T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DURRMEYER TİPİ OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Mustafa KARAKEÇİLİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2016

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DURRMEYER TİPİ OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Mustafa KARAKEÇİLİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2016

Doç.Dr. Aydın İZGİ'nin danışmanlığında, Mustafa KARAKEÇİLİ'nin hazırladığı "**Durrmeyer Tipi Operatörler Dizisinin Yaklaşım Özellikleri**" konulu bu çalışma 22/04/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

		İmza
Danışman	: Doç. Dr. Aydın İZGİ	…………………………
Üye	:Prof. Dr. Hasan AKIN	…………………………
Üye	:Doç. Dr. Selman UĞUZ	…………………………

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. Recep GÜNDOĞAN
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DURRMEYER TİPİ OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Mustafa KARAKEÇİLİ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın İZGİ

Yıl: 2016, Sayfa: 34

Bu çalışmada; polinomlar kullanılarak sürekli ve integrallenebilen fonksiyonlara yaklaşım yönünde yapılan çalışmalardan söz edilmiştir. Durrmeyer tarafından tanımlanan polinomların yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Durrmeyer'in bir modifikasyonu olan

$$M_n\left(f;x\right)=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}$$

$$\times\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}f\left(u\right)du\,,\ x\in\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$$

şeklinde tanımladığımız lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Korovkin teoremi, düzgün yaklaşım, yaklaşım hızı, lineer pozitif operatör, L_p -yaklaşım.

ABSTRACT

MSc Thesis

APPROXINMATION PROPERTIES OF SEQUENCE OF DURRMEYER TYPE OPERATORS

Mustafa KARAKEÇİLİ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Doç. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2016, Page: 34

In this study, it has mentioned about approximation of continuous functions and integrable functions. We examined the operators which defined by Durrmeyer. We defined a modification of Durrmeyer as

$$M_n(f;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k \times\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k} f(u)\,du,\ x\in\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$$

and we examined its approximation properties.

Key Words: Korovkin theorem, uniform approximation, rate of approximation, linear appositive operators, L_p-approximation.

TEŞEKKÜR

Benim çalışmamın her aşamasında büyük bir sabır ve özveriyle destekleyen ve değerli katkılarını hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Aydın İZGİ, okumamda emeği geçen babam Şükrü KARAKEÇİLİ ve annem Medine KARAKEÇİLİ, sonsuz sabrından dolayı eşim Güler KARAKEÇİLİ ve oğlum Umut KARAKEÇİLİ ve arkadaşım Sadettin ECE'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Mustafa KARAKEÇİLİ
Şanlıurfa, Nisan 2016

SİMGELER DİZİNİ

$P_n(x)$	n dereceli polinom
$\sum_{k=0}^{n}$	Toplam sembolü
$[a,b]$	Kapalı aralık
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\|\cdot\|$	Norm
$(X,\|\cdot\|)$	Normlu Vektör uzayı
$x_n \to x$	x_n dizisinin x noktasına yakınsaması
$L(f(t);x)$	Operatör
$C[a,b]$	a ve b aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi
$B[a,b]$	a ve b aralığında sınırlı fonksiyonlar kümesi
$\|f\|_B$	f fonksiyonun $[a,b]$ aralığındaki maximum değeri
$w(f;\delta)$	Süreklilik modülü
L_p	L_p -uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

1. GİRİŞ

Bu bölümde, lineer pozitif operatörlerin tanımı yapılacak ve sağladığı özelliklere değinilecektir. Bu çalışma sırasında kullanacağımız bazı tanımlar ve teoremler verilecektir. Ayrıca burada vereceğimiz tanımlar ve teoremler genel halde geçerli tanımlar ve teoremler olduğu için pek çoğunda kaynak belirtilmemiştir.

Tanım 1.1: X boş olmayan bir küme ve K cismi R veya C olsun.

$$+: X \times X \to X, \qquad (x,y) \to x+y$$
$$.: K \times X \to K, \qquad (a,x) \to ax$$

Dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x,y,z \in X$ ve $a,b \in K$ için aşağıdaki koşulları sağlasın.

i.) $x+y=y+x$

ii.) $x+(y+z)=(x+y)+z$

iii.) Her $x \in X$ için $x+0=x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır.

iv.) Her $x \in X$ için $x+(-x)=0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır.

v.) Her $x \in X$ için $1.x=x$

vi.) $a(x+y)=ax+ay$

vii.) $(a+b)x=ax+bx$

viii.) $(ab)x=a(bx)$

Bu durumda X yukarıdaki koşulları sağlayan K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzayı) ve elemanlarına vektör veya nokta denir.

Tanım 1.2: X ve Y reel değerli fonksiyon uzayları olsun. $L: X \to Y$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör adı verilir.

Tanım 1.3: X ve Y reel değerli fonksiyon uzayları olmak üzere; $L: X \to Y$ şeklindeki L operatörünü göz önüne alalım, eğer her $f_1, f_2 \in X$ ve $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için

$$L\left(a_1 f_1 + a_2 f_2\right) = a_1 L\left(f_1\right) + a_2 L\left(f_2\right)$$

koşulu sağlanıyor ise L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 1.4: Kabul edelim ki $X^+ = \left\{ f \in X : f\left(x\right) \geq 0 \right\}$, $Y^+ = \left\{ g \in Y : g\left(x\right) \geq 0 \right\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^+ kümesinde her hangi bir f fonksiyonunu Y^+ kümesindeki bir fonksiyona dönüştürüyorsa o takdirde L operatörüne “Lineer pozitif operatör” denir.

Tanım 1.5: L lineer operatörü X uzayında Y dönüşüm yapıyorsa, L operatörünün normu;

$$\|L\| = \|L\|_{X \to Y} = \sup_{\|f\|_X = 1} \|L(f)\|_Y$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.6: $\{f_n\}$, B üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun. $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ fonksiyonlar dizisinin bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması; tanım kümesindeki $\forall x \in A$ için

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_B = 0$$

olması demektir. Düzgün yakınsama

$$f_n\left(x\right) \rightrightarrows f\left(x\right)$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 1.7: Boş olmayan X kümesi ve bir

$$d : X \times X \to R_+,$$
$$\left(x, y\right) \to d\left(x, y\right)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ için i.) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y;$

ii.) $d(x,y)=d(y,x);$

iii.) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır. Bu durumda (X,d) ikilisine metrik uzay denir.

Tanım 1.8: X bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$$\|.\| : X \to R_+, x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

i.) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0;$

ii.) $\|ax\|=|a|\|x\|;$

iii.) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X,\|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir.

