



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİDAN ATAY

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

ORTAK DANIŞMAN

Doç. Dr. Yıldray KESKİN

AKSARAY, 2016



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİDAN ATAY

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

ORTAK DANIŞMAN

Doç. Dr. Yıldırım KESKİN

AKSARAY, 2016

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 132309410 numaralı Tezli Yüksek Lisans öğrencisi, "FİDAN ATAY", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN
Aksaray Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL
Selçuk Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Halis BİLGİL
Aksaray Üniversitesi

Teslim Tarihi: 07 Nisan 2016

Savunma Tarihi: 29 Nisan 2016

DOĐRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden olduğunu ve bu eserleri her kullanışımda alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Fidan ATAY

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında Schrödinger denkleminin nümerik çözümleri polinom olmayan kübik spline enterpolasyonu ile elde edildi. Denklemin zaman ayrıştırmasında ileri fark yaklaşımı kullanıldı. Yöntemin kesme hatası ve kararlılık analizi incelendi.

Bu tez çalışması, Aksaray Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından 2015-031 numaralı proje olarak desteklenmiştir.



TEŐEKKÖR

Bu tez çalışmasının her aőamasında değerli zamanlarını ayırarak bana yardımcı olan, baőta tez danıőmanlarım Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN ile Doç. Dr. Yıldırđay KESKİN olmak ũzere tũm hocalarıma ve bũtũn hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen kıymetli aileme teőekkũrlerimi borç bilirim.



FİDAN ATAY

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	i
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış	1
1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri	5
1.3 Schrödinger Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları	7
2. SPLINE FONKSİYONLAR	9
2.1 Spline Fonksiyonların Tarihçesi	9
2.2 Spline Fonksiyonların Bazı Özellikleri	10
2.3 Kübik Spline Fonksiyonu	11
2.3.1 Polinom olmayan kübik spline fonksiyon	12
3. SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN KÜBİK SPLINE ENTERPOLASYONU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ	13
3.1 Nümerik Metod	13
3.1.1 Başlangıç ve sınır koşullarının adaptasyonu	17
3.2 Kesme Hatası	19
3.3 Kararlılık Analizi	21
3.4 Test Problemleri	22
3.4.1 Problem 1: Tek soliton hareketi	23
3.4.2 Problem 2: İki solitonun çarpışması	31
4. SONUÇLAR	36
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	40

ÖZET

SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu tez çalışmasının temel amacı, literatürde oldukça önemli bir yer tutan zamana bağlı, lineer olmayan kübik Schrödinger denkleminin nümerik çözümlerinin elde edilmesidir. Bu amaç doğrultusunda polinom olmayan kübik spline enterpolasyonu kullanılmıştır.

Dalga teorisine ve Schrödinger denklemine ilişkin bazı temel bilgiler birinci bölümde verilmiş, spline fonksiyonların tanıtımı ikinci bölümde yapılmıştır. Nümerik yöntemin uygulanması ve sonuçların hesaplanması üçüncü bölümde sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar ile bir değerlendirme ise son bölümde verilmiştir.

Nümerik yöntemin uygulanışında, ilk olarak, ileri fark formülü yardımıyla diferensiyel denklemin zaman ayrıştırması yapıldı. Konum ayrıştırması için problemin çözüm bölgesi eşit uzunluklu alt aralıklara bölündü. Yöntemin yerel kesme hatası hesaplanarak kübik spline bağıntısında ortaya çıkan parametreler için uygun seçimler yapıldı. Von-Neumann tekniği ile yöntemin koşulsuz kararlı olduğu gösterildi. Son olarak, iki problem üzerinde nümerik yöntem test edildi.

Anahtar Kelimeler: Dalga, Schrödinger, Soliton, Spline.

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF SCHRÖDINGER EQUATION

The main objective of this thesis is to obtain the numerical solutions of the time dependent nonlinear cubic Schrödinger equation which has a quite importance in the literature. For this objective, nonpolynomial cubic spline interpolation is used.

Some basic informations about wave theory and Schrödinger equation are given in the first chapter. Spline functions are introduced in the second chapter. Application of the numerical method and calculation of the results are presented in the third chapter. A conclusion with the obtained results is given in the last chapter.

In the application of the numerical method, firstly, the time discretization of the equation is achieved by the help of forward difference formula. A uniform partition of the solution domain is considered for the space discretization. Appropriate determination of the parameters that appeared in the cubic spline relation is achieved by calculating the local truncation error. By using von-Neumann technique, it is shown that the method is unconditionally stable. Finally, the numerical method is tested on two problems.

Keywords: Wave, Schrödinger, Soliton, Spline.

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1: Basit bir dalga profili	1
Şekil 1.2: Bir soliter dalganın hareketi	3
Şekil 2.1: Mekanik spline	9
Şekil 2.2: Kübik spline fonksiyon	11
Şekil 3.1: Tek soliton hareketi, $t = 0$	24
Şekil 3.2: Tek soliton hareketi, $t = 10$	25
Şekil 3.3: Tek soliton hareketi, $t = 50$	25
Şekil 3.4: Tek soliton hareketi, $t = 100$	26
Şekil 3.5: Tek soliton hareketi	26
Şekil 3.6: Korunum sabitlerindeki değişim	27
Şekil 3.7: Tek soliton için $[-60, 60]$ aralığındaki hata	30
Şekil 3.8: Tek soliton için $[-80, 80]$ aralığındaki hata	30
Şekil 3.9: İki soliton çarpışması, $t = 1$	32
Şekil 3.10: İki soliton çarpışması, $t = 2$	32
Şekil 3.11: İki soliton çarpışması, $t = 2.5$	33
Şekil 3.12: İki soliton çarpışması, $t = 3$	33
Şekil 3.13: İki soliton çarpışması, $t = 4$	34
Şekil 3.14: İki soliton çarpışması, $t = 5$	34

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1: Tek soliton için hata ve korunum değerleri	24
Çizelge 3.2: Çözümlerin reel ve sanal kısımları için $t = 10$ anındaki değerler ...	28
Çizelge 3.3: Reel ve sanal kısımlar için $t = 10$ anındaki hatalar	29
Çizelge 3.4: İki soliton çarpışmasında korunum değerleri	35



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

NLS Lineer olmayan Schrödinger denklemi

h Çözüm bölgesindeki ardışık iki nokta arasındaki uzunluk

k Zaman artımı

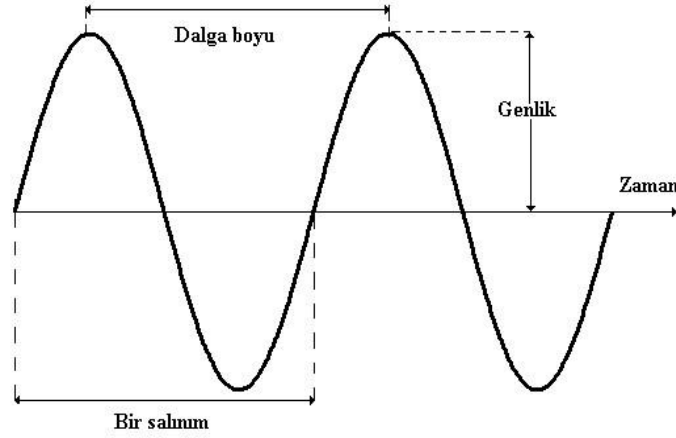
T_i^j Kesme hatası

δ_i^j Lineer olmayan terim

1. GİRİŞ

1.1 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış

Bir fizik terimi olarak dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. En bilindik olanları, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özelliklerini gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar (bkz. Şekil 1.1).



Frekans: Birim zamandaki salınımların sayısı

Şekil 1.1: Basit bir dalga profili

Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar ve boşlukta bile yayılabilirler. Bir ortamdaki dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır (Crawford, 1968).

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilir. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam, dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda

birbirleri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişimi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir (Wadati, 2001):

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdır ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında da korurlar.

Buradaki ilk özellik, soliter dalga şartıdır ve ilk kez İskoçyalı mühendis John Scott Russel (1808-1882) tarafından tanımlanmıştır (Russel, 1844). İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalgayı işaret etmektedir.

Soliter dalgalar, soliton dalgalarına benzeyen dalgalar olarak da isimlendirilen dalgalardır. Yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bu sebeple solitonumsu dalgalar olarak da adlandırılabilirler. Soliter dalgaları ilk keşfeden Russel, bu gözlemini birçok kaynakta verildiği şekliyle aşağıdaki gibi anlatmıştır.

Russel, 1834 yılında, Edinburgh kentindeki Heriot-Watt Üniversitesinin Riccarton Kampüsü yakınlarındaki Union kanalında deneyler yaparken aşağıda kendi sözleri ile anlattığı aşağıdaki doğa olayını gözlemlemiştir (Russel, 1844):

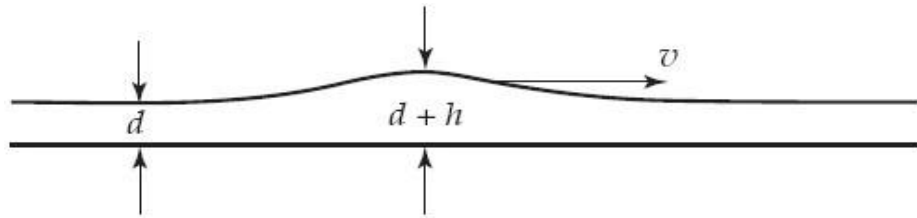
"İki çift at tarafından dar bir kanal boyunca hızla çekilen bir botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda, bota hareket sağlayan kanaldaki su kütlesi durmadı ve su kütlesi şiddetli bir çalkalanma şeklinde botun uç kısmı etrafında toplandı ve aniden botu arkasında bırakarak, büyük bir hızla harekete geçti. Büyük bir soliter dalga yüksekliğine sahip formdaki, dairesel ve düzgün bir su kütlesinin kanal boyunca şekil ve hızını bozmadan yoluna devam ettiğini gördüm. Bu dalga formunu, at üzerinde takip ettim ve yaklaşık 30 ft mesafe sonunda 8 veya 9 mil/saat hızında, ilk baştaki orijinal şeklinde ve yarı yüksekliğinde yuvarlanır halde gördüm. Yüksekliği kademeli olarak azaldı ve yaklaşık 1 veya 2 mil takip sonunda, kanalın kenarlarında kaybolduğunu gördüm. İşte 1834 yılının Ağustos ayı, ilk kez ötelenme dalgası olarak adlandırdığım bu ilginç ve güzel olayı gözleme şansını bulduğum zamandı."

Bu keşfinden sonra Russel, laboratuvarında su tankları oluşturmuş ve su tanklarının bir ucuna ağırlık bırakarak ötelenme dalgalarını (soliter dalgaları) elde edebilmek için deneyler yapmış ve soliter dalgalarının özellikleri hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır (Falkovich, 2007):

- (i) Soliter dalgaları $h\text{sech}^2(k(x - vt))$ formuna sahip dalgalardır.
- (ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız soliter dalgası üretir.
- (iii) Normal dalgaların aksine soliter dalgalar asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir soliter dalgası ile büyük genliğe sahip bir soliter dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar ya da dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, soliter dalgaları kararlıdır ve uzun mesafe boyunca ilerleyebilir.
- (iv) h yüksekliğine sahip olan ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir soliter dalgasının hızı

$$v = \sqrt{g(d + h)} \quad (1.1)$$

şeklindedir. Burada g yerçekimi ivmesidir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır (bkz Şekil 1.2).



