



BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN
SINIRLAYICI PADE YAKLAŞIMI
METODU İLE ÇÖZÜMLERİ

Fevziye GÜLSEVER

Yüksek Lisans Tezi

Haziran - 2016

BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN SINIRLAYICI PADE YAKLAŞIMI METODU
İLE ÇÖZÜMLERİ

Fevziye GÜLSEVER

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Ahmet BOZ

Haziran – 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Fevziye GÜLSEVER'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Bazı Kısmi Türevli Denklemlerin Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı Metodu İle Çözümleri” başlıklı çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

16/06/2016

Üye : Doç. Dr. Ahmet BOZ

Üye : Doç. Dr. A. Serdar NAZLIPINAR

Üye : Prof. Dr. Ahmet BEKİR

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun .../.../2016 gün vesayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının % 20 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Doç. Dr. Ahmet BOZ

Fevziye GÜLSEVER

BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN SINIRLAYICI PADE YAKLAŞIMI METODU İLE ÇÖZÜMLERİ

Fevziye GÜLSEVER

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2016

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet BOZ

ÖZET

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde difüzyon denkleminin sınırlayıcı Pade yaklaşımı ile nümerik çözümü için gerekli olan temel bilgiler verilmiştir. Özellikle çözüm yöntemine yönelik açıklamalar da bulunulmuştur.

İkinci bölümde, özgün bir çalışma olarak lineer difüzyon denkleminin sınırlayıcı Pade yaklaşımı ile nümerik çözümü elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde ise aynı yöntemin singüler pertürbe edilmiş hiperbolik denklem üzerindeki uygulaması incelenmiş ve çözüm algoritması sunulmuştur.

Dördüncü bölümde genelleştirilmiş sınırlayıcı Pade yaklaşımı için determinant formülleri ifade edilerek konu ile ilgili nümerik örnekler incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise özellikle yerel kesme hataları üzerine çeşitli incelemeler yapılmıştır. Parabolik ve hiperbolik tip başlangıç- sınır değer problemlerinin sınırlayıcı Pade yaklaşımı ile çözümlerinin yerel kesme hataları ayrı ayrı incelenmiştir.

Son bölümde ise sonuç ve önerilerde bulunulmuştur.

Sonuç olarak lineer difüzyon denkleminin nümerik çözümü üzerine bir çalışma oluşturulmuştur.

Anahtar kelimeler: Difüzyon Denklemi, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı.

NUMERICAL SOLUTION OF THE SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS USING RESTRICTIVE PADE APPROXIMATION

Fevziye GÜLSEVER

Mathematics, M.S. Thesis, 2016

Thesis Supervisor: Assoc. Dr. Ahmet BOZ

SUMMARY

This study consists of six chapters.

In the first chapter, basic concept are given for about to numerical solution of the diffusion equation.

In the second chapter, we find that the numerical solution of the diffusion equation using restrictive Pade approximation. This solution is orginal.

After that, we examined same method fort he singularly perturbed hiperbolic equation and given the numerical solution algorithm.

In the fourth chapter, determinant formulation for the generalized restrictive Pade approximation and examined about to numerical examples.

In the fifth section, some examine for the truncation error. The solution of the parabolic and hyperbolic initial- boundry value problems are examined separately with local truncation error.

In the last section, conclusion and recommendations are included.

Consequently, created work about to numerical solution of the linear diffusion equation.

Keywords: Diffusion Equation, Partial Derivative Differential Equation, Restrictive Pade Approximation.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince benden değerli fikirlerini, bilgilerini ve katkılarını esirgemeyen değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Ahmet BOZ 'a, yüksek lisans süresince çalışmalarımı destekleyen ve her zaman yanımda olan aileme en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunmayı bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	xi
SUMMARY	xii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xvi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1. Pade Yaklaşımı	1
1.2. Bir Boyutlu Difüzyon Denklemi	1
1.3. Kısmi Diferansiyel Denklemler	2
1.4. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Genel Bir Sınıflandırılması	2
1.4.1. Lineer olmasına göre	2
1.4.2. Yarı lineer (Kuasi-Lineer) olmasına göre	2
1.4.3. Hemen- hemen lineer olmasına göre	3
1.5. İkinci Basamaktan Hemen-Hemen Lineer Denklemler İçin Bir Sınıflandırma	3
1.5.1. Hiperbolik tip	4
1.5.2. Eliptik tip	4
1.5.3. Parabolik tip	5
1.6. Sonlu Farklar Denklemi	6
1.7. Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımı	6
1.8. Crank-Nicolson Metodu	7
1.8.1. Crank Nicolson açık çözüm metodu	8
1.8.2. Crank Nicolson kapalı çözüm metodu	8
2. DİFÜZYON DENKLEMİNİN SINIRLAYICI PADE YAKLAŞIMI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ	10
2.1. Giriş	10
2.2. Metot	11
2.2.1. Sınırlayıcı pade yaklaşımı (RPA)	11
2.2.2. Üstel matris için sınırlayıcı pade yaklaşımı	13
2.2.3. Çözüm metodunun uygulanması	13
2.3. Nümerik Sonuçlar	18
3. SİNGÜLER PERTÜRBE EDİLMİŞ HİPERBOLİK DENKLEMİN SINIRLAYICI PADE YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ	20

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

3.1. Giriş.....	20
3.2. Metot	22
3.2.1. Çözüm metodu	22
3.3. Kararlılık Analizi.....	23
3.4. Yerel Kesme Hatası	23
3.5. Nümerik Sonuçlar	24
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ SINIRLAYICI PADE YAKLAŞIMI İÇİN AÇIK DETERMİNAT FORMÜLLERİ.....	27
4.1. Giriş.....	27
4.2. Metot	28
4.3. Nümerik Örnekler	34
5. PARABOLİK VE HİPERBOLİK TİP BAŞLANGIÇ – SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SINIRLAYICI PADE YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMLERİNİN YEREL KESME HATALARI.....	35
5.1. Giriş.....	35
5.2. Hiperbolik Tip Başlangıç Sınır- Değer Probleminin Tam Çözümü İçin Sonlu Farklar Metodu	35
5.3. Parabolik ve Hiperbolik Problemlerin Crank-Nicolson Metodu İle Çözümünde Yerel Kesme Hatası	36
5.3.1. Parabolik denklem için diferansiyel formunda yerel kesme hatası	36
5.3.2. Hiperbolik denklem için Crank Nicolson metodunda yerel kesme hatasının diferansiyel formu	37
5.4. Parabolik Tip Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı İle Çözümünde Yerel Kesme Hatası.....	38
5.4.1. Sonlu farklarda yerel kesme hatası.....	38
5.5. Hiperbolik Tip Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı İle Çözümünde Yerel Kesme Hatası.....	40
5.5.1. Crank Nicolson metodunda sonlu farklar formunda yerel kesme hatası.....	40
5.5.2. Sınırlayıcı pade metodu için yerel kesme hatası	40
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	44

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı için farklı $t=0.01$ zamanında mutlak hatalar.....	18
2.2. Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı için farklı $t=0.1$ zamanında mutlak hatalar.....	19
2.3. Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı için farklı $t=1$ zamanında mutlak hatalar.....	19
3.1. Farklı adımlarda kullanılan metodun ve klasik metodun mutlak hataları.	25
3.2. Farklı adımlarda kullanılan metodun ve klasik metodun mutlak hataları.	26
3.3. Farklı adımlarda kullanılan metodun ve klasik metodun mutlak hataları.	26
4.1. $G[m, \alpha/n]f(x)$ yaklaşımı için bazı mutlak hata değerleri.....	34
4.2. $[0,0.5]$ aralığındaki maximum hata.	34

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$$D(u) = u^n$$

$$U = U(x, t)$$

$$u_x, u_t$$

$$h, k$$

$$\varepsilon_i$$

$$D_{x^2}$$

$$\delta, \alpha$$

$$f(x, t)$$

$$T_{i,j}$$

Açıklama

Difüzyon terimi

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin tam çözümü

Konum ve zamana göre birinci türev

Konum ve zamandaki aralık boyu

Kısıtlama parametresi

İkinci mertebeden türev

Reel pozitif sayı

Başlangıç ve sınır şartlarını sağlayan sürekli fonksiyon

Yerel kesme hatası

Kısaltmalar

Açıklama

PA

Pade Yaklaşımı

RPA

Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı

G[m, α /n]

Genelleştirilmiş Pade Yaklaşımı

CFD6

Kompakt Sonlu Farklar Metodu

1. GİRİŞ

1.1. Pade Yaklaşımı

Pade yaklaşımlarının geçmişi çok eskidir. Henri Eugune Pade tarafından kullanılan şekliyle günümüze ulaşana kadar birçok ünlü matematikçi farklı problemlere çözüm bulabilmek amacıyla Pade yaklaşımlarını kullandı. Euler C.G.J. Jacobi, Michell Rolle, George Ferdinand Frobenius, Jean Darboux ve Daniel Bernoulli gibi matematikçiler tarafından matematiğin farklı alanlarında problemlere çözüm bulabilmek için kullanıldı (Brezinski, 1991).

Günümüzde yaygın bir şekilde Pade yaklaşımları, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde, kuvvet serilerinin analitik devam problemlerinde, ortogonal polinomlar üzerinde çalışılmasında (Markov fonksiyonları için Pade denklemlerinde payda denkleminin ortogonal olduğu bilinmektedir) kuvvet serilerine ait singüler noktalarının, sıfır noktalarının, köklerin ve kutup noktalarının bulunmasında kullanılır. Pade yaklaşımlarının diğer nümerik yaklaşımlara göre daha iyi sonuç vermesi, bu yaklaşıma olan ilgiyi arttırdı ve sadece matematikte değil, fizikte, kimyada, astronomide ve daha farklı bilimsel alanlarda kullanılmasına yol açtı. Tek değişkenli Pade yaklaşımları üzerinde birçok çalışma yapılmasına rağmen, çok değişkenli Pade yaklaşımları üzerine yapılan çalışma sayısı oldukça sınırlıdır.

Çok değişkenli Pade yaklaşımlarının tanımını ilk kez J.S.R Chistolm tarafından, daha genel tanımlama ise Levin tarafından yapılmıştır. Teorisini ve temel kavramlarını ilk kapsamlı makale ise 1983'te Annie Cuyt tarafından yayınlanmıştır (Guillaume ve Huard, 2000). Tek değişkenlilerin birçok özelliği açıklığa kavuşturulmasına rağmen, çok değişkenliler için yapılan çalışmalar çok sınırlıdır. Fakat çok değişkenli Pade yaklaşımlarının, tek değişkenli Pade yaklaşımlarının birçok özelliğini kapsadığını söylemek mümkündür. Birçok çalışmada tek değişkenli Pade yaklaşımları ile diğer nümerik yaklaşımlar kıyaslandığında, Pade yaklaşımlarının daha iyi bir yaklaşım olduğu bilinmektedir. Fakat çok değişkenli Pade yaklaşımları için literatürde, diğer nümerik yaklaşımlarla yapılan karşılaştırmaları kapsayan araştırmalara rastlamak hemen hemen mümkün değildir.

1.2. Bir Boyutlu Difüzyon Denklemi

Gözenekli ortamlarda akış ve/veya kütle yayımı ve ısı yayımı yerbilimlerinde difüzyon tipli problemleri oluşturmaktadır. Difüzyon tipli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü nümerik olarak sonlu farklar yöntemi ile yapılır. Yer altı suyu akışı ve kirlilik ve ısı yayım modeli difüzyon denklemi olarak bilinen,

$$U_{xx} + vU_x = \alpha U_t$$

kısmi diferansiyel denklemleriyle ifade edilir. Bu denklemde x 'e göre birinci ve ikinci türev konumu, t 'ye göre türev ise zamanı temsil etmektedir. Denklemde ifadesi bulunan fiziksel büyüklükler değiştirilerek yerbilimlerinde bir problem modellenilebilir.

Kirletici maddenin yüksek konsantrasyonlu bir bölgeden düşük konsantrasyonlu bir bölgeye taşınması moleküler difüzyon ($\alpha \neq 0$) yardımı ile gerçekleşir. Difüzyon yayılımı bölgeler arasında konsantrasyon farkı sıfır oluncaya kadar devam eder. Difüzyonla yayılım mekanizmasının da kirletici maddenin içinde bulunduğu yer altı suyu hareket etmese de kirletici maddeyi oluşturan moleküllerin hareketi difüzyonla yayılımını gerçekleştirir (Fetter, 1992).

1.3. Kısmi Diferansiyel Denklemler

En az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkeninin bağımsız değişkenlere göre birinci veya daha fazla mertebeden kısmi türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklemler denir. Kısmi diferansiyel denklemlerin genel formu,

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0$$

şeklindedir.

1.4. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Genel Bir Sınıflandırılması

1.4.1. Lineer olmasına göre

Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken (veya değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir.

İki bağımsız bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x, y)z_x + Q(x, y)z_y + R(x, y)z = S(x, y)$$

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y)$$

1.4.2. Yarı lineer (Kuasi-Lineer) olmasına göre

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre lineer ise bu denklem yarı lineer adını alır.

İki bağımsız, bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden yarı lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = S(x, y, z)$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y)z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y)z_{xy} + R(x, y, z, z_x, z_y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

1.4.3. Hemen- hemen lineer olmasına göre

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineer denklem denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli,

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + H(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

formundadır.

1.5. İkinci Basamaktan Hemen-Hemen Lineer Denklemler İçin Bir Sınıflandırma

Genel formu;

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + H(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

şeklindedir. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir.

Diskriminant fonksiyonu,

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

Şeklinde tanımlanmak üzere denkleme

a) $\Delta(x, y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik

b) $\Delta(x, y) = 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda parabolik

c) $\Delta(x, y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik

tiptendir denir.

1.5.1. Hiperbolik tip

En bilinen örneği dalga denklemdir. c pozitif bir reel sabit ve t zaman değişkeni olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

1-boyutlu dalga denklemdir.

Bir boyutlu dalga denkleminin çözümü l uzunluğunda titreşim halinde olan bir telden t zaman sonra bir ucundan x kadar uzaklıktaki enine yer değişimini verir. Bu tip denklemlerde başlangıç ve sınır koşulları bilinir.

Bu tip denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması, elastisite ve kuantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır.

Hiperbolik denklemler genellikle titreşim problemlerinde veya yoğunluk, basınç ve hızdaki süreksizlik durumları ile ilgili problemlerde kullanılır.

✓ Hiperbolik tip denklem;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

denkleminde $A = -c^2$, $B=0$ ve $C=1$ dir.

$\Delta = B^2 - 4AC = 0 - 4(-c^2)1 = 4c^2 > 0$ olduğu için hiperbolik tip denklem denir.

