

**GAZIANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATRİS YARIGRUPLARI İÇİN SONLU TAM YERİNE-YAZMA
SİSTEMLERİ**

**MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ALİ YÜKSEK
TEMMUZ 2016**

TEMMUZ 2016

YÜKSEK LİSANS TEZİ-MATEMATİK BÖLÜMÜ

ALİ YÜKSEK

Matris Yarıgrupları İçin Sonlu Tam Yerine-Yazma Sistemleri

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd.Doç.Dr. Belgin ÖZER

Ali YÜKSEK

Temmuz 2016



© 2016 [Ali YÜKSEK]

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı : Matris Yarıgrupları için Sonlu Tam Yerine-Yazma Sistemleri

Öğrencinin, Adı Soyadı : Ali YÜKSEK

Tez Savunma Tarihi: 29.07.2016

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı


Prof.Dr. Metin BEDİR


FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.


Prof.Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Yrd.Doç.Dr. Belgin ÖZER

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Doç.Dr. Necati OLGUN

Yrd.Doç.Dr. Belgin ÖZER

Yrd.Doç.Dr. Cennet ESKAL

İmzası


.....

.....

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Ali YÜKSEK

ABSTRACT

THE FINITE COMPLETE REWRITING SYSTEMS FOR MATRIX SEMIGROUPS

YÜKSEK, Ali

M.Sc. in Department of Mathematics

Supervisor: Assist.Prof.Dr. Belgin ÖZER

July 2016, 87 Pages

The aim of this study is to consider some presentations for the semigroups of 2×2 matrices and all 2×2 matrices of determinant 0 or 1 over the field $GF(p)$ (p : prime). We show that the matrix semigroups can be described by a finite complete rewriting systems as a consequence of which we obtain new presentations for matrix semigroups and we find the normal forms of these presentations. Moreover, we obtain an abelian group presentation for the second integral homology of special linear semigroups $SLS(2, p)$.

Key Words: Rewriting systems, matrix semigroups, normal forms, second integral homology, deficiency.

ÖZET

MATRİS YARIGRUPLARI İÇİN SONLU TAM YERİNE YAZMA SİSTEMLERİ

YÜKSEK, Ali

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd.Doç.Dr. Belgin ÖZER

Temmuz 2016, 87 Sayfa

Bu çalışma $GL(p)$ (p asal) cismi üzerinden determinantı 0 ya da 1 olan 2×2 tipindeki matrisleri ve 2×2 tipindeki matris yarıgruplarının bazı takdimlerini incelemektir. Matris yarıgruplarının sonlu tam yerine-yazma sistemleri ile tanımlanabildiği gösterilmiştir ve bunun sonucu olarak yeni takdimler elde edilmiştir ve bu takdimlerin normal formları verilmiştir. Ayrıca, özel lineer yarıgruplar $SLS(2, p)$ nin ikinci integral homolojisi için değişmeli bir grup takdimi bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Yerine-yazma sistemleri, matris yarıgruplar, normal formlar, ikinci integral homolojisi, noksanlık.



Canım Eşim, çocuklarım Ali Eymen ve Elif'e...

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma sÜresince tÜm bilgilerini benimle paylaŐmaktan kaçınmayan, her tÜrlÜ konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde bÜyÜk emeği olan, aynı zamanda kiŐilik olarak ta bana çok Őey katan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Yrd.Doç.Dr. Belgin ÖZER'e sonsuz minnet ve teŐekkÜrlerimi sunarım.

Örneklerin toplanmasında, hazırlanmasında ve teŐhislerinde desteklerini benden esirgemeyen değerli arkadaŐım Hasan HOMAĐ'a, Merve UÇAR'a, Abdurrahman DEDE'ye Mahmut GÜNEŐ'e ve ŐÜkrÜ KARADENİZ'e çok teşekkür ederim.

Çalışma sÜresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim tÜm aileme sonsuz teŐekkÜrlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT.....	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER LİSTESİ	xi
BÖLÜM 1: GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2: TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1 Yarıgrup Tanımları.....	3
2.2 Homomorfizmalar	7
2.3 Bağıntılar ve Denklikler.....	8
2.4 Kongrüanslar	11
2.5 Doğuray Kümeleri.....	14
2.6 Takdimler	16
2.7 Yarıgrup Takdimi Bulmak için Genel Metodlar.....	23
BÖLÜM 3: MATRİS YARIGRUP TAKDİMLERİ.....	25
3.1 Özel Lineer Yarıgrup $SLS(2, p)$ Takdimleri.....	26
3.2 Genel Lineer Yarıgrup $GLS(2, p)$ Takdimleri.....	42
BÖLÜM 4: MATRİS YARIGRUPLARI İÇİN YERİNE-YAZMA SİSTEMLERİ.....	47
4.1 Serbest Monoidlerde Sıralamalar	47

4.2 Yerine-Yazma Sistemleri	50
4.3 Özel Lineer Yarigrup $SLS(2, p)$ için Yerine-Yazma Sistemleri.....	55
4.4 Genel Lineer Yarigrup $GLS(2, p)$ için Yerine-Yazma Sistemleri	61
BÖLÜM 5: MATRİS YARIGRUPLARININ İKİNCİ İNTEGRAL	
HOMOLOJİSİ	75
5.1 Özel Lineer Yarigruplarının İkinci İntegral Homolojisi	75
SONUÇLAR	84
KAYNAKLAR	85



SEMBOLLER LİSTESİ

A^+	A kümesinden oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi
A^*	$A^+ \cup \{1\}$
$w \rightarrow x$	w kelimesinin x kelimesine indirgenmesi
$\langle X R \rangle$	Monoid (ya da yarıgrup) takdimi
$L(W_i)$	W_i kelimesinin uzunluğu
$S \times S$	S kümesinin kartezyen çarpımı
S/ρ	S yarı grubunun ρ kongrüansı ile bölüm yarı grubu
S^1	S yarı grubuna $\{1\}$ elemanı eklenerek elde edilen monoid
S^0	S yarı grubuna $\{0\}$ elemanı eklenerek elde edilen sıfırlı yarı grup
$\langle A \rangle$	A kümesi tarafından doğrulan yarı grup
$B(X)$	X kümesi üzerindeki tüm bağıntıların kümesi
$x\rho$	x elemanının ρ kongrüansına göre denklik sınıfı
R^\times	R denklik bağıntısının geçişmeli kapanışı
$Irr(R)$	R yeniden yazma sistemine göre indirgenemez elemanların kümesi
$w_1 \equiv w_2$	w_1 ve w_2 kelimeleri özdeş
$w_1 \equiv \alpha_1, \dots, \alpha_n \equiv w_2$	w_1 kelimesinden w_2 kelimesine sonlu dizi

$$w_1 = w_2$$

$w_1\rho = w_2\rho$ (S yarigrubunda aynı elemanı temsil eden

kelimeler)

$w_1 \equiv \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \equiv w_2$ w_1 kelimesinden w_2 kelimesine sonlu zincir



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Monoid ve gruplarda yerine yazma sistemlerinin tarihi yaklaşık 100 yaşındadır. Bir monoid ya da grup takdimi bir yerine-yazma sistemi olarak görülebilir. Bazen bazı istenen özelliklere sahip bu sistem klasik algoritma problemlerin çözümüne yardımcı olur. Örneğin, eğer yerine-yazma sistemi sonlu ve tam ise, kelime probleminin çözümünde ve monoidin elemanlarının normal formlarını bulmak için kullanılabilir. Bu yerine yazma sistemlerinin grup ve yarıgrup teoride öneminin temel nedenlerinden biridir ve bu konu üzerinde geniş ölçüde literatür vardır. [1,2,3,4,5,6,7]. S. M. Hermiller [8], J. Pederson ve M. Yoder [9] bazı gruplar için sonlu tam yerine yazma sistemleri vermiştir.

Geçmiş yıllarda yerine-yazma sistemleri hem matematikte hem de teorik bilgisayar bilimlerinde önemli rol oynamıştır.

Matris yarıgrupları takdimleri [10,11,12,13,14] te çalışılmıştır.

Bu çalışmada, herhangi asal cisim üzerindeki 2×2 tipindeki matris yarıgrupları için tek türlü sonlanan yerine-yazma sistemi inşa edilmiştir.

Özel lineer yarıgruplarını $SLS(d, p^n)$ ve genel lineer yarıgruplarını $GLS(d, p^n)$ tanımlayan bazı takdimler Nikola Ruskuc tarafından [11] de verilmiştir. Ayrıca bazı monoid ve yarıgrupların ikinci integral homolojisi [15,16,17] da çalışılmıştır. Bu çalışmaların sonucu olarak, monoidlerin Schützenberger çarpımının, mn dereceli sonlu bir dikdörtgen band R_{mn} nin ve sonlu bir Rees matris yarıgrupunun ikinci integral homolojilerinin sırasıyla $H_2(S \diamond T) = H_2(S) \times H_2(T) \times (H_1(S) \otimes H_1(T))$, $H_2(S) \times \mathbb{Z}^{(|\lambda|-1)(|\lambda|-1)}$ olduğu bulunmuştur. [16] da H. Ayık Rees matris yarıgrupunun ikinci homolojisini bulmak için Squier çözümlemesi [18] kullanmıştır.

Burada, bu çözümü kullanarak, özel lineer matris yarıgruplarının ($SLS(2, p)$) ikinci integral homolojisi için değişmeli bir grup takdimi bulunmuştur.

Ayrıca, James D. Mitchell herhangi sonlu takdimli yarıgrupların ikinci homolojisini bulmak için [19] da GAP code vermiştir.

Bu çalışmanın 2. bölümünde (ihtiyacımız olan) temel tanım ve teoremler verilmiştir.

3. bölümde bu çalışmadan yola çıkarak matris yarıgrup takdimleri verilmiştir. Nikola Ruskuc [11] de genel lineer yarıgrupları $GLS(d, p^n)$ ve özel lineer yarıgrupları $SLS(d, p^n)$ için $d = 2, n = 1$ durumunda tanımlayan çeşitli takdimler vermiştir.

4. bölüm özel lineer matris yarıgrupları ve genel lineer matris yarıgrupları tek türlü sonlanan yerine yazma sistemleri ile tanımlanmıştır. Yerine yazma sistemleri için [20,21]'e bakınız.

5. bölümde özel lineer yarıgrupların ikinci integral homolojisi için değişmeli bir grup takdimi bulunmuştur. Bu grup takdimi bulunurken Squier'in \mathbb{Z} nin çözümlenmesi (resolution) yöntemi kullanılmıştır. ([18]).

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Yarıgrup Tanımları

Bu bölümde ileride kullanacağımız yarıgrup teorisindeki önemli tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. S boştan farklı bir küme olsun. $S \times S$ den S ye tanımlı bir “ μ ” fonksiyonuna S üzerinde bir (kapalı) **ikili işlem** denir. Her $a, b \in S$ için a ve b elemanlarına uygulanan bu ikili işlem $a\mu b$ şeklinde gösterilir. Eğer “ μ ”, S üzerinde bir ikili işlem ise (S, μ) ikilisine bir **grupoid** denir.

Tanım 2.1.2. (S, μ) bir grupoid olsun. Eğer “ μ ” ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahip, yani her $a, b, c \in S$ için

$$a\mu(b\mu c) = (a\mu b)\mu c$$

ise (S, μ) grupoidine bir **yarıgrup** denir.

Genelde “ikili işlem” yerine “çarpma işlemi” denilecektir ve bu işlem “.” ile gösterilecektir. Eğer çarpma işleminin ne olduğu içerikten belli ise, $(S, .)$ yerine S ve a, b yerine de ab yazılacaktır.

Tanım 2.1.3. S yarıgrubu değişme özelliğine sahip, yani her $a, b \in S$ için $ab = ba$ ise S yarıgrubuna **değişmeli yarıgrup** denir.

Tanım 2.1.4. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Her $x \in S$ için $ax = a$ ise a ya S nin bir **sol sıfır elemanı**, her $x \in S$ için $xa = a$ ise a ya S nin bir **sağ sıfır elemanı** denir. Eğer $a \in S$ hem sol hem de sağ sıfır eleman ise a ya S nin bir **sıfır elemanı** denir.

Bir yarıgrupta birden fazla sağ veya sol sıfır eleman olabilir. Fakat bir yarıgrupta sıfır eleman varsa aşağıdaki önermeden dolayı sıfır eleman tektir ve 0 ile gösterilir.

Önerme 2.1.5. Bir S yarıgrubunun sıfır elemanı varsa tektir.

İspat: 0 ve $0'$, S nin iki sıfır elemanı olsun. O halde

$$\begin{aligned} 0 &= 00' \quad (0, \text{ sıfır eleman olduğundan}) \\ &= 0' \quad (0', \text{ sıfır eleman olduğundan}) \end{aligned}$$

olur. ■

Tanım 2.1.6. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Her $x \in S$ için $ex = x$ ise e ye S nin bir **sol birim elemanı**, her $x \in S$ için $xe = x$ ise e ye S nin bir **sağ birim elemanı** denir. Eğer $e \in S$ hem sağ hem de sol birim eleman ise e ye S nin bir **birim elemanı** denir.

Birim eleman genellikle 1_S veya kısaca 1 ile gösterilir. Bir yarıgrupta birden fazla sağ veya sol birim eleman olabilir. Fakat bir yarıgrupta birim eleman varsa aşağıdaki önermeden dolayı tektir.

Önerme 2.1.7. Bir S yarıgrubunun birim elemanı varsa tektir.

İspat: Önerme 2.1.5 teki gibi benzer şekilde ispatlanır. ■

Tanım 2.1.8. S bir yarıgrup olsun. Eğer S nin birim elemanı varsa S ye bir **monoid** denir.

