



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ALTERNATİF İLETKENLİĞE YENİ BİR TEORİK
YAKLAŞIM**

Uğur SAĞLAM

Fizik Anabilim Dalı

Genel Fizik Programı

Danışman

Prof. Dr. Deniz Değer ULUTAŞ

Haziran, 2016

İSTANBUL

Bu çalışma 20/06/ 2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Genel Fizik programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi:

Prof. Dr. Deniz DEĞER ULUTAŞ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Yařar Gürkan ÇELEBİ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Uğur YAHŐI
Marmara Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Ayőe EROL
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dođ. Dr. Nevin KALKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 21059 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Çalışmamın her aşamasında yardım ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Deniz Değer Ulutaş'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca, bilimsel ve manevi anlamda desteğini hiç esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Hulusi Kemal Ulutaş'a, çalışmalarımı düzenlerken bana yardımcı olan Yağmur Parim'e, tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan sevgili aileme en içten dileklerle teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2016

Uğur SAĞLAM

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	2
2.1. POLARİZASYON MEKANİZMASI	2
2.2. DEBYE EŞİTLİKLERİ	6
2.3. KOMPLEKS DÜZLEM DİYAGRAMI (ARGAND DİYAGRAMI)	9
2.4. COLE-COLE EŞİTLİĞİ	12
2.5. DAVIDSON-COLE EŞİTLİĞİ	17
2.6. HAVRİLİAK-NEGAMI EŞİTLİĞİ	20
2.7. KAYIP FAKTÖR VE İLETKENLİK	24
2.8. RELAKSASYON TİPLERİ VE İLETKENLİK İFADELERİ	25
3. MALZEME VE YÖNTEM	28
4. BULGULAR	35
5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	37
KAYNAKLAR	38
EKLER	40
EK A.....	40
EK B.....	42
ÖZGEÇMİŞ	44

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

- Şekil 2. 1: Polar bir dielektrikte polarizasyon değişimi. 3
- Şekil 2. 2: Debye denklemlerinin $\log \omega$ 'nın fonksiyonu olarak şematik gösterimi.7
- Şekil 2. 3: ϵ^* için Debye denklemlerinin Cole-Cole diyagramı olan bir yarı-çember.11
- Şekil 2. 4: Cole-Cole relaksasyonuna göre polar bir dielektrikte ϵ^* 'in reel kısmı.13
- Şekil 2. 5: Cole-Cole relaksasyonuna göre polar bir dielektrikte ϵ^* 'in sanal kısmı.14
- Şekil 2. 6: Cole-Cole denkleminin geometrik tasviri.16
- Şekil 2. 7: β 'nin farklı değerleri için $\epsilon' - \omega\tau$ fonksiyonunun şematik gösterimi.19
- Şekil 2. 8: β 'nin farklı değerleri için $\epsilon'' - \omega\tau$ fonksiyonunun şematik gösterimi.19
- Şekil 2. 9: Davidson-Cole relaksasyonuna göre ϵ^* 'in kompleks düzlem diyagramı.20
- Şekil 2. 10: Havriliak-Negami relaksasyonuna göre ϵ^* 'in kompleks düzlem diyagramı.24
- Şekil 3. 1: Debye, genelleştirilmiş Cole-Cole, Davidson-Cole ile Havriliak-Negami ve Jonscher iletkenlik fonksiyonlarının grafiği ($\alpha=0.6, \beta=0.9, s=0.4, A=0.5$).36

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
τ	: Relaksasyon zamanı
ω	: Açısal Frekans
σ_{ac}	: Alternatif İletkenlik
σ_0	: Doğru akım iletkenliği
ϵ^*	: Kompleks dielektrik permitivite
ϵ_s	: Düşük frekanslarda dielektrik sabit
ϵ_∞	: Yüksek frekanslarda dielektrik sabit
ϵ'	: Değişken elektrik alanda dielektrik sabit
ϵ''	: Değişken elektrik alanda dielektrik kayıp
J	: Elektriksel akım yoğunluğu
v	: Hız
E	: Elektrik alan
m	: Kütle
q	: Elektrik yükü
t	: Zaman
D	: Akı yoğunluğu
P	: Polarizasyon

Kısaltmalar	Açıklama
ac	: Alternatif Akım
dc	: Doğru Akım
C-C	: Cole-Cole
C-D	: Cole-Davidson
H-N	: Havriliak-Negami

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALTERNATİF İLETKENLİĞE YENİ BİR TEORİK YAKLAŞIM

Uğur SAĞLAM

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Deniz Değer ULUTAŞ

Polarizasyon eşitliklerini kullanan diğer teorik yaklaşımlardan farklı olarak, amorf yarıiletken ve yalıtkanlarda elektronun hareketini tanımlayan yeni bir hareket denklemi tanımlanıp bir dizi matematiksel bağıntı kullanılarak, iletkenlik formüllerinin daha genelleştirilmiş hallerine ulaşıldı. Debye pratikte çok az malzemenin iletkenlik davranışını açıklayabilen, etkileşmeyen dipollerin oluşturduğu ideal maddesel ortam yaklaşımı altında iletkenlik formülü türetti. Ancak yapısal parametrelerin uygun seçimiyle önceki yarı-ampirik iletkenlik formüllerine indirgenebilen ve tamamen teorik olarak türetilmiş genelleştirilmiş bir iletkenlik ifadesi üretilebilirdi. Dolayısıyla, hareket denklemini rezistans kuvvetleri de içerecek şekilde konum, hız ve zamanın fonksiyonu olarak tanımladık; bu değişkenler üzerinden fraksiyonel formda bir eşitlik geliştirdik ve sonunda pertürbasyon hesabı yapılmadan tüm etkileşimleri içeren iki değişkenli, fraksiyonel, genelleştirilmiş bir eşitlik elde ettik.

Haziran 2016, 51 sayfa.

Anahtar kelimeler: Alternatif iletkenlik, dielektrik relaksasyon, permitivite, Debye modeli, fraksiyonel dinamik

SUMMARY

M.Sc. THESIS

A NEW THEORETICAL APPROACH TO ALTERNATIVE CONDUCTIVITY

Uğur SAĞLAM

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Deniz Değer ULUTAŞ

The equation of motion is redefined to determine an electron motion in a material, amorphous semiconductor or insulator and linked the conductivity after a series of mathematical assumptions, differently from the other theoretical approximations which are used the polarization equations. Debye has derived a conductivity equation for response of ideal materials and the response is rarely observed in practice, but a general conductivity equation which include the previous empirical equations via correct choice of arbitrary parameters and moreover totally theoretical derivation had to be generated. So we defined the equation of motion included resistive forces as a function of coordinates, their derivatives and time variable; we improved a fractional form of this equation over these coordinates and finally obtained the most generalized equation which counts the whole interactions by fractional form as a variation of two variable.

July 2016, 51 pages.

Keywords: ac conductivity, dielectric relaxation, permittivity, Debye model, fractional dynamics

1. GİRİŞ

Dielektrik maddelerin fiziksel özelliklerinin açıklanması için yüzyıldan fazla bir zaman kuramsal ve deneysel çalışmalar yapılmıştır [1-3]. Dielektrik permitivite, alternatif iletkenlik ve bunlar arasındaki bağıntı çalışmamızın konusu olan fiziksel özelliklerdir. Dielektrik ortamlarda deneysel olarak gözlemlenen iletkenlik eğrilerinin Debye modeline uymaması, deneysel sonuçların yorumuna dayanan yeni tip ampirik iletkenlik fonksiyonlarının üretilmesiyle sonuçlanmıştır [4,5]. Cole-Cole, Cole-Davidson ve Havriliak-Negami tipi iletkenlik fonksiyonları üretimi iki aşamadan oluşmuştur: (1) deneysel permitivite davranışını modellemek üzere fit eğrileri ve (2) permitivite ile iletkenlik arasındaki bağıntıyı kullanarak yeni tip iletkenlik fonksiyonunu üretmek. Üretilen yarı-ampirik permitivite ifadeleri kabul görmüş ve iletkenlik davranış dağılımlarını açıklamakta başarılı olmuştur [6]. Ancak gözlemsel temellere dayanan bu eğri uydurma yöntemi kuramsal olarak temellendirilmek istendiğinde polarizasyon ve hareket denklemleri üzerinden iki ayrı üretim yöntemi geliştirilmiştir. Polarizasyon yöntemi kendi içinde ikiye ayrılmıştır: (1) Denklem perturbasyon terimleri ekleyip ya da (2) fraksiyonel formda denklemi ifade edip iletkenlik ifadelerini türetmek. Ancak hareket denklemleri üzerinden iletkenlik ifadelerini üretmekte sadece perturbasyon yöntemi kullanılmıştır.

Fraksiyonel hesap tekniği birçok fiziksel olayın açıklanmasında matematiksel yaklaşımlara yeni bir boyut kazandırmakla kalmamış, fiziksel olayların yorumlarına da katkıda bulunmuştur [7,8]. Bu yüzden diferansiyel formda hareket denklemlerinin Debye modelinde olduğu gibi bazı süreçlerinin değişimini açıklamakta yetersiz kalışı, denklemlerin fraksiyonel formda ifade edilip tekrar çözülmesi durumunda önceden ulaşılan yarı-ampirik iletkenlik fonksiyonlarına ulaşılabilir mi sorusunu aklımıza getirdi. Önceki başarılı yarı-ampirik iletkenlik modellerini anlatıp, fraksiyonel formda hareket denklemleri üzerinden iletkenlik fonksiyonlarının genelleştirilmiş bir formuna tamamen analitik olarak ulaşmaya çalışacağız.

2. GENEL KISIMLAR

Alternatif elektrik alanlarla çalışmaya başlandığında öncelikle dielektrik permitivite ve iletkenlik ifadelerinin kompleks büyüklükler olduğu kabul edilir [4-6]. Sanal kısımların sırasıyla dielektrik kayıp ve alternatif iletkenliği ifade ettiği bilinir. Bu yüzden önce aşağıdaki tanımlamaları yapalım:

Dielektrik permitivite kompleks bir büyüklüktür ve

$$\varepsilon^* = \varepsilon' - i\varepsilon'' \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir, alternatif iletkenlik,

$$\sigma_{ac} = \sigma' + \sigma'' = \omega\varepsilon_0(\varepsilon'' + i\varepsilon') \quad (2.2)$$

toplam iletkenlik,

$$\sigma_T = \sigma_{ac} + \sigma_{dc} = \omega\varepsilon_0\varepsilon'' + \sigma_{dc} \quad (2.3)$$

olarak ifade edilir. Şimdi, kompleks dielektrik permitivite, polarizasyon mekanizması üzerinden tanımlanmaya başlanmalıdır.

