



T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**REISSNER-NORDSTRÖM-ADS KARADELİKLERİNİN
GENİŞLETİLMİŞ FAZ UZAYINDAKİ TERMODİNAMİK
ÖZELLİKLERİ**

Özgür ÖKCÜ

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı

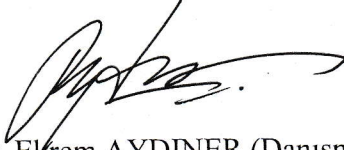
**DANIŞMAN
Prof. Dr. Ekrem AYDINER**

Aralık, 2016

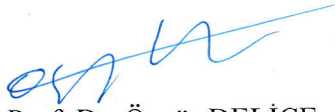
İSTANBUL

Bu çalışma 26.12.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

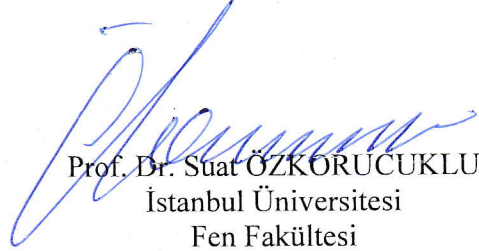
Tez Jürisi:



Prof. Dr. Ekrem AYDINER (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi




Prof. Dr. Özgür DELİCE
Marmara Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Prof. Dr. Suat ÖZKORUCUKLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Doç. Dr. Göksel DAYLAN ESMER
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Doç. Dr. İbrahim SEMİZ
Boğaziçi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin FYL-2016-20615 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Tez çalışması süresince yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarımnda bana çok önemli katkılar sağlayan, çalışma disiplinine hayran olduğum çok değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Ekrem Aydınır'e teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasındaki grafikleri düzenlenmesinde yapmış olduğu çok önemli katkılar için değerli arkadaşım Can Onur Keser'e teşekkür ederim. Her zaman beni destekleyen ve yanımda olan arkadaşım Gökhan Türkmen'e teşekkür ederim.

Tez aşaması boyunca burs aldığım Elginkan Vakfı'na teşekkür ederim.

Her zaman ve her koşulda beni destekleyen sevgili aileme teşekkür ederim.

Aralık 2016

Özgür ÖKCÜ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

| | |
|---|-----------|
| ÖNSÖZ..... | i |
| İÇİNDEKİLER | ii |
| ŞEKİL LİSTESİ..... | iv |
| SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ | vii |
| ÖZET..... | ix |
| SUMMARY | x |
| 1. GİRİŞ..... | 1 |
| 2. GENEL KISIMLAR | 4 |
| 2.1. VAN DER WAALS HAL DENKLEMİ | 8 |
| 2.1.1. Faz Geçişi ve Kritik Noktalar | 9 |
| 2.1.1.1. Ehrenfest Denklemleri..... | 13 |
| 2.1.1.2. Kritik Üsteller..... | 15 |
| 2.1.2. Carnot Çevrimi..... | 17 |
| 2.2. REISSNER-NORDSTRÖM-ADS KARADELİKLERİ | 20 |
| 2.2.1. Faz Geçişi ve Kritik Noktalar | 21 |
| 2.2.1.1. Ehrenfest Denklemleri..... | 27 |
| 2.2.1.2. Kritik Üsteller..... | 29 |
| 2.2.2. Isı Çevrimleri | 31 |
| 3. MALZEME VE YÖNTEM | 36 |
| 3.1. JOULE-THOMSON GENLEŞMESİ | 36 |
| 3.1.1. van der Waals Denklemi | 38 |
| 3.2. KARADELİKLERİN ENTROPİSİNE GENEL LOGARİTMİK DÜZELTME...40 | |
| 3.3. TSALLIS-RENYİ ENRTOPI MODELİNDE KARADELİKLER | 44 |
| 4. BULGULAR | 50 |
| 4.1. JOULE-THOMSON GENLEŞMESİ | 50 |
| 4.2. TERMAL DALGALANMALARIN RN-ADS KARADELİĞİNE ETKİLERİ ... 54 | |
| 4.2.1. Faz Geçişi ve Kritik Noktalar | 56 |
| 4.2.1.1. Kritik Üsteller..... | 59 |

| | |
|--|-----------|
| 4.3. TSALLIS-RENYI ENTROPİ MODELİNDE RN KARADELİĞİ..... | 61 |
| 4.3.1. Faz Geçişi ve Kritik Noktalar | 64 |
| 4.3.1.1. $\beta - S$ Düzleminde RN Karadelığının Faz Geçişi | 64 |
| 4.3.1.2. $\lambda - \nu$ Düzleminde RN Karadelığının Faz Geçişi..... | 66 |
| 5. TARTIŞMA VE SONUÇ | 70 |
| KAYNAKLAR | 72 |
| ÖZGEÇMİŞ..... | 79 |

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

- Şekil 2.1:** İzotermal eğrilerin $P - v$ grafiği. Yukarıdan aşağıya sıcaklıklar sırasıyla $1.2T_c, 1.1T_c, T_c, 0.9T_c, 0.8T_c$ olarak alınmıştır. 10
- Şekil 2.2:** Kritik sıcaklığın altındaki izotermal bir eğrinin şematik temsili..... 11
- Şekil 2.3:** Gibbs serbest enerjisinin sıcaklığa göre değişimi. 12
- Şekil 2.4:** Sıvı-gaz fazının birlikte bulunma eğrisi. 13
- Şekil 2.5:** İzotermal sıkıştırılabilirliğin hacme göre değişimi. $P = P_c$ alınmıştır. 14
- Şekil 2.6:** Genleşmenin hacme göre değişimi. $P = P_c$ alınmıştır. 15
- Şekil 2.7:** Sabit basınçtaki ısı sığasının hacme göre değişimi. $P = P_c$ alınmıştır. 15
- Şekil 2.8:** Carnot Çevrimi. 19
- Şekil 2.9:** İzotermal eğrilerin $P - v$ grafiği. Yukarıdan aşağı sıcaklıklar sırasıyla $1.2T_c, 1.1T_c, T_c, 0.9T_c, 0.8T_c, 0.6T_c$ olarak alınmıştır. $Q = 1$ seçilmiştir..... 23
- Şekil 2.10:** Kritik sıcaklığın altındaki izotermal bir eğrinin RN-AdS karadeligi için şematik temsili. 24
- Şekil 2.11:** Gibbs serbest enerjisinin sıcaklığa göre değişimi. $Q = 1$ alınmıştır..... 25
- Şekil 2.12:** RN-AdS karadeliklerinin birlikte bulunma eğrisi. $Q = 1$ alınmıştır..... 25
- Şekil 2.13:** Schwarzschild-AdS karadelikleri için $P - v$ grafiği. Sıcaklıklar yukarıdan aşağıya $2, 3/2, 1, 1/2, 1/4$ olarak alınmıştır. 26
- Şekil 2.14:** İzotermal sıkıştırılabilirliğin olay ufkuna göre değişimi. $Q = 1$ ve $T = T_c$ alınmıştır. 28
- Şekil 2.15:** Hacim genleşmenin olay ufkuna göre değişimi. $Q = 1$ ve $P = P_c$ alınmıştır. 28
- Şekil 2.16:** (a) Sabit basınçtaki ısı sığasının olay ufkuna göre değişimi (b) Isı sığasının negatif olduğu bölge. $Q = 1$ ve $P = P_c$ alınmıştır. 29
- Şekil 2.17:** Karadeliklerde Carnot çevrimi. 33

| | |
|---|----|
| Şekil 2.18: Yeni ısı çevrimi. | 34 |
| Şekil 3.1: $T - P$ düzleminde inversiyon eğrileri. Kesikli mavi çizgi alt inversiyon eğrisini, turuncu çizgi üst inversiyon eğrisini göstermektedir. | 39 |
| Şekil 3.2: $T - P$ düzleminde izoentalpik eğriler ve inversiyon eğrileri. Kırmızı çizgiler izoentalpik eğrileri göstermektedir. Eğrilerin entalpileri aşağıdan yukarıya doğru $H = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ değerlerine karşılık gelmektedir. | 40 |
| Şekil 3.3: Entropilerin kütleye göre değişimi. Turuncu çizgi Schwarzschild, kesikli mavi çizgi TR modeli, siyah noktalı çizgi Schwarzschild-AdS entropilerine karşılık gelmektedir. $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır..... | 46 |
| Şekil 3.4: Sıcaklıkların kütleye göre değişimi. Turuncu çizgi Schwarzschild, kesikli mavi çizgi TR modeli, siyah noktalı çizgi Schwarzschild-AdS sıcaklıklarına karşılık gelmektedir. $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır..... | 47 |
| Şekil 3.5: Isı sığalarının kütleye göre değişimi. Turuncu çizgi Schwarzschild, kesikli mavi çizgi TR modeli, siyah noktalı çizgi Schwarzschild-AdS ısı sığalarına karşılık gelmektedir. $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır..... | 47 |
| Şekil 3.6: TR modelinde Schwarzschild karadelığının Gibbs enerjisinin sıcaklığa göre değişimi. $\lambda = 0.2$ alınmıştır..... | 48 |
| Şekil 4.1: RN-AdS karadeligi için inversiyon eğrileri. Aşağıdan yukarıya eğriler $Q = 1, 2, 10, 20$ değerlerine karşılık gelmektedir..... | 52 |
| Şekil 4.2: RN-AdS karadeligi için inversiyon ve izoentalpik eğriler. İzoentalpik eğriler aşağıdan yukarıya kütle artan değerlerine karşı gelmektedir. Kırmızı çizgileri izoentalpik eğrileri, siyah çizgiler inversiyon eğrilerini göstermektedir. (a) $Q = 1$ ve $M = 1.5, 2, 2.5, 3$. (b) $Q = 2$ ve $M = 2.5, 3, 3.5, 4$. (c) $Q = 10$ ve $M = 10.5, 11, 11.5, 12$. (d) $Q = 20$ ve $M = 20.5, 21, 21.5, 22$ | 53 |
| Şekil 4.3: RN-AdS karadelığının olay ufkunun kütle ve basınca göre değişimi. (a) $Q = 1$. (b) $Q = 2$. (c) $Q = 10$. (d) $Q = 20$ | 54 |
| Şekil 4.4: Küçük termal dalgalanma durumunda $P - r_h$ diyagramı. İzotermal eğriler için sıcaklık yukarıdan aşağıya sırasıyla $1.2T_c, T_c$ ve $0.8T_c$ değerlerine karşılık gelmektedir. $\tilde{a} = 10^{-9}$ ve $Q = 1$ alınmıştır. | 57 |
| Şekil 4.5: Büyük termal dalgalanma durumunda $P - r_h$ diyagramı. İzotermal eğriler için sıcaklık yukarıdan aşağıya sırasıyla $1.2T_c, T_c$ ve $0.8T_c$ değerlerine karşılık gelmektedir. $\tilde{a} = 1$ ve $Q = 1$ alınmıştır. | 58 |
| Şekil 4.6: Büyük termal dalgalanma durumunda $P - r_h$ diyagramı. İzotermal eğriler için sıcaklık yukarıdan aşağıya sırasıyla $1.2T_c, T_c$ ve $0.8T_c$ değerlerine karşılık gelmektedir. $\tilde{a} = 0.5$ ve $Q = 1$ alınmıştır. | 59 |

| | |
|---|----|
| Şekil 4.7: Entropilerin kütleyle göre değişimi. Turuncu çizgi RN, kesikli mavi çizgi TR modeli, siyah noktalı çizgi RN-AdS entropilerine karşılık gelmektedir. $Q = 1$, $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır..... | 62 |
| Şekil 4.8: Sıcaklıkların kütleyle göre değişimi. Turuncu çizgi RN, kesikli mavi çizgi TR modeli, siyah noktalı çizgi RN-AdS entropilerine karşılık gelmektedir. $Q = 1$, $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır..... | 63 |
| Şekil 4.9: Isı sığalarının kütleyle göre değişimi. Turuncu çizgi RN, kesikli mavi çizgi TR modeline, siyah noktalı çizgi RN-AdS entropilerine karşılık gelmektedir. $Q = 1$, $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır..... | 63 |
| Şekil 4.10: $0.8Q_c$ için $\beta_R - S_R$ grafiği. $\lambda = 0.2$ alınmıştır..... | 65 |
| Şekil 4.11: Q_c için $\beta_R - S_R$ grafiği. $\lambda = 0.2$ alınmıştır..... | 65 |
| Şekil 4.12: $1.2Q_c$ için $\beta_R - S_R$ grafiği. $\lambda = 0.2$ alınmıştır..... | 66 |
| Şekil 4.13: $0.8T_c$ için $\lambda - r_h$ grafiği. $Q = 1$ alınmıştır..... | 67 |
| Şekil 4.14: T_c için $\lambda - r_h$ grafiği. $Q = 1$ alınmıştır..... | 67 |
| Şekil 4.15: $1.2T_c$ için $\lambda - r_h$ grafiği. $Q = 1$ alınmıştır..... | 68 |
| Şekil 4.16: Gibbs serbest enerjisinin sıcaklığa göre değişimi. $\lambda = 0.08\lambda_c$ ve $Q = 1$ alınmıştır..... | 69 |

SİMGE VE KISALTIMA LİSTESİ

| Simgeler | Açıklama |
|------------------|--------------------------------------|
| κ | : Yüzey gravitesi |
| J | : Açısal momentum |
| Ω | : Açısal hız |
| Q | : Elektrik yükü |
| Φ | : Elektrik potansiyeli |
| U | : İç enerji |
| T | : Sıcaklık |
| S | : Entropi |
| P | : Basınç |
| Λ | : Kozmolojik sabit |
| G | : Newton sabiti |
| k_B | : Boltzmann sabiti |
| \hbar | : İndirgenmiş Plank sabiti |
| c | : Işık hızı |
| ε | : Negatif enerji yoğunluğu |
| V | : Hacim |
| M | : Kütle |
| H | : Entalpi |
| $g_{\mu\nu}$ | : Metrik tensör katsayısı |
| r_h | : Olay ufku |
| V_G | : Geometrik hacim |
| l | : Eğrilik yarıçapı |
| $\tilde{\alpha}$ | : Kütle başına düşen açısal momentum |
| v | : Spesifik hacim |
| N | : Parçacık sayısı |
| F | : Helmholtz serbest enerjisi |
| G | : Gibbs serbest enerjisi |
| C_P | : Sabit basınçtaki ısı sığası |
| C_V | : Sabit hacimdeki ısı sığası |
| k_T | : İzotermal sıkıştırılabilirlik |
| α | : Hacim genleşmesi |
| T_c | : Kritik sıcaklık |
| v_c | : Kritik spesifik hacim |
| P_c | : Kritik basınç |
| Z_c | : Sıkıştırma faktörü |
| μ | : Kimyasal potansiyel |
| p | : İndirgenmiş basınç |
| τ | : İndirgenmiş sıcaklık |
| v | : İndirgenmiş spesifik hacim |
| Π | : PD oranı |

| | |
|------------------|---------------------------------|
| η^0 | : Mertebe parametresi |
| η | : Verimlilik |
| W | : İş |
| q_H | : Sisteme verilen ısı |
| q_C | : Sistemden alınan ısı |
| T_H | : Yüksek sıcaklık |
| T_C | : Düşük sıcaklık |
| $\tilde{\mu}$ | : JT katsayısı |
| $\tilde{\alpha}$ | : Termal dalgalanma parametresi |
| S_R | : Renyi entropisi |
| T_R | : Renyi sıcaklığı |
| C_R | : Düşük sıcaklık |

| Kısaltmalar | Açıklama |
|-------------|----------|
|-------------|----------|

| | |
|----------------|-------------------------------------|
| AdS | : Anti-de Sitter |
| vdW | : van der Waals |
| RN-AdS | : Reissner-Nordstörn-Anti-de Sitter |
| dS | : de Sitter |
| JT | : Joule-Thomson |
| TR | : Tsallis-Renyi |
| KN-AdS | : Kerr-Newman-Anti-de Sitter |
| PD | : Prigogine-Defay |
| Kerr-dS | : Kerr-de Sitter |

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REISSNER-NORDSTRÖM-ADS KARADELİKLERİNİN GENİŞLETİLMİŞ FAZ UZAYINDAKİ TERMODİNAMİK ÖZELLİKLERİ

Özgür ÖKCÜ

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Ekrem AYDINER

Bu tezde, öncelikle Joule-Thomson (JT) etkisi Reissner-Nordström-AdS (RN-AdS) karadelikleri için çalışılmıştır. Reissner-Nordström-AdS karadelikleri için sadece alt inversiyon eğrisinin bulunduğu gösterilmiştir ve van der Waals sistemlerinden farklı olarak bu eğri belirli bir noktada sonlanmamaktadır. Soğuma ve ısınma bölgeleri gösterilmiştir. Ayrıca olay ufğunun olmadığı çıplak tekilliğin JT genişmesi için anlamlı olmadığı gösterilmiştir. İkinci olarak termal dalgalanma etkileri RN-AdS karadelikleri için çalışılmıştır. Bazı yeni termodinamik nicelikler elde edilmiştir ve hem analitik hem de nümerik olarak P-V kritiği termal dalgalanmaların varlığında incelenmiştir. Termal dalgalanmaların etkileri küçük karadelikler için kayda değerdir ve karadelikler belirli bir olay ufku değerinin altında var olmayabilirler. Kritik üsteller küçük termal dalgalanmalar için hesaplanmıştır. Son olarak, Tsallis-Renyi entropi modeli RN karadelikleri için düşünülmüştür ve bazı yeni termodinamik nicelikler elde edilmiştir. Faz geçişi AdS eğrilik yarıçapına benzeyen λ nedeniyle incelenmiştir.

Aralık 2016, 90 sayfa.

Anahtar kelimeler: Karadelik Termodinamiği, AdS Karadelikleri, Gravitasyon

SUMMARY

M.Sc. THESIS

THERMODYNAMIC PROPERTIES OF REISSNER-NORDSTRÖM-ADS BLACK HOLES IN THE EXTENDED PHASE SPACE

Özgür ÖKCÜ

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Physics

Supervisor : Prof. Dr. Ekrem AYDINER

In this thesis, firstly Joule-Thomson (JT) effects for Reissner-Norström-AdS (RN-AdS) black holes were studied. It was showed that there is only a lower inversion curve for RN-AdS black holes and this curve does not terminate any certain point, unlike van der Waals system. Cooling and heating regions were shown. It was also denoted naked singularity which is not sensible for JT expansion due to the lack of event horizon. Secondly, thermal fluctuations effects were studied for RN-AdS black holes. Some new thermodynamic quantites were obtained and both analytically and numerically P-V criticality was investigated in the presence of thermal fluctuations. Thermal fluctuations effects are remarkable for small black holes and black holes may not exist under a certain value of event horizon. Critical exponents were computed for small thermal fluctuations. Finally, Tsallis-Renyi entropy model was considered for RN black holes and some new thermodynamic quantities were obtained. Phase transition was investigated due to λ parameter which is simulating the AdS curvature radius.

December 2016, 90 pages.

Keywords: Black Hole Thermodynamics, AdS Black Holes, Gravitation

1. GİRİŞ

1970'li yıllarda karadelik termodinamiği alanında ardı ardına meydana gelen keşifler karadeliklere bakış açımızı büyük ölçüde değiştirmiştir. Özellikle kuantum gravitasyon teorisinin doğasını anlamamızı sağlayacak ilk ipuçlarını bize sağlamıştır. Karadelik termodinamiği; gravitasyon teorileri, parçacık fiziği, istatistiksel fizik gibi teoriler arasında temel bir takım ilişkiler oluşturulması açısından oldukça önemlidir.

Karadeliklerin de genel bir termodinamik sistem gibi bir sıcaklığa ve entropiye sahip olabileceğini gösteren ilk çalışmalar (Bekenstein, 1972; Bekenstein, 1973; Hawking, 1974; Hawking, 1975) 1970'li yılların başında yapılmıştır. Günümüze kadar karadelik termodinamiği konusunda çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar sayesinde karadeliklerle genel termodinamik sistemler arasındaki benzerliğin sadece sıcaklık ve entropi ile sınırlı olmadığı görülmüştür. Kısaca karadelik termodinamiği yasaları şöyle ifade edilebilir (Dolan, 2015):

- a) Olay ufku üzerinde yüzey gravitesi κ sabittir.
- b) J , Ω , Q ve Φ sırasıyla açısal momentum, açısal hız, yük ve elektrik potansiyeli olmak üzere karadelik termodinamiğinin birinci yasası aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$dU = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ \quad (1.1)$$

- c) Herhangi klasik bir süreç için olay ufkunun alanı asla azalmaz.
- d) Sonlu sayıda adımla $\kappa = 0$ durumuna ulaşmak mümkün değildir.

Karadeliklerin termodinamik bir sistem olarak düşünülmesiyle faz geçişi gibi karakteristik olayların meydana gelmesini beklemek doğaldır. Özellikle AdS uzayzamanındaki karadelikler için zengin faz geçişi yapıları tanımlamak mümkündür. AdS uzayzamanındaki karadeliklerle genel termodinamik sistemler benzer davranışlar sergilemektedirler. Bu karadeliklerin termodinamiği üzerine ilk çalışmayı Hawking ve Page (1983) yapmıştır ve Schwarzschild-AdS (yüksüz ve dönmeyen) karadelikleri ile termal AdS uzayı arasında bir faz geçişi bulmuşlardır. Reissner-Nordström-AdS (yükü

ve dönmeyen) karadelikleri için ilk defa van der Waals sıvı-gaz faz geçişine benzer faz geçişi Chamblin ve diğ. (1999a, 1999b) tarafından gösterilmiştir.

Son yıllarda kozmolojik sabitin bir termodinamik değişken olarak düşünülmesi, bu benzerlikleri fiziksel olarak daha anlamlı hale getirmiştir. Özellikle kozmolojik sabitin basınç $P = -\frac{\Lambda}{8\pi}$ ve eşlenik niceliğinin de termodinamik hacim ile ilişkilendirilmesi vdW sıvı-gaz faz geçişleri ile RN-AdS birinci mertebeden küçük-büyük karadelik faz geçişleri arasındaki benzerliği daha uyumlu bir hale getirmiştir (Kubiznak ve Mann, 2012). Aslında değişen kozmolojik sabit fikri yeni değildir (Henneaux ve Teitelboim, 1984; Henneaux ve Teitelboim, 1989; Teitelboim, 1985). Daha sonraki çalışmalarda (Caldarelli ve diğ., 2000; Kastor ve diğ., 2009; Rubio, 2007; Sekiwa, 2006; Shuang ve diğ., 2006) kozmolojik sabitin ve eşlenik niceliğinin karadelik termodinamiğinin birinci yasasında düşünülmesinin daha iyi sonuçlar vereceği önerilmiştir. Özellikle kozmolojik sabitin sıfırdan farklı olduğu karadelik çözümleri için Smarr ilişkisinde (Smarr, 1973) uyumluluk değişen kozmolojik sabit fikriyle sağlanmaktadır. Ayrıca kozmolojik sabit ve eşlenik niceliğinin sırasıyla basınç ve hacim ile ilişkilendirilmesi, karadelik termodinamiğinde kütleyle doğrudan entalpiyle eşitlememize imkan tanır (Kastor ve diğ., 2009).

Karadelik termodinamiğinin birinci yasasında basıncın ve hacmin yer alması genel termodinamik sistemlerde geçerli olan olayların karadeliklerde de araştırılması için zemin hazırlar. Örneğin; karadeliklerin sıkıştırılabilirliğini ve hatta ses hızını (Dolan, 2011a) ve özel ısı çevrimlerini (Johnson, 2014) düşünmek mümkündür.

Faz geçişi, kritik olaylar, karadeliklerin sıkıştırılabilirliği ve ısı çevrimi gibi olayların uygulanabilirliği genel termodinamik sistemlerde geçerli olan diğer olayların da karadeliklere uygulanıp uygulanmayacağını akla getirmektedir. Bu nedenle biz bu tez çalışması boyunca RN-AdS karadelikleri için Joule-Thomson etkisini, termal dalgalanmaların etkilerini ve düz uzayzamandaki RN karadelikleri için Tsallis-Renyi entropi modelinin etkilerini inceleyeceğiz. Özetle tezin organizasyonu şu şekildedir:

İkinci bölümde öncelikle değişen kozmolojik sabit fikri ile ortaya çıkan genişletilmiş faz uzayı kavramı ve kozmolojik sabit durumunda entalpinin kütle ile eşleştirilmesi tartışılacaktır. Kozmolojik sabitin basınçla ilişkilendirilmesine değinilecektir. Smarr ilişkisinin türetildiği Euler Teoremi ve ölçeklendirme yöntemi anlatılacaktır. Durgun ve

dönen karadeliklerin termodinamik ve geometrik hacimlerinden bahsedilecektir. Daha sonra RN-AdS karadeliklerindeki termodinamik olayları daha iyi anlayabilmek için vdW sistemlerinin özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenecektir. Özellikle faz geçişi ve kritik olaylar, kritik üsteller, Ehrenfest sınıflandırılması, ısı çevrimleri vdW sistemleri için tartışılacaktır. Ardından RN-AdS karadelikleri için de aynı tartışmalar yapılacaktır. Bölümün sonunda dönen AdS karadelikleri, dS karadelikleri başta olmak üzere diğer karadelik çözümleri için yapılan çalışmalardaki faz geçişi ve termodinamik olayların özelliklerine kısaca değinilecektir. Üçüncü bölümde ise öncelikle JT olayı anlatılacaktır. JT olayının vdW sistemleri için elde edilmesine yönelik matematiksel yapı verildikten sonra inversiyon eğrileri, maksimum ve minimum inversiyon sıcaklıkları ile izoentalpik eğrilerin elde edilmesi anlatılacaktır. Daha sonra karadelik entropisine termal dalgalanmalar nedeniyle gelen katkı incelenecektir (Das ve diğ., 2002). Termal dalgalanmanın elde edilmesine yönelik yöntemler ayrıntılı bir şekilde anlatılacaktır. Son olarak düz uzayzamandaki Schwarzschild karadelikleri için TR entropi modelinin etkileri incelenecektir. Düz uzayzamandaki Schwarzschild karadeliğinin termodinamik özellikleri gözden geçirilecektir. TR modelinde elde edilen sonuçlar anlatılacaktır. Dördüncü bölümde ise, öncelikle JT olayının RN-AdS karadelikleri için incelenmesi yapılacaktır. İncelenen eğrisi ve izoentalpik süreçler RN-AdS karadelikleri için incelenecektir. İzoentalpik süreçlerin tanımlı olmadığı çıplak tekillik durumlarından bahsedilecektir. Ardından termal dalgalanmadan gelen katkı diğer termodinamik niceliklerde de düşünülecektir. Büyük termal dalgalanma durumunda nümerik ve küçük termal dalgalanma durumunda analitik olarak faz geçişi RN-AdS karadelikleri için çalışılacaktır. Bu bölümde son olarak TR modelinin düz uzayzamandaki RN karadelikleri üzerindeki etkisi tartışılacaktır. Faz geçişleri hem Chamblin ve diğ. (1999a, 1999b) tarafından önerilen yöntemle hem de Kubiznak ve Mann (2012) tarafından önerilen yöntemle incelenecektir. Son bölümde ise yaptığımız hesaplar sonucu elde ettiğimiz bulgular tartışılarak çalışma sonlandırılacaktır. (Bu tezde $a = b = \phi = G = k_B = \hbar = c = 1$ alınmıştır.)

2. GENEL KISIMLAR

Kozmolojik sabit ve eşlenik niceliğinin dolayısıyla basınç ve hacim değişkenlerinin karadelik termodinamiğinin birinci yasasına eklenmesiyle genişletilmiş faz uzayı elde edilir. AdS uzayında negatif enerji yoğunluğu ε , P basıncıyla $\varepsilon + P = 0$ şeklinde ilişkilidir. Kozmolojik sabit Λ ise, ε enerji yoğunluğuyla $\Lambda = 8\pi\varepsilon$ şeklinde verilir. Bu iki ilişki kullanıldığında P ile Λ arasında $P = -\frac{\Lambda}{8\pi}$ elde edilir. Eğer karadelik bir V hacmine sahipse, içerdiği enerji $\varepsilon V = -PV$ olur. Dolayısıyla karadelikğin toplam enerjisi $U = M - PV$ şeklinde verilir. Bu ifade açık bir şekilde karadeliklerin kütlelerinin entalpiye eşit olması gerektiğini söylemektedir (Kastor ve diğ., 2009):

$$M = H = U + PV \quad (2.1)$$

PdV terimini de içerecek şekilde (1.1) denklemini tekrar yazalım:

$$dU = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ - PdV \quad (2.2)$$

(2.1) denklemini kullanarak Legendre dönüşümüyle

$$dM = dH = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ + VdP \quad (2.3)$$

birinci yasayı şeklinde verebiliriz. (2.3) denklemine karşı gelen Smarr ilişkisini Euler Teoremi (Kastor ve diğ., 2009) ile elde edebiliriz. Euler Teoremi bir $f(x, y)$ fonksiyonunun $f(\alpha^p x, \alpha^q y) = \alpha^r f(x, y)$ şeklinde bir ölçeklendirme ilişkisine uyması halinde, fonksiyonun ve türevlerinin aşağıdaki ilişkiyi sağlayacağını söyler:

$$rf(x, y) = p \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) x + q \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) y \quad (2.4)$$

Şimdi Smarr ilişkisini Kerr-Newman-AdS (yükü ve dönen) karadelikleri için belirleyelim. KN-AdS karadelikğinin kütlesi (Caldarelli ve diğ., 2000) aşağıdaki gibi verilir:

$$M(S, P, J, Q) = \sqrt{\frac{\left(S + \pi Q^2 + \frac{8PS^2}{3}\right) + 4\pi^2 \left(1 + \frac{8PS}{3}\right) J^2}{\pi S}} \quad (2.5)$$

Denklem (2.5) için $S \rightarrow \alpha^w S$, $P \rightarrow \alpha^x P$, $Q \rightarrow \alpha^y Q$, $J \rightarrow \alpha^z J$ ve $M \rightarrow \alpha^t M$ ölçeklendirmeleri ile Euler Teoremi kullanılırsa $w = 2$, $x = -2$, $y = 1$, $z = 2$ ve $t = 1$ bulunur. Bu durumda kütle fonksiyonu ile kısmi türevleri arasındaki ilişki şöyle ifade edilir:

$$M = 2 \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right) S - 2 \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right) P + \left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right) Q + 2 \left(\frac{\partial M}{\partial J}\right) J \quad (2.6)$$

Denklem (2.3)'den $\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right) = T$, $\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right) = V$, $\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right) = \Phi$ ve $\left(\frac{\partial M}{\partial J}\right) = \Omega$ olduğu belirlenir ve (2.6) denkleminde yerine yazılırsa karşı gelen Smarr ilişkimiz aşağıdaki gibi verilir:

$$M = 2(TS - VP + \Omega J) + \Phi Q \quad (2.7)$$

Karadelik çözümleri farklı parametreler içerebilirler. Bu durumda Smarr ilişkisinin sağlanması için değişen kozmolojik sabit fikri tek başına yeterli değildir. Örneğin; quintessence ile çevrili karadeliklerde (Li, 2014) normalizasyon faktörü ve eşlenik niceliği, Born-Infeld-AdS karadeliklerinde (Gunasekaran ve diğ., 2012) elektromanyetik alan şiddeti ve eşlenik niceliği, Gauss-Bonnet-AdS karadeliklerinde (Cai ve diğ., 2013) Gauss-Bonnet katsayısı ile eşlenik niceliği birinci yasa ve Smarr ilişkisi için düşünülmelidir.