Tanım 1.9: $f\in C[a,b]$ olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü $w(f,\delta)$ şeklinde gösterime sahip olup

$$w(f,\delta)=\sup_{x,t\in[a,b],|x-t|<\delta}|f(x)-f(t)|$$

şeklinde tanımlıdır.

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

a) $w(f,\delta)\geq 0$

b) $\delta_1\leq\delta_2 \Rightarrow w(f,\delta_1)\leq w(f,\delta_2)$

c) $w(f+g,\delta)\leq w(f,\delta)+w(g,\delta)$

d) $w(f, m\delta) = m.w(f,\delta)$

e) $\lambda \in R^+$ için $w(f,\lambda\delta) \leq (\lambda+1).w(f,\delta)$

f) $w(f,|t-x|) \geq |f(t) - f(x)|$

g) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\dfrac{|t-x|}{\delta}+1\right).w(f,\delta)$ (Altomare ve Campiti,1994)

Tanım 1.10: $(X,\|.\|)$ normlu uzay içinde bir dizi (x_n) ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = 0$$

ise (x_n) dizisi (x_0) noktasına yakınsıyor denir ve

$$x_n \to x_0 \;\; (n\to\infty) \text{ veya } \lim_{x\to\infty} x_n = x_0$$

olarak ifade edilir.

19 yüzyılda gönümüze kadar birçok matematikçi tarafından, çalışması zor olan bir fonksiyona çalışılması daha kolay olan (örneğin polinomlar gibi) ve daha basit yapıda olan fonksiyonlarla yaklaşım sağlanabilir mi ve bu yaklaşım en iyi nasıl elde edilir sorularına cevap arayan çalışmalar yapılmıştır. Bu anlamda Alman Matematikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, $[a,b]$ gibi kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli her fonksiyona aynı aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını iddia ve ispat etmiştir. (Pinkus, 2000).

1912 yılında, Weierstrass'ın varlığını iddia ettiği bu polinomun özelliklerini sağlayan bir polinom; Rus Matematikçi S.N. Bernstein tarafından toplam şeklinde aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır. (Lorentz, 1953). $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

1951 yılında H. Bohman, toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli bir $f(x)$ fonksiyonuna yakınsaklığını incelemiştir. Bu çalışmalar sonucunda H. Bohman aşağıdaki teoremi iddia etmiştir.

Teorem 1.1: $x\in[0,1]$, $0\le\alpha_{k,n}\le 1$ olduğunda

$$L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n})P_{k,n}(x)\ ,\ P_{k,n}(x)\ge 0$$

Lineer pozitif operatör dizisinin $n\to\infty$ için $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşulları üç tanedir. H. Bohman bunları;

$$L_n(1;x)\rightrightarrows 1$$

$$L_n(t;x)\rightrightarrows x$$

$$L_n(t^2;x)\rightrightarrows x^2$$

şeklinde ifade etmiştir.

Aşikardır ki Bohman'nın araştırdığı operatörlerin değeri f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

1953 yılında P.P. Korovkin, Bohman'nın koşullarının genel halde de geçerli olduğunu görmüş ve genel bir teorem ispatlamıştır. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995; Korovkin, 1953).

Teorem 1.2:(Korovkin Teoremi) $A_n: C[a,b]\to B[a,b]$ lineer pozitif operatörü her $f\in C[a,b]$ aşağıdaki koşulları sağlasın.

a) $\left\|A_n(1,x)-1\right\|_B\to 0,(n\to\infty)$

b) $\left\|A_n(t,x)-x\right\|_B\to 0,(n\to\infty)$

c) $\left\|A_n(t^2,x)-x^2\right\|_B\to 0,(n\to\infty)$

Bu durumda $A_n(f,x)$, $f(x)$ ‘e yakınsar.

$$\left\| A_n(f,x) - f(x) \right\|_B \to 0, (n \to \infty)$$

şeklinde gösterilir.

İspat: f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir M pozitif sayısı bulabiliriz ki tüm x ‘ler için

$$\left| f(x) \right| < M$$

sağlanır. $f \in C(a,b)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulabiriz ki $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in (a,b)$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda

$$\left| f(t) - f(x) \right| < \varepsilon$$

sağlanır.

$x, t \in [a,b]$ olduğundan $\left| f(x) \right| < M$ eşitsizliği fonksiyonu f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olduğu için gerçekleşir. $x \in (a,b), t \notin [a,b]$ olduğunda ise $\left| f(t) - f(x) \right| < \varepsilon$ eşitsizliği f fonksiyonu a ve b noktalarından, sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçekleşir.

$\left| f(x) \right| < M$ ve $\left| f(t) - f(x) \right| < \varepsilon$ eşitsizliklerinden dolayı tüm $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(t) - f(x) \right| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|t - x| < \delta$ olduğunda $\left| f(t) - f(x) \right| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2$ eşitsizliği $\left| f(t) - f(x) \right| < \varepsilon$ eşitsizliğinden dolayı $\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2$ ifadesi pozitif olduğu için sağlanır. $|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından $\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $\varepsilon > 0$ olduğu için $|f(x)| < M$ eşitsizliğinden $|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$ eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \left\| A_n(f,x) - f(x) \right\|_B &= \left\| A_n(f(t) - f(x), x) + f(x) A_n(1,x) - f(x) \right\|_B \\ &\leq \left\| A_n(|f(t) - f(x)|, x) \right\|_B + \| f \|_B \left\| A_n(1,x) - 1 \right\|_B \end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terim $n \to \infty$ için (a) koşulundan dolayı sıfıra yakınsar. Yani

$$\| f \|_B \left\| A_n(1,x) - 1 \right\|_B \leq \varepsilon_n, \varepsilon_n \to 0$$

dır.

$$\left\| A_n(f,x) - f(x) \right\|_B \leq \left\| A_n(|f(t) - f(x)|, x) \right\|_B + \varepsilon_n$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece terime bakarsak

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$$

eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned} \left\| A_n(|f(t) - f(x)|, x) \right\|_B &\leq \varepsilon A_n(1,x) + \frac{2M}{\delta^2} A_n\left((t-x)^2, x\right) \\ &= \varepsilon\left(A_n(1,x) - 1\right) + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left[A_n(t^2,x) - 2xA_n(t,x) + x^2 A_n(1,x)\right] \\ &= \varepsilon\left(A_n(1,x) - 1\right) + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \\ &\times\left\{\left[\left(A_n(t^2,x) - x^2\right) - 2x\left(A_n(t,x) - x\right) + x^2\left(A_n(1,x) - 1\right)\right]\right\} \qquad (1.1) \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde;

$$\left\|A_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|,x\right)\right\|_B \leq C_1\left\|A_n\left(t^2,x\right)-x^2\right\|_B + C_2\left\|A_n(1,x)-1\right\|_B$$

yazılabilir. (a), (b) ve (c) koşullarından dolayı $n \to \infty$ için

$$\left\|A_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|,x\right)\right\|_B \to 0$$

olur. Bu sonuç ve

$$\left\|A_n(f,x)-f(x)\right\|_B \leq \left\|A_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|,x\right)\right\|_B + \varepsilon_n$$

eşitliğinden yararlanırsak

$$\left\|A_n(f,x)-f(x)\right\|_B \to 0, (n \to \infty)$$

olduğunu görürüz. (Korovkin, 1953).