S herhangi bir yarıgrup olsun. Eğer

$$S^1 = \begin{cases} S & 1 \in S \\ S \cup \{1\} & 1 \notin S \end{cases}$$

olmak üzere, S^1 üzerindeki ikili işlem her $x, y \in S^1$ için

$$xy = \begin{cases} xy & x, y \in S \\ x & y = 1 \\ y & x = 1 \\ 1 & x = y = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa S^1 bir monoid olup eğer gerekli ise birim eleman eklenerek S den elde edilen monoid olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.9. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e^2 = e.e = e$ ise e ye S nin bir **idempotent** elemanı denir. S yarı grubunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir. Eğer S yarı grubunun tüm elemanları birer idempotent yani $E(S) = S$ ise S yarı grubuna **band** denir. Eğer S yarı grubu hem değişmeli hem de bir band ise S ye bir **yarılatis (idempotentlerin değişmeli yarı grubu)** denir.

Tanım 2.1.10. S bir yarıgrup olsun. Eğer, her $a \in S$ için $Sa = S$ ve $aS = S$ ise S ye bir **grup** denir.

S bir yarıgrup olsun. Eğer, her $a \in S$ için $ea = a$ ($ae = a$) olacak şekilde bir $e \in S$ ve her bir $a \in S$ için $a^{-1}a = e$ ($aa^{-1} = e$) olacak şekilde bir $a^{-1} \in S$ mevcut ise S ye bir **grup** denir. Burada $e \in S$ ye grubun **birim elemanı** ve $a^{-1} \in S$ ye de a elemanının **tersi** denir.

Sadece birim elemandan oluşan $\{1\}$ kümesi bir grup olup bu gruba **aşık grup** denir.

Tanım 2.1.11. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer T, S deki çarpma işlemine göre kapalı yani her $x, y \in T$ için $xy \in T$ ise T ye S nin bir **altyarı grubu** denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir.

$S^2 = SS = \{xy: x, y \in S\} \subseteq S$ olup $S \leq S$ olur. Ayrıca S de bir sıfır eleman var ise $\{0\} \leq S$ ve S bir monoid ise $\{1\} \leq S$ olur. Bu altyarı gruplara **aşık altyarı gruplar** ve bunların dışındaki altyarı gruplara **öz altyarı gruplar** denir.

S bir yarıgrup ve T de S nin bir altyarı grubu olsun. Eğer T, S deki çarpma işlemiyle bir monoid oluyorsa T ye S nin bir **altmonoidi**, eğer bir grup oluyorsa T ye

S nin bir **altgrubu** denir. Benzer şekilde bir monoidin altmonoidi, bir grubun altgrubu kavramları tanımlanabilir.

Tanım 2.1.12. Pozitif n tamsayısı için $1 \leq a \leq n$ ve $(a, n) = 1$ olan a tamsayılarının sayısı $\phi(n)$ ile gösterilir ve **Euler fonksiyonu** denir. p asal ise $\phi(p) = p - 1$ dir.

Tanım 2.1.13. Herhangi bir n modunda bir p sayısının **ilkel kök (primitif)** olması demek o modda n ile aralarında asal bir sayının p nin bir kuvveti olarak yazılabildiği demektir. Özel olarak p asalsa p 'nin kuvvetlerinin tüm kalanlar sınıfını oluşturması demektir.

$$\xi^{\phi(p)} \equiv 1 \text{ (p asal)}$$

$$\xi^{p-1} \equiv 1$$

Örneğin, $5 \pmod{7}$ de ilkel köktür.

$$5^1 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$5^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$5^3 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$5^4 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$5^5 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$5^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$2 \pmod{7}$ de ilkel kök değildir.

$$2^1 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

2.2. Homomorfizmalar

Tanım 2.2.1. S ve T iki yarıgrup ve ψ de S den T ye bir dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in S$ için

$$(ab)\psi = (a)\psi(b)\psi$$

ise ψ ye bir **homomorfizma** denir.

$$(ab)\psi = (b)\psi(a)\psi$$

ise ψ ye bir **anti-homomorfizma** denir.

Tanım 2.2.2. S ve T iki yarıgrup ve ψ de S den T ye bir homomorfizma olsun.

- (i) Eğer ψ birebir ise ψ ye bir **monomorfizm** denir.
- (ii) Eğer ψ örten ise ψ ye bir **epimorfizm** denir.
- (iii) Eğer ψ hem monomorfizm hem de epimorfizm ise ψ ye bir **izomorfizm** denir.
- (iv) Eğer ψ , S den S ye bir homomorfizm ise ψ ye bir **endomorfizm** denir.
- (v) Eğer ψ , S den S ye bir izomorfizm ise ψ ye bir **otomorfizm** denir.
- (vi) Eğer S den T ye bir izomorfizm mevcut ise S ile T ye **izomorfik yarıgruplar** denir ve $S \cong T$ şeklinde yazılır.

S ve T iki monoid ve ψ de S den T ye bir (yarıgrup) anti-homomorfizma olsun. ψ birebir ve örten ise ψ ye **anti-izomorfizma** denir.

S ve T iki monoid ve ψ de S den T ye bir (yarıgrup) homomorfizm olsun. Eğer S nin birim elemanının ψ altındaki görüntüsü T nin birim elemanı, yani $(1_S)\psi = 1_T$ ise ψ ye bir **monoid homomorfizmi** denir. Benzer şekilde, yukarıdaki diğer tanımlar da monoidler için genelleştirilebilir.

Tanım 2.2.3. S ve T iki yarıgrup ve $\psi: S \rightarrow T$ bir homomorfizm olsun. O zaman

$$\ker\psi = \{(a, b) \in S \times S: a\psi = b\psi\},$$

$$\text{im}\psi = S\psi = \{x\psi: x \in S\}$$

olarak tanımlanan kümelere sırasıyla ψ nin **çekirdek kümesi** ve **görüntü kümesi** denir.

Tanım 2.2.4. S ve T iki yarıgrup olsun. $S \times T = \{(s, t): s \in S, t \in T\}$ kümesine S ile T nin **kartezyen çarpımı** denir. Ayrıca $s, s' \in S$ ve $t, t' \in T$ olmak üzere $S \times T$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde

$$(s, t)(s', t') = (ss', tt')$$

tanımlanan çarpma (ikili) işlemi ile $S \times T$ de bir yarıgruptur. Bu yarıgruba S ile T nin **direkt çarpımı** denir.

2.3. Bağlılar ve Denklikler

Tanım 2.3.1 X ve Y boş olmayan iki küme olmak üzere $X \times Y$ in her bir ρ alt kümesine **X ten Y ye bir bağlantı** denir. $X \times X$ in her bir ρ altkümüne ise X üzerinde **bir bağlantı** denir. X üzerindeki tüm bağlantıların kümesi $B(X)$ ile gösterilir. $\emptyset, \Delta_X = 1_X = \{(x, x): x \in X\}$ kümesi ve $X \times X$ in kendisi X üzerinde birer bağlantı olup bunlara sırasıyla **boş bağlantı**, **birim bağlantı** ve **evrensel bağlantı** denir.

Tanım 2.3.2. Her $\alpha, \beta \in B(X)$ için

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) \in X \times X: z \in X \text{ için } (x, z) \in \alpha \text{ ve } (z, y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile $B(X)$ bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **tüm bağlantılar yarıgrubu** denir. Ayrıca $B(X)$, birim elemanı Δ_X olan bir monoid olur.

Her $\rho \in B(X)$ için

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \in X \times X: (y, x) \in \rho\}$$

bağlantısına ρ nun **ters bağlantısı (tersi)** denir.

Tanım 2.3.3. ρ , X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer

- (i) $1_X \subseteq \rho$ ise ρ ya **yansımali bağıntı**;
- (ii) $\rho^{-1} = \rho$ ise ρ ya **simetrik bağıntı**;
- (iii) $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise ρ ya **geçişmeli bağıntı**;
- (iv) $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_X$ ise ρ ya **ters-simetrik bağıntı**;

denir. Eğer ρ bağıntısı yansımali, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir.

Tanım 2.3.4. ρ , X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olsun. O zaman

$$x/\rho = x\rho = \{y \in X: (x, y) \in \rho\}$$

kümesine bir **denklik sınıfı** denir. Ayrıca X in tüm denklik sınıflarının ailesi olan

$$X/\rho = \{x\rho: x \in X\}$$

kümesine de X in ρ aracılığıyla oluşturulan **bölüm kümesi** denir.

Tanım 2.3.5. X boş olmayan bir küme ve R , X kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı ise $R \subseteq X \times X$ olduğundan R yi içeren denklik bağıntılarının ailesi boştan farklıdır. Böylece, R yi içeren denklik bağıntılarının kesişimi de bir denklik bağıntısıdır ve bu denklik bağıntısı R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Bu en küçük denklik bağıntısına R tarafından **doğrulan denklik bağıntısı** denir ve R^e ile gösterilir. Başka bir ifade ile

$$R^e = \cap \{\rho: R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı}\}$$

olur. Ayrıca

- $R = \emptyset \Rightarrow R^e = \Delta_X$,
- R bir denklik bağıntısı ise $R^e = R$ ve
- $R^e = (R^{-1})^e$

özellikleri sağlanır.

Tanım 2.3.6. X boş olmayan bir küme ve R , X üzerinde yansımali bir bağıntı ($\Delta_X \subseteq R$) olsun. O zaman

$$\begin{aligned} R &= \Delta_X \circ R \subseteq R \circ R \Rightarrow R \subseteq R^2 \\ R^2 &= \Delta_X \circ R^2 \subseteq R \circ R^2 \Rightarrow R^2 \subseteq R^3 \end{aligned}$$

olup benzer şekilde devam edilirse

$$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \dots \subseteq R^n \subseteq \dots$$

olur. Bu durumda X üzerinde R^∞ bağıntısı

$$R^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} R^n$$

olarak tanımlanır. Bu kümeye R nin **geçişmeli kapanışı** denir.

Önerme 2.3.7. Eğer R bir X kümesi üzerinde bir bağıntı ise R^∞ , X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır.

İspat: $(x, y), (y, z) \in R^\infty$ olsun. O halde $(x, y) \in R^m$ ve $(y, z) \in R^n$ olacak şekilde m, n pozitif sayıları vardır.

$$(x, z) \in R^m \circ R^n = R^{m+n} \subseteq R^\infty$$

olup R^∞ geçişmelidir. Dikkat edilirse $R^1 \subseteq R \subseteq R^\infty$ dur. T , X üzerinde R yi içeren başka bir geçişmeli bağıntı olsun. $R^2 = R \circ R \subseteq T \circ T \subseteq T$ dir. Tümevarım ile kolayca görüleceği gibi $n = 1, 2, \dots$ için $R^n \subseteq T$ dir. Böylece $R^\infty \subseteq T$ olup R^∞ , X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır. ■

Önerme 2.3.8. R, X kümesi üzerinde bir bağıntı ise X üzerinde R yi içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimi $R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$ dur.

İspat: $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X$ ve $E = S^\infty$ olsun. Önerme 2.3.7. den, E geçişmeli ve $R \subseteq E$ dir. $1_X \subseteq S \subseteq E$ olduğundan E yansımalıdır. S tanımdan dolayı simetriktir. Yani $S^{-1} = S$ dir. O halde her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $S^n = (S^{-1})^n = (S^n)^{-1}$ olur. Böylece

$$E^{-1} = (S^\infty)^{-1} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n \right)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (S^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n = E$$

olup E simetriktir. O halde E, R yi içeren bir denklik bağıntısıdır. T, X üzerinde R yi içeren bir başka denklik bağıntısı olsun. O zaman $1_X \subseteq T$ ve $R^{-1} \subseteq T^{-1} = T$ olup $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X \subseteq T$ dir. $E = S^\infty$, X üzerinde S yi içeren en küçük geçişmeli bağıntı ve T geçişmeli olduğundan $E \subseteq T$ dir. Böylece $S \circ S \subseteq T \circ T = T$ olup her $n \geq 1$ için $E = S^\infty \subseteq T$ elde edilir. $E = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$ nin X üzerindeki R yi içeren en küçük kongrüans olduğunu gösterdik. O halde $E = R^e$ dir. ■

2.4. Kongrüanslar

Yarıgrup homomorfizmalarının çekirdeği kongrüans olduğundan, kongrüans kavramı yarıgrup teoride önemli yer tutmaktadır.

Tanım 2.4.1. S bir yarıgrup ve R de S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer, her $a \in S$ ve her $(s, t), (s', t') \in R$ için

- (i) $(as, at) \in R$ ise R bağıntısına **sol uyumlu**;
- (ii) $(sa, ta) \in R$ ise R bağıntısına **sağ uyumlu**;
- (iii) $(ss', tt') \in R$ ise R bağıntısına **uyumlu**

bağıntı denir. Ayrıca sol uyumlu denklik bağıntısına bir **sol kongrüans**; sağ uyumlu denklik bağıntısına bir **sağ kongrüans**; ve uyumlu denklik bağıntısına bir **kongrüans** denir.

Önerme 2.4.2. S bir yarıgrup ve R, S üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. R nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul R nin hem sol hem de sağ kongrüans olmasıdır.

İspat: İspat için bkz. [22].

Tanım 2.4.3. S bir yarıgrup ve R, S üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere tanımdan kolayca görülüyor ki, R nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul R nin $S \times S$ nin bir altarıgrubu olmasıdır. O halde $S \times S$ nin altarıgrubu olan Δ_S ve $S \times S, S$ üzerinde birer kongrüanstır. Bu kongrüanslara sırasıyla S nin **aşık** **kongrüansı** ve **evrensel kongrüansı** denir.