Kozmolojik sabitin eşlenik niceliği de termodinamik hacim ile ilişkilendirilir. (2.3) denkleminde termodinamik hacim aşağıdaki gibi verilir:

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{Q, J, S} \quad (2.8)$$

Denklem (2.8) karadeliklerin hacminin termodinamik bir tanımlamasını vermektedir (Kastor ve diğ., 2009). Bu tanımlamanın geometrik hacimle bir ilgisi yoktur. Aslında karadeliklerin hacminin geometrik olarak nasıl tanımlanacağı çok açık değildir. Çünkü radyal r koordinatı ile t zaman koordinatı, olay ufkunun içerisinde karakter değiştirirler (Misner ve diğ., 1973). Yani r koordinatı zamansaldır. Bu durumda sabit t için alan üzerinden $r = 0$ 'dan $r = r_h$ 'ye kadar integral alıp hacmi belirlemek pek uygun değildir.

Karadelikler için hacmin nasıl tanımlanabileceğine dair çalışmalar literatürde mevcuttur (Ballik ve Lake, 2010; Ballik ve Lake, 2013; Hayward, 1998; Parikh, 2006).

Yukarıda bahsettiğimiz engele rağmen durgun ve dönen karadeliklerin geometrik hacimlerine değinmek önemlidir. Schwarzschild-AdS ve Kerr-AdS (dönen) karadeliklerini düşünelim. Schwarzschild-AdS karadelikleri için metrik ifademiz aşağıdaki gibi verilir:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.9)$$

Schwarzschild-AdS çözümü için metrik fonksiyonumuz $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}$ ile verilir.

Alan (Grøn ve Hervik, 2007; Misner ve diğ., 1973) aşağıdaki gibi verilir:

$$Alan = \int_0^\pi \sqrt{|g_{\theta\theta}|} d\theta \int_0^{2\pi} \sqrt{|g_{\varphi\varphi}|} d\varphi = r_h^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r_h^2 \quad (2.10)$$

Geometrik hacmi, alan üzerinden integre ederek hesaplırsak,

$$V_G = \int_0^{r_h} 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi r_h^3 \quad (2.11)$$

elde ederiz. AdS uzayzamanı için kozmolojik sabit $\Lambda = -\frac{3}{l^2}$ şeklinde seçilir. Burada l uzayzamanın eğrilik yarıçapıdır. Bu ifadeden basınç ile eğrilik yarıçap arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

$$P = \frac{3}{8\pi l^2} \quad (2.12)$$

Metrik fonksiyonundan $f(r_h) = 0$ için kütle için çözümü aşağıdaki gibi olur:

$$M = \frac{r_h}{6} (3 + 8\pi P r_h^2) \quad (2.13)$$

Denklem (2.13) kullanarak termodinamik hacmi hesaplırsak $V = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_S = \frac{4}{3}\pi r_h^3$ elde ederiz. Geometrik hacim ve termodinamik hacim iki durumda da aynı çıktı. Yukarıdaki tartışma yüklü ve durgun karadeliklerde de aynı sonucu verecektir. Şimdi Kerr-AdS karadeliklerini inceleyelim. Kerr-AdS karadelikleri için metrik ifademiz aşağıdaki gibi verilir:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} \left(dt - \frac{\check{\alpha}}{\Xi} \sin^2 \theta d\varphi \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Sigma} d\theta^2 + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(\check{\alpha} dt - \frac{(r^2 + \check{\alpha}^2)}{\Sigma} d\varphi \right)^2 \quad (2.14)$$

Metrik içerisindeki diğer fonksiyonlar ise aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$\Delta = (r^2 + \check{\alpha}^2) \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right) - 2mr \quad (2.15)$$

$$\Sigma = 1 - \frac{\check{\alpha}^2}{l^2} \cos^2 \theta \quad (2.16)$$

$$\Xi = 1 - \frac{\check{\alpha}^2}{l^2} \quad (2.17)$$

$$\rho^2 = r^2 + \check{\alpha}^2 \cos^2 \theta \quad (2.18)$$

$$M = \frac{m}{\Xi^2} \quad (2.19)$$

$$\check{\alpha} = \frac{J}{M} \quad (2.20)$$

Kerr-AdS karadelikleri için alan aşağıdaki gibi verilir:

$$Alan = \frac{r_h^2 + \check{\alpha}^2}{\Xi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \frac{r_h^2 + \check{\alpha}^2}{\Xi} \quad (2.21)$$

Yukarıdaki ifadeye göre Kerr-AdS karadelığının geometrik hacmi aşağıdaki gibi verilir:

$$V_G = \frac{4\pi r_h (r_h^2 + \check{\alpha}^2)}{3\Xi} \quad (2.22)$$

Denklem (2.5) $Q = 0$ için Kerr-AdS karadeliklerinin kütesini verir. Buna göre Kerr-AdS karadeliklerinin termodinamik hacmi şöyle verilir:

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S,J} = \frac{2}{3\pi M} \left[S \left(S + \frac{8PS^2}{3} \right) + 2\pi^2 J^2 \right] \quad (2.23)$$

Kerr-AdS karadelığının entropisi $S = \pi \frac{r_h^2 + \check{\alpha}^2}{\Xi}$ ve (2.20) eşitlikleri (2.22) denkleminde yerine konulursa geometrik hacim aşağıdaki şekliyle verilebilir:

$$V_G = \frac{4}{3} S \sqrt{\frac{S}{\pi} - \frac{J^2(3+8PS)}{3M^2}} \quad (2.24)$$

Dönen karadelikler için termodinamik hacim ve geometrik hacim birbirinden farklıdır. Kerr-Newman-AdS karadeliklerinde de benzer sonuçlar elde edilir. Biz çalışmamızda karadelik hacminin termodinamik tanımını kullanacağız.

2.1. VAN DER WAALS HAL DENKLEMİ

İdeal gaz yasasının genelleştirilmiş şekli olan vdW hal denklemi en çok bilinen ve kullanılan hal denklemdir (Berberan-Santos ve diğ., 2008; Goldenfeld, 1992; Holyst ve diğ., 2012; Johnston, 2014; Vent, 2001). Gerçek gazların davranışlarını yaklaşık olarak tanımlar. İdeal gaz yasasından farklı olarak moleküllerin büyüklüklerini ve aralarındaki etkileşimi dikkate alır. Genelde sıvı-gaz faz geçişlerinin temel özelliklerini tanımlamak için kullanılır. Hal denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = k_B T \quad (2.25)$$

$v = \frac{V}{N}$ olarak tanımlanır ve akışkanın spesifik hacmi olarak adlandırılır. $a > 0$ sabiti moleküllerin aralarındaki etkileşimin bir ölçüsüyken, $b > 0$ sabiti moleküllerin hacminin bir ölçüsüdür. a ve b sabitleri deneysel olarak saptanırlar.

vdW sistemlerinde başta faz geçişi ve kritik üsteller olmak üzere birçok olayı daha iyi anlamak için termodinamik potansiyellere, ısı kapasitelerine, hacim genişmesine ve izotermal sıkıştırılabilirliğe değinmek yerinde olacaktır. Sabit parçacık sayısı için, Helmholtz serbest enerjisi aşağıdaki bağıntının v üzerinden integrasyonu ile elde edilir:

$$dF = -Pdv - SdT \quad (2.26)$$

vdW sisteminin Helmholtz serbest enerjisi ile ideal gazınki karşılaştırılarak integrasyon sabiti belirlenir. Bu durumda Helmholtz serbest enerjisi

$$F(T, v) = -k_B T \left(1 + \ln \left[\frac{(v-b)T^{3/2}}{\phi}\right]\right) - \frac{a}{v} \quad (2.27)$$

ile verilir. Burada ϕ gazları karakterize etmek için kullanılan bir sabittir. Yukarıdaki ifade kullanılarak Gibbs serbest enerjisi elde edilir:

$$G(T, P) = F + Pv = -k_B T \left(1 + \ln \left[\frac{(v-b)T^{3/2}}{\phi} \right] \right) - \frac{a}{v} + Pv \quad (2.28)$$

(2.26) ve (2.27) numaralı denklemler kullanılarak entropi elde edilir:

$$S(T, v) = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_v = k_B \left(\frac{5}{2} + \ln \left[\frac{(v-b)T^{3/2}}{\phi} \right] \right) \quad (2.29)$$

Sabit hacimde ısı sığası aşağıdaki gibi verilir:

$$C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_v = \frac{3k_B}{2} \quad (2.30)$$

Sabit hacimdeki ve basınçtaki ısı sığaları arasındaki ilişki

$$C_p - C_v = -T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \quad (2.31)$$

ile verilir. Bu ilişki ve (2.30) denklemi ile sabit basınçtaki ısı sığası elde edilir:

$$C_p = \frac{3k_B}{2} + \frac{k_B}{1 - \frac{2a(b-v)^2}{k_B T v^3}} \quad (2.32)$$

İzotermal sıkıştırılabilirlik ve hacim genişmesi sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$k_T = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = \frac{v^2 (v-b)^2}{k_B T v^3 - 2a(b-v)^2} \quad (2.33)$$

$$\alpha_P = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = \frac{k_B v^2}{P v^3 - a v + 2ab} \quad (2.34)$$

2.1.1. Faz Geçışı ve Kritik Noktalar

vdW hal denklemi için kritik noktalar basıncın spesifik hacme göre birinci ve ikinci türevlerinden elde edilir:

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0 \quad (2.35)$$

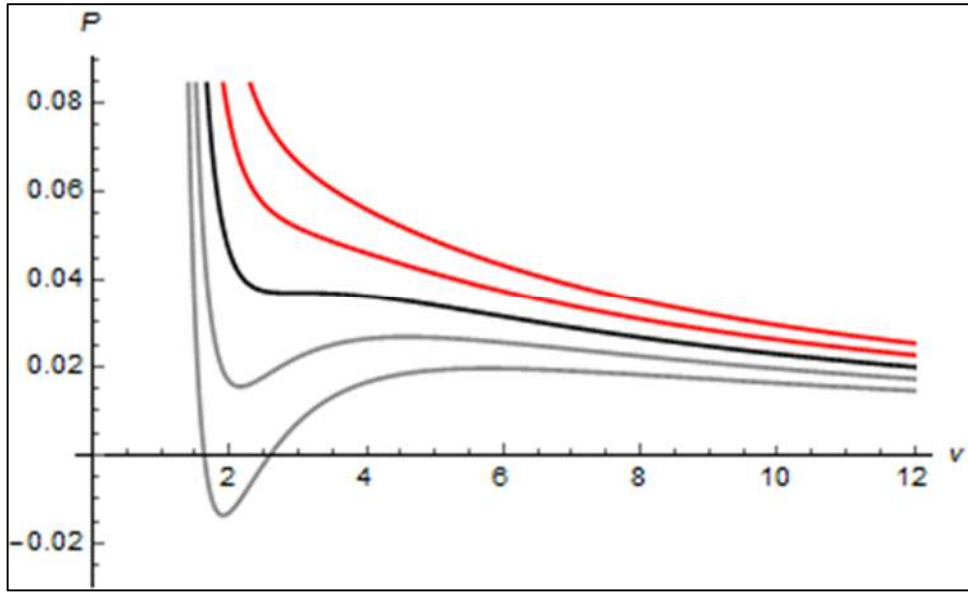
Denklem (2.35)'e göre basıncın spesifik hacme göre birinci ve ikinci türevleri

$$\frac{\partial P}{\partial v} = -\frac{k_B T}{(b-v)^2} + \frac{2a}{v^3} = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = -\frac{2k_B T}{(b-v)^3} - \frac{6a}{v^4} = 0 \quad (2.37)$$

ile verilir. Buradan elde edilen kritik noktalar aşağıdaki gibidir:

$$k_B T_c = \frac{8a}{27b}, \quad v_c = 3b, \quad P_c = \frac{a}{27b^2} \quad (2.38)$$

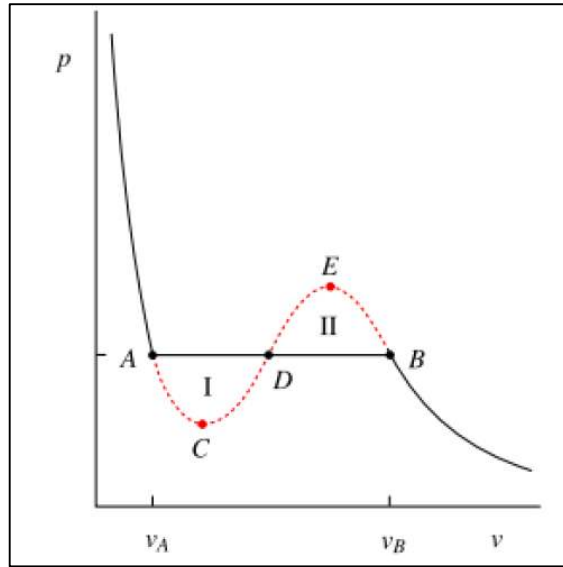


Şekil 2.1: İzotermal eğrilerin $P - v$ grafiği. Yukarıdan aşağıya sıcaklıklar sırasıyla $1.2T_c, 1.1T_c, T_c, 0.9T_c, 0.8T_c$ olarak alınmıştır.

(2.38)'deki ifadeleri kullanarak sıkıştırma faktörü için evrensel oranı hesaplayabiliriz.

Tüm akışkanlar için vdW teorisinin öngördüğü evrensel oran $Z_c = \frac{P_c v_c}{k_B T_c} = \frac{3}{8}$ olur. Bu değer a ve b sabitlerinden bağımsızdır. Deneysel verilere göre bu oran 0.25 ve 0.35 sayıları arasında değişmektedir (Greiner ve diğ, 1997). Şekil (2.1)'de $P - v$ düzlemindeki izotermal eğriler gösterilmektedir. $T > T_c$ sıcaklıkları için eğriler ideal gaz davranışı sergilerken, $T < T_c$ için eğriler sıvı-gaz faz geçişinin olduğu bölgede karakteristik bir davranış sergilemektedirler. Kritik sıcaklığın altındaki izotermal eğrilerin gösterdiği bu karakteristik davranış, sıvı-gaz faz geçişini ima etmektedir.

Şekil (2.1)'de kritik sıcaklığın altındaki izotermal eğrilerde eğiminin pozitif olduğu bölgeler ve negatif basınç görülmektedir. Bu fiziksel olmayan durumların üstesinden Maxwell eşit alan yasası ile gelinmektedir. Şekil (2.2)'de kritik sıcaklığın altında tek bir izotermal eğri gösterilmektedir. İzotermal eğrinin yerel minimum (C) ve yerel maksimum (E) noktaları arasında eğim pozitiftir. Bu durum izotermal sıkıştırılabilirliğin negatif olduğu anlamına gelmektedir. Yani sistem sıkıştırıldığında basıncının azalacağını ima etmektedir. Yani fiziksel bir sonuç değildir.



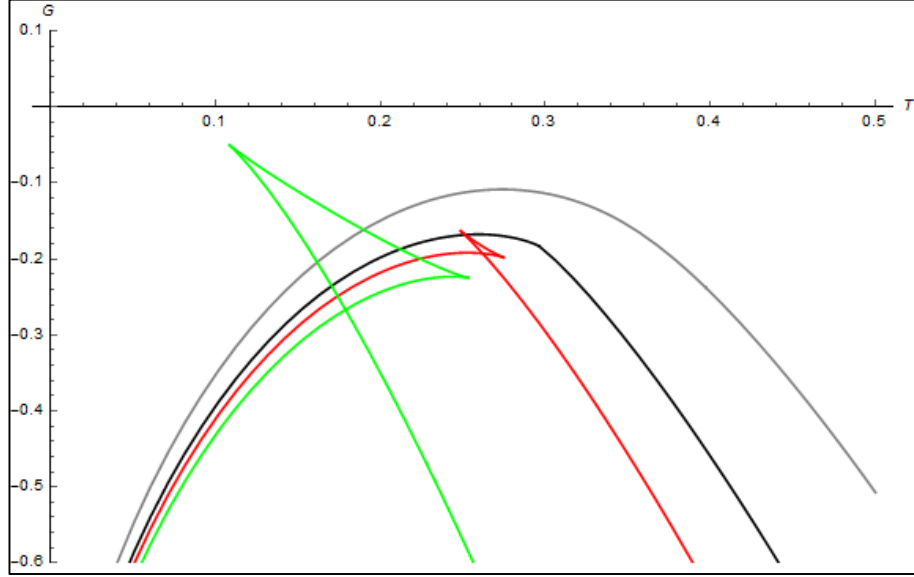
Şekil 2.2: Kritik sıcaklığın altındaki izotermal bir eğrinin şematik temsili.

Şekil (2.2)'de A noktasından B noktasına kadar eş sıcaklık eğrisi boyunca $d\mu = -SdT + v dP$ Gibbs-Duhem ilişkisini integre edersek ve sıvı-gaz fazlarının birlikte bulunma durumunda $\mu_A = \mu_B$ koşulunu düşünürsek

$$\mu_B - \mu_A = \int_A^B v dP = P_e(v_B - v_A) - \int_A^B P_e dv = 0 \quad (2.39)$$

Maxwell eşit alan yasasını elde ederiz. Denklem (2.39) bize aynı zamanda Şekil (2.2)'de I ve II numaralı alanların birbirlerine eşit olması gerektiğini söyler ve $v_A = v_s$, $v_B = v_g$ sırasıyla sıvı ve gaz fazlarının hacimlerine karşılık gelmektedir.

Gibbs serbest enerjisi de faz geçişleri hakkında bilgi verebilir. Şekil (2.3)'de Gibbs serbest enerjisinin sıcaklığa göre grafiği çizilmiştir. $P < P_c$ için karakteristik kelebek kanadı şekli görülmektedir. Bu davranış birinci mertebe sıvı-gaz faz geçişine karşılık gelmektedir.



Şekil 2.3: Gibbs serbest enerjisinin sıcaklığa göre değişimi.

Denge durumunda fazlar birlikte bulunurlar. Şekil (2.4) iki fazın birlikte bulunma eğrisini göstermektedir. Eğri, iki faz arasındaki sınırdır ve eğri üzerinde iki faz birlikte bulunur. Bu eğri birlikte bulunma eğrisi olarak adlandırılır. Eğrinin üzerindeki bölge sıvı fazına, altındaki bölge ise gaz fazına karşılık gelir. Birlikte bulunma eğrisi şekilde küçük yuvarlak ile gösterilen kritik noktada son bulur.

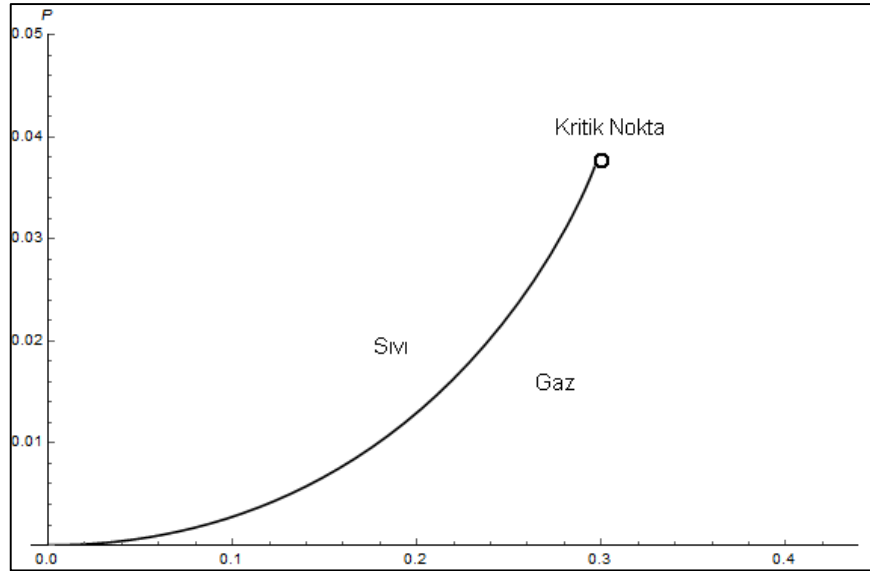
vdW hal denklemini indirgenmiş nicelikler cinsinden de elde edebiliriz. İndirgenmiş basınç, hacim ve sıcaklık

$$p = \frac{P}{P_c}, \quad \tau = \frac{T}{T_c}, \quad v = \frac{v}{v_c} \quad (2.40)$$

şeklinde verilir. İndirgenmiş vdW denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$8\tau = (3v - 1) \left(p + \frac{3}{v^2} \right) \quad (2.41)$$

Bu şekilde daha genel bir ifade elde edilir ve diğer parametrelere gerek duyulmaz.



Şekil 2.4: Sıvı-gaz fazının birlikte bulunma eğrisi.

2.1.1.1. Ehrenfest Denklemleri

Klasik termodinamikte faz geçişleri birinci mertbe ya da ikinci mertbe olarak sınıflandırılır. Birinci mertbeden faz geçişleri Clausius-Clapeyron denklemince sağlanırken, ikinci mertbeden faz geçişleri Ehrenfest denklemince sağlanır. Yukarıda da bahsettiğimiz gibi vdW sistemlerinde kritik nokta bulunmaktadır. Kritik noktanın varlığı genelde ikinci mertbeden faz geçişleri olduğunu ima etmektedir. İkinci mertbeden faz geçişlerinde Ehrenfest denklemleri sağlanmalıdır. Ehrenfest denklemleri (Mo ve Liu, 2013) aşağıdaki gibi verilir:

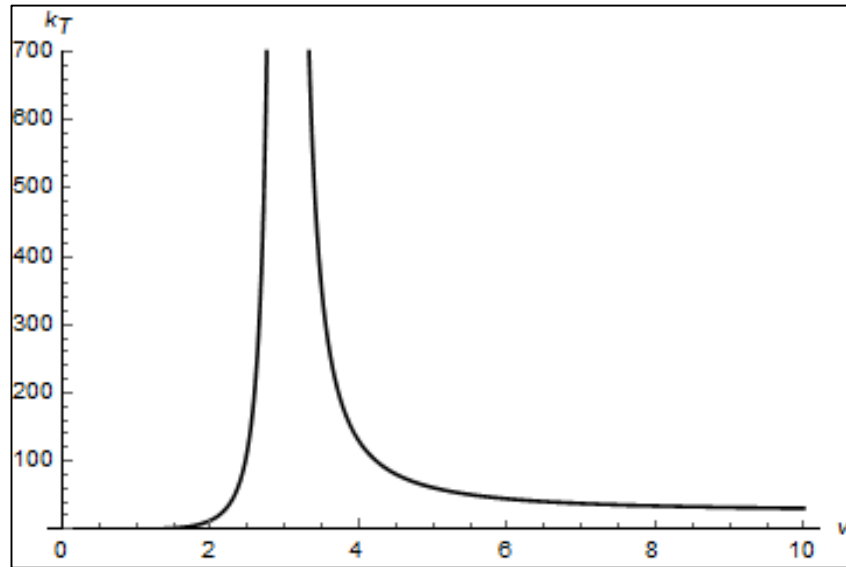
$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_S = \frac{C_{P_2} - C_{P_1}}{vT(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\Delta C_P}{vT\Delta\alpha} \quad (2.42)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{k_{T_2} - k_{T_1}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta k_T} \quad (2.43)$$

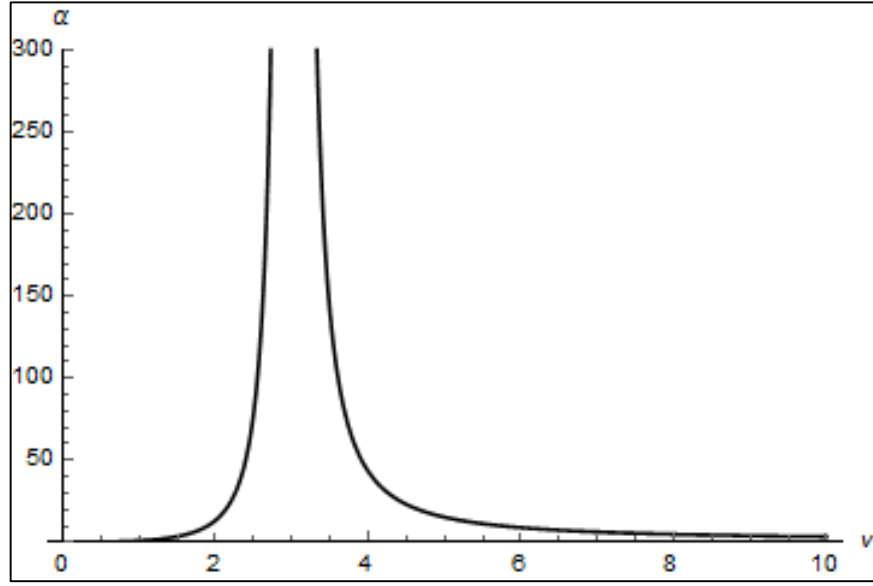
Bu denklemlerin sol ve sağ tarafları ayrı ayrı hesaplanır ve kritik noktada denklemlerin sağlanıp sağlanmadığına bakılır. Denklem (2.42)'nin sol ve sağ tarafı sabitlerin 1 alınması durumunda hesaplanırsa $\frac{1}{2}$ bulunur. Denklem (2.43)'ün sol ve sağ tarafı da aynı şekilde $\frac{1}{2}$ bulunur. Ehrenfest denklemleri kritik noktalarda sağlanmaktadır. İkinci Ehrenfest denklemleri kritik noktalarda her zaman sağlanmayabilir. Bu nedenle ikinci mertebeden bir faz geçişinden sapma söz konusu olabilir. Bu durumda PD oranı (Prigogine ve Defay, 1954) bu sapmayı belirlemek için kullanılabilir. PD oranı

$$\Pi = \frac{\Delta C_P \Delta k_T}{T v (\Delta \alpha)^2} \quad (2.44)$$

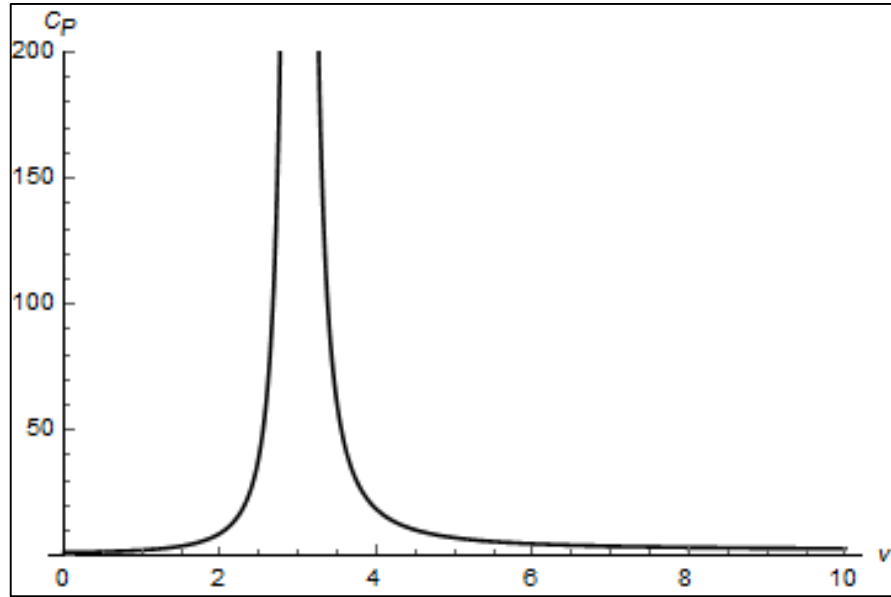
ile verilir ve vdW durumunda bir sapma olmadığından sonucu 1 bulunur. Ayrıca ikinci mertebeden faz geçişlerinde izotermal sıkıştırılabilirlik, hacim genişmesi ve sabit basınçtaki ısı sığası iraksar. Şekil (2.5), şekil (2.6) ve şekil (2.7) ise sırasıyla izotermal sıkıştırılabilirlik, hacim genişmesi ve sabit basınçtaki ısı sığasının spesifik hacme göre değişimini göstermektedir. Her üç grafik kritik spesifik hacim noktasında iraksamaktadırlar.