2.1. POLARİZASYON MEKANİZMASI

Dielektrik malzeme üzerine uygulanan dc gerilim kaldırıldığında, polarizasyon yeterince uzun bir süre bekledikten sonra sifıra ulaşır. Bu, dipollerin ortam sıcaklığında alan tarafından uyarılmamış rastgele yönelimli hallerine dönmeleri için geçen süredir. Aynı şekilde dc gerilim uygulandığında da polarizasyon maksimuma ulaşması zaman gerektirir. Bu olay dielektrik relaksasyon olarak adlandırılır.

Dc gerilim polar bir dielektrik üzerine uygulandığını ve polarizasyonun sıfırdan bir maksimum değere eksponansiyel olarak ulaştığını düşünelim (Şekil 2.1) [3-6,9].

$$P(t) = P_{\infty}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2.4)$$

Burada $P(t)$ herhangi bir zamanda polarizasyon ve τ relaksasyon süresidir. τ sıcaklığın bir fonksiyonudur ve zamandan bağımsız bir değişkendir.

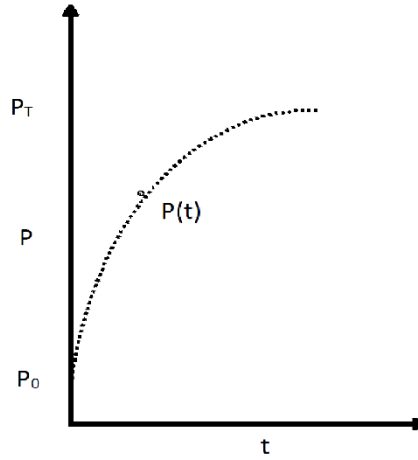
Polarizasyon miktarındaki değişim eşitlik (2.4)' ün diferansiyeli alınarak,

$$\frac{dP(t)}{dt} = -P_{\infty} \left(-\frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{P_{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \quad (2.5)$$

elde edilir. Eşitlik (2.4)' ü (2.5)' de yerine yazarsak ve polarizasyonun sadece dipollerden kaynaklandığını varsayarsak,

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{P_{\infty} - P(t)}{\tau} \cong \frac{P_{\mu} - P(t)}{\tau} \quad (2.6)$$

buluruz.



Şekil 2. 1: Polar bir dielektrikte polarizasyon değişimi.

Atomik polarizasyonu ihmal edersek, toplam polarizasyon- P_T oryantasyonel polarizasyon- P_μ ve optik frekans bölgesinde etkin olan elektronik polarizasyonun- P_e toplamı şeklinde

$$P_T(t) = P_\mu(t) + P_e \quad (2.7)$$

ifade edilebilir.

Toplam polarizasyonun ulaşacağı değer,

$$P_T = \varepsilon_0(\varepsilon_s - 1)E \quad (2.8)$$

ve sabit gerilim altında polarizasyon,

$$P_e = \varepsilon_0(\varepsilon_\infty - 1)E \quad (2.9)$$

şeklinde gösterilir. Burada ε_s ve ε_∞ küçük ve çok büyük frekanslarda dielektrik sabitlerini göstermektedir.

Eşitlik (2.8) ve (2.9), (2.7)'de yerine yazılırsa

$$P_\mu = \varepsilon_0(\varepsilon_s - 1)E - \varepsilon_0(\varepsilon_\infty - 1)E \quad (2.10)$$

ve düzenlenirse,

$$P_\mu = \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)E \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir.

Alternatif elektrik alan,

$$E = E_{max}e^{i\omega t} \quad (2.12)$$

şeklinde gösterilir ve eşitlik (2.6)'da yerine yazılırsa

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)E_m e^{i\omega t} - P(t)] \quad (2.13)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin en genel çözümü

$$P(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}} + \varepsilon_0 \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)E_m e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau} \quad (2.14)$$

dir. Burada C bir sabittir. $t \gg \tau$ olduğunda eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim ihmal edilebilir ve böylece,

$$P(t) = \varepsilon_0 \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)E_m e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau} \quad (2.15)$$

Eşitlik (2.15), (2.7)' de yerine konursa,

$$P(t) = \varepsilon_0(\varepsilon_\infty - 1)E_m e^{i\omega t} + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + i\omega\tau} E_m e^{i\omega t} \quad (2.16)$$

daha basit halde,

$$P(t) = [(\varepsilon_\infty - 1) + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + i\omega\tau}] \varepsilon_0 E_m e^{i\omega t} \quad (2.17)$$

dir. Eşitlik (2.17), $P(t)$ 'nin uygulanan gerilim ile aynı frekansta salınan sinüsoidal bir fonksiyon olduğunu göstermektedir. Akı yoğunluğu fonksiyonu,

$$D(t) = \varepsilon_0 \varepsilon^* E_m e^{i\omega t} \quad (2.18)$$

aynı şekilde akı yoğunluğu,

$$D(t) = \varepsilon_0 E_m e^{i\omega t} + P(t) \quad (2.19)$$

eşitlik (2.18) ve (2.19) ifadeleri kullanılarak,

$$\varepsilon_0 \varepsilon^* E_m e^{i\omega t} = \varepsilon_0 E_m e^{i\omega t} + P(t) \quad (2.20)$$

eşitlik (2.17), (2.10)' de yerine yazılırsa ve biraz düzenlenirse,

$$(\varepsilon' - i\varepsilon'') = 1 + [\varepsilon_\infty - 1 + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + i\omega\tau}] \quad (2.21)$$

elde edilir. Reel ve sanal kısımlar eşitlenirse,

$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (2.22)$$

ve

$$\varepsilon'' = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (2.23)$$

bulunur. Ayrıca kayıp faktörünün,

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega\tau}{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty\omega^2\tau^2} \quad (2.24)$$

olduğu görülebilir.

Eşitlik (2.22) ve (2.23) Debye eşitlikleri olarak bilinir ve polar dielektriklerin davranışını ifade eder. Sıcaklık, tartışmaya Arrhenius ifadesinde τ üzerinden dahil olur. Debye relaksasyonu olası tek bir polarizasyon mekanizmasını ifade eder ve ilgili her fiziksel olgu için, çeşitli relaksasyon formülleri içinde en geniş aralıkta en çok kabul görendir [6,9,10].

2.2. DEBYE EŞİTLİKLERİ

Debye eşitliğinin alternatif ve daha kullanışlı şekilde ifadesini yazalım [4-6].

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + i\omega\tau} \quad (2.25)$$

Şekil 2.2' de eşitlik (2.22)-(2.24) gösterilmiştir. Bu eşitlikler belirtilen özelliklere sahiptir:

- (1) $\omega\tau$ 'nin küçük değerleri için, kompleks dielektrik sabitinin reel kısmı eşitlik (2.22)' nin bölen kısmında bulunan kare terimden dolayı $\varepsilon \approx \varepsilon'$ ve ε'' küçüktür. $\omega\tau = 0$ olduğunda dc gerilim altında beklendiği üzere $\varepsilon'' = 0$ olur.
- (2) $\omega\tau$ 'nin büyük değerleri için, $\varepsilon' = \varepsilon_\infty$ ve ε'' küçüktür.
- (3) Frekansın ara bölgelerde, bazı belli $\omega\tau$ değerlerinde ε'' maksimuma sahiptir.

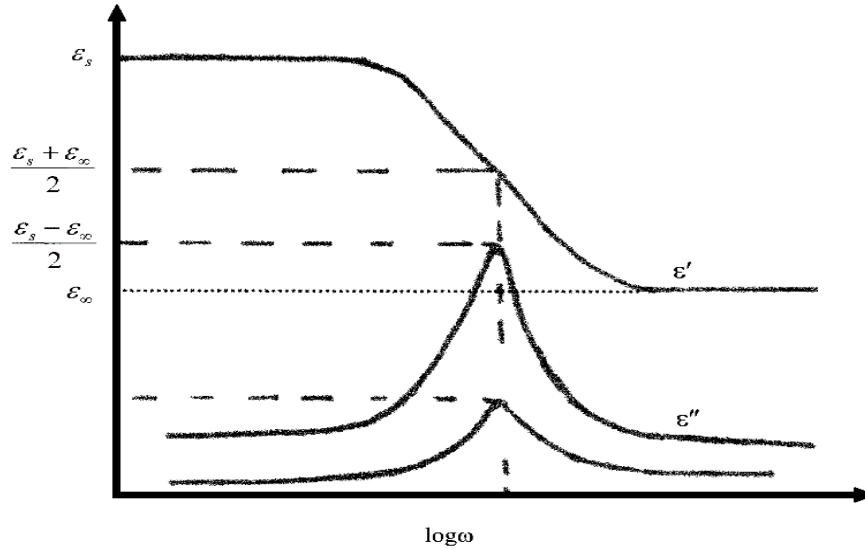
ε'' eşitliğinin maksimum değeri,

$$\frac{\partial \varepsilon''}{\partial(\omega t)} = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{\omega^2 \tau^2 - 1}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} = 0 \quad (2.26)$$

dır. Buradan

$$\omega_p t = 1 \quad (2.27)$$

bulunur. Burada ω_p , ε''_{max} 'daki pik frekansdır.



Şekil 2. 2: Debye denklemlerinin log ω 'nın fonksiyonu olarak şematik gösterimi.

Bu $\omega_p t$ değerinde ε' ve ε'' 'nin alacağı değerler,

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2} \quad (2.28)$$

$$\varepsilon''_{max} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2} \quad (2.29)$$

şeklindedir.

Kayıp faktör $\tan \delta$ frekansla arttıkça önce artar bir maksimum değere ulaşır ve sonra azalır. $\tan \delta$ ifadesinin ω 'ya göre türevi alınıp sifıra eşitlenirse kaybın maksimum olduğu frekans bulunabilir.

$$\frac{\partial(\tan \delta)}{\partial(\omega t)} = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{\varepsilon_\infty \omega^2 \tau^2 - \varepsilon_s}{(\varepsilon_s + \varepsilon_\infty \omega^2 \tau^2)^2} = 0 \quad (2.30)$$

Bu eşitlik çözülrse,

$$\omega \tau = \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_\infty}} \quad (2.31)$$

olduğu görülür. Eşitlik (2.24)' de bu değer yerine yazılırsa,

$$(\tan \delta)_{max} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{\sqrt{\varepsilon_s \varepsilon_\infty}} \quad (2.32)$$

elde edilir.

ε' ve ε'' değerlerini tekrar bulalım.

$$\varepsilon' = \frac{2\varepsilon_s \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty} \quad (2.33)$$

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty} \sqrt{\varepsilon_s \varepsilon_\infty} \quad (2.34)$$

Eşitlik (2.21), (2.22)' ye bölünür ve yeniden düzenlenirse,

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon' - \varepsilon_\infty} = \tau\omega \quad (2.35)$$

ifadesine ulaşılır. Eşitlik (2.35)' e göre $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon' - \varepsilon_\infty}$ 'nin ω 'ya göre grafiği, eğimi τ olan bir doğrudur [4-6].