Tanım 2.4.4. S bir yarıgrup ve ρ, S üzerinde bir kongrüans olsun. S nin ρ ile elde edilen bölüm kümesi S/ρ üzerinde bir çarpma işlemi her $a\rho, b\rho \in S/\rho$ için

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$$

şeklinde tanımlanır ise S/ρ bu çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba S nin ρ ile elde edilen **bölüm yarıgrubu** denir. Kolayca görülüyor ki, eğer S birim elemanı 1 olan bir monoid ise S/ρ da birim elemanı 1_ρ olan bir monoiddir. Burada $a/\rho = \{b \in S: a\rho b\}$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.4.5. S bir yarıgrup ve ρ, S üzerinde bir kongrüans olsun. O zaman her $x \in S$ için $x\rho^\# = x\rho$ olarak tanımlanan $\rho^\# = S \rightarrow S/\rho$ dönüşümü bir örten homomorfizm olup bu homomorfizme **doğal homomorfizma** denir.

Tanım 2.4.6. S, T iki yarıgrup ve $\psi: S \rightarrow T$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda

$$\ker \psi = \psi \circ \psi^{-1} = \{(x, y) \in X \times X: x\psi = y\psi\}$$

S üzerinde bir kongrüanstır.

İspat: İspat için bkz. [22].

Teorem 2.4.7. (1. İzomorfizm Teoremi) S, T iki yarıgrup ve $\psi: S \rightarrow T$ örten bir homomorfizm ise $S/\ker\psi \cong T$ olur.

İspat: $\rho = \ker\psi$ alalım ve $\phi: S/\rho \rightarrow T$ dönüşümü her $x\rho \in S/\rho$ için $(x\rho)\phi = x\psi$ olarak tanımlayalım. Her $x\rho, y\rho \in S/\rho$ için

$$x\rho = y\rho \Leftrightarrow (x, y) \in \rho = \ker\psi \Leftrightarrow x\psi = y\psi \Leftrightarrow (x\rho)\phi = (y\rho)\phi \text{ ve} \\ (x\rho y\rho)\phi = ((xy)\rho)\phi = (xy)\psi = (x)\psi(y)\psi = ((x\rho)\phi)((y\rho)\phi)$$

olduğundan ϕ hem iyi tanımlı hem de bir monomorfizmdir. Ayrıca ψ örten olduğundan $im\phi = im\psi = T$ olup ϕ bir izomorfizmdir. ■

Tanım 2.4.8. R bir S yarıgrubu üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O zaman R^c kümesi

$$R^c = \{(xay, xby): x, y \in S^1, (a, b) \in R\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda kolayca görülür ki R^c , S yarıgrubu üzerinde R yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntıdır. Ayrıca, Q da S üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

- $R \subseteq Q \Rightarrow R^c \subseteq Q^c$,
- $(R^{-1})^c = (R^c)^{-1}$,
- $(R \cup Q)^c = R^c \cup Q^c$ ve
- R bir kongrüans ise $R^c = R$

olur.

2.5. Doğuray Kümeleri

Tanım 2.5.1. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. S nin X kümesini içeren tüm altarıgruplarının arakesiti de X kümesini içeren bir altarıgrup olup, bu altarıgruba S nin X tarafından doğrulan altarıgrubu denir ve ${}_S\langle X \rangle$ ile gösterilir. Yani

$${}_S\langle X \rangle = \bigcap \{T: X \subseteq T, T \leq S\}$$

olur. Böylece ${}_S\langle X \rangle$, X kümesini içeren en küçük altarıgruptur. Ayrıca, kolayca gösterileceği üzere ${}_S\langle X \rangle$, X üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir. Yani

$${}_S\langle X \rangle = \{x_1 \dots x_n: n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } x_1, \dots, x_n \in X\}$$

olur.

Benzer şekilde X tarafından doğrulan altmonoid ve X tarafından doğrulan altgrup da tanımlanabilir. Bunlar da sırasıyla

$${}_M\langle X \rangle = \{x_1 \dots x_n: n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } x_1, \dots, x_n \in X\} \cup \{1\}$$

$${}_G\langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}: n \in \mathbb{Z}^+; x_i \in X, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, n\}$$

olur. Tanımdan kolayca görülüyor ki $X^{-1} = \{x^{-1}: x \in X\}$ olarak tanımlanırsa

$${}_G\langle X \rangle = {}_S\langle X \cup X^{-1} \rangle$$

olur. Eğer X kümesinin bir yarıgrup, monoid veya grup doğuray kümesi olduğu içerikten anlaşılıyorsa X tarafından doğrulan altarıgrup, altmonoid veya altgrup kısaca $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

S bir yarıgrup (monoid/grup), $\emptyset \neq X \subseteq S$ ve $\emptyset \neq Y \subseteq S$ olsun. Eğer $X \subseteq Y$ ise $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ olduğu açıktır.

Tanım 2.5.2. S bir yarıgrup olmak üzere eğer $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde bir $\emptyset \neq X \subseteq S$ kümesi var ise bu X kümesine S nin bir **yarıgrup doğuray kümesi**, X in her bir elemanına S nin bir **doğurayı** ve S ye de X tarafından **doğrulan yarıgrup** denir. Eğer $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde S nin sonlu bir X alt kümesi varsa S ye **sonlu doğuraylı yarıgrup** denir.

Özel olarak, sonlu bir yarıgrup aynı zamanda kendisi için bir sonlu doğuray kümesi olduğundan sonlu doğuraylıdır.

S bir yarıgrup ve $S = \langle X \rangle$ olsun. Eğer $X = \{x\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise S ye **tek doğuraylı (monogenic) yarıgrup** denir ve $S = \langle X \rangle$ şeklinde de yazılabilir. Benzer tanımlar monoid ve grup için de yapılabilir.

Tanım 2.5.3. S , sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$rank(S) = \min \{ |X| : X \subseteq S, \langle X \rangle = S \}$$

tamsayısına S nin **yarıgrup rankı** denir ve $rank_S(S)$ ile gösterilir. Benzer tanımlar **monoid rankı** ve **grup rankı** da tanımlanabilir.

Önerme 2.5.4. S, T birim elemanları sırasıyla $1_S, 1_T$ olan iki monoid ve X, Y sırasıyla S ile T nin birer doğuray kümesi olsun. O zaman

$$Z = \{ (x, 1_T) : x \in X \} \cup \{ (1_S, y) : y \in Y \}$$

kümesi $S \times T$ monoidinin bir doğuraydır.

İspat: $(s, t) \in S \times T$ olsun. O halde $s \in S$ ve $t \in T$ olup $s = x_1 x_2 \dots x_m$ ve $t = y_1 y_2 \dots y_n$ olacak şekilde $x_i \in X, i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ve $y_j \in Y, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ vardır. Bu durumda

$$(s, t) = (x_1 x_2 \dots x_m, y_1 y_2 \dots y_n) = (x_1, 1_T) \dots (x_m, 1_T) (1_S, y_1) \dots (1_S, y_n)$$

olup $S \times T = \langle Z \rangle$ olur. ■

Önerme 2.5.5. S sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve A, S nin herhangi bir doğuray kümesi olsun. O halde S nin bir doğuray kümesi olacak şekilde sonlu bir $A_0 \subseteq A$ altkümesi vardır.

İspat: S sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve A, S nin herhangi bir doğuray kümesi olsun. $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, S nin bir sonlu doğuray kümesi olmak üzere her $b_i \in B$ için

$$b_i = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$$

olacak şekilde $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A$ vardır. Böylece $A_0 = \bigcup_{i=1}^n \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ olarak alınır ise $S = \langle B \rangle \subseteq \langle A_0 \rangle \subseteq \langle A \rangle = S$ olup A_0, S nin bir sonlu doğuray kümesi olur. ■

2.6. Takdimler

Tanım 2.6.1. A boş olmayan bir küme olsun. Bu kümenin elemanlarını bir alfabe sisteminin tüm harfleri olarak düşünülürse her $a_1, \dots, a_n \in A, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için

$$w \equiv a_1 \dots a_n$$

ifadesine **uzunluğu** n olan bir **kelime** denir ve w kelimesinin uzunluğu (boyu) $l(w)$, $L(w)$, $|w|$ veya $\|w\|$ sembollerinden biri ile gösterilir. Eğer $l(w)$ sonlu bir tamsayı ise w kelimesine bir **sonlu kelime** denir. Eğer $l(w) = 0$ ise w kelimesine **boş kelime** denir ve boş kelime ε veya 1 ile gösterilir.

A boş olmayan bir küme (alfabe) olmak üzere, A üzerindeki tüm sonlu boş olmayan kelimelerin kümesi A^+ ile ve $A^+ \cup \{e\} = A^+ \cup \{1\}$ kümesi de A^* ile gösterilir. Diğer bir ifade ile

$$A^+ = \{a_1 \dots a_n : n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } a_1, \dots, a_n \in A\} \text{ ve } A^* = A^+ \cup \{e\} = A^+ \cup \{1\}$$

olur.

Tanım 2.6.2. A^+ kümesi, her $a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m \in A^+$ için

$$(a_1 \dots a_n) (b_1 \dots b_m) = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir yarıgrup olur. Bu yarıgruba A üzerinde ki **serbest yarıgrup** denir. Ayrıca, A^* kümesi de aynı ikili işlemle birim elemanı 1 olan bir monoiddir ve bu monoide **serbest monoid** denir.

Önerme 2.6.3. Her yarıgrup bir serbest yarıgrupun homomorfik görüntüsüdür.

İspat: S bir yarıgrup ve A da S nin bir doğuray kümesi olsun. O zaman $\psi: A^+ \rightarrow S$ her $a \in A$ için $a\psi = a$ olacak şekilde tek homomorfizma olarak tanımlayalım. $S = \langle A \rangle$ olduğundan her $s \in S$ için $s = a_1 a_2 \dots a_n$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ vardır. $(a_1 a_2 \dots a_n)\psi = s$ olduğundan ψ örtendir. ■

A bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere bir **yarıgrup takdimi** $\langle A|R \rangle$ ikilisidir. $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan yarıgrup, ρ, R yi içeren A^+ üzerindeki en küçük kongrüans olmak üzere A^+/ρ yarıgrupudur.

A nın elemanlarına **doğuraylar**, R nin elemanlarına **tanımlı ilişkiler** denir. Tipik tanımlı ilişki $(u, v) \in R$ genellikle $u = v$ olarak yazılır. Genellikle A ve R yi elemanları yazılarak belirtilir. Örneğin,

$$\langle \{a, b\} | \{(a^5, a)(b^6, b)(ab, ba)\} \rangle$$

yerine

$$\langle a, b | a^5 = a, b^6 = b, ab = ba \rangle$$

yazılır.

S , $\langle A|R \rangle$ ile tanımlı bir yarıgrup olsun. O halde, $w_1, w_2 \in A^+$ iki kelimesi için, eğer benzer kelimeler ise $w_1 \equiv w_2$ ve eğer S yarıgrupunun aynı elemanını gösterirlerse $w_1 = w_2$ yazılır. Yani $(w_1, w_2) \in \rho$ ve $w_1 = w_2$ ilişkisi S de sağlanır denilir. Örneğin $A = \{a, b\}$ ve $R = \{ab = ba\}$ ise, $aba = a^2b$ dir. Fakat $aba \not\equiv a^2b$ dir.

Eğer bir S yarıgrubu hem A hem de R sonlu olacak şekilde $\langle A|R \rangle$ tanımlı ise, takdime **sonlu takdim** ve S ye ise **sonlu takdimlidir** denir.

Tanım 2.6.4. $\langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. $w_1 \equiv \alpha u \beta$, $w_2 \equiv \alpha v \beta$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in A^*$ ve $(u, v) \in R$ mevcut ise w_2, R **deki bir ilişki bir kez uygulanarak w_1 den elde edilmiştir** denir. Bir başka ifadeyle, eğer $w_1 \equiv w_2$ veya her $i = 1, 2, \dots, n - 1$ için α_{i+1}, R deki bir ilişki bir kez uygulanarak α_i den elde edilmiş olmak üzere kelimelerin sonlu bir

$$w_1 \equiv \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \equiv w_2$$

dizisi mevcut ise w_2, w_1 **den R deki ilişkiler kullanılarak elde edilmiştir** denir. Ayrıca $w_1 = w_2, \langle A|R \rangle$ nin veya sadece R nin **bir sonucudur** da denir.

Önerme 2.6.5. S, A kümesi tarafından doğurulan bir yarıgrup ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. $\langle A|R \rangle$ nin S için bir takdim olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

- i) S, R deki tüm ilişkileri sağlar ve
- ii) $u = v$ ilişkisi S de sağlanıyor olacak şekilde $u, v \in A^+$ herhangi iki kelime ise o zaman $u = v, R$ nin bir sonucudur.

İspat: $\langle A|R \rangle, S$ için bir takdim olsun. O zaman S, R deki tüm ilişkileri sağlar. ii) nin sağlandığı açıktır. Tersini göstermek için i) ve ii) nin sağlandığını kabul edelim. $\phi: A^+ \rightarrow S$ birim dönüşüm, $I: A \rightarrow A$ nin bir genişlemesi olan bir epimorfizm ve ρ da R yi içeren A^+ üzerindeki en küçük kongrüans olsun. S, R deki tüm ilişkileri sağladığından $R \subseteq Ker\phi$ dir. Böylece $\rho \subseteq Ker\phi$ dir. Diğer yandan eğer $(u, v) \in Ker\phi$ ise o zaman $S, u = v$ ilişkisini sağlar. O halde $u = v, R$ nin bir sonucudur. Tanım 2.6.4 ile $(u, v) \in \rho$ dir. Böylece $\rho = Ker\phi$ dir. Dolayısıyla $S \cong A^+/Ker\phi = A^+/\rho$ yarıgrubu, $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan yarıgruptur. ■

Önerme 2.6.6. $\langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi, ρ, R nin doğurduğu kongrüans, $S = A^+/\rho$ ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. $w_1\rho = w_2\rho$ olması için gerek ve yeter koşul $w_1 = w_2$ nin $\langle A|R \rangle$ nin bir sonucu olmasıdır.