Şekil 2.5: İzotermal sıkıştırılabilirliğin hacme göre değişimi. $P = P_c$ alınmıştır.



Şekil 2.6: Genleşmenin hacme göre değişimi. $P = P_c$ alınmıştır.



Şekil 2.7: Sabit basınçtaki ısı sığasının hacme göre değişimi. $P = P_c$ alınmıştır.

2.1.1.2. Kritik Üsteller

Fiziksel niceliklerin kritik nokta civarındaki davranışlarını tanımlamak için kullanılırlar. Bunların evrensel olduğu düşünülür. Yani benzer faz geçişi gösteren sistemler için

aynıdırlar. Sistemin etkileşim menzili hariç diğer niceliklerinden bağımsızdırlar. Kritik üsteller şunlardır:

- Sabit hacimdeki ısı sığasıyla ilişkili olan α' üsteli aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_v \propto |t|^{-\alpha'} \quad (2.45)$$

- $\eta^0 = v_g - v_s$ şeklinde tanımlanan mertebe parametresi ile ilişkili olan β üsteli aşağıdaki gibi verilir:

$$\eta^0 = v_g - v_s \propto |t|^\beta \quad (2.46)$$

- İzotermal sıkıştırılabilirlikle ilişkili olan γ üsteli aşağıdaki gibi verilir:

$$k_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \propto |t|^{-\gamma} \quad (2.47)$$

- Kritik eş sıcaklık üzerindeki davranışı tanımlayan δ üsteli şöyle tanımlanır:

$$|P - P_c| \propto |v - v_c|^\delta \quad (2.48)$$

Kritik üstelleri incelemek için denklem (2.41)'i ve aşağıdaki tanımlamayı kullanacağız:

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} = \tau - 1, \quad \sigma = \frac{v - v_c}{v_c} = \nu - 1 \quad (2.49)$$

Denklem (2.30)'dan sabit hacimdeki ısı sığasının t 'den bağımsız olduğu görülür. Yani $\alpha' = 0$ bulunur.

(2.49)'daki tanımlamaları (2.41)'e atarsak hal denklemimiz

$$p = \frac{8(t+1)}{3\sigma+2} - \frac{3}{(\sigma+1)^2} \quad (2.50)$$

ile verilir. Yukarıdaki denklemi kritik noktalar civarında seriye açarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$p = 1 + 4t - 6t\sigma - \frac{3}{2}\sigma^3 + O(t\sigma^2, \sigma^4) \quad (2.51)$$

Yukarıdaki ifadenin sabit $t < 0$ için diferansiyeli alınır ve denklem (2.40) yerine atanırsa

$$dP = -P_c \left(6t + \frac{9}{2} \sigma^2 \right) d\sigma \quad (2.52)$$

$\sigma_g = \frac{v_g - v_c}{v_c}$ ve $\sigma_s = \frac{v_s - v_c}{v_c}$ olduğunu göz önünde bulundursak ve faz geçişi sırasında basınç sabit kaldığından

$$p = 1 + 4t - 6t\sigma_s - \frac{3}{2}\sigma_s^3 = 1 + 4t - 6t\sigma_g - \frac{3}{2}\sigma_g^3 \quad (2.53)$$

yazılabilir. Maxwell alan yasası denklem (2.52)'yi kullanırsak

$$0 = \int_{\sigma_s}^{\sigma_g} \sigma \left(6t + \frac{9}{2} \sigma^2 \right) d\sigma \quad (2.54)$$

şeklinde yazılabilir. (2.53) ve (2.54) birlikte çözümlerse $\sigma_g = -\sigma_s = 2\sqrt{-t}$ bulunur. Bu durumda mertebe parametresi η^0

$$\eta^0 = v_g - v_s = v_c(\sigma_g - \sigma_s) = 2v_c\sigma_g = 4v_c\sqrt{-t} \quad (2.55)$$

şeklinde bulunur. Yani $\beta = \frac{1}{2}$ bulunur.

İzotermal sıkıştırılabilirlik

$$k_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{6P_c t} + O(\sigma) \quad (2.56)$$

olarak elde edilir. Yani $\gamma = 1$ bulunur.

Son olarak (2.51) denkleminde $t = 0$ için

$$p - 1 = -\frac{3}{2}\sigma^3 \quad (2.57)$$

elde edilir. Buradan $\delta = 3$ olduğu anlaşılır.

vdW hal denklemi için $\alpha' = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ ve $\delta = 3$ bulunur.

2.1.2. Carnot Çevrimi

İlk defa Carnot tarafından ideal gazlar için 1824 yılında önerilmiştir. Şekil (2.8)'den de görülebileceği gibi bir Carnot çevrimi iki izotermal ve iki adyabatik eğriden meydana gelmiştir. Carnot çevrimlerini gerçek çevrimlerin limiti olarak düşünmek mümkündür.

Yani gerçek bir çevrimin sahip olabileceği maksimum verimlilik Carnot verimliliğidir. Isı çevrimleri için verimlilik aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\eta = \frac{W}{q_H} = \frac{q_H - q_C}{q_H} \quad (2.58)$$

Şekil (2.8)'de çevrimin aşamaları gösterilmektedir. 1-2 yolu arasında sistem ısı almaktadır ve izotermal genişleme söz konusudur. 2-3 arası genişleme adyabatiktir, 3-4 arası noktalarda 1-2 arası gerçekleşen sürecin tersi meydana gelir. Yani sistem ısı vermektedir ve izotermal sıkıştırma gerçekleşmektedir. 4-1 arası adyabatik sıkıştırma gerçekleşmektedir. Aşağıdaki termodinamik ilişki verimi hesaplamak için kullanılabilir (Agrawalt ve Menon, 1990):

$$dU = C_v dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - P \right] dv \quad (2.59)$$

Denklem (2.25) ve denklem (2.59) kullanılarak dq ısı değişimi aşağıdaki gibi elde edilir:

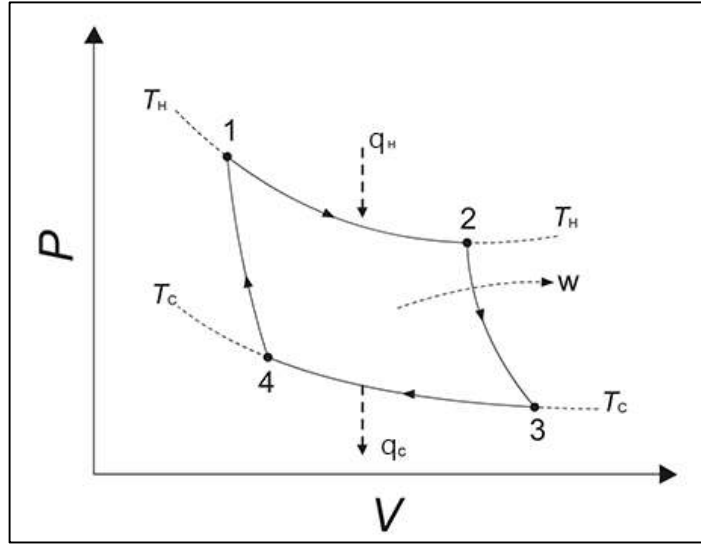
$$dq = dU + P dv = C_v dT + \frac{k_B T dv}{v-b} \quad (2.60)$$

1-2 noktaları arasındaki eğri boyunca $T = T_H$ sıcaklığındaki izotermal genişleme boyunca sistemin aldığı ısı miktarı

$$q_H = \int_1^2 dQ = k_B T_H \ln \left[\frac{v_2 - b}{v_1 - b} \right] \quad (2.61)$$

ile verilir. 2-3 arasında adyabatik bir genişleme gerçekleşir. Bu durumda ısı değişimi gerçekleşmez:

$$\int_2^3 \frac{C_v}{T} dT + k_B \ln \left[\frac{v_3 - b}{v_2 - b} \right] = 0 \quad (2.62)$$



Şekil 2.8: Carnot Çevrimi.

3-4 noktaları arasında $T = T_C$ sıcaklığındaki izotermal sıkıştırma boyunca sistemin verdiği ısı miktarı

$$q_C = \int_3^4 dQ = k_B T_C \ln \left[\frac{v_4 - b}{v_3 - b} \right] \quad (2.63)$$

ile verilir. Son olarak 4-1 noktaları arasında adyabatik bir sıkıştırma gerçekleşir ve 2-3 durumunda olduğu gibi ısı değişimi gerçekleşmez:

$$\int_4^1 \frac{C_v}{T} dT + k_B \ln \left[\frac{v_1 - b}{v_4 - b} \right] = 0 \quad (2.64)$$

$T_1 = T_2 = T_H$ ve $T_3 = T_4 = T_C$ olduğunu göz önünde bulundurarak denklem (2.62) ve denklem (2.64) toplanırsa

$$\ln \left[\frac{v_3 - b}{v_2 - b} \right] = - \ln \left[\frac{v_1 - b}{v_4 - b} \right] \quad (2.65)$$

elde edilir. Verimlilik

$$\eta = \frac{(q_H + q_C)}{q_H} = 1 + \frac{T_C \ln \left[\frac{v_4 - b}{v_3 - b} \right]}{T_H \ln \left[\frac{v_2 - b}{v_1 - b} \right]} \quad (2.66)$$

ile verilir. Denklem (2.65) kullanılırsa verimlilik aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\eta = 1 - \frac{T_c}{T_H} \quad (2.67)$$

Bu bir çevrimin sahip olabileceği en büyük verimdir.

2.2. REISSNER-NORDSTRÖM-ADS KARADELİKLERİ

RN-AdS karadelikleri için metrik aşağıdaki gibi verilir:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.68)$$

Metrik fonksiyonu $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}$ şeklinde tanımlanır ve $f(r_h) = 0$ için en büyük kök olay ufkunu tanımlar. Bu durumda RN-AdS karadelığının kütlesi

$$M = \frac{r_h}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{r_h^2} + \frac{r_h^2}{l^2} \right) \quad (2.69)$$

ile verilir. RN-AdS karadelikleri için genişletilmiş faz uzayında termodinamiğin birinci yasası

$$dM = TdS + \phi dQ + VdP \quad (2.70)$$

şeklinde verilir. Bu yasaya karşı gelen Smarr ilişkisi aşağıdaki gibi verilir:

$$M = 2(TS - VP) + \phi Q \quad (2.71)$$

Entropi $S = \frac{A_{\text{lan}}}{4} = \pi r_h^2$ şeklinde tanımlıdır ve genel termodinamik sistemlerden farklı olarak hacim yerine alan ile orantılıdır. Denklem (2.70) kullanılarak diğer termodinamik nicelikleri elde edebiliriz. Sıcaklık

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{P,Q} = \left(\frac{\partial M}{\partial r_h} \right)_{P,Q} \left(\frac{\partial r_h}{\partial S} \right)_{P,Q} = \frac{1}{4\pi r_h} \left(1 + \frac{3r_h^2}{l^2} - \frac{Q^2}{r_h^2} \right) \quad (2.72)$$

ile verilir. Benzer şekilde denklem (2.70)'deki termodinamik yasadaki elektrik potansiyeli elde edilir:

$$\phi = \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right)_{S,P} = \frac{Q}{r_h} \quad (2.73)$$

Basınç denklem (2.12) ile tanımlıdır. Buna göre termodinamik hacim $V = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{S,Q} = \frac{4}{3}\pi r_h^3$ şeklinde elde edilir. Bölüm (2.1)'de de bahsedildiği gibi kozmolojik sabitin ve eşlenik niceliğinin termodinamik bir değişken gibi düşünülüp sırasıyla basınç ve hacimle ilişkilendirilmeleriyle entalpinin ve kütlenin eşdeğer olduğu görülür. Buna göre Gibbs ve Helmholtz serbest enerjilerini kütle ile ilişkili yazmak mümkündür. Gibbs serbest enerjisi

$$G = U - TS + PV \quad (2.74)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (2.1) yukarıdaki ifadeye atanırsa, Gibbs serbest enerjisi

$$G = M - TS = \frac{1}{4}(r_h - \frac{8\pi}{3}Pr_h^3 + \frac{3Q^2}{r_h}) \quad (2.75)$$

şeklinde verilir. Benzer şekilde Helmholtz serbest enerjisi (2.12), (2.72) ve (2.75) denklemleri kullanılarak

$$F = G - PV = M - TS - PV = \frac{1}{2}\left(r_h + \frac{Q^2}{r_h} - 2\pi Tr_h^2\right) \quad (2.76)$$

şeklinde ifade edilir. Sabit hacimdeki ve basınçtaki ısı sığaları

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,Q} = 0 \quad (2.77)$$

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,Q} = 2\pi r_h^2 \frac{3r_h^4 - l^2 Q^2 + l^2 r_h^2}{3r_h^4 + 3l^2 Q^2 - l^2 r_h^2} \quad (2.78)$$

şeklinde verilir. Sabit hacimdeki ısı sığasının sıfır çıkmasının nedeni entropi ile hacmin birbirinden bağımsız olmamasıdır. İzotermal sıkıştırılabilirlik ve hacim genişmesi sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{12\pi r_h^4}{2Q^2 + r_h^2(2\pi Tr_h - 1)} \quad (2.79)$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{12\pi r_h^3}{3Q^2 + r_h^2(8\pi Pr_h^2 - 1)} \quad (2.80)$$

2.2.1. Faz Geçişi ve Kritik Noktalar

(2.12) ve (2.72) denklemlerinden $P(r_h, T)$ hal denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P = \frac{T}{2r_h} - \frac{1}{8\pi r_h^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_h^4} \quad (2.81)$$

(2.25) ifadesindeki vdW denklemini hacmin büyük değerleri için seriye açarsak (Cai ve diğ., 2013)

$$P = \frac{k_B T}{v-b} - \frac{a}{v^2} \approx \frac{k_B T}{v} + \frac{bk_B T}{v^2} - \frac{a}{v^2} + O(v^{-3}) \quad (2.82)$$

elde edilir. (2.81) ve (2.82) karşılaştırılırsa spesifik hacim ve olay ufku arasındaki ilişki

$$v = 2r_h \quad (2.83)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre hal denkleminizi aşağıdaki gibi verebiliriz:

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4} \quad (2.84)$$

Kritik noktalar (2.35) denkleminde elde edilir:

$$\frac{\partial P}{\partial v} = -\frac{T}{v^2} + \frac{1}{\pi v^3} - \frac{8Q^2}{\pi v^5} = 0 \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = \frac{2T}{v^3} - \frac{3}{\pi v^4} + \frac{40Q^2}{\pi v^6} = 0 \quad (2.86)$$

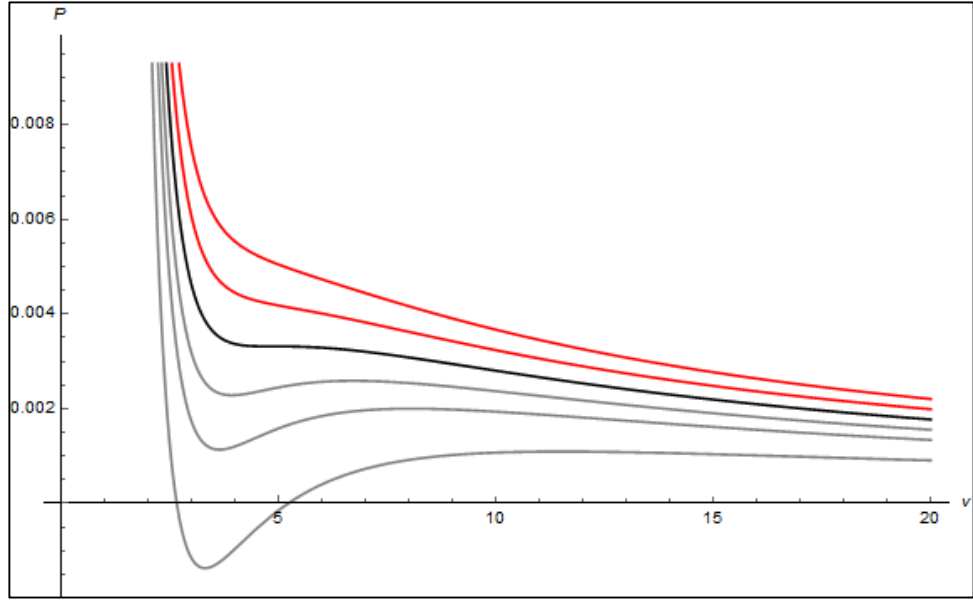
Buradan elde edilen kritik noktalar

$$T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q}, \quad v_c = 2\sqrt{6}Q, \quad P_c = \frac{1}{96\pi Q^2} \quad (2.87)$$

şeklinde verilir. Kritik termodinamik hacim

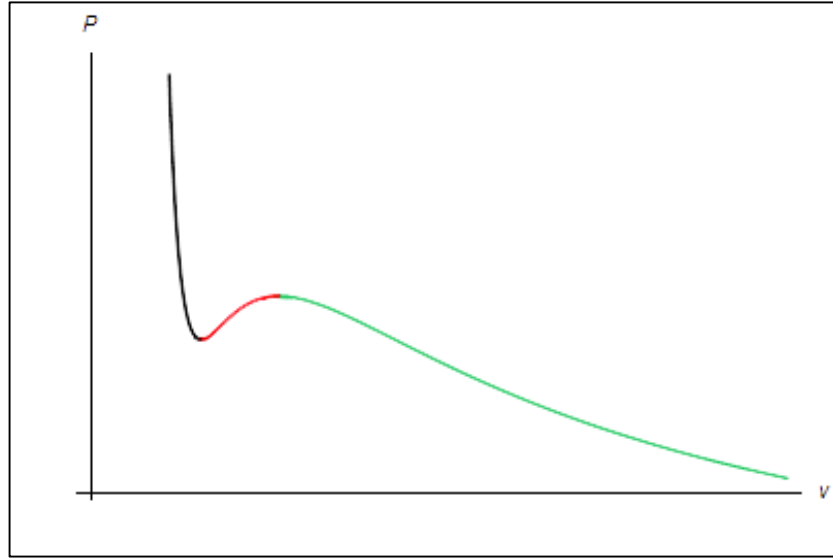
$$V_c = \frac{3}{4}\pi r_c^3 = 8\sqrt{6}\pi Q^3 \quad (2.88)$$

ile verilir.



Şekil 2.9: İzotermal eğrilerin $P - v$ grafiği. Yukarıdan aşağı sıcaklıklar sırasıyla $1.2T_c, 1.1T_c, T_c, 0.9T_c, 0.8T_c, 0.6T_c$ olarak alınmıştır. $Q = 1$ seçilmiştir.

Şekil (2.9)'dan görülebileceği gibi kritik sıcaklığın (siyah eğri) altındaki eğriler (gri eğriler) vdW akışkanları için elde edilen eğrilerle benzerlik göstermektedir. Benzer şekilde kritik sıcaklığın üzerindeki eğriler (kırmızı eğriler) ideal gaz davranışı göstermektedir. Denklem (2.87)'deki kritik nicelikler kullanılırsa RN-AdS karadelikleri için evrensel değer $\frac{P_c v_c}{T_c} = \frac{3}{8}$ şeklinde elde edilir ve vdW akışkanları için elde edilen değerle aynıdır. vdW durumunda evrensel değer a ve b sabitlerinden bağımsızken, RN-AdS karadelikleri için yükten bağımsızdır. Evrensel değer sistemin boyutuna bağlı olarak değişebilir. Örneğin d boyutlu RN-AdS karadelikleri (Gunasekaran ve diğ., 2012) için $\frac{P_c v_c}{T_c} = \frac{2d-5}{4d-8}$ şeklinde verilebilir ve $d=4$ için $3/8$ değerini elde ederiz. Born-Infeld-AdS (Gunasekaran ve diğ., 2012), skalar saçlı BTZ (Belhaj ve diğ., 2015a) ve KN-AdS (Belhaj ve diğ., 2013) karadelik çözümlerinde evrensel değerde farklı parametreler olabilir. Bu karadelik çözümleri için RN-AdS karadeliklerinde elde edilen evrensel değeri yaklaşık olarak elde etmek mümkündür.

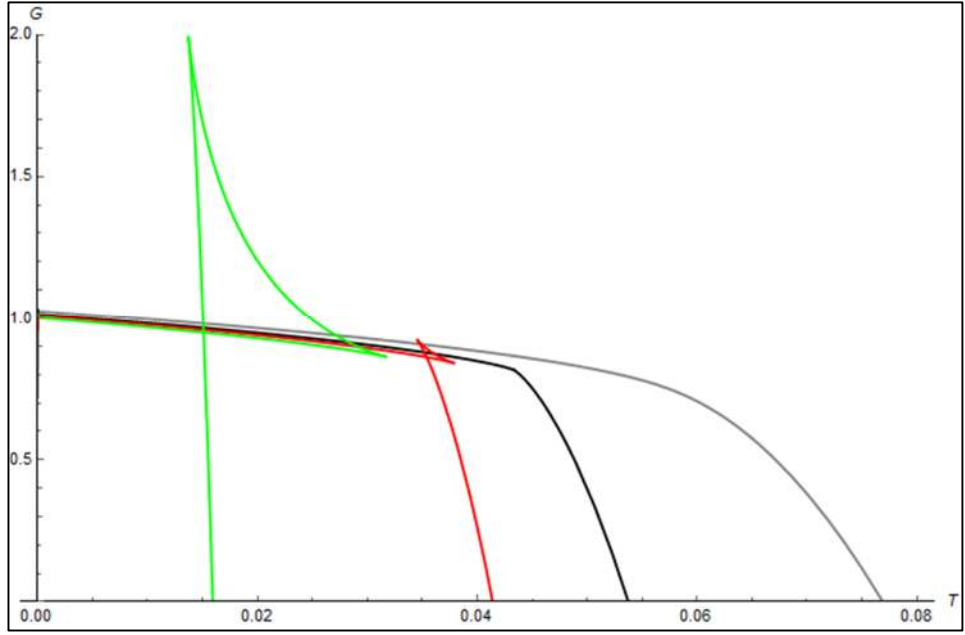


Şekil 2.10: Kritik sıcaklığın altındaki izotermal bir eğrinin RN-AdS karadeligi için şematik temsili.

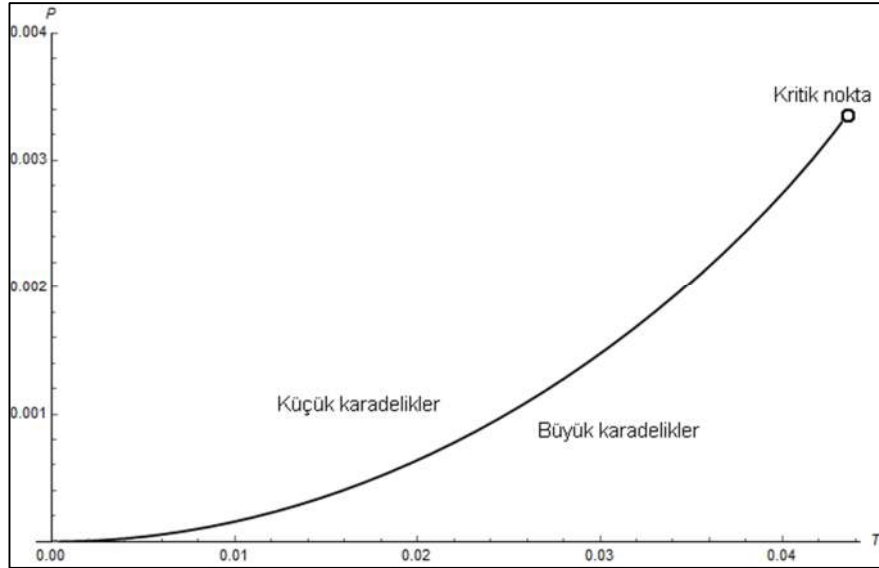
Şekil (2.10)'da kritik sıcaklığın altındaki izotermal eğri üç kola ayrılmıştır. Yüksek basınç durumunda yani siyah kolda sadece küçük kütleli karadelikler, düşük basınç durumunda yani yeşil kolda büyük kütleli karadelikler bulunur. Ortalama basınç durumunda yani kırmızı kolda küçük ve büyük karadelikler birlikte bulunur. vdW akışkanlarına benzer şekilde kırmızı kol termodinamik olarak kararlı değildir ve burada birinci mertebeden küçük-büyük karadelik faz geçişi meydana gelir.

RN-AdS karadeliklerinin $G - T$ grafikleri vdW akışkanlarıyla benzerlik gösterirler. Şekil (2.11)'de Gibbs serbest enerjisinin sıcaklığa göre grafiği çizilmiştir. vdW akışkanlarında olduğu gibi $P < P_c$ durumunda (kırmızı ve yeşil eğriler) karakteristik kelebek kanadı görülmektedir ve bu birinci mertebeden küçük-büyük karadelik faz geçişine karşılık gelmektedir.

$P - T$ düzlemindeki birlikte bulunma eğrisi de vdW akışkanlarıyla benzerlik gösterir. Eğri, şekil (2.12)'de gösterildiği gibi kritik noktada sonlanır. Yani faz geçişi kritik noktada ikinci mertebeden olur. Eğrinin üzerinde küçük kütleli karadelikler ve altında büyük kütleli karadelikler bulunur.



Şekil 2.11: Gibbs serbest enerjisinin sıcaklığa göre değişimi. $Q = 1$ alınmıştır.



Şekil 2.12: RN-AdS karadeliklerinin birlikte bulunma eğrisi. $Q = 1$ alınmıştır.

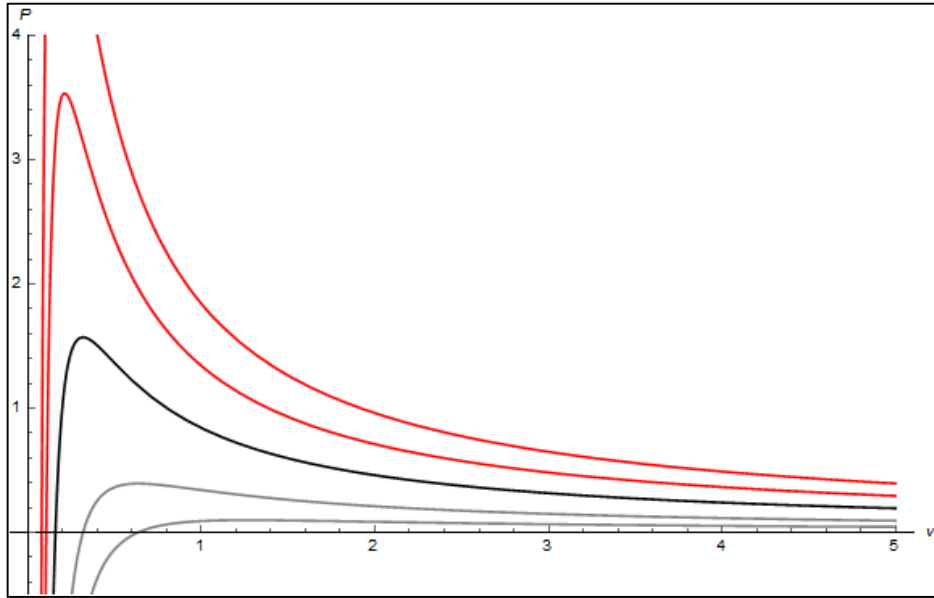
RN-AdS hal denklemini indirgenmiş şekilde verebiliriz. (2.40)'da bulunan ifadeler kullanılırsa

$$8\tau = 3v \left(p + \frac{2}{v^2} \right) - \frac{1}{v^3} \quad (2.89)$$

elde edilir. $Q = 0$ durumunda (2.84) ifadesindeki denklemden Schwarzschild-AdS karadelikleri için hal denklemi elde edilir:

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} \quad (2.90)$$

Şekil (2.13)'de hal denkleminin $P - v$ düzlemindeki grafiği çizilmiştir. Her bir izotermal eğri için $v = \frac{1}{\pi T}$ noktasına karşı gelen bir maksimum vardır. Her bir maksimumunun solundaki eğri küçük kütleli karadeliklere karşılık gelir. Maksimumların sağındaki eğriler ise büyük karadeliklere karşılık gelir. Küçük karadeliklerin bulunduğu eğri termodinamik olarak kararlı değildir. Bu bölgede sabit basınçtaki ısı sığası negatiftir. Denklem (2.90)'dan kritik noktalar elde edilmez ve şekil (2.13)'den açıkça $P - v$ düzleminde faz geçişi meydana gelmediği görülmektedir.



Şekil 2.13: Schwarzschild-AdS karadelikleri için $P - v$ grafiği. Sıcaklıklar yukarıdan aşağıya 2, 3/2, 1, 1/2, 1/4 olarak alınmıştır.