2.3. KOMPLEKS DÜZLEM DİYAGRAMI (ARGAND DİYAGRAMI)

Cole ve Cole, Debye relaksasyonuna ait ε'' - ε' diyagramının bir yarım-çember olduğunu gösterdi [3-6]. Bu, eşitlik (2.22) ve (2.23)' ün tekrar düzenlenerek yazılmasıyla gösterilebilir

$$(\varepsilon'')^2 + (\varepsilon' - \varepsilon_\infty)^2 = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.36)$$

Eşitlik (2.36)' nın sağ tarafı eşitlik (2.22) kullanılarak yazılabilir.

$$(\varepsilon'')^2 + (\varepsilon' - \varepsilon_\infty)^2 = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)(\varepsilon' - \varepsilon_\infty) \quad (2.37)$$

Eşitlik (2.37) daha basit şekilde ifade edilebilir.

$$\varepsilon'^2 - \varepsilon'(\varepsilon_s + \varepsilon_\infty) + \varepsilon_s \varepsilon_\infty + \varepsilon''^2 = 0 \quad (2.38)$$

Cebirsel tanımlar kullanılarak

$$\varepsilon_s \varepsilon_\infty = \frac{1}{4} [(\varepsilon_s + \varepsilon_\infty)^2 - (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)^2] \quad (2.39)$$

Eşitlik (2.38)

$$\left(\varepsilon' - \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2}\right)^2 + (\varepsilon'')^2 = \left(\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2}\right)^2 \quad (2.40)$$

yazılabilir. Bu eşitlik, yarıçapı $\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2}$ ve merkezi $\left(\frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2}, 0\right)$ olan çemberin denklemdir.

$(\varepsilon_\infty, 0)$ ve $(\varepsilon_s, 0)$ çember üzerindeki noktalar olduğu görülmektedir. Başka bir deyişle, Şekil 2.3' de görüldüğü gibi çember yatay eksenini ε_∞ ve ε_s noktalarında kesmektedir. ε' - ε'' grafiği ε^* 'ın kompleks düzlem diyagramı olarak bilinir.

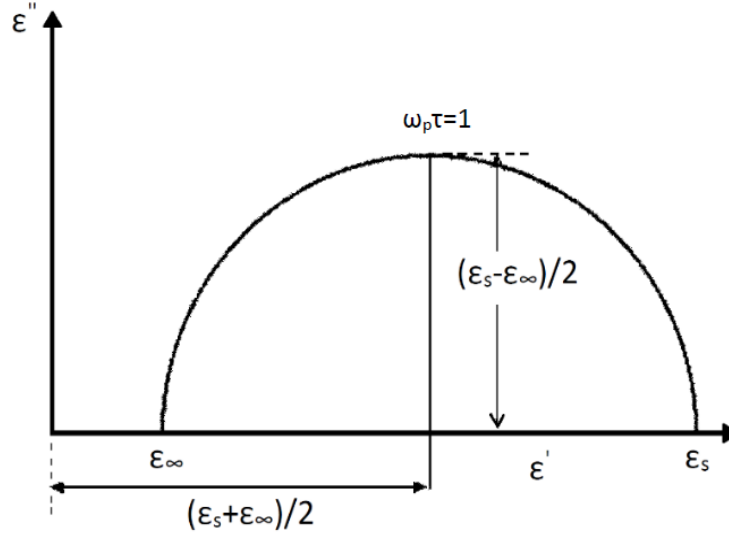
$\omega_p t = 1$ 'de sanal kısım ε'' maksimum değer alır

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2} \quad (2.41)$$

Buna karşılık gelen ε' değeri

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2} \quad (2.42)$$

ile verilir. Beklenen değerlere ulaşmamızın sebebi eşitlik (2.40)' ın Debye denklemlerinden biri olmasıdır.



Şekil 2. 3: ϵ^* için Debye denklemlerinin Cole-Cole diyagramı olan bir yarı-çember.

Herhangi bir malzeme için çeşitli frekanslarda ölçümler alınarak, genellikle $\omega = 0$ ile $\omega = 10^{10}$ rad/s arasında olmak üzere, ϵ'' - ϵ' diyagramı çizilir. Eğer değerler yarı-çember üzerine düşüyorsa malzeme Debye relaksasyonu gösteriyor sonucuna ulaşabiliriz. Cole-Cole diyagramı, orta frekans bölgesinde yapılan ölçümlere uygun kompleks dielektrik sabiti davranışını belirlemek için kullanılır. Pratikte çok az malzeme tamamen Debye eşitlikleriyle uyum içindedir, tutarsızlık relaksasyon zamanlarının dağılımı olarak yorumlanır [4-6].

Debye teorisi basitçe moleküllerin küresel şekle sahip olduğunu ve dış elektrik alan etkisinde dönen molekülün ϵ^* değerini etkilemediğini varsayar. Bu bir kuraldan öte varsayımdır, çünkü moleküller sadece farklı şekillere sahip değil, özellikle uzun zincirli polimerlerde olduğu gibi lineer dizilime de sahiptir. Dahası, katı halde dipoller etkileşir ve alternatif alana ortam cevap verir. Bu malzemelerde relaksasyon zamanları rotasyon eksenine bağlı olarak değişir, bunun sonucu olarak dispersiyon genellikle geniş bir frekans aralığında gözlenir [4-6].

2.4. COLE-COLE EŞİTLİĞİ

Birden fazla relaksasyon zamanına sahip polar dielektrikler Debye eşitliklerini sağlamaz ve eşitlik (2.29)' un tahmin ettiği maksimum ε'' değerinden daha düşük bir değer alırlar. $\tan \delta - \log \omega\tau$ eğrisi daha geniş ve eşitlik (2.32)' nin tahmin ettiğinden daha küçük bir maksimuma sahiptir. Bu koşullar altında aynı zamanda $\varepsilon' - \varepsilon''$ grafiği de bozulacaktır ve Cole-Cole yarı-çemberinin (Şekil 2.6) merkezinin ε' ekseninin altında kaldığını göstermiştir. Bu yüzden kompleks dielektrik sabiti için deneysel bir eşitlik önerdiler [11].

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}; 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2.43)$$

$\alpha = 0$ için Debye relaksasyonu

Burada τ ortalama relaksasyon zamanı ve α ise materyal için verilen bir sabiti ifade etmektedir. Eşitlik (2.43)'ün grafikleri, Şekil 2.4 ve 2.5' de α 'nın çeşitli değerleri için gösterilmiştir. Debye eşitlikleri ise grafiklerin kıyaslanması amacıyla verilmiştir. Relaksasyon değerleri yakınında Cole-Cole eşitliğine göre ε' , ω 'ya göre Debye relaksasyonundan daha yavaş değişmektedir. α arttıkça, kayıp faktörü ε'' daha yaygın ve ε_{max} maksimum değeri daha küçüktür.

Tek bir relaksasyon zamanı olan dielektrik için, $\alpha = 0$ olduğu durumda, eşitlik (2.43) bilinen eşitlik (2.23) olur. α 'nın daha büyük değerleri, relaksasyon zamanları daha geniş bir dağılım gösterir.

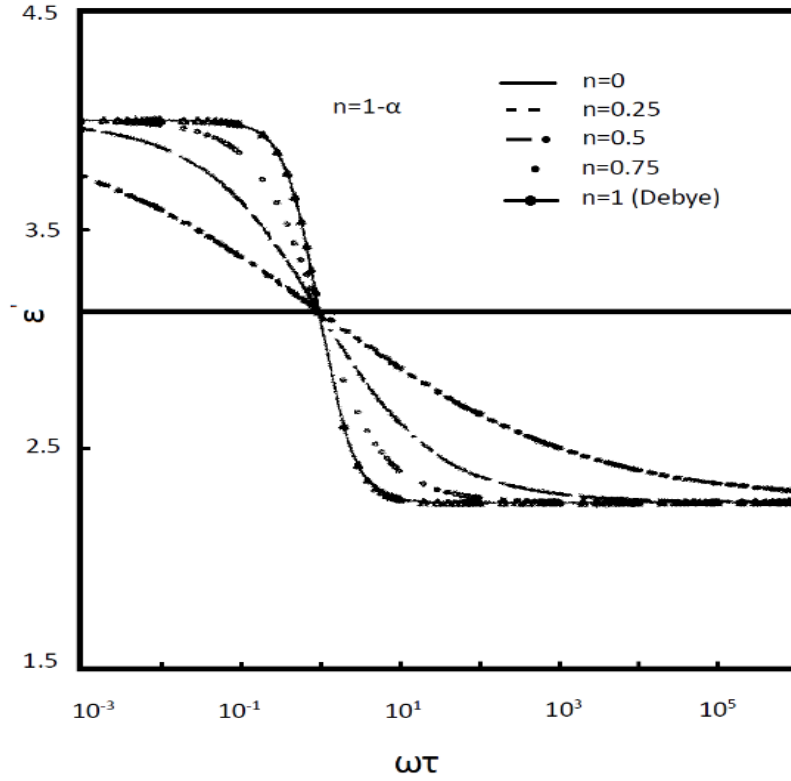
Eşitlik (2.43)' ün geometrik yorumunu anlamak için,

$$(\varepsilon' - i\varepsilon'') = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (\omega\tau)^\alpha \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right)} \quad (2.44)$$

şeklinde yazılır, reel ve sanal kısımları eşitlenirse,

$$\varepsilon' = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \frac{1 + (\omega\tau)^{\alpha} \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{1 + 2(\omega\tau)^{\alpha} \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + (\omega\tau)^{2\alpha}} \quad (2.45)$$

$$\varepsilon'' = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \frac{(\omega\tau)^{\alpha} \sin(\frac{\alpha\pi}{2})}{1 + 2(\omega\tau)^{\alpha} \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + (\omega\tau)^{2\alpha}} \quad (2.46)$$



Şekil 2. 4: Cole-Cole relaksasyonuna göre polar bir dielektrikte ε^* 'in reel kısmı.