Teorem 1.3:(Minkowski eşitsizliği) $p>1$ için $a_1,a_2,...a_n>0$ ve $b_1,b_2,...b_n>0$ olsun. Bu takdirde;

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_j+b_j\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}a_j{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}b_j{}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

sağlar.

Teorem 1.4:(Hölder eşitsizliği) $1<p<\infty$ ve q , p 'nin eşleniği olsun. $a_1,a_2,...a_n$ ve $b_1,b_2,...b_n$ sayıları

$$\sum_{k=1}^{n}\left|a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 1.5:(Hölder eşitsizliği) $1 < p < \infty$ ve q , p 'nin eşleniği olsun. Bir $[a,b]$ aralığında tanımlı f , g sürekli fonksiyonları

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini sağlar.

$p = q = 2$ halinde Hölder eşitsizliği Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliği adını alır.

Yardımcı Teorem 1.1:(Lousin(Luzin)) Her bir $f \in L_p[a,b]$ ise her $\varepsilon > 0$ için $\|f - g\|_p < \varepsilon$ olacak şekilde $C[a,b]$ uzayında bir g fonksiyonu vardır. Yani: $L_p[a,b]$ uzayı $C[a,b]$ uzayında yoğundur. (Royden,1968).

Teorem 1.6:(Orlicz Teoremi) $K_n : [a,b] \times [a,b] \to R$ sürekli bir fonksiyon ve

$$\int_a^b |K_n(x,t)|dt \le M \,; \qquad \int_a^b |K_n(x,t)|dx \le N \qquad (n = 1,2,3,...)$$

olacak şekilde sabit $M, N > 0$ sayıları mevcut ise bu durumda $f \in L_p[a,b]$ için

$$F_n(x) = \int_a^b K_n(x,t) f(t) dt$$

integrali mevcut ve $F_n \in L_p$ dır. (Lorentz, 1953).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Yaklaşım teorisi; üzerinde çalışılması zor olan bir fonksiyona, özellikleri daha kolay ve daha basit karakterli olan fonksiyonlarla yaklaşım sağlanması ve bu yaklaşımın en iyi şekilde elde edilmesi hakkında araştırma yapan ve yapılan çalışmaları kapsayan bir teoridir. Bununla alakalı olarak 1800'lerden şu ana dek birçok matematikçi, fonksiyonlar teorisi içinde de geniş uygulama alanına sahip olan bu teori üzerinde araştırmalar yapmıştır. İlk olarak Rus matematikçiler P.L. Chebyhev, sürekli bir f fonksiyonunun n dereceli (n yeterince büyük) bir $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinomu temsil edilebilir mi problemi üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Sonradan 1885 yılında Alman matematikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, cebirsel ve trigonometrik polinomlarla sürekli fonksiyonlara $[a,b]$ gibi kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde yaklaşım sağlanacağını ifade ve ispat etmiştir. (Pinkus 2000).

1912 yılında Rus matematikçi S.N. Bernstein, Veierstrass'ın teoreminin ispatı için $x\in[0,1]$ olmak üzere toplam biçiminde tanımladığı polinom aşağıdaki şekildedir.

$$B_n(f(x);n)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Bernstein, tanımladığı ve kendi adıyla anılan bu polinomlarla $[0,1]$ aralığında tanımlı ve sürekli f fonksiyonuna yaklaşabileceğini ispatlamıştır. (Bernstein, 1912; Lorentz, 1953).

1930 yılında L.V. Kantorovich L_1 de olan f fonksiyonlar için

$$K_m(f,x)=(m+1)\sum_{k=0}^{m} P_{m,k}(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(u)du$$

operatörü incelemiştir.

Daha sonra Durrmeyer L_p de olan f fonksiyonları için

$D_n(f,x)=\int_0^1 f(u)K_n(x,u)\,du$ operatörleri incelemiştir.

Burada

$$K_n(x,u)=(n+1)\sum_{k=1}^{n}P_{n,k}(x)P_{n,k}(u)$$

ve buradan

$$P_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

dır.

1935 yılında T. Popoviciu tarafından, f fonksiyonunun sürekli modülü hesaplanmıştır.

1953 yılında ise P.P. Korovkin, yaklaşım teorisinde kendi adıyla bilinen ve önemli bir yere sahip olan teoremi ifade ve ispat etmiştir. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995). Bu aşamadan sonra, Korovkin teoremin şartlarını sağlayan Bernstein polinomları ile ilgili çalışmalar hız kazanmıştır.

Bu çalışma,

$$M_n(f;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k$$
$$\times\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}f(u)\,du$$

şeklinde $\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ simetrik aralığı üzerinde tanımlanan operatör dizisinin lineer pozitif olduğu Korovkin Teoremin şartlarını sağladığı, $\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğu gösterilmiş ve momentleri, süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Daha sonra $M_n\left(f;x\right)$ operatörü ile f fonksiyonuna yaklaşımı grafik yardımıyla gösterilmiştir. Son olarak da seçilen bir fonksiyona yaklaşım bazı n değerleri için grafikleri çizilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Kütüphane de bulduğumuz kitap, dergi ve internet ortamında bulduğumuz çalışmalar. Ayrıca literatür taramasında çalışmamızla ilgili makalelerden istifade edilmiştir.

3.2. Yöntem

Çalışmamızda tanımladığımız operatörün daha önceki benzer operatörler ile arasındaki farklar incelenmiş. Mapple bilgisayar yazılım programında bu operatörün sürekli bazı fonksiyonlara yaklaşım grafikleri çizilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümdeki tartışmamızda inceleyeceğimiz $M_n\left(f;x\right)$ operatör dizisinin lineer pozitif olduğu ve Korovkin Teoremi şartlarını sağladığı gösterilmiştir.

Tanım 4.1: Kabul edelim ki $x\in\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ ve $f\in C\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ olsun.

$$M_n\left(f\left(u\right);x\right):=M_n\left(f;x\right)$$

$$M_n\left(f;x\right)=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k$$
$$\times\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}f\left(u\right)du$$

şeklinde operatöre $M_n\left(f;x\right)$ operatör dizisini tanımlayalım.

