtme Teoreminden herbir $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\text{(iii)} \quad \mu^*[E_1(E_2) \cap A_1 - \bigcup_{m=1}^{k} C_m] < \epsilon/2\cdot 3$$

$$\text{(iv)} \quad \sum_{m=1}^{k} \mu(C_m) < \mu^*[E_1(E_2) \cap A_1] + \epsilon/2\cdot 3$$

olacak şekilde sonlu ve ikişer ikişer ayrık $\{C_1,\ldots,C_k\} \subset$ **A** alt ailesi vardır. İspatın ilk kısmından $E_1 \cap A_1 - E_1(E_2) \cap A_1$ ve $E_2 \cap A_1$ kümeleri m.s. olur. Buradan $\epsilon > 0$ sayısı için

$E_1 \cap A_1 - E_1(E_2) \cap A_1 \subset U_1'$, $E_2 \cap A_1 \subset U_{2,1}$ ve $\mu(U_1' \cap U_{2,1}) < \epsilon/2\cdot 3$

olacak şekilde U_1' ve $U_{2,1}$ açık kümeleri vardır. Ayrıca (iii) özellikten

$$E_1(E_2) \cap A_1 - \bigcup_{m=1}^{k} C_m \subset U_1'' \quad \text{ve} \quad \mu(U_1'') < \epsilon/2\cdot 3$$

olacak şekilde U_1'' açık kümesi vardır. $U_{1,1} = \bigcup_{m=1}^{k} C_m \cup U_1' \cup U_1''$ olsun. $E_1 \cap A_1 \subset U_{1,1}$, $E_2 \cap A_1 \subset U_{2,1}$ ve her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}
\mu(U_{1,1} \cap U_{2,1}) &= \mu[((\bigcup_{m=1}^{k} C_m) \cup U_1' \cup U_1'') \cap U_{2,1}] \\
&\leq \mu[(\bigcup_{m=1}^{k} C_m) \cap U_{2,1}] + \mu(U_1' \cap U_{2,1}) + \mu(U_1'' \cap U_{2,1}) \\
&< \mu^*[E_1(E_2) \cap A_1] + \epsilon/2\cdot 3 + \epsilon/2\cdot 3 + \epsilon/2\cdot 3 \\
&= \mu^*[E_1(E_2) \cap A_1] + \epsilon/2
\end{aligned}$$

dır. Aynı şekilde

$$\mu^{*}[E_1(E_2) \cap (A_2-A_1)] < \infty \text{ ve } \mu^{*}[E_i \cap (A_2-A_1)] < \infty$$

olduğundan önceki yapılanlar tekrar edilirse her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E_1 \cap (A_2-A_1) \subset U_{1,2},\ E_2 \cap (A_2-A_1) \subset U_{2,2} \quad \text{ve}$$
$$\mu(U_{1,2} \cap U_{2,2}) < \epsilon/2^2$$

olacak şekilde $U_{1,2}$ ve $U_{2,2}$ açık kümeleri vardır. Bu şekilde devam edildiğinde herhangibir n için

$$E_1 \cap (A_n - \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m) \subset U_{1,n},\ E_2 \cap (A_n - \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m) \subset U_{2,n}$$
ve $\mu(U_{1,n} \cap U_{2,n}) < \epsilon/2^n$

olacak şekilde $U_{1,n}$ ve $U_{2,n}$ açık kümeleri vardır. Şimdi $U_{1,\epsilon} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{1,n}$, $U_{2,\epsilon} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{2,n}$ olarak tanımlarsak $E_1 \subset U_{1,\epsilon}$, $E_2 \subset U_{2,\epsilon}$ ve her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}
\mu(U_{1,\epsilon} \cap U_{2,\epsilon}) &= \mu[(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{1,n}) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{2,n})] \\
&= \mu[\bigcup_{n=1}^{\infty} (U_{1,n} \cap U_{2,n})] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_{1,n} \cap U_{2,n}) \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{*}[E_1(E_2) \cap (A_n - \bigcup_{m\ 1}^{n-1} A_m) + \epsilon/2^n] \\
&= \mu^{*}[E_1(E_2)] + \epsilon
\end{aligned}$$

olur. ϵ sayısı keyfi olduğundan ve d'nin tanımından

$$d \leq \mu^{*}[E_1(E_2)]$$

bulunur.

Tersine olarak $B_m = \bigcup_{n=1}^{m} A_m$, $E_{1,2,m} = B_m \cap E_1(E_2)$ olsun. $\{E_{1,2,m}\}$ monoton, azalmayan bir dizi ve .

$E_1(E_2) = \lim E_{1,2,m}$ dır. Buradan

$$\mu^\star[E_1(E_2)] = \lim \mu^\star(E_{1,2,m})$$

dır. Herbir m için $\mu^\star(E_i \cap B_m) < \infty$ ve herbir $E_i \subset U_i$ açıkları için $E_i \cap B_m \subset U_i$ dir. Buradan

$$E_1(E_2) \cap B_m \subset U_i \cap B_m \subset U_i$$

olur. I. Durumdaki ispatın ikinci kısmı gözönüne alınırsa

$$\mu^\star(E_{1,2,m}) \leqslant \mu(U_1 \cap U_2 \cap B_m) \leqslant \mu(U_1 \cap U_2)$$

buradanda

$$\mu^\star[E_1(E_2)] = \lim \mu^\star(E_{1,2,m}) \leqslant \mu(U_1 \cap U_2)$$

bulunur ki buda

$$\mu^\star[E_1(E_2)] \leqslant d$$

demektir. Sonuç olarak

$$d = \mu^\star[E_1(E_2)]$$

bulunur.