1.5.2. Eliptik tip

Eliptik kısmi diferansiyel denklemler genellikle denge veya kararlı hal problemleri ve bunların çözümüyle karşımıza çıkar.

En iyi bilinen eliptik denklemler Laplace ve Poisson denklemleridir ve sırasıyla,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \nabla^2 \phi = 0; \text{ Laplace denklemi}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y) = \nabla^2 \phi = f; \text{ Poisson denklemi}$$

şeklinde gösterilir.

Laplace denklemi potansiyel teorisinin temel denklemlerinden birisi olduğundan fiziksel uygulamaları çoktur. Örneğin yüzeyleri izole edilmiş bir ortamda zamandan bağımsız bir ısı dağılımı varsa (ki buna karalı ısı denir) herhangi bir (x,y) noktasındaki ısı miktarını veren $u(x,y)$ fonksiyonu Laplace denklemini sağlar.

Ayrıca ısı kaynağı olmayan bir bölgede karalı sıcaklık dağılımı, iletkenlerle çevrili yüksüz bir bölgede elektrostatik potansiyel, kaynak veya kuyu olmayan bir akışkanda hız dağılımı vs. problemlerinde karşımıza çıkar.

Dış kuvvetlerin etkisi altındaki bir telin zamana bağlı olarak denge konumuna gelmesi Poisson denklemi ile ifade edilir.

✓ Eliptik tip denklem;

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

denkleminde $A=1$, $B=0$ ve $C=1$ dir.

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0 - 4.1.1 = -4 < 0 \text{ olduğu için eliptik tip denklem denir.}$$

1.5.3. Parabolik tip

Zamana bağlı ısı veya kütle yayılması problemlerinde karşılaşılır. En basit parabolik denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şeklindedir.

Bu denklem ısı transferi teorisinden elde edilmiş olup, çözümü termal olarak izole edilmiş bir çubuğun bir ucundan x kadar uzaklıktaki noktasında t zamanındaki veya t zamanından sonraki sıcaklığının belirlenmesine imkan sağlamaktadır. Bu tip denklemlerde başlangıç ve sınır koşulları bilinmektedir.

✓ Parabolik tip denklem;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

denkleminde $A=k$, $B=0$ ve $C=0$ dir.

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0 - 4.k.0 = 0 = 0 \text{ olduğu için parabolik tip denklem denir.}$$

1.6. Sonlu Farklar Denklemi

Ele alınan kısmi türevli denklemde birinci ve ikinci mertebeden türevler yerine sayısal karşılıkları olan sonlu fark formüllerinin konulması ile elde edilen denkleme, ilgili kısmi türevli denkleme karşılık gelen sonlu fark denklemi denir.

Örneğin;

Birinci mertebeden türev için sırasıyla ileri yönlü sonlu farklar denklemi, geri yönlü sonlu farklar denklemi ve merkezi sonlu farklar denklemi;

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \quad u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

şeklinde yazılabilir.

Yakınsaklık

$U = U(x, t)$ bir kısmi türevli diferansiyel denklemin tam çözümü (analitik çözümü) u da bu kısmi diferansiyel denklem için fark denklemlerinden elde edilen yaklaşık çözüm olsun. Bu durumda eğer sabit bir noktada ya da sabit bir t zaman sırası boyunca $\delta x, \delta t \rightarrow 0$ iken $u \rightarrow U$ oluyorsa sonlu fark denklemi yakınsaktır denir.

Kararlılık

Parabolik türden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sonlu fark metodu ile sayısal çözümünde, hesaplamanın her aşamasında hatalar ortaya çıkar. Eğer ortaya çıkan bu hatalar hesaplama ilerledikçe sınırsız olarak büyümüyorsa bu uygulama karardır denir.

1.7. Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımı

Bir u fonksiyonu ve onun türevleri tek değerli, sonlu ve x bağımsız değişkeninin sürekli bir fonksiyonu olsun.

Taylor teoremine göre;

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \dots \quad (1.1)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) - \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \dots \quad (1.2)$$

(1.1) denkleminde ikinci ve daha yüksek mertebeden türevler ihmal edilirse,

$$(x+h) = u(x) + hu'(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h)$$

İleri yönlü fark yaklaşımı elde edilir.

(1.2) denkleminde ikinci ve daha yüksek mertebeden türevler ihmal edilirse,

$$(x+h) = u(x) + hu'(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h)$$

geri yönlü fark yaklaşımı elde edilir.

(1.1) –(1.2) denkleminde üçüncü ve daha yüksek mertebeden türevler ihmal edilirse ve bu denklemler toplanırsa,

$$(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2 u''(x) + O(h^4)$$

$$u''(x) = \frac{(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

yazılabilir.

(1.1) denkleminde (1.2) denklemi çıkarılırsa;

$$(x+h) - u(x-h) = 2hu'(x) + O(h^3)$$

$$u'(x) = \frac{(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^3)$$

elde edilir. Bu ifadeye merkezi fark yaklaşımı adı verilir. Merkezi fark yaklaşımı geometrik olarak P noktasındaki teğetin eğimine AB kirişinin eğimi yardımıyla yaklaşımı ifade eder. Diğer fark yaklaşımlarına göre merkezi fark yaklaşımının daha iyi bir sonuç vereceği şekilden de görülmektedir.

1.8. Crank-Nicolson Metodu

Açık ve kapalı metotlar bir θ parametresini içeren daha genel bir formül altında birleştirilebilir. Bu formül;

$$\frac{\theta}{h^2} (v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}) + \frac{1-\theta}{h^2} (v_{i+1,j-1} - 2v_{i,j-1} + v_{i-1,j-1}) = \frac{1}{k} (v_{i,j} - v_{i,j-1})$$

şeklindedir.

Burada $\theta = 0$ alındığında Crank Nicolson metodunun açık çözümünü , $\theta = 1$ alındığında ise Crank Nicolson kapalı çözümünü verir. Özel bir durum olarak ise $\theta = \frac{1}{2}$ olduğunda ise sayısal yöntem bu yöntemi keşfeden John Crank ve Phyllis Nicolson adıyla anılmaktadır.

1.8.1. Crank Nicolson açık çözüm metodu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

Bir boyutlu parabolik denklemin ilgili fark yaklaşımlarını uygularsak,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (1.4)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada, $x = ih (i = 0, 1, 2, \dots)$ ve $t = jk (k = 0, 1, 2, \dots)$ dir. (1.4) denkleminin düzenlenmesi sonucunda;

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

eşitliği bulunur. $r = \frac{k}{h^2}$ olmak üzere bu formül, j. zaman sırasındaki bilinen sıcaklık değerlerine göre $(i,j+1)$. düğüm noktasındaki bilinmeyenler $u_{i,j+1}$ sıcaklık değerini verir. Bu yüzden birinci zaman sırasındaki eksene ait bilinmeyen u değerleri, bilinen sınır değerlerine ve $t=0$ anındaki başlangıç değerlerine göre hesaplanabilir. Benzer şekilde ikinci zaman sırasındaki değerlere göre hesaplanır ve bu şekilde devam edilir. Yani bir bilinmeyen düğüm noktası değerlerine göre ifade eden formüle açık (explicit) formül denir.

Kullanımı kolay ve programlaması basit olan bu metot her zaman doğru çözüm vermez. Yapılacak bir kararlılık analizi, sonuçların doğru ve çözümün kararlı olması için $\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ şartının sağlanması gerekliliğini ortaya koyar. Bu koşul ise zaman ve konum adımlarının keyfi alınamayacağını gösterir.

1.8.2. Crank Nicolson kapalı çözüm metodu

Klasik açık metot, hesaplama açısından çok basittir. Ancak kararlılık göz önüne alındığında $\delta t = k$ zaman adımının sınırlılığı söz konusudur. Hesaplamaların büyük bir zaman periyodu için yapılması gerektiğinden zaman adımlarının sayısı ve buna bağlı olarak da işlem sayısı artacaktır. Bu olumsuzluğu ortadan kaldırmak için $\delta t = k$ zaman adımının sınırlı olmadığı bazı sonlu fark yaklaşımları geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlardan biri de Crank-Nicolson kapalı çözüm yaklaşımlarıdır. Crank ve Nicolson r değerinin bütün değerleri için geçerli olan

(yakınsak ve kararlı) ve daha az hesaplama gerektiren bir metot geliştirdiler. Bu metodun esası, denklemde görülen $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$ yerine onun $(j+1)$. ve j . zaman sırasındaki sonlu fark operatörü yazılarak ortalaması alınmasıdır. Bu takdirde,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$$

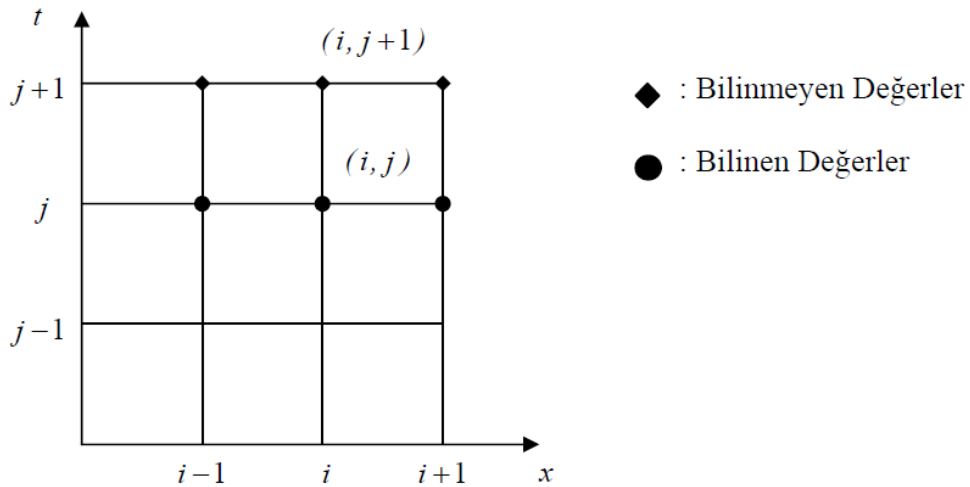
denklemine,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \right\}$$

Şeklinde bir yaklaşım elde edilir. $r = \frac{k}{h^2}$ olmak üzere bu denklemi düzenlersek,

$$-ru_{i-1,j+1} + (2 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2 + 2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}$$

eşitliği elde edilir. Dikkat edilirse bu denklemin sol tarafı u değerinin üç tane bilinmeyen değerini, sağ tarafı ise üç tane bilinen değeri içerir.



Crank Nicolson Izgara Gösterimi

Eğer her bir zaman sırasında n tane düğüm noktası varsa o zaman $j = 0$ ve $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için bulduğumuz denklemi bilinen başlangıç ve sınır koşullarına bağlı olarak birinci zaman sırasındaki n tane bilinmeyen için n tane denklem verecektir. Benzer şekilde $j=1$, birinci zaman adımında hesaplanmış değerlere bağlı olarak ikinci zaman sırasında bilinmeyen n tane u değerini ifade eder. Bu şekilde bir bilinmeyen düğüm noktası değerinin hesaplanması için bir denklem sisteminin çözümüne ihtiyaç duyuluyorsa o zaman bu metoda kapalı çözüm metodu denir. Oluşan bu denklem sistemi Gauss yok etme metodu ile çözülebilir.

2. DİFÜZYON DENKLEMİNİN SINIRLAYICI PADE YAKLAŞIMI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer difüzyon denkleminin sınırlayıcı Pade yaklaşımı ile çözümü incelenecektir. Bu metodun en büyük avantajı bazı r değerlerinde tam çözümün elde edilmesidir. Bu metodun uygulanmasında yüksek doğruluk, hızlı sonuca yaklaşma ve iyi sonuçların elde edildiği görülmektedir. Hesaplama sonucunda, elde edilen değerler diğer metodlarla elde edilen değerler ile karşılaştırılmıştır.

2.1. Giriş

Sınırlayıcı Pade yaklaşımı ile çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Sınırlayıcı Pade yaklaşımı metodunu İsmail ve Elbarbary, parabolik kısmi diferansiyel denklemler için (İsmail ve Elbarbary, 1998, 1999; İsmail vd. 2000) ; İsmail ve Younes hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler için (İsmail ve Hassan 2000 a, 2000 b; İsmail ve Elbarbary 2001) ;İsmail ve Elbietar schrodinger denklemi için (İsmail ve Elbietar, 2001, 2002) uygulamışlardır.

Şimdi aşağıdaki bir boyutlu difüzyon denklemini ele alalım.

$$u_t = u_{xx} + f(u) \quad 0 < x < L \quad (2.1)$$

$$u_t = (D(u)u_x)_x \quad 0 < x < L \quad (2.2)$$

başlangıç şartı olarak,

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L \quad (2.3)$$

sınır şartı olarak,

$$u(0, t) = g_0(x) \quad t > 0 \quad (2.4)$$

$$u(L, t) = g_1(x) \quad t > 0 \quad (2.5)$$

kullanılacaktır.

Buradaki $f(u)$ fonksiyonları lineer kaynak fonksiyonlarıdır. $D(u)$ fonksiyonu, difüzyon terimidir. Bu difüzyon terimi, difüzyon işleminde önemli bir role sahiptir (Güraslan ve Sarı 2011, Meral ve Tezer 2009, 2011). $D(u)$ difüzyon terimi birkaç farklı formda ortaya çıkabilir. İyi bilinen (well known) difüzyon işlemlerinden bazıları hızlı ve bazıları yavaş difüzyon işlemleridir. $D(u) = u^n$ şeklinde bir difüzyon terimi için $n < 0$ olduğunda hızlı difüzyon, $n > 0$ olduğunda yavaş difüzyon işlemi olur.