İspat: İspat için bkz. [23].

Tanım 2.6.7. Sonlu bir yarıgrup takdimi $\wp = \langle A|R \rangle$ için **noksanlık (deficiency)** $|R| - |A|$ olarak tanımlanır ve $def(\wp)$ ile gösterilir. Sonlu takdimli bir S yarıgrubu için yarıgrup noksanlığı,

$$def_s(S) = \min\{def(\wp) : \wp, S \text{ için sonlu bir yarıgrup takdimi}\}$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde grup ve monoid noksanlığı tanımlanır. S 'nin ikinci integral homolojisini göz önüne alarak noksanlık için daha iyi bir sınır elde edilir. Bir başka deyişle $H_2(S)$, S yarıgrubunun ikinci integral homolojisi olacak şekilde $def(S) \geq rank(H_2(S))$.

Önerme 2.6.8. $P = \langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve S, P tarafından tanımlanan yarıgrup olsun. Ayrıca T , bir B kümesi tarafından doğurulan yarıgrup olsun. Eğer $f: A \rightarrow B$ örten bir fonksiyon mevcut ve $\psi: A^+ \rightarrow T$, f nin tek genişlemesi olarak tanımlanan doğal homomorfizm olmak üzere her $(r, s) \in R$ için $r\psi = s\psi$ ise T, S nin bir homomorfik görüntüsüdür. Diğer bir ifade ile $T \cong S/\rho$ olacak şekilde S üzerinde bir ρ kongrüansı vardır.

İspat: İspat için bkz. [24].

Sonuç 2.6.9. $S = \langle A|R \rangle$ ve $T = \langle A|Q \rangle$ olsun. Eğer $R \subseteq Q$ ise T, S nin bir homomorfik görüntüsüdür. ■

Sonuç 2.6.10. $S, \langle A|R \rangle$ takdimi ile tanımlanan yarıgrup ve $T = \langle A| \rangle = A^+$ serbest yarıgrup olsun. O zaman $\emptyset \subseteq R$ olup S, T nin bir homomorfik görüntüsüdür. Dolayısıyla her yarıgrup bir serbest yarıgrubun homomorfik görüntüsüdür. ■

İspat: İspat için bkz. [23].

Teorem 2.6.11. S bir yarıgrup, $A \subseteq S$ ve $S = \langle A \rangle$ olsun. O zaman $\langle A|R \rangle$ nin S için bir takdim olabilmesi için gerek ve yeter koşul

- (i) R deki tüm ilişkilerin S de sağlanıyor olması ve
- (ii) Her $u, v \in A^+$ için $u = v$ bağıntısı S de sağlanıyor iken $u = v$ bağıntısının R nin bir sonucu

olmasıdır.

İspat: İspat için bkz. [24].

Önerme 2.6.12. S, A kümesi tarafından doğurulan bir yarıgrup ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ ve $W \subseteq A^+$ olsun.

- i) S, R deki tüm ilişkileri sağlar.
- ii) Her bir $w \in A^+$ kelimesi için, $w = \bar{w}$, R nin bir sonucu olacak şekilde, $\bar{w} \in W$ vardır.
- iii) $u \neq v$ olacak şekilde $u, v \in W$ ise, S nin bir yarıgrup takdimidir.

İspat: İspat için bkz. [23].

Örnek 2.6.13. $S = \{1\}$ aşık grubun yarıgrup takdimi $\langle a | a^2 = a \rangle$ dir.

- i) $A = \{a\}$ ve $f: A \rightarrow S$ ye $f(a) = 1$ şeklinde tanımlanırsa Af , S nin bir doğurayıdır.
- ii) R nin ilişkisinin S de sağlandığını gösterelim. $\pi: A^+ \rightarrow S$, f yi genişlemesi doğal homomorfizma ve $i: A \rightarrow A^+$ olsun.

$$\begin{aligned}
 a^2\pi &= (a\pi)(a\pi) \\
 &= af \cdot af \\
 &= 1.1 \\
 \dots &= 1 = af = a\pi
 \end{aligned}$$

O halde, $a^2 = a$ ilişkisi S de sağlanır.

iii) $W = \{a\}$ olsun. Herhangi bir $a^n \in A^+$ için $a^n = a$ ise (yani $n = 1$ ise) $a \in W$ olur. $n \geq 2$ ise, $a^n \equiv a^{n-2} \cdot a^2 \cdot 1$ ($a^2 = a$ ilişkisini uygulayalım). $a^{n-2} \cdot a \cdot 1 \equiv a^{n-1}$ olur. Benzer yolla devam edersek, a elde edilir. Bir ilişki uygulayarak $a^n \rightarrow a^{n-1}$ olup, $a^n = a$, R nin bir sonucudur. Ayrıca, $|W| = 1$ olduğundan, W, S nin bir kanonik formudur. Böylece, $S = \langle a | a^2 = a \rangle$ olur.

Önerme 2.6.14. S, A kümesi tarafından doğurulan bir yarıgrup ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ ve $W \subseteq A^+$ olsun.

- i) S, R deki tüm ilişkileri sağlar.
- ii) Her bir $w \in A^+$ kelimesi için, $w = \bar{w}$, R nin bir sonucu olacak şekilde, $\bar{w} \in W$ vardır.
- iii) $|W| \leq |S|$

koşulları sağlanıyor ise, $\langle A|R \rangle$, S nin bir yarıgrup takdimidir. (bkz. [22])

İspat: İspat için bkz. [23].

Örnek 2.6.15. $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere, $S = (P(X)/\emptyset, \cup)$ yani SL_3 olsun. $A = \{a, b, c\}$ seçelim. $f: A \rightarrow S$ ye, $a \rightarrow \{x\}$, $b \rightarrow \{y\}$, $c \rightarrow \{z\}$ şeklinde tanımlayalım. $Af: \{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ olup, S nin bir doğurayıdır. $\pi: A^+ \rightarrow S$, f yi geren doğal homomorfizma olmak üzere, $R: a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$, $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = cb$ şeklinde tanımlanan ilişkiler S de sağlanır. Gerçekten, $a^2 = a$, $ab = ba$ olduğunu görelim.

$$a^2\pi = (a\pi)^2 = (af)^2 = \{x\} \cup \{x\} = \{x\} = af = a\pi$$

olup, $a^2 = a$ ilişkisi S de sağlanır.

$$\begin{aligned} (ab)(\pi) &= (a\pi)(b\pi) = \{x\} \cup \{y\} = \{y\} \cup \{x\} \\ &= (b\pi)(a\pi) \\ &= (ba)(\pi) \end{aligned}$$

olup, $ab = ba$, S de sağlanır. O halde, benzer şekilde diğer tüm ilişkilerde S de sağlanır.

$$P(X)/\emptyset = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$$

dir. W nin elemanları S nin elemanlarına eşit olacak şekilde seçelim.

$$W = \{a^i b^j c^k : i, j, k \in \{0,1\} \text{ ve en az biri sıfırdan farklı olsun.}\} \subset A^+$$

$W = \{a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$ ve $w \in A^+$ olsun. $ab = ba$, $ac = ca$ ve $bc = cb$ ilişkilerinden gerektiği kadar yararlanarak $m, n, r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ fakat en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $w \xrightarrow{*} a^m b^n c^r$ olur. Örneğin,

$$acba \rightarrow acab \rightarrow a^2 cb \rightarrow a^2 bc$$

olur. Eğer kelimenin içinde hiç c olmasaydı,

$$aba \rightarrow a^2 ab \rightarrow a^3 b \rightarrow ab$$

elde edilir. $a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$ ilişkilerinden gerektiği kadar faydalanarak, $a^m b^n c^r \xrightarrow{*} a^i b^j c^k$ ve en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde $i, j, k \in \{0,1\}$ vardır. Yani $a^3 b \xrightarrow{a^2=a} ab$ yapılabilir. Sonuç olarak,

$$w \xrightarrow{*} a^m b^n c^r \xrightarrow{*} a^i b^j c^k \in W$$

R nin bir sonucudur. $|W| = 7 = |SL_3|$ olduğundan,

$$SL_3 = \langle a, b, c \mid a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c, ab = ba, ac = ca, bc = cb \rangle$$

olur.

Tanım 2.6.16. A^* kümesi, $\varepsilon^2 = \varepsilon$ ve her $w \in A^+$ için $w\varepsilon = \varepsilon w = w$ çarpması ile $A^+ \cup \{\varepsilon\}$ olarak tanımlanır. A bir alfabe, R de $A^* \times A^*$ in bir alt kümesi olmak üzere bir **monoid takdimi** $\langle A \mid R \rangle$ ikilisidir. $\langle A \mid R \rangle$ tarafından tanımlanan monoid, \bar{R} , R deki boş kelime yerine e yazılmış olmak üzere

$$\langle A, e \mid R, e^2 = e, ae = ea = a (a \in A) \rangle$$

tarafından tanımlanan yarıgruptur.

Dikkat edilecek olursa her yarıgrup takdimi aynı zamanda bir monoid takdimidir. Eğer S , $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan yarıgrup ve M de aynı takdim tarafından tanımlanan monoid ise, M basitçe yeni bir birim eklenmiş S dir. Eğer S birim elemana sahip ise bu eleman yeni eklenen birim eleman üzerinde birim gibi davranamayacaktır. Böylece $|M| = |S| + 1$ dir.

Örnek 2.6.17. $M = \{1, a\}$ ve $a^2 = 1$ olarak tanımlı monoidi alalım. $P_1 = \langle a|a^2 = 1 \rangle$ monoid takdimi M yi tanımlar.

$$P_2 = \langle a, b|a^2 = b, b^2 = b, ab = a, ba = a \rangle$$

yarıgrup takdimi de M yi tanımlar.

Tanım 2.6.18. A bir alfabe, $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$, A ile bir bir eşlenen bir alfabe ve $R \subset (A \cup A^{-1})^* \times (A \cup A^{-1})^*$ olmak üzere $\langle A|R \rangle$ ikilisine bir **grup takdimi** denir. $\langle A|R \rangle$ ile tanımlı grup

$$\langle A, A^{-1}|R, aa^{-1} = a^{-1}a = \varepsilon, (a \in A) \rangle$$

tarafından tanımlanan monoiddir. R deki ilişkileri sağlayan ve A tarafından doğrulan her grup, $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan grubun bir homomorfik görünüşüdür. $\langle A| \rangle$ tarafından tanımlanan gruba A üzerinde **serbest grup** denir. A üzerindeki serbest grubu F ile gösterelim. σ , $\{(aa^{-1}, \varepsilon), (a^{-1}a, \varepsilon) : a \in A\}$ kümesini içeren en küçük kongrüans olsun. O zaman F ile $(A \cup A^{-1})^*/\rho$ izomorfiktirler.

2.7. Yarıgrup Takdimi Bulmak için Genel Metodlar

Bir S yarıgrubu için takdim bulurken üç temel metod vardır.

- 1) Direkt Metod (Tahmin ve İspat)
- 2) Tietze Dönüşümleri
- 3) Yarıgrubun yapısını kullanmak

Direkt metod genellikle en çok kullanılan metottur. Bazı varyasyonları olmasına rağmen genellikle aşağıdaki adımları içerir.

- 1) S için bir A doğuray kümesi bulmak.
- 2) S yi tanımlamak için yeterli ve A daki doğuraylar tarafından sağlanıyor olacak şekilde bir R ilişkiler kümesi bulmak.
- 3) R deki ilişkiler uygulanarak A^+ daki her kelime W deki bir kelimeye dönüştürülebilmek üzere bir $W \subseteq A^+$ kümesi bulmak.
- 4) W deki farklı kelimelerin S deki farklı kelimeleri temsil ettiğini ispatlamak.

Bir yarıgrup için takdim bulmanın üçüncü metodu yarıgrupun yapısı yardımı ile takdim bulmaktır. Bu metotta bir S yarıgrupunu daha basit $i \in I, T_i$ yarıgrupları vasıtasıyla ifade etmeye çalışırız. Sonra $i \in I, T_i$ yarıgrupları için takdim bulup, S için bir takdim bulmak üzere bu takdimleri belli şekillerde bir araya getiririz.

Bir S yarıgrubu için takdim bulmanın diğer bir metodu Tietze dönüşümlerini uygulamaktır.

Tietze dönüşümlerini eğer S için bir $\langle A|R \rangle$ takdimini zaten biliyorsak, uygulamak mümkündür ve o halde S için alternatif bir takdim verir. Fikir bazı elementer hareketler uygulayarak ama takdimle tanımlı yarıgrubu değiştirmeksizin $\langle A|R \rangle$ takdimini dönüştürmektir. Bu elementer hareketler genellikle **Tietze dönüşümleri** olarak adlandırılır.

Elementer Tietze dönüşümleri diye bilinen 4 temel dönüşüm vardır.

(T1) (Doğuray Ekleme) Eğer $w = b$ olacak şekilde bir $w \in A^+$ var ise $b \notin A$ doğurayını ekleyerek aynı yarıgrubu tanımlamak üzere $\langle A|R \rangle$ takdiminden $\langle A \cup \{b\}|R \cup \{w = b\} \rangle$ takdimi elde edilir.