III. Durum : Eğer $\mu^\star[E_1(E_2)] = \infty$ ise bu durumda $d < \infty$ olduğunu varsayalım. Yukarıdaki ispattan yararlanarak kolaylıkla $\mu^\star[E_1(E_2)] \leqslant d$ olduğu bulunur. Buradanda $\mu^\star[E_1(E_2)] < \infty$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $\mu^\star[E_1(E_2)] = \infty$ olduğunda $d = \infty$ dır. Sonuç olarakda

$$d = \mu^\star[E_1(E_2)]$$

bulunur.

Aynı yol izlenerek kolaylıkla $d = \tilde{c}$ olduğu gösterilir.

YARDIMCI ÖNERME 3.3.3: U açık bir küme ve $i \neq j$, $i = 1,2$ için $E_i(E_j) \subset U$ ise $E_j(E_i)$ kümesinin hemen hemen tümü U içindedir. Eğer $E_i(E_j)^{\sim} \subset U$ ise $E_j(E_i)^{\sim}$ kümesinin hemen hemen tümü U içindedir.

İSPAT :

$E_i(E_j)$ kümesi için gösterelim. U açık bir küme ve $i \neq j$, $i = 1,2$ için $E_i(E_j) \subset U$ olsun YARDIMCI ÖNERME 3.3.2 nin ispatında gösterilmiş olduğundan $E_i - E_i(E_j)$ ve E_j kümeleri m.s. olur. $E_i - U \subset E_i - E_i(E_j)$ olduğundan SONUÇ 2.2 gözönüne alınırsa $E_i - U$ ve E_j kümeleri m.s. olur. Buradan her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E_i - U \subset U_{i,\epsilon}, \quad E_j \subset U_{j,\epsilon} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{i,\epsilon} \cap U_{j,\epsilon}) < \epsilon$$

olacak şekilde $U_{i,\epsilon}$ ve $U_{j,\epsilon}$ açık kümeleri vardır. $\epsilon = 1$ için

$$E_i - U \subset U_{i,1}, \quad E_j \subset U_{j,1} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{i,1} \cap U_{j,1}) < 1$$

olacak şekilde $U_{i,1}$ ve $U_{j,1}$ açık kümeleri vardır. $\epsilon = 1/2$ için

$$E_i - U \subset U_{i,2}, \quad E_j \subset U_{j,2} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{i,2} \cap U_{j,2}) < 1/2$$

olacak şekilde $U_{i,2}$ ve $U_{j,2}$ açık kümeleri vardır. Bu şekilde devam edilerek $\epsilon = 1/n$ için

$$E_i - U \subset U_{i,n}, \quad E_j \subset U_{j,n} \quad \text{ve} \quad \mu(U_{i,n} \cap U_{j,n}) < 1/n$$

olacak şekilde $U_{i,n}$ ve $U_{j,n}$ açık kümeleri vardır.

$E = E_j(E_i) - U$ olsun. Ayrıca $E_i \subset U \cup U_{i,n}$ dir. Herbir n için $U \cup U_{i,n}$ ölçülebilir olduğundan TEOREM 2.4 den $(U \cup U_{i,n})$ ve $(U \cup U_{i,n})^c$ kümeleri m.s. olur. SONUÇ 2.2 den $E_i \cap (U \cup U_{i,n})$ ve $E_j(E_i \cap (U \cup U_{i,n})^c$ kümeleri m.s. olur. Buradan E_i ve $E_j(E_i)-(U \cup U_{i,n})$ kümeleri m.s. olur. TEOREM 3.2.4 den h.h. $x \in E_j(E_i)-(U \cup U_{i,n})$ için $\Phi^\star(E_i,x) = 0$ dır. $H_n = E_j(E_i)-(U \cup U_{i,n})$ olmak üzere $\mu^\star(H_n) = 0$ dır. Olmadığını varsayalım $\mu^\star(H_n) > 0$ ise $\Phi^\star(E_i,x) = 0$ olacak şekilde enazbir $x \in H_n$ vardır. $x \in H_n$ ise $x \in E_j(E_i)$ olacağından $\Phi^\star(E_i,x) = 0$ olacak şekilde enazbir $x \in E_j(E_i)$ bulunur ki bu $E_j(E_i)$ kümesinin tanımıyla çelişir. O halde herbir n için $\mu^\star(H_n) = 0$ dır.

$P = E_j(E_i) - \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ olsun. $\mu^\star(P) = \mu^\star[E_j(E_i)]$ olur.

$$
\begin{aligned}
P-U &= [E_j(E_i) - \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n] - U = [E_j(E_i) - (\bigcup_{n=1}^{\infty}[E_j(E_i)-(U \cup U_{i,n})])] - U \\
&= [E_j(E_i) \cap (E_j(E_i)^c \cup U \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{i,n})] \cap U^c \\
&= E_j(E_i) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{i,n}) \cap U^c \\
&\subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{i,n} \\
&\subset U_{i,n}
\end{aligned}
$$

dır. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
P-U = [E_j(E_i) - \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n] - U &= [E_j(E_i) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n^c] \cap U^c \\
&\subset E_j(E_i) \\
&\subset E_j \\
&\subset U_{j,n}
\end{aligned}
$$

dir. Bu ikisinden $P-U \subset U_{i,n} \cap U_{j,n}$ bulunur. Öyleyse

$$\mu^{\star}(P-U) \leqslant \mu(U_{i,n} \cap U_{j,n}) < 1/n$$

olur. Limit durumunda $\mu^{\star}(P-U) = 0$ olur. $E = E_j(E_i) - U$ olarak tanımlamıştık bu $E = (P-U) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n)$ şeklinde yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} \mu^{\star}(E) &= \mu^{\star}[(P-U) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n)] \\ &\leqslant \mu^{\star}(P-U) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{\star}(H_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmasından $\mu^{\star}[E_j(E_i)-U] = 0$ olur ki buda $E_j(E_i)$ kümesinin hemen hemen tümünün U içinde olması demektir.