olur. Burada,

$$i \equiv e^{i\alpha\pi/2} \equiv \cos \alpha\pi/2 + i \sin \alpha\pi/2 \quad (2.47)$$

dir. Eşitlik (2.45) ve (2.46) alternatif olarak,

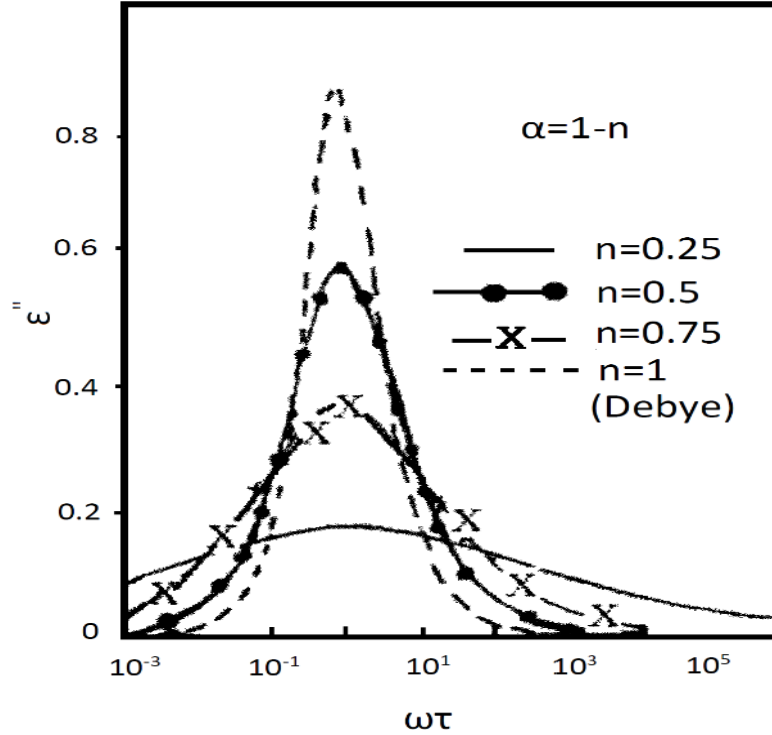
$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon_{\infty}}{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sinh \alpha s}{\cosh \alpha s + \sin \alpha \pi / 2} \right) \quad (2.48)$$

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos \alpha \pi / 2}{\cosh \alpha s + \sin \alpha \pi / 2} \right) \quad (2.49)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$s = \ln \omega \tau \quad (2.50)$$

dir.



Şekil 2. 5: Cole-Cole relaksasyonuna göre polar bir dielektrikte ε^{*} 'in sanal kısmı.

Eşitlik (2.45) ve (2.46)' dan $\omega\tau$ 'yu eleyerek Cole-Cole,

$$\begin{aligned} (\varepsilon' - \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2})^2 + [\varepsilon'' + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2} \coth(\alpha\pi/2)]^2 \\ = [\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2} \operatorname{cosec}(\alpha\pi/2)]^2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

olduğunu gösterdi. Bu eşitlik merkezi,

$$[\frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2}, \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_s}{2} \coth(\alpha\pi/2)] \quad (2.52)$$

ve yarıçapı

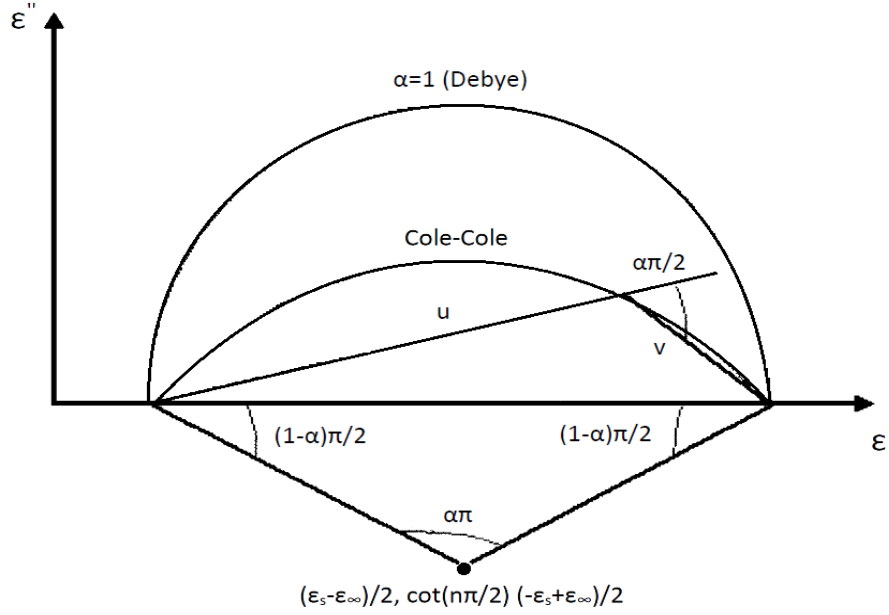
$$[\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2} \operatorname{cosec}(\alpha\pi/2)] \quad (2.53)$$

olan çember denklemini ifade eder.

Şekil 2.4 ve 2.5, α 'nın birkaç değeri için ε' ve ε'' değişimini göstermektedir. Bunlar eşitlik (2.45) ve (2.46)'nın grafikleridir ve $\omega\tau = 1$ için bu eşitlikler,

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2}; \quad \varepsilon'' = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2} \tan \frac{\alpha\pi}{2} \quad (2.54)$$

olur.



Şekil 2. 6: Cole-Cole denkleminin geometrik tasviri.

Daha önce belirtildiği üzere, $\alpha = 0$ durumu sonsuz relaksasyon zamanı dağılımına karşılık gelir ki bu da, dielektrik sabitinin $(\epsilon_s + \epsilon_\infty)/2$ olması hariç, malzemenin dc alan altında davranışına eşdeğerdir. Kompleks dielektrik sabitinin sanal kısmı n 'in bu değeri için, dc alanla tutarlı olarak, sifıra eşittir. n değeri arttıkça, ϵ' artan $\omega\tau$ ile değişir, ve eğriler $\omega\tau = 1$ 'de kesişirler. $n = 1$ 'de ϵ' artan $\omega\tau$ ile Debye relaksasyonuna eşdeğer davranır, dolayısıyla malzeme bir relaksasyon zamanına sahiptir.

ϵ'' , $\omega\tau$ ' ya göre değişse de n değerlerine de bağlıdır. n değeri arttıkça eğriler sivrileşir ve pik değerleri artar. Bu davranış Şekil 2.5 ile tutarlıdır.

Cole-Cole diyagramı üzerinde bir nokta ile sırasıyla ϵ_∞ ve ϵ_s noktalarını bağlayan u ve v doğru parçaları olsun (Şekil 2.6). Herhangi bir frekansta aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$u = \epsilon^* - \epsilon_\infty; \quad v = \frac{\epsilon^* - \epsilon_\infty}{(\omega\tau)^{1-n}}; \quad \frac{v}{u} = (\omega\tau)^{1-n} \quad (2.55)$$

$\log \omega - (\log v, \log u)$ grafiği çizilerek n değerlerine ulaşılabilir. n arttıkça moleküllerin dönme serbestlik dereceleri de artar. Sıcaklıkta n parametresinde artışa neden olur.

2.5. DAVIDSON-COLE EŞİTLİĞİ

Davidson-Cole'un önerdiği ampirik eşitlik,

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{(1 + i\omega\tau)^\beta} \quad (2.56)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $0 \leq \beta \leq 1$ malzemenin karakteristik sabitidir [12,13].

Eşitlik (2.56) reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa,

$$\varepsilon' - \varepsilon_\infty = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)(\cos \phi)^\beta \cos \phi\beta \quad (2.57)$$

$$\varepsilon'' = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)(\cos \phi)^\beta \sin \phi\beta \quad (2.58)$$

yazılabilir. Burada $\tan \phi = \omega\tau_0$.

Bu eşitlikler Şekil 2.7 ve 2.8' de ve $\beta = 1$ olduğu durumda Debye eğriside karşılaştırma amacıyla gösterilmiştir. ε' düşük frekans bölgesinde β 0'dan 1'e artarken değişmez kalır. Fakat yüksek frekans bölgesinde β arttıkça ε' azalır ve $\beta = 1$ 'de en küçük değerine (Debye eşitliği değerine) ulaşır.

ε'' içinde benzer bir durum söz konusudur, düşük frekans bölgesinde artan β ile artar ve yüksek frekans bölgesinde artan β ile azalır. $\varepsilon'' - \omega\tau$ eğrisi, ε'' eksenine paralel doğru boyunca simetrisini kaybeder ve maksimum değerinden geçer.

Eşitlik (2.57) ve (2.58) polar koordinatlarda ifade edilirse,

$$r = [(\varepsilon' - \varepsilon_\infty)^2 + \varepsilon''^2] \quad (2.59)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon' - \varepsilon_{\infty}} \quad (2.60)$$

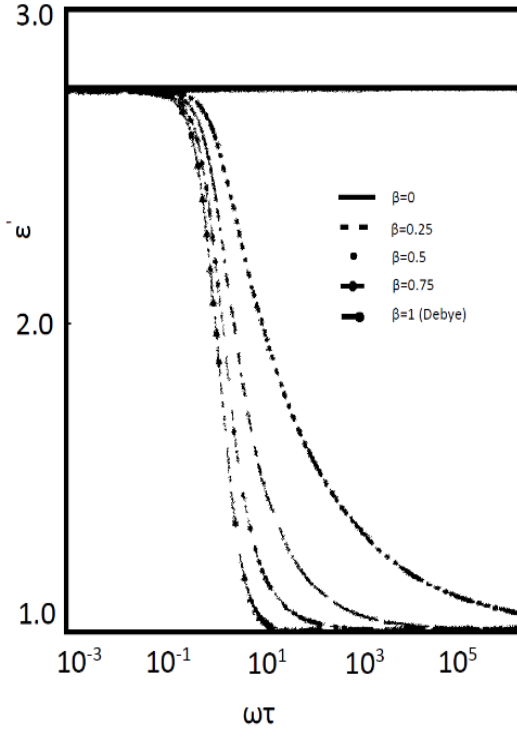
elde edilir. Davidson-Cole eşitlik (2.57) ve (2.58)' i kullanarak,

$$r = (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty})[(\cos \theta / \beta)]^{\beta} \quad (2.61)$$

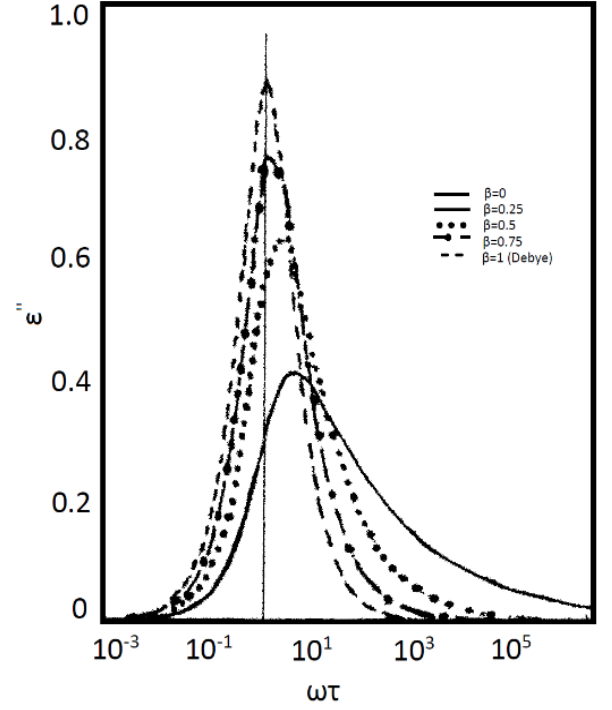
$$\tan \theta = \tan \beta \phi \quad (2.62)$$

$$\omega \tau = \tan\left(\frac{\theta}{\beta}\right) \quad (2.63)$$

ifadelerine ulaşmıştır.