(T2) (Doğuray Çıkarma) Eğer $w = b \in R$ olacak şekilde, $w \in (A/\{b\})^+$ ve $b \in R$ varsa aynı yarıgrubu tanımlamak üzere $\langle A|R \rangle$ takdiminden $\langle A/\{b\}|\bar{R} \rangle$ takdimi elde edilir. Burada $\bar{R}, R/\{w = b\}$ den, b nin her bulunduğu yeri w ile değiştirerek elde edilen kümedir.

(T3) (İlişki Ekleme) Eğer $r = s$ bağıntısı, $\langle A|R \rangle$ ile tanımlanan yarıgrupta sağlanıyorsa, $\langle A|R \rangle$ takdiminden $\langle A|R \cup \{r = s\} \rangle$ takdimi elde edilir.

(T4) (İlişki Çıkarma) Eğer R deki $r = s$ bağıntısı, $\langle A|R \rangle$ takdiminde $R - \{r = s\}$ deki bağıntıların bir sonucu ise, $\langle A|R \rangle$ takdiminden $\langle A|R - \{r = s\} \rangle$ takdimi elde edilir.

Grup teorisinde de Tietze dönüşümleri benzerdir. (bkz. [25]).

BÖLÜM 3

MATRİS YARIGRUP TAKDİMLERİ

F bir cisim olsun. F üzerinde matrislerin bilinen çarpma işlemine göre determinantları sıfırdan farklı bütün $d \times d$ matrislerin kümesi bir gruptur. Bu gruba **genel lineer grup** denir ve $GL(d, F)$ ile gösterilir. Determinantı 1 olan bütün $d \times d$ matrisleri içeren matris grubuna **özel lineer grup** denir ve $SL(d, F)$ ile gösterilir. $SL(d, F)$ $GL(d, F)$ nin normal alt grubudur ve determinant homomorfizmasının $\det: GL(d, F) \rightarrow F$ çekirdeğidir. Böylece $GL(d, F)/SL(d, F)$ kümesi çarpımsal grup $F - \{0\}$ a izomorftur. Lineer gruplar için ayrıntılı bilgi için [26]'e bakınız.

F üzerinde bütün $d \times d$ matrislerin kümesi matrislerin çarpma işlemi altında bir yarıgruptur. Bu gruba **genel lineer yarıgrup** denir ve $GLS(d, F)$ ile ifade edilir. $GLS(d, F)$, $GL(d, F)$ nin benzeri bir yarıgruptur. Bütün matrislerin determinantları 0 veya 1 olan yarıgruba **özel lineer yarıgrup** denir ve $SLS(d, F)$ ile ifade edilir. $SLS(d, F)$, $SL(d, F)$ nin benzeri bir yarıgruptur.

$GLS(d, p^n) - GL(d, p^n)$ (p asal) bütün singüler matrislerin idealidir. $sing(d, p^n)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $SLS(d, p^n) - SL(d, p^n) = sing(d, p^n)$ olur ve bu $SLS(d, p^n)$ bir idealidir.

Teorem 3.1. $S \in GLS(d, F)$ rankı $d - 1$ olan herhangi bir matris ise

$$\langle GL(d, F) \cup \{S\} \rangle = GLS(d, F)$$

özel olarak

$$rank(GLS(d, F)) = rank(GL(d, F)) + 1$$

İspat: İspat için bkz. [24].

Teorem 3.2. $S \in SLS(d, F)$ rankı $d - 1$ olan herhangi bir matris ise

$$\langle SL(d, F) \cup \{S\} \rangle = SLS(d, F)$$

özel olarak

$$\text{rank}(SLS(d, F)) = \text{rank}(SL(d, F)) + 1$$

İspat: İspat için bkz. [24].

3.1. Özel Lineer Yarıgrup Takdimleri

Bu bölümde $d = 2$, $n = 1$ durumunda $SLS(d, p^n)$ yarıgruplarını tanımlayan çeşitli takdimler verilir. Bu takdimler daha sonra genel lineer yarıgrup için takdimlerini bulmak için kullanılacaktır.

Her özel lineer yarıgrup matrisleri, köşegende 1 diğerlerinin en az biri sıfırdan farklı matrisler tarafından doğrulduğundan $SL(d, p)$ nin;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisleri tarafından doğrulduğunu göstermek kolaydır.

$p = 2$ için $SL(2, p) (\cong GL(2, p)) S_3$ 'e izomorfik olduğundan $SL(2, p)$,

$$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle$$

takdimi ile tanımlanabilir.

$p > 2$ durumunda $SL(2, p)$ için birkaç takdim biliniyor.

$$\left\langle a, b \mid a^p = 1, b^2 = (ab)^3 = \left(a^4 b a^{\frac{p+1}{2}} b \right)^2 \right\rangle$$

[27]'da verilir ve bu takdim $SL(2, p)$ yi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

doğurayları cinsinden tanımlar.

Bununla birlikte, bunu

$$\left\langle a, b \left| \begin{array}{l} a^p = 1, b = (a^{-1}b)^4 a^{-1} (a^{-1}b)^2, \\ (ba^{-1}b)^2 = (aba^{-1}b)^3 = \left(a^4 ba^{-1} b a^{\frac{p+1}{2}} ba^{-1} b \right)^2 \end{array} \right. \right\rangle \quad (3.1.1)$$

takdimine dönüştürmek kolaydır. Bu takdim $SL(2, p)$ yi A ve B cinsinden tanımlar. $SL(2, p)$ için alternatif takdimler [10] da bulunabilir.

$GLS(2, p)$ ve $SLS(2, p)$ yarıgrupları sıfır ve birim eleman içerirler.

(3.1.1) nolu takdim yarıgrup takdimi olarak düşünülemez çünkü tersler vardır.

(3.1.1) in yarıgrup modifikasyonu,

$$\left\langle a, b \left| \begin{array}{l} a^p = b^p = 1, b = (a^{p-1}b)^4 a^{p-1} (a^{p-1}b)^2, \\ (ba^{p-1}b)^2 = (aba^{p-1}b)^3 = \left(a^4 ba^{p-1} b a^{\frac{p+1}{2}} ba^{p-1} b \right)^2 \end{array} \right. \right\rangle \quad (3.1.2)$$

olur.

Teorem 3.2. ile A ve B matrisleri ve rankı 1 olan herhangi bir matris, $SLS(2, p)$ yarıgrupunu doğurur. Bu matrisler,

$$S = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ya da } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleridir. Burada ξ , $GF(p) - \{0\}$ grubu için bir doğuraydır. Bir başka deyişle modülo p ye göre 1 in ilkel köküdür.

Teorem 3.1.1. $\langle a, b | R \rangle$, A ve B doğuraylarına göre $SLS(2, p)$ için herhangi bir (yarıgrup) takdimi olsun. O halde;

$$\beta_1 = \left\langle a, b, s \left| \begin{array}{l} R, bs = sa = s, sba^{p-1}s = 0, ba^{\xi-1}s = a^{1-\xi^{-1}}s^2, \\ sb^{\xi-1}a = s^2b^{1-\xi^{-1}} \end{array} \right. \right\rangle$$

A, B ve S doğuraylarına göre $SLS(2, p)$ için bir takdimdir. (bkz. [11]).

Teorem 3.1.2. $\langle a, b | R \rangle$, A ve B doğuraylarına göre $SLS(2, p)$ için herhangi bir (yarıgrup) takdimi olsun. O halde;

$$\beta_2 = \left\langle a, b, t \left| \begin{array}{l} R, t^2 = bt = ta = t, tba^{p-1}t = 0, \\ b^{\xi-1}atb = a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1} \end{array} \right. \right\rangle$$

A, B ve T doğuraylarına göre $SLS(2, p)$ için bir takdimdir. (bkz. [11])

$p = 2$ durumu için öncelikle ispat yapalım.

Lemma 3.1.3. $\langle a, b | R \rangle$, A ve B doğurayları cinsinden $GL(2, 2)(= SL(2, 2))$ için bir takdim olsun. O halde,

$$\langle a, b, s | R, s^2 = bs = sa = s, sbas = 0 \rangle \quad (3.1.3)$$

$GLS(2, 2)(= SLS(2, 2))$ için bir takdimdir.

İspat: $GLS(2, 2)$ yarıgrubu (3.1.3) ile tanımlı S yarıgrubunun bir homomorfik görüntüsüdür. Çünkü (3.1.3) deki bütün ilişkileri sağlar. $\langle a, b | R \rangle$ takdimi $GL(2, 2)$ yi tanımlar ve $\{a, b\}$ ile doğurulan S nin altarıgrubunun $|GLS(2, 2)| = 6$ elemandan fazla elemanı yoktur. Aynı zamanda $a^2 = b^2 = 1$ ve $aba = bab$ dir. S 'de s harfini içeren her bir kelime $\{s, sb, sba, as, asb, asba, bas, basb, basba, 0\}$ kümesinden bir kelimeye eşittir. Sonuç olarak $|S| \leq 16 = |GLS(2, 2)|$ dir ve sonuç çıkar. ■

$p = 2$ durumu için hem β_1 hem de β_2 takdimleri (3.1.3) takdimine denktir. Bundan dolayı, bu bölümün kalanı için, $p \geq 3$ durumuna yoğunlaşalım.

İlk olarak, teknik sonuçlar serisi kullanılarak Teorem 3.1.1 i ispatlayalım ve sonra β_2 takdimini elde etmek için β_1 takdimini dönüştürelim. Bu çalışmada S , β_1 ile tanımlı yarıgrubu gösterecektir.

Lemma 3.1.4. $SLS(2, p)$, S nin homomorfik görüntüsüdür.

İspat: Teorem 3.2. ile A, B ve S matrisleri $SLS(2, p)$ yi doğurur ve β_1 deki bütün ilişkileri sağlarlar. Bu bir matris hesabı ile ispatlanabilir.

$bs = sa = s$ ilişkisini

$$bs = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = s$$

$$sa = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = s$$

$sba^{p-1}s = 0$ ilişkisini

$$\begin{aligned} sba^{p-1}s &= \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{p-1} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$ba^{\xi-1}s = a^{1-\xi^{-1}}s^2$ ilişkisini

$$\begin{aligned} ba^{\xi-1}s &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\xi-1} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi^2 & 0 \\ \xi^2 - \xi & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$a^{1-\xi^{-1}}s^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{1-\xi^{-1}} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\xi^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^2 & 0 \\ \xi^2 - \xi & 0 \end{pmatrix}$$

$sb^{\xi-1}a = s^2b^{1-\xi^{-1}}$ ilişkisini

$$sb^{\xi-1}a = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\xi-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \xi-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi^2 & \xi^2 - \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s^2 b^{1-\xi^{-1}} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1-\xi^{-1}} = \begin{pmatrix} \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-\xi^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^2 & \xi^2 - \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dolayısıyla sonuç elde edilir. ■

S_1 ve S_2 sırasıyla $\{a, b\}^*$ ve $\{a, b, s\}^* - \{a, b\}^*$ dan kelimeler ile tanımlı elemanları içeren S nin altkümelerini gösterebiliriz. S_1 ve S_2 , S nin altyarıgruplarıdır ve gerçekten S_1 i belirlemek kolaydır.

Lemma 3.1.5. $S_1 \cong SL(2, p)$.

İspat: $\beta_1, SL(2, p)$ yi tanımlamak için gerekli bütün ilişkileri içerdiğinden $\beta_1, SL(2, p)$ nin homomorfik görüntüsüdür. $sba^{p-1}s = 0$ ilişkisi $sba^{p-1}s\alpha = \alpha sba^{p-1}s = sba^{p-1}s$, $\alpha \in \{a, b, s\}$ ye denktir. R de olmayan β_1 den her bir ilişki her iki tarafında s harfini içerir. Bunun için, eğer $u, v \in \{a, b\}^*$ S de aynı elemanı gösteren iki kelime ise, $u = v$ eşitliği sadece R den ilişkiler kullanılarak elde edilebilir ve sonuç çıkar. ■

Lemma 3.1.5, S deki eşitlikleri ispatlamaya yardımcı olur. S deki a ve b harfli iki kelimenin eşitliğini ispatlamak için, bunların $SL(2, p)$ de eşit olup olmadığını kontrol etmek yeterlidir. Bu fikir kullanılarak aşağıdaki teknik sonucu ispatlayalım.

Lemma 3.1.6. S de aşağıdakiler sağlanır.

- (i) $bab^{p-1}a^2b = b^{p-1}a$;
- (ii) $ab^{p-1}ab = b^{p-1}a$;
- (iii) $ba^{\xi^{m+1}-\xi^m}b^{p-1}a^{-\xi+2-\xi^{-m}}b^{p-1}a^{1-\xi^{-1}}b^{\xi^{m+2}-\xi^{m+1}+\xi} = a^{1-\xi^{-m-1}}$

İspat: (i) $bab^{p-1}a^2b = b^{p-1}a$ ilişkisini

$$bab^{p-1}a^2b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b^{p-1}a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) ve (iii) nin ispatı Lemmadan önceki uyarı ile sonuç matris çarpması ile ispatlanabilir. ■

S yarıgrubu S_1 ve S_2 nin birleşimidir. $|S_2| \leq |\text{sing}(2, p)|$ yi ispatlamaya çalışalım. İlk aşama β_1 in bazı sonuçlarını oluşturmaktır.

Lemma 3.1.7. Aşağıdaki ilişkiler S de sağlanır.

- (i) Her $m = 1, 2, \dots$; için $ba^{\xi^m-1}s = a^{1-\xi^{-m}}s^{1+m}$;
- (ii) $s^p = s$;
- (iii) $ba^{p-1}s = b^{p-1}as^{\frac{p+1}{2}}$;
- (iv) $ab^{p-1}as = b^{p-1}as$;
- (v) $sb^{p-1}as = 0$.