Şekil 1.2: Bir soliter dalganın hareketi

Denklem (1.1)' in ifade ettiği bir sonuç olarak; büyük genlikli bir soliter dalgası, küçük genlikli bir soliter dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir soliter dalgasının hızı, genliği ile orantılı olduğundan, bir soliter dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulağımız her iki sesi de aynı anda duyacaktır. Bununla birlikte, bu iletim esnasında soliter

dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi. Benzer şekilde, insan vücudundaki sinirlerin iletişimine bakıldığında bu iletişimin normal dalgalar ile yapılmadığı görülür. Sıcak bir çay bardağını elimize aldığımızda, sıcaklığı kademeli olarak hissederken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırının içine elimizi yaklaştırdığımızda, sıcaklığı hemen hissederek elimizi çekeriz. Dolayısıyla sinirlerimiz bir nevi soliter dalgası oluşturarak beynimize bilgiyi en kısa şekilde ve normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler.

19. yüzyıl sonlarında Russel'in elde ettiği sonuçlar deneysel olarak kaldı ve bir denklemin çözümü olarak soliter dalgalar elde edilemedi. Bununla birlikte, bir denklemin çözümü olarak soliter dalga problemleri yıllarca araştırmalara konu oldu. 1895 yılında ünlü Hollandalı matematikçi Korteweg ile öğrencisi de Vries (1895)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \gamma u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

formunda sığ su dalgalarının hareketini modelleyen denklem üzerine çalışmaya başladılar. Bu denklemde,

- $u(x, t)$, dalganın genliğine,
- $c = \sqrt{gd}$, küçük genlikli dalganın hızına,
- $\varepsilon = c(d^2/6 - T/2\rho g)$, dağılma parametresine,
- γ , lineer olmayan parametreye,
- T , yüzey gerilimine,
- ρ , suyun yoğunluğuna

karşılık gelmektedir.

Korteweg ile de Vries, (1.2) denkleminin

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - vt) \quad (1.3)$$

formunda ve şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğunu gösterdiler. Buradaki $\tilde{u}(x - vt)$ terimi, Russell'in soliter dalga tanımına uymaktadır. Böylece Korteweg ile de Vries, soliter dalgaların varlığını kanıtlamış oldular ve çalışmalarını Korteweg'in danışmanlığında, de Vries'in doktora tezinde yayınladılar

(Korteweg ve de Vries, 1895). Bununla birlikte, dalgaların kararlı olup olmadıkları ve iki soliter dalgasının çarpışma sonrasında şekillerinin değişip değişmeyeceği gibi sorular tezde cevaplanamamıştır. 1965 yılında Kruskal ve Zabusky, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümlerini araştırırken, soliter dalgalarının çarpışma sonrasında şekillerini değiştirmediklerini gözlemlemişler ve bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediğini bularak bu tip dalgalara soliton adını vermişlerdir (Zabusky ve Kruskal, 1965). Bu çalışma, soliton teorisi tarihinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. 1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura, ters saçılma dönüşüm metodunu (TSD) geliştirerek, KdV denkleminin soliton çözümlerini analitik olarak ta vermişlerdir (Gardner vd, 1967).

Soliton çözümleri, hem analitik hem de sayısal olarak elde edildikten sonra, soliton dalgalar üzerindeki çalışmalar daha da hızlanmıştır. Günümüzde ilk kez bir su kanalında gözlenen soliter dalgası artık soliton olarak; akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, laser fiziği, süper iletkenlik fiziği, biyofizik gibi birçok fizik alanlarında kullanılmaktadır (Chao, 1995). Solitonlar ayrıca uzun mesafeler boyunca yol alabildiğinden, teorik olarak fiber optikte normal dalga yerine kullanılan solitonlar sayesinde, büyük miktardaki bilgi, taşınan sinyalde herhangi bir kayıp olmaksızın binlerce kilometre boyunca taşınabilir. Bu sebeple, soliton dalgalar, elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık çalışılmaktadır. 2006 yılında Harvard Üniversitesi Elektrik Mühendisliğinde görevli olan Donhee Ham ve iki doktora öğrencisi David Ricketts ve Xiaofen Li tarafından geliştirilen elektronik bir aygıt kullanılarak soliton dalgaları elde edilmiştir. Bu buluş ile normal dalgalar yerine soliton dalgalarının kullanılmasının yolu açılmıştır ve yakın gelecekte radar, iletişim sektörü gibi birçok alanda soliton dalgaları daha da artan bir ilgiyle kullanılmaya devam edecektir (Harvard, 2006).

1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Bağımsız değişkenlerinden biri t zamanı olan

$$u_t = f(u) \quad (1.4)$$

formundaki kısmi türevli diferensiyel denklemlere oluşum denklemleri denilmektedir. Burada f fonksiyonu u ile u nun konum değişkenine göre

türevlerinin bir fonksiyonudur. Eğer f fonksiyonu lineer ise (1.4) denkleminde lineer oluşum denklemleri, aksi halde lineer olmayan oluşum denklemleri denilmektedir.

Bir telin titreşim hareketi veya ısının yayılımını tanımlayan denklemler lineer oluşum denklemlerine iki basit örnektir. Lineer olmayan oluşum denklemleri ise, mekanik, fizik, kimya, biyoloji gibi birçok daldaki problemlerde gözlenmektedir. Aşağıda bu tip denklemlere bir kaç örnek verilmiştir (Zheng, 2004):

i) Bir boyutlu trafik çalışmalarından türetilen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

formundaki birinci mertebeden kısmi diferensiyel denklem, lineer olmayan oluşum denklemler için bir örnektir. Bu denklemde $u(x, t)$, t zamanında x konumundaki araçların yoğunluğunu göstermektedir. (1.5) denklemi, korunum kanunlarına sahip olan gaz dinamiği çalışmaları için de bir model denklem olarak kullanılmaktadır.

ii) Isı üreten bir ısı kaynağıyla birlikte bir cisimdeki anlık ısı transferini modelleyen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k\nabla u) + f(u)$$

denklemini bir oluşum denklemdir.

iii) Yer değiştirmeye bağlı, lineer olmayan bir dış kuvvet etkisinde zorlamalı titreşim hareketi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u)$$

formunda bir oluşum denklemini ile ifade edilir.

Kuantum mekaniğinde, aşağıdaki formlardaki lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir:

Sine-Gordon denklemini: $u_{tt} - \Delta u + \sin u = 0$

Klein-Gordon denklemini: $u_{tt} - \Delta u + mu + \gamma u^3 = 0$

Kübik Schrödinger denklemini: $iu_t + \Delta u + \gamma |u|^2 u = 0$

İkinci mertebeden denklemlere ilave olarak, yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri de literatürde mevcuttur. Örneğin, polimerler, camlar ve bunlar gibi ikili alaşımların faz geçişleri üzerinde yapılan çalışmalarda, aşağıda verilen Cahn-Hilliard denkleminin ulaşılır:

$$u_t + \Delta^2 u = \Delta \varphi(u) \quad (1.6)$$

Bu denklemde genellikle $\varphi(u) = u^3 - u$ olarak alınmaktadır. (1.6) denkleminin dördüncü mertebeden bir oluşum denklemi olduğuna dikkat edilmelidir. Yüksek mertebeden oluşum denklemlerine diğer bir örnek ise

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

formundaki meşhur KdV denklemdir.

Bu konuda daha ayrıntılı bilgi için (Fordy, 1990; Taşcan, 2002; Zheng, 2004) referanslarına bakılabilir.

1.3 Schrödinger Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

Fizik alanında yapılan çalışmalar arasında en ilgi çekici evrensel denklemlerden birisi Schrödinger denklemdir. Bilimsel çalışmalarda, farklı fiziksel fenomenleri modellemek için bu denklemin farklı versiyonları kullanılmaktadır. Bu bağlamda, optik sinyal (pulse) yayılımı, süper iletkenlik, su ve plazma dalgaları Schrödinger denkleminin kullanıldığı alanlardan sadece bir kaçıdır.

Zamana bağlı, lineer olmayan kübik Schrödinger denklemi,

$$q \frac{du}{dt} + \frac{d^2u}{dx^2} + I|u|^2u = 0 \quad (1.7)$$

eşitliği ile verilir. x ve t değişkenleri sırasıyla konum ve zaman değişkenleri olmak üzere bu denklemde $q = \sqrt{-1}$ kompleks birim ve $I \neq 0$ bir reel parametredir. Böylece $u(x, t)$ fonksiyonu kompleks değerli bir fonksiyon olur.

Lineer olmayan kübik Schrödinger denkleminin matematiksel tanımlaması için denklemin başlangıç ve sınır şartlarının belirlenmesine de ihtiyaç vardır. Bir Denklemin başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki gibi verilebilir:

- **Başlangıç koşulu:**

$$u(x, t_0) = f(x) \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (1.8)$$

- **Sınır koşulları:**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.9)$$

Bazı durumlarda (1.9) sınır koşullarına alternatif olarak

$$\frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq t_0$$

sınır koşulları da kullanılabilir.

(1.7) ile verilen Schrödinger denkleminin nümerik çözümleri araştırılırken denklemin bağımlı değişkeni

$$u(x, t) = r(x, t) + qs(x, t)$$

şeklinde reel ve sanal kısımlarına ayrıştırılırsa (1.7) denklemi yerine

$$\frac{ds}{dt} - \frac{d^2s}{dx^2} + I(r^2 + s^2)r = 0$$

$$\frac{dr}{dt} - \frac{d^2r}{dx^2} + I(r^2 + s^2)s = 0$$

şeklindeki diferansiyel denklem sistemi çözülebilir. Böylece kompleks değişkenli Schrödinger denklemi yerine bir reel diferansiyel denklem sistemi çözülmüş olur.

Zamana bağlı kübik Schrödinger denkleminin nümerik çözümleri için (Korkmaz ve Dag, 2008; El-Danaf vd, 2012; Köksal, 2014) referanslarına bakılabilir.

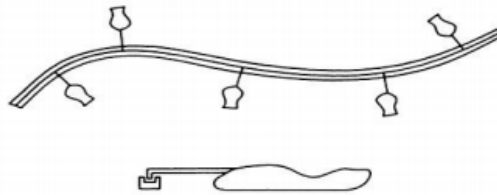
2. SPLINE FONKSİYONLAR

Bu bölümde spline fonksiyonlar ile ilgili bazı genel bilgiler verilecektir. Özellikle, bu tezde kullanılan kübik spline fonksiyonlar üzerinde durulacaktır.