$M_n\left(f;x\right)$ operatör dizisinin lineer ve pozitif olduğunu gösterelim.

Lineerlik: $f,g\in C\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ ve $\alpha,\beta\in R$ için

$$M_n\left(\left(\beta f\left(t\right)+\alpha g\left(t\right)\right);x\right)=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}$$
$$\times\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\left(\beta f\left(u\right)+\alpha g\left(u\right)\right)du$$
$$=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}$$
$$\times\left(\left(\beta f\right)\left(u\right)\right)du+\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k$$
$$\times\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\left(\left(\alpha g\right)\left(u\right)\right)du$$

$$=\beta(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}$$

$$\times f(u)\,du+\alpha(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}$$

$$\times\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}g(u)\,du$$

$$=\beta M_n\big(f(t);x\big)+\alpha M_n\big(g(t);x\big)$$

olduğundan $M_n(f;x)$ operatör dizisi lineer bir operatördür.

Pozitiflik ise; $n,k\in N$ ve $x\in\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ için

$$(n+1)\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}du\geq 0$$

olduğundan ve her $x\in\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ için $f\geq 0$ ise her $n\in N$ için $M_n(f;x)\geq 0$ olur.

Dolaysıyla $M_n(f;x)$ pozitif lineer operatör dizisidir.

Yardımcı Teorem 4.1: $M_n(f;x)$ operatör dizisi aşağıdaki şartları sağlar.

$$M_n(1;x)\rightrightarrows 1$$

$$M_n(t;x)\rightrightarrows x$$

$$M_n(t^2;x)\rightrightarrows x^2$$

$M_n(1;x)\rightrightarrows 1$ olduğunu gösterim.

İspat:

$$M_n(1;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k$$

$$\times\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}du$$

$t=u-\dfrac{1}{n+3}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}\,dt$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\beta(k+1,n-k+1)$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

$$=(n+1)\sum_{k=a}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\frac{1}{n+1}$$

$$=(n+1)\left(x-\frac{1}{n+3}+\frac{n+4}{n+3}-x\right)^n\frac{1}{(n+1)}=1$$

$$M_n(1;x)=1 \tag{4.1}$$

elde edilir. Yani $n\to\infty$ iken

$$M_n(1;x)\rightrightarrows 1$$

olur.

$$M_n(t;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k$$

$$\times\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}udu$$

$t=u-\dfrac{1}{n+3}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_0^1\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\left(t+\frac{1}{n+3}\right)dt$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_0^1\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}tdt+\frac{1}{n+3}(n+1)$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_0^1\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}dt$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_0^1\binom{n}{k}t^{k+1}(1-t)^{n-k}dt+\frac{1}{n+3}$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\beta(k+2,n-k+1)+\frac{1}{n+3}$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(k+2)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+3)}+\frac{1}{n+3}$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}+\frac{1}{n+3}$$

$$=\frac{(n+1)}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}(k+1)+\frac{1}{n+3}$$

$$=\frac{1}{(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}k+\frac{1}{(n+2)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}+\frac{1}{(n+3)}$$

$$=\frac{1}{(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}k+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+3)}$$

$$=\frac{1}{(n+2)}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+3)}$$

$$=\frac{1}{(n+2)}\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}k\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+3)}$$

$$=\frac{n}{(n+2)}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k-1}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}+\frac{2n+5}{n^2+5n+6}$$

$$=\frac{nx}{n+2}-\frac{n}{(n+2)(n+3)}+\frac{2n+5}{n^2+5n+6}$$

$$=\frac{n}{n+2}x+\frac{n+5}{n^2+5n+6}$$

$$=x-\frac{2x}{n+2}+\frac{n+5}{n^2+5n+6}$$

$$M_n(t;x)=x-\frac{2x}{n+2}+\frac{n+5}{n^2+5n+6} \tag{4.2}$$

elde edilir.

$$\left\|M_n(t;x)-x\right\|_{C\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]}=\lim_{n\to\infty}\max_{\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]}\left|M_n(t;x)-x\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max_{\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]}\left|-\frac{2x}{n+2}+\frac{n+5}{n^2+5n+6}\right|$$

Yani $n\to\infty$ iken $x=\dfrac{1}{n+3}$ yazılırsa;

$$=\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{2}{n^2+5n+6}+\frac{n+5}{n^2+5n+6}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+2}\right|=0$$

$$M_n(t;x)\rightrightarrows x$$

olur.

$$M_n\left(t^2;x\right)=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}$$

$$\times\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}u^2du$$

$t=u-\dfrac{1}{n+3}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$M_n\left(t^2;x\right)=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{0}^{1}\binom{n}{k}t^k\left(1-t\right)^{n-k}\left(t+\frac{1}{n+3}\right)^{2}dt$$

$$=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{0}^{1}\binom{n}{k}t^k\left(1-t\right)^{n-k}\left(t^2+\frac{2t}{n+3}+\frac{1}{\left(n+3\right)^2}\right)dt$$

$$=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{0}^{1}\binom{n}{k}t^k\left(1-t\right)^{n-k}t^2dt+\frac{2}{n+3}$$

$$\times\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{0}^{1}\binom{n}{k}t^k\left(1-t\right)^{n-k}tdt+\left(n+1\right)$$

$$\times\frac{1}{\left(n+3\right)^2}\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{0}^{1}\binom{n}{k}t^k\left(1-t\right)^{n-k}dt$$

$$=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{0}^{1}\binom{n}{k}t^{k+2}\left(1-t\right)^{n-k}dt+\frac{2}{n+3}$$

$$\times\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{0}^{1}\binom{n}{k}t^{k+1}\left(1-t\right)^{n-k}dt+\left(n+1\right)$$

$$\times\frac{1}{\left(n+3\right)^2}\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{0}^{1}\binom{n}{k}t^k\left(1-t\right)^{n-k}dt$$

$$=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{\left(k+2\right)!\left(n-k\right)!}{\left(n+3\right)!}+\frac{2\left(n+1\right)}{\left(n+3\right)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{\left(k+1\right)!\left(n-k\right)!}{\left(n+2\right)!}+\frac{\left(n+1\right)}{\left(n+3\right)^2}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{k!\left(n-k\right)!}{\left(n+1\right)!}$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\frac{(k+2)(k+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)}+\frac{2(n+1)}{(n+3)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\frac{(k+1)}{(n+2)(n+1)}+\frac{1}{(n+3)^2}$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\frac{(k(k-1)+4k+2)}{(n+2)(n+3)(n+1)}$$

$$+\frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}(k+1)+\frac{1}{(n+3)^2}$$