İspat: (i) Bu ilişkiyi m üzerinde matematiksel tümevarım kullanarak ispatlayalım. $m = 1$ için, ilişki $ba^{\xi-1}s = a^{1-\xi^{-1}}s^2$, β_1 de bir ilişkidir. $m \geq 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O halde;

$$\begin{aligned} & ba^{\xi^{m+1}-1}s \\ &= ba^{\xi^{m+1}-\xi^m}a^{\xi^m-1}s && (a^{-\xi^m} \cdot a^{\xi^m} = 1) \\ &= ba^{\xi^{m+1}-\xi^m}b^{p-1}ba^{\xi^m-1}s && (b^p = 1) \\ &= ba^{\xi^{m+1}-\xi^m}b^{p-1}a^{1-\xi^{-m}}s^{1+m} && (\text{hipotezden}) \\ &= ba^{\xi^{m+1}-\xi^m}b^{p-1}a^{1-\xi^{-m}}a^{1-\xi}a^{\xi-1}ss^m && (a^{1-\xi}a^{\xi-1} = 1) \\ &= ba^{\xi^{m+1}-\xi^m}b^{p-1}a^{-\xi+2-\xi^{-m}}b^{p-1}ba^{\xi-1}ss^m && (b^p = 1) \\ &= ba^{\xi^{m+1}-\xi^m}b^{p-1}a^{-\xi+2-\xi^{-m}}b^{p-1}a^{1-\xi^{-1}}s^2s^m && (ba^{\xi-1}s = a^{1-\xi^{-1}}s^2) \\ &= ba^{\xi^{m+1}-\xi^m}b^{p-1}a^{-\xi+2-\xi^{-m}}b^{p-1}a^{1-\xi^{-1}}b^{\xi^{m+2}-\xi^{m+1}+\xi}s^{2+m} && (bs = s \text{ ilişkisinden}) \\ &= a^{1-\xi^{-m}}s^{1+m}, && (\text{Lemma 3.1.6 (iii)den}) \end{aligned}$$

(ii) Bu ilişki $m = p - 1$ için (i) den elde edilebilir.

$$ba^{\xi^{m-1}}s = a^{1-\xi^{-m}}s^{1+m} \quad m = p - 1 \text{ için}$$

$$ba^{\xi^{p-1}-1}s = a^{1-\xi^{-p+1}}s^{1+p-1}$$

$$ba^{\xi^{p-1}-1}s = a^{1-\xi^{-(p-1)}}s^p \quad (\xi^{p-1} \equiv 1 \pmod{p})$$

$$ba^{1-1}s = a^{1-1}s^p$$

$$bs = s^p \quad (bs = s)$$

$$s = s^p$$

(iii) Bu durumda

$$ba^{p-1}s$$

$$= ba^{p-1}a^{-\xi^{\frac{p-1}{2}+1}}a^{\xi^{\frac{p-1}{2}-1}}s \quad (a^{-\xi^{\frac{p-1}{2}+1}}a^{\xi^{\frac{p-1}{2}-1}} = 1)$$

$$= ba^{p-1}a^{-\xi^{\frac{p-1}{2}+1}}b^{p-1}ba^{\xi^{\frac{p-1}{2}-1}}s \quad (b^p = 1)$$

$$= ba^{p-1}a^{-\xi^{\frac{p-1}{2}+1}}b^{p-1}a^{1-\xi^{\frac{p-1}{2}}}s^{1+\frac{p-1}{2}} \quad ((i) \text{ den})$$

$$= ba^{p-1}a^{-(-1)+1}b^{p-1}a^{1-(-1)}s^{\frac{p+1}{2}} \quad (a^{\xi^{\frac{p-1}{2}}} = a^{\xi^{\frac{p-1}{2}}} = -1)$$

$$= ba^{p-1}a^2b^{p-1}a^2s^{\frac{p+1}{2}}$$

$$= ba^{p+1}b^{p-1}a^2s^{\frac{p+1}{2}}$$

$$= bab^{p-1}a^2s^{\frac{p+1}{2}} \quad (a^p = 1)$$

$$= bab^{p-1}a^2bs^{\frac{p+1}{2}} \quad ((bs = s) \text{ ilişkisinden})$$

$$= b^{p-1}as^{\frac{p+1}{2}} \quad (\text{Lemma 3.1.6 (i) den})$$

(iv) $ab^{p-1}as$

$$= ba^{p-1}abs \quad ((bs = s) \text{ ilişkisinden})$$

$$= a^{p-1}as \quad (\text{Lemma 3.1.6 (ii) den})$$

(v) $sb^{p-1}as$

$$= sb^{p-1}as^p \quad ((s^p = s) \text{ (ii) den})$$

$$= sb^{p-1}as^{\frac{p+1}{2}}s^{\frac{p-1}{2}} \quad ((iii) \text{ den } ba^{p-1}s = b^{p-1}as^{\frac{p+1}{2}})$$

$$= sba^{p-1}ss^{\frac{p-1}{2}} \quad ((sba^{p-1}s = 0), \beta_1 \text{ ilişkisinden})$$

$$= 0s^{\frac{p-1}{2}}$$

=0

olup ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki gibi ϕ dönüşümünü tanımlayalım.

$$\phi: (a, b, s)^* \rightarrow (a, b, s)^*$$

$$\phi(a) = b, \phi(b) = a, \phi(s) = s$$

$$\phi(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k) = \phi(\alpha_k) \dots \phi(\alpha_2) \phi(\alpha_1)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{a, b, s\}$. ϕ^2 birim dönüşüm olduğundan w ve $\phi(w)$ dual kelimeler olarak alalım.

Lemma 3.1.8. ϕ dönüşümü S üzerinde bir anti-izomorfizma oluşturur.

İspat: S, β_1 ile tanımlı yarıgrup olduğundan, β_1 den herhangi bir $u = v$ ilişkisi için, $\phi(u) = \phi(v)$ dual ilişkisinin S de sağlandığını göstermek yeterlidir. Eğer $u = v R$ ye ait ise bu Lemma 3.1.5 ile ve $A^T = B$ gerçeği ile doğrudur. $bs = s, sa = s$ ilişkileri ve $ba^{\xi-1}s = a^{1-\xi^{-1}}s^2, sb^{\xi-1}a = s^2b^{1-\xi^{-1}}$ ikilileri duallerdir. Son olarak $sba^{p-1}s = 0$ ilişkisi Lemma 3.1.7 (v) ile S de sağlanan $sb^{p-1}as = 0$ ilişkisine dualdir. ■

Şimdi a, b ve s harflerini içeren bazı kelimeleri tanımlıyalım. Bunlar S_2 nin elemanları için kanonik formlar olacaktır. Aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$cf_1(i, j, k) = a^i s^j b^k, \quad i, k = 1, \dots, p, j = 1, \dots, p-1$$

$$cf_2(i, j) = b^{p-1} a s^i b^j, \quad i = 1, \dots, p-1, j = 1, \dots, p$$

$$cf_3(i, j) = a^i s^j b a^{p-1}, \quad i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, p-1$$

$$cf_4(i) = b^{p-1} a s^i b a^{p-1}, \quad i = 1, \dots, p-1$$

$$cf_5 = 0$$

CF , bütün bu kelimeleri içeren küme olsun.

Lemma 3.1.9. S_2 nin her elemanı, CF nin elemanlarına aittir.

İspat: S, S_2 ye ait olan S nin tek doğurayı olduğundan ve $s = cf_1(p, 1, p)$ olduğundan, CF nin herhangi elemanının ve a, b yada s doğuraylarının çarpımı CF nin başka bir elemanına eşit olduğunu ispatlamak yeterlidir. ϕ , anti-izomorfizmasına göre,

$cf_1(i, j, k)$ ile $cf_1(k, j, i)$ ve $cf_2(i, j)$ ile $cf_3(j, i)$ ikililer olarak duallerdir, $cf_4(i)$ ve cf_5 ikililer öz duallerdir.

Şu şekilde gösterilebilir.

$cf_1(i, j, k)$ ile $cf_1(k, j, i)$

$$\phi(cf_1(i, j, k)) = \phi(a^i s^j b^k) = \phi(b^k) \phi(s^j) \phi(a^i) = a^k s^j b^i = cf_1(k, j, i)$$

$cf_2(i, j)$ ile $cf_3(j, i)$

$$\begin{aligned} \phi(cf_2(i, j)) &= \phi(b^{p-1} a s^i b^j) = \phi(b^j) \phi(s^i) \phi(a) \phi(b^{p-1}) = a^j s^i b a^{p-1} \\ &= cf_3(j, i) \end{aligned}$$

$cf_4(i)$ ve cf_5

$$\begin{aligned} \phi(cf_4(i)) &= \phi(b^{p-1} a s^i b a^{p-1}) = \phi(a^{p-1}) \phi(b) \phi(s^i) \phi(a) \phi(b^{p-1}) \\ &= b^{p-1} a s^i b a^{p-1} = cf_4(i) \end{aligned}$$

$$\phi(cf_5) = cf_5$$

CF den bir kelimeyi bir doğurayla soldan çarpma CF den başka bir kelime S de eşit olan bir kelimeyi verir. Lemma 3.1.7 ve β_1 den ilişkileri kullanarak aşağıdaki eşitlikleri görebiliriz.

$$a. cf_1(i, j, k) = cf_1(i + 1(\text{mod } p), j, k)$$

$$b. cf_1(\xi^m - 1(\text{mod } p), j, k) = cf_1(1 - \xi^{-m}(\text{mod } p), j + m(\text{mod } p - 1), k)$$

$$b. cf_1(p - 1, j, k) = cf_2\left(j + \frac{p-1}{2}(\text{mod } p - 1), k\right)$$

$$s. cf_1(i, j, k) = cf_1(p, j + 1(\text{mod } p - 1), k)$$

$$a. cf_2(i, j) = cf_2(i, j)$$

$$b. cf_2(i, j) = cf_1(1, j, k)$$

$$s. cf_2(i, j) = cf_5$$

$$a. cf_3(i, j) = cf_3(i + 1(\text{mod } p), j)$$

$$b. cf_3(\xi^m - 1(\text{mod } p), j) = cf_3(1 - \xi^{-m}(\text{mod } p), j + m(\text{mod } p - 1))$$

$$b. cf_3(p - 1, j) = cf_4\left(j + \frac{p-1}{2}(\text{mod } p - 1)\right)$$

$$s. cf_3(i, j) = cf_3(p, j + 1(\text{mod } p - 1))$$

$$a. cf_4(i) = cf_4(i)$$

$$b. cf_4(i) = cf_3(1, i)$$

$$s. cf_4(i) = cf_5$$

$$a. cf_5 = b. cf_5 = s. cf_5 = cf_5.$$

Yukarıdaki eşitlikler şu şekilde gösterilebilir.

$$a. cf_1(i, j, k) = cf_1(i + 1(\text{mod}p), j, k)$$

$$a. cf_1(i, j, k) = a. a^i s^j b^k = a^{i+1} s^j b^k = cf_1(i + 1(\text{mod}p), j, k)$$

$$b. cf_1(\xi^m - 1(\text{mod}p), j, k) = cf_1(1 - \xi^{-m}(\text{mod}p), j + m(\text{mod}p - 1), k)$$

$$b. cf_1(\xi^m - 1(\text{mod}p), j, k) = b. a^{\xi^m - 1} s^j b^k$$

$$= b. a^{\xi^m - 1} s s^{j-1} b^k \quad (\text{Lemma 3.1.7 (i) den})$$

$$= a^{1 - \xi^{-m}} s^{1+m} s^{j-1} b^k$$

$$= a^{1 - \xi^{-m}} s^{j+m} b^k = cf_1(1 - \xi^{-m}(\text{mod}p), j + m(\text{mod}p - 1), k)$$

$$b. cf_1(p - 1, j, k) = cf_2\left(j + \frac{p-1}{2}(\text{mod}p - 1), k\right)$$

$$b. cf_1(p - 1, j, k) = b. a^{p-1} s^j b^k$$

$$= b. a^{p-1} s s^{j-1} b^k \quad (\text{Lemma 3.1.7 (iii) den})$$

$$= b^{p-1} a s^{\frac{p+1}{2}} s^{j-1} b^k$$

$$= b^{p-1} a s^{j + \frac{p-1}{2}} b^k = cf_2\left(j + \frac{p-1}{2}(\text{mod}p - 1), k\right)$$

$$s. cf_1(i, j, k) = cf_1(p, j + 1(\text{mod}p - 1), k)$$

$$s. cf_1(i, j, k) = s. a^i s^j b^k \quad (\beta_1, (sa = s) \text{ ilişkisinden})$$

$$= s s^j b^k = s^{j+1} b^k \quad (\beta_1, (a^p = 1) \text{ ilişkisinden})$$

$$= a^p s^{j+1} b^k = cf_1(p, j + 1(\text{mod}p - 1), k)$$

$$a. cf_2(i, j) = cf_2(i, j)$$

$$a. cf_2(i, j) = a. b^{p-1} a s^i b^j$$

$$= a. b^{p-1} a s s^{i-1} b^j \quad (\text{Lemma 3.1.7(iv) den})$$

$$= b^{p-1} a s s^{i-1} b^j$$

$$= b^{p-1} a s^i b^j = cf_2(i, j)$$

$$b. cf_2(i, j) = cf_1(1, j, k)$$

$$b. cf_2(i, j) = b b^{p-1} a s^i b^j$$

$$= b^p a s^i b^j \quad (\beta_1, (b^p = 1) \text{ ilişkisinden})$$

$$= as^i b^j = cf_1(1, j, k)$$

$$s. cf_2(i, j) = cf_5$$

$$s. cf_2(i, j) = sb^{p-1} as^i b^j$$

$$= sb^{p-1} as^{i-1} b^j \quad (\text{Lemma 3.1.7(v) den})$$

$$= 0s^{i-1} b^j = 0 = cf_5$$

$$a. cf_3(i, j) = cf_3(i + 1(\text{mod} p), j)$$

$$a. cf_3(i, j) = a. a^i s^j ba^{p-1} = a^{i+1} s^j ba^{p-1} = cf_3(i + 1(\text{mod} p), j)$$