İkinci durumda $E_i(E_j)^{\sim} \subset U$ olsun.TEOREM 3.2.3 gözönüne alındığında ilk kısmın ispatında $\Phi^{\star}$ yerine $\Psi^{\star}$ alınarak ve $E_i(E_j)$ yerine $E_i(E_j)^{\sim}$ alarak aynı ispatın tekrarıyla istenen görülür.

TEOREM 3.3.4: $i \neq j$, $i = 1,2$ olmak üzere h.h. $x \in E_i(E_j)$ için $\Phi^{\star}(E_j,x) = 1$, h.h. $x \in E_i(E_j)^{\sim}$ için $\Psi^{\star}(E_j,x) = 1$ dır.

İSPAT :

Önce $E_i(E_j)$ kümesi için ispatı yapalım.$\mu^{\star}(E_i) < \infty$ olsun. $B' = \{x \in E_i(E_j) : \underline{\Phi}^{\star}(E_j,x) < 1\}$ olmak üzere $\mu^{\star}(B') = 0$ olduğunu göstermek yeter. $\mu^{\star}(B') > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $0 < c < 1$ biçiminde ve $B = \{x \in E_i(E_j) : \underline{\Phi}^{\star}(E_j,x) < c\}$ kümesinin ölçüsü sıfırdan büyük olacak şekilde bir c sayısı vardır. Böyle olmasın yani her $0 < c < 1$ biçimindeki c sayısı için $\mu^{\star}(B) = 0$

olsun. $x \in B'$ ise $\underline{\Phi}^{\star}(E_j,x) < 1$ dir. Buradan $0 < c' < 1$ ve $\underline{\Phi}^{\star}(E_j,x) < c' < 1$ olacak şekilde bir c' sayısı vardır. O halde $x \in B$ ve dolayısıyla $B' \subset B$ olur. Buradan $\mu^{\star}(B') \leqslant \mu^{\star}(B) = 0$ olur ki bu kabülle çelişir. Şimdi $0<\epsilon<(1-c)\mu^{\star}(B)$, $B \subset U'$ açık bir küme ve $\mu(U') < \mu^{\star}(B) + \epsilon/6$ olsun. H.h. $x \in B$ elemanına bağlı olarak $x \in \bar{A}_{n,x}$, $\mu(A_{n,x}) \to 0$, herbir n,x için $A_{n,x} \subset U'$ ve $m^{\star}(E_j,A_{n,x}) < c$ olacak şekilde $\mathbb{A}$ da bu $\{A_{n,x}\}$ dizisi vardır. Genişletilmiş Vitali Örtme Teoreminden

$$\text{(i)} \qquad \mu^{\star}(B - \bigcup_{m=1}^{q} A_m) < \epsilon/6$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{m=1}^{q} \mu(A_m) < \mu^{\star}(B) + \epsilon/6$$

olacak şekilde temelde $\{A_{n,x}\}$ dizilerinin elemanlarından oluşan sonlu ve ikişer ikişer ayrık $\{A_1,A_2,..,A_q\} \subset \mathbb{A}$ alt ailesi vardır. $\bigcup_{m=1}^{q} A_m$ kümesi ölçülebilir olduğundan TEOREM 2.4 den $\bigcup_{m=1}^{q} A_m$ ve $(\bigcup_{m=1}^{q} A_m)^c$ kümeleri m.s. olur. $B = [B \cap (\bigcup_{m=1}^{q} A_m)] \cup [B \cap (\bigcup_{m=1}^{q} A_m)^c]$ olması, SONUÇ 2.2, YARDIMCI ÖNERME 2.3 ve (i) özelliği kullanılırsa

$$\mu^{\star}(B) = \mu^{\star}[B \cap (\bigcup_{m=1}^{q} A_m)] + \mu^{\star}[B - \bigcup_{m=1}^{q} A_m)]$$

$$< \sum_{m=1}^{q} \mu^{\star}(B \cap A_m) + \epsilon/6$$

olur. Herbir m için $B \cap A_m \subset A_m$ olmasından

$$\sum_{m=1}^{q} \mu(A_m) \geqslant \sum_{m=1}^{q} \mu^{\star}(B \cap A_m)$$

olur. YARDIMCI ÖNERME 2.2. nin ispatında gösterildiği gibi

$$\sum_{m=1}^{q} \mu^{\star}(B \cap A_m) > \mu^{\star}(B) - \epsilon/6$$

dır. Bu ikisinden

$$\sum_{m=1}^{q} \mu(A_m) \geqslant \sum_{m=1}^{q} \mu^\star(B \cap A_m) > \mu^\star(B) - \epsilon/6$$

bulunur. U' ölçülebilir olduğundan TEOREM 2.4 den U' ve U'^c kümeleri m.s. olur. SONUÇ 2.2 den U' ve $E(E_j)-U'$ kümeleri m.s. olur. Buradan her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E_i(E_j)-U' \subset U'' \text{ ve } \mu(U' \cap U'') < \epsilon/6$$

olacak şekilde U" açık kümesi vardır.