$$=\frac{1}{n^2+5n+6}\left(n(n-1)\left(x-\frac{1}{(n+3)}\right)^{2}+4n\left(x-\frac{1}{(n+3)}\right)+2\right)$$

$$+\frac{2}{(n+3)(n+2)}\left(n\left(x-\frac{1}{(n+3)}\right)+1\right)+\frac{1}{(n+3)^2}$$

$$=\frac{1}{n^2+5n+6}\left(n(n-1)x^2+x\left(6n-\frac{2n(n-1)}{(n+3)}\right)+\frac{n(n-1)}{(n+3)^2}-\frac{6n}{(n+3)}+4+\frac{(n+2)}{(n+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{n^2+5n+6}\left(n(n-1)x^2+\frac{(4n^2+20n)x}{(n+3)}+\frac{10n+42}{(n+3)^2}\right)$$

$$=x^2-\frac{(6n+6)}{(n+2)(n+3)}x^2+\frac{(4n^2+20n)}{(n+2)(n+3)^2}x+\frac{10n+42}{(n+2)(n+3)^3} \qquad (4.3)$$

elde edilir. Yani $n\to\infty$ iken

$$\left\|M_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_{C\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max_{\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]}\left|x^2-\frac{(6n+6)}{(n+2)(n+3)}x^2+\frac{(4n^2+20n)}{(n+2)(n+3)^2}x+\frac{10n+42}{(n+2)(n+3)^3}-x^2\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max_{\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]}\left|-\frac{(6n+6)}{(n+2)(n+3)}x^2+\frac{(4n^2+20n)}{(n+2)(n+3)^2}x+\frac{10n+42}{(n+2)(n+3)^3}\right|$$

x^2 nin katsayısı negatif olduğu için çıkarılırsa ifade daha büyük olur.

$$\leq \lim_{n\to\infty} \max_{\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]} \left| \frac{\left(4n^2+20n\right)}{(n+2)(n+3)^2} x + \frac{10n+42}{(n+2)(n+3)^3} \right|$$

$x = \dfrac{n+4}{n+3}$ son ifade de yerine yazılırsa

$$\leq \lim_{n\to\infty} \max_{\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]} \left| \frac{\left(4n^2+20n\right)}{(n+2)(n+3)^2} \left(\frac{n+4}{n+3}\right) + \frac{10n+42}{(n+2)(n+3)^3} \right| = 0$$

$$M_n\left(t^2;x\right) \rightrightarrows x^2$$

olur.

4.1. Operatör Dizisinin Düzgün Yakınsaklığı

Bu kısımda operatör dizisinin düzgün yakınsaklığı gösterilmiştir.

Teorem 4.1.1: $M_n\left(f;x\right)$ operatör dizisi $\left[\dfrac{1}{n+3},\dfrac{n+4}{n+3}\right]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonu aynı aralıkta düzgün yakınsaktır. Yani;

$$\lim_{x\to\infty} \left\| M_n\left(f;x\right) - f\left(x\right) \right\|_{C\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]} = 0$$

İspat: (1.1) den dolayı

$$\left|M_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| < \varepsilon \left|M_n\left(1;x\right)-1\right| + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}$$
$$\times\left[\left(M_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)-2x\left(M_n\left(t;x\right)-x\right)+x^2\left(M_n\left(1;x\right)-1\right)\right]$$

ifadesi açılarak $M_n\left(f;x\right)$ operatör dizisinin lineerliğinden ve (4.1), (4.2) ve (4.3) ifadelerinin kullanılmasıyla

$$\left|M_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{(6-2n)}{(n+2)(n+3)}x^2 + \frac{\left(2n^2+4n-30\right)}{(n+2)(n+3)^2}x + \frac{10n+42}{(n+2)(n+3)^3}\right]$$

elde edilir. Son ifade de $n>3$ için x^2 nin katsayısı negatif olacağından, $\frac{6-2n}{n^2+5n+6}x^2$ ifadesi atılırsa geriye kalan ifade daha büyük olur.

O halde; $x=\frac{n+4}{n+3}$

$$\frac{\left(2n^2+4n-30\right)}{(n+2)(n+3)^2}x+\frac{10n+42}{(n+2)(n+3)^3}\le\frac{\left(2n^2+4n-30\right)}{(n+2)(n+3)^2}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)+\frac{10n+42}{(n+2)(n+3)^3}$$

$$<\frac{8n^3}{n^4}+\frac{11n}{n^4}<\frac{8}{n}+\frac{11}{n^3}<\frac{9}{n}$$

$$\left\|M_n(f;x)-f(x)\right\|<\varepsilon+\frac{9M}{n\delta^2} \tag{4.4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left\|M_n(f;x)-f(x)\right\|_{C\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]}=0$$

olur. Böylece düzgün yakınsak olduğu görülür.

4.2. Operatör Dizisinin Yaklaşım Hızı

Bu kısımda operatör dizisinin yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

Teorem 4.2.1: $M_n(f;x)$ operatör dizisinin süreklilik modülünün yardımı ile yaklaşım hızı her $f\in C\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$

için

$$\left\|M_n(f;x)-f(x)\right\|\le 4w\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

dır.

İspat: Süreklilik modülü özelliklerinden (Tanım 1.9)

$$\left|f(t)-f(x)\right|\le\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)w(f;\delta)$$

olduğundan

$$\left|M_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|=\left|M_n\left(\left(f(t)-f(x)\right);x\right)\right|\le M_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)$$

$$\le M_n\left(w\left(f;|t-x|\right);x\right)\le w(f;\delta)M_n\left(\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right);x\right)$$

buradan Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliğini kullanırsak

$$w(f;\delta)M_n\left(\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right);x\right)=w(f;\delta)M_n(1;x)+w(f;\delta)M_n\left(\left(\frac{|t-x|}{\delta}\right);x\right)$$

$$\le w(f;\delta)+\frac{w(f;\delta)}{\delta}\sqrt{M_n\left((t-x)^2;x\right)}$$

$$=w(f;\delta)+\frac{w(f;\delta)}{\delta}\sqrt{M_n\left(\left(t^2-2xt+x^2\right);x\right)}$$

$$=w(f;\delta)+\frac{w(f;\delta)}{\delta}\sqrt{M_n\left(t^2;x\right)-2xM_n(t;x)+x^2M_n(1;x)}$$

$$=w(f;\delta)+\frac{w(f;\delta)}{\delta}\sqrt{\left[\frac{(6-2n)}{n^2+5n+6}x^2+\frac{\left(2n^2+4n-30\right)}{(n+2)(n+3)^2}x+\frac{10n+42}{(n+2)(n+3)^3}\right]} \qquad (4.5)$$

elde edilir. (4.5) te $n>3$ için x^2 nin katsayısı negatif olacağından, $\frac{6-2n}{n^2+5n+6}x^2$ ifadesi atılırsa geriye kalan ifade daha büyük olur.