Birçok farklı problemin çözümünde sıklıkla ortaya çıkan enterpolasyon yöntemleri, fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve matematik gibi temel bilim alanlarında önemli bir yer tutmaktadır. Özellikle polinom enterpolasyonu, sahip olduğu matematiksel kolaylıklardan dolayı ayrıca önem arz etmektedir. Öte yandan verilen belirli sayıdaki noktadan geçen bir polinomu bulma esasına dayanan bu yöntemde nokta sayısının artmasıyla birlikte polinom derecesinin de yükselmesi bir dezavantaj olarak ortaya çıkar. Yüksek dereceli polinomların büyük salınım yapma potansiyelleri ve yapılacak hesaplamalarda maliyetli oluşları alternatif yaklaşımları önemli hale getirmektedir. Bu noktada spline enterpolasyonu bir seçenek olarak düşünülebilir. Verilen noktalar ile oluşturulan her bir sonlu aralık üzerinde belirli dereceden bir polinom bulma düşüncesi ile oluşturulan spline enterpolasyonunda tek parça polinom yerine parçalı fonksiyonlar kullanılır.

2.1 Spline Fonksiyonların Tarihçesi

İlk olarak, Schoenberg (1946) tarafından ortaya konulan spline kavramı, elastik maddeden yapılmış bir çubuk ile çizilen düzgün eğriler için kullanılmıştır. Şekil 2.1 de görülen şekliyle, üzerindeki kollar ve ağırlıklarla çubuğun belirli bir yoldan geçmesi sağlanmış ve kollarının çubuga değdiği noktalardan geçen düzgün eğriler çizilmiştir. Çizilen bu eğriler spline olarak isimlendirilmiş ve $S(x)$ ile gösterilmiştir.



Şekil 2.1: Mekanik spline (Schumaker (1993))

Spline tekniğinin otomobil tasarımlarında kullanılması, 1950' li yılların sonları ile 1960' lı yılların başlarında gerçekleşen birkaç bağımsız çalışmaya sebep olmuştur. Bu çalışmaların mimarları Citroen firmasında Casteljau, Renault firmasında Pierre Bezier ve General Motors firmasında de Boor' dur. Casteljau (1959)'nun araştırması çok geniş bir araştırma olmasa da 1960' lı yıllarda, de Boor'un General Motors firmasındaki araştırmalarına katkı yapmıştır. Bu çalışmalar arasında, de Boor tarafından ortaya konulan ve B-spline fonksiyonlar için temel olma niteliği taşıyan çalışma da (de Boor, 1978) vardır.

Günümüzde, otomobil üretimi, bilgisayar destekli grafik çizimleri, geometrik modelleme gibi alanlarda kullanılan spline fonksiyonlar, diferensiyel problemlerin çözümlerinde de geniş bir uygulama sahasına sahiptir.

2.2 Spline Fonksiyonların Bazı Özellikleri

Diferensiyel denklem çözümlerinde yaklaşım fonksiyonu olarak kullanılan bir $S(x)$ spline fonksiyonu, her bir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlarından oluşan bir parçalı fonksiyondur.

Bir diferensiyel denklemin tam çözümü $y(x)$ ve bu çözüme yapılan spline yaklaşımı da $S(x)$ ile gösterilirse bu durumda aşağıdaki iki koşulun sağlanması gerekir:

- i) Enterpolasyon koşulu: $S_k(x_{k-1}) = y(x_{k-1})$ ve $S_k(x_k) = y(x_k)$
- ii) Süreklilik koşulu: $S_k(x_k) = S_{k+1}(x_k)$ ve $S'_k(x_k^+) = S'_{k+1}(x_k^-)$

Bu koşulların dışında, spline fonksiyonların sahip olduğu bazı diğer özellikler ise aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

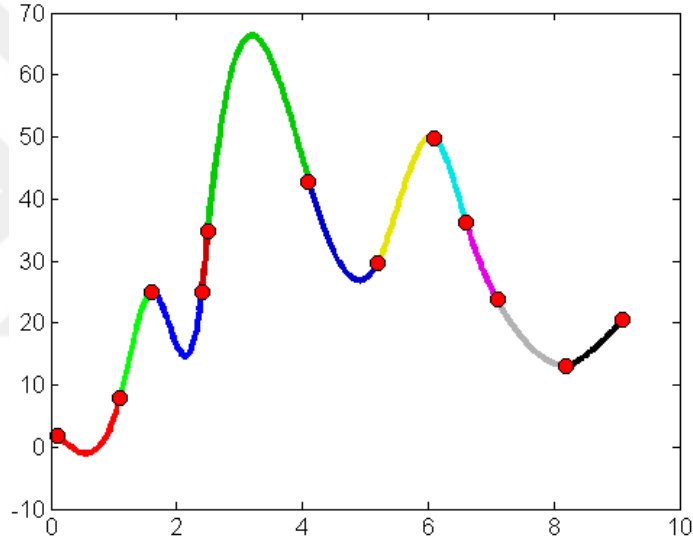
1. Spline fonksiyonlar düzgün (smooth) fonksiyonlardır.
2. Spline fonksiyonlar uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
3. Hesaplamalar açısından spline fonksiyonlar kullanışlı fonksiyonlardır.
4. Spline fonksiyonların hem türevleri hem de integralleri yine bir spline fonksiyondur.
5. Çözüm bölgesi üzerinde sürekli her fonksiyon, istenilen dereceden bir spline fonksiyon ile temsil edilebilir.

6. Küçük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektirler ve polinomlardaki gibi salınım yapmazlar.

2.3 Kübik Spline Fonksiyonu

Aşağıda verilen özellikleri sağlayan bir $S(x)$ polinomuna kübik spline enterpolasyon polinomu denir.

- i) $S(x) \in C^2[a, b]$ (Süreklilik koşulu)
- ii) $S(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ (Enterpolasyon koşulu)
- iii) $S(x)$ fonksiyonu, her bir $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında bir parçalı kübik polinomdur. Burada $k = 0, 1, \dots, n - 1$ şeklindedir.



Şekil 2.2: Kübik spline fonksiyon

Polinom kübik spline fonksiyonların kendileri ile birinci ve ikinci türevleri tanımlı oldukları aralık üzerinde süreklidirler. $[x_k, x_{k+1}]$ aralığı üzerinde, bu özellikleri sağlayacak şekildeki bir $S_k(x)$ polinom kübik spline fonksiyonu

$$S_k(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradaki a_k , b_k , c_k ve d_k katsayıları, spline fonksiyona süreklilik ile enterpolasyon koşullarını sağlayacak şekildeki bilinmeyen katsayılardır. Şekil 2.2 ile temsili bir kübik spline fonksiyonu gösterilmiştir.

2.3.1 Polinom olmayan kübik spline fonksiyon

Polinom olmayan kübik spline fonksiyonlar, $\{1, x, \sin \omega x, \cos \omega x\}$ kümesinin elemanları kullanılarak oluşturulan ve

- i) $S(x) \in C^\infty[a, b]$ (Süreklilik koşulu)
- ii) $S(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ (Enterpolasyon koşulu)
- iii) $S(x)$ fonksiyonu, her bir $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında bir parçalı kübik fonksiyondur. Burada $k = 0, 1, \dots, n - 1$ şeklindedir

özelliklerini sağlayan,

$$S_i(x) = a_i \cos \omega x + b_i \sin \omega x + c_i x + d_i \quad (2.2)$$

şeklindeki bir fonksiyondur. Burada a_i , b_i , c_i ve d_i katsayıları, belirlenmesi gereken katsayılar, ω ise nümerik yaklaşımın doğruluğunu artırmak için kullanılan, spline fonksiyonun trigonometrik kısmına ait sıklık parametresidir.

(2.2) denklemi için kübik isminin kullanılması, (2.1) denklemi ile aynı sayıda terim içermesinden kaynaklanır. (2.2) denkleminde yer alan trigonometrik terimlerden dolayı polinom olmayan kübik spline fonksiyonu için $S(x) \in C^\infty[a, b]$ olduğu söylenebilir.

Polinom spline fonksiyonlara kıyasla, literatürde daha az çalışmada kullanılan polinom olmayan spline yaklaşımı üzerine yakın geçmişte artan bir ilgi dikkate çarpmaktadır. Özellikle, El-Danaf, Ramadan ve Rashidinia gibi bazı araştırmacılar, polinom olmayan spline fonksiyonları farklı problemler üzerinde kullanmışlar ve bu konuda çok sayıda makaleyi yakın geçmişte yayınlamışlardır. Daha detaylı bilgi için (Rashidinia vd, 2006; Ramadan vd, 2007; El-Danaf, 2008; El-Danaf vd, 2012) referanslarına bakılabilir.

3. SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN KÜBİK SPLINE ENTERPOLASYONU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, zamana bağlı, lineer olmayan bir boyutlu

$$q \frac{du}{dt} + \frac{d^2u}{dx^2} + I|u|^2u = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq t_0 \quad (3.1)$$

Schrödinger denkleminin nümerik çözümleri elde edilecektir. Polinom olmayan kübik spline enterpolasyonu diferensiyel denkleme uygulanırken (El-Danaf vd, 2012) referansında sunulan yaklaşımlar temel alınacaktır.

(3.1) denkleminin kompleks değişkenli bir denklem olmasından hareketle, $u(x, t)$ bağımlı değişkeni,

$$u(x, t) = r(x, t) + qs(x, t)$$

şeklinde reel ve sanal kısımlarına ayrıştırılabilir. Burada $q = \sqrt{-1}$ sanal birimi göstermektedir. Yapılan hesaplamalarda $u(x, t)$ fonksiyonunun reel ve sanal kısımları bulunarak $u(x, t)$ fonksiyonunun modülünün grafikleri çizilecektir.

Nümerik yöntemin uygulanışında, (3.1) denkleminin

$$u(x, t_0) = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

şeklindeki başlangıç koşulu

$$\frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq t_0$$

olacak şekildeki sınır koşulları ile birlikte dikkate alınacaktır.

3.1 Nümerik Metod

(3.1) denkleminin nümerik çözümü için ilk olarak çözüm bölgesinin ayrıştırmasının yapılması gerekir. Bunun için $i = 0, 1, \dots, N$ ve $j = 0, 1, \dots$ olmak üzere

$$x_i = a + ih \quad \text{ve} \quad t_j = jk$$

olacak şekildeki (x_i, t_j) grid noktaları oluşturulabilir. Burada h ve k sırasıyla konum ve zaman için aralık uzunluklarıdır.

Spline fonksiyonlar, uygun baza sahip sonlu boyutlu lineer uzay olduklarından ve çözüm bölgeleri üzerinde sürekli her fonksiyonun istenilen dereceden bir spline ile temsil edilebilir olmasından hareketle; tanımlanan bu grid üzerinde polinom olmayan kübik spline fonksiyonlar $\{1, x, \sin \omega x, \cos \omega x\}$ bazı yardımı ile

$$P_i(x, t_j) = a_i(t_j) \cos \omega (x - x_i) + b_i(t_j) \sin \omega (x - x_i) + c_i(t_j)(x - x_i) + d_i(t_j) \quad (3.2)$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada ω , spline fonksiyonun trigonometrik kısmına ait sıklık parametresidir ve nümerik yöntemin doğruluğunu artırmak için kullanılır. a_i , b_i , c_i , d_i ise belirlenmesi gereken, zamana bağlı parametrelerdir.