$$b. cf_3(\xi^m - 1(\text{mod} p), j) = cf_3(1 - \xi^{-m}(\text{mod} p), j + m(\text{mod} p - 1))$$

$$b. cf_3(\xi^m - 1(\text{mod} p), j) = ba^{\xi^m - 1} s^j ba^{p-1}$$

$$= ba^{\xi^m - 1} s s^{j-1} ba^{p-1} \quad (\text{Lemma 3.1.7(i) den})$$

$$= a^{1 - \xi^{-m}} s^{1+m} s^{j-1} ba^{p-1}$$

$$= a^{1 - \xi^{-m}} s^{j+m} ba^{p-1} = cf_3(1 - \xi^{-m}(\text{mod} p), j + m(\text{mod} p - 1))$$

$$b. cf_3(p - 1, j) = cf_4\left(j + \frac{p-1}{2}(\text{mod} p - 1)\right)$$

$$b. cf_3(p - 1, j) = ba^{p-1} s^j ba^{p-1}$$

$$= ba^{p-1} s s^{j-1} ba^{p-1} \quad (\text{Lemma 3.1.7(iii) den})$$

$$= b^{p-1} a s^{\frac{p+1}{2}} s^{j-1} ba^{p-1}$$

$$= b^{p-1} a s^{j + \frac{p-1}{2}} ba^{p-1} = cf_4\left(j + \frac{p-1}{2}(\text{mod} p - 1)\right)$$

$$s. cf_3(i, j) = cf_3(p, j + 1(\text{mod} p - 1))$$

$$s. cf_3(i, j) = sa^i s^j ba^{p-1} \quad (\beta_1, (sa = s) \text{ ilişkisinden})$$

$$= s s^j ba^{p-1}$$

$$= s^{j+1} ba^{p-1} \quad (\beta_1, (a^p = 1) \text{ ilişkisinden})$$

$$= a^p s^{j+1} ba^{p-1} = cf_3(p, j + 1(\text{mod} p - 1))$$

$$a. cf_4(i) = cf_4(i)$$

$$a. cf_4(i) = a. b^{p-1} as^i ba^{p-1}$$

$$= ab^{p-1} as^{i-1} ba^{p-1} \quad (\text{Lemma 3.1.7(iv) den})$$

$$= b^{p-1} a s s^{i-1} b a^{p-1}$$

$$= b^{p-1} a s^i b a^{p-1} = c f_4(i)$$

$$b. c f_4(i) = c f_3(1, i)$$

$$b. c f_4(i) = b b^{p-1} a s^i b a^{p-1}$$

$$= b^p a s^i b a^{p-1} \quad (\beta_1, (b^p = 1) \text{ ilişkisinden})$$

$$= a s^i b a^{p-1} = c f_3(1, i)$$

$$s. c f_4(i) = c f_5$$

$$b. c f_4(i) = s b^{p-1} a s^i b a^{p-1}$$

$$= s b^{p-1} a s s^{i-1} b a^{p-1} \quad (\beta_1, (s b^{p-1} a s = 0) \text{ ilişkisinden})$$

$$= 0 s^{i-1} b a^{p-1} = 0 = c f_5$$

$$a. c f_5 = b. c f_5 = s. c f_5 = c f_5$$

$$a. 0 = b. 0 = s. 0 = 0 = c f_5$$

Modülo p ve modülo $p - 1$ hesaplamaları sırasıyla $\{1, \dots, p\}$ ve $\{1, \dots, p - 1\}$ değerleri ile yapılır ve burada

$$\{\xi^m - 1 \pmod{p} \mid m \in N\} = \{1, \dots, p - 2, p\}$$

kullanıldı. ■

Lemma 3.1.10. CF nin elemanları $SLS(2, p)$ yarıgrubunda farklı singüler matrisleri gösterir.

$$\text{İspat: } c f_1(i, j, k) = a^i s^j b^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^j & k \xi^j \\ i \xi^j & i k \xi^j \end{pmatrix}$$

$$c f_2(i, j) = b^{p-1} a s^i b^j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^j$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi^i & j \xi^i \end{pmatrix}$$

$$c f_3(i, j) = a^i s^j b a^{p-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{p-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \xi^j \\ 0 & i \xi^j \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
cf_4(i) &= b^{p-1}as^i ba^{p-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p-1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p-1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi^i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$cf_5 = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$cf_1(i, j, k), cf_2(i, j), cf_3(i, j), cf_4(i)$ ve cf_5 kelimeleri sırasıyla $SLS(2, p)$ de sırasıyla $\begin{pmatrix} \xi^j & k\xi^j \\ i\xi^j & ik\xi^j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi^i & j\xi^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi^j \\ 0 & i\xi^j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrislerini gösterirler. ■

Teorem 3.1.1 in ispatı: $p = 2$ ise Lemma 3.1.3. ile teorem sağlanır. $p \geq 3$ için doğru olduğunu kabul edelim. Lemma 3.1.4. ile $SLS(2, p)$ özel lineer yarıgrubu S nin homomorfik görüntüsüdür. $|SLS(2, p)| \leq |S|$ dir. $S = S_1 \cup S_2$ den $|S| \leq |S_1| + |S_2|$ olur. Lemma 3.3.5. ile $|S_1| = |SL(2, p)|$ elde edilir. Lemma 3.1.9. ve 3.1.10 ile de $|S_2| \leq |sing(2, p)|$ olur. Dolayısıyla;

$$|S| \leq |S_1| + |S_2| \leq |SL(2, p)| + |sing(2, p)| = |SLS(2, p)|$$

bulunur ve teoremin ispatı tamamlanır. ■

Aynı yaklaşımla, Teorem 3.1.2 yi ispatlamak kolay değildir. Özellikle A, B ve T doğuraylarına göre $sing(2, p)$ den elemanların kanonik formları, CF dekilerden daha karmaşıktır. β_1 takdimini β_2 takdimine dönüştürmek daha mantıklı bir yaklaşımdır.

[28] de verilen benzer modifikasyonu iki sonlu yarıgrup takdimi Π ve $\bar{\Pi}$ aynı yarıgrup tanımlar ancak ve ancak $\bar{\Pi}, \Pi$ den Tietze dönüşümleri uygulayarak elde edilebilir. Bu gerçeği ve $\beta_1, SLS(2, p)$ yi tanımlar gerçeğinin kullanarak $\beta_2, SLS(2, p)$ yi tanımladığını ispatlarız. Bununla birlikte daha fazla teknik Lemmaya ihtiyacımız var. Burada \mathcal{T}, β_2 ile tanımlı yarıgrubu gösterebiliriz.

Lemma 3.1.11. a ve b ile doğrulan \mathcal{T} nin altarıgrubu, $SLS(2, p)$ ye izomorftur.

İspat: İspat Lemma 3.1.5. in ispatı ile aynıdır. ■

Lemma 3.1.12. \mathcal{T} aşağıdaki ilişkileri sağlar.

$$(i) \quad a^{-\xi^{-1} + \xi^{-2} + \xi^{-i-1} - \xi^{-i-2}} b^\xi a^{1-\xi^{-1}} b^{\xi^i - 2} ab^{\xi^{-i} - \xi^{-i-1}} = b^{\xi^{i+1} - 1} a, i = 0, 1, \dots; \text{ için}$$

- (ii) $ba^{\xi-2}b^{-\xi+1}a^{\xi-1}b^{\xi^2-2\xi} = a^{1-\xi^{-1}};$
- (iii) $a^{\xi^{-1}+\xi-2}b^{\xi^2-\xi}a^{\xi-1}b^{-\xi+2-\xi^{-1}} = b^{\xi-1}a;$
- (iv) $a^{\xi-2}b^{\xi}a^{1-\xi^{-1}}b^{-\xi^{-1}} = b^{\xi-1}a.$

İspat: Lemma 3.1.11. ile, A ve B matrislerinin (i) den (iv) e kadar bütün ilişkileri sağladığını kontrol etmek yeterlidir. ■

Lemma 3.1.13. Aşağıdaki ilişkiler β_2 nin sonuçlarıdır.

- (i) $(tb^{\xi-1}at)^k = tb^{\xi^k-1}at, k = 1, 2, \dots;$ için
- (ii) $ba^{\xi-1}tb^{\xi-1}at = a^{1-\xi^{-1}}(tb^{\xi-1}at)^2;$
- (iii) $tb^{\xi-1}atb^{\xi-1}a = (tb^{\xi-1}at)^2b^{1-\xi^{-1}};$

İspat: (i) Bu ilişkiyi k üzerinde tümevarımla ispatlayalım. $k = 1$ için $(tb^{\xi-1}at)^1 = tb^{\xi^1-1}at$ yani $tb^{\xi-1}at = tb^{\xi-1}at$ açıktır. İlişkinin $k \geq 1$ için $(tb^{\xi-1}at)^k = tb^{\xi^k-1}at$ doğru olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}
& (tb^{\xi-1}at)^{k+1} \\
&= (tb^{\xi-1}at)^1(tb^{\xi-1}at)^k \quad (\text{hipotezden}) \\
&= tb^{\xi-1}atb^{\xi^k-1}at \\
&= tb^{\xi-1}at^2b^{\xi^k-1}at \quad ((t^2 = t), \beta_2 \text{ ilişkisinden}) \\
&= tb^{\xi-1}atb^{\xi^k-1}at \\
&= tb^{\xi-1}atbb^{\xi^k-2}at \quad ((b^{\xi-1}atb = a^{\xi^{-1}}tb^{\xi}a^{1-\xi^{-1}}), \beta_2 \text{ ilişkisinden}) \\
&= ta^{\xi^{-1}}tb^{\xi}a^{1-\xi^{-1}}b^{\xi^k-2}at \quad ((ta = t), \beta_2 \text{ ilişkisinden}) \\
&= ttb^{\xi}a^{1-\xi^{-1}}b^{\xi^k-2}at \\
&= t^2b^{\xi}a^{1-\xi^{-1}}b^{\xi^k-2}at \quad ((t^2 = t), \beta_2 \text{ ilişkisinden}) \\
&= tb^{\xi}a^{1-\xi^{-1}}b^{\xi^k-2}at \\
&= ta^{-\xi^{-1}+\xi-2+\xi^{-k-1}-\xi^{-k-2}}b^{\xi}a^{1-\xi^{-1}}b^{\xi^k-2}ab^{\xi^{-k}-\xi^{-k-1}}t \\
& \quad ((ta = bt = t), \beta_2 \text{ ilişkisinden}) \\
&= tb^{\xi^{k+1}-1}at \quad (\text{Lemma 3.1.12. (i) den})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(ii)} \quad ba^{\xi-1}tb^{\xi-1}at \\
& = ba^{\xi-2}(atb)b^{\xi-2}at \quad \left((b^{\xi-1}atb = a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1}), \beta_2 \text{ ilişkisinden} \right) \\
& = ba^{\xi-2}b^{-\xi+1}a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{\xi-2}at \\
& = ba^{\xi-2}b^{-\xi+1}a^{\xi-1}b^{\xi^2-2\xi}ta^{-\xi-1+\xi-2+\xi-2-\xi-3}b^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{\xi-2}ab^{\xi-1-\xi-2}t \\
& \quad \left((ta = bt = t), \beta_2 \text{ ilişkisinden} \right) \\
& = a^{1-\xi-1}tb^{\xi^2-1}at \quad \left(\text{Lemma 3.1.12. (i) } i=1 \text{ den ve Lemma 3.1.12 (ii) den} \right) \\
& = a^{1-\xi-1}(tb^{\xi-1}at)^2 \quad \left(\text{(i) den } k=2 \text{ için} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(iii)} \quad (tb^{\xi-1}at)^2b^{1-\xi-1} \\
& = tb^{\xi^2-1}atb^{1-\xi-1} \quad \left(\text{(i) den } k=2 \text{ için} \right) \\
& = tb^{\xi^2-1}(atb)b^{-\xi-1} \quad \left((b^{\xi-1}atb = a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1}), \beta_2 \text{ ilişkisinden} \right) \\
& = tb^{\xi^2-1}b^{-\xi+1}a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-\xi-1} \\
& = ta^{\xi-1-\xi-2}b^{\xi^2-\xi}a^{\xi-1}b^{-\xi+2-\xi-1}ta^{\xi-2}b^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-\xi-1} \\
& \quad \left((ta = bt = t), \beta_2 \text{ ilişkisinden} \right) \\
& = tb^{\xi-1}atb^{\xi-1}a \quad \left(\text{Lemma 3.1.12. (iii) ve Lemma 3.1.12 (iv) den.} \blacksquare \right)
\end{aligned}$$

Teorem 3.1.2. in İspatı: β_1 yeni bir doğuray sembolü t ve $t = s^{p-1}$ ilişkisini ((T3) Tietze dönüşümü ile) ekleyelim. $SLS(2, p)$ de t ile gösterilen matris,

$$\begin{aligned}
s^{p-1} &= \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{p-1} = \begin{pmatrix} \xi^{p-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\xi^{p-1} = 1 \pmod{p} \text{ olduğundan}) \\
T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Teorem 3.1.1 ile biliyoruz ki, $\beta_1, SLS(2, p)$ yi tanımlar ve β_2 deki bütün ilişkiler $SLS(2, p)$ de sağlanır. Bundan dolayı bütün bu ilişkileri ((T1) Tietze dönüşümü ile) β_1 e ekleyebiliriz. Son olarak $s = tb^{\xi-1}at$ geçerli ilişki ekleyelim.