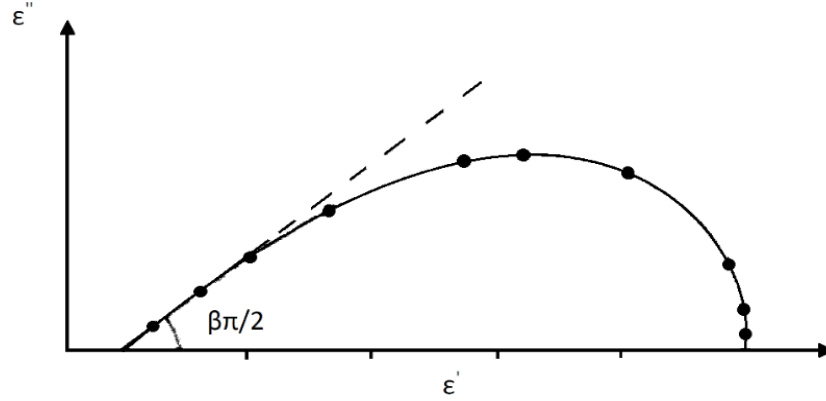


Şekil 2. 7: β 'nın farklı değerleri için ϵ' - $\omega\tau$ fonksiyonunun şematik gösterimi.



Şekil 2. 8: β 'nın farklı değerleri için ϵ'' - $\omega\tau$ fonksiyonunun şematik gösterimi.

Eşitlik (2.56) kompleks düzlemde başlangıç ve bitişi sırasıyla ϵ_s , ϵ_∞ ile gösterilen ve ϵ' eksenini üzerindeki bir yayı ifade eder (Şekil 2.9). $\omega \rightarrow 0$ 'a giderken limit eğri ϵ' eksenini üzerindeki bir yarı çember iken, $\omega \rightarrow \infty$ 'a giderken elimizde artık ϵ' eksenini ile $\beta\pi/2$ açı yapan bir doğrudur. Başka bir deyişle, düşük frekanslarda noktalar bir çembersel yay iken yüksek frekanslarda doğru şeklini alır [4,5].



Şekil 2. 9: Davidson-Cole relaksasyonuna göre ϵ'' 'in kompleks düzlem diyagramı.

2.6. HAVRİLİAK-NEGAMİ EŞİTLİĞİ

Polimer malzemeler gibi karmaşık büyük moleküler yapılara ilgi alanımızı genişletelim. Küçük organik ya da inorganik moleküllerin dispersiyonu geniş frekans aralığında sabit sıcaklıkta ölçümler yapılarak çalışılır. Sonra sıcaklık istenen bölgede değiştirilerek ölçümler tekrarlanır. Tüm izotermal veriler kullanılarak kompleks düzlem diyagramları çıkarılır ve bu diyagramların Cole-Cole eşitliğinin öngördüğü gibi yarı-çembersel yay ya da Davidson-Cole eşitliğinin öngördüğü gibi asimetrik bir yay olup olmadığı kontrol edilerek davranış analiz edilir [4-6].

Polimerler ile yapılan çalışmalar sonucu üretilen izotermal eğriler basit moleküllerde olduğu gibi basit bir davranış modeli göstermez. Bu zorluğun temel nedenleri: (1) Polimerlerin dispersiyon aralığı çok geniş olduğundan sabit sıcaklıktaki alınan veriler dispersiyon analizi için yetersiz kalır. Değişik sıcaklıklarda alınan veriler toplanırsa daha anlamlı bir dispersiyon analizi yapılabilir. (2) Kompleks düzlemde diyagramların şekli, basit yapıda moleküllerde olduğu gibi dispersiyon parametreleri saptanarak nadiren kolayca bulunur [4-6].

Polimerlerde α dispersiyonu çalışmak için Havriliak-Negami birçok polimerin dielektrik özelliklerini ölçtü. Bir polimerde α dispersiyonu birçok fiziksel özelliğin değiştiği camsı geçiş sıcaklığıyla ilgili bir süreçtir [4-6]. Birçok polimerde kompleks düzlem diyagramı yüksek frekanslarda lineer ve düşük frekanslarda çemberseldir [4-6].

Düşük frekanslarda çembersel yaya (Cole-Cole) fit etme denemeleri başarılı iken, yüksek frekanslarda durum böyle değildir. Aynı şekilde yüksek frekanslarda asimetrik çembersel yaya (Davidson-Cole) fit etme denemeleri başarılı iken, düşük frekanslarda durum böyle değildir [4-6].

İki dispersiyon eşitliği uygun şekilde tekrar yazılabilir:

$$\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} = [1 + (i\omega\tau)^\alpha]^{-1}: \quad \text{çembersel yay (Cole - Cole)} \quad (2.64)$$

$$\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} = (1 + i\omega\tau)^{-\beta}: \quad \text{asimetrik yarı - çember (Davidson - Cole)} \quad (2.65)$$

Bu iki eşitliği kombine ederek, Havriliak-Negami kompleks dielektrik sabit için yeni bir fonksiyon önerdi [14,15].

$$\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} = (1 + (i\omega\tau)^\alpha)^{-\beta} \quad (2.66)$$

Bu yeni fonksiyon önceki eşitlikleri özel şartlarda tekrar üretir. $\beta = 1$ iken çembersel yay olduğu görülmektedir. $\alpha = 1$ için asimetrik yarı-çember ya da $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ iken Debye eşitliği elde edilir.

Eşitlik (2.66) ile verilen relaksasyon fonksiyonunu test etmek için De Moivre teoremini uygularsak,

$$\varepsilon' - \varepsilon_\infty = \frac{1}{r^{\beta/2}} (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \cos \beta\theta \quad (2.67)$$

$$\varepsilon'' = \frac{1}{r^{\beta/2}} (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \cos \beta\theta \quad (2.68)$$

buluruz. Burada,

$$r = [1 + (\omega\tau)^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)]^2 + [(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)]^2 \quad (2.69)$$

$$\theta = \arctan\left[\frac{(\omega\tau)^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{1 + (\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\right] \quad (2.70)$$

dır. Eşitlik (2.66) ω 'nın ekstermum olduğu $\omega \rightarrow 0$ ve $\omega \rightarrow \infty$ durumlarında test edilebilir.

İlk durum olarak $\omega \rightarrow \infty$, alırsak eşitlik (2.66),

$$\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} \cong (i\omega\tau)^{\beta\alpha} \quad (2.71)$$

$$= (\omega\tau)^{\beta\alpha} \{\cos[\beta\alpha\pi/2] - i \sin[\beta\alpha\pi/2]\} \quad (2.72)$$

$$\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) = \frac{\varepsilon''_{(\omega \rightarrow \infty)}}{\varepsilon'_{(\omega \rightarrow \infty)} - \varepsilon_\infty} \quad (2.73)$$

olur. Çok düşük frekanslarda, $\varepsilon'' \propto (\varepsilon_s - \varepsilon') \propto \omega^\alpha$ olduğu görülebilir.

Eşitlik (2.67) ve (2.68) dispersiyon parametrelerini de dikkate alarak yazalım:

- I. $\omega\tau \rightarrow \infty$ iken $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon_\infty$ ve $\varepsilon'' \rightarrow 0$ olur, dolayısıyla $\varepsilon^* = \varepsilon_\infty$
- II. $\omega\tau \rightarrow 0$ iken $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon_s$ ve $\varepsilon'' \rightarrow 0$ olur, dolayısıyla $\varepsilon^* = \varepsilon_s$

Kompleks düzlemde eğrinin kestiği noktalardan da ε_s ve ε_∞ değerlerini görebiliriz. α ve β parametrelerini bulmak için eşitlik (2.67) ve (2.68) kullanılırsa,

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon' - \varepsilon_\infty} = \tan \beta\theta = \tan \phi \quad (2.74)$$

ifadesine ulaşılır. $\phi = \beta\theta$ tanımlamasını yapmıştık. ϕ 'yi ϕ_L olarak gösterirsek (Şekil 2.10), $\omega\tau \rightarrow \infty$ iken eşitlik (2.70)

$$\phi_L = \beta\alpha\pi/2 \quad (2.75)$$

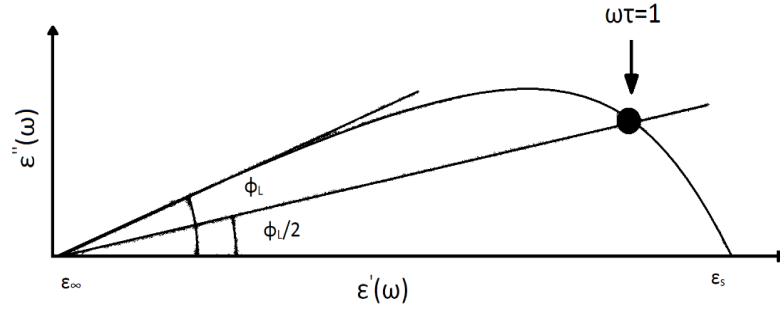
şeklinde ifade edilir. Böylece grafiksel parametre ϕ_L ile dispersiyon parametreleri α ve β arasında bir bağıntı tanımlamış oluruz. Yine relaksasyon zamanı $\omega\tau \equiv 1$ ile verilir ve bu frekansta tüm parametrelere p indisi ekleyelim. Havriliak ve Negami ϕ_L 'nin açıortayının kompleks düzlem diyagramını ε_p^* 'da kestiğini göstermiştir.

$$\frac{1}{\phi_L} \log \frac{|\varepsilon_p^* - \varepsilon_\infty|}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} = -\frac{1}{\pi(1-\alpha)} \log[2 + 2 \sin \alpha(\pi/2)] \quad (2.76)$$

Dispersiyon parametrelerini bulmak için yapılan deneysel veri analizi kompleks düzlem diyagramlarından belirtilen yöntemi ortaya çıkarır:

1. Düşük frekans ölçümleri reel eksenine kesecek dolayısıyla da ε_s 'yi verecek şekilde ekstrapole edilir.
2. Yüksek frekans ölçümleri reel eksenine kesecek dolayısıyla da ε_∞ 'yi verecek şekilde ekstrapole edilir.
3. ϕ_L parametresi yüksek frekanslarda alınan ölçümler kullanılarak belirlenir.
4. ϕ_L açısı ikiye ayrılır ve ölçülen eğriyi kesmesi için uzatılır. Eğriyi kestiği noktadan frekans belirlenir ve karşılık gelen relaksasyon zamanı $\omega = 1/\tau$ 'den hesaplanır.
5. α parametresine eşitlik (2.76) kullanılarak ulaşılır.
6. β parametresi eşitlik (2.75) kullanılarak hesaplanır.