2.2. Metot

2.2.1. Sınırlayıcı pade yaklaşımı (RPA)

$f(x)$ fonksiyonu için sınırlayıcı Pade yaklaşımı rasyonel fonksiyon tipinde aşağıdaki şekilde yazılabilir (Hasan vd.1995 a, 1995 b).

$$RPA[M + \alpha/N]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i x^i + \sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i x^{M+i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i x^i} \quad (2.6)$$

Burada α pozitif tamsayısı, N nümeratöründen daha büyük dereceli olamaz. Yani $\alpha = 0(1)N$ dir.

$$f(x) - RPA[M + \alpha/N]_{f(x)}(x) = 0(x^{M+N+1}) \quad (2.7)$$

$f(x)$ fonksiyonu bir Maclauren Serisine sahip olsun.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (2.8)$$

(2.6) ve (2.8) denklemlerinden (İsmail ve Elbarbary 1996) ;

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right) \left(1 + \sum_{i=1}^N b_i x^i\right) - \sum_{i=0}^M a_i x^i - \sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i x^{i+M} = 0(x^{M+N+1}) \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.9) eşitliğinin sol tarafı x 'in ilk $(M + N + 1)$. kuvveti ihmal edilirse, $(M + N + 1)$ denklemden oluşan bir sistem elde edilir.

$$\begin{aligned} a_r &= c_r + \sum_{i=1}^r c_{r-i} b_i, r = 0(1)M & (i > M \text{ ise } b_i = 0) \\ c_{M+N-s} + \sum_{i=1}^N c_{M+N-i-s} b_i &= \varepsilon_{N-s} & (i > 0 \text{ ise } c_i = 0) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Buradan, ε_i 'nin bir fonksiyonu olarak a_i ve b_i , $i = 0(1)\alpha$ katsayıları hesaplanabilir. Dolayısıyla ε_i parametresi de (Hassan vd. 2013) hesaplanabilir.

$$f(x_i) = RPA[M + \alpha/N]_{f(x)}(x_i), \quad i = 1(1)\alpha \quad (2.11)$$

Sınırlayıcı Pade yaklaşımına birkaç örnek verelim. Burada; $\alpha=1$.

$$\bullet \quad RPA[1/1]_{f(x)}(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x}$$

Burada ; $a_0 = c_0$

$$a_1 = \varepsilon_1$$

$$b_1 = \frac{\varepsilon_1 - c_1}{c_0}$$

- $RPA[2/1]_{f(x)}(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{1 + b_1x}$

Burada ; $a_0 = c_0$

$$a_1 = c_1 + \frac{c_0(\varepsilon_1 - c_2)}{c_1}$$

$$a_2 = \varepsilon_1$$

$$b_1 = \frac{\varepsilon_1 - c_2}{c_1}$$

- $RPA[3/1]_{f(x)}(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{1 + b_1x}$

Burada ; $a_0 = c_0$

$$a_1 = c_1 + \frac{c_0(\varepsilon_1 - c_2)}{c_1}$$

$$a_2 = c_2 + \frac{c_1(\varepsilon_1 - c_3)}{c_2}$$

$$a_3 = \varepsilon_1$$

$$b_1 = \frac{\varepsilon_1 - c_3}{c_2}$$

NOT: Sınırlayıcı Pade Yaklaşımında $\varepsilon_i = 0, i = 1(1)\alpha$ için klasik Pade yaklaşımı elde edilir.

$$PA[M/N]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^M \beta_i x^i}{1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i x^i} \quad (2.12)$$

Sınırlayıcı Pade yaklaşımı için yerel kesme hatasını veren teorem aşağıdaki gibidir.

Theorem 2.1. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $(n + 1)$. mertebeden türeve sahipse her x için $\{x_0, x_1, \dots, x_\alpha, x\}$ nokta kümesini içine alan en küçük I aralığında en az bir η sayısı vardır. Buna göre;

$$R_{M,N,\alpha}(x) = f(x) - RPA[M + \alpha/N]_{f(x)} = \frac{\Pi_{\alpha+1}(x)}{(\alpha+1)!} (R_{M,N,\alpha}(\eta))^{(\alpha+1)} \quad (2.13)$$

Burada $\prod_{\alpha+1}(x) = x(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\alpha)$ ve $R_{M,N,\alpha}$, sınırlayıcı pade yaklaşımı için yerel kesme hatasıdır (İsmail ve Elbarbary, 1996).

2.2.2. Üstel matris için sınırlayıcı pade yaklaşımı

$\exp(rA)$ üstel matrisi yakınsak kuvvet serileri şeklinde tanımlanabilir.

$$\exp(rA) = I + rA + \frac{r^2}{2!}A^2 + \frac{r^3}{3!}A^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}A^n, A^0 = I \quad (2.14)$$

Burada A , $(N - 1) \times (N - 1)$ boyutlu bir matristir.

Tek fonksiyon için sınırlayıcı pade yaklaşımı metodunda (2.6) denklemindeki $\mathcal{E}_i$ terimi, üstel matrisin sınırlayıcı pade yaklaşımındaki $\mathcal{E}_i$ kare matrisine indirgenebilir. Burada

$$\mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 & & & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & \dots & \\ \vdots & \varepsilon_3 & \varepsilon_3 & \ddots & \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & \vdots & \varepsilon_{N-2} & \varepsilon_{N-2} & \varepsilon_{N-2} \\ 0 & & & \varepsilon_{N-1} & \varepsilon_{N-1} \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

dır.

Örneğin;

$$RPA[1/1]_{\exp(rA)}(r) = \left(I + \left(\mathcal{E}_1 - \frac{1}{2}A \right) r \right)^{-1} \left(I + \left(\mathcal{E}_1 + \frac{1}{2}A \right) r \right) \quad (2.15)$$

2.2.3. Çözüm metodunun uygulanması

Bu kısımda, $f(u) = -u$ için difüzyon denklemini inceleyeceğiz (Wazwaz, 2007). Böylece (2.1) denklemi,

$$u_t = u_{xx} - u \quad (2.16)$$

şekline dönüşür.

Başlangıç şartı olarak;

$$u(x, 0) = \sin x \quad 0 < x < 1 \quad (2.17)$$

sınır şartı olarak da;

$$u(0, t) = 0 \quad t > 0$$

$$u(1, t) = 0 \quad t > 0 \quad (2.18)$$

kullanılacaktır. Bu probleminin tam çözümü;

$$U(x, t) = e^{-2t} \sin x \quad (2.19)$$

şeklindedir (Wazwaz, 2007).

(2.16) denklemini başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte ele alalım. Düğüm noktaları x ve t doğrultusunda h ve k olan açık dikdörtgensel bir bölge üzerinde çalışacağız. (x, t) düğüm noktası (ih, jk) ile ifade edilir ve $U(ih, jk) = U_{i,j}$, $i = 0(1)N$ gösterimi kullanılır ve j negatif olmayan bir tam sayıdır.

(2.6) denkleminin düğüm noktasındaki çözümü;

$$U_{i,j+1} = \exp\left(k(D_x^2 - 1)\right) U_{i,j} \quad (2.20)$$

şeklindedir (Hassan vd., 2000).

(ih, jk) düğüm noktasında, D_x^2 kısmi türev gösterimi alışılmış formda ifade edilirse;

$$D_x^2 = \frac{1}{h^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) \quad (2.21)$$

yazılabilir.

Merkezi sonlu farklar formülünden;

$$U = U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1} \quad (2.22)$$

şeklinde yazılabilir.

(2.21) ve (2.22) yaklaşımları (2.20) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$U^{j+1} = \exp(rA) U^j, \quad r = \frac{k}{h^2} \quad (2.23)$$

Burada; $U^j = (U_{1,j}, U_{2,j}, \dots, U_{N-1,j})^T$, $Nh = 1$ ve

$$A = \begin{bmatrix} -2 + 2h^2 & 1 - h^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 - h^2 & -2 + 2h^2 & 1 - h^2 & \cdots & \\ & 1 - h^2 & -2 + 2h^2 & 1 - h^2 & \\ & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & 0 & 1 - h^2 & -2 + 2h^2 & 1 - h^2 \\ & & 0 & 1 - h^2 & -2 + 2h^2 \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)} \quad (2.24)$$

A matrisinin nasıl elde edildiğini gösterelim.

(2.20) denkleminde (2.21) ve (2.22) denklemlerini yazalım.

$$\begin{aligned} U_{i,j+1} &= \exp\left(k\left(\frac{1}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) - U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{k}{h^2}((1 - h^2)U_{i+1,j} + (-2 + 2h^2)U_{i,j} + (1 - h^2)U_{i-1,j})\right) \end{aligned}$$

Burada; $r = \frac{k}{h^2}$. Bu ifadeleri matrise yerleştirelim ve başlangıç şartından dolayı ilk satırda birinci sütundaki terim, son satırda son sütundaki terim ihmal edilip, (2.24) deki gibi kayan matris elde edilir.

(2.23) denklemindeki üstel matris form yaklaşımı kullanıldığında;

$$RPA[1/1]_{\exp(rA)}(r) = \left(I + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}A\right)r\right)^{-1} \cdot \left(I + \left(\varepsilon + \frac{1}{2}A\right)r\right) \quad (2.25)$$

olur. (2.16) denkleminin düğüm noktalarındaki yaklaşık çözümü;

$$\begin{aligned} &\left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)rU_{i-1,j+1} + [(\varepsilon_i - (1 - h^2))r + 1]U_{i,j+1} + \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)rU_{i+1,j+1} \\ &= \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)rU_{i-1,j} + [(\varepsilon_i - (1 - h^2))r + 1]U_{i,j} + \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)rU_{i+1,j} \quad (2.26) \end{aligned}$$

eşitliği ile elde edilmiştir.

Denklemin düğüm noktasındaki tam çözümü $U_{i,j+1} = \exp\left(k(D_x^2 - 1)\right)U_{i,j}$ dir.

Bu tam çözümde hem merkezi sonlu farklar formülünü hem de türevin merkezi sonlu farklar formülünü yazarsak;

$$U^{j+1} = \exp(rA)U^j, \quad r = \frac{k}{h^2}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
U^{j+1} &= \left(I + \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}A \right) r \right)^{-1} \left(I + \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}A \right) r \right) U^j \\
&= \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}(1 - h^2) \right) r U_{i-1,j+1} + [(\varepsilon_i - (1 - h^2))r + 1] U_{i,j+1} + \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}(1 - h^2) \right) r U_{i+1,j+1} \\
&= \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}(1 - h^2) \right) r U_{i-1,j} + [(\varepsilon_i - (1 - h^2))r + 1] U_{i,j} + \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}(1 - h^2) \right) r U_{i+1,j}
\end{aligned}$$

olduğunu gösterelim.

$$A = \begin{bmatrix} -2 + 2h^2 & 1 - h^2 & 0 \\ 1 - h^2 & -2 + 2h^2 & 1 - h^2 \\ 0 & 1 - h^2 & -2 + 2h^2 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^{j+1} = (U_{i-1,j+1}, U_{i,j+1}, U_{i+1,j+1})^T \quad \text{ve} \quad U^j = (U_{i-1,j}, U_{i,j}, U_{i+1,j})^T \quad \text{olsun.}$$

$$U^{j+1} = \left(I + \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}A \right) r \right)^{-1} \left(I + \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}A \right) r \right) U^j$$

eşitliğindeki parantez içindeki ifadeleri bulalım.

$$\begin{aligned}
&\left(I + \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}A \right) r \right) = \\
&\quad \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 + 2h^2 & 1 - h^2 & 0 \\ 1 - h^2 & -2 + 2h^2 & 1 - h^2 \\ 0 & 1 - h^2 & -2 + 2h^2 \end{bmatrix} \right) r \right] \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}(-2 + 2h^2) \right) r & \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}(1 - h^2) \right) r & 0 \\ \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}(1 - h^2) \right) r & 1 + \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}(-2 + 2h^2) \right) r & \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}(1 - h^2) \right) r \\ 0 & \left(\varepsilon_3 - \frac{1}{2}(1 - h^2) \right) r & 1 + \left(\varepsilon_3 - \frac{1}{2}(-2 + 2h^2) \right) r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ve

$$\begin{aligned}
&\left(I + \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}A \right) r \right) = \\
&\quad \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 + 2h^2 & 1 - h^2 & 0 \\ 1 - h^2 & -2 + 2h^2 & 1 - h^2 \\ 0 & 1 - h^2 & -2 + 2h^2 \end{bmatrix} \right) r \right]
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(-2 + 2h^2)\right)r & \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r & 0 \\ \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r & 1 + \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(-2 + 2h^2)\right)r & \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r \\ 0 & \left(\varepsilon_3 + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r & 1 + \left(\varepsilon_3 + \frac{1}{2}(-2 + 2h^2)\right)r \end{bmatrix}$$

Şeklinde bulunur. $U^{j+1} = \left(I + \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}A\right)r\right)^{-1} \left(I + \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}A\right)r\right) U^j$ eşitliğinin soldan her iki tarafını $\left(I + \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}A\right)r\right)$ ile çarpalım;

$$\begin{bmatrix} 1 + \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}(-2 + 2h^2)\right)r & \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r & 0 \\ \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r & 1 + \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}(-2 + 2h^2)\right)r & \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r \\ 0 & \left(\varepsilon_3 - \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r & 1 + \left(\varepsilon_3 - \frac{1}{2}(-2 + 2h^2)\right)r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{i-1,j+1} \\ U_{i,j+1} \\ U_{i+1,j+1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 + \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(-2 + 2h^2)\right)r & \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r & 0 \\ \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r & 1 + \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(-2 + 2h^2)\right)r & \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r \\ 0 & \left(\varepsilon_3 + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r & 1 + \left(\varepsilon_3 + \frac{1}{2}(-2 + 2h^2)\right)r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{i-1,j} \\ U_{i,j} \\ U_{i+1,j} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan; ikinci satırdaki elemanlar çarpılırsa;

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r U_{i-1,j+1} + [(\varepsilon_2 - (1 - h^2))r + 1]U_{i,j+1} + \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r U_{i+1,j+1} \\ & = \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r U_{i-1,j} + [(\varepsilon_2 - (1 - h^2))r + 1]U_{i,j} + \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r U_{i+1,j} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Genel halini yazarsak;

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r U_{i-1,j+1} + [(\varepsilon_i - (1 - h^2))r + 1]U_{i,j+1} + \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r U_{i+1,j+1} \\ & = \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r U_{i-1,j} + [(\varepsilon_i - (1 - h^2))r + 1]U_{i,j} + \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}(1 - h^2)\right)r U_{i+1,j} \end{aligned}$$

bulunur.

ε_i değerleri ilk adımdan itibaren hesaplanmaya başlanır. İlk seçim olarak $\varepsilon_1 = [\varepsilon_{i,j}]$ üçgensel formdadır. Buna göre; $\varepsilon_{i,i-1} = \varepsilon_{i,i} = \varepsilon_{i,i+1} = \varepsilon_i$ ve $\varepsilon_{i,j} = 0$ dır. ε_1 'in ikinci seçimi köşegen matris formundadır. Dolayısıyla $\varepsilon_1 = [\varepsilon_{i,j}]$, $\varepsilon_{i,i} = \varepsilon_i$ ve $\varepsilon_{i,j} = 0$ dır.

2.3. Nümerik Sonuçlar

Sınırlayıcı pade yaklaşımının doğruluğunu göstermek için farklı t zamanlarında farklı metotlardan elde edilen sonuçlar tabloda karşılaştırılmıştır. Tablodaki veriler tam değerlere kompakt sonlu farklar metoduna ait değerlere sınırlayıcı Taylor yaklaşımı değerlerine ve sınırlayıcı Pade yaklaşımı değerlerine aittir. Ayrıca tabloda sonuçlardan elde edilen mutlak hatalar da belirtilmiştir.