$\mu^\star[U'' \cap E_i(E_j)] < \infty$ olduğundan h.h. $x \in U'' \cap E(E_j)$ elemanına bağlı olarak $x \in \bar{A}_{n,x}$, $\mu(A_{n,x}) \to 0$, herbir n,x için $A_{n,x} \subset U''$ olacak şekilde **A** da $\{A_{n,x}\}$ dizisi vardır. Genişletilmiş Vitali Örtme Teoreminden

$$\text{(iii)} \quad \mu^\star[U'' \cap E_i(E_j) - \bigcup_{m=q+1}^{p} A_m] < \epsilon/6$$

$$\text{(iv)} \quad \sum_{m=q+1}^{p} \mu(A_m) < \mu^\star[U'' \cap E_i(E_j)] + \epsilon/6$$

olacak şekilde temelde $\{A_{n,x}\}$ dizilerinin elemanlarından oluşan sonlu ve ikişer ikişer ayrık $\{A_{q\ 1}, \ldots, A_p\} \subset \mathbb{A}$ alt ailesi vardır. Bu özelliklerden ve $E_i(E_j)-U' \subset U'' \cap E_i(E_j)$ olmasından

$$\sum_{m=q+1}^{p} \mu(A_m) \geqslant \sum_{m=q+1}^{p} \mu^\star[A_m \cap U'' \cap E_i(E_j)]$$

$$> \mu^\star[U'' \cap E_i(E_j)] - \epsilon/6 \geqslant \mu^\star[E_i(E_j)-U'] - \epsilon/6$$

bulunur. $E_i(E_j) \subset U' \cup U''$ olması ve YARDIMCI ÖNERME 3.3.3 den h.h. $E_j(E_i) \subset U' \cup U''$ olması dolayısıyla

$$\mu^\star[E_j(E_i)] = \mu^\star[E_i(E_j) \cap (U' \cup U'')]$$

$$\leqslant \mu^\star[E_i(E_j) \cap U'] + \mu^\star[E_i(E_j) \cap U'']$$

dır. $\bigcup_{m=1}^{q} A_m$ ve $\bigcup_{m=q+1}^{p} A_m$ kümelerinin ölçülebilir olması ve yukarıda bulunan eşitsizlikler gözönüne alındığında

$$\mu^\star[E_j(E_i)] \leqslant \mu^\star[(E_i(E_j)\cap U')\cap(\bigcup_{m=1}^{q} A_m)] + \mu^\star[(E_i(E_j)\cap U')\cap(\bigcup_{m=1}^{q} A_m)^c]$$

$$+ \mu^\star[(E_i(E_j)\cap U'')\cap(\bigcup_{m=q+1}^{p} A_m)] + \mu^\star[(E_i(E_j)\cap U'')\cap(\bigcup_{m=q+1}^{p} A_m)^c]$$

$$\leqslant \mu^\star[E_i(E_j)\cap(\bigcup_{m=1}^{q} A_m)] + \mu^\star[U' - \bigcup_{m=1}^{q} A_m]$$

$$+ \mu^\star[E_i(E_j)\cap(\bigcup_{m=q+1}^{p} A_m)] + \mu^\star[U'' - \bigcup_{m=q+1}^{p} A_m]$$

$$= \sum_{m=1}^{q} \mu^\star[E_i(E_j)\cap A_m] + \mu(U') - \sum_{m=1}^{q} \mu(A_m)$$

$$+ \sum_{m=q+1}^{p} \mu^\star[E_i(E_j)\cap A_m] + \mu(U'') - \sum_{m=q+1}^{p} \mu(A_m)$$

$$< \sum_{m=1}^{q} \mu^\star[E_i(E_j)\cap A_m] + \mu^\star(B) + \epsilon/6 - [\mu^\star(B) - \epsilon/6]$$

$$+ \sum_{m=q+1}^{p} \mu^\star[E_i(E_j)\cap A_m] + \mu^\star[E_i(E_j) - U'] + \epsilon/6$$

$$- [\mu^\star(E_i(E_j) - U') - \epsilon/6]$$

$$= \sum_{m=1}^{q} \mu^\star[E_i(E_j)\cap A_m] + \sum_{m=q+1}^{p} \mu^\star[E_i(E_j)\cap A_m] + 2\epsilon/3$$

$$\leqslant c\sum_{m=1}^{q} \mu(A_m) + \sum_{m=q+1}^{p} \mu(A_m) + 2\epsilon/3$$

$$\leqslant c\,\mu(U') + \mu(U') + 2\epsilon/3$$

$$< c.[\mu^\star(B) + \epsilon/6] + \mu^\star[E_i(E_j) - U'] + \epsilon/6 + 2\epsilon/3$$

$$< c\,\mu^\star(B) + \mu^\star[E_i(E_j) - U'] + \epsilon$$

$$< c\,\mu^{\star}[U'\cap E_i(E_j)]+\mu^{\star}[E_i(E_j)-U']+(1-c)\mu^{\star}[U'\cap E_i(E_j)]$$

$$= \mu^{\star}[U'\cap E_i(E_j)] + \mu^{\star}[E_i(E_j) - U']$$

$$= \mu^{\star}[E_i(E_j)]$$

yani $\mu^{\star}[E_j(E_i)] < \mu^{\star}[E_i(E_j)]$ olur ki buda YARDIMCI ÖNERME 3.3.1 ile çelişir. O halde $\mu^{\star}(B') > 0$ kabülü yanlıştır. Buradan $\mu^{\star}(B') = 0$ bulunur. Buda istenendir.