O halde; $x=\frac{n+4}{n+3}$, (4.5) da yerine yazılırsa,

$$\left|M_n(f;x)-f(x)\right|=w(f;\delta)+\frac{w(f;\delta)}{\delta}\sqrt{\frac{9}{n}}=w(f;\delta)+\frac{w(f;\delta)}{\delta}\frac{3}{\sqrt{n}}$$

$\delta=\frac{1}{\sqrt{n}}$ seçilirse;

$$\left|M_n(f;x)-f(x)\right|\le 4w\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Böylece ispat biter.

4.3. Operatör Dizisinin L_p -Normunda Yaklaşımı

Burada $0 \le p < \infty$ için $L_p\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ uzayında, operatörümüzün $L_p -$ normuna göre yaklaşımı incelenmiştir.

$$K_n(x;u) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}$$

Teorem 1.6'dan biliyoruz ki

$$\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left|K_n(x,u)\right|dx \le M$$

$$\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left|K_n(x,u)\right|du \le N$$

olacak şekilde $M, N > 0$ sonlu sayıları var ise, $M_n(f;x)$ bütün $f \in L_p\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ için $L_p -$ de dir.

Şimdi bunu gösterelim.

$$\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}K_n(x,u)\,dx = \int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}dx$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}dx$$

$t = x-\frac{1}{n+3}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\int_0^1\binom{n}{k}(t)^k(1-t)^{n-k}dt$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$
$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}.\frac{1}{n+1}$$
$$=1<\infty$$

$$\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}du$$
$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}du$$

$t=u-\dfrac{1}{n+3}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\int_{0}^{1}\binom{n}{k}(t)^{k}(1-t)^{n-k}dt$$
$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$
$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}.\frac{1}{n+1}$$
$$=1<\infty$$

olduğundan dolayı $f\in L_p\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ için operatörümüz $L_p\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ uzayındadır.

$f\in L_p$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ olduğundan αf 'in de L_p olduğu biliyoruz. Ayrıca $f,g\in L_p$ ise

$$|f+g|^p\le(|f|+|g|)^p\le\left[2\max(|f|,|g|)\right]^p\le 2^p\left(|f|^p+|g|^p\right)$$

olacağından $|f+g|^p$ integrallebilir. Yani $(f+g)\in L^p$ 'dır.

Aşağıdaki teoremin ispatında Lousin teoreminden faydalanılacaktır.

Teorem 4.3.1: $f\in L_p\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|M_n(f;x)-f(x)\right\|_p=0$$

dır.

İspat: Yardımcı teorem 1.1'den dolayı verilen bir $\varepsilon>0$ için öyle bir $g\in C\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ vardır ki

$$\left\|f(x)-g(x)\right\|_{L_p\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]}<\varepsilon$$

dır.

Teorem 4.1.1'den dolayı $\left\|M_n(g;x)-g(x)\right\|_{B\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]}<\varepsilon$ dır.

$$M_n(f;x)-f(x)=\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}$$
$$\times\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\left[f(u)-f(x)\right]du$$

$$=\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}$$
$$\times\left[f(u)-g(u)+g(u)-g(x)+g(x)-f(x)\right]du$$

$$=\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}$$
$$\times\left[f(u)-g(u)\right]du+\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}$$
$$\times\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^k\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\left[g(x)-f(x)\right]du$$

$$+\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}$$

$$\times\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\left[g(u)-g(x)\right]du$$

$$\left|M_n(f;x)-f(x)\right|\leq\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\binom{n}{k}$$

$$\times\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\left|f(u)-g(u)\right|du$$

$$+\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}$$

$$\times\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\left|g(x)-f(x)\right|du$$

$$+\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-u\right)^{n-k}\binom{n}{k}$$

$$\times\left(x-\frac{1}{n+3}\right)^{k}\left(\frac{n+4}{n+3}-x\right)^{n-k}\left|g(u)-g(x)\right|du$$

$\left|M_n(f;x)-f(x)\right|\leq I_{n1}(x)+I_{n2}(x)+I_{n3}(x)$ ve $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ olsun.

$$\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left|M_n(f;x)-f(x)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left|I_{n1}(x)+I_{n2}(x)+I_{n3}(x)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$I_{n1}(x)$ ve $I_{n2}(x)$ Lousin teoreminden $I_{n3}(x)$ teorem 4.1.1'den dolayı,

$$\left\|I_{n1}(x)\right\|_{L_p}=\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left|I_{n1}(x)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left[\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}K_n(x,u)\left|f(u)-g(u)\right|du\right]^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left[\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}} K_n(x,u)^{\frac{1}{q}} K_n(x,u)^{\frac{1}{p}}\left|f(u)-g(u)\right|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left[\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left(K_n(x,u)^{\frac{1}{q}}\right)^q du\right]^{\frac{p}{q}}\left[\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}} K_n(x,u)\left|f(u)-g(u)\right|^p du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}} K_n(x,u)\left|f(u)-g(u)\right|^p du\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$<\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}} K_n(x,u)\varepsilon^p du\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\varepsilon\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}} dx\right)^{\frac{1}{p}}=\varepsilon$$

$$\left\|I_{n2}(x)\right\|_{L_p}=\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left|I_{n2}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left[\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}} K_n(x,u)\left|g(x)-f(x)\right|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left[\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}} K_n(x,u)^{\frac{1}{q}} K_n(x,u)^{\frac{1}{p}}\left|g(x)-f(x)\right|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left[\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left(K_n(x,u)^{\frac{1}{q}}\right)^q du\right]^{\frac{p}{q}}\left[\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}} K_n(x,u)\left|g(x)-f(x)\right|^p du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}K_n\left(x,u\right)\left|g\left(x\right)-f\left(x\right)\right|^p du\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$<\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}K_n\left(x,u\right)\varepsilon^p du\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\varepsilon\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}dx\right)^{\frac{1}{p}}=\varepsilon$$

$$\left\|I_{n3}\left(x\right)\right\|_{L_p}=\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left|I_{n3}\left(x\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left[\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}K_n\left(x,u\right)\left|g\left(u\right)-g\left(x\right)\right|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$<\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}K_n\left(x,u\right)\varepsilon^p du\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\varepsilon\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}dx\right)^{\frac{1}{p}}=\varepsilon$$