2.2.1.1. Ehrenfest Denklemleri

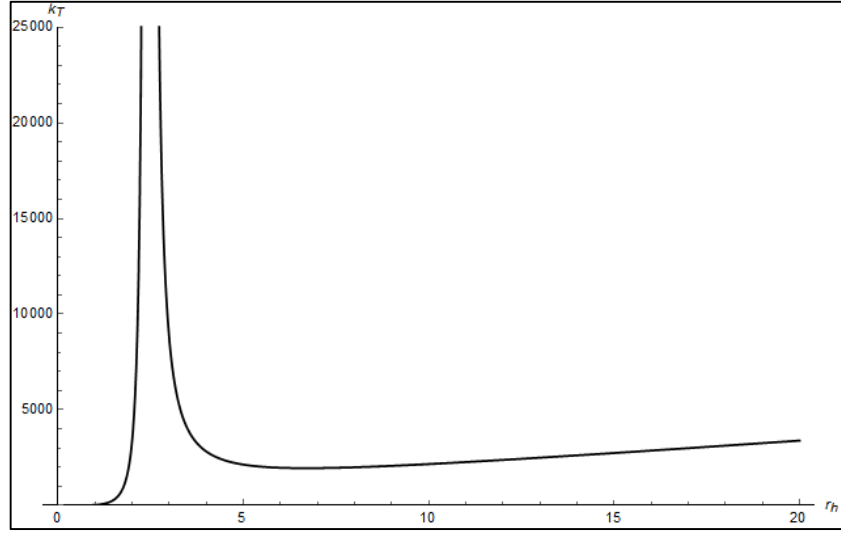
Önceki bölümlerde bahsettiğimiz gibi hem kozmolojik sabitin hem de eşlenik niceliğinin basınç ve termodinamik hacim ile ilişkilendirilmesi AdS karadeliklerinde vdW akışkanlarındakine benzer faz geçişini göstermektedir. PV teriminin karadelik termodinamiğinin birinci yasasında bulunması ile Ehrenfest şeması ve kritik üstellerin karadelikler için araştırılması gayet doğaldır. Ads uzayzamanındaki karadelikler için PV terimini içermeyen faz geçişlerinin mertebesini incelemek için yapılan ilk çalışmalarda (Banerjee ve diğ., 2010; Banerjee ve diğ., 2011a; Banerjee ve diğ., 2011b; Banerjee ve Roychowdhury, 2011; Banerjee ve diğ., 2012; Lala ve Roychowdhury, 2012) Ehrenfest denklemlerine benzer denklemler kullanılmıştır. Bu çalışmalarda genelde karadelik parametreleri ile P ve V termodinamik nicelikleri arasında benzerlikler oluşturulmuştur. Örneğin RN-AdS karadelikleri için $V \leftrightarrow Q$, $P \leftrightarrow -\phi$ benzerliği düşünülürken, Kerr-AdS karadelikleri için $V \leftrightarrow J$, $P \leftrightarrow \Omega$ benzerliği düşünülmüştür. RN-AdS karadelikleri için Ehrenfest denklemlerini yani P ve V niceliklerini kullanarak kritik nokta civarında faz geçişini ilk olarak Mo ve Liu (2013) incelemiştir.

RN-AdS karadelikleri için kritik noktaların bulunması ikinci dereceden faz geçişi olduğunu göstermektedir. vdW akışkanlarında olduğu gibi ikinci derece faz geçişleri için Ehrenfest denklemleri benzer sonuçları verir. Şimdi ikinci derece faz geçişini Ehrenfest denklemleriyle inceleyelim. Birinci ve ikinci Ehrenfest denklemlerini tekrar yazalım:

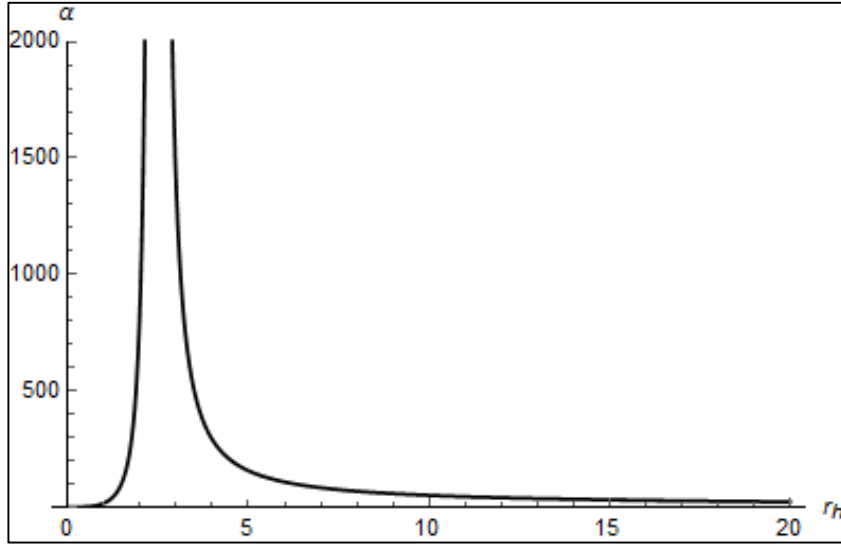
$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S = \frac{C_{P_2} - C_{P_1}}{VT(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\Delta C_P}{VT\Delta\alpha} \quad (2.91)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{k_{T_2} - k_{T_1}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta k_T} \quad (2.92)$$

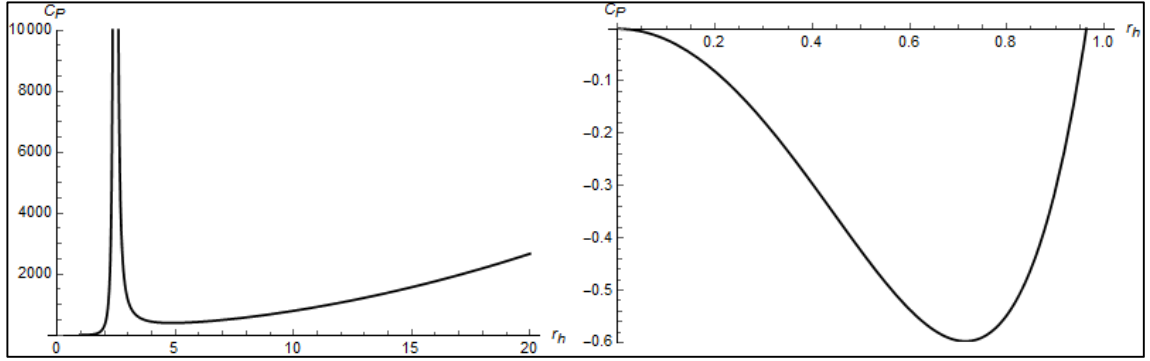
Birinci Ehrenfest denkleminin sol ve sağ tarafı $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{S_C}}$ bulunur. İkinci Ehrenfest denkleminin de sol ve sağ tarafı $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{S_C}}$ olarak bulunur. Denklem (2.44)'de verilen PD oranı hesaplanırsa $\Pi = 1$ bulunur. vdW sistemlerinde olduğu gibi RN-AdS karadeliklerindeki faz geçişi de kritik noktalarda ikinci mertebededir. (2.14), (2.15) ve (2.16a) numaralı şekillerde sırasıyla izotermal sıkıştırılabilirlik, hacim genleşmesi ve sabit basınçtaki ısı sığasının olay ufkuna göre değişimi verilmiştir. Her üç grafik kritik noktada ıraksamaktadır.



Şekil 2.14: İzotermal sıkıştırılabilirliğin olay ufkuna göre değişimi. $Q = 1$ ve $T = T_c$ alınmıştır.



Şekil 2.15: Hacim genişlemenin olay ufkuna göre değişimi. $Q = 1$ ve $P = P_c$ alınmıştır.



Şekil 2.16: (a) Sabit basınçtaki ısı sığasının olay ufkuna göre değişimi (b) Isı sığasının negatif olduğu bölge. $Q = 1$ ve $P = P_c$ alınmıştır.

Karadeliklerde genel termodinamik sistemlerden farklı olarak ısı sığasının negatif olduğu durumlar söz konusu olabilir. Yani karadelikler radyasyon yayararak enerji ya da kütle kaybettiklerinde sıcaklıkları artar. Şekil (2.16b)'de RN-AdS karadeliklerinin kritik basınç için ısı sığasının negatif olduğu bölge gösterilmiştir. Bu bölge termodinamik olarak kararlı değildir. Şekilden görüleceği gibi negatif ısı sığası küçük karadeliklere karşılık gelmektedir.

2.2.1.2. Kritik Üsteller

RN-AdS karadelikleri için kritik üstelleri vdW sistemleri için izlediğimiz yöntem ile inceleyeceğiz. Bunun için denklem (2.89)'da tanımlanan indirgenmiş RN-AdS hal denklemini ve aşağıda tanımlanacak ifadeler kullanılacaktır:

$$t = \frac{T-T_c}{T_c} = \tau - 1, \quad w = \frac{V-V_c}{V_c} = v - 1 \quad (2.93)$$

RN-AdS karadelikleri için sabit hacimdeki ısı sığası $C_V = 0$ olduğundan sıcaklıktan bağımsızdır. Yani $\alpha' = 0$ bulunur. (2.93)'deki ifadeler hal denkleminde kullanılırsa

$$p = \frac{9+8w+8t(1+w)-6(1+w)^{\frac{1}{3}}}{6(1+w)^{\frac{4}{3}}} \quad (2.94)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade kritik nokta civarında seriye açılırsa

$$p = 1 + \frac{8t}{3} - \frac{8}{9}tw - \frac{4}{81}w^3 + O(tw^2, w^4) \quad (2.95)$$

elde edilir. $t < 0$ için yukarıdaki ifadenin diferansiyeli alınır

$$dP = -\frac{4}{27}P_c(6t + w^2)dw \quad (2.96)$$

elde edilir. Basınçların eşitliğinden ve Maxwell alan yasasından aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$p = 1 + \frac{8}{3}t - \frac{8}{9}tw_b - \frac{4}{81}w_b^3 = 1 + \frac{8}{3}t - \frac{8}{9}tw_k - \frac{4}{81}w_k^3 \quad (2.97)$$

$$0 = \int_{w_k}^{w_b} w(6t + w^2) dw \quad (2.98)$$

(2.97) ve (2.98) denklemlerinin çözülmesiyle $w_b = -w_k = 3\sqrt{-2t}$ çözümleri elde edilir.

Bu çözümlere göre mertebe parametresi

$$\eta^0 = v_b - v_k = V_c(w_b - w_k) = 2V_c w_b = 6V_c \sqrt{-2t} \quad (2.99)$$

olarak bulunur. Yani $\beta = \frac{1}{2}$ bulunur.

RN-AdS karadelikleri için izotermal sıkıştırılabilirlik

$$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{9}{8P_c t} + O(w) \quad (2.100)$$

bulunur. Yani $\gamma = 1$ bulunur.

Denklem (2.95)'den $t = 0$ için

$$p - 1 = -\frac{4}{81}w^3 \quad (2.101)$$

bulunur. Bu durumda $\delta = 3$ olur.

RN-AdS karadelikleri için kritik üsteller $\alpha' = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ ve $\delta = 3$ olarak elde edilmiştir. Bunlar vdW akışkanları için elde edilen kritik üstellerle aynıdır.

Yukarıda bahsettiğimiz RN-AdS karadelikleri ve vdW akışkanları arasında görülen bu benzerlikler hem farklı boyutlardaki RN-AdS hem de diğer AdS karadelikleri çözümlerinde de görülmektedir (Altamirano ve diğ., 2014b; Belhaj ve diğ., 2013; Belhaj

ve diğ., 2015a; Cai ve diğ., 2013; Dolan, 2011b; Dolan, 2011c; Dolan, 2012; Gunasekaran ve diğ., 2012; Hendi ve Vahidina., 2013; Hendi ve diğ., 2016; Li, 2014; Liang ve diğ., 2016; Mo ve Liu, 2015; Niu ve diğ., 2012, Spallucci ve Smailagic, 2013; Tsai ve diğ., 2012). Ayrıca düz uzayzamandaki yani kozmolojik sabitin sıfır olduğu Kerr karadeliklerinin yüksek boyutlara genelleştirilmiş hali olan Myers-Perry karadeliklerinde de vdW akışkanlarındakine benzer şekilde faz geçişi söz konusudur. Bu karadelik tipi için yapılan çalışmada (Bagher ve diğ., 2013) kuantum düzeltmeleri içeren durumda $\Omega - J$ düzleminde çizilen izotermal eğriler, kritik sıcaklığın altında vdW akışkanlarının eğrileri gibi davranmaktadır. Bu iki parametreye uygun şekilde tanımlanan Ehrenfest denklemleri sağlanmaktadır. Kritik üsteller vdW akışkanlarıyla aynıdır. Çok spinli Kerr-AdS ve Myers-Perry karadeliklerinde re-entrant faz geçişine benzer faz geçişi de görmek mümkündür (Altamirano ve diğ., 2014a; Altamirano ve diğ., 2014b, Kubiznak ve Mann, 2014).

dS uzayzamanındaki karadelikler için hem olay ufku hem de kozmolojik ufku düşünmek gerekir. RN-dS ve Kerr-dS karadelikleri için etkin termodinamik nicelikleri tanımlamak ve faz geçişlerini incelemek mümkündür (Guo ve diğ., 2015; Ma ve diğ., 2015; Zhang ve diğ., 2014; Zhao ve diğ., 2014). AdS uzayzamanındaki karadeliklerden farklı olarak bu karadeliklerde olay ve kozmolojik ufukların oranları spesifik hacimle ilişkili olarak düşünülür. vdW akışkanlarındakine benzer faz davranışlar RN-dS ve Kerr-dS karadeliklerinde de görülür. Tabi bu benzerlik AdS uzayzamanındaki karadelikler gibi tam bir benzerlik değildir.

2.2.2. Isı Çevrimleri

Karadeliklerin termodinamik bir sistem olarak düşünülmesiyle ve özellikle basınç ile hacim değişkenlerinin karadelik termodinamiği yasasında yer almasıyla ısı çevrimlerini karadelikler için araştırmak mümkündür (Johnson, 2014). Çeşitli karadelik çözümleri için ısı çevrim çalışmaları literatürde mevcuttur (Belhaj ve diğ., 2015b; Caceres ve diğ., 2015; Johnson, 2015a; Johnson, 2015b; Sadeghi ve Jafarzade, 2015; Setare ve Adami; 2015). Bu çalışmalarda genelde yüksek sıcaklık ve basınç durumlarında verimlilikler elde edilmiştir. Son olarak Johnson'un (2016) önerdiği verimlilik formülü ile yüksek sıcaklık ve basınç durumu olmadan verimliliği elde etmek mümkündür. Bununla beraber yüksek

sıcaklık ve basınç limitleri yaklaşık olarak Carnot verimliliğini elde etme açısından önemlidir.

Karadelikler için iki farklı ısı çevrimi düşünmek mümkündür (Johnson, 2014). İlk olarak Carnot çevrimini ele alalım. Bölüm (2.2.2)'de de bahsedildiği gibi bir Carnot çevrimi iki izotermal eğriden ve iki adyabatik eğriden meydana gelir. Dönmeyen karadelikler için entropi ve hacim birbirlerinden bağımsız değildirler. Yani birbirleri cinsinden ifade edilebilirler. Bu durumda şekil (2.17)'de de gösterildiği gibi adyabatik eğrilerimizi izokorik olarak düşünmek mümkündür. İki izotermal ve iki izokorik eğri Stirling çevrimini oluşturur ve bu durumda hem Carnot hem de Stirling çevrimlerimiz çakışmaktadır.

İlk izotermal eğri boyunca alınan ısı

$$q_H = T_H \Delta S_{1 \rightarrow 2} = T_H \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \pi (V_2^{\frac{2}{3}} - V_1^{\frac{2}{3}}) \quad (2.102)$$

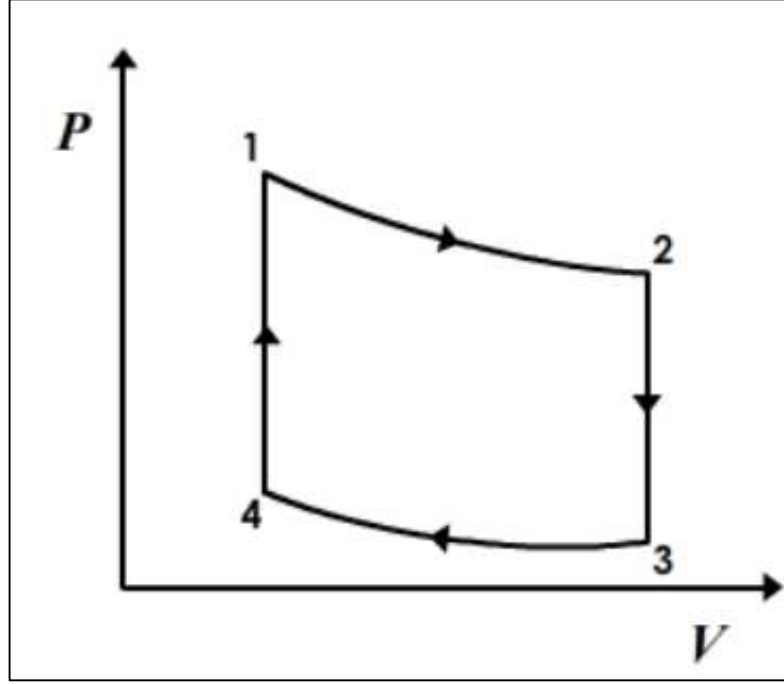
ile verilir. Benzer şekilde aşağıdaki izotermal eğri boyunca verilen ısı

$$q_C = T_C \Delta S_{3 \rightarrow 4} = T_C \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \pi (V_3^{\frac{2}{3}} - V_4^{\frac{2}{3}}) \quad (2.103)$$

olarak elde edilir. Adyabatik eğriler boyunca entropi değişimi sıfır olduğundan herhangi bir katkı gelmez. $V_1 = V_4$ ve $V_2 = V_3$ olduğundan verimlilik aşağıdaki gibi verilir:

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H} \quad (2.104)$$

Benzer şekilde dönen karadeliklerde de bir çevrim oluşturmak mümkündür. Ama bu durumda entropi ve hacim birbirinden bağımsız olacaktır. Yani izkorları düşünmek mümkün değildir. Yavaş dönme durumunda (Sadeghi ve Jafarzade, 2015) yukarıda bahsettiğimiz ve aşağıda bahsedeceğimiz çevrimi düşünmek mümkündür.



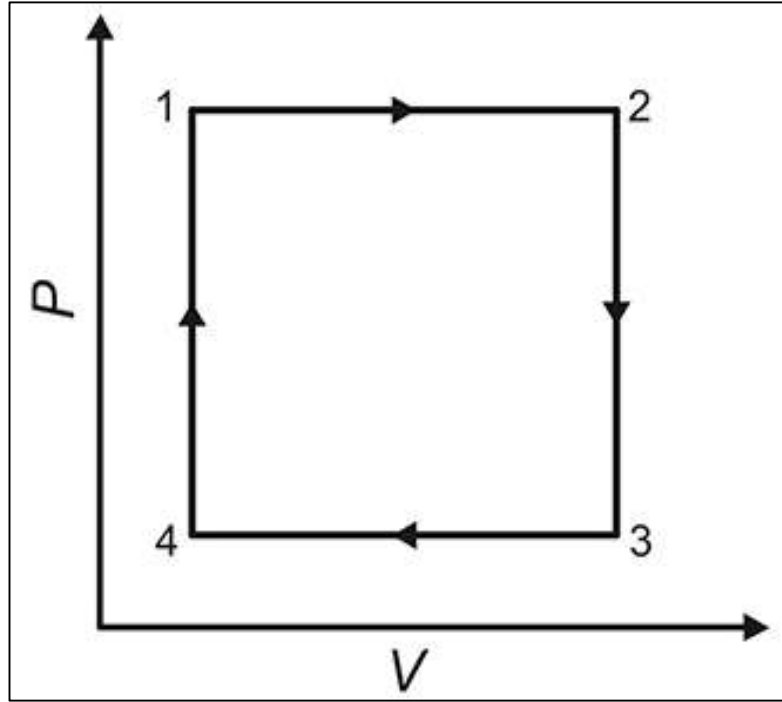
Şekil 2.17: Karadeliklerde Carnot çevrimi.

Sabit basınçtaki ısı sığasını düşündüğümüzde şekil (2.18)'de verilen ısı çevrimini de karadelikler için düşünmek mümkündür. Yeni çevrim iki izobarik ve iki izokorik eğrilerden meydana gelmektedir. Bunun için tam verimlilik formülü türetmek mümkündür. Yükün sabit kaldığı durumu düşünürsek RN-AdS karadeliği için birinci yasa aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$dM = TdS + VdP \quad (2.105)$$

İzobarik eğrilerimiz boyunca basınç değişimi sıfır olacağından, ısı akışı $\int TdS$ üzerinden elde edilir. İzokorik eğriler boyunca da TdS teriminden gelen katkı sıfır olur. Denklem (2.105)'i göz önüne aldığımızda ısının akışının kütlelerin değişimiyle ilişkili olduğu görülür. Bu durumda verimlilik formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$\eta = 1 - \frac{M_3 - M_4}{M_2 - M_1} \quad (2.106)$$



Şekil 2.18: Yeni ısı çevrimi.

Buna göre RN-AdS karadelikleri için verimlilik

$$\eta = \frac{3\pi Q^2 - (S_1 S_2)^{\frac{1}{2}} \left(3 + 8P_4 \left(S_1 + (S_1 S_2)^{\frac{1}{2}} + S_2 \right) \right)}{3\pi Q^2 - (S_1 S_2)^{\frac{1}{2}} \left(3 + 8P_1 \left(S_1 + (S_1 S_2)^{\frac{1}{2}} + S_2 \right) \right)} \quad (2.107)$$

olarak verilir. Yüksek basınç durumunda seriye açarsak

$$\eta = \left(1 - \frac{P_4}{P_1} \right) \left[\left(1 - \frac{3}{8P_1} \left(\frac{\frac{1}{3} S_2^{\frac{2}{3}} - S_1^{\frac{2}{3}}}{S_2^{\frac{2}{3}} - S_1^{\frac{2}{3}}} \right) \right) + \frac{3\pi}{8P_1} \left(\frac{\frac{1}{3} S_2^{\frac{2}{3}} - S_1^{\frac{2}{3}}}{S_2^{\frac{2}{3}} - S_1^{\frac{2}{3}}} \right) \frac{Q^2}{(S_1 S_2)^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{P_1^2}\right) \right] \quad (2.108)$$

elde edilir. Yüksek basınç ve sıcaklık durumunda hal denklemi $P \sim \frac{T}{V^{\frac{1}{3}}}$ şeklinde düşünülebilir. Bu limit durumu ve $T_H = T_2, T_C = T_4$ ilişkilerini göz önünde bulundurarak verimlilik

$$\eta = \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right) \left(\frac{V_2}{V_4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.109)$$

olarak bulunur. Şekil (2.18)'den hacimlerin birbirine yaklaştırılmasıyla yani dikdörtgenin daraltılmasıyla Carnot verimliliğine yaklaşmak mümkündür.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. JOULE-THOMSON GENLEŞMESİ

19. yüzyılın ortalarında James Joule ve William Thomson tarafından çeşitli gazlar üzerinde yapılan deneyler sonucu keşfedilmiştir. Joule-Thomson genişmesinde yüksek basınç bölgesinde bulunan gaz düşük basınç bölgesine doğru hareket eder. Bu geçiş iki bölge arasında bulunan gözenekli bir yapı ya da küçük bir vana yardımıyla gerçekleşir. Genleşme sırasında gazın entalpisi sabittir ve sıcaklığın basınca göre değişimi

$$\tilde{\mu} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H \quad (3.1)$$

ile verilir. Burada $\tilde{\mu}$ Joule-Thomson katsayısı olarak adlandırılır. Bu katsayının işareti ile gazların JT genişmesi sırasında ısınma-soğuma etkilerini saptamak mümkündür. Yüksek basınç bölgesinden düşük basınç bölgesine hareket söz konusu olduğundan basınç değişimi daima negatiftir, fakat sıcaklığın değişimi pozitif ya da negatif olabilir. Eğer sıcaklığın değişimi negatif ise $\tilde{\mu} > 0$ olur ve bu durumda gazlarda soğuma görülür ya da sıcaklığın değişimi pozitif ise $\tilde{\mu} < 0$ olur ve bu durumda gazlarda ısınma görülür.

Denklem (3.1) ifadesini hacim ve sabit basınçtaki ısı sığası cinsinden ifade etmek mümkündür. Sabit parçacık sayısı N için termodinamiğin birinci yasası aşağıdaki şekliyle verilebilir:

$$dU = TdS - PdV \quad (3.2)$$

$H = U + PV$ ifadesini kullanırsak (3.2) denklemi

$$dH = TdS + VdP \quad (3.3)$$

ile verilir. Genleşme süresince $dH = 0$ olduğundan

$$0 = T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_H + V \quad (3.4)$$

yazılabilir. Entropi durum fonksiyonu olduğundan diferansiyeli dS aşağıdaki gibi verilir:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT \quad (3.5)$$

Yukarıdaki ifadenin düzenlenmesi durumunda

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_H = \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H \quad (3.6)$$

elde edilir ve (3.6) denkleminin (3.4) denklemine atanması durumunda aşağıdaki ifade elde edilir:

$$0 = T \left[\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H \right] + V \quad (3.7)$$

Maxwell ilişkisi $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ ve $C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$ ifadesi yukarıdaki denkleme kullanılırsa

$$0 = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + C_p \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H + V \quad (3.8)$$

bulunur. (3.8) ifadesi JT katsayısını verecek şekilde düzenlenirse

$$\tilde{\mu} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_p} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V \right] \quad (3.9)$$

elde edilir (Winterbone, 1997). (3.9) numaralı denklem inversiyon sıcaklığı T_i 'yi tanımlamak için kullanışlıdır.

$$T_i = V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \quad (3.10)$$

İnversiyon sıcaklığı JT katsayısının sıfır olduğu sıcaklık olarak tanımlanabilir. JT genişmesi sırasında gerçek gazlar bu sıcaklık değerinde ısınma-soğuma etkisi göstermezler. Ayrıca $T - P$ düzleminde inversiyon sıcaklıklarının oluşturduğu eğriler soğuma ve ısınma bölgelerini tanımlamak için oldukça kullanışlıdır.

3.1.1. van der Waals Denklemi

(2.25) denkleminde verilen vdW hal denkleminin inversiyon sıcaklığını

$$T_i = \frac{1}{k_B} \left(P_i + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) \quad (3.11)$$

şeklinde yazmak mümkündür. (3.10) denklemi kullanıldığında inversiyon sıcaklığını

$$T_i = \frac{1}{k_B} \left(P_i v - \frac{a}{v^2} (v - 2b) \right) \quad (3.12)$$

şeklinde elde etmek mümkündür. (3.11) denklemi (3.12) denkleminin çıkarılırsa

$$bP_i v^2 - 2av + 3ab = 0 \quad (3.13)$$

denklemi elde edilir. v için denklemin iki kökü vardır:

$$v = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 3ab^2 P_i}}{bP_i} \quad (3.14)$$

Bu köklerin (3.12) denkleminin atanmasıyla

$$T_i^{alt} = \frac{2(5a - 3b^2 P_i - 4\sqrt{a^2 - 3ab^2 P_i})}{9bk} \quad (3.15)$$

$$T_i^{üst} = \frac{2(5a - 3b^2 P_i + 4\sqrt{a^2 - 3ab^2 P_i})}{9bk} \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.15) ve (3.16) denklemleri inversiyon basıncı P_i 'ye bağlı olan alt ve üst inversiyon eğrilerini verir. Şekil (3.1)'de $T - P$ düzleminde inversiyon eğrileri gösterilmektedir. Kesikli mavi çizgi alt inversiyon eğrisini gösterirken, turuncu çizgi üst inversiyon eğrisini göstermektedir. İversiyon eğrisi içerisinde JT katsayısı pozitifdir, yani bu bölgede genişleyen gazlar soğuma etkisi göstermektedirler.

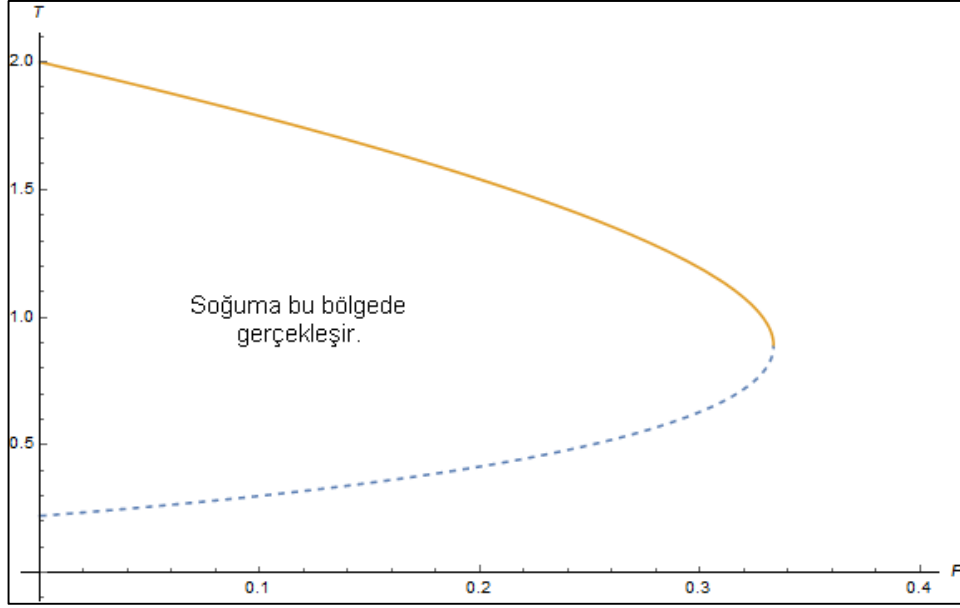
İversiyon basıncının sıfır olduğu noktalarda minimum ve maksimum inversiyon sıcaklıkları tanımlamak mümkündür:

$$T_i^{min} = \frac{2a}{9bk}, \quad T_i^{max} = \frac{2a}{bk} \quad (3.17)$$

Kritik sıcaklığın $T_c = \frac{8a}{27bk}$ şeklinde olduğunu hatırlarsak

$$\frac{T_i^{min}}{T_c} = \frac{3}{4}, \quad \frac{T_i^{max}}{T_c} = \frac{27}{4} \quad (3.18)$$

elde edilir.



Şekil 3.1: $T - P$ düzleminde inversiyon eğrileri. Kesikli mavi çizgi alt inversiyon eğrisini, turuncu çizgi üst inversiyon eğrisini göstermektedir.