Çizelge 2.1. Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı için farklı t=0.01 zamanında mutlak hatalar.

T	X	Tam Sonuç	RPA	RTA	Mutlak hata	CFD6	Mutlak Hata (Güraslan, 2010)
0.01	1/6	0.162611	0.162611	0.162611	1.02E-10		
	2/6	0.320715	0.320715	0.320715	1.01E-10		
	3/6	0.469932	0.469932	0.469932	1.01E-10	0.469932	1.02E-11
	4/6	0.606125	0.606125	0.606125	1.06E-10		
	5/6	0.725520	0.725520	0.725520	1.12E-10		
	1	0.824808	0.824808	0.824808	1.15E10		

Çizelge 2.2. Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı için farklı $t=0.1$ zamanında mutlak hatalar.

T	X	Tam Sonuç	RPA	RTA	Mutlak Hata	CFD6	Mutlak Hata (Güraslan, 2010)
0.1	1/6	0.135824	0.135824	0.135824	1.26E-9		
	2/6	0.267884	0.267884	0.267884	1.16E-9		
	3/6	0.392520	0.392520	0.392520	2.01E-11	0.392520	2.04E-11
	4/6	0.506278	0.506278	0.506278	1.25E-10		
	5/6	0.606005	0.606005	0.606005	1.21E-9		
	1	0.688938	0.688938	0.688938	1.66E-9		

Çizelge 2.3. Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı için farklı $t=1$ zamanında mutlak hatalar.

T	X	Tam Sonuç	RPA	RTA	Mutlak Hata	CFD6	Mutlak Hata (Güraslan, 2010)
1.00	1/6	0.022451	0.022451	0.022451	2.54E-10		
	2/6	0.044280	0.044280	0.044280	2.12E-10		
	3/6	0.064883	0.064883	0.064883	4.25E-12	0.064883	4.91E-12
	4/6	0.083687	0.083687	0.083687	1.92E-11		
	5/6	0.100172	0.100172	0.100172	2.04E-10		
	1	0.113880	0.113880	0.113880	2.52E-10		

Uygulanan nümerik örnek sonucunda bir boyutlu difüzyon denkleminin sınırlayıcı Pade yaklaşımı (RPA) metoduyla çözüm sonuçları tabloya aktarılmıştır. Böylece Tablo 1, Tablo 2, Tablo 3 oluşturulmuştur. Tablo 1’de $t=0.01$, $x=0.5$ için elde edilen sonuçlar Kompakt sonuç farklar metodu ve sınırlayıcı Taylor yaklaşımı (RTA) metodu ile karşılaştırılmıştır. Tablo 2 ve Tablo 3’te ise $t=0,1$ ve $t=1$, $x=0.5$ için karşılaştırılmıştır.

Tüm bu sonuçlara bakıldığında uygulanan metot, diğer metotlara göre daha geçerli sonuçlar vermektedir. Bu metot ile çözüm işlemi kolay olduğundan uygulama daha verimli olmaktadır. Bu metot, diğer denklemlerin çözümlerinde de uygulanabilir.

3. SİNGÜLER PERTÜRBE EDİLMİŞ HİPERBOLİK DENKLEMİN SINIRLAYICI PADE YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, singüler pertürbe edilmiş hiperbolik denklemin sınırlayıcı Pade yaklaşımı ile çözümü incelenecektir. Denkleme bu çözüm metodu uygulanacak, elde edilen sonuçlar tablo halinde verilecektir. Ayrıca denklemin kararlılık analizinden bahsedilecektir.

3.1. Giriş

Singüler pertürbe edilmiş birinci mertebeden hiperbolik kısmi diferansiyel denklemini ele alalım.

$$\delta \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \quad x > 0, \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

Burada; $\delta > 0$, a reel pozitif sabit ve $f(x, t)$, verilen başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan sürekli fonksiyondur.

Başlangıç koşulu olarak;

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ve sınır koşulu olarak;

$$u(0, t) = g_0(t), \quad u(1, t) = g_1(t), \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

kullanılacaktır.

u_x için aşağıdaki merkezi sonlu farklar yaklaşımı kullanılır.

$$u(ih, t) = \frac{1}{2h} [(u(i+1)h, t) - (u(i-1)h, t)]; \quad i = 1(1)N-1.$$

(3.1) denkleminde $u(ih, t)$ 'den $u(x, t)$ 'ye yarı ayrıştırılmış bir yaklaşım yapılırsa

$$\frac{dU(ih, t)}{dt} = \frac{a}{2\delta h} [U((i-1)h, t) - U((i+1)h, t)] + \frac{1}{\delta} f(x, t); \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

elde edilir.

Burada;

$$U(ih, 0) = u_0(ih), \quad U(0, t) = g_0(t) \text{ ve } U(Nh, t) = g_1(t), \quad t \geq 0$$

dır ve (3.3) denklemini matris formunda yazarsak;

$$\frac{d\underline{U}}{dt} = A\underline{U}(t) + \underline{F}(t) \quad (3.4)$$

yazılır. Burada;

$$\underline{U}(t) = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_{N-1}(t))^T$$

$$\underline{F}(t) = \frac{1}{\delta} (f_1(t), f_2(t), \dots, f_{N-1}(t))^T$$

$$U_i(t) = U(ih, t), \quad f_i(t) = f(ih, t)$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \cdots & \\ 1 & 0 & -1 & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

şeklindedir.

(3.4) diferansiyel denklem sisteminin çözümü (Hassan, 2005; İbrahim, vd., 1987);

$$\underline{U}(t) = \exp(tA) \underline{U}(t) + [-I + \exp(tA)] A^{-1} \underline{F}. \quad (3.5)$$

ya da eş olarak

$$\underline{U}(t + \Delta t) = -A^{-1} \underline{F} + \exp(\Delta t A) [\underline{U}(t) + A^{-1} \underline{F}] \quad (3.6)$$

şeklindedir.

[M/N], PA[M/N] pade yaklaşımını kullanarak $\exp(\Delta t A)$ yaklaşımını yaparsak (3.6) denklemini her j adımı için

$$\underline{U}^{j+1} = -A^{-1} \underline{F} + PA_{\exp(k,A)} [\underline{U}^j + A^{-1} \underline{F}], \Delta t = k \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir.

Bir sonraki bölümde hiperbolik denklemler için singüler pertürbe edilmiş başlangıç sınır-değer probleminin çözümü için kapalı metot tanımlanacak ve yöntemin etkinliği diğer metotlarla karşılaştırılacaktır. (Hassan vd., 1995; 1998) makalelerinde olduğu gibi üstel matris yaklaşımı için sınırlayıcı Pade yaklaşımı kullanılacaktır.

3.2. Metot

3.2.1. Çözüm metodu

Üstel $\exp(kA)$ için $[0/1]$ ve $[1/1]$ sınırlayıcı Pade yaklaşımlarını (Hassan vd., 1999) 'da aşağıdaki formda verilmiştir.

$$i. RPA[0/1]_{\exp(kA)} = (I + (\mathcal{E} - k)A)^{-1} \quad (3.8)$$

(3.6) denklemindeki $\exp(kA)$ matrisini (3.8) denkleminde yazarsak;

$$\underline{U}^{j+1} = -A^{-1}\underline{F} + (I + (\mathcal{E} - k)A)^{-1}[\underline{U}^j + A^{-1}\underline{F}], \Delta t = k \quad (3.9)$$

ya da

$$(I + (\mathcal{E} - k)A)\underline{U}^{j+1} = \underline{U}^j - (\mathcal{E} - k)\underline{F} \quad (3.10)$$

elde edilir.

Böylece;

$$\left(\frac{(\mathcal{E}-k)a}{2\delta h}\right) u_{i-1,j+1} + u_{i,j+1} - \left(\frac{(\mathcal{E}-k)a}{2\delta h}\right) u_{i+1,j+1} = u_{i,j} - \left(\frac{\mathcal{E}-k}{\delta}\right) f(x_i, t) \quad (3.11)$$

formu elde edilir.

Benzer şekilde $\exp(kA)$ için Hassan ve arkadaşları sınırlayıcı Pade yaklaşımındaki $[1/1]$ aşağıdaki şekildedir.

$$ii. RPA[1/1]_{\exp(kA)}(k) = \left(I + \left(\mathcal{E} - \frac{1}{2}k\right)A\right)^{-1} \cdot \left(I + \left(\mathcal{E} + \frac{1}{2}k\right)A\right) \quad (3.12)$$

Benzer şekilde (3.6) denkleminde $\exp(kA)$ üstel yaklaşımı için (3.8) kullanılırsa;

$$\underline{U}^{j+1} = -A^{-1}\underline{F} + \left(I + \left(\mathcal{E} - \frac{1}{2}k\right)A\right)^{-1} \cdot \left(I + \left(\mathcal{E} + \frac{1}{2}k\right)A\right) [\underline{U}^j + A^{-1}\underline{F}] \quad (3.13)$$

ya da

$$\left(I + \left(\mathcal{E} - \frac{1}{2}k\right)A\right)\underline{U}^{j+1} = \left(I + \left(\mathcal{E} + \frac{1}{2}k\right)A\right)\underline{U}^j + k\underline{F} \quad (3.14)$$

elde edilir.

Buradan benzer şekilde;

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(\varepsilon - 0.5k)a}{2\delta h} \right) u_{i-1,j+1} + u_{i,j+1} - \left(\frac{(\varepsilon - 0.5k)a}{2\delta h} \right) u_{i+1,j+1} = \left(\frac{(\varepsilon + 0.5k)a}{2\delta h} \right) u_{i-1,j} + u_{i,j} - \\ & \left(\frac{(\varepsilon + 0.5k)a}{2\delta h} \right) u_{i+1,j} + \left(\frac{k}{\delta} \right) f(x_i, t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

formu bulunur.

(3.11) ve (3.15) denklemlerinde $\varepsilon = 0$ alındığında, $[0/1]$ ve $[1/1]$ yaklaşımları için klasik Pade yaklaşımı elde edilir. ε kısıtlayıcı parametreyi hesaplamak için ilk adımda ya tam çözümü bilmeliyiz ya da çok iyi bir nümerik çözüme sahip olmalıyız..

3.3. Kararlılık Analizi

Von Neumann kararlılık analizi metodunu kullanarak; (3.11) ve (3.15) fark denklemleri için G_1 ve G_2 çarpanlarını elde edebiliriz.

$$G_1 = \frac{1}{1 - I \left(\frac{(\varepsilon - k)a}{\delta h} \sin \theta \right)}, \quad G_1 = \frac{1 - I \left(\frac{(\varepsilon + 0.5k)a}{\delta h} \sin \theta \right)}{1 - I \left(\frac{(\varepsilon - 0.5k)a}{\delta h} \sin \theta \right)}, \quad I = \sqrt{-1}$$

(3.16) ve (3.20) denklemlerinden koşulsuz şartsız $|G_1| \leq 1$ ve $|G_2| \leq 1$ olarak düşünülür.

3.4. Yerel Kesme Hatası

i. Sınırlayıcı Pade yaklaşımı $[0/1]$ için;

Taylor açılımını kullanarak (İsmail vd. 2000,2001; İsmail ve Younes 2000 a, 2000 b.) ‘ da belirtildiği gibi (3.11) fark denklemlerinin yerel kesme hatası elde edilebilir. Buna göre;

$$\begin{aligned} T_{i,j} = & \frac{(\varepsilon - k)a}{\delta h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} \right)_{(i,j)} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \right)_{(i,j)} \\ & - \frac{(\varepsilon - k)a}{\delta h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^{2m+1}}{(2m+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^n}{n!} \frac{\partial^{2m+n+1} u}{\partial x^{2m+1} \partial t^n} \right)_{(i,j)} \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

Yeterince büyük pozitif n tamsayısı için en az bir M_1, M_2, M_3 pozitif reel sayıları var olmak üzere,

$$\forall n \text{ için, } \left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right| \leq M_1, \quad \left| \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \right| \leq M_2, \quad \left| \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial t^n} \right| \leq M_3$$

ve $M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$ olmak üzere,

(3.11) denklemindeki üst sınırdaki yerel kesme hatası $T_{i,j}$;

$$|T_{i,j}| \leq M \left| e^k \left(1 + \frac{(\varepsilon - k)a}{\delta h} \cdot \sinh h \right) - 1 \right|$$

olacak şekilde yazılabilir.

ii. Sınırlayıcı Pade yaklaşımı (RPA) $[1/1]$ için;

Yine aynı şekilde Taylor açılımı kullanarak (3.15) denkleminin yerel kesme hatası

$$\begin{aligned} T_{i,j} = & (r_1 - r_2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} \right)_{(i,j)} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \right)_{(i,j)} \\ & - r_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^{2m+1}}{(2m+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^n}{n!} \frac{\partial^{2m+n+1} u}{\partial x^{2m+1} \partial t^n} \right)_{(i,j)} \end{aligned}$$

burada; $r_1 = \frac{(\varepsilon - 0.5k)a}{\delta h}$, $r_2 = \frac{(\varepsilon + 0.5k)a}{\delta h}$ dır. Yeterince büyük pozitif n tamsayısı için en az bir M_1, M_2, M_3 pozitif reel sayıları var olmak üzere,

$$\forall n \text{ için, } \left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right| \leq M_1, \quad \left| \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \right| \leq M_2, \quad \left| \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial t^n} \right| \leq M_3$$

ve $M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$ olmak üzere,

$$|T_{i,j}| \leq M |(r_1 e^k - r_2) \sinh h + e^k - 1|$$

şeklinde bulabiliriz.

3.5. Nümerik Sonuçlar

Şimdi nümeriksel bir örnekle (3.11) ve (3.15) deki klasik metot ile (3.6) daki üstel $\exp(kA)$ için $[0/1]$ ve $[1/1]$ Pade yaklaşımını kıyaslayalım.

Singüler pertürbe edilmiş hiperbolik kısmi diferansiyel denklemini ele alalım.

$$\delta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1$$

Başlangıç koşulu ve sınır koşulu olarak;

$$u(x, 0) = \exp(-t/\delta)$$

$$u(x, 0) = \exp(x) + x^2 - axn$$

$$d(x, 1) = \exp(x - 1/\delta) + x^2 - x$$

kullanılacaktır.

Problemin tam çözümü ise;

$$u(x, t) = \exp(x - t/\delta) + x^2 - x$$

dir.

Problemin çözümü için 2 durum incelenebilir.