$u_i^j \equiv u(x_i, t_j)$ fonksiyon değerine ve aynı noktadaki ikinci türeve yapılan spline yaklaşımları sırası ile Z_i^j ve S_i^j ile gösterilirse

$$\begin{aligned} P_i(x_i, t_j) &= Z_i^j \\ P_i(x_{i+1}, t_j) &= Z_{i+1}^j \\ P_i''(x_i, t_j) &= S_i^j \\ P_i''(x_{i+1}, t_j) &= S_{i+1}^j \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerin (3.2) spline fonksiyonunda kullanılması ile

$$a_i \equiv a_i(t_j), \quad b_i \equiv b_i(t_j), \quad c_i \equiv c_i(t_j), \quad d_i \equiv d_i(t_j)$$

ve

$$\theta = \omega h$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} a_i + d_i &= Z_i^j \\ a_i \cos \theta + b_i \sin \theta + c_i h + d_i &= Z_{i+1}^j \\ -a_i \omega^2 &= S_i^j \\ -a_i \omega^2 \cos \theta - b_i \omega^2 \sin \theta &= S_{i+1}^j \end{aligned}$$

denklemleri bulunur. Bu dört denklem, zamana bağlı bilinmeyen parametrelerine göre çözümlerse

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{h^2}{\theta^2} S_i^j \\ b_i &= \frac{h^2(\cos \theta S_i^j - S_{i+1}^j)}{\theta^2 \sin \theta} \\ c_i &= \frac{(Z_{i+1}^j - Z_i^j)}{h} + \frac{h(S_{i+1}^j - S_i^j)}{\theta^2} \\ d_i &= \frac{h^2}{\theta^2} S_i^j \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan her bir bölünme noktasında (3.2) kübik spline fonksiyonunun birinci mertebeden türevi sürekli olacağından

$$P'_i(x_i, t_j) = P'_{i-1}(x_i, t_j)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik (3.2) yaklaşımı ile birlikte kullanılırsa

$$b_i \omega + c_i = -a_{i-1} \omega \sin \theta + b_{i-1} \omega \cos \theta + c_{i-1} \quad (3.3)$$

bulunur. (3.3) ifadesinde yer alan a_i , b_i , c_i , d_i parametreleri yerine eşitlerinin yazılması ile

$$\begin{aligned} &\frac{h^2 \omega (\cos \theta S_i^j - S_{i+1}^j)}{\theta^2 \sin \theta} + \frac{(Z_{i+1}^j - Z_i^j)}{h} + \frac{h(S_{i+1}^j - S_i^j)}{\theta^2} \\ &= \frac{h^2 \omega}{\theta^2} S_{i-1}^j \sin \theta + \frac{h^2 \omega (\cos \theta S_{i-1}^j - S_i^j)}{\theta^2 \sin \theta} \cos \theta + \frac{(Z_i^j - Z_{i-1}^j)}{h} + \frac{h(S_i^j - S_{i-1}^j)}{\theta^2} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Gerekli sadeleştirme ve düzenlemeler yapılırsa bu son ifade, $i = 1, 2, \dots, N - 1$ olmak üzere

$$Z_{i+1}^j - 2Z_i^j + Z_{i-1}^j = \alpha S_{i+1}^j + \beta S_i^j + \alpha S_{i-1}^j \quad (3.4)$$

bağıntısını netice verir. Burada α ve β parametreleri

$$\alpha = \frac{h^2}{\theta \sin \theta} - \frac{h^2}{\theta} \quad \text{ve} \quad \beta = -\frac{2h^2 \cos \theta}{\theta \sin \theta} + \frac{2h^2}{\theta^2}$$

şeklindedir. Bu noktada, $\theta \rightarrow 0$ için (3.4) bağıntısının standard kübik spline bağıntısına dönüştüğüne dikkat çekilebilir.

Kübik spline enterpolasyonunun bir sonucu olarak (3.4) bağıntısı, $u_i^j \equiv u(x_i, t_j)$ fonksiyonuna ve bu fonksiyonun ikinci türevine yapılan yaklaşımlar arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır. Benzer ilişki (3.1) ile verilen Schrödinger denklemi üzerinden de elde edilebilir. Buna göre; S_{i+1}^j , S_i^j ve S_{i-1}^j ile gösterilen ikinci türev yaklaşımları, (3.1) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} S_{i+1}^j &= \frac{\partial^2 Z_{i+1}^j}{\partial x^2} = \left(-q \frac{\partial Z_{i+1}^j}{\partial t} - I |Z_{i+1}^j|^2 Z_{i+1}^j \right) \\ S_i^j &= \frac{\partial^2 Z_i^j}{\partial x^2} = \left(-q \frac{\partial Z_i^j}{\partial t} - I |Z_i^j|^2 Z_i^j \right) \\ S_{i-1}^j &= \frac{\partial^2 Z_{i-1}^j}{\partial x^2} = \left(-q \frac{\partial Z_{i-1}^j}{\partial t} - I |Z_{i-1}^j|^2 Z_{i-1}^j \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada yer alan zamana göre kısmi türevler için

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_i^j \approx \frac{Z_i^j - Z_i^{j-1}}{k}$$

şeklindeki ileri fark yaklaşımı kullanılır ve lineer olmayan $I |Z_i^j|^2$ terimi için

$$M_i^j = I |Z_i^j|^2$$

kabül edilirse

$$\begin{aligned} S_{i+1}^j &= \frac{-q(Z_{i+1}^j - Z_{i+1}^{j-1})}{k} - M_{i+1}^j Z_{i+1}^j \\ S_i^j &= \frac{-q(Z_i^j - Z_i^{j-1})}{k} - M_i^j Z_i^j \\ S_{i-1}^j &= \frac{-q(Z_{i-1}^j - Z_{i-1}^{j-1})}{k} - M_{i-1}^j Z_{i-1}^j \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Böylece, $u_i^j \equiv u(x_i, t_j)$ fonksiyonuna ve bu fonksiyonun ikinci türevine yapılan yaklaşımlar arasındaki ilişki Schrödinger denklemi üzerinden de elde edilmiş olur. Bu iki sonuç birlikte değerlendirilirse, yani elde edilen son

eşitlikler (3.4) denkleminde yerine yazılırsa, $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ve $j = 0, 1, \dots$ olmak üzere

$$A_i Z_{i-1}^j + B_i Z_i^j + C_i Z_{i+1}^j = A_i^* Z_{i-1}^{j-1} + B_i^* Z_i^{j-1} + C_i^* Z_{i+1}^{j-1} \quad (3.5)$$

tekrarlı bağıntısı elde edilir. Burada yer alan katsayılar

$$A_i = k + q\alpha + k\alpha M_{i-1}^j \quad A_i^* = q\alpha$$

$$B_i = -2k + q\beta + k\beta M_i^j \quad B_i^* = q\beta$$

$$C_i = k + q\alpha + k\alpha M_{i+1}^j \quad C_i^* = q\alpha$$

şeklindedir.

3.1.1 Başlangıç ve sınır koşullarının adaptasyonu

(3.5) tekrarlı bağıntısında iterasyona başlayabilmek için başlangıç çözümlerinin bilinmesi gerekir. (3.1) denkleminin başlangıç koşulu gereği

$$Z_i^0 = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

olacaktır. Diğer yandan (3.5) sisteminde $N - 1$ denklem $N + 1$ bilinmeyen vardır. Bu sistemin çözülebilmesi için iki tane bilinmeyenin sistemden elimine edilmesine ihtiyaç vardır. Bunun için (3.1) denkleminin sınır koşulları kullanılabilir. Buna göre

$$\frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq t_0$$

sınır koşulu için ileri fark ve

$$\frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq t_0$$

sınır koşulu için de geri fark yaklaşımları kullanılırsa

$$\left. \frac{\partial Z^j}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \frac{Z_1^j - Z_0^j}{h} = 0 \Rightarrow Z_1^j = Z_0^j$$

Lineer olmayan $M_i^j = I|Z_i^j|^2$ terimi için her bir zaman adımında bir önceki zaman adımından elde edilen değerler kullanılarak M_i^j için bir ilk yaklaşım bulunup, bu yaklaşımın bir yeni yaklaşım tekrar kullanılması ile hesaplama yapılacaktır.

3.2 Kesme Hatası

Nümerik yöntemin kesme hatası, (3.5) tekrarlı bağıntısındaki yaklaşık çözümler yerine analitik fonksiyonun yazılması ile elde edilir. Buna göre kesme hatası,

$$T_i^j = (k + q\alpha + k\alpha M_{i-1}^j)u_{i-1}^j + (-2k + q\beta + k\beta M_i^j)u_i^j \\ + (k + q\alpha + k\alpha M_{i+1}^j)u_{i+1}^j - (q\alpha)u_{i-1}^{j-1} - (q\beta)u_i^{j-1} - (q\alpha)u_{i+1}^{j-1}$$

şeklindedir. Buradaki $u_{i-1}^j, u_{i+1}^j, u_{i-1}^{j-1}, u_i^{j-1}, u_{i+1}^{j-1}$ terimleri (x_i, t_j) noktası civarında Taylor serisine açılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$T_i^j = 2(k + q\alpha) \left(1 + \frac{h^2}{2!} D_x^2 + \frac{h^4}{4!} D_x^4 + \dots \right) u_i^j \\ + (-2k + q\beta)u_i^j + 2(k\alpha) \left(1 + \frac{h^2}{2!} D_x^2 + \frac{h^4}{4!} D_x^4 + \frac{h^6}{6!} D_x^6 + \dots \right) \delta_i^j \\ + (k\beta)\delta_i^j - (q\alpha) \left[1 + (-kD_t - hD_x) + \frac{1}{2!} (-kD_t - hD_x)^2 + \dots \right] u_i^j \\ - (q\beta) \left(1 - \frac{k}{1!} D_t + \frac{k^2}{2!} D_t^2 - \frac{k^3}{3!} D_t^3 + \dots \right) u_i^j \\ - (q\alpha) \left(1 + (-kD_t + hD_x) + \frac{1}{2!} (-kD_t + hD_x)^2 + \dots \right) u_i^j$$

elde edilir. Burada $\delta_i^j \equiv \delta(x_i, t_j) = (Mu)_i^j \equiv (I|u|^2 \times u)_i^j$ ifadesi lineer olmayan terim için kullanılmıştır. Bu terim (3.1) Schrödinger denkleminde çekilerek kesme hatasında yerine yazılırsa

$$T_i^j = 2(k + q\alpha) \left(1 + \frac{h^2}{2!} D_x^2 + \frac{h^4}{4!} D_x^4 + \dots \right) u_i^j + (-2k + q\beta)u_i^j \\ + 2(k\alpha) \left(1 + \frac{h^2}{2!} D_x^2 + \frac{h^4}{4!} D_x^4 + \frac{h^6}{6!} D_x^6 + \dots \right) \\ \times (-qD_t - D_x^2)u_i^j + (k\beta)(-qD_t - D_x^2)u_i^j$$