$\mu^{\star}(E_i) = \infty$ durumunda $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ve $\mu(A_n) < \infty$ olacak şekilde $\mathbb{A}$ da bir $\{A_n\}$ dizisi vardır. Herbir N için

$$E_i(E_j \cap [\bigcup_{n=1}^{N} A_n]) \cap [\bigcup_{n=1}^{N} A_n] = E_i(E_j) \cap [\bigcup_{n=1}^{N} A_n]$$

olduğundan ispatın ilk kısmı gözönüne alınırsa

$$\text{h.h. } x \in E_i(E_j) \cap [\bigcup_{n=1}^{N} A_n] \text{ için } \Phi^{\star}(E_j,x) = 1$$

dir. Herbir N için doğru olduğundan $N \to \infty$ iken

$$\text{h.h. } x \in E_i(E_j) \text{ için } \Phi^{\star}(E_j,x) = 1$$

bulunur.

Aynı ispat yöntemi kullanılarak kolaylıkla

$$\text{h.h. } x \in E_i(E_j)^{\sim} \text{ için } \Psi^{\star}(E_j,x) = 1$$

olduğu gösterilir.

(Genelleştirilmiş Lebesque Yoğunluk Teoremi) TEOREM 3.3.5 : E,X'in herhangibir altkümesi olsun. Bu durumda h.h. $x \in E$ için $\Phi^{\star}(E,x) = 1$ dir. Yani E kümesinin h.h. noktası E kümesinin bir dış yoğun noktasıdır.

İSPAT :

Önce $\mu^{\star}(E) < \infty$ olsun. $B' = \{x \in E : \Phi^{\star}(E,x) < 1\}$

olmak üzere $\mu^{\star}(B') = 0$ olduğunu göstermek yeter. Bu ispatta aynen önceki ispat yöntemi kullanılarak $\mu^{\star}(B') > 0$ alıp ve bunun sonlu bir B alt kümesini seçerek peş peşe Genelleştirilmiş Vitali Örtme Teoremini uygulayıp yapılanlar tekrar edilirse

$$\mu^{\star}(E) < \mu^{\star}(E)$$

çelişkisi bulunur. Dolayısıyla istenen görülür.

$\mu^{\star}(E) = \infty$ durumunde $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ve $\mu(A_n) < \infty$ olacak şekilde $\mathbf{A}$ da bir $\{A_n\}$ dizisi vardır. Herbir N için $E \cap [\bigcup_{n=1}^{N} A_n]$ kümesi sonlu ölçüye sahiptir. Öyleyse ispatın ilk kısmından

$$\text{h.h. } x \in E \cap [\bigcup_{n=1}^{N} A_n] \text{ için } \Phi^{\star}(E,x) = 1$$

dir. Herbir N için doğru olduğundan $N \to \infty$ iken

$$\text{h.h. } x \in E \text{ için } \Phi^{\star}(E,x) = 1$$

bulunur.

3.4. Yoğunluk Fonksiyonlarının Özellikleri

TEOREM 3.4.1 : $\overline{\Phi}^{\star}$, $\underline{\Phi}^{\star}$, $\overline{\Psi}^{\star}$ ve $\underline{\Psi}^{\star}$ yoğunluk fonksiyonları ölçülebilirdir.

İSPAT :

Herhangibir $A \in \mathbf{A}$ kümesi ve A kümesinin temel altkümelerinden oluşan aile $\mathbf{A}(A)$ iken

$$F : \mathbf{A}(A) \to R$$

olmak üzere

$$\underline{D}_x F = \lim_{n\to\infty} (\inf \{F(A)/\mu(A),\ x \in \bar{A}, \mu(A) < 1/n\})$$

$$\bar{D}_x F = \lim_{n\to\infty} (\sup \{F(A)/\mu(A) : x \in \bar{A},\ \mu(A) < 1/n\})$$

fonksiyonları tanımlanmış ve bunların ölçülebilir olduğu gösterilmiştir (4). Özel olarak herhangi bir $E \subset X$ için

$$F(A) = \mu^{\star}(A \cap E)$$

olarak tanımlarsak

$$\underline{\Phi}^{\star}(E,x) = \underline{D}_x F \quad \text{ve} \quad \bar{\Phi}^{\star}(E,x) = \bar{D}_x F$$

olur ki buda $\underline{\Phi}^{\star}$ ve $\bar{\Phi}^{\star}$ fonksiyonlarının ölçülebilir olması demektir.

Şimdi $\underline{\Psi}^{\star}$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösterelim. Herhangibir $k \in R$ için

$$G_{n,m} = \{x: \text{Bir } A \in \mathbf{A} \text{ var } x \in A,\ \mu(A) < 1/n \text{ ve } m^{\star}(E,x) < k-1/m\}$$

$$= \{A \in \mathbf{A} : \mu(A) < 1/n,\ m^{\star}(E,A) < k-1/m\}$$

olsun. Herbir $A \in \mathbf{A}$ kümesi açık olduğundan herbir $n,m = 1,2..$ için $G_{n,m}$ kümesi açıktır.

$$\{x: \underline{\Psi}^{\star}(E,x) \leqslant k\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_{n,m}\right)$$

olur ki herbir n,m için $G_{n,m}$ kümesi ölçülebilir olduğundan öyleyse

$$\{x : \underline{\Psi}^{\star}(E,x) \leqslant k\}$$

kümesi ölçülebilirdir. Buradan $\underline{\Psi}^{\star}$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

Aynı yolu izleyerek $\bar{\Psi}^*$ fonksiyonunun ölçülebilirliği gösterilir.