Şimdi JT genişmesi boyunca $T - P$ düzlemindeki izoentalpik eğrileri inceleyelim. (2.27) ve (2.29) numaralı denklemler kullanılırsa iç enerji

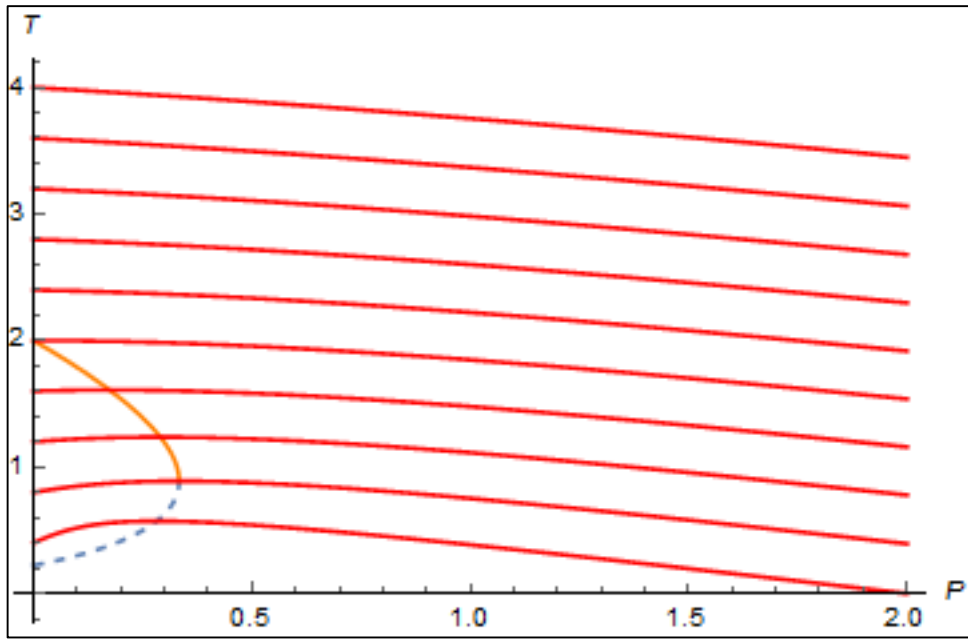
$$U(T, v) = F + TS = \frac{3k_B T}{2} - \frac{a}{v} \quad (3.19)$$

şeklinde verilir. (2.25) ve (3.19) denklemlerinden entalpi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$H(T, v) = U + PV = \frac{3k_B T}{2} + \frac{k_B T v}{v-b} - \frac{2a}{v} \quad (3.20)$$

(2.25) ve (3.20) denklemleri kullanılırsa $T - P$ düzleminde izoentalpik eğriler elde edilir. Şekil (3.2)'de inversiyon eğrileri ve izoentalpik eğriler birlikte gösterilmektedir. İncersiyon eğrilerinin içinde izoentalpik eğrilerin eğimi dolayısıyla JT katsayısı pozitifdir. İncersiyon eğrisinin içerisinde meydana gelen genişleme için soğuma görülmektedir.

İzoentalpik eğriler inversiyon eğrilerini geçtiklerinde eğim işaret değiştirmektedir. Üst inversiyon eğrisinin üstünde kalan izoentalpik eğriler için JT katsayısı yani eğim açıkça negatiftir. Alt inversiyon eğrisinin altındaki izoentalpik eğriler ise iyi tanımlı değildir. Yani alt inversiyon eğrisi altında izoentalpik eğriler pozitif bir eğime sahiptir. Ayrıca vdW denkleminin deneylerle bu konuda uyuşmadığı iyi bilinmektedir. Bu nedenle farklı hal denklemleri için JT genişmesi araştırılmaktadır.



Şekil 3.2: $T - P$ düzleminde izoentalpik eğriler ve inversiyon eğrileri. Kırmızı çizgiler izoentalpik eğrileri göstermektedir. Eğrilerin entalpileri aşağıdan yukarıya doğru $H = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ değerlerine karşılık gelmektedir.

3.2. KARADELİKLERİN ENTROPİSİNE GENEL LOGARİTMİK DÜZELTME

Planck ölçeğinden büyük olan karadeliklerin entropisi alanlarıyla orantılı olarak verilir. Ancak Planck ölçeğindeki kuantum dalgalanmalar karadeliklerin entropilerinde değişikliklere neden olabilirler. Özellikle bu dalgalanmalar, karadelikler Hawking radyasyonu ile boyutlarını küçülttükleri zaman oldukça önemli bir hale gelirler. Bu nedenle Planck ölçeğinde bu karadeliklerin entropilerine gelen katkıyı dikkate almak gerekir. Karadelik entropisine gelen katkıları elde etmeye yönelik çalışmalarda non-

pertürbatif kuantum genel görelilik, Cardy formülü, tam bölüşüm fonksiyonu, karadeliklerdeki madde alanları, bölüşüm fonksiyonunun Rademacher açılımı ve sicim teorisi etkileri gibi çeşitli yöntemler ve teoriler kullanılmıştır (Ashtekar, 1991; Birmingham ve Sen, 2001; Carlip, 2000; Govindarajan ve diğ., 2001; Jing ve Yan, 2000; Lowe ve Roy, 2010; Mann ve Solodukhin, 1998; Medved ve Kunstatter, 1999; Medved ve Kunstatter, 2001; Solodukhin, 1998; Sen, 2011; Sen, 2013). Ayrıca son yıllarda genelleştirilmiş belirsizlik prensibi nedeniyle Planck ölçeğinde karadeliklerin entropisine gelen katkıları elde etmeye yönelik çalışmalar da yapılmıştır (Ali, 2012; Faizal ve Khalil, 2015; Gangopadhyay ve diğ., 2014).

Biz bu bölümde karadelik entropisine termal dalgalanmalar nedeniyle gelen katkıları inceleyeceğiz. Öncelikle kanonik küme için bölüşüm fonksiyonu bağıntısını düşünelim:

$$Z(\beta) = \int_0^\infty \rho(E) e^{-\beta E} dE \quad (3.21)$$

β sıcaklığın tersi olarak adlandırılır, $\beta = \frac{1}{T}$. Durumların yoğunluğu, ters Laplace dönüşümüyle denklem (3.21)'den elde edilir:

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z(\beta) e^{\beta E} d\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{S(\beta)} d\beta \quad (3.22)$$

Burada entropi fonksiyonu $S(\beta)$

$$S(\beta) = \ln Z(\beta) + \beta E \quad (3.23)$$

şeklinde verilir. Şimdi bu entropiyi bir β_0 denge sıcaklığı için düşünelim. Bu durumda $S'_0 = \left(\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \right)_{\beta=\beta_0} = 0$ yazılabilir. Denklem (3.23)'ü β_0 denge sıcaklığı civarında seriye açarsak ve ekstremum koşulunu göz önünde bulundurursak

$$S = S_0 + \frac{1}{2}(\beta - \beta_0)^2 S''_0 + \dots \quad (3.24)$$

elde ederiz. Burada $S_0 = S(\beta_0)$ ve $S''_0 = \left(\frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta^2} \right)_{\beta=\beta_0}$ şeklinde verilir. Denklem (3.24)'ü denklem (3.22)'de kullanırsak durumların yoğunluğu aşağıdaki gibi verilir:

$$\rho(E) = \frac{e^{S_0}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{1}{2}(\beta-\beta_0)^2 S''_0} d\beta \quad (3.25)$$

$c = \beta_0$ ve $(\beta - \beta_0) = ix$ seçimiyle denklem (3.25)'in çözümünü

$$\rho(E) = \frac{e^{S_0}}{\sqrt{2\pi S_0''}} \quad (3.26)$$

elde ederiz. Denklem (3.26)'dan entropiyi aşağıdaki gibi vermek mümkündür:

$$S = \ln \rho(E) = S_0 - \frac{1}{2} \ln S_0'' + \dots \quad (3.27)$$

Denklem (3.27)'de verilen formül tüm termodinamik sistemler için geçerlidir. Doğal olarak bizim durumumuzda karadeliklerde de geçerlidir. Burada S_0 karadeliğin entropisini belirtmektedir. Şimdi S_0'' ifadesini belirlemeliyiz. Bu nedenle Das ve diğ. (2002) tarafından önerilen

$$S = x\beta^m + y\beta^{-n} \quad (3.28)$$

entropiyi kullanmak gerekir. Burada $x, y, m, n > 0$ ve sabitlerdir. Bu entropi

$$\beta_0 = \left(\frac{ny}{mx}\right)^{\frac{1}{m+n}} \quad (3.29)$$

için ekstremuma sahiptir. Bu durumda (3.28) ve (3.29) denklemlerinden

$$S_0 = x \left(\frac{ny}{mx}\right)^{\frac{m}{m+n}} + y \left(\frac{mx}{ny}\right)^{\frac{n}{m+n}} \quad (3.30)$$

$$S_0'' = m(m-1)x \left(\frac{ny}{mx}\right)^{\frac{m-2}{m+n}} + n(n+1)y \left(\frac{mx}{ny}\right)^{\frac{n+2}{m+n}} \quad (3.31)$$

elde edilir. (3.30) ve (3.31) denklemlerini (3.24) denkleminde kullanırsak

$$S(\beta) = A(x^n y^m)^{\frac{1}{m+n}} + \frac{1}{2} B(x^{n+2} y^{m-2})^{\frac{1}{m+n}} (\beta - \beta_0)^2 + \dots \quad (3.32)$$

elde edilir. Burada A ile B sabitleri aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$A = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m+n}} \quad (3.33)$$

$$B = (m+n)m \left(\frac{n+2}{m+n}\right) n \left(\frac{m-2}{m+n}\right) \quad (3.34)$$

(3.32) denklemini (3.24) ile karşılaştırırsak,

$$S_0 = A(x^n y^m)^{\frac{1}{m+n}}, \quad S_0'' = B(x^{n+2} y^{m-2})^{\frac{1}{m+n}} \quad (3.35)$$

elde ederiz. (3.35) ifadesindeki denklemlerden x ve y ifadelerini S_0 ve S_0'' cinsinden elde edebiliriz. Bu durumda x ve y aşağıdaki gibi verilir:

$$x = \frac{A^{\frac{m-2}{2}}}{B^{\frac{m}{2}}} (S_0'')^{\frac{m}{2}} S_0^{-\frac{m-2}{2}}, \quad y = \frac{A^{\frac{n+2}{2}}}{B^{-\frac{n}{2}}} S_0^{\frac{n+2}{2}} (S_0'')^{-\frac{n}{2}} \quad (3.36)$$

x ve y ifadelerini (3.29) denkleminde kullanırsak, β_0 aşağıdaki gibi verilir:

$$\beta_0 = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} \sqrt{\frac{B S_0}{A S_0''}} \quad (3.37)$$

Buradan S_0'' aşağıdaki şekliyle verilir:

$$S_0'' = \left[\left(\frac{B}{A}\right) \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{m+n}} \right] S_0 \beta_0^{-2} \quad (3.38)$$

Bu son ilişki ile S_0'' elde etmek mümkündür. Böylece karadelik entropisine gelen katkıyı hesaplayabiliriz. Bu sonuç doğrudan denklem (3.28)'e dayanır. Denklem (3.38)'de köşeli parantez içerisindeki terimler ihmal edilebilir. Bu durumda

$$S_0'' \approx S_0 \beta_0^{-2} \quad (3.39)$$

elde edilir. Son ifadeyi denklem (3.27)'de kullanırsak

$$S = S_0 - \frac{1}{2} \ln S_0 T^2 \quad (3.40)$$

elde ederiz. Bu karadelik entropisine genel bir düzeltme olarak düşünülebilir. Planck ölçeğinde kuantum dalgalanmalardan dolayı gelen logaritmik düzeltme, büyük karadelikler için yani Bekenstein-Hawking entropisinin büyük olduğu durumlarda ihmal edilebilir düzeydedir. Bu katkı karadeliğin küçülmesiyle baskın bir özellik kazanır. Denklem (3.40)'dan açıkça görüldüğü gibi termal dalgalanmalar karadelik entropisi üzerinde azalmaya neden olmaktadır.

3.3. TSALLIS-RENYI ENRTOPI MODELİNDE KARADELİKLER

Toplanamaz (non-extensive) termodinamik (Tsallis, 2009); başta dolanık sistemler ve kuark-gluon plazması olmak üzere, depremler ve türbülanslar gibi olayların tanımlanmasını amaçlar.

Toplanamaz termodinamiği, karadeliklerin durumunda da düşünmek mümkündür. Son yapılan çalışmalarda (Biro, 2010; Biro ve Czinner, 2013; Czinner ve Iguchi, 2016) düz uzayzamandaki Schwarzschild karadeliklerinin entropisi toplanamaz Tsallis entropisi olarak düşülüp Renyi entropisiyle ilişkilendirildiğinde termodinamik özelliklerinin AdS uzayzamanındaki karadeliklerinki gibi davrandığı gözlenmiştir. Biz de bu bölümde elde edilen sonuçlara değineceğiz.

Renyi ve Tsallis entropileri (Biro ve Czinner, 2013) sırasıyla

$$S_R = \frac{1}{\lambda} \ln \langle e^{\lambda s} \rangle \quad (3.41)$$

$$S_T = \frac{1}{\lambda} (\langle e^{\lambda s} \rangle - 1) \quad (3.42)$$

ile verilir. $\lambda = 1 - q$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) şeklinde tanımlıdır ve q reel bir parametredir. Burada $\langle s \rangle$, Boltzmann-Gibbs entropisidir ve $\lambda \rightarrow 0$ durumunda her iki entropi de Boltzmann-Gibbs entropisini verecektir:

$$\langle s \rangle = - \sum p_i \ln p_i \quad (3.43)$$

(3.41) ve (3.42) denklemlerinden Renyi ve Tsallis entropileri arasındaki ilişki

$$S_R = \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda S_T) \quad (3.44)$$

ile verilir.

Renyi ve Tsallis entropileri incelendiğinde sırasıyla toplanabilir ve toplanamaz oldukları görülebilir. Şimdi TR entropi modelini Schwarzschild karadelikleri için ele alalım:

Düz uzayzamandaki Schwarzschild karadeliği için metrik elemanı

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.45)$$

şeklinde verilir. Burada $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ metrik fonksiyonudur. $f(r_h) = 0$ için olay ufku

$$r_h = 2M \quad (3.46)$$

olarak tanımlanır. Schwarzschild karadeligi için termodinamiğin birinci yasası

$$dM = TdS \quad (3.47)$$

şeklindedir. Entropi $S = \pi r_h^2 = 4\pi M^2$ olarak tanımlanır. Buna göre sıcaklık ve ısı sığası

$$T = \frac{dM}{dS} = \frac{1}{4\pi r_h} = \frac{1}{8\pi M} \quad (3.48)$$

$$C = \frac{dM}{dT} = -2\pi r_h^2 = -8\pi M^2 \quad (3.49)$$

ile verilir. Denklem (3.49)'dan görüldüğü gibi düz uzayzamandaki Schwarzschild karadelikleri için ısı sığası daima negatiftir. Yani sistem termodinamik olarak kararlı değildir. Zaten (3.48)'de sıcaklığın ve kütlenin ters orantılı olduğu açıkça görülmektedir. Düz uzayzaman için $P = 0$ olduğundan, Gibbs serbest enerjisi ile Helmholtz enerjisi çakışacaktır. Gibbs serbest enerjisi

$$G = M - TS = \frac{r_h}{4} = \frac{1}{16\pi T} \quad (3.50)$$

ile verilir. Bu yukarıda verdiğimiz niceliklere RN-AdS karadeliginin $Q = 0$ ve $P = 0$ limit durumlarında da ulaşabiliriz. Karadeliklerin entropisini toplanamaz Tsallis entropisi olarak düşünürsek

$$S_R = \frac{1}{\lambda} \ln[1 + \lambda S_{BH}] \quad (3.51)$$

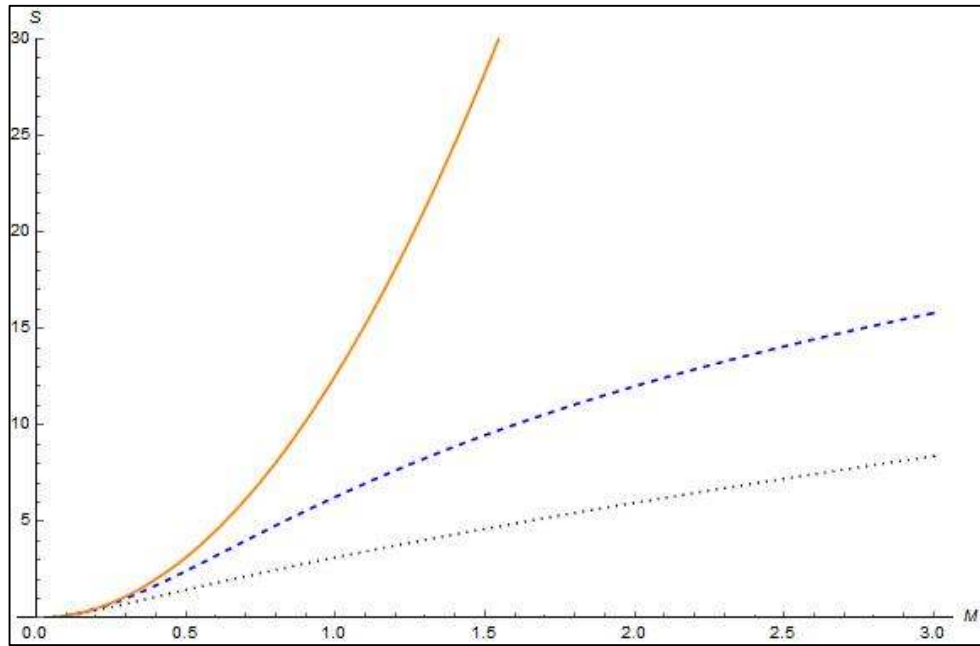
Renyi entropisi şeklinde ifade edilir. Bu durumda Schwarzschild karadelikleri için

$$S_R = \frac{1}{\lambda} \ln[1 + \lambda \pi r_h^2] = \frac{1}{\lambda} \ln[1 + 4\lambda \pi M^2] \quad (3.52)$$

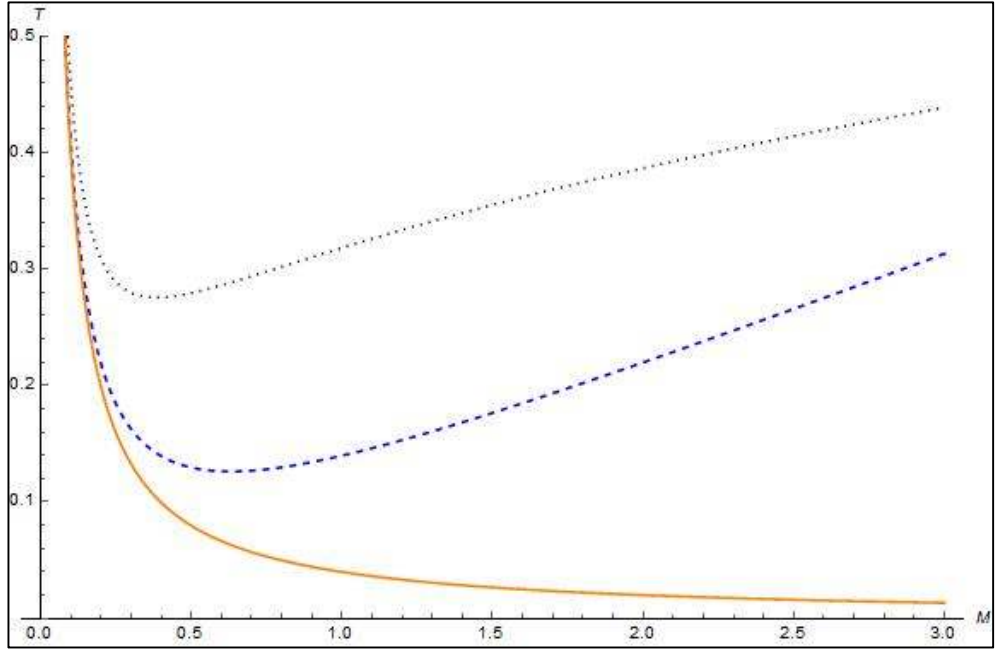
$$T_R = \frac{dM}{dS_R} = \frac{1}{4\pi r_h} + \frac{\lambda r_h}{4} = \frac{1}{8\pi M} + \frac{\lambda M}{2} \quad (3.53)$$

$$C_R = \frac{dM}{dT_R} = \frac{2\pi r_h^2}{\pi \lambda r_h^2 - 1} = \frac{8\pi M^2}{4\pi \lambda M^2 - 1} \quad (3.54)$$

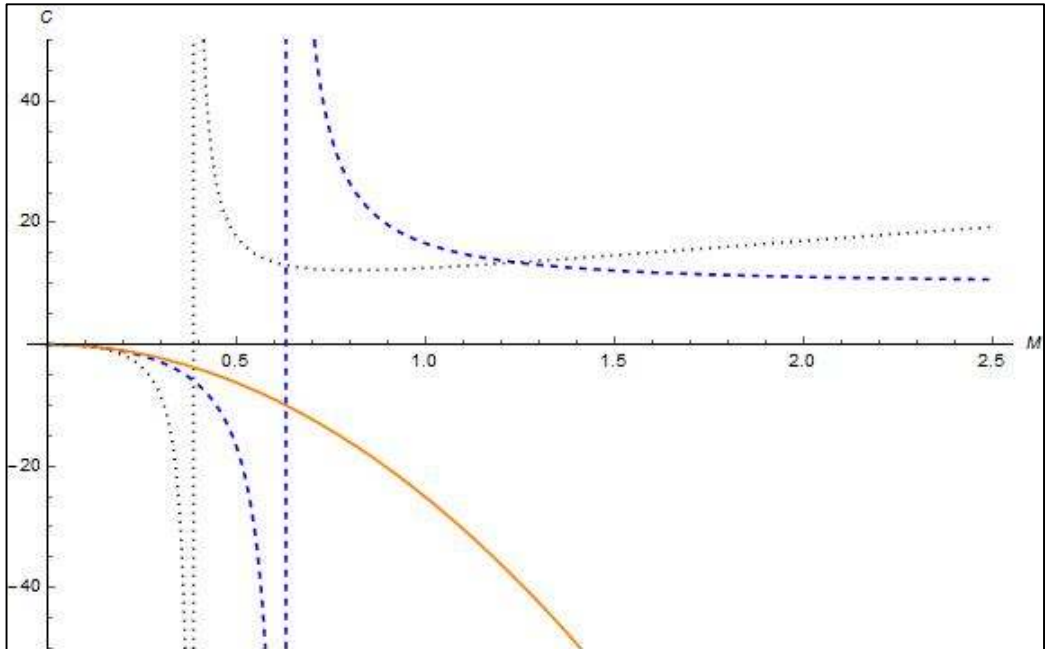
ile verilir. Denklem (3.54)'den açıkça görüldüğü gibi TR modelinde ısı sığamız her zaman negatif değildir. $M > M_0 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi}}$ için ısı sığası pozitifken, $M < M_0$ için negatif olur. $M = M_0$ noktasında iyi tanımlı değildir. Ayrıca biraz sonra göreceğimiz gibi M_0 kütlesi karadeliklerin var olabileceği en küçük sıcaklık değerine karşı gelmektedir. TR modelindeki sıcaklık ve ısı sığası açıkça Schwarzschild-AdS karadelikleri durumundaki sıcaklık ve ısı sığası gibi davranmaktadır. Yani λ parametresi l AdS eğrilik yarıçapı gibi davranmaktadır. (3.3), (3.4) ve (3.5) numaralı şekillerde Schwarzschild, TR ve Schwarzschild-AdS durumları için entropinin, sıcaklığın ve ısı sığasının kütleyle göre değişimi gösterilmiştir. Bu şekillerden de açıkça görüleceği gibi TR modelinde termodinamik nicelikler AdS durumundakilerle benzerlik göstermektedir.



Şekil 3.3: Entropilerin kütleyle göre değişimi. Turuncu çizgi Schwarzschild, kesikli mavi çizgi TR modeli, siyah noktalı çizgi Schwarzschild-AdS entropilerine karşılık gelmektedir. $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır.

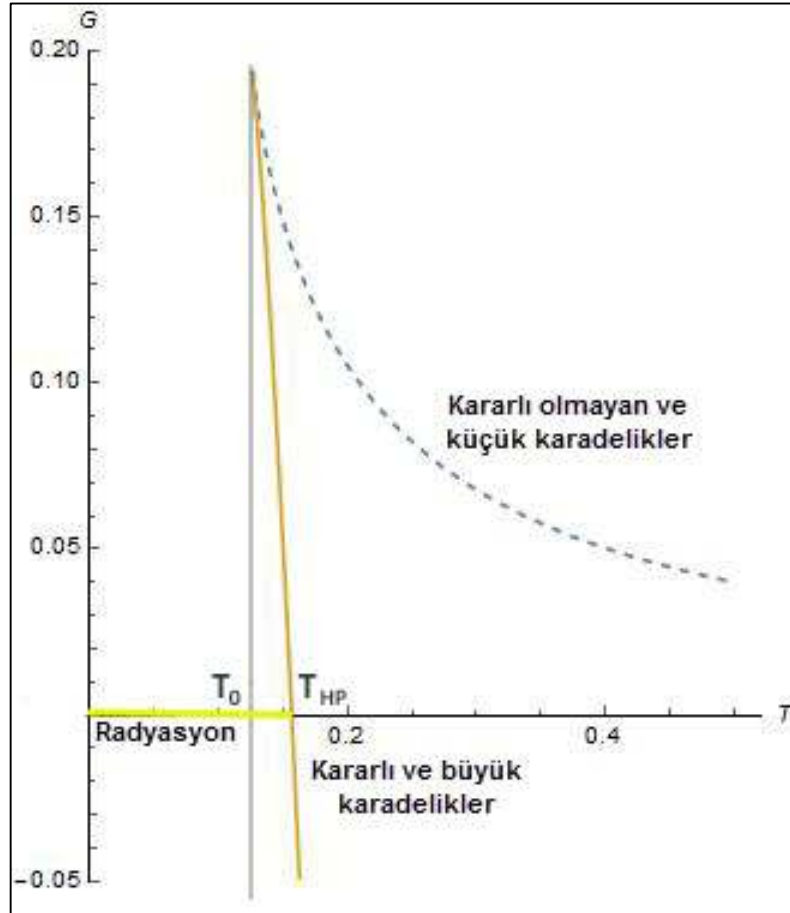


Şekil 3.4: Sıcaklıkların kütleyle göre değişimi. Turuncu çizgi Schwarzschild, kesikli mavi çizgi TR modeli, siyah noktali çizgi Schwarzschild-AdS sıcaklıklarına karşılık gelmektedir. $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır.



Şekil 3.5: Isı sığalarının kütleyle göre değişimi. Turuncu çizgi Schwarzschild, kesikli mavi çizgi TR modeli, siyah noktali çizgi Schwarzschild-AdS ısı sığalarına karşılık gelmektedir. $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır.

Üsteki elde ettiğimiz sonuçlar ışığında Hawking-Page faz geçişine (1983) benzer bir faz geçişini TR modeli için ele almak mümkündür. Şekil (3.6)'da Gibbs serbest enerjisinin sıcaklığa göre grafiği çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi Hawking-Page benzeri bir faz geçişi söz konusudur. $M < M_0$ durumunda kesikli çizgili mavi kol kararlı olmayan küçük karadeliklere karşı gelmektedir. Bu kol üzerindeki karadeliklerin ısı sığası negatiftir. $M > M_0$ için turuncu kol kararlı olan büyük karadeliklere karşılık gelmektedir. Bu kol üzerindeki karadeliklerin ısı sığası ise pozitiftir. Negatif Gibbs enerjisine karşı gelen karadelikler termodinamik olarak daha kararlıdır.



Şekil 3.6: TR modelinde Schwarzschild karadeliğinin Gibbs enerjisinin sıcaklığa göre değişimi. $\lambda = 0.2$ alınmıştır.

Her iki eğrinin birleştiği noktada ısı sığası ıraksar ve ısı sığasının ıraksadığı noktadaki sıcaklık karadeliklerin var olabileceği en küçük sıcaklıktır. Bu sıcaklık $T_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$ ile verilir. $G = 0$ şartından Hawking-Page sıcaklığını $T_{HP} \approx 0.62 \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$ şeklinde elde etmek mümkündür. Schwarzschild-AdS karadelikleri durumunda olduğu gibi T_{HP} 'den küçük sıcaklıklar radyasyona karşılık gelmektedir.

4. BULGULAR

Tezin bu bölümünde ilk olarak bir önceki bölümde vdW akışkanları için incelediğimiz JT genişmesini RN-AdS karadelikleri için ele alacağız. Daha sonra termal dalgalanmaların RN-AdS karadelisinin termodinamik özellikleri ve faz geçişi üzerindeki etkilerini inceleyeceğiz. Son olarak düz uzayzamandaki RN karadelikleri için TR modelinin etkilerini inceleyeceğiz.