$$\begin{aligned}
& -(q\alpha) \left(1 - \frac{k}{1!} D_t + \frac{k^2}{2!} D_t^2 - \dots \right) u_i^j \\
& -(q\beta) \left(1 - \frac{k}{1!} D_t + \frac{k^2}{2!} D_t^2 - \frac{k^3}{3!} D_t^3 + \dots \right) u_i^j \\
& -(q\alpha) \left(1 - \frac{k}{1!} D_t + \frac{k^2}{2!} D_t^2 - \dots \right) u_i^j \\
& -(q\alpha) \left(-hD_x + \frac{h^2}{2!} D_x^2 - \frac{h^3}{3!} D_x^3 + \dots \right) u_i^j \\
& -(q\alpha) \left(hD_x + \frac{h^2}{2!} D_x^2 + \frac{h^3}{3!} D_x^3 + \frac{h^4}{4!} D_x^4 + \dots \right) u_i^j \\
& -(2q\alpha h^2) \left(\frac{-1}{3!} \binom{3}{2} kD_t + \frac{1}{4!} \binom{4}{2} k^2 D_t^2 - \frac{1}{5!} \binom{5}{2} k^3 D_t^3 + \dots \right) D_x^2 u_i^j \\
& -(2q\alpha h^4) \left(\frac{-1}{5!} \binom{5}{4} kD_t + \frac{1}{6!} \binom{6}{4} k^2 D_t^2 - \frac{1}{7!} \binom{7}{4} k^3 D_t^3 + \dots \right) D_x^4 u_i^j \\
& -(2q\alpha h^6) \left(\frac{-1}{7!} \binom{7}{6} kD_t + \frac{1}{8!} \binom{8}{6} k^2 D_t^2 - \frac{1}{9!} \binom{9}{6} k^3 D_t^3 + \dots \right) D_x^6 u_i^j - \dots
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifadede ortak terimler birlikte dikkate alınır ve düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
T_i^j = & k(h^2 - \beta - 2\alpha) D_x^2 u_i^j + 2kh^2 \left(\frac{h^2}{4!} - \frac{\alpha}{2!} \right) D_x^4 u_i^j + 2kh^4 \left(\frac{h^2}{6!} - \frac{\alpha}{4!} \right) D_x^6 u_i^j \\
& + 2kh^6 \left(\frac{h^2}{8!} - \frac{\alpha}{6!} \right) D_x^8 u_i^j + \dots - q(\beta + 2\alpha) \\
& \times \left(\frac{k^2}{2!} D_t^2 - \frac{k^3}{3!} D_t^3 + \frac{k^4}{4!} D_t^4 - \dots \right) u_i^j \\
& -(2q\alpha h^2) \left(\frac{1}{4!} \binom{4}{2} k^2 D_t^2 - \frac{1}{5!} \binom{5}{2} k^3 D_t^3 + \frac{1}{6!} \binom{6}{2} k^4 D_t^4 - \dots \right) D_x^2 u_i^j \\
& -(2q\alpha h^4) \left(\frac{1}{6!} \binom{6}{4} k^2 D_t^2 - \frac{1}{7!} \binom{7}{4} k^3 D_t^3 + \frac{1}{8!} \binom{8}{4} k^4 D_t^4 - \dots \right) D_x^4 u_i^j - \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Hesaplanan bu kesme hatasının bir sonucu olarak aşağıdaki durumlar söylenebilir:

- i) $\beta + 2\alpha = h^2$ için nümerik yöntemin kesme hatası $O(kh^2 + k^2 h^2)$ dir.
- ii) $\beta + 2\alpha = h^2$ ve $\alpha = \frac{2!h^2}{4!}$ için yöntemin kesme hatası $O(kh^4 + k^2 h^2)$ dir.

3.3 Kararlılık analizi

Sunulan nümerik metodun kararlılık analizi, von-Neumann yöntemi ile yapılabilir. Bu yöntemin uygulamasında, (3.1) Schrödinger denkleminde yer alan lineer olmayan terim için kullanılan M_{i+1} , M_i , M_{i-1} ifadeleri birer yerel sabit olarak düşünülerek her biri yerine d^* parametresi kullanılacaktır.

von-Neumann analizinde,

$$Z_i^j = \zeta^j \exp(q\phi ih) \quad (3.7)$$

şeklindeki Fourier modu (3.5) tekrarlı bağıntısında yerine yazılır ve buradan elde edilecek ζ büyüme çarpanının mutlak değerce 1 den küçük eşit olması istenir. Yani nümerik yöntemin koşulsuz kararlı olabilmesi için $|\zeta| \leq 1$ olması gerekir. Burada, ϕ dalga sayısı, $q = \sqrt{-1}$ sanal birim ve h çözüm bölgesindeki aralık uzunluğudur.

Buna göre, (3.7) eşitliği (3.5) tekrarlı bağıntısında yerine yazılır ve sadeleştirmeler yapılarak ifade düzenlenirse

$$\zeta = \frac{A_i^* \exp(-q\phi) + B_i^* + C_i^* \exp(q\phi)}{A_i \exp(-q\phi) + B_i + C_i \exp(q\phi)} \quad (3.8)$$

bulunur. Kompleks analizden bilinen $\exp(q\phi) = \cos \phi + q \sin \phi$ eşitliği burada kullanılırsa (3.8) ifadesi

$$\zeta = \frac{(C_i^* + A_i^*) \cos \phi + B_i^* + q(C_i^* - A_i^*) \sin \phi}{(C_i + A_i) \cos \phi + B_i + q(C_i - A_i) \sin \phi} \quad (3.9)$$

halini alır. Buradaki A_i , B_i , C_i , A_i^* , B_i^* , C_i^* katsayıları yerine değerleri yazılırsa

$$\zeta = \frac{(2q\alpha) \cos \phi + (q\beta)}{(2k + 2q\alpha + 2kad^*) \cos \phi + (-2k + q\beta + k\beta d^*)} \quad (3.10)$$

elde edilir.

$$\sigma = 2\alpha \cos \phi + \beta$$

ve

$$\tau_0 = (2k + 2k\alpha d^*) \cos \phi + (-2k + k\beta d^*)$$

kabul edilirse (3.10) eşitliği

$$\zeta = \frac{q\sigma}{\tau_0 + q\sigma}$$

halini alır. Bu ise kararlılık için gerekli olan

$$|\zeta| = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\tau_0^2 + \sigma^2}} \leq 1$$

şartının sağlandığını gösterir. Böylece önerilen yöntem, koşulsuz kararlı olur.

3.4 Test problemleri

Bu kısımda, sunulan nümerik yöntem iki farklı problem kullanılarak test edilecektir.

Yöntemin doğruluğunu araştırmak için

$$L_\infty = \|u^{analitik} - u^{nümerik}\|_\infty = \max_j |u_j^{analitik} - u_j^{nümerik}|$$

$$L_2 = \|u^{analitik} - u^{nümerik}\|_2 = \sqrt{h \sum_{i=0}^N |u_j^{analitik} - u_j^{nümerik}|^2}$$

hata normları kullanılacaktır.

Schrödinger denkleminin korunum sabitleri

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 dx$$

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(|U_x|^2 - \frac{1}{2} |U|^4 \right) dx$$

şeklindedir ve bu sabitler sırasıyla bir parçacığın yoğunluk ve enerjisine karşılık gelir. Test problemleri çalışılırken bu sabitler de hesaplanacaktır. Hesaplamalarda, yukarıdaki integraller için ilgili çözüm bölgesi üzerinde Simpson kuralı kullanılacaktır.

(3.1) Schrödinger denklemi, kompleks değişkenli bir kısmi diferensiyel denklem olduğu için hesaplamalarda reel ve sanal kısımlar

$$u(x, t) = r_{analitik} + qS_{analitik}$$

$$Z_i^j = r_{nümerik} + qS_{nümerik}$$

şeklinde ayrılacaktır.

3.4.1 Problem 1: Tek soliton hareketi

(3.1) Schrödinger denkleminin bir analitik çözümü

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2\delta}{I}} \exp[q(0,5cx - (0,25c^2 - \delta)t)] x \operatorname{sech}(\sqrt{\delta}(x - ct)) \quad (3.11)$$

şeklindedir. Bu çözümün modülü, c hızıyla hareket eden bir tek soliton dalga hareketini modeller.

Bu problemin başlangıç koşulu, analitik çözümde $t = 0$ alındığında

$$u(x, 0) = \sqrt{\frac{2\delta}{I}} \exp[q(0,5cx)] \operatorname{sech}(\sqrt{\delta}x)$$

olarak bulunur. Problemin sınır koşulları

$$\frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0$$

şeklindedir. Burada $\delta \in \mathbb{R}$ dir.

(3.11) çözümünde

$$I = 1, \quad c = 0.1 \quad \text{ve} \quad \delta = 0.01$$

parametre seçimleri ile farklı zamanlar için hesaplanan L_∞ ve L_2 hataları ile C_1 ve C_2 korunum sabitleri hesaplanmıştır. Yöntemde kullanılacak nümerik parametreler

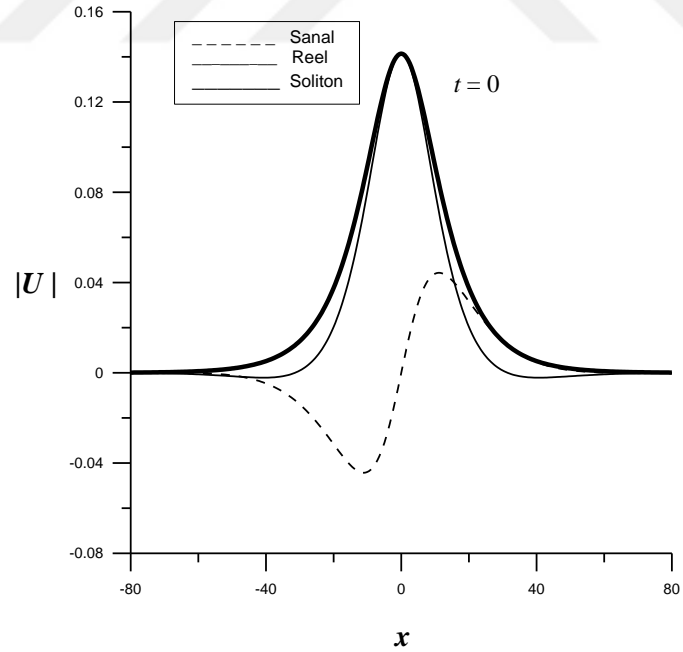
$$k = 0.5, \quad h = 0.5, \quad \alpha = \frac{h^2}{12}, \quad \beta = h^2 - 2\alpha$$

şeklinde alınmıştır. Tek soliton dalgası için hesaplanan hata ve korunum değerleri Çizelge 3.1 ile verilmiştir. Bu çizelge incelendiğinde, elde edilen sonuçların yeterli doğrulukta oldukları ve korunum sabitlerinin çok az değiştiği görülmektedir.