Durum 1: $\mathcal{E}_i$ sınırlayıcı parametresi hesaplanır. Daha sonra $x=0.1$, 0.5 , 0.9 , $h=0.1$ ve $\delta=0.01$ alınarak Tablo 1'deki değerler elde edilir.

Durum 2: genel olarak ilk aşamada tam çözüm bilinmez. Bu yüzden ilk adımda hesaplama yapabilmek için klasik Pade yaklaşımı metodu kullanılır. Daha sonraki işlemlerde $\mathcal{E}$ kısıtlayıcı parametresi kullanılarak sınırlayıcı Pade yaklaşımı uygulanır.

Çizelge 3.1. Farklı adımlarda kullanılan metodun ve klasik metodun mutlak hataları.

x		Sınırlayıcı Pade Yaklaşımında Mutlak Hata		Klasik Metotta Mutlak Hata	
		RPA[1/1]	RPA[0/1]	PA[1/1]	PA[0/1]
0.1	500	4.30×10^{-16}	2.44×10^{-15}	2.73×10^{-3}	7.38×10^{-2}
0.5		4.44×10^{-16}	2.38×10^{-15}	3.73×10^{-3}	7.38×10^{-2}
0.9		2.77×10^{-16}	2.38×10^{-15}	5.32×10^{-3}	7.38×10^{-2}
0.1	1000	1.92×10^{-15}	2.44×10^{-15}	4.55×10^{-3}	7.38×10^{-2}
0.5		1.83×10^{-15}	2.38×10^{-15}	4.04×10^{-3}	7.38×10^{-2}
0.9		1.87×10^{-15}	2.38×10^{-15}	2.93×10^{-3}	7.38×10^{-2}
0.1	1500	3.63×10^{-15}	2.44×10^{-15}	3.98×10^{-3}	7.38×10^{-2}
0.5		3.66×10^{-15}	2.48×10^{-15}	3.70×10^{-3}	7.38×10^{-2}
0.9		3.44×10^{-15}	2.48×10^{-15}	4.40×10^{-3}	7.38×10^{-2}
0.1	2000	4.19×10^{-15}	2.44×10^{-15}	2.79×10^{-3}	7.38×10^{-2}
0.5		4.27×10^{-15}	2.48×10^{-15}	4.06×10^{-3}	7.38×10^{-2}
0.9		4.48×10^{-15}	2.48×10^{-15}	4.72×10^{-3}	7.38×10^{-2}

Çizelge 3.2. Farklı adımlarda kullanılan metodun ve klasik metodun mutlak hataları.

x		Sınırlayıcı Pade Yaklaşımında Mutlak Hata		Klasik Metotta Mutlak Hata	
		RPA[1/1]	RPA[0/1]	PA[1/1]	PA[0/1]
0.1	500	8.68×10^{-15}	1.35×10^{-14}	1.78×10^{-3}	4.03×10^{-3}
0.5		9.82×10^{-15}	1.37×10^{-14}	2.81×10^{-3}	5.60×10^{-3}
0.9		1.12×10^{-14}	1.51×10^{-14}	3.91×10^{-3}	7.25×10^{-3}
0.1	1000	1.21×10^{-14}	1.07×10^{-15}	4.03×10^{-3}	6.99×10^{-3}
0.5		1.01×10^{-14}	8.52×10^{-15}	2.73×10^{-3}	5.63×10^{-3}
0.9		8.99×10^{-15}	7.97×10^{-15}	1.82×10^{-3}	4.37×10^{-3}
0.1	1500	8.54×10^{-15}	2.94×10^{-15}	1.69×10^{-3}	4.62×10^{-3}
0.5		1.06×10^{-14}	4.19×10^{-15}	2.96×10^{-3}	5.67×10^{-3}
0.9		1.03×10^{-14}	4.12×10^{-15}	1.88×10^{-3}	6.66×10^{-3}
0.1	2000	1.11×10^{-15}	3.60×10^{-16}	3.81×10^{-3}	6.39×10^{-3}
0.5		9.90×10^{-15}	1.60×10^{-15}	2.84×10^{-3}	5.65×10^{-3}
0.9		9.02×10^{-15}	2.51×10^{-15}	1.88×10^{-3}	4.92×10^{-3}

Çizelge 3.3. Farklı adımlarda kullanılan metodun ve klasik metodun mutlak hataları.

x		Sınırlayıcı Pade Yaklaşımında Mutlak Hata				Klasik Metotta Mutlak Hata	
		Durum 1		Durum 2			
		RPA[1/1]	RPA[0/1]	RPA[1/1]	RPA[0/1]	PA[1/1]	PA[0/1]
0.1	500	2.7×10^{-14}	4.2×10^{-14}	7.7×10^{-7}	7.7×10^{-7}	7.7×10^{-5}	7.5×10^{-5}
0.5		3.5×10^{-14}	4.6×10^{-14}	1.3×10^{-6}	1.3×10^{-6}	1.3×10^{-4}	1.2×10^{-4}
0.9		2.7×10^{-14}	1.1×10^{-13}	2.2×10^{-6}	2.2×10^{-6}	2.2×10^{-4}	2.1×10^{-4}
0.1	1000	9.4×10^{-14}	6.5×10^{-14}	1.2×10^{-6}	1.2×10^{-6}	1.2×10^{-4}	1.2×10^{-4}
0.5		6.7×10^{-14}	1.2×10^{-13}	2.4×10^{-6}	2.4×10^{-6}	2.4×10^{-4}	2.4×10^{-4}
0.9		2.4×10^{-14}	3.2×10^{-13}	4.7×10^{-6}	4.7×10^{-6}	4.7×10^{-4}	4.6×10^{-4}
0.1	1500	2.3×10^{-14}	7.4×10^{-14}	1.5×10^{-6}	1.5×10^{-6}	1.5×10^{-4}	1.5×10^{-4}
0.5		8.3×10^{-14}	2.0×10^{-13}	3.5×10^{-6}	3.5×10^{-6}	3.5×10^{-4}	3.6×10^{-4}
0.9		1.3×10^{-13}	5.9×10^{-13}	7.4×10^{-6}	7.4×10^{-6}	7.4×10^{-4}	7.2×10^{-4}
0.1	2000	6.8×10^{-14}	6.9×10^{-14}	1.6×10^{-6}	1.6×10^{-6}	1.6×10^{-4}	1.6×10^{-4}
0.5		8.1×10^{-14}	2.8×10^{-13}	4.5×10^{-6}	4.5×10^{-6}	4.5×10^{-4}	4.3×10^{-4}
0.9		3.0×10^{-13}	9.2×10^{-13}	1.0×10^{-6}	1.0×10^{-6}	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}

1. Durum için Tablo 1,2,3 kullanılan metottan elde edilen mutlak hataların klasik metotla elde edilen mutlak hatalara göre çok daha küçüktür.

2. Duruma göre elde edilen nümerik sonuçlar göstermektedir ki kullanılan yöntemdeki mutlak hata klasik yönleme göre 1. durumdaki kadar olmasa da yine de küçüktür.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ SINIRLAYICI PADE YAKLAŞIMI İÇİN AÇIK DETERMİNAT FORMÜLLERİ

Bu çalışmada genelleştirilmiş sınırlayıcı Pade yaklaşımına bir giriş yapılmıştır. Ardından açık determinant formülleri sunulmuştur. Elde edilen temel sonuçlar Hassan N.A. İsmail tarafından yapılan sınırlayıcı Pade yaklaşımının çözülebilirliği ve tekliği çalışması ile desteklenmiştir. Uygulanan nümerik örnekler yöntemin etkinliğini göstermiştir.

4.1. Giriş

(Hassan N.A. İsmail ve E.M.E. Elbarbary 1998; Hassan N.A.İsmail ve A.Y. Hassan 2000 a, 2000 b; Hassan N.A. İsmail vd. 2000, Hassan N.A.İsmail 2005, 2004) aralarındaki çalışmalarda ifade edilen sınırlayıcı Pade yaklaşımı, parabolik ve hiperbolik kısmı diferansiyel denklemler için başlangıç ve sınır-değer problemlerinin çözümünde uygulanmıştır. Bu uygulama ile hızlı doğru sonuçlar alınmıştır. Bu yaklaşıma dayanarak (Hassan N.A.İsmail ve E.M.E. Elbarbary 2001, 2004; E.M.E Elbarbary vd. 2003)'de sınırlayıcı Taylor yaklaşımı ile sınırlayıcı Chebyshev rasyonel yaklaşımı geliştirilmiştir.

$f(x)$ fonksiyonu için x 'e bilinen kuvvet serisi;

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad c_0 \neq 0, x \in \mathbb{C} \quad (4.1)$$

şeklindedir. Buna göre (4.1) denklemi ile tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu için sınırlayıcı Pade yaklaşımı (Hassan N.A. İsmail 2004)'da tanımlandığı gibi;

$$RP_{f(x)}(m, \alpha, n)(x) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i + \sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i x^{m+i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i x^i} \quad (4.2)$$

şeklindedir. Böylece;

$$RP_{f(x)}(m, \alpha, n)(x) - f(x) = O(x^{m+n+1}) \quad (4.3)$$

$$RP_{f(x)}(m, \alpha, n)(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, \alpha \quad (4.4)$$

yazılabilir. Burada m, n negatif olmayan tamsayılar, α pozitif tamsayıdır ($\alpha \leq n$).

a_i, b_i ve ε_i bilinmeyenleri (4.3) ve (4.4) yardımıyla hesaplanacaktır.

Bu çalışmada sınırlayıcı Pade yaklaşımı için $\alpha > n$ durumunu ele alalım. Buradan hareketle genelleştirilmiş sınırlayıcı Pade yaklaşımını tanımlayalım.

4.2. Metot

Tanım 4.1. (4.1) denklemindeki $f(x)$ fonksiyonu için genelleştirilmiş sınırlayıcı Pade yaklaşımı;

$$G[(m, \alpha/n)]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i + \sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i x^{m+i}}{\sum_{i=1}^n b_i x^i} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan;

$$G[(m, \alpha/n)]_{f(x)}(x) - f(x) = O(x^{m+n+1}) \quad (4.6)$$

$$G[(m, \alpha/n)]_{f(x)}(x_i) = f(x_i) \quad (4.7)$$

yazılabilir.

Burada;

- i) m, n negatif olmayan tamsayı ve α pozitif tamsayıdır.
- ii) $x_i \neq 0, x_i \neq x_j, 1 \leq i < j \leq \alpha$
- iii) $b_0 \neq 1$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} R_k(x) &= f(x) - \sum_{i=0}^k c_i x^i, \quad k = 0, 1, \dots \\ &= f(x), \quad k < 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\tilde{R}_k(x) = -R_k(x) \quad (4.9)$$

Teorem 4.1. Eğer $B_{m+\alpha,n}(0) \neq 0$ ise $\alpha \leq n$ için $G[(m, \alpha/n)]_{f(x)}$ genelleştirilmiş sınırlayıcı Pade yaklaşımı ifadesi mevcuttur ve

$$G[(m, \alpha/n)]_{f(x)} = A_{m+\alpha,n}(x) / B_{m+\alpha,n}(x) \quad (4.10)$$

şeklinde verilir.

Burada;

$$B_{m+\alpha,n}(x) = \begin{vmatrix} c_{m+\alpha+1} & c_{m+\alpha} & \cdots & c_{m+\alpha-n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \\ R_{m+\alpha}(x_1) & x_1 R_{m+\alpha}(x_1) & \cdots & x_1^n R_{m+\alpha}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{m+\alpha}(x_\alpha) & x_\alpha R_{m+\alpha}(x_\alpha) & \cdots & x_\alpha^n R_{m+\alpha}(x_\alpha) \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} \quad (4.11)$$

$$A_{m+\alpha,n}(x) = \begin{vmatrix} c_{m+\alpha+1} & c_{m+\alpha} & \cdots & c_{m+\alpha-n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \\ R_{m+\alpha}(x_1) & x_1 R_{m+\alpha}(x_1) & \cdots & x_1^n R_{m+\alpha}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{m+\alpha}(x_\alpha) & x_\alpha R_{m+\alpha}(x_\alpha) & \cdots & x_\alpha^n R_{m+\alpha}(x_\alpha) \\ \sum_{i=0}^{m+\alpha} c_i x^i & \sum_{i=0}^{m+\alpha} c_{i-1} x^i & \cdots & \sum_{i=0}^{m+\alpha} c_{i-n} x^i \end{vmatrix} \quad (4.12)$$

olur.

İspat: (4.6) eşitliğinden;

$$(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)(c_0 + c_1 x + \cdots) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \varepsilon_1 x^{m+1} + \cdots + \varepsilon_\alpha x^{m+\alpha} + O(x^{m+\alpha+1}) \quad (4.13)$$

yazılabilir.

(4.13) eşitliğindeki x^i nin katsayıları $i=0,1,\dots,m+n$ hesaplandığında $(m+n+1)$ denklemden oluşan bir sistem elde edilir.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = a_0 b_0 \\ a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \\ \vdots \\ a_m = b_0 c_m + b_1 c_{m-1} + \cdots + b_n c_m \\ \varepsilon_1 = b_0 c_{m+1} + b_1 c_m + \cdots + b_n c_{m-n+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_\alpha = b_0 c_{m+\alpha} + b_1 c_{m-1+\alpha} + \cdots + b_n c_{m-n+\alpha} \\ 0 = b_0 c_{m+\alpha+1} + b_1 c_{m+\alpha} + \cdots + b_n c_{m-n+\alpha+1} \\ \vdots \\ 0 = b_0 c_{m+n} + b_1 c_{m+n-1} + \cdots + b_n c_m \end{array} \right. \quad (4.14)$$

$b_0 = 1$ olduğu için $b_1, \dots, b_n$ katsayıları (4.14) ve (4.7) denkleminde son $(n - \alpha)$ eşitliğinden elde edilebilir. Böylece lineer cebirsel denklem sistemi,

$$\begin{cases} b_1 c_{m+\alpha} + \dots + b_n c_{m-n+\alpha+1} = -c_{m+\alpha+1} \\ \vdots \\ b_1 c_{m+n-1} + \dots + b_n c_m = -c_{m+n} \\ b_1 x_1 R_{m+\alpha-1}(x_1) + \dots + b_n x_1^n R_{m+\alpha-n}(x_1) = -R_{m+\alpha}(x_1) \\ \vdots \\ b_1 x_\alpha R_{m+\alpha-1}(x_\alpha) + \dots + b_n x_\alpha^n R_{m+\alpha-n}(x_\alpha) = -R_{m+\alpha}(x_\alpha) \end{cases} \quad (4.15)$$

şeklinde yazılabilir. (denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinanı 0'dan farklı olmalıdır.)