4.1. JOULE-THOMSON GENLEŞMESİ

Bölüm (2.1)'de bahsedildiği gibi kozmolojik sabit ve eşlenik niceliğinin termodinamik basınç ve hacim ile ilişkilendirilmesi AdS uzayzamanındaki karadeliklerin kütlelerinin entalpiye eşit alınması gerektiğini göstermektedir. Bu nedenle JT genişmesi sırasında AdS uzayzamanındaki karadeliklerin kütleleri değişmez. JT katsayısı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\tilde{\mu} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_M \quad (4.1)$$

Böylece JT genişmesi sırasında sıcaklığın basınca göre değişimi kütlelerin değişmediği durumda incelenir. Önceki bölüme benzer şekilde sabit Q yükü için JT katsayısı

$$\tilde{\mu} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{1}{c_p} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right] \quad (4.2)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (2.72)'de verilen RN-AdS hal denklemini termodinamik hacim cinsinden

$$T = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} V^{\frac{1}{3}} \left[8\pi \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} P + \frac{1}{2} - \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{Q^2}{V^{\frac{4}{3}}} \right] \quad (4.3)$$

şeklinde yazabiliriz. (4.3)'ün (4.2)'de kullanılmasıyla inversiyon sıcaklığı

$$T_i = \frac{1}{3} \left(\frac{6}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{Q^2}{V^{\frac{4}{3}}} - \left(\frac{6}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{12V^{\frac{2}{3}}} + P_i \right] = \frac{Q^2}{4\pi r_h^3} - \frac{1}{12\pi r_h} + \frac{2P_i r_h}{3} \quad (4.4)$$

ile verilir. (4.3)'den

$$T_i = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} V^{\frac{1}{3}} \left[8\pi \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} P_i + \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} - \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{Q^2}{V^{\frac{4}{3}}} \right] = -\frac{Q^2}{4\pi r_h^3} - \frac{1}{4\pi r_h} + 2P_i r_h \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.4) ve (4.5) denklemlerinin birbirlerinden çıkarılmasıyla

$$8\pi P_i r_h^4 + 2r_h^2 - 3Q^2 = 0 \quad (4.6)$$

elde edilir. Bu denklemin r_h için çözülmesi ile dört kök elde edilir. Bu köklerden sadece biri fiziksel olarak anlamlıdır. Diğer kökler negatif veya kompleksdir. Pozitif ve reel kök

$$r_h = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+24P_i\pi Q^2}}{P_i\pi} - \frac{1}{P_i\pi}} \quad (4.7)$$

şeklindedir. (4.7)'nin (4.5)'de kullanılmasıyla

$$T_i = \frac{\sqrt{P_i} \left(1 + 16\pi P_i Q^2 - \sqrt{1 + 24\pi P_i Q^2} \right)}{\sqrt{2\pi} \left(-1 + \sqrt{1 + 24\pi P_i Q^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.8)$$

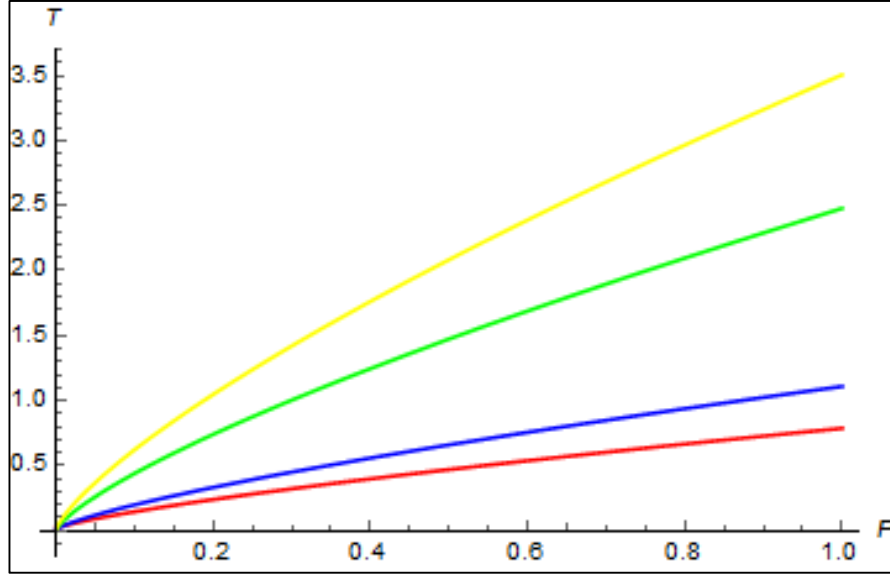
inversiyon basıncına bağlı inversiyon sıcaklığı elde edilir. vdW akışkanlarından farklı olarak bir adet inversiyon eğrisi elde edilir. Şekil (4.1)'de çeşitli yük değerleri için inversiyon eğrileri gösterilmektedir. Denklem (4.8) $T - P$ düzleminde herhangi bir noktada sonlanmaz. Çünkü ifade içindeki karekökler hiçbir zaman negatif olmaz. Ayrıca payda her zaman pozitiftir. Pay $1 + 16\pi P_i Q^2 - \sqrt{1 + 24\pi P_i Q^2} > 0$ için çözülürse sadece $-\frac{1}{32\pi Q^2} < P_i < 0$ aralığında negatif olduğu görülür. Diğer durumlarda pozitiftir. Yani açıkça $P \geq 0$ durumunda payda pozitiftir ve böylelikle $T_i > 0$ olur. Aslında benzer şekilde vdW akışkanlarında da $P \geq 0$ durumunda $T_i > 0$ olur. Ama inversiyon eğrileri, kareköklerin içinin negatif olduğu basınç değerinden itibaren belirli bir noktada sonlanır. Denklem (4.8)'den $P_i = 0$ için minimum inversiyon sıcaklığı tanımlamak mümkündür:

$$T_i^{min} = \frac{1}{6\sqrt{6\pi Q}} \quad (4.9)$$

Kritik sıcaklık $T_c = \frac{1}{3\sqrt{6\pi Q}}$ olduğundan

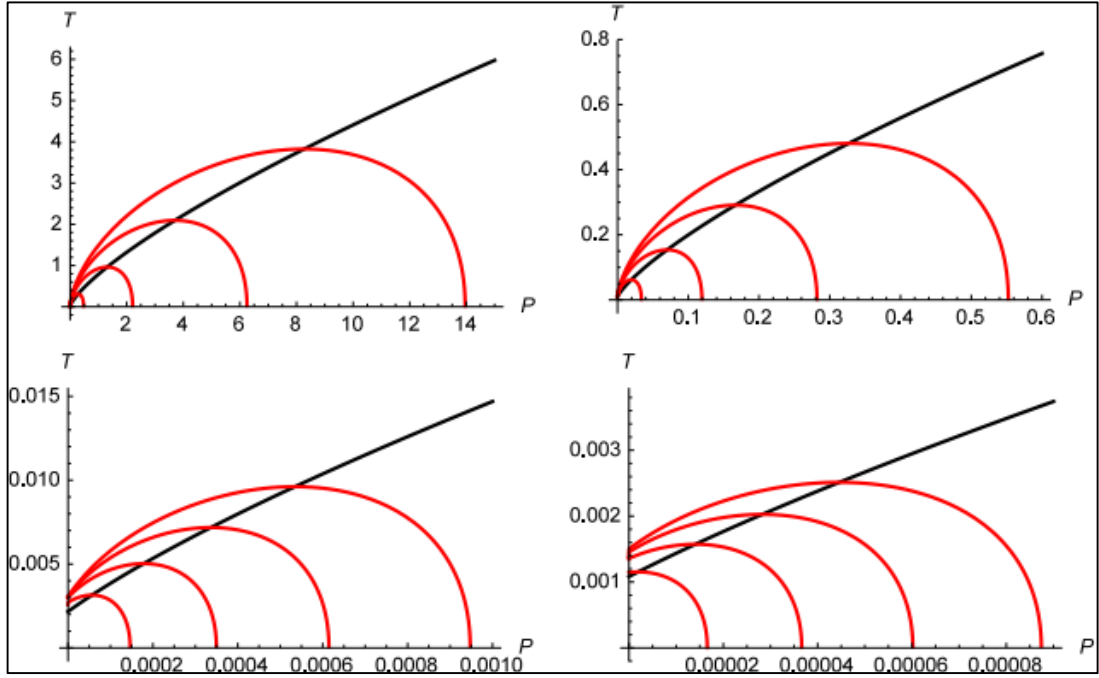
$$\frac{T_i^{min}}{T_c} = \frac{1}{2} \quad (4.10)$$

bulunur.



Şekil 4.1: RN-AdS karadeligi için inversiyon eğrileri. Aşağıdan yukarıya eğriler $Q = 1, 2, 10, 20$ değerlerine karşılık gelmektedir.

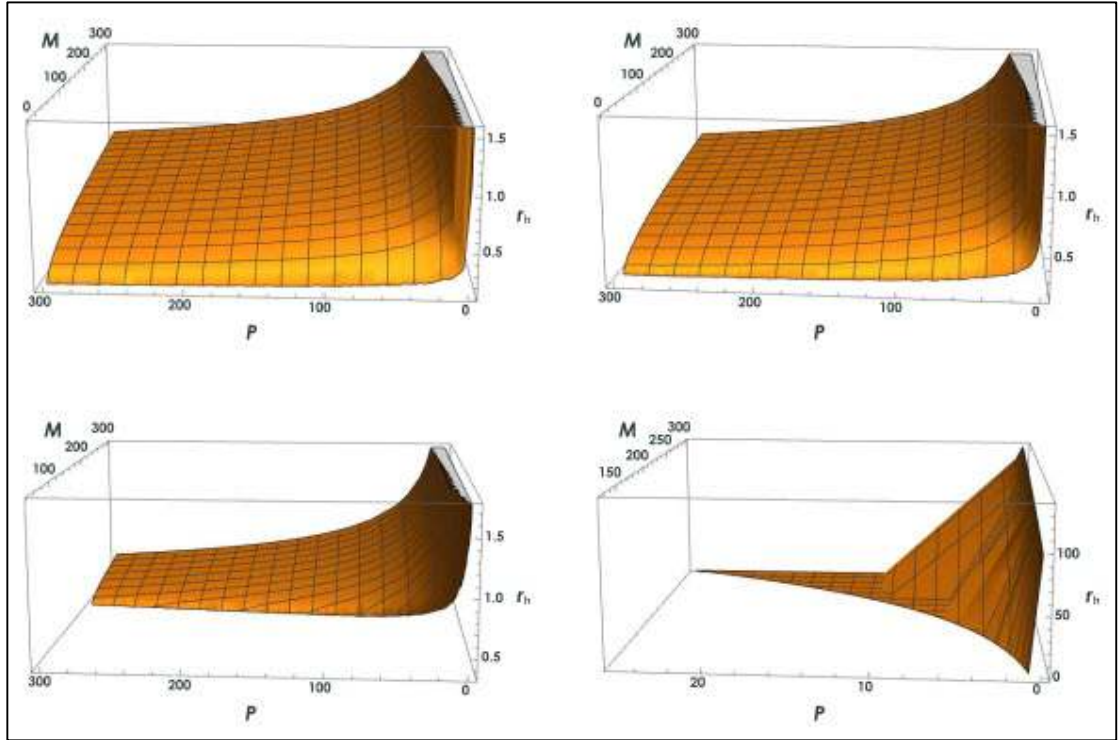
Şimdi $T - P$ düzlemindeki izoentalpik yani sabit kütleli eğrilerden bahsedelim. Denklem (2.69)'da verilen kütle fonksiyonundan RN-AdS karadeliklerinin olay ufku elde etmek mümkündür. (2.69)'un olay ufku için çözülmesi durumunda dört kök elde edilir. Bu köklerden en büyük olanı olay ufku tanımlar. Elde edilen olay ufkunun (2.72) numaralı hal denkleminde kullanılmasıyla $T - P$ düzleminde farklı kütle ve yük değerleri için izoentalpik eğriler elde etmek mümkün olur. Şekil (4.2)'de inversiyon ve izoentalpik eğrileri birlikte gösterilmektedir. İversiyon eğrisinin içinde izoentalpik eğrilerin eğimi pozitiftir. Dolayısıyla JT katsayısı pozitiftir. İversiyon eğrilerini geçtikten sonra izoentalpik eğriler negatif eğimli olmaktadır. Yani inversiyon eğrisinin dışında JT katsayısı negatif olur ve bu durumda ısınma söz konusudur.



Şekil 4.2: RN-AdS karadeligi için inversiyon ve izoentalpik eğriler. İzoentalpik eğriler aşağıdan yukarıya kütlelerin artan değerlerine karşı gelmektedir. Kırmızı çizgileri izoentalpik eğrileri, siyah çizgiler inversiyon eğrilerini göstermektedir. (a) $Q = 1$ ve $M = 1.5, 2, 2.5, 3$. (b) $Q = 2$ ve $M = 2.5, 3, 3.5, 4$. (c) $Q = 10$ ve $M = 10.5, 11, 11.5, 12$. (d) $Q = 20$ ve $M = 20.5, 21, 21.5, 22$.

Son olarak RN-AdS karadelikleri için çıplak tekillik durumunda JT genişmesinden bahsetmek yararlı olacaktır. Şekil (4.3)'de olay ufku basınç ve kütlelerin değerlerine göre verilmiştir. Çıplak tekilliğe karşı gelen bölgeler şekil (4.3)'den görülebilir. Açık bir şekilde JT genişmesi çıplak tekillikler için olay ufku tanımlı olmadığından düşünülemez. Örneğin, $Q = 20$ ve $M \leq 20$ için olay ufku tanımlanamaz. Bu değerler için olay ufku kompleks bir sayıdır ve çıplak tekilliğe karşı gelir. Aynı şekilde izoentalpik eğriler de $T - P$ düzleminde kompleks olurlar.

vdW sistemlerindeki gibi RN-AdS karadeliklerinde de düşük sıcaklık durumunda JT genişmesi iyi tanımlı değildir. İzoentalpik eğriler alt inversiyon eğrisinin altında pozitif eğime sahiptirler. RN-AdS karadelikleri için bu durumun araştırılması gerekmektedir.



Şekil 4.3: RN-AdS karadelığının olay ufkunun kütle ve basınca göre değişimi. (a) $Q = 1$. (b) $Q = 2$. (c) $Q = 10$. (d) $Q = 20$.

4.2. TERMAL DALGALANMALARIN RN-ADS KARADELİĞİNE ETKİLERİ

Bölüm (3.2)'de Planck ölçeğinde karadeliklerin entropisine termal dalgalanmalar nedeniyle gelen katkıyı inceledik. Şimdi termal dalgalanmaların RN-AdS karadeliklerinin termodinamik nicelikleri üzerindeki etkilerini inceleyeceğiz. Son yıllarda çeşitli karadelik çözümleri için bu etkiler incelenmiştir (Faizal ve Pourhassan, 2015; Pourhassan ve diğ., 2016; Pourhassan ve Faizal, 2015; Pourhassan ve Faizal, 2016; Sadeghi ve diğ., 2014; Sadeghi ve diğ., 2016). RN-AdS karadelikleri için Pourhassan ve Faizal (2015) termal dalgalanmaların etkisini araştırmıştır. Bizim elde ettiğimiz sonuçlar izlediğimiz yöntem ve yaklaşımlar nedeniyle Pourhassan ve Faizal (2015) tarafından elde edilen sonuçlardan farklıdır. Bizim kullandığımız yöntem RN-AdS karadelığının $P - V$ kritiğini incelemek açısından uygundur.

Denklem (3.40)'ı termal dalgalanmalardan gelen katkıları daha iyi irdelemek için bir $\tilde{\alpha}$ parametresine bağlı şekilde verebiliriz (Pourhassan ve Faizal, 2015). Bu durumda genelleştirilmiş entropimiz

$$S = S_0 - \frac{\tilde{\alpha}}{2} \ln S_0 T_{BH}^2 \quad (4.11)$$

ile verilir. Burada T_{BH} denklem (2.72) ile tanımlanan karadeliğin sıcaklığıdır. Denklem (4.11)'den görüldüğü gibi $\tilde{\alpha} = 1$ durumunda termal dalgalanmaların etkisi maksimumdur. $\tilde{\alpha} = 0$ durumunda da termal dalgalanmaların olmadığı Bekenstein-Hawking entropisi elde edilir. RN-AdS karadeliğinin entropisi $S_0 = \pi r_h^2$ ve (2.72) denkleminde verilen sıcaklık ifadeleri (4.11)'de kullanılırsa

$$S = \pi r_h^2 - \tilde{\alpha} \ln \left(\frac{l^2(r_h^2 - Q^2) + 3r_h^4}{4\sqrt{\pi}l^2 r_h^2} \right) \quad (4.12)$$

elde edilir. Bu termal dalgalanmalar nedeniyle karadeliğin yeni entropi ifadesidir. Bunu kullanarak RN-AdS karadeliklerinin bazı termodinamik niceliklerini termal dalgalanma durumunda elde edebiliriz. Termal dalgalanmalar durumunda $T = \frac{\partial M}{\partial S}$ kullanıldığında karadeliğin sıcaklığı

$$T = \frac{(3r_h^4 + l^2(r_h^2 - Q^2))^2}{4l^2 r_h (3\pi r_h^6 + (\pi l^2 - \tilde{\alpha})r_h^4 - \pi l^2 Q^2 r_h^2 - l^2 Q^2 \tilde{\alpha})} \quad (4.13)$$

ile verilir. Sabit hacim ve basınçtaki ısı sığaları ise $C = T \frac{\partial S}{\partial T}$ ifadesi kullanıldığında aşağıdaki gibi verilirler:

$$C_V = \tilde{\alpha} \frac{3\pi r_h^6 + (\pi l^2 - 3\tilde{\alpha})r_h^4 - \pi l^2 Q^2 r_h^2 - \tilde{\alpha} l^2 Q^2}{-3\pi r_h^6 + (3\tilde{\alpha} - \pi l^2)r_h^4 + l^2(\pi Q^2 - \tilde{\alpha})r_h^2 + 3\tilde{\alpha} l^2 Q^2} \quad (4.14)$$

$$C_P = \frac{2\pi r_h^2 (9r_h^8 + 6l^2 r_h^6 + l^2(l^2 - 6Q^2)r_h^4 - 2l^4 Q^2 r_h^2 + l^4 Q^4 + \frac{aK_1(\tilde{\alpha})}{\pi^2 r_h^4})}{(9r_h^8 + l^2(6Q^2 - l^2)r_h^4 + 4l^4 Q^2 r_h^2 - 3l^4 Q^4 + \frac{K_2(\tilde{\alpha})}{\pi r_h^2})} \quad (4.15)$$

(4.15) denkleminde $K_1(\tilde{\alpha}) = (-18\pi r_h^{10} + 3(3\tilde{\alpha} - 2\pi l^2)r_h^8 + 2l^2 Q^2(3\tilde{\alpha} - \pi l^2 Q^2)r_h^4 + 2\pi l^4 Q^4 r_h^2 + \tilde{\alpha} l^4 Q^4)$ ve $K_2(\tilde{\alpha}) = 3\tilde{\alpha}(-9r_h^8 + l^2 r_h^6 - 12Q^2 l^2 r_h^4 - l^4 Q^2 r_h^2)$ şeklinde verilir. Termodinamik kararlılık $C_P > 0$ şartı için sağlanır.

4.2.1. Faz Geçişi ve Kritik Noktalar

(2.12) ve (4.13) denklemlerinden termal dalgalanma durumunda elde edilen hal denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$P = \frac{Q^2}{8\pi r_h^4} - \frac{1}{8\pi r_h^2} + \frac{T}{4r_h} - \frac{\tilde{a}T}{4\pi r_h^3} \pm \frac{\sqrt{\pi^2 T^2 r_h^{14} - W(\tilde{a})}}{4\pi r_h^8} \quad (4.16)$$

Burada $W(\tilde{a}) = \tilde{a}T r_h^9 (2\pi T r_h^3 - r_h^2 - \tilde{a}T r_h + 2Q^2)$ şeklinde verilir. Hal denkleminin $\tilde{a} \rightarrow 0$ için termal dalgalanmanın olmadığı (2.81) denklemini vermesi için karekökün önünde artı işaretli çözüm anlamlıdır. Kritik noktaları hal denkleminin olay ufkuna göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerinden elde ederiz:

$$\frac{\partial P}{\partial r_h} = \frac{\partial^2 P}{\partial r_h^2} = 0 \quad (4.17)$$

\tilde{a} parametresinin küçük değerleri için kritik noktaları analitik olarak elde etmek mümkündür. Küçük termal dalgalanmalar için, hal denklemi aşağıdaki gibi seriye açılabilir:

$$P = \frac{Q^2}{8\pi r_h^4} - \frac{1}{8\pi r_h^2} + \frac{T}{2r_h} + \tilde{a} \left(\frac{1}{8\pi^2 r_h^4} - \frac{T}{2\pi r_h^3} - \frac{Q^2}{4\pi^2 r_h^6} \right) + O(\tilde{a}) \quad (4.18)$$

Küçük termal dalgalanmalar için spesifik hacim olay ufkuyla

$$v = 2r_h \quad (4.19)$$

şeklinde ilişkilendirilir. Küçük termal dalgalanmalar için kritik noktalar aşağıdaki gibi verilir:

$$v_c = 2\sqrt{6}Q - \frac{\sqrt{6}}{2\pi Q} \tilde{a} + O(\tilde{a}^2) \quad (4.20)$$

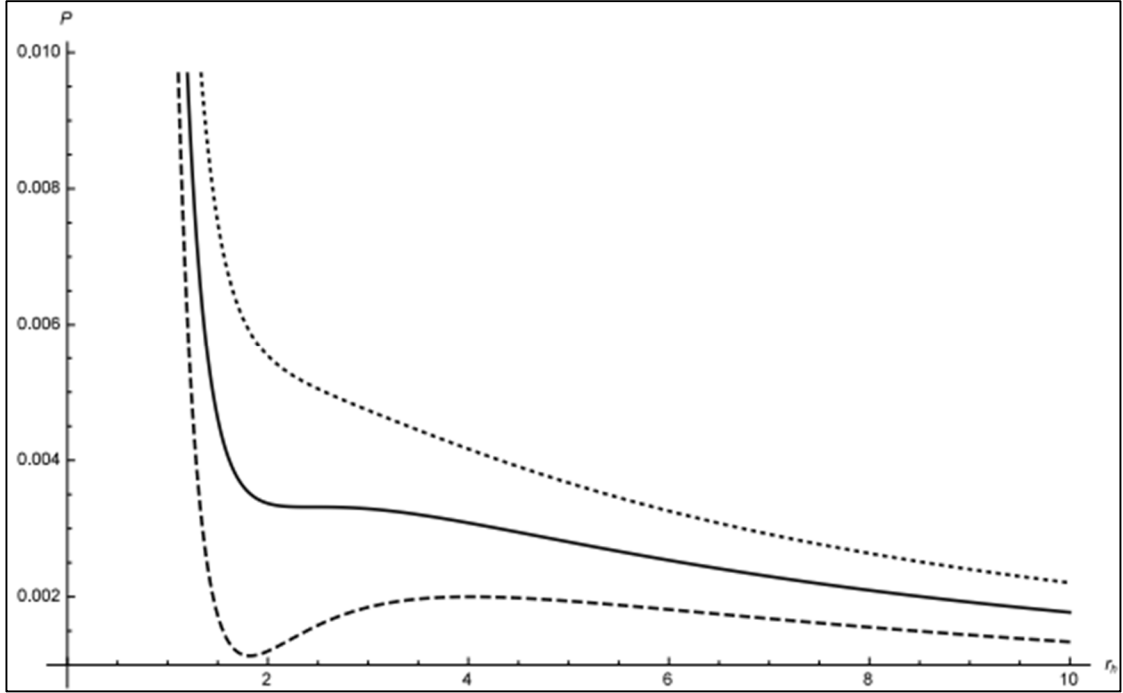
$$T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q} + \frac{\sqrt{6}}{72\pi^2 Q^3} \tilde{a} + O(\tilde{a}^2) \quad (4.21)$$

$$P_c = \frac{1}{96\pi Q^2} + \frac{\tilde{a}}{216\pi^2 Q^4} + O(\tilde{a}^2) \quad (4.22)$$

Bu durumda evrensel değer aşağıdaki gibi verilir:

$$\frac{P_c T_c}{v_c} = \frac{3}{8} - \frac{\tilde{a}}{48\pi Q^2} + O(\tilde{a}^2) \quad (4.23)$$

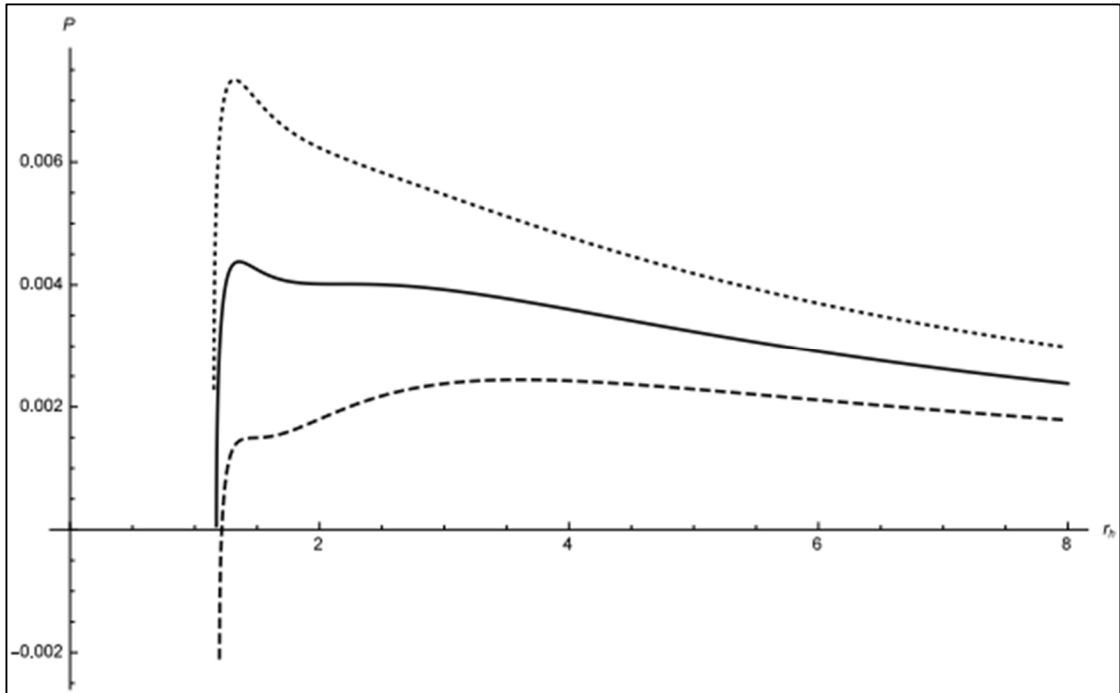
(4.20), (4.21), (4.22) ve (4.23) denklemlerinden açıkça görüldüğü gibi $\tilde{a} \rightarrow 0$ durumunda termal dalgalanmalardan gelen katkıların olmadığı sonuçlar elde edilir (Kubiznak ve Mann, 2012). Yukarıdaki sonuçlardan da rahatlıkla görüleceği gibi kritik noktalar termal dalgalanmalar nedeniyle değişirler. Örneğin; kritik spesifik hacmin değeri azalırken, kritik sıcaklık ve kritik basınç için değer artar. Ayrıca evrensel değer \tilde{a} ve Q ifadelerine bağlı çıkar. Şekil (4.4)'de küçük termal dalgalanmalar için $P - r_h$ grafiği çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi kritik sıcaklığın altındaki karakteristik vdW davranışı görülür.



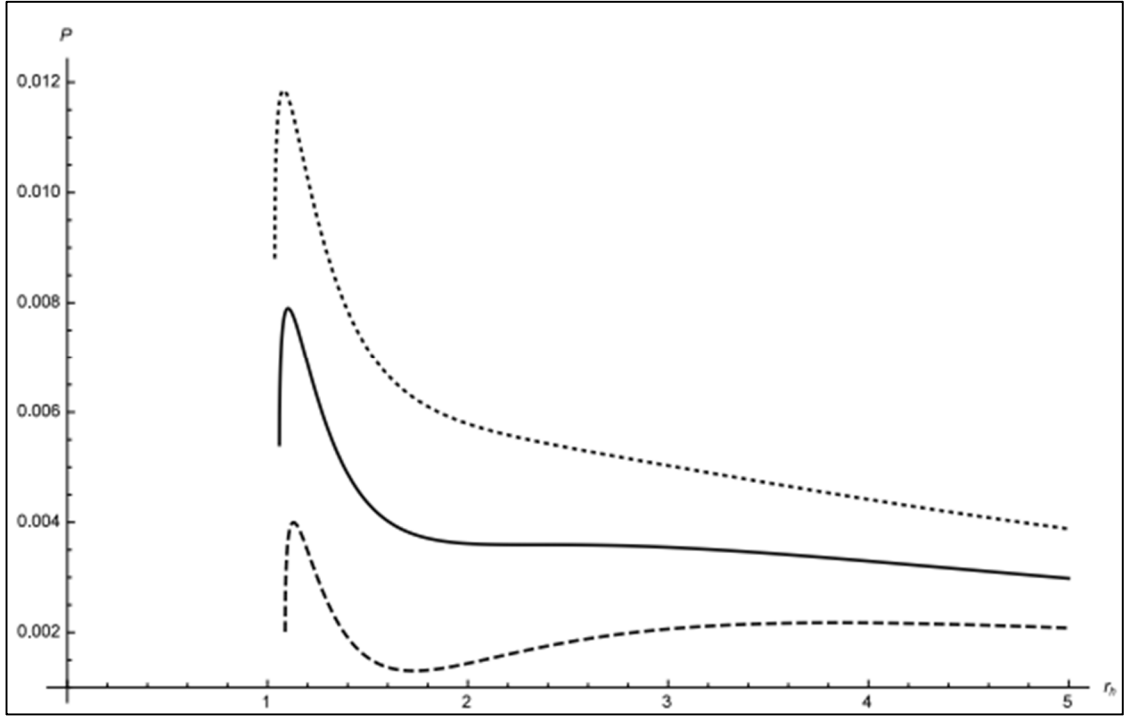
Şekil 4.4: Küçük termal dalgalanma durumunda $P - r_h$ diyagramı. İzotermal eğriler için sıcaklık yukarıdan aşağıya sırasıyla $1.2T_c$, T_c ve $0.8T_c$ değerlerine karşılık gelmektedir. $\tilde{a} = 10^{-9}$ ve $Q = 1$ alınmıştır.