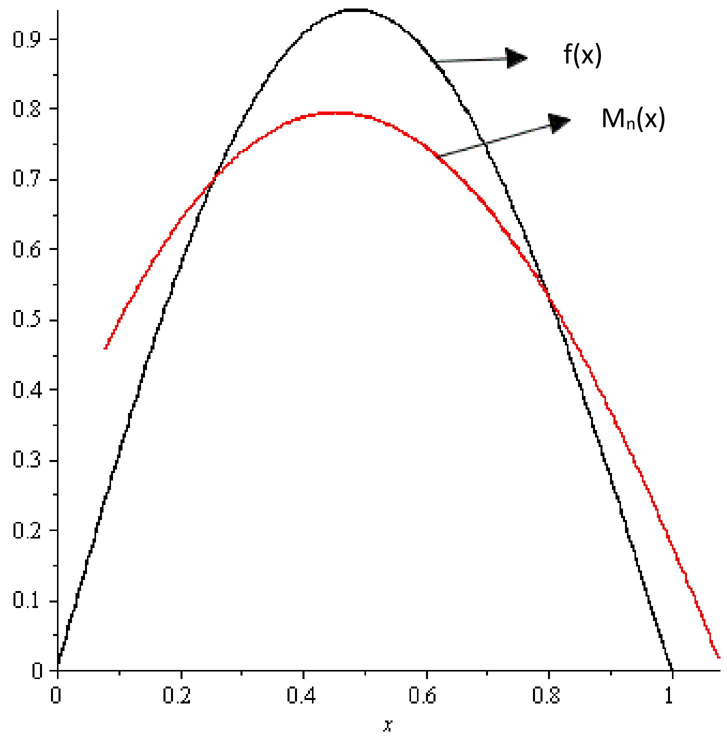
$$\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left|M_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left(\left|I_{n1}\left(x\right)\right|+\left|I_{n2}\left(x\right)\right|+\left|I_{n3}\left(x\right)\right|\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(3^p\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{n+4}{n+3}}\left(\left|I_{n1}\left(x\right)\right|^p+\left|I_{n2}\left(x\right)\right|^p+\left|I_{n3}\left(x\right)\right|^p\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

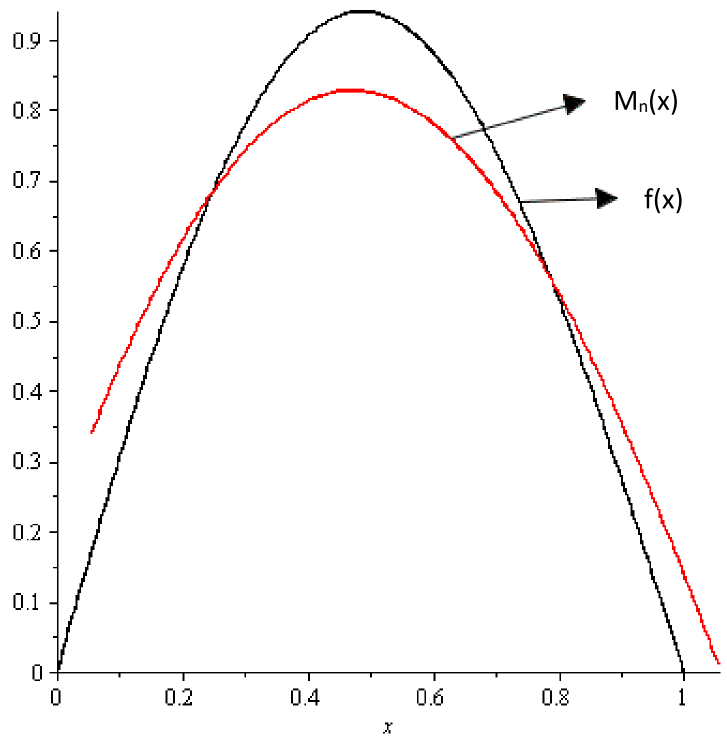
$$\leq 3^{\frac{1+p}{p}}\varepsilon$$

ispat biter.

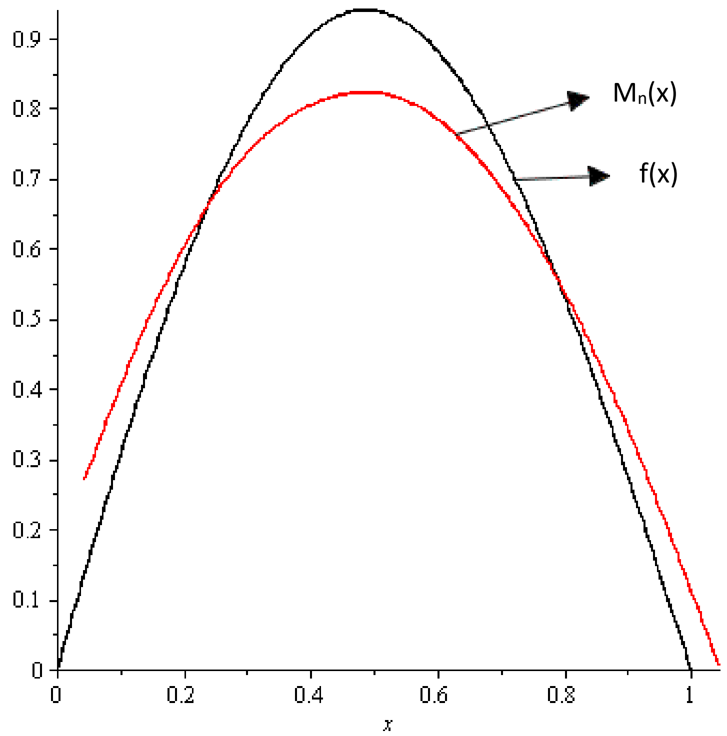
Şimdi de üzerinde çalıştığımız $M_n\left(f;x\right)$ operatör dizisinin; $f\left(x\right)=\sin\left(\pi x\right)e^{-\frac{1}{8}x}$ fonksiyonuna ait yaklaşımını gösteren grafikler bazı n-ler için çizilmiştir.