$b_0, b_1, \dots, b_n$ değerlerinin bilinmesiyle $a_0, a_1, \dots, a_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\alpha$ değerleri (4.14) denklemindeki ilk $(m+1+\alpha)$ denklemden hesaplanabilir. Böylece Tanım 1'e göre sonuçları ispatlamış oluruz.

Teorem 4.2. Eğer $\bar{B}_{m+\alpha,n}(0) \neq 0$ ise $\alpha > n$ için $G[(m, \alpha/n)]_{f(x)}$ genelleştirilmiş sınırlayıcı Pade yaklaşımı;

$$G[(m, \alpha/n)]_{f(x)} = \bar{A}_{m+\alpha,n}(x) / \bar{B}_{m+\alpha,n}(x) \quad (4.16)$$

şeklinde verilir.

Burada;

$$\bar{B}_{m+\alpha,n}(x) = \begin{vmatrix} \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1 \tilde{R}_{m+n-1}(x_1) & \dots & x_1^n \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1^{m+n+1} & \dots & x_1^{m+\alpha} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{R}_{m+n}(x_\alpha) & x_\alpha \tilde{R}_{m+n-1}(x_\alpha) & \dots & x_\alpha^n \tilde{R}_{m+n}(x_\alpha) & x_\alpha^{m+n+1} & \dots & x_\alpha^{m+\alpha} \\ 1 & x & \dots & x^n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (4.17)$$

$$\bar{A}_{m+\alpha,n}(x) =$$

$$\begin{vmatrix} \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1 \tilde{R}_{m+n-1}(x_1) & \dots & x_1^n \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1^{m+n+1} & \dots & x_1^{m+\alpha} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{R}_{m+n}(x_\alpha) & x_\alpha \tilde{R}_{m+n-1}(x_\alpha) & \dots & x_\alpha^n \tilde{R}_{m+n}(x_\alpha) & x_\alpha^{m+n+1} & \dots & x_\alpha^{m+\alpha} \\ \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i & \sum_{i=0}^{m+n} c_{i-1} x^i & \dots & \sum_{i=0}^{m+n} c_{i-n} x^i & x^{m+n+1} & \dots & x^{m+\alpha} \end{vmatrix} \quad (4.18)$$

dır.

İspat : (4.13) denklemindeki x^i katsayıları hesaplandığında ve (4.7) denklemindeki x_i noktasındaki α kısıtlama parametresi hesaplandığında $(m+n+\alpha+1)$ denklemden ve $(m+n+\alpha+1)$ bilinmeyenden oluşan aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = a_0 b_0 \\ a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \\ \vdots \\ a_m = b_0 c_m + b_1 c_{m-1} + \cdots + b_n c_{m-n} \\ \varepsilon_1 = b_0 c_{m+1} + b_1 c_m + \cdots + b_n c_{m-n+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n = b_0 c_{m+n} + b_1 c_{m-1+n} + \cdots + b_n c_m \\ b_0 f(x_1) = a_0 + \cdots + a_m x_1^m + \varepsilon_1 x_1^{m+1} + \cdots + \varepsilon_n x_1^{m+n} - b_1 x_1 f(x_1) - \cdots - b_n x_1^n f(x_1) \\ \vdots \\ b_0 f(x_\alpha) = a_0 + \cdots + a_m x_\alpha^m + \varepsilon_1 x_\alpha^{m+1} + \cdots + \varepsilon_n x_\alpha^{m+n} - b_1 x_\alpha f(x_\alpha) - \cdots - b_n x_\alpha^n f(x_\alpha) \end{array} \right. \quad (4.19)$$

$b_0 = 1$ dir. (4.19) denklem sistemindeki son α denklemde geçen $a_0, a_1, \dots, a_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ katsayıları ilk $(m+n+1)$ denklemdeki katsayılarla yer değiştirdiğinde $b_1, \dots, b_n$ ve $\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_\alpha$ katsayıları da hesaplanmış olur. Böylece aşağıdaki denklem sistemi yazılabilir.

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 x_1 \tilde{R}_{m+n-1}(x_1) + \cdots + b_n x_1^n \tilde{R}_m(x_1) + \varepsilon_{n+1} x_1^{m+n+1} + \cdots + \varepsilon_\alpha x_1^{m+\alpha} = -\tilde{R}_{m+n}(x_1) \\ \vdots \\ b_1 x_\alpha \tilde{R}_{m+n-1}(x_\alpha) + \cdots + b_n x_\alpha^n \tilde{R}_m(x_\alpha) + \varepsilon_{n+1} x_\alpha^{m+n+1} + \cdots + \varepsilon_\alpha x_\alpha^{m+\alpha} = -\tilde{R}_{m+n}(x_\alpha) \end{array} \right. \quad (4.20)$$

şeklinde yazılabilir. (4.20) denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı 0'dan farklı olmalıdır.

$b_0, b_1, \dots, b_n$ değerlerinin hesaplanmasıyla ve $a_0, a_1, \dots, a_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ katsayılarının (4.19) denklemdeki ilk $(m+n+1)$ denklemden elde edilmesiyle tanım (4.1)'e göre ispat tamamlanmış olur.

NOT: $RP_{f(x)}(m, n, \alpha)(x)$ sınırlayıcı Pade yaklaşım fonksiyonu $\alpha \leq n$ için $G[m, \alpha/n]_{f(x)}$ genelleştirilmiş sınırlayıcı Pade yaklaşımının özel halidir. (H.N.A. İsmail 2004) çalışmasında verilen sınırlayıcı Pade yaklaşımının varlık ve çözülebilirlik koşulları $B_{m+n, \alpha} \neq 0$ koşulu ile eşdeğerdir.

(4.7) denklemdeki α kısıtlayıcı parametre yoksa ya da $\alpha = 0$ alınırsa $\alpha \leq n$ için $G[m, \alpha/n]_{f(x)}$ yaklaşımı (G.A. Baker ve P.R.Graves- Morris 1981) 'deki klasik Pade yaklaşımına indirgenir. Genelleştirilmiş sınırlayıcı Pade yaklaşımı olan $G[m, \alpha/n]_{f(x)}$ ifadesinde $m=0$ alınırsa (H.N.A. İsmail 2004) 'daki gibi sınırlayıcı Taylor yaklaşımına indirgenir.

Teorem 4.3. Hata Formülleri

i. $\alpha \leq n$ ve $B_{m+n,\alpha} \neq 0$ ise

$$f(x) - G\left[m, \frac{\alpha}{n}\right]_{f(x)} = \frac{x^{m+n+1}}{B_{m+n,\alpha}} \sum_{i=0}^{\infty} e_i x^i \quad (4.21)$$

dir. Burada;

$$e_i = \begin{vmatrix} c_{m+\alpha+1} & c_{m+\alpha} & \cdots & c_{m+\alpha-n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \\ R_{m+\alpha}(x_1) & x_1 R_{m+\alpha-1}(x_1) & \cdots & x_1^n R_{m+\alpha-n}(x_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ R_{m+\alpha}(x_\alpha) & x_\alpha R_{m+\alpha-1}(x_\alpha) & \cdots & x_\alpha^n R_{m+\alpha-n}(x_\alpha) \\ c_{m+n+1+i} & c_{m+\alpha+i} & \cdots & c_{m+1+i} \end{vmatrix} \quad (4.22)$$

dir.

ii. $\alpha > n$ ve $\bar{B}_{m+\alpha,n}(0) \neq 0$ ise

$$f(x) - G[m, \alpha/n]_{f(x)} = \frac{x^{m+n+1}}{\bar{B}_{m+n,\alpha}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i + H(x) \right) \quad (4.23)$$

dir. Burada;

$$g_i = \begin{vmatrix} \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1 \tilde{R}_{m+n}(x_1) & \cdots & x_1^n \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1^{m+n+1} & \cdots & x_1^{m+\alpha} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{R}_{m+n}(x_\alpha) & x_\alpha \tilde{R}_{m+n-1}(x_\alpha) & \cdots & x_\alpha^n \tilde{R}_m(x_\alpha) & x_\alpha^{m+n+1} & \cdots & x_\alpha^{m+\alpha} \\ c_{m+n+1+i} & c_{m+n+i} & \cdots & c_{m+1+i} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad (4.24)$$

$$H(x) = \begin{vmatrix} \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1 \tilde{R}_{m+n}(x_1) & \cdots & x_1^n \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1^{m+n+1} & \cdots & x_1^{m+\alpha} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{R}_{m+n}(x_\alpha) & x_\alpha \tilde{R}_{m+n-1}(x_\alpha) & \cdots & x_\alpha^n \tilde{R}_m(x_\alpha) & x_\alpha^{m+n+1} & \cdots & x_\alpha^{m+\alpha} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -x^{\alpha-n-1} \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

dir.

İspat:

(4.11) ve (4.12) matrislerinden kalan, eğer $B_{m+\alpha,n}(0) \neq 0$ ise

i.

$$\begin{aligned}
B_{m+\alpha,n}(x)f(x) - A_{m+\alpha,n}(x)f(x) &= \begin{vmatrix} c_{m+\alpha+1} & c_{m+\alpha} & \cdots & c_{m+\alpha-n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \\ R_{m+\alpha}(x_1) & x_1 R_{m+\alpha-1}(x_1) & \cdots & x_1^n R_{m+\alpha-n}(x_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ R_{m+\alpha}(x_\alpha) & x_\alpha R_{m+\alpha-1}(x_\alpha) & \cdots & x_\alpha^n R_{m+\alpha-n}(x_\alpha) \\ \sum_{i=m+n+1}^{\infty} c_i x^i & \sum_{i=m+n}^{\infty} c_i x^{i+1} & \cdots & \sum_{i=m+1}^{\infty} c_i x^{i+n} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} x^{m+n+1+i} \begin{vmatrix} c_{m+\alpha+1} & c_{m+\alpha} & \cdots & c_{m+\alpha-n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \\ R_{m+\alpha}(x_1) & x_1 R_{m+\alpha-1}(x_1) & \cdots & x_1^n R_{m+\alpha-n}(x_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ R_{m+\alpha}(x_\alpha) & x_\alpha R_{m+\alpha-1}(x_\alpha) & \cdots & x_\alpha^n R_{m+\alpha-n}(x_\alpha) \\ c_{m+n+1+i} & c_{m+\alpha+i} & \cdots & c_{m+1+i} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

dir.

ii. (4.17) ve (4.18) matrislerinden kalan, eğer $\bar{B}_{m+\alpha,n}(0) \neq 0$ ise

$$\begin{aligned}
&\bar{B}_{m+\alpha,n}(x)f(x) - \bar{A}_{m+\alpha,n}(x)f(x) \\
&= \begin{vmatrix} \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1 \tilde{R}_{m+n}(x_1) & \cdots & x_1^n \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1^{m+n+1} & \cdots & x_1^{m+\alpha} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{R}_{m+n}(x_\alpha) & x_\alpha \tilde{R}_{m+n-1}(x_\alpha) & \cdots & x_\alpha^n \tilde{R}_m(x_\alpha) & x_\alpha^{m+n+1} & \cdots & x_\alpha^{m+\alpha} \\ \sum_{i=m+n+1}^{\infty} c_i x^i & \sum_{i=m+n}^{\infty} c_i x^{i+1} & \cdots & \sum_{i=m+1}^{\infty} c_i x^{i+n} & -x^{m+n+1} & \cdots & -x^{m+\alpha} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} x^{m+n+1+i} \begin{vmatrix} \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1 \tilde{R}_{m+n}(x_1) & \cdots & x_1^n \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1^{m+n+1} & \cdots & x_1^{m+\alpha} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{R}_{m+n}(x_\alpha) & x_\alpha \tilde{R}_{m+n-1}(x_\alpha) & \cdots & x_\alpha^n \tilde{R}_m(x_\alpha) & x_\alpha^{m+n+1} & \cdots & x_\alpha^{m+\alpha} \\ c_{m+n+1+i} & c_{m+n+i} & \cdots & c_{m+1+i} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1 \tilde{R}_{m+n}(x_1) & \cdots & x_1^n \tilde{R}_{m+n}(x_1) & x_1^{m+n+1} & \cdots & x_1^{m+\alpha} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{R}_{m+n}(x_\alpha) & x_\alpha \tilde{R}_{m+n-1}(x_\alpha) & \cdots & x_\alpha^n \tilde{R}_m(x_\alpha) & x_\alpha^{m+n+1} & \cdots & x_\alpha^{m+\alpha} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -x^{\alpha-n-1} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

4.3. Nümerik Örnekler

Üzerinde çalıştığımız yaklaşımın doğruluğunu göstermek için aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 1: $f(x) = e^x$ fonksiyonunu düşünelim.

Tablo 1’de $[0,1]$ aralığında m, n, α farklı değerleri için $x_1 = 1, x_2 = 0,5$ sınırlayıcı şartları ile $G[m, \alpha/n]_{f(x)}$ yaklaşımının bazı mutlak hata değerleri verilmiştir. Tablo 1’de e^x in için mertebe ya da düğüm noktalarında artmalar genelleştirilmiş Pade yaklaşımı ile kesinleşir.

Örnek 2: $f(x) = 1 - \ln(1 - x)$ fonksiyonunu düşünelim.

Tablo 2’de $[0,0.5]$ aralığındaki m, n, α farklı değerleri için $x_1 = 0.5, x_2 = 0.25$ sınırlayıcı şartları ile $[m, \alpha/n]_{f(x)}$ yaklaşımının maksimum hataları verilmiştir. Tablo 2’de $[0,0.5]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu için, genelleştirilmiş sınırlayıcı Pade yaklaşımı sırasıyla pay ve paydanın derecesi aynı olan Pade yaklaşımından daha iyi ve açık sonuç verir.

Çizelge 4.1. $G[m, \alpha/n]_{f(x)}$ yaklaşımı için bazı mutlak hata değerleri.

m	α	n	0,2	0,65	0,9
1	1	1	1.08518×10^{-4}	2.29067×10^{-3}	2.13199×10^{-3}
2	1	1	3.23843×10^{-6}	2.07386×10^{-4}	2.55659×10^{-4}
2	2	1	1.33439×10^{-7}	4.07182×10^{-6}	1.29909×10^{-5}
1	2	2	6.52891×10^{-8}	2.32978×10^{-6}	8.12328×10^{-6}
2	2	2	1.23061×10^{-9}	1.36368×10^{-7}	6.37368×10^{-7}

Çizelge 4.2. $[0,0.5]$ aralığındaki maximum hata.

m	α	n	$\max_{x \in [0,0.5]} f(x) - G[m, \alpha/n]_{f(x)} $	$\max_{x \in [0,0.5]} f(x) - [m, \alpha/n]_{f(x)} $
2	1	0	4.09347×10^{-3}	2.64805×10^{-2}
2	1	1	1.35880×10^{-4}	1.48051×10^{-3}
2	2	1	1.79839×10^{-5}	4.38847×10^{-4}
2	2	2	1.22010×10^{-6}	3.82026×10^{-5}
3	2	2	2.88994×10^{-7}	9.92566×10^{-6}

5. PARABOLİK VE HİPERBOLİK TİP BAŞLANGIÇ – SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SINIRLAYICI PADE YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMLERİNİN YEREL KESME HATALARI

5.1. Giriş

Sınırlayıcı Pade yaklaşımı (RPA) , parabolik ve hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerinin sadece başlangıç ve sınır-değer problemlerinde değil aynı zamanda da belli aşamadaki tam çözümlerin bazı değerlerini bulmak için kullanılır. Metodun kapalı formuna ihtiyaç yoktur. Metot, bilinen tam çözümün bazı noktalarıyla uyumlu, parametrelere adapte edilmiş, sonlu farklar metodundan türetilmiştir.