Küçük kütleli karadelikler için termal dalgalanmaların etkisi baskın olduğundan termal dalgalanmaların büyük olduğu durumlarda da faz geçişini incelemek önemlidir. Bu durumda kökleri analitik olarak elde etmek mümkün değildir. Kökleri nümerik olarak elde edebiliriz. (4.5) ve (4.6) şekillerinde $P - r_h$ diyagramları büyük termal

dalgalanmalar için çizilmiştir. Termal dalgalanmalar açıkça faz geçişini etkilemektedir. Termal dalgalanmaların etkisi arttıkça vdW davranışından sapma meydana gelir. Şekillerden de görüldüğü gibi küçük kütleli karadelikler için termal dalgalanmaların etkisi baskındır. Küçük termal dalgalanmaların aksine küçük karadeliklerin bulunduğu kol kararlı değildir ve belirli bir olay ufkunun altında basınç komplekstir. Bu durumu büyük termal dalgalanmalar için karadeliklerin belirli bir olay ufkunun altında olamayacağı şeklinde yorumlamak mümkündür. Bu yorum ayrıca elde ettiğimiz sıcaklık ve entropi niceliklerindeki tekillikler ve negatif bölgeler gibi iyi tanımlı olmayan bölgeleri dışlamak için oldukça kullanışlıdır. Örneğin; şekil (4.6)'da $1.2T_c$ izotermal eğrisi için basınç $r_h < 1.03573$ değerinin altında komplekstir. Entropi ve sıcaklık için tekillikler bu minimum olay ufkundan daha küçük değerlere karşılık gelir. Yani karadelikler bu iyi tanımlı olmayan bölgelere ulaşamazlar.



Şekil 4.5: Büyük termal dalgalanma durumunda $P - r_h$ diyagramı. İzotermal eğriler için sıcaklık yukarıdan aşağıya sırasıyla $1.2T_c$, T_c ve $0.8T_c$ değerlerine karşılık gelmektedir. $\tilde{a} = 1$ ve $Q = 1$ alınmıştır.



Şekil 4.6: Büyük termal dalgalanma durumunda $P - r_h$ diyagramı. İzotermal eğriler için sıcaklık yukarıdan aşağıya sırasıyla $1.2T_c$, T_c ve $0.8T_c$ değerlerine karşılık gelmektedir. $\tilde{a} = 0.5$ ve $Q = 1$ alınmıştır.

4.2.1.1. Kritik Üsteller

Bölüm (2.1.1.2)'de de bahsedildiği gibi benzer faz geçişi davranışı gösteren birbirinden farklı sistemlerin kritik üstelleri aynı çıkar. Yani aynı kritik üstellere sahip sistemler aynı faz geçişi ailesine aittirler. Biz bu bölümde küçük termal dalgalanmalar için kritik üstelleri araştıracağız. Büyük termal dalgalanmalar için hal denkleminin karmaşık yapısı nedeniyle kritik üstellerin elde edilmesi mümkün olmayabilir. Zaten vdW faz geçişinden bir sapma söz konusu olduğundan kritik üsteller farklı çıkabilir.

Küçük termal dalgalanmalar için sabit hacimdeki ısı sığasını $C_V = -\tilde{a} + O(\tilde{a}^2)$ şeklinde elde ederiz. Bu durumda ısı sığası açıkça sıcaklıktan bağımsızdır. Yani $\alpha' = 0$ bulunur.

Denklem (2.93)'deki ifadeler tekrar verelim:

$$t = \frac{T-T_c}{T_c} = \tau - 1, \quad w = \frac{V-V_c}{V_c} = \nu - 1 \quad (4.24)$$

Yukarıdaki ifade (4.18) denkleminde küçük termal dalgalanmalar için verilen hal denkleminde atanır ve kritik noktalar civarında seriye açılırsa

$$p = 1 + \left(\frac{8}{3} - \frac{8\tilde{a}}{27\pi Q^2}\right) + \left(-\frac{8}{9} + \frac{32\tilde{a}}{81\pi Q^2}\right)tw + \left(-\frac{4}{81} + \frac{16\tilde{a}}{729\pi Q^2}\right)w^3 + O(tw^2, w^4) \quad (4.25)$$

elde edilir. $t < 0$ için ifadenin diferansiyeli alınır

$$dP = -\frac{4}{27}P_C \left[\left(6 - \frac{8}{3\pi Q^2}\tilde{a}\right)t + \left(1 - \frac{4\tilde{a}}{9\pi Q^2}\right)w^2 \right] dw \quad (4.26)$$

bulunur. Basınçların eşitliğinden ve Maxwell eşit alan yasasından

$$\begin{aligned} p &= 1 + \left(\frac{8}{3} - \frac{8\tilde{a}}{27\pi Q^2}\right) + \left(-\frac{8}{9} + \frac{32\tilde{a}}{81\pi Q^2}\right)tw_b + \left(-\frac{4}{81} + \frac{16\tilde{a}}{729\pi Q^2}\right)w_b^3 \\ &= 1 + \left(\frac{8}{3} - \frac{8\tilde{a}}{27\pi Q^2}\right) + \left(-\frac{8}{9} + \frac{32\tilde{a}}{81\pi Q^2}\right)tw_k + \left(-\frac{4}{81} + \frac{16\tilde{a}}{729\pi Q^2}\right)w_k^3 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$0 = \int_{w_b}^{w_k} w P_C \left[\left(6 - \frac{8}{3\pi Q^2}\tilde{a}\right)t + \left(1 - \frac{4\tilde{a}}{9\pi Q^2}\right)w^2 \right] dw \quad (4.28)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin birlikte çözülmesiyle $w_b = -w_k = 3\sqrt{-2t}$ çözümleri elde edilir. Bu durumda mertebe parametresi

$$\eta^0 = V_c(w_b - w_k) = 2V_c w_b = 6V_c \sqrt{-2t} \quad (4.29)$$

şeklinde bulunur. Yani $\beta = \frac{1}{2}$ bulunur.

İzotermal sıkıştırılabilirlik üsteli γ ise

$$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{81\pi Q^2}{8P_C(9\pi Q^2 - 4\tilde{a})} \frac{1}{t} + O(w) \quad (4.30)$$

olduğundan $\gamma = 1$ bulunur. Son olarak δ üstelini (4.25) denkleminde $t = 0$ için

$$p - 1 = \left(-\frac{4}{81} + \frac{16\tilde{a}}{729\pi Q^2}\right)w^3 \quad (4.31)$$

elde edilir. Yani $\delta = 3$ bulunur.

Küçük termal dalgalanmalar için RN-AdS karadelığının kritik üstellerini $\alpha' = 0, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 1$ ve $\delta = 3$ şeklinde elde ettik. Bunlar termal dalgalanmanın olmadığı durumdaki RN-AdS karadelikleriyle aynı çıkar.

4.3. TSALLIS-RENYİ ENTROPİ MODELİNDE RN KARADELİĞİ

Bu bölümde düz uzayzamandaki RN karadelikleri için Tsallis-Renyi entropi modelini ele alacağız. Bölüm (3.3)'te λ parametresinin AdS uzayzamani eğrilik yarıçapı gibi davrandığını gösterdik. Bu düşünceden hareketle düz uzayzamandaki RN karadeliklerinin TR modelinde RN-AdS karadelikleri gibi davranacağını göstereceğiz. Ayrıca bölüm (2.3)'te tanımladığımız faz geçişine benzer bir faz geçişini düşünmek mümkündür. RN-AdS karadeliklerinin $P \rightarrow 0$ durumunda düz uzayzamandaki RN karadeliklerinin termodinamik niceliklerini vermek mümkündür:

$$M = \frac{r_h^2 + Q^2}{2r_h} \quad (4.32)$$

$$S = \pi r_h^2 \quad (4.33)$$

$$T = \frac{r_h^2 - Q^2}{4\pi r_h^3} \quad (4.34)$$

$$C = 2\pi r_h^2 \frac{r_h^2 - Q^2}{3Q^2 - r_h^2} \quad (4.35)$$

$$G = \frac{r_h^2 + 3Q^2}{4r_h} \quad (4.36)$$

RN karadelığının entropisini Tsallis entropisi olarak ele alırsak

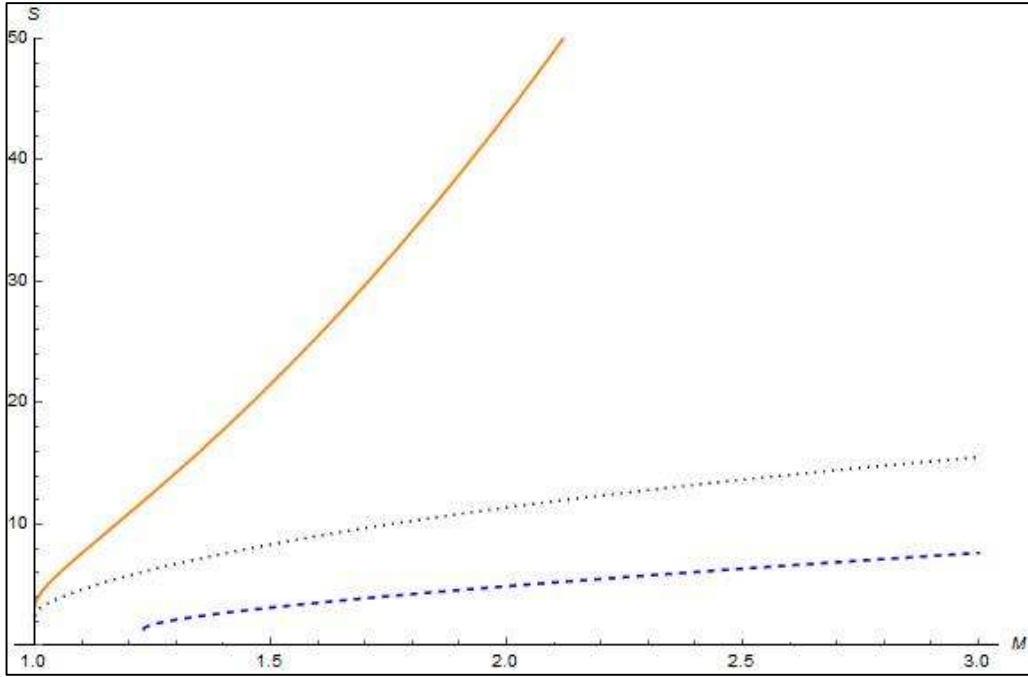
$$S_R = \frac{1}{\lambda} \ln[1 + \lambda \pi r_h^2] \quad (4.37)$$

yazılır. Sıcaklık ve ısı sığası sırasıyla

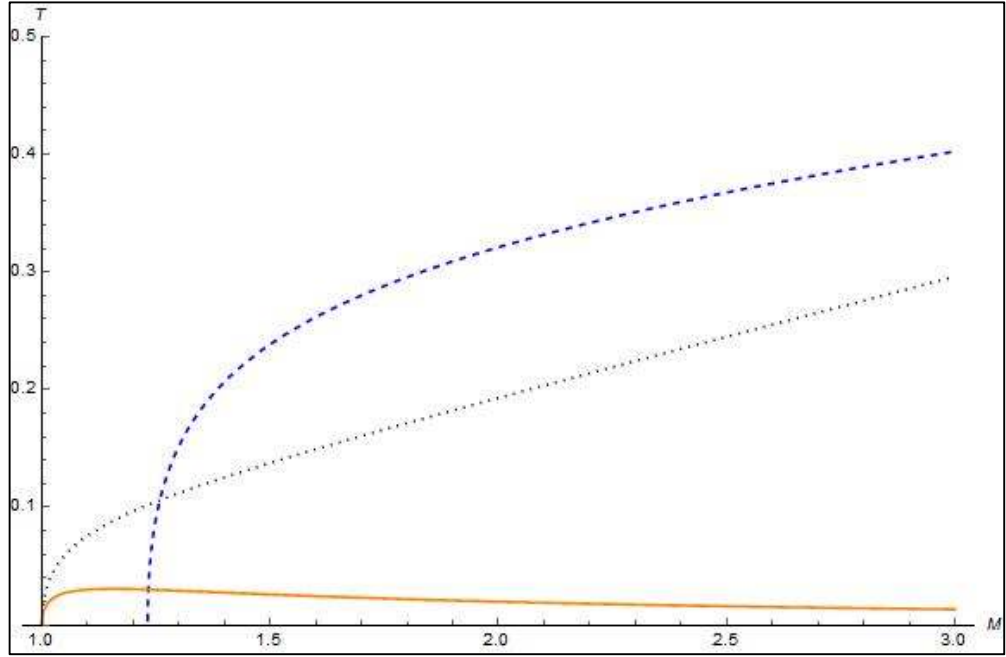
$$T_R = \left(\frac{\partial M}{\partial S_R} \right)_Q = \frac{\lambda \pi r_h^4 - (\lambda \pi Q^2 - 1) r_h^2 - Q^2}{4\pi r_h^3} \quad (4.38)$$

$$C_R = T_R \left(\frac{\partial S_R}{\partial T_R} \right) = \frac{2\pi r_h^2 (r_h^2 - Q^2)}{\lambda \pi r_h^4 + (\lambda \pi Q^2 - 1) r_h^2 + 3Q^2} \quad (4.39)$$

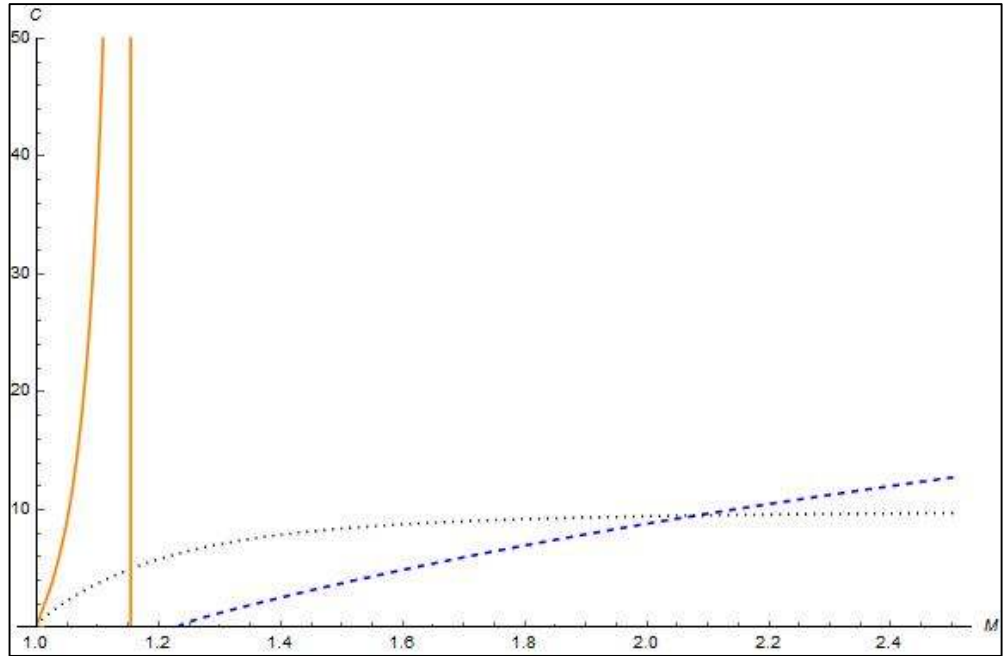
ile verilir. (4.7), (4.8) ve (4.9) numaralı şekillerde sırasıyla entropinin, sıcaklığın ve ısı sığasının kütleyle göre değişimleri her üç durum için gösterilmiştir. Şekillerden de görüleceği üzere λ parametresinin AdS eğrilik yarıçapı gibi davranması nedeniyle TR modelinde hesaplanan termodinamik nicelikler, AdS için hesaplanan niceliklerle benzerlikler göstermektedir.



Şekil 4.7: Entropilerin kütleyle göre değişimi. Turuncu çizgi RN, kesikli mavi çizgi TR modeli, siyah noktalı çizgi RN-AdS entropilerine karşılık gelmektedir. $Q = 1$, $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır.



Şekil 4.8: Sıcaklıkların kütleyle göre değişimi. Turuncu çizgi RN, kesikli mavi çizgi TR modeli, siyah noktali çizgi RN-AdS entropilerine karşılık gelmektedir. $Q = 1$, $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır.



Şekil 4.9: Isı sığalarının kütleyle göre değişimi. Turuncu çizgi RN, kesikli mavi çizgi TR modeline, siyah noktali çizgi RN-AdS entropilerine karşılık gelmektedir. $Q = 1$, $\lambda = 0.2$ ve $l = 1$ alınmıştır.

4.3.1. Faz Geçişi ve Kritik Noktalar

λ parametresinin AdS eğrilik yarıçapı gibi davranması nedeniyle faz geçişlerini RN karadelikleri için incelemek mümkündür. Biz bu incelemeyi iki farklı şema kullanarak yapacağız. İlk şemamızda (Chamblin ve diğ., 1999a; Chamblin ve diğ., 1999b) RN karadelığının faz geçişini $\beta_R - S_R$ düzleminde kritik yüke göre araştıracağız. İkinci şemamız ise tezin ikinci bölümünde ayrıntılı olarak anlattığımız $P - V$ şemasına benzemektedir. Biz basınç yerine λ parametresini kullanacağız. Şimdi sırasıyla bu şemalar için faz geçişlerini inceleyelim:

4.3.1.1. $\beta - S$ Düzleminde RN Karadelığının Faz Geçişi

(4.37) ve (4.38) denklemlerinden elde edilen hal denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\beta_R = \frac{1}{T_R} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{4e^{-\lambda S_R}(e^{\lambda S_R} - 1)}{(e^{\lambda S_R} - 1 - \pi\lambda Q^2)} \quad (4.40)$$

Kritik noktalar

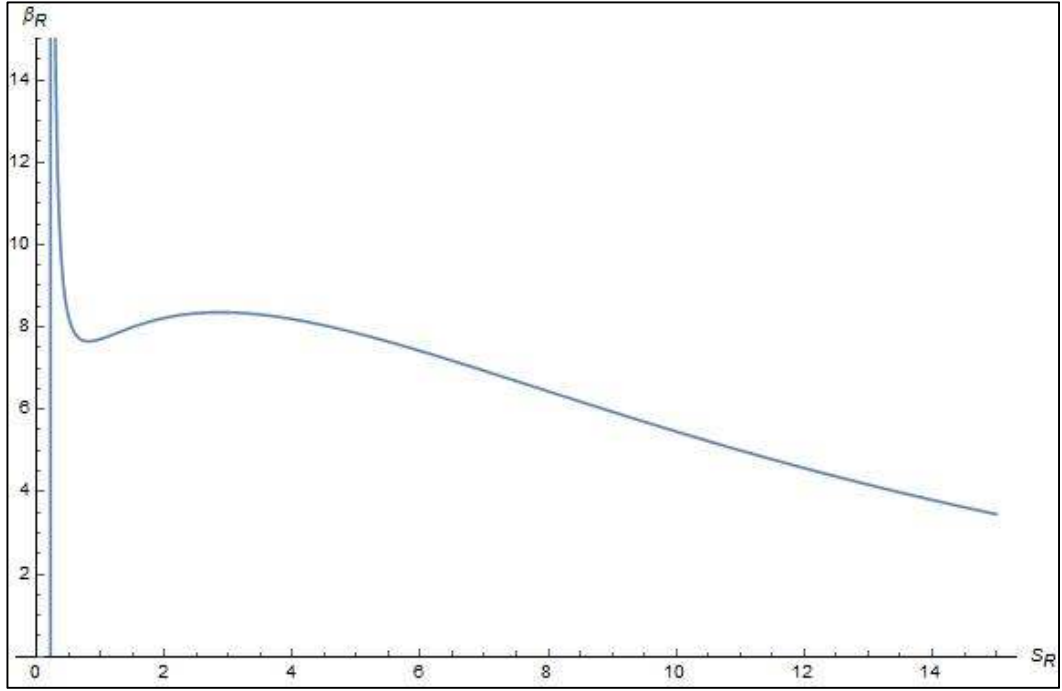
$$\frac{\partial \beta_R}{\partial S_R} = \frac{\partial^2 \beta_R}{\partial S_R^2} = 0 \quad (4.41)$$

ifadelerinden hesaplanırsa

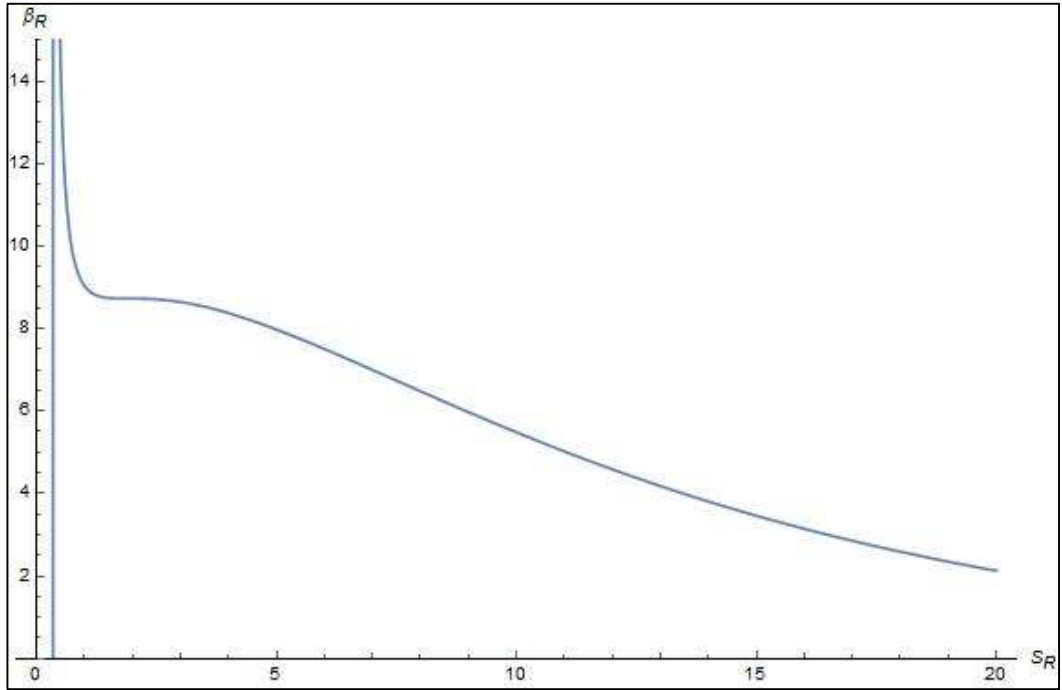
$$S_c = \frac{1}{\lambda} \ln[2(\sqrt{3} - 1)], \quad Q_c = \sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{\pi\lambda}}, \quad \beta_c = \frac{(2\sqrt{3}+3)}{2} \sqrt{\frac{(2\sqrt{3}-3)\pi}{\lambda}} \quad (4.42)$$

elde edilir.

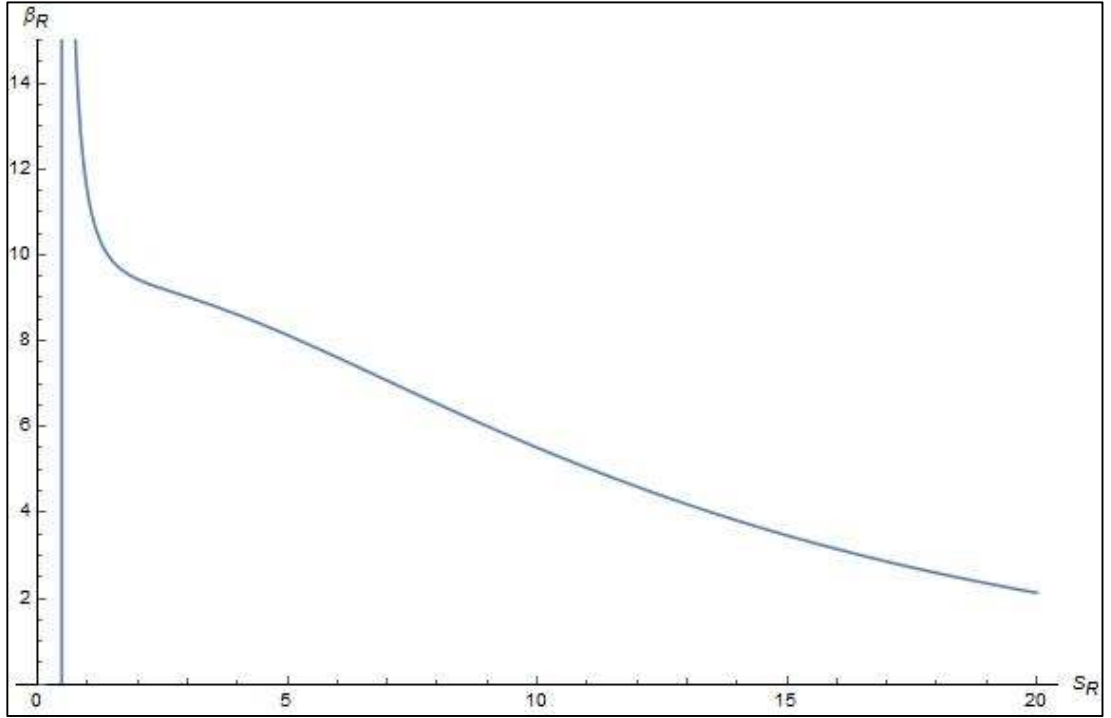
(4.10), (4.11) ve (4.12) numaralı şekillerde TR modelinde RN karadelığının $\beta_R - S_R$ diyagramları çizilmiştir. Şekil (4.10)'da kritik yükün altında vdW ve RN-AdS sistemlerinde görülen karakteristik davranış gözlenir. Şekil (4.11) kritik yük için çizilmiştir. Şekil (4.12)'de kritik yükün üzerinde ideal gaz davranışı söz konusudur. Küçük karadeliklerin bulunduğu kol kararlı değildir.



Şekil 4.10: $0.8Q_C$ için $\beta_R - S_R$ grafiği. $\lambda = 0.2$ alınmıştır.



Şekil 4.11: Q_C için $\beta_R - S_R$ grafiği. $\lambda = 0.2$ alınmıştır.



Şekil 4.12: $1.2Q_c$ için $\beta_R - S_R$ grafiği. $\lambda = 0.2$ alınmıştır.