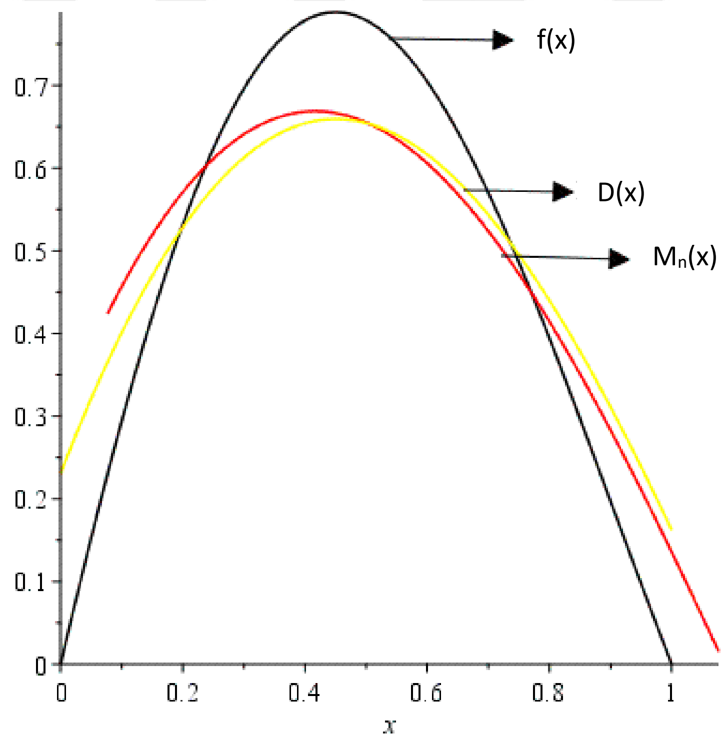
Şekil 4.1. $f\left(x\right)=\sin\left(\pi x\right)e^{-\frac{1}{8}x}$ fonksiyonuna $M_n\left(f;x\right)$ ile $n=10$ yaklaşım grafiği



Şekil 4.2. $f\left(x\right)=\sin\left(\pi x\right)e^{-\frac{1}{8}x}$ fonksiyonuna $M_n\left(f;x\right)$ ile $n=15$ yaklaşım grafiği



Şekil 4.3. $f(x)=\sin(\pi x)e^{-\frac{1}{8}x}$ fonksiyonuna $M_n(f;x)$ ile $n=20$ yaklaşım grafiği



Şekil 4.4. $f(x)=\sin(\pi x)e^{-\frac{1}{8}x}$ fonksiyonuna $n=10$ için $M_n(f;x)$ ve Durmeyer ile yaklaşım grafiği

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

$\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]$ aralığı üzerinde tanımlanan $M_n\left(f;x\right)$ operatörler dizisinin lineer pozitif operatör dizisi olduğu ve Korovkin şartlarını sağladığı görülmüştür. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty}\left\|M_n\left(f\right)-f\right\|_{C\left[\frac{1}{n+3},\frac{n+4}{n+3}\right]}=0$$

eşitliğini sağladığı görüldüğünde düzgün yakınsaklığı ispat edilmiştir.

Daha sonra süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmış ve aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir.

$$\left\|M_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|\leq 4w\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Ayrıca operatör dizisinin L_p uzayında olduğunda operatör dizisinin L_p-yaklaşımı gösterilmiştir ve aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|M_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|_p=0$$

Son olarak; $M_n\left(f;x\right)$ operatör dizisi $f\left(x\right)=\sin\left(\pi x\right)e^{-\frac{1}{8}x}$ fonksiyonuna ait yaklaşımını gösteren grafikte çizilmiştir.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada ele aldığımız Durrmeyer tipi operatörlerin yaklaşımları azda olsa klasik Durrmeyer operatör dizisinden daha iyi olduğu yaptığımız grafikte anlaşılır. Bu sebeple çalıştığımız operatörümüzün kullanılması daha uygun olacaktır.

KAYNAKLAR

AGRATINI O., 2000. Aproximare prin operatori liniari, Presa Universitara Clujeana, (in Romanian)
ALTOMARE, F. ve CAMPITI, M., 1994. Korovkin-type Approximation Theoryan its Applications.
BALCI, M., 1999. Analiz, Cilt 2. Ankara
BARBORU D., 2002. Aproximarea functiilor de mai multe variable prin sume booleene de operatori de tip interpolator, Ed. Risoprint, Cluj-Napoca, (in Romanian)
BARBOSU D., 2004. Kantorovich-Schurer bivariate operators, Miskolc Mathematical notes, vol. 5 2, 129-136
BECLER M., 1978. Clobal approximation theorems for Szasz-Mirakyan and Baskakov operators in polynomial weight spaces, Indian Univ. Math. J., 27(1),17-142
BERNSTEIN, S.N., 1912. Demonstration du theoreme de Veierstratass, fondee sur le calcul des probabilites. Commun. Sec. Math. Kharkow, (2):13
DOĞU, O., and ÖZALP, N., 1991. Approximation by Kantorovich type generalization of Meyer-König and Zeller operators, Glasnik Matematik, vol 36(56), 311-318
DURRMEYER, J.L., 1967. Une formüle d'invesion de la transformee de laplace, Applications a'la the orie desmoments These de 3e cycle, Paris.
HACISALİHOĞLU, H. ve HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, Ankara üniversitesi.
KANTORAVICH, L.V.,1930. Sur certain developpements suirant les polynomes de la forme de S.Bernstein I. II. C.R. Acad. URSS, 563-568, 595-600
KOROVKIN, P.P., 1953. Convergence of linear positive operators in the space of continuous function, Dok1 Akad Nauf SSSR, 90:961-4
LORENTZ, G.G., 1953. Bernstein Polynomials. Math. Expo., vol. 8, Univ. Of Toronto Press, Toronto.
PINKOS, A., 2000. Weierstrass and approximation theory. J. Approx Theory, 107:1-66.
ROYDEN, H.L. 1968. Real Analysis Seconde Edition, 118p., Newyork.
STANCU, F., 1984. Aproximarea functiilor de doua si mai multe variabile cu ajutorul operatorilor liniari si pozitivi, PhD Thesis, Univ. Babes-Bolyani, Cluj-Napoca, (in Romanian)
WALCZAK, Z., 2003. On some linear positive operators in exponential weighted spaces, Math. Commum., 8(1), 77-84
WALZACK, Z., 2005. Approximation of functions of two varibles by some linear positive operators, Acta Math. Univ. Comenianae, vol LXXIV, 1 37-48

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL ÖZELLİKLER

Adı Soyadı	Mustafa KARAKEÇİLİ
Uyruğu	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	HİLVAN-05/05/1982
Telefon	0 546 882 29 11
e-mail	m_karakecili@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	Gazi Lisesi, Merkez, ŞANLIURFA	2000
Üniversite	Harran Üniversitesi, Matematik Bölümü Merkez, ŞANLIURFA	2007
Yüksek Lisans	Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, ŞANLIURFA	2016

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2006-2007	Analitik dershanesi	Matematik öğretmeni
2007-2008	Kavram dershanesi	Matematik öğretmeni
2008-2009	Güven dershanesi	Matematik öğretmeni
2009-2010	Birey dershanesi	Matematik öğretmeni
2010-2011	Metropol dershanesi	Matematik öğretmeni
2011-2015	Sistem dershanesi	Matematik öğretmeni
2015-….	Lider kurs merkezi	Matematik öğretmeni