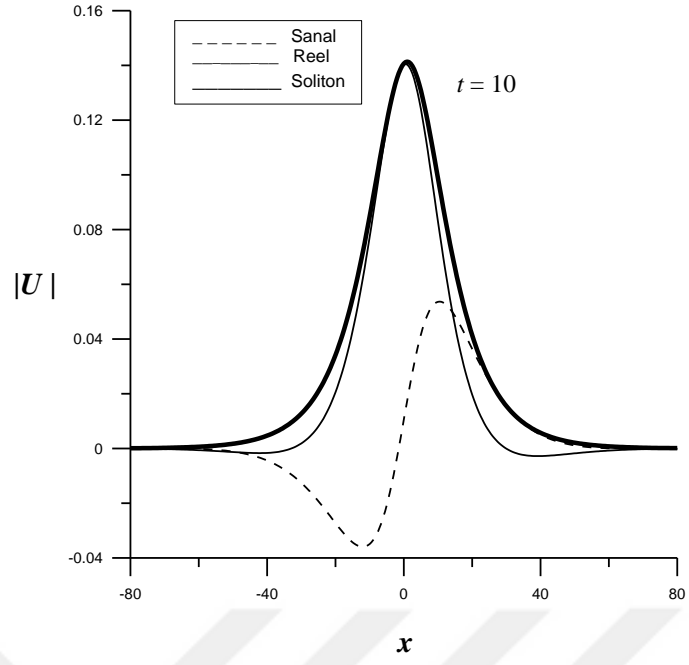
Çizelge 3.1: Tek soliton için hata ve korunum değerleri

t	$L_{\infty} \times 10^4$	$L_2 \times 10^4$	C_1	C_2
0.0	0.000000	0.000000	0.400000	-0.000337
10	0.684504	1.964806	0.399821	-0.000337
25	1.934547	5.556177	0.399553	-0.000336
50	3.940301	12.24899	0.399109	-0.000336
75	5.858207	19.18296	0.398667	-0.000335
100	7.861934	26.61053	0.398226	-0.000334

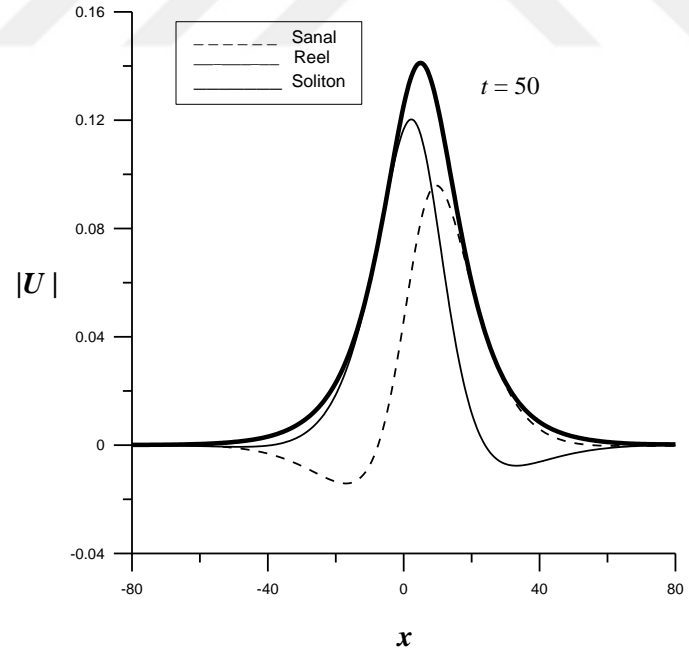
Tek soliton hareketinin grafik üzerinde incenlemesi için nümerik çözümlerin modülleri, bazı farklı zamanlarda çizilerek Şekil 3.1-5 ile verilmiştir. Korunum sabitlerindeki değişim ise Şekil 3.6' da görülmektedir. Şekil 3.5 incelendiğinde, nümerik yöntemin soliton hareketinin düzgün modellendiği fakat dalganın genliğinde çok küçük kayıpların olduğu görülmektedir.



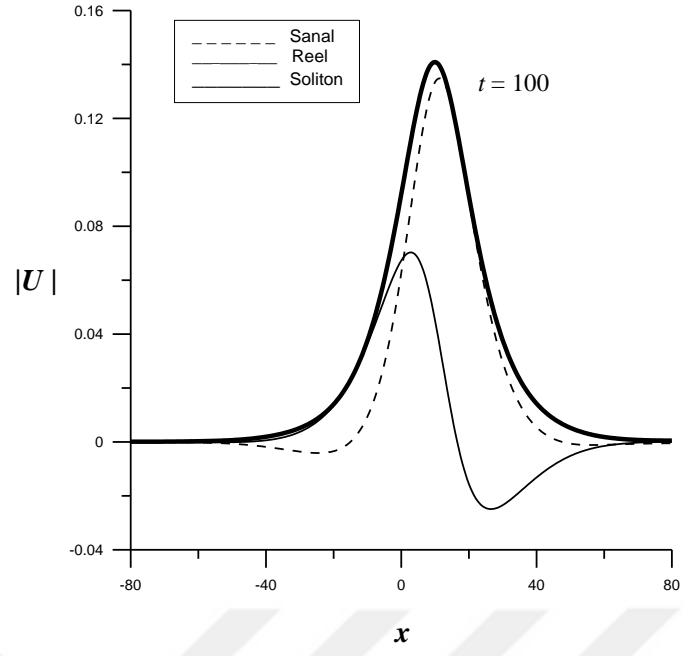
Şekil 3.1: Tek soliton hareketi $t = 0$



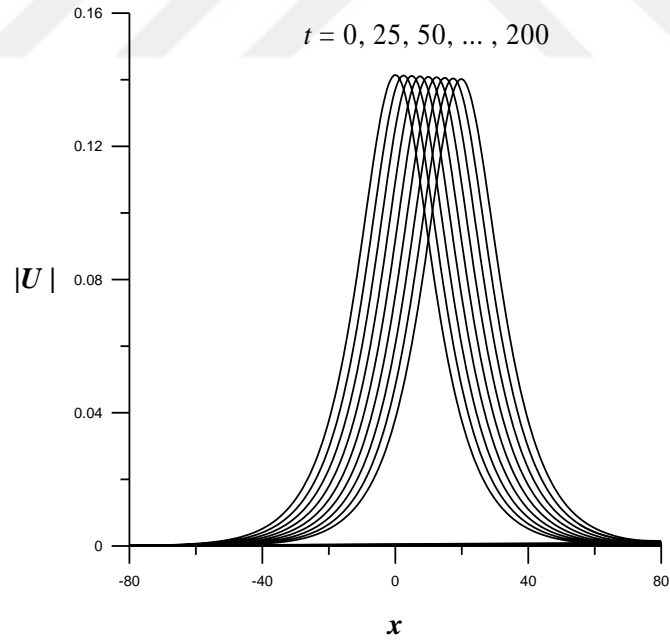
Şekil 3.2: Tek soliton hareketi $t = 10$



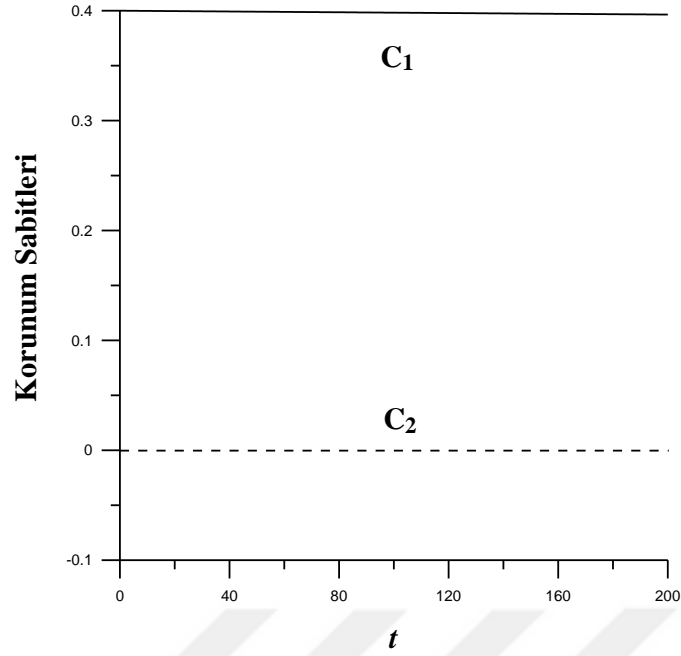
Şekil 3.3: Tek soliton hareketi $t = 50$



Şekil 3.4: Tek soliton hareketi $t = 100$



Şekil 3.5: Tek soliton hareketi



Şekil 3.6: Korunum sabitlerindeki değişim

Aynı çözüm parametreleri ile $t = 10$ zamanındaki çözümlerin reel ve sanal kısımları için bazı konum noktalarında hesaplanan değerler Çizelge 3.2 ile verilmiştir. Ayrıca reel ve sanal kısımlara ilişkin çözüm profilleri Şekil 3.1-5' de verilmiştir. Reel ve sanal kısımlara ilişkin nümerik değerler ile analitik sonuçların iyi bir uyum içerisinde olduğu Çizelge 3.2' de görülmektedir. Hesaplanan bu değerlerle ortaya çıkan hata büyüklükleri için Çizelge 3.3 oluşturulmuştur.

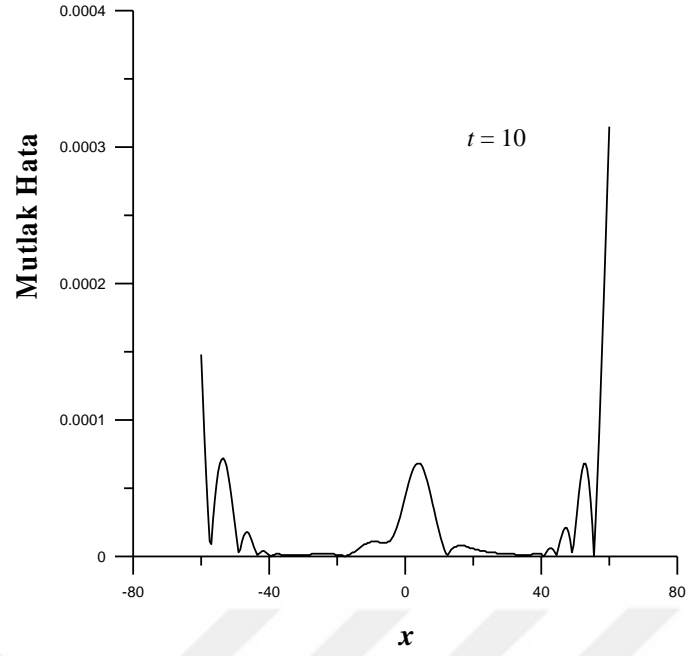
Çizelge 3.2: Çözümlerin reel ve sanal kısımları için $t = 10$ anındaki değerler

x	$r_{analitik}$	$r_{nümerik}$	$S_{analitik}$	$S_{nümerik}$
-80	-0.000061	-0.000096	0.000061	0.000046
-70	-0.000224	-0.000220	0.000065	0.000069
-60	-0.000620	-0.000619	-0.000136	-0.000136
-50	-0.001300	-0.001301	-0.001133	-0.001132
-40	-0.001625	-0.001627	-0.004395	-0.004395
-30	0.001847	0.001843	-0.012581	-0.012583
-20	0.020537	0.020531	-0.027252	-0.027259
-10	0.077218	0.077218	-0.034948	-0.034922
0	0.140322	0.140277	0.010544	0.010555
10	0.082814	0.082827	0.053667	0.053614
20	0.019685	0.019681	0.036396	0.036405
30	-0.000065	-0.000071	0.015516	0.015518
40	-0.002765	-0.002767	0.005011	0.005010
50	-0.001777	-0.001778	0.001130	0.001130
60	-0.000773	-0.000773	0.000052	0.000052
70	-0.000259	-0.000258	-0.000120	-0.000114
80	-0.000062	-0.000079	-0.000084	-0.000124