Havriliak ve Negami çeşitli polimerleri analiz edip her biri için dispersiyon parametrelerini $(\varepsilon_s, \varepsilon_\infty, \alpha, \beta, \tau)$ belirledi. Amorf polimerler camsı geçiş sıcaklığı T_G etrafında asimetrik şekilde davranırlar. Bu yüzden, Havriliak ve Negami fonksiyonu relaksasyonu tanımlamak için çok kullanışlı bulundu. α parametresinin zincir bağlarının bir büyüklüğü ve β parametresinin ise yerel yoğunluk değişimlerini gösterdiği düşünülebilir. Polimerlerde zincir bağları sıcaklık düştükçe azalmalıdır. α parametresi T_G 'nin üstünde yavaşça artar ki bu da camsı geçiş sıcaklığının göstergesi olarak düşünülebilir.



Şekil 2. 10: Havriliak-Negami relaksasyonuna göre ϵ^* 'in kompleks düzlem diyagramı.

2.7. KAYIP FAKTÖR VE İLETKENLİK

Çoğu dielektrik, yüklerin hareketine bağlı bir iletkenliğe sahiptir ve bu iletkenlik yığın iletkenlik olarak adlandırılır. Yüklerin hareketi iletkenliği artırır ve buna ek olarak dielektriği polarize eder. İletkenlik dielektrik kayba katkı olarak düşünülebilir. Eşitlik (2.2) dielektrik kayba katkıları vermektedir. Kayıp toplamda,

$$\epsilon'' = \epsilon''(\omega) + \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \quad (2.77)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik (2.23)' den $\epsilon''(\omega)$ çekilip yerine konursa,

$$\sigma = (\epsilon_s - \epsilon_\infty)\epsilon_0 \frac{\omega^2\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (2.78)$$

ve

$$\sigma_\infty = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)\epsilon_0}{\tau} \quad (2.79)$$

ve

$$\sigma = \frac{\sigma_{\infty} \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.80)$$

elde edilir. İletkenlik, $\omega = 0$ 'dan $\omega = \infty$ 'a ε' 'nin artan ω 'ya bağlı olarak azalışının ayna görüntüsüne benzer şekilde artar. Eğer dc iletkenlik tekrar toplam iletkenlikte hesaba katılırsa,

$$\sigma_T = \sigma_{dc} + \frac{(\sigma_{\infty} - \sigma_{dc}) \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.81)$$

verilir.

Johnscher, malzemelerin büyük bir kısmı için iletkenliği frekansın bir fonksiyonu olarak yazmayı başarmış ve “Evrensel” kuvvet kuralını önermiştir [16].

$$\sigma(\omega) = \sigma_{dc} + \alpha \omega^n \quad (2.82)$$

Burada çoğu malzeme için $0.6 \leq n \leq 1$ koşulunu sağlamalıdır [16]. Üstel ifadenin önünde bir sabit ya da sıcaklıkla yavaşça artan bir çarpan bulunmaktadır.

2.8. RELAKSASYON TİPLERİ VE İLETKENLİK İFADELERİ

Her bir relaksasyon mekanizmasına karşılık gelen kompleks elektriksel iletkenlik eşitlikleri,

$$\sigma = (i\omega)\varepsilon^* \quad (2.83)$$

ifadesiyle frekans çarpanı kadar bir farkla, kompleks dielektrik permitivite eşitlikleri formunda analogik olarak tanımlanabilir. Debye tipi iletkenlik ifadesi bu analogi kullanılarak,

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \quad (2.84)$$

ya da asimptotik olarak,

$$\sigma = \sigma_{\infty} + \frac{\sigma_s - \sigma_{\infty}}{1 + i\omega\tau} \quad (2.85)$$

şeklinde yazılabilir [11]. Bu ifadeye tamamen analitik bir dizge izleyip hareket denklemleri ve akım yoğunluğu eşitliklerini kullanarak ulaşılabileceğini göstereceğiz.

Her relaksasyon davranışına karşılık bir iletkenlik ifadesi üretilebilir:

Cole-Cole tipi iletkenlik eşitliği,

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (2.86)$$

ya da asimptotik olarak

$$\sigma(\omega) = \sigma_{\infty} + \frac{\sigma_s - \sigma_{\infty}}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (2.87)$$

Davidson-Cole tipi iletkenlik eşitliği,

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{[1 + i\omega\tau]^\beta} \quad (2.88)$$

ya da asimptotik olarak

$$\sigma(\omega) = \sigma_{\infty} + \frac{\sigma_s - \sigma_{\infty}}{[1 + i\omega\tau]^\beta} \quad (2.89)$$

Havriliak-Negami tipi iletkenlik eşitliği,

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{[1 + (i\omega\tau)^\alpha]^\beta} \quad (2.90)$$

ya da asimptotik olarak

$$\sigma(\omega) = \sigma_{\infty} + \frac{\sigma_s - \sigma_{\infty}}{[1 + (i\omega\tau)^{\alpha}]^{\beta}} \quad (2.91)$$

şeklinde ifade edilebilir.



3. MALZEME VE YÖNTEM

ε' dielektrik sabitinin reel ve ε'' sanal kısmı olmak üzere kompleks permitivite $\varepsilon^* = \varepsilon' - i\varepsilon''$ şeklinde gösterilebilir. Debye relaksasyonu, etkileşmeyen dipollerin uygulanan dış alternatif elektrik alana tepkisi malzemenin kompleks permitivitesi, uygulanan alanın açısal frekansının fonksiyonu olarak,

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + i\omega\tau}$$

tanımlanabilir [17]. Burada ε_s ve ε_∞ sırasıyla düşük ve yüksek frekanslarda dielektrik permitiviteyi ve τ en olası relaksasyon zamanını göstermektedir. Çoğu dielektrik malzeme Debye eşitliklerini sağlamayan birden fazla relaksasyon zamanına sahiptir. Dielektrikler geniş bir ε'' - ω dispersiyonuna ve Debye yarı-çemberinin gösterdiğinden daha az kayba sahiptir. Bu durumda deneysel veriler açıklamak için relaksasyon zamanlarının dağılımı kavramından bahsetmek gerekir. Cole-Cole, kompleks düzlem diyagramı ya da Argand diyagramı ε'' - ε' değişimi için basık yarı-çember olan ve

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}$$

şeklinde ifade edilen bir model önermişlerdir [17]. Burada $0 < \alpha \leq 1$ tanımlı bir parametredir. Cole-Davidson deneysel verilere fit işlemi sonucunda, Argand diyagramı asimetric yarı-çember olan ve

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{(1 + i\omega\tau)^\beta}$$

şeklinde ifade edilen bir model önermişlerdir [17]. Burada $0 < \beta \leq 1$ tanımlı bir parametredir. Son olarak, Havriliak-Negami önceki iki deneysel eşitliği kullanarak kompozit yeni bir eşitlik üretmişlerdir.

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{(1 + (i\omega\tau)^\alpha)^\beta}$$

Burada $0 < \alpha, \beta \leq 1$ tanımlı parametrelerdir.

Debye modeli için kompleks dielektrik iletkenlik, dielektrik permitivite Eşitlik (2.83) kullanılarak yeniden formüle edilirse,

$$\sigma = \sigma_\infty + \frac{\sigma_s - \sigma_\infty}{1 + i\omega\tau}$$

şeklinde yazılır. Burada σ_s ve σ_∞ sırasıyla düşük ve yüksek frekanslarda iletkenlik değerlerini göstermek üzere, şeklinde ifade edilebilir. Aynı analogi Cole-Cole, Cole-Davidson ve Havriliak-Negami modelleri için de yapılabilir.

Yukarıda bulunan eşitlikler deneysel veriler üzerine yazılan fit eğrilerinden ibarettir. Ancak iddiamız tamamıyla analitik bir yaklaşım yapılarak bir iletkenlik modeli üretilebileceği yönündedir.

Newton hareket yasaları kullanılarak Debye modeline ulaşılabilir. İşe viskoz kuvvetleri de içeren hareket denklemi yazarak başlayalım.

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{mv}{\tau} = qE \quad (3.1)$$

Hareket denklemini relaksasyon zamanı üzerinden genelleştirelim. Her malzeme için yapısal bir ortalama ya da en olası relaksasyon zamanı vardır ve basitçe,

$$\tau = t_1 - t_0 \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada t_0 ve t_1 ardışık iki denge durumu zamanını ifade etmektedir. $t_1 = t$ kabul edelim,

$$\tau = t - t_0 \quad (3.3)$$

$t_0 = 0$ alalım,

$$\tau = t \quad (3.4)$$

olur. Böylece relaksasyon zamanını hareket denkleminde değişken olarak kabul edebiliriz. Hareket denklemi yeniden yazılırsa,

$$m \frac{dv}{d\tau} + \frac{mv}{\tau} = qE \quad (3.5)$$

elde edilir. Eşitlik (3.3)' ün her iki yanını relaksasyon zamanı τ ile çarpalım,

$$m\tau \frac{dv}{d\tau} + mv = qE\tau \quad (3.6)$$

kütleye m bölelim,

$$\tau \frac{dv}{d\tau} + v = \frac{qE\tau}{m} \quad (3.7)$$

\tilde{v} olarak,

$$\tilde{v} = \frac{qE\tau}{m} \quad (3.8)$$

tanımlayalım. Sonuç olarak,

$$\frac{d}{d\tau}(v\tau) = \tilde{v} \quad (3.9)$$

buluruz ve eşitliğin sol tarafının türevini yerine yazarsak,

$$(1 + i\omega\tau)v = \tilde{v} \quad (3.10)$$

elde ederiz. Burada $E = E_0 e^{i\omega\tau}$ ve $v = v_0 e^{i\omega\tau}$ sırasıyla alternatif gerilim altında elektrik alan ve hızı ifade eder. Eşitlik (3.8)' den hızını v çekelim,

$$v = \frac{q\tau}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau} E \quad (3.11)$$

Akım yoğunluğunun- J hızı- v bağılılığı,

$$J = nqv \quad (3.12)$$

Şeklindedir. v hızı yerine eşitlik (3.9) kullanılırsa,

$$J = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau} E \quad (3.13)$$

elde edilir. Akım yoğunluğu Ohm Kanunu formunda,

$$J = \sigma E \quad (3.14)$$

olarak ifade edilebilir. Eşitlik (3.11) ve (3.12)' den iletkenliği,

$$\sigma(\omega) = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau} \quad (3.15)$$

dir. Burada,

$$\sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m} \quad (3.16)$$

olmak üzere,

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$$

yazılabilir.