Hassan N.A. İsmail ve diğerleri, parabolik ve hiperbolik problemlerin yakınsaklığını incelemişlerdir. Ayrıca bazı uygulamalarda konveksiyon difüzyondaki sıvı dinamiği yada Shrödinger denkleminde kullanmışlardır. Bu metot, Burger ya da KdV denklemleri gibi non-lineer tipteki problemlerde, iki boyutlu ve değişken katsayılı denklem sistemlerinde de incelenmiştir.

5.2. Hiperbolik Tip Başlangıç Sınır- Değer Probleminin Tam Çözümü İçin Sonlu Farklar Metodu

$$u_t + au_x = 0 \quad (5.1)$$

$$u_{t^l} = (-a)^l u_{x^l} ; l \text{ negatif olmayan integral} \quad (5.2)$$

Birinci sonlu farklar metodundan;

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + a \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} = 0, \quad h = \Delta x, \quad k = \Delta t$$

$$u_{i,j+1} = (1 - r)u_{i,j} + ru_{i-1,j} \quad r = \frac{ak}{h} \quad (5.3)$$

yazılır.

İkinci sonlu farklar metodunu, Taylor Serisi yardımı ile yazalım.

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + k(u_t)_{i,j} + \frac{k^2}{2}(u_{tt})_{i,j} + \dots$$

$$= u_{i,j} - ak(u_x)_{i,j} + \frac{k^2}{2}a^2(u_{xx})_{i,j} + \dots$$

$$= u_{i,j} - \frac{ka}{2h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{k^2 a^2}{2h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \dots \quad (5.4)$$

$$= u_{i,j} - \frac{r}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{r^2}{2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \dots$$

$$= \frac{1}{2}(r + r^2)u_{i-1,j} + (1 - r^2)u_{i,j} + \frac{1}{2}(r^2 - r)u_{i+1,j} + \dots$$

(5.3) veya (5.4) denklemlerinde $h = ak$ ve $r = 1$ alırsak;

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} \quad (5.5)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} T_{i,j} &= \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i-1,j}) \\ &= \frac{1}{k} \left[\left(u + ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + \frac{k^3}{6}u_{ttt} + \dots \right)_{i,j} - \left(u - hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} - \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \dots \right)_{i,j} \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[\left(ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + \frac{k^3}{6}u_{ttt} + \dots \right) + \left(hu_x - \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{h^3}{6}u_{xxx} - \dots \right) \right]_{i,j} \\ &= \frac{1}{k} \left[\left(ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + \frac{k^3}{6}u_{ttt} + \dots \right) + \left(kau_x - \frac{(ka)^2}{2}u_{xx} + \frac{(ka)^3}{6}u_{xxx} - \dots \right) \right]_{i,j} \\ &= \frac{1}{k} \left[k(u_t + au_x) + \frac{k^2}{2}(u_{tt} - a^2u_{xx}) + \frac{k^3}{6}(u_{ttt} + a^2u_{xxx}) + \dots \right]_{i,j} \end{aligned} \quad (5.6)$$

(5.2) denklemini kullanarak;

$$T_{i,j} = (0) + (0)k + (0)k^2 + \dots \equiv 0 \quad (5.7)$$

şeklinde yerel kesme hatasını bulmuş oluruz. (5.5) sonlu farklar denklemlerindeki tam çözüm gösterir ki başlangıç ve sınır şartları 0 ve $h=ak$ seçimi yapılabilir.

5.3. Parabolik ve Hiperbolik Problemlerin Crank-Nicolson Metodu İle Çözümünde Yerel Kesme Hatası

5.3.1. Parabolik denklem için diferansiyel formunda yerel kesme hatası

$$u_t = u_{xx}$$

Denklemini ele alalım. Bu denklem için sonlu farklar formülü;

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{1}{2h^2}[(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})_j + (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})_{j+1}] \quad (5.8)$$

Yerel kesme hatasının sonlu farklar denklemi;

$$T_{i,j/CN}(h, k) = \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \frac{1}{2h^2}[(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})_j + (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})_{j+1}] \quad (5.9)$$

yerel kesme hatasının diferansiyel formu;

$$T_{i,j/CN}(h, k) = \left[-\frac{1}{12}u_{x^4}h^2 + \frac{1}{6}u_{t^3}k^2 - \frac{1}{24}u_{x^4t}h^2k + \frac{1}{24}u_{t^4}k^3 - \frac{1}{360}u_{x^6}h^4 + \dots + O(h^{2m}, k^n) \right]_{i,j} \quad n, m > 0, \quad m + n \geq 4 \quad (5.10)$$

$O(h^2, k^2)$, iyi bilinen yerel kesme hatasıdır.

5.3.2. Hiperbolik denklem için Crank Nicolson metodunda yerel kesme hatasının diferansiyel formu

$$u_t + au_x = 0$$

Crank Nicolson sonlu farklar formu;

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{a}{4h}[(u_{i+1} - u_{i-1})_j + (u_{i+1} - u_{i-1})_{j+1}] = 0$$

Burada; $r = \frac{ka}{2h}$ alınırsa sonlu farklar formu için yerel kesme hatası

$$\begin{aligned} T_{i,j/CN}(h, k) &= \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{a}{4h}[(u_{i+1} - u_{i-1})_j + (u_{i+1} - u_{i-1})_{j+1}] \\ &= \frac{1}{2k}\{(2u_{i,j+1} - 2u_{i,j}) + r[(u_{i+1} - u_{i-1})_j + (u_{i+1} - u_{i-1})_{j+1}]\} \\ &= \frac{1}{2k}[(-ru_{i-1} + 2u_i + ru_{i+1})_{j+1} - (ru_{i-1} + 2u_i - ru_{i+1})_j] \end{aligned} \quad (5.11)$$

şeklinde olur. Bu durumda yerel kesme hatasının diferansiyel formu;

$$T_{i,j/CN} = a \left[\frac{1}{6}u_{x^3}h^2 + \frac{1}{4}u_{x^2t^2}hk^2 + \frac{1}{24}u_{x^4}h^3 + \frac{1}{24}\frac{k^4}{h}u_{x^4} + \dots \right]_{i,j} \quad (5.12)$$

olur.

5.4. Parabolik Tip Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı İle Çözümünde Yerel Kesme Hatası

Bu problemi bazı ünlü matematikçiler (İsmail vd., 1998, 1999 ; İsmail ve Elbeetar, 2001; İsmail vd., 2002; Elbarbary, 2001 ; Elbarbary vd., 2003) ele almışlardır.

5.4.1. Sonlu farklarda yerel kesme hatası

Crank Nicolson metodunda j. ve 0. aşama için $T_{i,j/CN}$ ve $T_{i,0/CN}$ olmak üzere yerel kesme hatası hesaplanabilir.

$$T_{i,j/CN} = \frac{\left[\left(-\frac{1}{2}ru_{i-1} + (1+r)u_i - \frac{1}{2}ru_{i+1} \right)_{j+1} - \left(-\frac{1}{2}ru_{i-1} + (1-r)u_i - \frac{1}{2}ru_{i+1} \right)_j \right]}{k} \quad (5.13)$$

benzer şekilde;

$$T_{i,0/CN} = \frac{\left[\left(-\frac{1}{2}ru_{i-1} + (1+r)u_i - \frac{1}{2}ru_{i+1} \right)_1 - \left(-\frac{1}{2}ru_{i-1} + (1-r)u_i - \frac{1}{2}ru_{i+1} \right)_0 \right]}{k} \quad (5.14)$$

yazılabilir.

Sınırlayıcı Pade yaklaşımında (RPA) j. ve 0. aşama için $T_{i,j/RP}$ ve $T_{i,0/RP}$ olmak üzere yerel kesme hatası hesaplanabilir. Farklı formlarda;

$$\begin{aligned} T_{i,j/RP} &= \frac{\left[\left(\epsilon_i - \frac{1}{2} \right) ru_{i-1} + (1 + (\epsilon_i + 1)r)u_i - \left(\epsilon_i - \frac{1}{2} \right) ru_{i+1} \right]^{j+1}}{k} \\ &\quad - \frac{\left[\left(\epsilon_i + \frac{1}{2} \right) ru_{i-1} + (1 + (\epsilon_i - 1)r)u_i + \left(\epsilon_i + \frac{1}{2} \right) ru_{i+1} \right]^1}{k} \\ &= \frac{r}{k} \epsilon_i \sum_{l=i-1}^{i+1} (u_l^{j+1} - u_l^j) + T_{i,j/CN} = r\epsilon_i \sigma_{i,j} + T_{i,j/CN} \end{aligned} \quad (5.15)$$

burada;

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j} &= \sum_{l=i-1}^{i+1} (u_l^{j+1} - u_l^j) = \\ &= \left[\left(3u_t + h^2 u_{tx^2} + \frac{h^4}{12} u_{tx^4} + \dots \right) + \frac{k}{2} \left(3u_{t^2} + h^2 u_{t^2 x^2} + \frac{h^4}{12} u_{t^2 x^4} + \dots \right) \right]_{i,j} \end{aligned} \quad (5.16)$$

benzer şekilde;

$$T_{i,0/RP} = r\epsilon_i \sigma_{i,0} + T_{i,0/CN} \quad (5.17)$$

burada;

$$\begin{aligned}\sigma_{i,0} &= \sum_{l=i-1}^{i+1} (u_l^1 - u_l^0) = \\ &= \left[\left(3u_t + h^2 u_{tx^2} + \frac{h^4}{12} u_{tx^4} + \dots \right) + \frac{k}{2} \left(3u_{t^2} + h^2 u_{t^2x^2} + \frac{h^4}{12} u_{t^2x^4} + \dots \right) \right]_{i,0}\end{aligned}\quad (5.18)$$

bulunur.

Sınırlayıcı Pade metodunda ; (5.17) denklemindeki $T_{i,0/RP} = 0$ koyup ϵ_i değerini buluruz.

$$\begin{aligned}r\epsilon_i \sigma_{i,0} &= -T_{i,0/CN} \\ r\epsilon_i &= -\frac{1}{\sigma_{i,0}} T_{i,0/CN}\end{aligned}\quad (5.19)$$

şeklindedir. $(u_t)_{i,0} \neq 0$ iken (5.15) denklemini (5.19) denkleminde yazarsak;

$$T_{i,j/RP} = T_{i,j/CN} - \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_{i,0}} T_{i,0/CN} \quad (5.20)$$

$$T_{i,j/RP}(h, k) = \frac{T_{i,j/CN}(h, k) \sigma_{i,0}(h, k) - T_{i,0/CN}(h, k) \sigma_{i,j}(h, k)}{\sigma_{i,0}(h, k)} \quad (5.21)$$

bulunur. Burada; h'nin tek kuvvetleri ortadan kalkar.

(5.10) denkleminde $j = 0 : m, n \geq 0, m + n \geq 4$ koyarsak;

$$\begin{aligned}T_{i,j/CN} &= \left[-\frac{1}{12} u_{t^2} h^2 + \frac{1}{6} u_{t^3} k^2 - \frac{1}{24} u_{t^3} h^2 k + \frac{1}{24} u_{t^4} k^3 - \frac{1}{360} u_{t^3} h^4 + \dots + O(h^{2m}, k^n) \right]_{i,0} \\ m, n &\geq 0, m + n \geq 4\end{aligned}\quad (5.22)$$

$$T_{i,j/RP}(h, k) =$$

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{[3(u_t)_{i,0} + O(k, h^2)]} \left\{ \frac{1}{8} [(u_{t^2})_{i,j} (u_t)_{i,0} - (u_{t^2})_{i,0} (u_t)_{i,j}] h^2 + \frac{1}{4} [(u_{t^3})_{i,j} (u_t)_{i,0} - \right. \\ &(u_{t^3})_{i,0} (u_t)_{i,j}] k^2 + \frac{1}{8} [(u_{t^4})_{i,j} (u_t)_{i,0} - (u_{t^4})_{i,0} (u_t)_{i,j} + (u_{t^3})_{i,j} (u_{t^2})_{i,0} - \\ &\left. (u_{t^3})_{i,0} (u_{t^2})_{i,j}] k^3 + \frac{1}{8} [(u_{t^3})_{i,j} (u_t)_{i,0} - (u_{t^3})_{i,0} (u_t)_{i,j}] k h^2 + \dots \right\}\end{aligned}\quad (5.23)$$

Köşeli parantez içine alınan ifadeler;

$$A_{l,m} = \left[(u_{tl})_{i,j} (u_{tm})_{i,0} - (u_{tl})_{i,0} (u_{tm})_{i,j} \right], \quad l, m = 0(1)\infty \quad (5.24)$$

şeklinde yazılabilir.

$u(x, t) = e^{-t} \sin x$, $x = ih$, $t = jk$ kapalı formdaki tam çözümünü (5.24) den yerine yazarsak;

$$A_{l,m} = (-1)^{l+m} \left[(e^{-t} \sin x)_{i,j} (e^{-t} \sin x)_{i,0} - (e^{-t} \sin x)_{i,0} (e^{-t} \sin x)_{i,j} \right] = 0 \quad (5.25)$$

bulunur ve (5.25) denklemi;

$$T_{i,j/RP}(h, k) = 0 \quad (5.26)$$

olduğunu gösterir.

5.5. Hiperbolik Tip Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Sınırlayıcı Pade Yaklaşımı İle Çözümünde Yerel Kesme Hatası

Standart hiperbolik denklem $u_t + au_x = 0$ şeklindedir ve denklem üzerine bazı matematikçiler çalışmalar yapmışlardır (İsmail ve Hassan , 2000 a, 2000 b ; İsmail vd., 2001; İsmail ve Elsaïd , 2003).