SONUÇ 3.4.2 : X'in herbir E altkümesi için

(i) $D(E) = \{x: \Phi^*(E,x) = 1\}$,

(ii) $R(E) = \{x: \Psi^*(E,x) = 1\}$,

(ii) $D_0(E) = \{x: \Phi^*(E,x) = 0\}$,

(iv) $R_0(E) = \{x: \Psi^*(E,x) = 0\}$ kümeleri ölçülebilirdir.

(v) E kümesinin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart E kümesinin D(E) kümesini h.h. kapsamasıdır.

(vi) E kümesinin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart E kümesinin R(E) kümesini h.h. kapsamasıdır.

İSPAT :

(i), (ii), (iii) ve (iv) TEOREM 3.4.1 den açıktır.

(v)

E kümesi ölçübelir olsun. TEOREM 2.4 den E ve E^c kümeleri m.s., SONUÇ 2.2 dende $E^c \cap D(E)$ ve E kümeleri m.s. olur. YARDIMCI ÖNERME 3.2.1 den

$$\text{h.h. } x \in E^c \cap D(E) \text{ için } \Phi^*(E,x) = 0$$

dır. H.h. $D(E) \subset E$ olduğunu göstermek için $\mu^*(D(E)-E) = 0$ olduğunu göstermek yetecektir. $\mu^*(D(E)-E) > 0$ olduğunu varsayalım. $\mu^*(D(E)-E) > 0$ ise h.h. $x \in E^c \cap D(E)$ için $\Phi^*(E,x) = 0$ olduğundan $\Phi^*(E,x) = 0$ olacak şekilde enazbir

$x \in E^c \cap D(E)$ vardır. Buradan $\Phi^*(E,x) = 0$ olacak şekilde enazbir $x \in D(E)$ bulunur ki bu $D(E)$ kümesinin tanımıyla çelişir. Öyleyse kabul yanlıştır. Buradan

$$\mu^*(D(E)-E) = 0$$

bulunur.

Tersine olarak h.h. $D(E) \subset E$ olsun. Genişletilmiş L.Y. Teoreminden

$$\text{h.h. } x \in E \quad \text{için} \quad \Phi^*(E,x) = 1$$

dir. Bu $x \in D(E)$ olması demektir. O halde

$$\text{h.h. } E \subset D(E)$$

elde edilir. Hipotezde gözönüne alınırsa

$$\text{h.h. } D(E) = E$$

bulunur. $D(E)$ kümesinin ölçülebilirliğinden E kümesi ölçülebilirdir.

(vi)

E kümesi ölçülebilir olsun. E ve E^c kümeleri m.s. dolayısıyla $R(E) \cap E^c$ ve E kümeleri m.s. olur. YARDIMCI ÖNERME 3.2.1 den

$$\text{h.h. } x \in R(E) \cap E^c \text{ için } \Phi^*(E,x) = 0$$

dır. $\mu^*(R(E)-E) > 0$ olduğunu varsayalım. $\mu^*(R(E)-E) > 0$ ise $\Phi^*(E,x) = 0$ olacak şekilde enazbir $x \in R(E) \cap E^c$ vardır. Buradan $\Phi^*(E) = 0$ olacak şekilde dolayısıyla $\Psi^*(E,x) = 0$ olacak şekilde $R(E)$ kümesinin enazbir x elemanı vardır. Bu ise $R(E)$ kümesinin tanımıyla çelişir. O halde kabul yanlıştır. Öyleyse

$$\mu^{\star}(R(E)-E) = 0$$

dır. Buda h.h. $R(E) \subset E$ olması demektir.

Tersine olarak h.h. $R(E) \subset E$ olsun. Genişletilmiş L.Y. Teoreminden

$$\text{h.h. } x \in E \text{ için } \Phi^{\star}(E,x) = 1$$

dir. SONUÇ 3.1.1 den

$$\text{h.h. } x \in E \text{ için } \Psi^{\star}(E,x) = 1$$

elde edilir ki bu $x \in R(E)$ demektir. Buradan

$$\text{h.h. } E \subset R(E)$$

bulunur. Hipotez gözönüne alınırsa

$$\text{h.h. } R(E) = E$$

olur. $R(E)$ kümesi ölçülebilir olduğundan E kümeside ölçülebilirdir.

TEOREM 3.4.3: $E \subset X$ olsun. Bu durumda

(i) $D(E) \subset R(E)$ ve $\mu^{\star}(R(E)-D(E)) = 0$,

(ii) $D_0(E) \subset R_0(E)$ ve $\mu^{\star}(R_0(E)-D_0(E)) = 0$,

(iii) X in h.h. noktası E kümesinin ya dış yoğun noktasıdır yada dağılmış noktasıdır.