Debye iletkenlik ifadesi hareket denklemi ve akım yoğunluğunun iki farklı ifadesi kullanılarak analitik olarak geliştirildi. Bu iyi bilinen bir eşitliktir ve asimptotik olarak

Eşitlik (2.25) gibi yazılır. Fakat diğer iletkenlik ifadeleri, hareket denklemleri kullanılarak analitik olarak üretilmemiştir.

Hareket denklemini kullanarak daha genel bir iletkenlik ifadesi üretebilmek için iki yol vardır: İlki pertürbasyon terimleri ekleyip hareket denklemini yeniden ifade etmek, diğeri ise hareket denklemini reforme etmek.

Klasik dinamik formülü yerine eşitlik (3.7)' nin fraksiyonel halini yazarak denklemi genelleştirilmiş hale getirelim.

$$\frac{d^\alpha}{d\tau^\alpha} \left(v^{\frac{1}{\beta}} \tau^\alpha \right) = \tilde{v}^{\frac{1}{\beta}} \quad (3.17)$$

Burada formülde iki depresyon parametresi α ve $1/\beta$ tanımladık. Burada ikinci parametrenin β yerine $1/\beta$ olmasının nedeni, denklem reforme edildiğinde yarı-ampirik iletkenlik ifadelerini literatürün ulaştığı formda elde edebilmektir (Bkz. Ek A).

Eğer hızı $v = v_0 e^{i\omega\tau}$ şeklinde kabul eder ve eşitlik (3.7)' de yerine koyarsak,

$$\frac{d^\alpha}{d\tau^\alpha} \left(v_0^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{i\omega\tau}{\beta}} \tau^\alpha \right) = \tilde{v}^{\frac{1}{\beta}} \quad (3.18)$$

$$v_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{d^\alpha}{d\tau^\alpha} \left(e^{\frac{i\omega\tau}{\beta}} \tau^\alpha \right) = \tilde{v}^{\frac{1}{\beta}} \quad (3.19)$$

Eşitliğin (3.17)' nin türevini alırsak (Bkz. Ek B),

$$v_0^{\frac{1}{\beta}} \left(\tau^\alpha \frac{d^\alpha}{d\tau^\alpha} e^{\frac{i\omega\tau}{\beta}} + e^{\frac{i\omega\tau}{\beta}} \frac{d^\alpha}{d\tau^\alpha} \tau^\alpha \right) = \tilde{v}^{\frac{1}{\beta}} \quad (3.20)$$

$$v_0^{\frac{1}{\beta}} \left[\left(\frac{i\omega\tau}{\beta} \right)^\alpha e^{\frac{i\omega\tau}{\beta}} + e^{\frac{i\omega\tau}{\beta}} \Gamma(\alpha + 1) \right] = \tilde{v}^{\frac{1}{\beta}} \quad (3.21)$$

$v^{\frac{1}{\beta}} = v_0^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{i\omega\tau}{\beta}}$ eşitliğini kullanarak,

$$v^{\frac{1}{\beta}} \left[\Gamma(\alpha + 1) + \left(\frac{i\omega\tau}{\beta} \right)^\alpha \right] = \tilde{v}^{\frac{1}{\beta}} \quad (3.22)$$

elde ederiz ve bu eşitliği eşdeğer olarak,

$$v^{\frac{1}{\beta}} = \tilde{v}^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1) + \left(\frac{i\omega\tau}{\beta} \right)^\alpha} \quad (3.23)$$

yazalım ve her iki tarafın β kuvvetini alalım,

$$v = \tilde{v} \frac{1}{\left[\Gamma(\alpha + 1) + \left(\frac{i\omega\tau}{\beta} \right)^\alpha \right]^\beta} \quad (3.24)$$

Eşitlik (3.6)' yı (3.22)' de yerine yazalım,

$$v = \frac{qE\tau}{m} \frac{1}{\left[\Gamma(\alpha + 1) + \left(\frac{i\omega\tau}{\beta} \right)^\alpha \right]^\beta} \quad (3.25)$$

hız ifadesini eşitlik (3.10)' da yerine yazalım,

$$J = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{1}{\left[\Gamma(\alpha + 1) + \left(\frac{i\omega\tau}{\beta} \right)^\alpha \right]^\beta} E \quad (3.26)$$

Eşitlik (3.14) ve (3.24),

$$J = \sigma_0 \frac{1}{\left[\Gamma(\alpha + 1) + \left(\frac{i\omega\tau}{\beta} \right)^\alpha \right]^\beta} E \quad (3.27)$$

ifadesini verir ve eşitlik (3.12) ve (3.25) kullanırsak,

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{\left[\Gamma(\alpha + 1) + \left(\frac{i\omega\tau}{\beta} \right)^\alpha \right]^\beta} \quad (3.28)$$

iletkenlik eşitliğine ulaşırız.



4. BULGULAR

Klasik dinamik formülü yerine yazılan fraksiyonel dinamik formülü ve akı yoğunluğu ifadeleri kullanarak bir dizi matematiksel işlem sonunda (ayrıntılar Ek A ve Ek B' de verilmiştir) iletkenliği, eşitlik (3.26) formunda elde ettik.

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{\left[\Gamma(\alpha + 1) + \left(\frac{i\omega\tau}{\beta} \right)^\alpha \right]^\beta}$$

Bu ifade genelleştirilmiş Havriliak-Negami tipi iletkenlik fonksiyonu olarak adlandırdık ve bu ifadenin $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ için,

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$$

Debye tipi iletkenlik fonksiyonuna, $\beta = 1$ için,

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{\Gamma(\alpha + 1) + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (4.1)$$

genelleştirilmiş Cole-Cole tipi iletkenlik fonksiyonuna, $\alpha = 1$ için,

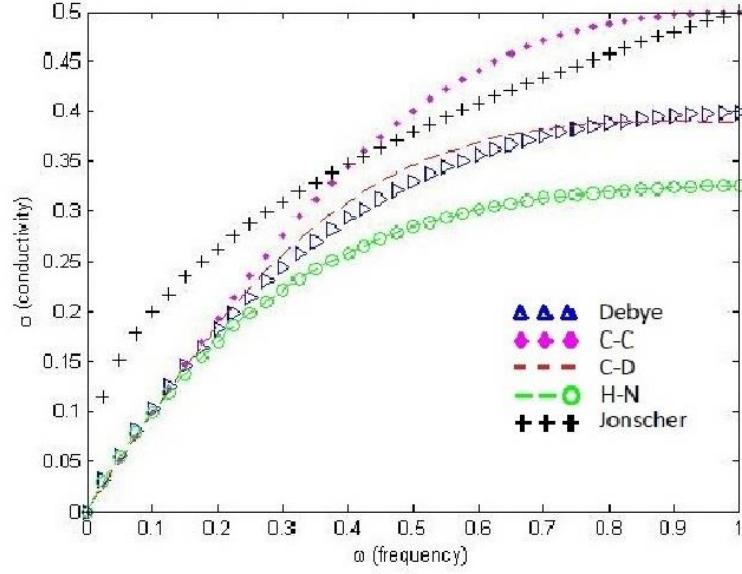
$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{\left[1 + \left(\frac{i\omega\tau}{\beta} \right) \right]^\beta} \quad (4.2)$$

genelleştirilmiş Cole-Davidson tipi iletkenlik fonksiyonuna indirgendiği gösterdik.

Üretilen genelleştirilmiş iletkenlik fonksiyonları önceki yarı-ampirik formda yazılan iletkenlik ifadeleri ile aynı davranışa sahip olduğu açıktır, çünkü genelleştirilmiş halde türetilen yeni eşitlikler sadece sabit bir çarpan ve/veya katkı kadar farklıdır. Ayrıca çoğu amorf yarıiletken ve yalıtkanda alternatif iletkenliğin her durumda,

$$\sigma(\omega) = A\omega^s \quad (4.3)$$

formuna sahip olduğu Jonscher evrensel kuvvet kuralı ile tutarlı sonuçlara ulaşıldığı açıktır.



Şekil 3. 1: Debye, genelleştirilmiş Cole-Cole, Davidson-Cole ile Havriliak-Negami ve Jonscher iletkenlik fonksiyonlarının grafiği ($\alpha=0.6$, $\beta=0.9$, $s=0.4$, $A=0.5$).

Analitik olarak geliştirilen yeni iletkenlik fonksiyonu, $1/\beta$ çarpanı ve fazladan gamma fonksiyonu hariç bilinen yarı-ampirik Havriliak-Negami tipi iletkenlik fonksiyonuna benzer ve iletkenlik davranışı değişmemiştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Literatürde deneysel verilerden elde edilen ve üretilen iletkenlik ifadeleri çok benzer formda ve aynı davranışta. Analitik yolla iletkenlik fonksiyonlarının genelleştirilmiş formlarına ulaşıldı çünkü önceki ifadeler türetilirken (1) yarı-ampirik relaksasyon eşitliklerinin eşitlik (2.83) kullanılıp iletkenlik ifadelerine çevrilerek elde edilmesi ya da (2) polarizasyon eşitliklerinin fraksiyonel formda yazılıp yorumlanması şeklinde iki yoldan biri kullanılıyordu fakat (1) yöntemi benzetim yöntemini kullanırken (2) yöntemi polarizasyon eşitliklerini deforme ederek yarı-ampirik iletkenlik ifadelerini elde etmeye çalışıyordu. Dolayısıyla iki türetim yöntemi de fit fonksiyonlarına benzetim yöntemi olduğundan tamamen analitik bir ifade henüz üretilmemiştir.

Polarizasyon eşitliklerini kullanmak yerine elektronun malzeme içerisindeki hareketini yeniden tanımlamaya çalışmak, dielektriklerde alternatif iletkenlik çalışmaları için ilk olma özelliği taşımaktadır. Debye tipi iletkenlik ifadesine ulaşılırken yapılan kabullerin dışına çıkılıp, hiçbir ortam kabulü olmadan ve petürbasyon hesabı yapılmaksızın sadece rezistans kuvvetleri içeren hareket denklemi düzenlenip hız için yeni bir ifade ve iletkenlik akısının iki farklı ifadesi kullanılarak kompleks iletkenlik fonksiyonu türetilmiştir. Üretilen bu yeni alternatif eşitlik için hareket eden parçacığın ne olduğu, sayısı ve etkileşimleri bilinmek zorunda değil, sadece zaman ve hızın fraksiyonel bir fonksiyonu şeklinde hareket denklemi yeniden ifade edildi.