5.5.1. Crank Nicolson metodunda sonlu farklar formunda yerel kesme hatası

(5.11) denkleminde $r = \frac{ak}{2h}$ alınır;

$$T_{i,j/CN} = \frac{1}{2k} \left[(-ru_{i-1} + 2u_i + ru_{i+1})_{j+1} - (ru_{i-1} + 2u_i - ru_{i+1})_j \right] \quad (5.27)$$

şeklinde yerel kesme hatası bulunur.

5.5.2. Sınırlayıcı pade metodu için yerel kesme hatası

(5.13) denkleminde $r = \frac{ak}{2h}$ alınır;

$$(-ru_{i-1} + 2(1 + \epsilon_{i,l}r)u_i + ru_{i+1})_{j+1} = (ru_{i-1} + 2(1 + \epsilon_{i,l}r)u_i - ru_{i+1})_j \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} T_{i,j/RP} &= \frac{1}{k} \left\{ (-ru_{i-1} + 2(1 + \epsilon_{i,l}r)u_i + ru_{i+1})_{j+1} - (ru_{i-1} + 2(1 + \epsilon_{i,l}r)u_i - ru_{i+1})_j \right\} \\ &= \frac{2r}{k} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \epsilon_{i,l} + T_{i,j/CN} \end{aligned}$$

buradan;

$$T_{i,j/RP} = T_{i,j/CN} + \frac{a}{h}(u_{i,j+1} - u_{i,j})\epsilon_{i,l} = T_{i,j/CN} + \sigma_{i,j}\epsilon_{i,l} \quad (5.29)$$

(5.14) denkleminde benzer şekilde;

$$T_{i,0/RP} = T_{i,0/CN} + \frac{a}{h}(u_{i,1} - u_{i,0})\epsilon_{i,l} = T_{i,0/CN} + \sigma_{i,0}\epsilon_{i,l} \quad (5.30)$$

Sınırlayıcı Pade metodunda $\epsilon_{i,l}$ bulmak için ; $T_{i,0/RP} = 0$ koyalım.

$$\sigma_{i,0}\epsilon_{i,l} = -T_{i,0/CN} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} T_{i,j/RP} &= T_{i,j/CN} + \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_{i,0}} T_{i,0/CN} \\ &= \frac{T_{i,j/CN}(h,k)\sigma_{i,0}(h,k) - T_{i,0/CN}(h,k)\sigma_{i,j}(h,k)}{\sigma_{i,0}(h,k)} \end{aligned} \quad (5.32)$$

dir. Burada;

$$\sigma_{i,j}(h,k) = \frac{a}{h}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = a(u_t + \frac{k}{2}u_{tt} + \frac{k^2}{2}u_{ttt} + \frac{k^3}{24}u_{t^4} + \dots)_{i,j} \quad (5.33)$$

$$\sigma_{i,0}(h,k) = \frac{a}{h}(u_{i,1} - u_{i,0}) = a(u_t + \frac{k}{2}u_{tt} + \frac{k^2}{2}u_{ttt} + \frac{k^3}{24}u_{t^4} + \dots)_{i,0} \quad (5.34)$$

$$T_{i,0/CN}(h,k) = a(6u_{x^3}h^2 + 24u_{x^4}h^3 + 4u_{x^2}hk^2 + 24u_{x^4}\frac{k^4}{h} + \dots)_{i,0} \quad (5.35)$$

şeklindedir.

(5.12), (5.32), (5.33), (5.34) ve (5.35) denklemlerini kullanarak; hiperbolik tip başlangıç- sınır değer probleminin sınırlayıcı pade metodu ile çözümündeki yerel kesme hatasının değişik formu;

$$\begin{aligned} T_{i,j/RP}(h,k) &= \frac{1}{[u_t + O(k)]_{i,0}} \left\{ \frac{a}{6} [(u_t)_{i,0}(u_{x^3})_{i,j} - (u_t)_{i,j}(u_{x^3})_{i,0}] h^2 \right. \\ &\quad + \frac{a}{24} [(u_t)_{i,0}(u_{x^4})_{i,j} - (u_t)_{i,j}(u_{x^4})_{i,0}] h^3 \\ &\quad \left. + [(u_{t^2})_{i,0}(u_{x^3})_{i,j} - (u_{t^2})_{i,j}(u_{x^3})_{i,0}] h^2 k + \dots \right\} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Köşeli parantez içine alınan ifadeler;

$$A_{l,m} = [(u_{t^l})_{i,0}(u_{x^m})_{i,j} - (u_{t^l})_{i,j}(u_{x^m})_{i,0}] \quad (5.37)$$

şeklinde yazılabilir.

$u(x, t) = e^{x-t}$, $x = ih$, $t = jk$ kapalı formdaki tam çözümünü (5.37) den yerine yazarsak;

$$A_{l,m} = (-1)^{l+m} [(-e^{x-t})_{i,0} (e^{x-t})_{i,j} - (-e^{x-t})_{i,j} (e^{x-t})_{i,0}] = 0 \quad (5.38)$$

bulunur ve (5.38) denklemi;

$$T_{i,j/ RP}(h, k) = 0 \quad (5.39)$$

olduğunu gösterir.

Bu çalışmada uygulanan sınırlayıcı pade yaklaşımı (RPA) metodunun avantajlarını aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür.

1. Bu metot bazı zaman adımlarında tam çözümü verir. Örneğin; $t=k$ için $u(x,t)=u(ih,k)$, $i=1(1)N$
2. Bir zaman adımında tam çözümü bilmeden yaklaşım uygulamak mümkündür. Yöntemin etkinliği ve doğruluğu çok küçük, uygun h ve k değerlerinin alınmasına bağlıdır.
3. İlk adımda ihtiyaç duyulan tam çözüm kapalı formda değildir. Bu durumda bazı noktalardaki tam çözümün bilinmesine ihtiyaç vardır.
4. Denklemin tam çözümü kapalı formda verilmediği sürece yöntemin sonuçlarını karşılaştırmak mümkün değildir.
5. Bu yöntemle ilgili çalışmalar geliştirilerek yüksek mertebeli sistem değişken katsayılı lineer olmayan problemlere uygulanması mümkündür.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Difüzyon denklemine sınırlayıcı Pade yaklaşımı metodu uygulanmış ve elde edilen sonuçlar tablo olarak ifade edilmiştir. Sonuçlardan görülmektedir ki sınırlayıcı Pade yaklaşımı bu denklem için iyi sonuçlar vermektedir. Bu metodun lineer olmayan denklemler için de uygulanması çalışılabilir.

Benzer şekilde farklı lineer denklemler için henüz çalışılmamış olanlar için de uygulamalar yapılabilir. Yapılan çalışmalardan anlaşılmaktadır ki metot genel olarak nümerik çözüm anlamında iyi sonuçlar vermektedir.



KAYNAKLAR DİZİNİ

Baker G. A., P. R. Graves ve Morris, (1981), Pade approximants, Part 1: Basic theory, Addison-Wesley London.

Elbarbary Elsayed M., (2001), Accelerating technique for implicit finite difference schemes for two dimensional parabolic partial differential equations, J. Appl. Math. Comput. 77 s.135-144.

Elbarbary Elsayed M., Elsayed Salah M., Youssef Ismail, Khodier Ahmed M. M. (2003), Restrictive Chebyshev rational approximation and applications to heat- conduction problem, , J. Appl. Math. Comput. 136 s.395-403.

Er, Serpil, (2008), Doğrusal olmayan parabolik türden denklemlerin sayısal çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.

Gurarslan G., (2010), Numerical modelling of linear and nonlinear diffusion equations by compact finite difference method Applied Mathematics and Computation 216 s. 2472-2478.

Gurarslan G., Sari M., (2011), Numerical Solutions of linear and nonlinear diffusion equation by a differential quadrature method (DQM), Int.J.Numer.Math.Biomed.Engng. 27 s.69-77.

İbrahim, M. A. K, A. B Shamardan. ve Yousef Y. K., (1987), “On the Numerical Solution of Singularly Perturbed Parabolic Partial Differential Equations” J. of Natural Sciences and Mathematics, . 27(1) s. 41-50.

Ismail H. N. A., Hassan A. Y., (2000), Restrictive pade approximation for solving first order hyperbolic partial differential equation in two space dimensions, J. Inst. Math.Comput. Sci., India 11 (2) s.159-166.

Ismail H. N. A, (2004), Unique solvability of restrictive Pade and restrictive Taylor’s approximations. J. Appl. Math. Comput. 152 s. 89-97.

Ismail H. N. A., Elbarbary E. M. E., (1996), Restrictive pade approximation and parabolic partial differential equations, Int J. Comput. Math. 66 s.343-351.

Ismail H. N. A, Aziza A. Abd Rabboh, (2004), Restrictive Pade approximation for the solution of generalized Fisher and generalized Burger- Fisher equation, J.Appl. Math. Comput. Newyork USA, 154 s. 203-210.

Ismail H. N. A, Elbarbary E. M. E., Salem Gahada S. E., (2003), Restrictive Taylor’s approximation for solving singularly perturbed initial boundary value problems for parabolic PDE. J. Int. Math. Comp. Sci. 14(1) s. 19-26.

Ismail H. N. A, Elbarbary E. M. E., Salem Gahada S. E., (2003), Restrictive Taylor’s approximation for solving convection- diffusion equation, J. Appl. Math. Comput. 147(2) s. 335-363.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ismail H. N. A., Elbarbary E. M. E., Salem Gahada S. E., (2004), Restrictive Taylor's approximation for two dimensional initial-boundary value problems for parabolic PDE. J. Appl. Math. Comput. 147(3) s. 607-615.

Ismail H. N. A., Elbeetar A. A., (2001), Restrictive Pade Approximation For The Solution of Schrodinger Equation, Int. Comput. Math. 79 (5) s. 603-613.

Ismail H. N. A. , Elbeetar A. A. ,(2001), Restrictive Pade Approximation For The Solution of Singularity Perturbed Parabolic PDE, J.Inst.Math.Comput.Sci., India 12 (2) s.153-161.

Ismail H. N. A., Elbarbary E. M. E., (2001), Restrictive taylor expansion and parabolic partial differential equations, Int. J. Comput. Math.78 s. 73-82.

Ismail H. N. A., Elbarbary E. M. E, Hassan A. Y., (2001), Highly accurate method for solving initial boundary value problem for first order hyperbolic differential equation,Int. J. Comput. Math. 77 s. 251-261.

Ismail H. N. A., Elbarbary E. M. E., (1998), Restrictive pade approximation and partial differential equations, Int J. Comput. Math. 66 s.343-351.

Ismail H. N. A., Elbarbary E. M. E., (1999), Highly accurate method for the convection – diffusion equations, Int J. Comput. Math. 72 s.271 – 280.

Ismail H. N. A., Elbarbary E. M. E., Hassan A. Y., (2000), Highly accurate method for solving initial boundary value problem for first order hyperbolic differential equation, Int. J. Comput. Math 77 s.251 – 261.

Ismail H. N. A., Hassan A. Y., (2000), Restrictive pade approximation for solving first order hyperbolic partial differential equation, J. Inst. Math. Comput. Sci., India 11 (1) s.63-71.

Ismail Hassan N. A., (2005) “On the Convergence of the restrictive Pade approximation to the exact solution of IBVP of parabolic and hyperbolic types”. Applied Mathematics and Computation 162(3), s. 1055-1064.

Ismail Hassan N. A., Elyased M. E. Elbarbary ve Hassan Adel Y., (2000), “Restrictive Pade’ Approximation for Solving First Order Hyperbolic Systems in One Space Dimension” “25th Int. Conf. For Stat.& Computer Sc. And Application, Cairo s. 19-25.

Ismail Hassan N. A., (1998), “Accelerating Technique for Any Implicit Finite Difference Schemes for two Dimesional İnitial Boundry Value Problem for Parabolic Partial Differential Equations “8th Conference on Applied Mechanics&Mechanical Engineering, MTC , Cairo s. 547-554.

Ismail Hassan N. A. ve Ekmekawy Adel Y.. (2013), Restrictive Pade Approximation for solving singularly perturbed initial-boundary value problem for first-order Hyperbolic Partial Differential Equation.Egytp,Cairo s. 82-89.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ismail Hassan N. A. ve Elyased M. E. Elbarbary, (1995), “Restrictive Pade Approximation” Journal of Faculty of Education, Ain Shams University. Special Issue for first National Conference of Mathematical and Physical Science and Applications, Cairo s.63-76.

Ismail Hassan N. A. ve Elsayed M. Elsayed, (1995), Differential and integral properties of Pade and restrictive Pade Approximations, first National conference of mathematical and Physical Science and applications, Cairo, Egypt.

Ismail Hassan N. A., Elyased M. E. Elbarbary ve Hassan Adel Younes, (2001), “Highly Accurate Method for Solving Initial Boundary Value Problem for First Order Hyperbolic Differential Equations” Int. J. Computer Math. 77, England s. 71-96.

Ismail Hassan N. A. ve Hassan Adel Younes, (2001), “Restrictive Pade’ Approximation for Solving First Order Hyperbolic Systems in two Space Dimension” “26th Int. Conf. For Stat. & Computer Sc. And Application, Cairo s. 19-25.

Ismail Hassan N. A., Elsayed Zeinab, Rabboh Aziza A. Abd, (2003), Restrictive Pade approximation for solution of generalized Burger’s equation, J. Inst. Math. Comp. Sci. 14(1) s. 31-35.

Ismail Hassan N. A., Elsaid Mahmaud Farouk, (2003), Restrictive Pade approximation for variable coefficients linear initial boundary value problem for hyperbolic partial differential equations, J. Int. Math. Comp. Sci. 14(1) s. 1-10.

Ismail Hassan, N. A. ve Ismail, Elsayed M. Elsayed, (1995), Restrictive Pade Approximation. First national conference of mathematical and physical science and applications, Cairo, Egypt

Kahya D. (2007), Isı denklemi için yaklaşım teorisi yöntemleri, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Meral G., Tezer ve Sezgin M., (2011), The differential quadrature solution of nonlinear reaction – diffusion and wave equations using several time-integration schemes, Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng. 27 s. 461-632

Meral G., Tezer ve Sezgin M., (2009), Differential quadrature solution of nonlinear reaction-Diffusion Equation with relaxation-type time integration, Int. J. Comput. Math. 86(3) s. 451-463.

Narlı, M. (2007), Adomian ayrışım metodu ile kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş.

Smith G. D., (1985), “Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods” Clarendon Press Oxford.

Wazwaz, Abdul-Majid, (2007), The variational iteration method: A powerful scheme for handling linear and nonlinear diffusion equations, Computers and Mathematics with Applications, 54 s.933-939.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Yigider, M. (2011), Kısmi diferansiyel- cebirsel denklemlerin çok değişkenli pade yaklaşımı ile nümerik çözümü, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