İSPAT : (i)

Herhangibir $x \in X$ için

$x \in D(E)$ ise $\Phi^{\star}(E,x) = 1$

dir. SONUÇ 3.1.1 den

$$\Phi^\star(E,x) = 1 \quad \text{ise} \quad \Psi^\star(E,x) = 1$$

dır. Buradan $x \in R(E)$ olur. Dolayısıyla $D(E) \subset R(E)$ dir. Genelleştirilmiş L. Y. Teoreminden

$$\text{h.h. } x \in E \text{ için } \Phi^\star(E,x) = 1$$

dir. Buradan

$$Z = \{x \in E : \Phi^\star(E,x) \neq 1\} \text{ ise } \mu^\star(Z) = 0$$

dır. $E_0 = E - Z$ olsun. $\mu^\star(E) = \mu^\star(E_0)$ dır.

$$\begin{aligned} m^\star(E,A) &= \mu^\star(E \cap A)/\mu(A) \\ &= \mu^\star(E_0 \cap A)/\mu(A) \\ &= m^\star(E_0,A) \end{aligned}$$

olduğundan $\Phi^\star(E,x) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\Phi^\star(E_0,x) = 1$ olmasıdır. SONUÇ 3.1.1 den bu önerme doğruysa $\Psi^\star(E,x) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\Psi^\star(E_0,x) = 1$ önermesi doğrudur.

Şimdi $\mu^\star(R(E)-D(E)) > 0$ olduğunu varsayalım. $D(E)$ kümesi ölçülebilir olduğundan $D(E)$ ve $D(E)^c$ kümeleri m.s. dolayısıyla $D(E) \cap E_0$ ve $R(E) \cap D(E)^c$ kümeleri m.s. olur. $E_0 \subset D(E)$ olduğundan E_0 ve $R(E) \cap D(E)^c$ kümeleri m.s. olur. TEOREM 3.2.1 den

$$\text{h.h. } x \in R(E) \cap D(E)^c \text{ için } \Phi^\star(E_0,x) = 0$$

dır. $\mu^\star(R(E)-D(E)) > 0$ ise $\Phi^\star(E_0,x) = 0$ olacak şekilde $R(E) \cap D(E)^c$ kümesinin enazbir x elemanı vardır. Yukarıdaki iki önermeden $\Psi^\star(E_0,x) = 0$ olacak şekilde $R(E) \cap D(E)^c$ kümesinin enazbir x elemanı, buradanda $\Psi^\star(E,x) = 0$ olacak şekilde R(E) kümesinin enazbir x elemanının varlığı bulunur. O halde kabul yanlıştır. Dolayısıyla $\mu^{\star}(R(E)-D(E))=0$ bulunur.

(ii)

Herhangibir $x \in X$ için $x \in D_0(E)$ ise $\Phi^{\star}(E,x) = 0$ dır. SONUÇ 3.1.1 den $\Phi^{\star}(E,x) = 0$ ise $\Psi^{\star}(E,x) = 0$ bulunur. Bu ise $x \in R_0(E)$ olması demektir. Buradan $D_0(E) \subset R_0(E)$ dir.

$[R(E)]^c = \{x : \Psi^{\star}(E,x) = 1\}^c = \{x : \Psi^{\star}(E,x) \neq 1\}$

$x \in R_0(E)$ ise $\Psi^{\star}(E,x) = 0 \neq 1$ olduğundan $x \in [R(E)]^c$ dolayısıyla $R_0(E) \subset [R(E)]^c$ olur. Genelleştirilmiş L.Y. Teoreminden

$$\text{h.h. } x \in E \text{ için } \Phi^{\star}(E,x) = 1$$

dır. Buradan

$$Z = \{x \in E : \Phi^{\star}(E,x) \neq 1\} \text{ ise } \mu^{\star}(Z) = 0$$

dır. $E_0 = E-Z$ olduğundan $\mu^{\star}(E_0) = \mu^{\star}(E)$ olur. $x \in E_0$ ise $\Phi^{\star}(E,x) = 1$, SONUÇ 3.1.1 den $\Phi^{\star}(E,x) = 1$ ise $\Psi^{\star}(E,x) = 1$ olur. Buradan $x \in R(E)$ dolayısıyla $E_0 \subset R(E)$ olur. R(E) kümesi ölçülebilir olduğundan R(E) ve $R(E)^c$ kümeleri m.s. SONUÇ 2.2 den $R(E)^c \cap D_0(E)^c$ ve $R(E) \cap E_0$ kümeleri m.s., $E_0 \subset R(E)$ olduğundan $R(E)^c \cap D_0(E)^c$ ve E_0 kümeleri m.s. olur. YARDIMCI ÖNERME 3.2.1 düşünülürse

$$\text{h.h. } x \in R(E)^c-D_0(E) \text{ için } \Phi^{\star}(E_0,x) = 0$$

dır. $\mu^{\star}(R(E)^c-D_0(E)) > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\Phi^{\star}(E,x) = 0$ olacak şekilde $R(E)^c-D_0(E)$ kümesinin enazbir x elemanı vardır. Yukarda verilen önermeden

$\Phi^{\star}(E,x) = 0$ olacak şekilde $D_0(E)^c$ kümesinin enazbir x elemanı vardır. Bu ise $D_0(E)$ kümesinin tanımıyla çelişir. O halde kabul yanlış dolayısıyla $\mu^{\star}(R(E)^c - D_0(E)) = 0$ dır.

$R_0(E) \subset R(E)^c$ ise $R_0(E) - D_0(E) \subset R(E)^c - D_0(E)$

dir. Buradan

$$\mu^{\star}(R_0(E) - D_0(E)) \leqslant \mu^{\star}(R(E)^c - D_0(E) = 0$$

böylece

$$\mu^{\star}(R_0(E) - D_0(E)) = 0$$

bulunur.