Fiziksel olayları açıklamak için yapılan matematiksel yaklaşımlardan biri olan fraksiyonel diferansiyel hesap, alternatif alan iletkenliğine tamamen teorik bir yaklaşım yapmak için kullanıldı. Viskoz kuvvetleri de içeren Newton'un ikinci hareket yasası fraksiyonel formda yazılarak kullanılarak genelleştirilmiş Havriliak-Negami iletkenlik eşitliği türetilmiştir. Bu eşitlikte ilgili katsayıların özel seçimleriyle Debye ile yarı-ampirik Cole-Cole ve Cole-Davidson tipi iletkenlik eşitlikleri, iletkenlik davranışını değiştirmeyen ancak sırasıyla gama fonksiyonu ve $1/\beta$ çarpanları kadar farkla tamamen analitik olarak elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1]. Mott N. F., Davis E. A., 1971, *Electronic processes in non-crystalline materials*, Clarendon Press, Oxford, ISBN: 978-0198-51259-2.
- [2]. Fröhlich H., 1949, *Theory of dielectrics: dielectric constant and dielectric loss*, Clarendon Press, Oxford, ISBN: 978-0198-51303-2.
- [3]. Hippel A., R., 1966, *Dielectrics and waves*, The M.I.T. Press, Cambridge, ISBN: 978-1580-53122-1.
- [4]. Gorur G. R., 2003, *Dielectrics in electric fields*, Marcel Decker Inc., New York, ISBN: 978-0824-74737-4.
- [5]. Moliton A., 2007, *Applied electromagnetism and materials*, Springer, Limoges, ISBN: 978-0387-38062-9.
- [6]. Kao K. C., 2004, *Dielectric phenomena in solids: with emphasis on physical concepts of electronic processes*, Elsevier, San Diego, ISBN: 0-12-396561-6.
- [7]. Kilbas A., A., Srivastava H., M., Trujillo J., J., 2006, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam, ISBN: 978-0-444-51832-3.
- [8]. Mandelbrot B., B., 1977, *The fractal geometry of the nature*, W. H. Freeman and Company, New York, ISBN: 0-7167-1186-9.
- [9]. Makosz J. J., Urbanowicz P., 2002, Relaxation and absorption in dielectrics, *Zeitschrift für naturforschung*, 57, 119-125.
- [10]. Kriza G., Mihaly G., 1986, Stretched-exponential dielectric relaxation in a charge-density wave system, *Physical review letters*, 56 (23), 2529-2532.
- [11]. Tarasov A., Titov K., 2013, On the use of the Cole–Cole equations in spectral induced polarization, *Geophysical journal international*, 195, 352–356.
- [12]. Nigmatullin R. R., 1997, Cole–Davidson dielectric relaxation as a self-similar relaxation process, *Ryabov Ya. E. Fiz. Tverd. Tela*, 39, 101–105.
- [13]. Alim M. A., Bissel S. R., Mobasher A. A., 2008, Analysis of the AC electrical data in the Davidson–Cole dielectric representation, *Physica b*, 403, 3040–3053.
- [14]. Miskinis P., 2012, The Havriliak–Negami susceptibility as a nonlinear and nonlocal process, *Physica scripta*, T136, 014019 (3pp).
- [15]. Nigmatullin R.R., 2005, Theory of dielectric relaxation in non-crystalline solids: from a set of micromotions to the averaged collective motion in the mesoscale region, *Physica b*, 358, 201–215.
- [16]. Jonscher A. K., 1977, The universal dielectric response, *Nature*, 267, 673-679.

- [17]. Vikram S Yadav, Devendra K Sahu, Singh Y., and Dhubkarya D.C., 2010, The Effect of Frequency and Temperature on Dielectric Properties of Pure Poly Vinylidene Fluoride (PVDF) Thin Films, *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists*, Vol III.
- [18]. Hermann R., 2011, *Fractional calculus: an introduction for physicists*, World Scientific Publishing Co., Singapore, ISBN: 978-981-4340-24-3.
- [19]. Dalir M., Bashour M., 2010, Applications of fractional calculus, *Applied mathematical sciences*, 4, 21, 1021 – 1032.
- [20]. Vazquez L., 2011, From Newton's equation to fractional diffusion and wave equations, *Advances in difference equations*, 2011, 169421 (13 pp).
- [21]. Jumarie G., 2007, Lagrangian mechanics of fractional order, Hamilton–Jacobi fractional PDE and Taylor's series of nondifferentiable functions, *Chaos, Solitons and fractals*, 32, 969–987.
- [22]. Tarasov V. E., 2013, Review of some promising fractional physical models, *International journal of modern physics b*, 27 (9), 1330005 (32 pp).

EKLER

EK A

Klasik dinamik formülü yerine fraksiyonel bir genelleştirmesini öngörelim.

$$\frac{d^\alpha}{d\tau^\alpha} (v^\beta \tau^\alpha) = \tilde{v}^\beta \quad (\text{A1})$$

Eğer hızı $v = v_0 e^{i\omega\tau}$ kabul eder ve eşitlik (A1)' de yerine yazarsak

$$\frac{d^\alpha}{d\tau^\alpha} \left(v_0^\beta e^{\frac{i\omega\tau}{\beta}} \tau^\alpha \right) = \tilde{v}^\beta \quad (\text{A2})$$

$$v_0^\beta \frac{d^\alpha}{d\tau^\alpha} \left(e^{\frac{i\omega\tau}{\beta}} \tau^\alpha \right) = \tilde{v}^\beta \quad (\text{A3})$$

Eşitlik (A3)' ün türevini alırsak

$$v_0^\beta \left(\tau^\alpha \frac{d^\alpha}{d\tau^\alpha} e^{i\beta\omega\tau} + e^{i\beta\omega\tau} \frac{d^\alpha}{d\tau^\alpha} \tau^\alpha \right) = \tilde{v}^\beta \quad (\text{A4})$$

$$v_0^\beta [(i\beta\omega\tau)^\alpha e^{i\beta\omega\tau} + e^{i\beta\omega\tau} \Gamma(\alpha + 1)] = \tilde{v}^\beta \quad (\text{A5})$$

$v = v_0 e^{i\omega\tau}$ kabulünü de kullanarak

$$v^\beta [\Gamma(\alpha + 1) + (i\beta\omega\tau)^\alpha] = \tilde{v}^\beta \quad (\text{A6})$$

Eşitlik (A6)' yı düzeltip

$$v^\beta = \tilde{v}^\beta \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1) + \left(\frac{i\omega\tau}{\beta}\right)^\alpha} \quad (\text{A7})$$

Eşitlik (A7)' nin her iki tarafının $1/\beta$ mertebesinde kuvvetini alırsak

$$v = \tilde{v} \frac{1}{[\Gamma(\alpha + 1) + (i\beta\omega\tau)^\alpha]^{\frac{1}{\beta}}} \quad (\text{A8})$$

\tilde{v} ' yı daha önce tanımlandığı şekilde kullanalım

$$\tilde{v} = \frac{qE\tau}{m} \quad (\text{A9})$$

Eşitlik (A9), (A8)' de yerine yazarsak

$$v = \frac{qE\tau}{m} \frac{1}{[\Gamma(\alpha + 1) + (i\beta\omega\tau)^\alpha]^{\frac{1}{\beta}}} \quad (\text{A10})$$

akım yoğunluğu, J hızı, v

$$J = nqv \quad (\text{A11})$$

eşitliği ile bağlanır ve Eşitlik (A10)' da yerine konursa

$$J = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{1}{[\Gamma(\alpha + 1) + (i\beta\omega\tau)^\alpha]^{\frac{1}{\beta}}} E \quad (\text{A12})$$

olur ve akım yoğunluğu Ohm Kanunu formunda da,

$$J = \sigma E \quad (\text{A13})$$

yazılabilir.

$$\sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m} \quad (\text{A14})$$

tanımlarsak, Eşitlik (A12) ve (A13)

$$J = \sigma_0 \frac{1}{[\Gamma(\alpha + 1) + (i\beta\omega\tau)^\alpha]^\frac{1}{\beta}} E \quad (\text{A15})$$

verir, Eşitlik (A12) ve (A14)' ü de kullanarak iletkenliği,

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{[\Gamma(\alpha + 1) + (i\beta\omega\tau)^\alpha]^\frac{1}{\beta}} \quad (\text{A16})$$

şeklinde ifade edebiliriz.

EK B

Tanım 1 (Reimann-Liouville fraksiyonel fonksiyonu) f bir fonksiyon, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $t \in \mathbb{R}$ olsun. Fonksiyonun α mertebesinden fraksiyonel integrali tanımlayalım:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du \quad (\text{B1})$$

Tanım 2 $f(t) = t^p$ fonksiyonunun α mertebesinden, $n-1 < \alpha < n$ olmak üzere, Reimann-Liouville türevini verelim:

$$D^\alpha t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \quad (\text{B2})$$

Kanıt $\alpha > 0$ mertebesinden Reimann-Liouville türevini hesaplayalım:

$$D^\alpha t^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1} u^p du \quad (\text{B3})$$

$0 \leq v \leq 1$ iken, $u = vt$ ve $du = t dv$ dönüşümünü yapalım:

$$D^\alpha t^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (1-v)^{n-\alpha-1} v^p dv \frac{d^n}{dt^n} t^{n+p-\alpha} \quad (\text{B4})$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} B(p+1, n-\alpha) \frac{d^n}{dt^n} t^{n+p-\alpha} \quad (\text{B5})$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} B(p+1, n-\alpha) \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \quad (\text{B6})$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+p-\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \quad (\text{B7})$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \quad (\text{B8})$$

Not: B, Beta fonksiyonu, $x > 0$, $y > 0$ olmak üzere $B(x, y) = \int_0^1 v^{x-1} (1-v)^{y-1} dv$ şeklinde tanımlıdır. Burada $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ formunu kullandık.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Uğur SAĞLAM
Doğum Yeri	Fatih
Doğum Tarihi	11.04.1990
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	0538 643 13 44
E-Posta Adresi	ugrsaglm@gmail.com
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ankara Üniversitesi
Fakülte	Mühendislik Fakültesi
Bölümü	Fizik Mühendisliği
Mezuniyet Yılı	2013

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Genel Fizik Programı
Mezuniyet Tarihi	2016