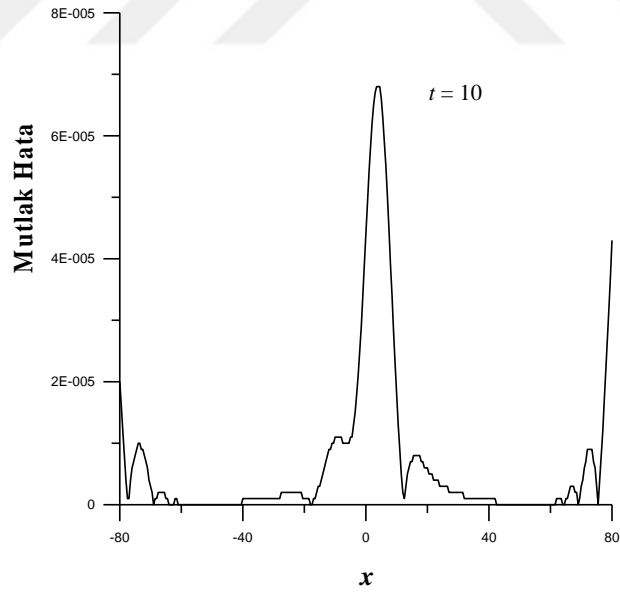
Çizelge 3.3: Reel ve sanal kısımlar için $t = 10$ anındaki hatalar

x	Reel Kısım Hatası $\times 10^5$	Sanal Kısım Hatası $\times 10^5$
-80	3.473782	1.498691
-70	0.415392	0.361549
-60	0.006219	0.053272
-50	0.057046	0.036093
-40	0.180958	0.012725
-30	0.433780	0.191622
-20	0.658627	0.661059
-10	0.004973	2.606262
0	4.470794	1.063570
10	1.339754	5.339433
20	0.423022	0.879486
30	0.545318	0.174340
40	0.217209	0.048315
50	0.062214	0.054905
60	0.019936	0.007439
70	0.042050	0.556746
80	1.692754	4.013851

Nümerik hesaplamalarda çözüm bölgesi olarak ilk önce $[-60, 60]$ aralığı alınmıştır. Bu aralık üzerinde yapılan hesaplamalar için $t = 10$ anında ortaya çıkan mutlak hataların grafiği Şekil 3.7’ de görülmektedir. Bu grafikten de görüldüğü üzere maksimum hata sınır noktasında ortaya çıkmaktadır. Bu durumu düzeltmek için çözüm bölgesi $[-80, 80]$ aralığına genişletilmiştir. Böylece, sınır noktasında oluşan maksimum hata küçültülmüştür. Bu yeni aralık üzerindeki mutlak hataların grafiği Şekil 3.8 ile verilmiştir.



Şekil 3.7: Tek soliton için $[-60, 60]$ aralığındaki hata



Şekil 3.8: Tek soliton için $[-80, 80]$ aralığındaki hata

3.4.2 Problem 2: İki solitonun çarpışması

(3.1) Schrödinger denklemi için

$$u(x, 0) = U_1(x, 0) + U_2(x, 0)$$

olacak şekilde bir başlangıç koşulu, uygun U_1 ve U_2 fonksiyonları ile zıt yönde hareket eden iki soliton dalgasının çarpışmasını modeller. Bu modelde iki soliton dalganın başlangıç profilleri

$$U_1(x, 0) = \alpha_1 \sqrt{\frac{2}{I}} \exp[q0,5c_1(x - x_1)] \operatorname{sech}(\alpha_1(x - x_1)) \quad (3.12)$$

$$U_2(x, 0) = \alpha_2 \sqrt{\frac{2}{I}} \exp[q0,5c_2(x - x_2)] \operatorname{sech}(\alpha_2(x - x_2)) \quad (3.13)$$

fonksiyonları ile verilir. (3.12) ve (3.13) eşitliklerinin mutlak değerleri, aşağıdaki parametre seçimleri ile başlangıçta $x = x_1$ ve $x = x_2$ noktalarına konumlandırılmış, c_1 ve c_2 hızları ile birbirlerine doğru hareket eden iki özdeş soliton dalgasını verir.

Nümerik hesaplamalar için (3.17) ve (3.18) eşitliklerinde yer alan parametreler

$$\alpha_1 = 1, \quad c_1 = 4, \quad x_1 = -10 \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = 1, \quad c_2 = -4, \quad x_2 = 10$$

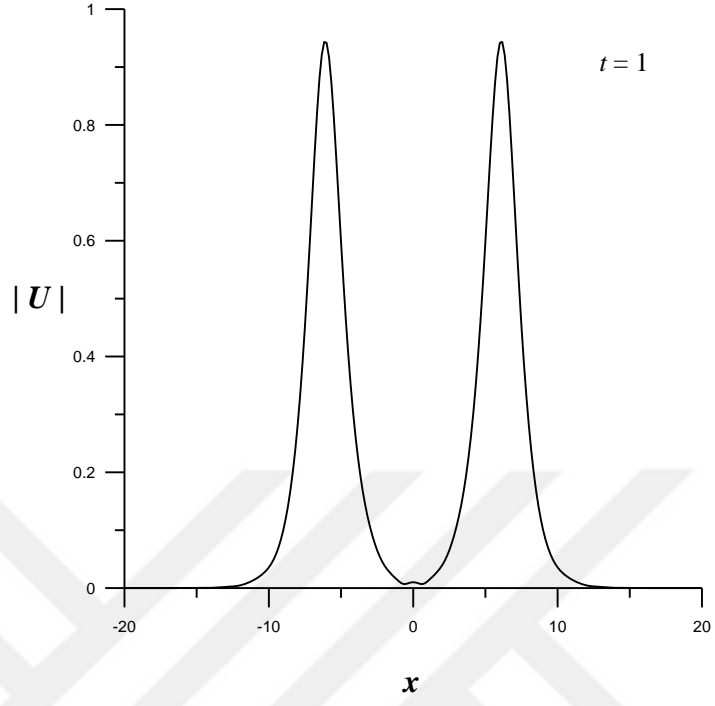
şeklinde seçilmiştir. Ayrıca

$$I = 2, \quad h = \frac{1}{6}, \quad k = 0.05$$

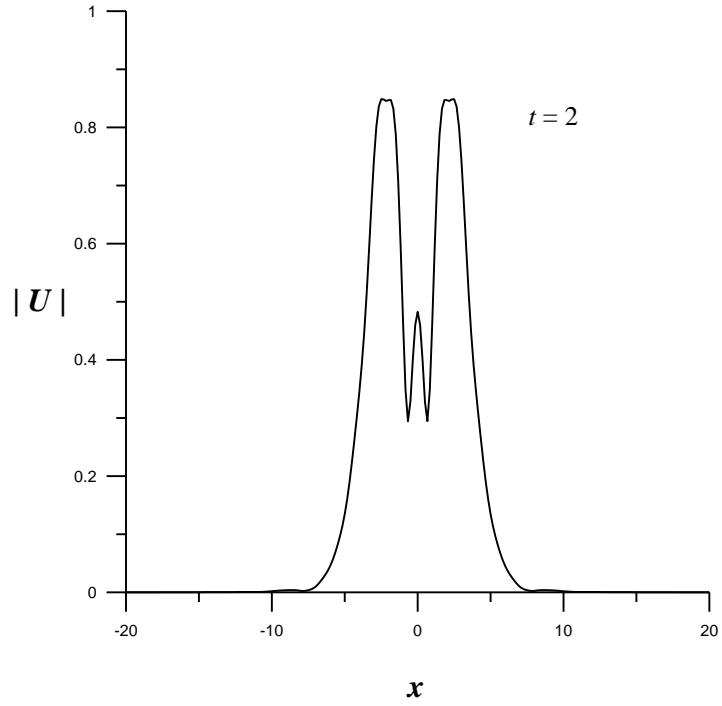
alınmıştır.

Şekil 3.9-14 ile verilen çözüm profillerinde sırasıyla $t = 1$, $t = 2$, $t = 2.5$, $t = 3$, $t = 4$ ve $t = 5$ zamanlarında iki dalganın durumları görülmektedir. Şekil 3.9-14 incelendiğinde zıt yönlü bir çarpışma sonrasında her iki solitonun da şeklini ve hızını değiştirmeden hareketine devam ettikleri görülmektedir. Bu noktada, önerilen yöntemin soliton çarpışmasını modelleyebildiği söylenebilir. Diğer yandan, Şekil 3.13 ve Şekil 3.14 incelendiğinde, çarpışma sonrasında dalgaların genliklerinde

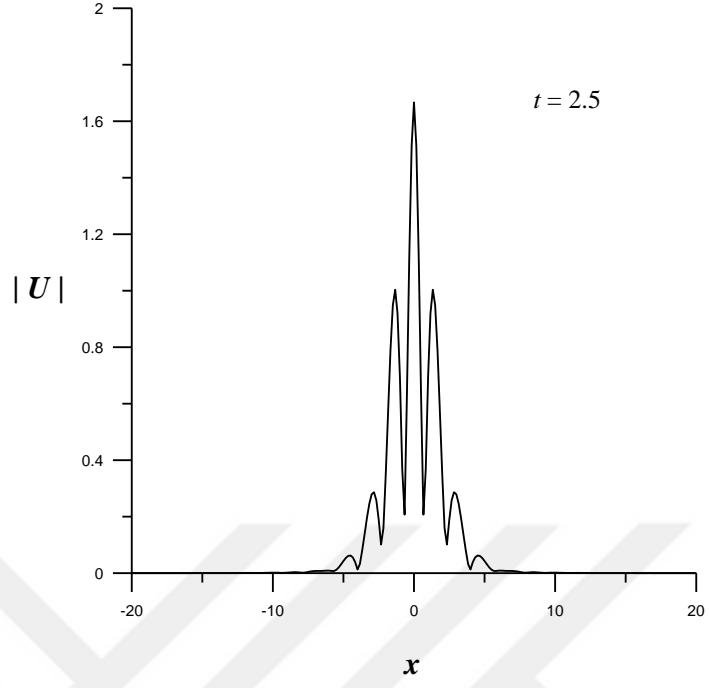
küçülme göze çarpmaktadır. Bu durum nümerik yöntem için negatif bir durum olarak not edilebilir.