(iii)

$\mu^{\star}(R(E) - D(E)) = 0$ ise h.h. $R(E) \subset D(E)$,

$\mu^{\star}(R(E)^c - D_0(E)) = 0$ ise h.h. $R(E) \subset D_0(E)$

olur. Bu ikisinden

$$\text{h.h. } X \subset D(E) \cup D_0(E)$$

bulunur ki buda istenendir.

Bu makalenin sonuçları için özel bir uzay örneği olarak E^n Öklid uzayı ile üzerindeki Lebesque ölçüsü verilebilir.

Ayrıca ölçülemeyen bir kümeden teorik olarak nasıl ölçülebilir bir küme elde edilebileceği hakkında bir fikir olması amacıyla, basit ama oldukça ilginç şu örneğide bir sonuç olarak verebiliriz.

PROBLEM : E, X'in herhangibir ölçülmeyen altkümesi olsun. $E - E(E^c)$ kümesi ölçülebilirdir.

ÇÖZÜM :

$E(E^c) = \{x \in E : \bar{\Phi}^{\star}(E^c, x) > 0\}$ olarak tanımlamıştık. Ayrıca

$$\underline{E - E(E^c) \text{ ve } E^c \text{ kümelerinin m.s.}}$$

olduğu YARDIMCI ÖNERME 3.3.2 nin ispatının içinde gösterilmişti. $E^c(E) = \{x \in E^c : \bar{\Phi}^{\star}(E,x) > 0\} \subset E^c$ olduğundan ve SONUÇ 2.2 den $E - E(E^c)$ ve $E^c \cap E^c(E)$ kümeleri m.s. olacağından $E - E(E^c)$ ve $E^c(E)$ kümeleri m.s. olur. Buradan her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E - E(E^c) \subset U_1, \; E^c(E) \subset U' \text{ ve } \mu(U_1 \cap U') < \epsilon/2$$

olacak şekilde U ve U' açık kümeleri vardır. $E^c(E) \subset U'$ ise YARDIMCI ÖNERME 3.3.3 den h.h. $E(E^c) \subset U'$ dır. Buradan $Z = E(E^c) - U'$ olmak üzere $\mu^{\star}(Z) = 0$ dır. Dolayısıyla $Z \subset U''$ ve $(U'') < \epsilon/2$ olacak şekilde U'' açık kümesi vardır. $U_2 = U' \cup U''$ olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E - E(E^c) \subset U_1, \; E(E^c) \subset U_2 \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} \mu(U_1 \cap U_2) &= \mu[U_1 \cap (U' \cup U'')] \\ &\leqslant \mu(U_1 \cap U') + \mu(U_1 \cap U'') \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

olduğundan

$$\underline{E - E(E^c) \text{ ve } E(E^c) \text{ kümeleri m.s.}}$$

olur.

$E-E(E^c)$ ve E^c kümeleri m.s. ise her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E-E(E^c) \subset U_1, E^c \subset U_3' \quad \text{ve} \quad \mu(U_1 \cap U_3') < \epsilon/2$$

olacak şekilde U_1 ve U_3' açık kümeleri vardır.

$E-E(E^c)$ ve $E(E^c)$ kümeleri m.s. ise her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E-E(E^c) \subset U_1 \text{ve} \quad E(E^c) \subset U_3'' \text{ ve } \mu(U_1 \cap U_3'') < \epsilon/2$$

olacak şekilde U_1 ve U_3'' açık kümeleri vardır. Buradan her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$E-E(E^c) \subset U_1, E^c \cup E(E^c) \subset U_3' \cup U_3'' = U_3 \text{ ve}$$

$$\begin{aligned}(U_1 \cap U_3) &= \mu[U_1 \cap (U_3' \cup U_3'')] \\ &\leqslant \mu(U_1 \cap U_3') + \mu(U_1 \cap U_3'') \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

olduğundan

$E-E(E^c)$ ve $E^c \cup E(E^c) = [E-E(E^c)]^c$ kümeleri m.s. bulunur. TEOREM 2.4 den $E-E(E^c)$ kümesi ölçülebilirdir.

KAYNAKLAR

1- Cohn, D.L., Measure Theory, Birkhauser, Stuttgart, 1980

2- Holmos, P.R., Measure Theory, One Nostrand, New York, 1950

3- Munroe, M.E., Measure and Inteiration, Addison Wesley Publishing Company, Inc., London, 1971

4- Romanowski, P., "Integrale de Denjoy dans les espaces obstraits" Math. Sbornik, vol.9 (51) (1941), pp. 67-119

5- Royden, H.L., Real Analysis, 2nd ed., Macmillian, New York, 1968

6- Rudin, W., Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1966

7- Solomon, D.W., "Denjoy Integration in abstract spaces" Mem. Amer. Math. Soc. (1969)

8- Solomon, D.W., "On separation in measure and metric density in a Romanovski spaces" Duke Math. J. vol. 36(1969), pp. 81-90

ÖZGEÇMİŞ

ÖZGEÇMİŞ

Bahri Turan 1962 yılında Denizli İlinin Çivril İlçesinin Çıtak Kasabasında doğdu.

1978 yılında Denizli Lisesinden, 1985 yılında Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu.

1986 yılında Gazi-Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesinde Araştırma Görevlisi olarak başladığı göreve halen devam etmektedir.

Bülent Savaşlı

Atatürk Bulvarı No.:151
Kat:9 Daire No: 905
Bakanlıklar - ANKARA

Tel : 117 02 17