4.3.1.2. $\lambda - v$ Düzleminde RN Karadelığının Faz Geçişi

(4.38)'den hal denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\lambda = \frac{4r_h T}{-Q^2 + r_h^2} - \frac{1}{\pi r_h^2} \quad (4.43)$$

Kritik noktalar

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r_h} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r_h^2} = 0 \quad (4.44)$$

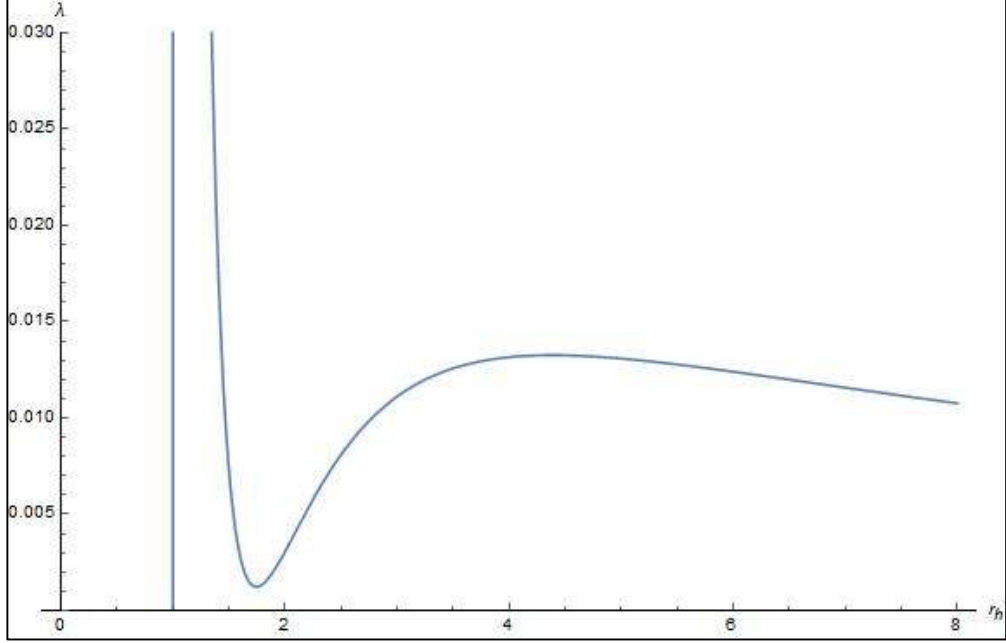
ile hesaplanırsa

$$r_c = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}Q, \quad T_c = \frac{2}{\sqrt{135 + 78\sqrt{3}}\pi Q}, \quad \lambda_c = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{\pi Q^2} \quad (4.45)$$

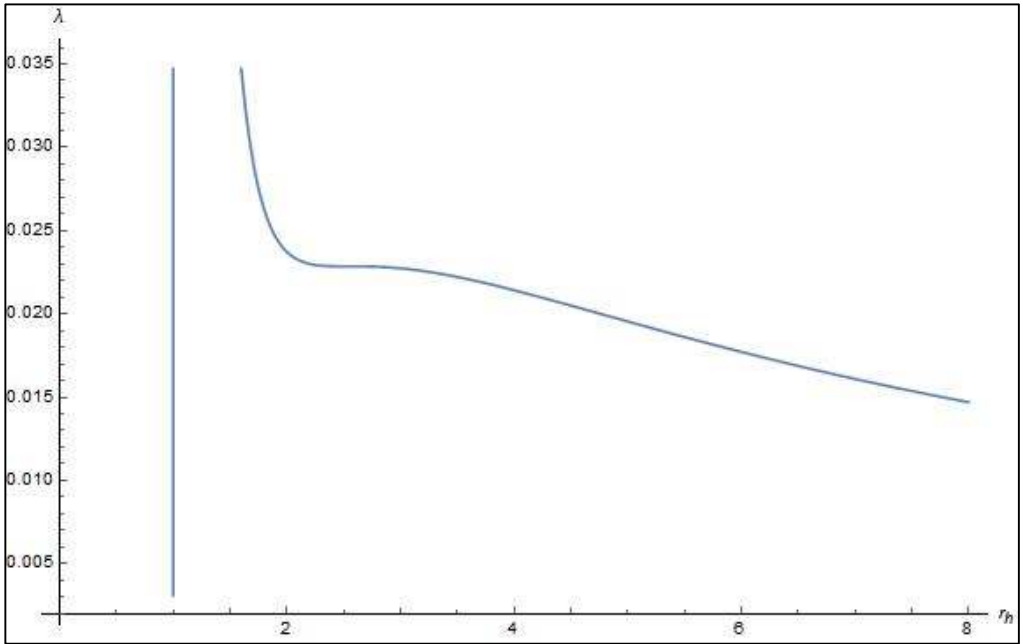
kritik noktalar olarak bulunur. Olay ufku $v = \frac{r_h}{4}$ şeklinde spesifik hacim ile ilişkilendirilirse evrensel değer

$$\frac{P_c v_c}{T_c} = \frac{3}{8} \quad (4.46)$$

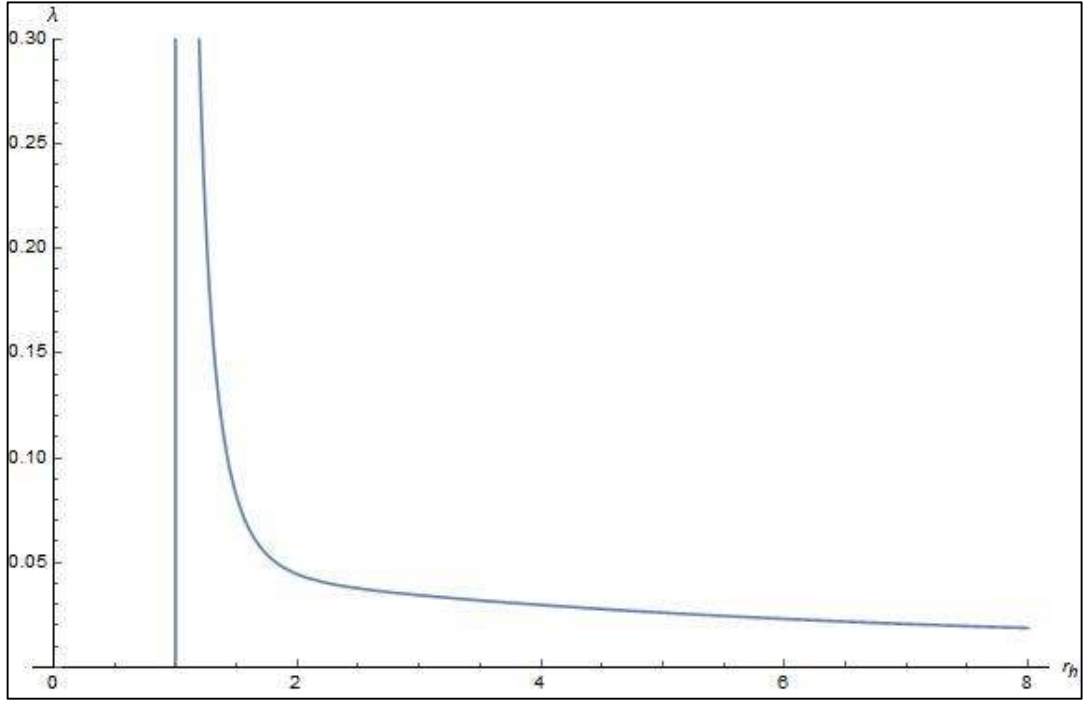
olarak bulunur.



Şekil 4.13: $0.8T_c$ için $\lambda - r_h$ grafiği. $Q=1$ alınmıştır.



Şekil 4.14: T_c için $\lambda - r_h$ grafiği. $Q = 1$ alınmıştır.

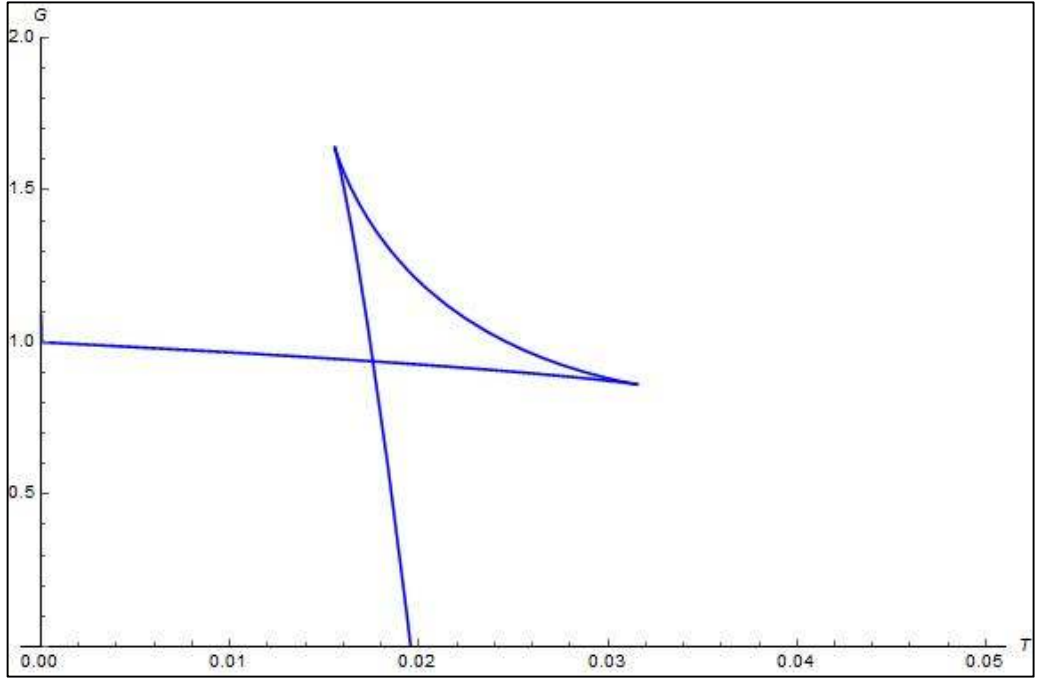


Şekil 4.15: $1.2T_c$ için $\lambda - r_h$ grafiği. $Q = 1$ alınmıştır.

(4.13) numaralı şekilde vdW ve RN-AdS sistemlerindeki benzer davranış söz konusudur. Şekil (4.14) kritik sıcaklık için çizilmiştir. Şekil (4.15)'de ise kritik sıcaklığın üzerinde ideal gaz davranışı söz konusudur. Benzer şekilde küçük karadeliklerin bulunduğu kolun kararlı olmadığı görülebilir.

Şekil (4.16)'da Gibbs serbest enerjisinin sıcaklığa göre grafiği verilmiştir. Kritik basıncın altındaki değer için klasik kelebek kanadı davranışı gözükmektedir. Bu da vdW ve RN-AdS karadeliklerinde gerçekleşen bir durumdur. Açıkça λ parametresi AdS eğrilik yarıçapı gibi davranmaktadır.

Son olarak her iki faz şeması için sonuçlarımızın $0 \leq \lambda \leq 1$ aralığında anlamlı olduğunu hatırlatalım.



Şekil 4.16: Gibbs serbest enerjisinin sıcaklığa göre değişimi. $\lambda = 0.08\lambda_c$ ve $Q = 1$ alınmıştır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında genişletilmiş faz uzayındaki RN-AdS karadeliklerinin termodinamik özelliklerine değindik. RN-AdS karadelikleri için JT genişmesi ile termal dalgalanmaların etkilerini ve düz uzayzamandaki RN karadelikleri için TR entropi modelinin sonuçlarını araştırdık.

RN-AdS karadelikleri için JT genişmesi sırasında vdW sistemlerinden farklı olarak kütlenin değişmediğini gösterdik. Dolayısıyla RN-AdS karadelikleri için izoentalpik bir süreç aynı zamanda kütlenin değişmediği bir süreç olarak ele alınabilir. Her iki sistemde de inversiyon ve izoentalpik eğrileri $T - P$ düzleminde inceledik. Her iki sistem için inversiyon eğrilerinin içerisinde kalan bölgede soğuma meydana gelir. vdW sistemlerinden farklı olarak sadece alt inversiyon eğrisi tanımlıdır ve bu eğrinin herhangi bir noktada neden sonlanmadığını açıkladık. Ayrıca RN-AdS karadeliklerinde JT genişmesi sırasında inversiyon eğrisinin üstündeki kapalı olmayan bölgede daima soğuma gözükür. Ancak her iki sistem için alt inversiyon eğrisinin altında izoentalpik eğriler iyi tanımlı değildirler. Son olarak çıplak tekillikler söz konusu olduğunda JT sürecinin tanımlanamayacağını gösterdik.

İkinci problem olarak termal dalgalanmaları RN-AdS karadelikleri için inceledik. Öncelikle karadeliklerin entropisi için termal dalgalanmalardan gelen katkının elde edilmesini ele aldık. Daha sonra entropiden gelen bu katkıyı RN-AdS karadelığının diğer termodinamik niceliklerini elde etmek için kullandık. Termal dalgalanma katkılarını içeren bir hal denklemini elde ettik. Bu denklemden küçük termal dalgalanma durumunda analitik olarak kritik noktaları elde etmek mümkündür. Küçük termal dalgalanma durumunda faz geçişi vdW ve RN-AdS sistemlerinininkiyle aynıdır. Benzer şekilde kritik üsteller de küçük termal dalgalanmalar durumunda aynı çıkmaktadır. Küçük karadelikler için termal dalgalanmaların etkileri baskın olduğundan, faz geçişlerini büyük termal dalgalanmalar durumunda da çalışmak önemlidir. Hal denkleminin karmaşıklığı nedeniyle kritik noktaları büyük termal dalgalanmalar için nümerik olarak elde etmek mümkündür. Büyük termal dalgalanmalar için vdW tipi faz geçişinden sapma söz

konusudur. Ayrıca karadeliklerin var olabileceği minimum bir olay ufku elde ettik. Bu minimum olay ufku şartı termal dalgalanma durumundaki entropi ve sıcaklık niceliklerindeki tekillikleri ve negatif bölgeleri dışlamak için oldukça kullanışlıdır. Bu dalgalanmaların küçük karadelikler için baskın olduğu bilinmektedir. Elde ettiğimiz sonuçlar bu açıdan bir tutarlılık göstermektedir.

Son olarak TR entropi modelini karadelikler için ele aldık. Öncelikle düz uzayzamandaki Schwarzschild karadeliklerinin entropisinin Tsallis entropisi olarak ele alınması durumundan bahsettik. Karadelğin entropisi Tsallis entropisi olarak ele alınır ve Renyi entropisiyle ilişkilendirilirse elde edilen sonuçlar AdS uzayzamanındaki karadeliklerle benzerlikler göstermektedir. Yani λ parametresi l AdS eğrilik yarıçapı gibi davranmaktadır. Biz de bunu düz uzayzamandaki RN karadelikleri için tekrar ele aldık. Elde ettiğimiz sonuçlar daha önceden yapılan çalışmalardaki (Biro, 2010; Biro ve Czinner, 2013; Czinner ve Iguchi, 2016) sonuçlarla bu açıdan benzerlik göstermektedir. TR modelindeki RN karadelikleri için faz geçişlerini iki şema kullanarak inceledik (Chamblin ve diğ., 1999a; Chamblin ve diğ., 1999b; Kubiznak ve Mann, 2012). Elde edilen sonuçlar RN-AdS karadeliklerinin sonuçlarıyla benzerlikler göstermektedir.

Sonuç olarak değişen kozmolojik sabit fikri etrafında RN-AdS karadelikleri için JT genişmesini ile termal dalgalanmaların ve düz uzayzamandaki RN karadelikleri için de TR entropi modelinin etkilerini inceledik. Elde ettiğimiz bulgular literatürdeki çalışmalarla uyumakta olup yaptığı katkı bakımından önemlidir.

KAYNAKLAR

- Agrawal, D., Menon, V. J., 1990, The Carnot cycle with the van der Waals equation of state, *European Journal of Physics*, 11(2), 88-90.
- Ali, A. F., 2012, No existence of black holes at LHC due to minimal length in quantum gravity, *Journal of High Energy Physics*, 2012(9), 1-14.
- Altamirano, N., Kubiznak, D., Mann, R. B., Sherkatghanad, Z., 2014, Kerr-AdS analogue of triple point and solid/liquid/gas phase transition, *Classical and Quantum Gravity*, 31(4), 042001-042009.
- Altamirano, N., Kubiznak, D., Mann, R. B., Sherkatghanad, Z., 2014, Thermodynamics of rotating black holes and black rings: Phase transition and thermodynamic volume, *Galaxies*, 2(1), 89-159.
- Asthekar, A., 1991, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, World Scientific Publishing Company, Singapore.
- Bagher, M., Poshteh, J., Mirza, B., Sherkatghanad, Z., 2013, Phase transition, critical behavior, and critical exponents of Myers-Perry black holes, *Physical Review D*, 88(2), 024005-024012.
- Ballik, W., Lake, K., 2010, The volume of stationary black holes and the meaning of the surface gravity, arXiv:1005.1116 [gr-qc], 1-6.
- Ballik, W., Lake, K., 2013, Vector volume and black holes, *Physical Review D*, 88(10), 104038-104054.
- Banerjee, R., Ghosh, S., Roychowdhury, D., 2011, New type of phase transition in Reissner Nordström-AdS black hole and its thermodynamic geometry, *Physics Letters B*, 696(1-2), 156-162.
- Banerjee, R., Modak, S. K., Roychowdhury, D., 2012, A unified picture of phase transition: From liquid-vapor systems to AdS black hole, *Journal of High Energy Physics*, 10(125), 1-10.
- Banerjee, R., Modak, S. K., Samanta, S., 2010, Glassy phase transition and stability in black holes, *European Physics Journal C*, 70(1), 317-328.
- Banerjee, R., Modak, S. K., Samanta, S., 2011, Second order phase transition and thermodynamic geometry in Kerr-AdS black holes, *Physical Review D*, 84(6), 064024-064031.
- Banerjee, R., Roychowdhury, D., 2011, Thermodynamics of phase transition in higher dimensional AdS black holes, *Journal of High Energy Physics*, 11(004), 1-12.

- Bekenstein, J. D., 1972, Black holes and the second law, *Lettere Al Nuovo Cimento*, 4(15), 737-740.
- Bekenstein, J. D., 1973, Black holes and entropy, *Physical Review D*, 7(8), 2333-2346.
- Belhaj, A., Chabab, M., Moumni, H. E., Masmar, K., Sedra, M. B., 2015, Critical behaviors of 3D black holes with a scalar hair, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 12(2), 1550017-1550027.
- Belhaj, A., Chabab, M., Moumni, H. E., Masmar, K., Sedra, M. B., Segui, A., 2015, On heat properties of AdS black holes in higher dimensions, *Journal of High Energy Physics*, 05(149), 1-12.
- Belhaj, A., Chabab, M., Moumni, H. E., Medari, L., Sedra, M. B., 2013, On thermodynamical behaviors of Kerr-Newman AdS black holes, *Chinese Physics Letters*, 30(9), 090402-090406.
- Berberan-Santos, M. N., Bodunov, E. N., Pogliani, L., The van der Waals equation: Analytical and approximate solutions, *Journal of Mathematical Chemistry*, 43(4), 1437-1457.
- Birmingham, D., Sen, S., 2001, Exact black hole entropy bound in conformal field theory, *Physical Review D*, 63(4), 047501-047503.
- Biro, T. S., 2010, Non-Extensive Black Hole Thermodynamics Estimate for Power-Law Particle Spectra, arXiv:1011.3442[hep-ph], 1-4.
- Biró, T. S., Czinner, V. G., 2013, A q-parameter bound for particle spectra based on black hole thermodynamics with Rényi entropy, *Physics Letters B*, 726(4), 861-865.
- Caceres, E., Nguyen, P. H., Pedraza, J. F., 2015, Holographic entanglement entropy and the extended phase structure of STU black holes, *Journal of High Energy Physics*, 1509(184), 1-32.
- Cai, R-G, Cao, L-M., Li, L., Yang, R-Q., 2013, P-V criticality in the extended phase space of Gauss-Bonnet black holes in AdS space, *Journal of High Energy Physics*, 09(005), 1-21.
- Caldarelli, M. M., Cognola, G., Klemm, D., 2000, Thermodynamics of Kerr–Newman–AdS black holes and conformal field theories, *Classical and Quantum Gravity*, 17(2), 399-420.
- Carlip, S., 2000, Logarithmic corrections to black hole entropy from the Cardy formula, *Classical and Quantum Gravity*, 17(20), 4175-4186.
- Chamblin, A., Emparan, R., Johnson, C. V., Myers, R. C., 1999, Charged AdS black holes and catastrophic holography, *Physical Review D*, 60(6), 064018-064034.

- Chamblin, A., Emparan, R., Johnson, C. V., Myers, R. C., 1999, Holography, thermodynamics, and fluctuations of charged AdS black holes, *Physical Review D*, 60(10), 104026-104045.
- Czinner, V. G., Iguchi, H., 2016, Rényi entropy and the thermodynamic stability of black holes, *Physics Letters B*, 752, 306-310.
- Das, S., Majumdar, P., Bhaduri, R. K., 2002, General logarithmic corrections to black hole entropy, *Classical and Quantum Gravity*, 19(9), 2355-2367.
- Dolan, B. P., 2011, Compressibility of rotating black holes, *Physical Review D*, 84(12), 127503-127505.
- Dolan, B. P., 2011, Pressure and volume in the first law of black hole thermodynamics, *Classical and Quantum Gravity*, 28(23), 235017-235029.
- Dolan, B. P., 2011, The cosmological constant and black-hole thermodynamic potentials, *Classical and Quantum Gravity*, 28(12), 125020-125032.
- Dolan, B. P., 2012, Where is the PdV in the first law of black hole thermodynamics, arXiv:1209.1272 [gr-qc], 1-28.
- Dolan, B. P., 2015, Black holes and Boyle's law-The thermodynamics of the cosmological constant, *Modern Physics Letters A*, 30, 1540002-1540021.
- Faizal, M., Khalil, M. M., 2015, GUP-corrected thermodynamics for all black objects and the existence of remnants, *International Journal of Modern Physics A*, 30(22), 1550144-1550156.
- Faizal, M., Pourhassan, B., 2015, Correction terms for the thermodynamics of a black Saturn, *Physics Letters B*, 751, 487-494.
- Gangopadhyay, S., Dutta, A., Saha, A., 2014, Generalized uncertainty principle and black hole thermodynamics, *General Relativity and Gravitation*, 46(2), 1-10.
- Goldenfeld, N., 1992, *Lectures on Phase Transition and the Renormalization Group*, Addison-Wesley, USA.
- Govindarajan, T. R., Kaul, R. K., Suneeta, V., 2001, Logarithmic correction to the Bekenstein-Hawking entropy of the BTZ black hole, *Classical and Quantum Gravity*, 18(15), 2877-2885.
- Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H., 1997, *Thermodynamics and Statical Mechanics*, Springer, USA.
- Grøn, Ø., Hervik, S., 2007, *Einstein's General Theory of Relativity: with Modern Applications in Cosmology*, Springer, USA.
- Gunasekaran, S., Kubizňák, D., Mann, R. B., 2012, Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization, *Journal of High Energy Physics*, 11(110), 1-43.

- Guo, X., Li, H., Zhang, L., Zhao, R., 2015, Thermodynamics and phase transition in the Kerr–de Sitter black hole, *Physical Review D*, 91(8), 084009-084018.
- Hawking, S. W., 1974, Black hole explosions?, *Nature*, 248, 30-31.
- Hawking, S. W., 1975, Particle creation by black holes, *Communications in Mathematical Physics*, 43(3), 199-220.
- Hawking, S. W., Page, D. N., 1983, Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space, *Communications in Mathematical Physics*, 87(4), 577-588.
- Hayward, S. A., 1998, Unified first law of black-hole dynamics and relativistic thermodynamics, *Classical and Quantum Gravitation*, 15(10), 3147–3162.
- Hendi, S. H., Panahiyan, S., Panah, B. E., 2016, Charged black hole solutions in Gauss-Bonnet-massive gravity, *Journal of High Energy Physics*, 01(129), 1-34.
- Hendi, S. H., Vahidinia, M. H., 2013, Extended phase space thermodynamics and P-V criticality of black holes with a nonlinear source, *Physical Review D*, 88(8), 084045-084055.
- Henneaux, M., Teitelboim, C., 1984, The cosmological constant as a canonical variable, *Physics Letters B*, 143(4-6), 415-420.
- Henneaux, M., Teitelboim, C., 1989, The cosmological constant and general covariance, *Physics Letters B*, 222(2), 195-199.
- Holyst, R., Poniewierski, A., 2012, *Thermodynamics for Chemists, Physicists and Engineers*, Springer, London.
- Jing, J., Yan, M. L., 2000, Statistical entropy of a stationary dilaton black hole from the Cardy formula, *Physical Review D*, 63(2), 024003-024008.
- Johnson, C. V., 2014, Holographic heat engines, *Classical and Quantum Gravitation*, 31(20), 205002-205014.
- Johnson, C. V., 2015, Born-Infeld AdS black holes as heat engines, arXiv:1512.01746 [hep-th], 1-13.
- Johnson, C. V., 2015, Gauss-Bonnet black holes and holographic heat engines beyond large N , arXiv:1511.08782 [hep-th], 1-19.
- Johnson, C. V., 2016, An exact efficiency formula for holographic heat engines, *Entropy*, 18(4), 120-126.
- Johnston, D. C., 2014, Thermodynamic properties of the van der Waals fluid, arXiv:1402.1205 [cond-mat.soft], 1-41.
- Kastor, D., Ray, S., Traschen, J., 2009, Enthalpy and the mechanics of AdS black holes, *Classical and Quantum Gravity*, 26(19), 195011-195026.

- Kubiznak, D., Mann, R. B., 2012, P – V criticality of charged AdS black holes, *Journal of High Energy Physics*, 07(033), 1-22.
- Kubiznak, D., Mann, R. B., 2014, Black hole chemistry, arXiv:1404.2126 [gr-qc], 1-12.
- Lala, A., Roychowdhury, D., 2012, Ehrenfest's scheme and thermodynamic geometry in Born-Infeld AdS black holes, *Physical Review D*, 86(8), 084027-084034.
- Li, G-Q., 2014, Effects of dark energy on P-V criticality of charged AdS black holes, *Physics Letters B*, 735(0370-2693), 256-260.
- Liang, J., Sun, C. B., Feng, H. T., 2016, P-V criticality in the extended phase space of charged $f(R)$ black holes in AdS space-time, *Europhysics Letters*, 113(3), 30008-30013.
- Lowe, D. A., Roy, S., 2010, Punctuated eternal inflation via AdS/CFT duality, *Physical Review D*, 82(6), 063508-063521.
- Ma, M. S., Zhang, L. C., Zhao, H. H., Zhao, R., 2015, Phase transition of higher dimensional charged Gauss-Bonnet black hole in de Sitter spacetime, *Advances in High Energy Physics*, 2015, 134815-134822.
- Mann, R. B., Solodukhin, S. N., 1998, Universality of quantum entropy for extreme black holes, *Nuclear Physics B*, 523(1), 293-307.
- Medved, A. J. M., Kunstatter, G., 1999, Quantum corrections to the thermodynamics of charged 2D black holes, *Physical Review D*, 60(10), 104029-104044.
- Medved, A. J. M., Kunstatter, G., 2001, One-loop corrected thermodynamics of the extremal and nonextremal spinning Banados-Teitelboim-Zanelli black hole, *Physical Review D*, 63(10), 104005-104016.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., 1973, *Gravitation*, W. H. Freeman, USA.
- Mo, J. X., Liu, W. B., 2013, Ehrenfest scheme for P-V criticality in the extended phase space of black holes, *Physics Letters B*, 727(1-3), 336-339.
- Mo, J. X., Liu, W. B., 2015, P-V Criticality of Conformal Anomaly Corrected AdS Black Holes, *Advances in High Energy Physics*, 2015, 206963-206970.
- Niu, C, Tian, Y., Wu, X. N., 2012, Critical phenomena and thermodynamic geometry of Reissner-Nordström-anti-de Sitter black holes, *Physical Review D*, 85(2), 024017-024024.
- Parikh, M. K., 2006, Volume of black holes, *Physical Review D*, 73(12), 124021-124025.
- Pourhassan, B., Faizal, M., 2015, Thermal fluctuations in a charged AdS black hole, *Europhysics Letters*, 111(4), 40006-40010.
- Pourhassan, B., Faizal, M., 2016, Effect of thermal fluctuations on a charged dilatonic black Saturn, *Physics Letters B*, 755, 444-451.

- Pourhassan, B., Faizal, M., Debnath, U., 2016, Effects of thermal fluctuations on the thermodynamics of modified Hayward black hole, *The European Physical Journal C*, 76(3), 1-6.
- Prigogine, I., Defay, R., 1954, *Chemical Thermodynamics*, Longman Green, New York.
- Rubio, E. A. L., 2007, Stringy generalization of the first law of thermodynamics for rotating BTZ black hole with a cosmological constant as state parameter, arXiv:0711.0012 [gr-qc], 1-5.
- Sen, A., 2011, State operator correspondence and entanglement in AdS₂/CFT₁, *Entropy*, 13(7), 1305-1323.
- Sen, A., 2013, S-duality improved superstring perturbation theory, arXiv:1304.0458, 1-27.
- Sadeghi, J., Jafarzade, K., 2015, Heat engine of black holes, arXiv:1504.07744, 1-12.
- Sadeghi, J., Pourhassan, B., Rahimi, F., 2014, Logarithmic corrections of charged hairy black holes in (2+ 1) dimensions, *Canadian Journal of Physics*, 92(12), 1638-1642.
- Sadeghi, J., Pourhassan, B., Rostami, M., 2016, P– V criticality of logarithm-corrected dyonic charged AdS black holes, *Physical Review D*, 94(6), 064006-064012.
- Sekiwa, Y., 2006, Thermodynamics of de Sitter black holes: Thermal cosmological constant, *Physical Review D*, 73(8), 084009-084019.
- Setare, M. R., Adami, H., 2015, Polytropic black hole as a heat engine, *General Relativity and Gravitation*, 47, 133-137.
- Shuang, W., Shuang-Qin, W., Fei, X., Lin, D., 2006, The first law of thermodynamic of the (2+1)-dimensional Banados-Teitelboim-Zanelli black holes and Kerr-de-Sitter spacetimes, *Chinese Physics Letters*, 23(5), 1096-1098.
- Smarr, L., 1973, Mass Formula for Kerr black holes, *Physical Review Letters*, 30(2-8), 71-73.
- Solodukhin, S. N., 1998, Entropy of the Schwarzschild black hole and the string–black-hole correspondence, *Physical Review D*, 57(4), 2410-2414.
- Spalluci, E., Smailagic, A., 2013, Maxwell’s equal area law for charged Anti-deSitter black holes, *Physics Letters B*, 723(4-5), 436-441.
- Teitelboim, C., 1985, The cosmological constant as a thermodynamic black hole parameter, *Physics Letters B*, 158(4), 293-297.
- Tsai, Y. D., Wu, X. N., Yang, Y., 2012, Phase structure of the Kerr-AdS black hole, *Physical Review D*, 85(4), 044005-044013.
- Tsallis, C., 2009, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*, USA, Springer.

- Vent, S. L., 2001, A Summary of the properties of van der Waals fluids, *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 29(3), 257-277.
- Winterbone, D. E., 1997, *Advanced Thermodynamics for Engineers*, Butterworth Heinemann, Oxford.
- Zhao, R., Ma, M., Zhao, H., Zhang, L., 2014, The critical phenomena and thermodynamics of the Reissner-Nordström-de Sitter black hole, *Advances in High Energy Physics*, 2014, 124854-124860.
- Zhang, L. C., Ma, M. S., Zhao, H. H., Zhao, R., 2014, Thermodynamics of phase transition in higher-dimensional Reissner-Nordström-de Sitter black hole, *The European Physical Journal C*, 74(9), 1-10.

ÖZGEÇMİŞ

| Kişisel Bilgiler | |
|------------------|--|
| Adı Soyadı | Özgür ÖKCÜ |
| Doğum Yeri | Kığı |
| Doğum Tarihi | 10.08.1988 |
| Uyruğu | <input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer: |
| Telefon | 0536 489 29 08 |
| E-Posta Adresi | ozgurokcu1989@gmail.com |
| Web Adresi | |



| Eğitim Bilgileri | |
|------------------|-----------------------------|
| Lisans | |
| Üniversite | İstanbul Üniversitesi |
| Fakülte | Fen Fakültesi |
| Bölümü | Astronomi ve Uzay Bilimleri |
| Mezuniyet Yılı | 07.07.2011 |

| Yüksek Lisans | |
|------------------|---|
| Üniversite | İstanbul Üniversitesi |
| Enstitü Adı | Fen Bilimleri Enstitüsü |
| Anabilim Dalı | Fizik Anabilim Dalı |
| Programı | Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı |
| Mezuniyet Tarihi | 26.12.2016 |

| Makale ve Bildiriler |
|---|
| Ökcü, Ö., Aydın, E., 2016, Joule-Thomson Expansion of Charged AdS Black Holes, arXiv:1611.06327[gr-qc], 1-7. (SCI kapsamındaki bir dergiye gönderildi.) |
| Ökcü, Ö., Aydın, E., Thermal Fluctuations Effects on Reissner-Nordström-AdS Black Hole. (SCI kapsamındaki bir dergiye gönderildi.) |