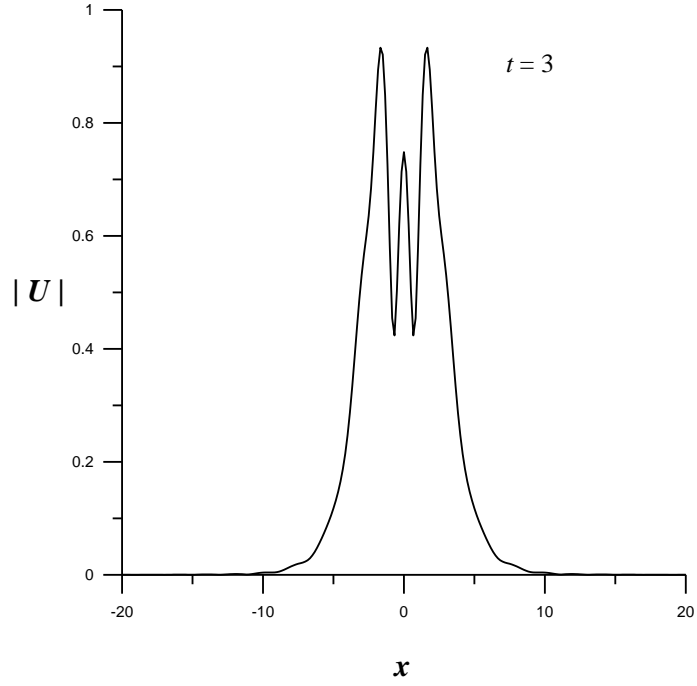
Şekil 3.9: İki soliton çarpışması, $t = 1$



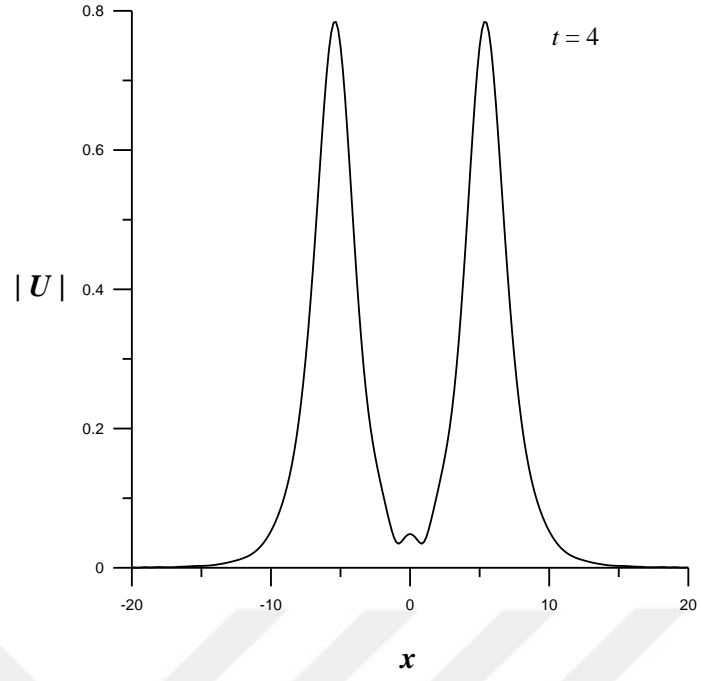
Şekil 3.10: İki soliton çarpışması, $t = 2$



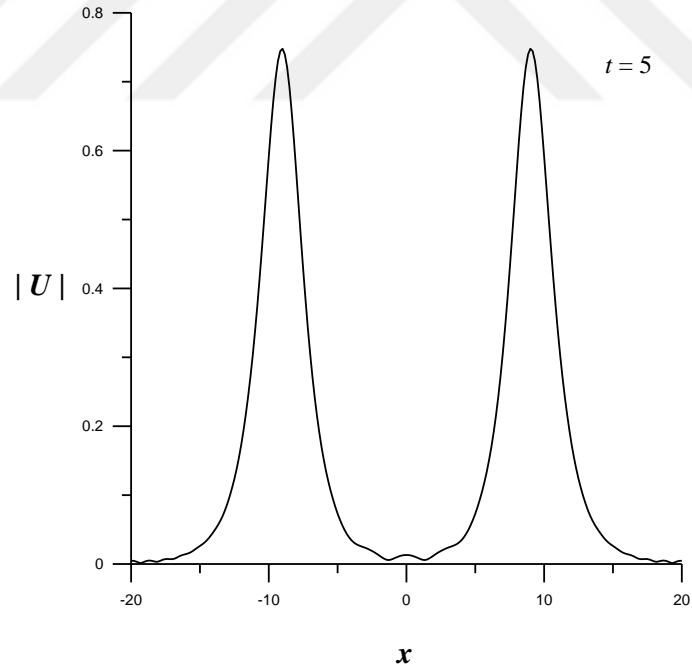
Şekil 3.11: İki soliton çarpışması, $t = 2.5$



Şekil 3.12: İki soliton çarpışması, $t = 3$



Şekil 3.13: İki soliton çarpışması, $t = 4$



Şekil 3.14: İki soliton çarpışması, $t = 5$

Zıt yönde hareket eden özdeş iki soliton çarpışması problemine ilişkin hesaplanan korunum sabitleri Çizelge 3.4 ile verilmiştir. Bu çizelgeye bakıldığında, özellikle C_2 sabitinde hızlı bir değişim görülmektedir ve bu değişim, yöntem için bir dezavantajlı durumdur. Çizelgede görülen C_2 sabitinin $t = 3$ anındaki değişimi, çarpışma anındaki bir değişime işaret etmektedir. Çarpışma sonrasında tekrar bir dengelenme olduğu $t = 4$ ' deki değer ile görülmektedir.

Çizelge 3.4: İki soliton çarpışmasında korunum değerleri

t	C_1	C_2
0	4.00000	-1.350420
1	3.73655	-1.097470
2	3.51199	-0.683618
3	3.34465	-0.363218
4	3.17331	-0.668007

4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında lineer olmayan zamana bağlı kübik Schrödinger denkleminin nümerik çözümleri, polinom olmayan kübik spline enterpolasyonu kullanılarak incelendi. Problemin zamana göre türevli terimi için ileri fark yaklaşımı kullanılarak Schrödinger denklemi, ardışık iki zaman adımını içeren bir tekrarlı bağıntı haline getirildi.

Nümerik yöntemin yerel kesme hatası kullanılarak polinom olmayan kübik spline bağıntısında ortaya çıkan α ve β parametrelerinin optimum seçimleri yapıldı.

von-Neumann tekniği kullanılarak nümerik yöntemin kararlılığı incelendi ve çözümlerdeki büyüme faktörünün mutlak değerce 1' den küçük olduğu bulundu. Böylece yöntemin koşulsuz kararlı olduğu ifade edildi.

Sunulan nümerik yöntem, ilk olarak tek soliton dalga problemi üzerinde test edildi ve analitik çözüm kullanılarak hesaplanan hata büyüklükleri ile Schrödinger denkleminin yoğunluk ve enerjiye karşılık gelen korunum sabitleri hesaplandı. Denklemin çözümlerinin modülü ile reel ve sanal kısımlar aynı şekiller üzerinde farklı zamanlar için resmedildi. Zaman sürecinde dalganın ilerlemesi ile maksimum hatanın sınır noktasında olduğu durumda, çözüm bölgesi genişletilerek bu hata azaltıldı. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, önerilen yöntemin tek soliton hareketi için doğruluğu yüksek, yoğunluk ve enerji sabitlerini koruyan ve tavsiye edilebilir bir yöntem olduğu söylenebilir.

İkinci olarak ise zıt yönde hareket eden iki özdeş soliton dalgasının çarpışması incelendi. Bu problem için de ilgili korunum sabitleri hesaplandı. Elde edilen sonuçların grafikleri verilerek çarpışma öncesi, çarpışma anı ve çarpışma sonrasında dalgaların profilleri gözlemlendi. Verilen şekiller incelendiğinde, çarpışma sonrasında da dalgaların şekillerini koruyarak hareketlerine devam ettikleri görüldü. Diğer yandan nümerik yöntem için bir negatif durum olarak, çarpışma sonrasında dalgaların genliklerinde bir miktar küçülme olduğu gözlemlendi.

Sonuç olarak, Schrödinger denkleminin nümerik çözümlerinde, soliton dalga profillerinin oluşturulması ve dalga çarpışmasının modellenmesinde polinom olmayan kübik spline enterpolasyonunun yeterli doğrulukta sonuçlar ortaya koyduğu söylenebilir. Yöntemin uygulama kolaylığı ve hesaplama maliyeti açısından ekonomik olması da bir avantajdır. Öte yandan, α ve β parametrelerinin varlığı ve bu parametre seçimlerinin yapılabilmesi için teorik analizlerin gerekliliği polinom spline yaklaşımına kıyasla bir dezavantaj olarak ifade edilebilir.



KAYNAKLAR

Casteljau, P.de, 1959, Courbes at surfaces a poles, Technical report, Andre Citroen Auto-mobiles SA, Paris.

Chao hao, G., 1995, Soliton theory and its applications, Springer.

Crawford, F., 1968, Waves: Berkeley Physics Course, Vol.3, Mcgraw-Hill College.

de Boor C.,1978, A practical guide to splines, Springer-Verlag.

El-Danaf, T. S., 2008, Quartic nonpolynomial spline solution for third order two point boundary value problem, Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, 35, 2070-3740.

El-Danaf T.S., Ramadan M.A., Abd Alaal F.E.I, 2012, Numerical studies of the cubic non-linear Schrödinger equation, Nonlinear Dyn. 67, 619-627.

Falkovich, G., 2007, Soliton: A brief history of solitons. Adres: <https://webhome.weizmann.ac.il/home/fnfal/papers/soliton.pdf>

Fordy, A.P., 1990, Soliton theory: a survey of results, Manchester Univ. Press.

Gardner, C.S.,Greene, J.M., Kruskal, M. D., ve Miura, R. M., 1967, Method for solving the Korteweg-deVries equation, Physical Review Letters 19, 1095-1097.

Harvard Gazette Archives, April 20, 2006, Solitons: Nextwave in electronics. Adres: <http://news.harvard.edu/gazette/2006/04.20/10-soliton.html>

Korkmaz, A. ve Dag, I., 2008, A differential quadrature algorithm for simulations of nonlinear Schrödinger equation, Computers & Mathematics with Applications, 56:9, 2222–2234.

- Köksal, N., 2014, NLS Denklemi nin Yüksek Dereceli B-spline Fonksiyonlar Yardımıyla Sayısal Çözümü, Yüksek Lisans Tezi.
- Korteweg, D.J ve De Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine*, 39, 422-443.
- Ramadan, M. A., Lashien, I. F. ve Zahra, W. K., 2007, Polynomial and nonpolynomial spline approaches to the numerical solution of second order boundary value problems, *Appl. Math. Comput.*, 184, 476-484.
- Rashidinia, J., Mohammadi, R. ve Jalilian, R., 2006, Spline methods for the solution of hyperbolic equation with variable coefficients, *Wiley Interscience*, 23, 1411-1419.
- Russel, J.S., 1844, Report on waves, Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science (John Murray, London), 311 - 390.
- Schoenberg, I. J., 1946, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A: On the problem of smoothing or graduation, a first class of analytic approximation formulas, *Quart. Appl. Math.*, 4, 45-99.
- Schumaker, L. L., 1993, *Spline functions: basic theory*, Krieger Publishing Company.
- Taşcan, F., 2002, 'Integrallenebilirlik ve pertürbasyon teori, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.
- Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, *Pramana Journal of Physics*, 57(5), 841-847.
- Zabusky, N. J. ve Kruskal, M. D., 1965, Interaction of "Solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* 15, 240.
- Zheng, S., 2004, *Nonlinear evolution equations*, Chapman&Hall/CRC.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Fidan ATAY

Doğum Tarihi ve Yeri : 28.05.1989 - İstanbul

E-posta adresi : fidan.eroglu89@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans : Uşak Üniversitesi, 2007 - 2011

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, 2013 - 2016

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

Matematik öğretmeni, Kültür Özel Maltepe Şubesi 2011 - 2012

Matematik öğretmeni, Saffet Simavi İlköğretim Okulu 2012 - 2013

Matematik öğretmeni, Güneş Butik Dersanesi 2013 - 2014

Matematik öğretmeni, Doğa Koleji 2014 - ...