$$\begin{aligned}
tb^{\xi-1}at &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\xi-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \xi-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = s
\end{aligned}$$

$$\left\langle a, b, s, t \left| \begin{array}{l} R, bs = sa = s, sba^{p-1}s = 0, ba^{\xi-1}s = a^{1-\xi^{-1}}s^2, \\ sb^{\xi-1}a = s^2b^{1-\xi^{-1}}, t = s^{p-1}, s = tb^{\xi-1}at \\ t^2 = bt = ta = t, tba^{p-1}t = 0, \\ b^{\xi-1}atb = a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi^{-1}} \end{array} \right. \right\rangle$$

Şimdi $s = tb^{\xi-1}at$ yi kullanarak s yi ((T4) Tietze dönüşümü ile) çıkaralım ve

$$\left\langle a, b, t \left| \begin{array}{l} R, tbt^{\xi-1}at = tb^{\xi-1}ata = tb^{\xi-1}at, tbt^{\xi-1}atba^{p-1}tb^{\xi-1}at = 0, \\ ba^{\xi-1}tb^{\xi-1}at = a^{1-\xi^{-1}}(tb^{\xi-1}at)^2, \\ tb^{\xi-1}atb^{\xi-1}a = (tb^{\xi-1}at)^2b^{1-\xi^{-1}}, t = (tb^{\xi-1}at)^{p-1}, \\ t^2 = bt = ta = t, tba^{p-1}t = 0, \\ b^{\xi-1}atb = a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi^{-1}} \end{array} \right. \right\rangle$$

Daha sonra (T2) Tietze dönüşümü kullanılarak (R den sonra) ilk 6 ilişkiyi kalan 5 ilişkinin sonucu olduğundan çıkaralım. Bunların ilk 3 ü sırasıyla $bt = t$, $ta = t$ ve $tba^{p-1}t = 0$ in sonuçlarıdır. $tbt^{\xi-1}at = tb^{\xi-1}at$ ($(bt = t)$ ilişkisinden) $tb^{\xi-1}ata = tb^{\xi-1}at$ ($(ta = t)$ ilişkisinden) $tbt^{\xi-1}atba^{p-1}tb^{\xi-1}at = 0$ ($(tba^{p-1}t = 0)$ ilişkisinden). Sonraki iki ilişki $ba^{\xi-1}tb^{\xi-1}at = a^{1-\xi^{-1}}(tb^{\xi-1}at)^2$ Lemma 3.1.13 (ii) ve $tb^{\xi-1}atb^{\xi-1}a = (tb^{\xi-1}at)^2b^{1-\xi^{-1}}$ ilişkisi ise Lemma 3.1.13 (iii) den elde edilir. $(tb^{\xi-1}at)^{p-1}$ ilişki $k = p - 1$ için

$$\begin{aligned} & (tb^{\xi-1}at)^{p-1} \quad (\text{Lemma 3.1.13 (i) den}) \\ & = tb^{\xi^{p-1}-1}at \quad (\xi^{p-1} = 1 \pmod{p} \text{ olduğundan}) \\ & = tb^{1-1}at \\ & = tat \quad ((ta = t), \beta_2 \text{ ilişkisinden}) \\ & = tt \quad ((t^2 = t), \beta_2 \text{ ilişkisinden}) \\ & = t \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

Elde edilen takdim

$$\left\langle a, b, t \left| \begin{array}{l} R, t^2 = bt = ta = t, tba^{p-1}t = 0, \\ b^{\xi-1}atb = a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi^{-1}} \end{array} \right. \right\rangle$$

β_2 takdimidir. ■

3.2. Genel Linear Yarıgrup Takdimleri

$GL(2, p)/SL(2, p)$ devirli bir grup olduğundan $GL(2, p)$, $SL(2, p)$ tarafından ve determinant ξ nin bir elemanı tarafından doğrulanabilir. Bu durumda bu elemanı $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$ seçmek uygundur.

Teorem 3.2.1. $\langle a, b, c | R \rangle$, A, B ve C doğurayları cinsinden $GL(2, p)$ için herhangi (yarıgrup) takdimi olsun. O halde takdimler

$$\beta_4 = \left\langle a, b, c, s \left| \begin{array}{l} R, cs = sc = s, sba^{p-1}s = 0, ba^{\xi-1}s = a^{1-\xi^{-1}}s^2, \\ sb^{\xi-1}a = s^2b^{1-\xi^{-1}} \end{array} \right. \right\rangle \text{ ve}$$

$$\beta_5 = \left\langle a, b, c, t \left| \begin{array}{l} R, t^2 = ct = tc = t, tba^{p-1}t = 0, \\ b^{\xi-1}atb = a^{\xi^{-1}}tb^{\xi}a^{1-\xi^{-1}} \end{array} \right. \right\rangle$$

$GL(2, p)$ yi sırasıyla A, B, C, S ve A, B, C, T doğurayları cinsinden tanımlar. (bkz. [11])

Uyarı 3.2.2. $GL(2, p)$ için aşağıdaki takdim [26] da verildi.

$$\left\langle a, b, c \left| \begin{array}{l} a^p = 1, b^2 = (ab)^3 = \left(a^4ba^{\frac{p+1}{2}}b\right)^2, c^{p-1} = 1, \\ c^{-1}ac = a^{\xi}, c^{-1}bc = ba^{-\xi^{-1}}ba^{-\xi}ba^{-\xi^{-1}}b \end{array} \right. \right\rangle$$

Bu takdim $GL(2, p)$ yi A, \bar{B} ve \bar{C} doğurayları cinsinden tanımlar.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{C} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu takdimi $GL(2, p)$ yi A, B ve C cinsinden tanımlayan takdime çevirmek zor değildir.

$$\left\langle a, b \left| \begin{array}{l} a^p = b^p = 1, b = (a^{p-1}b)^4 a^{p-1} (a^{p-1}b)^2, \\ (ba^{p-1}b)^2 = (aba^{p-1}b)^3 = \left(a^4 ba^{p-1} b a^{\frac{p+1}{2}} ba^{p-1} b \right)^2 \end{array} \right. \right\rangle \text{ takdimine } c^{p-1} = 1,$$

$c^{-1}ac = a^{\xi^{-1}}$ ve $c^{-1}bc = b^\xi$ ilişkileri eklenirse bu takdimi $GL(2, p)$ yi A, B ve C cinsinden tanımlayan takdime çevrilebilir.

$$\left\langle a, b \left| \begin{array}{l} a^p = b^p = 1, b = (a^{p-1}b)^4 a^{p-1} (a^{p-1}b)^2, \\ (ba^{p-1}b)^2 = (aba^{p-1}b)^3 = \left(a^4 ba^{p-1} b a^{\frac{p+1}{2}} ba^{p-1} b \right)^2 \\ c^{p-1} = 1, c^{-1}ac = a^{\xi^{-1}}, c^{-1}bc = b^\xi \end{array} \right. \right\rangle$$

Teorem 3.2.1 in ispatı: $p = 2$ için β_4 ve β_5 takdimleri (3.1.3) takdimine denktir ve Lemma 3.1.3 ten çıkar. $p \geq 3$ için Teoremi ispatlamak için ilk olarak yeni bir doğuray sembolü c ve iki ilişki $cs = s$ ve $sc = s$ ekleyerek β_1 den elde edilen $\overline{\beta_4}$ takdiminin

$$\overline{\beta_4} = \left\langle a, b, c, s \left| \begin{array}{l} R, bs = sa = cs = sc = s, sba^{p-1}s = 0, \\ ba^{\xi-1}s = a^{1-\xi^{-1}}s^2, sb^{\xi-1}a = s^2b^{1-\xi^{-1}} \end{array} \right. \right\rangle$$

$GLS(2, p)$ ye izomorfik \mathcal{L} yarigrubunu tanımladığını gösterelim. A, B, C ve S matrislerinin $\overline{\beta_4}$ deki bütün ilişkileri sağladığını göstermek kolaydır ve Teorem 3.1. ile $GLS(2, p)$ \mathcal{L} nin homomorfik görüntüsüdür. $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ ve \mathcal{L} nin $\overline{\mathcal{L}_2}$ alt kümeleri sırasıyla $\{a, b, c\}^*, \{a, b, c, s\}^* - \{a, b, c\}^*$ ve $\{a, b, s\}^* - \{a, b\}^*$ den kelimeleri gösterebiliriz. Lemma 3.1.5 teki benzer yaklaşımla $\mathcal{L}_1 \cong GL(2, p)$ olduğu ispatlanır. β_1 deki bütün ilişkiler β_4 e ait olduğundan $\overline{\mathcal{L}_2}$ her elemanı CF den bir kelimeye eşittir. (Lemma 3.2.9). Bunun için $\mathcal{L}_2 = \overline{\mathcal{L}_2}$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Çünkü $|\overline{\mathcal{L}_2}| \leq |CF| \leq |Sing(2, p)|$ (Lemma 3.1.10) böylece iddia ispatlanır.

Eğer $w \in \{a, b\}^*$ herhangi bir kelime ise bazı $w_1, w_2 \in \{a, b\}^*$ için $wc = cw_1$ ve $cw = w_2c$ dir. Çünkü $SL(2, p), GL(2, p)$ nin normal altgrubudur. Fakat sonra $swc = scw_1 = sw_1$ ve $cws = w_2cs = w_2s$ dir. Bu, \mathcal{L} de s yi içeren her kelime c yi içermeyen bir kelimeye eşittir ifadesini ispatlamak için kullanılabilir. Bu ifade $\mathcal{L}_2 = \overline{\mathcal{L}_2}$ a denktir.

Şimdi $bs = s$ ve $sa = s$ ilişkilerini çıkaralım. Eğer $ba^{\xi-1}s = a^{1-\xi^{-1}}s^2$, $ca = a^\xi c$ ve $cb = b^{\xi-1}c$ ilişkilerinin bir sonucu olan ve $GL(2, p)$ sağlanan

$$s^2 = a^{-1+\xi^{-1}}ba^{\xi-1}s \quad (3.2.1)$$

ilişkisini kullanırsak

$$\begin{aligned} s^2 &= cs^2 = ca^{-1+\xi^{-1}}ba^{\xi-1}s && (ca = a^\xi c \text{ eşitliğinden}) \\ &= a^{-\xi+1}cba^{\xi-1}s && (cb = b^{\xi-1}c \text{ eşitliğinden}) \\ &= a^{-\xi+1}b^{\xi-1}ca^{\xi-1}s && (ca = a^\xi c \text{ eşitliğinden}) \\ &= a^{-\xi+1}b^{\xi-1}a^{\xi^2-\xi}cs && (cs = s \text{ ilişkisinden}) \\ &= a^{-\xi+1}b^{\xi-1}a^{\xi^2-\xi}s \end{aligned}$$

$$s^2 = cs^2 = a^{-\xi+1}b^{\xi-1}a^{\xi^2-\xi}s \quad (3.2.2)$$

elde edilir.

(3.2.1) ve (3.2.2) ten

$$s^2 = a^{-1+\xi^{-1}}ba^{\xi-1}s = a^{-\xi+1}b^{\xi-1}a^{\xi^2-\xi}s \text{ olduğundan;}$$

$$\begin{aligned} s &= a^{-\xi+1}b^{-1}a^{1-\xi^{-1}}a^{-\xi+1}b^{\xi-1}a^{\xi^2-\xi}s = a^{-\xi+1}b^{-1}a^{-\xi+2-\xi^{-1}}b^{\xi-1}a^{\xi^2-\xi}s \\ &= b^{-\xi^{-1}+\xi^{-2}}s \end{aligned}$$

$$a^{-\xi+1}b^{-1}a^{-\xi+2-\xi^{-1}}b^{\xi-1}a^{\xi^2-\xi}s = b^{-\xi^{-1}+\xi^{-2}}s \quad (3.2.3)$$

elde edilir. Çünkü,

$a^{-\xi+1}b^{-1}a^{-\xi+2-\xi^{-1}}b^{\xi-1}a^{\xi^2-\xi}$ ifadesinde A ve B matrisleri yerine yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-\xi+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-\xi+2-\xi^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\xi-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\xi^2-\xi}$$
 ifadesine dönüşür.

Bu ifade,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\xi+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\xi+2-\xi^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \xi^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi^2-\xi & 1 \end{pmatrix} \text{ eşit olur.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\xi^{-1}+\xi^{-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b^{-\xi^{-1}+\xi^{-2}} \text{ } GL(2, p) \text{ de sağlanır. } p, 2 \text{ den büyük bir asal sayı}$$

olduğundan, $-\xi^{-1}+\xi^{-2} \neq 0$ dır. Böylece (3.1.3) ise $bs = s$ dir ve (T2) Tietze dönüşümü ile $\overline{\beta}_4$ dan bu ilişki çıkarılabilir. $bs = s$ ilişkisini çıkarırken $sa = s$ ilişkisini kullanmadık, $sa = s$ de dual yaklaşımıyla çıkarılabilir. Bunun için $\beta_4, GLS(2, p)$ için bir takdimdir.

Şimdi β_5 in $GLS(2, p)$ için bir takdim olduğunu gösterelim. $\overline{\beta_4}$ in $GLS(2, p)$ bir takdim olduğunu gösterdiğimiz ispatın benzer yolu ile,

$$\overline{\beta_5} = \left\langle a, b, c, t \left| \begin{array}{l} R, t^2 = bt = ta = ct = tc = t, tba^{p-1}t = 0, \\ b^{\xi-1}atb = a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1} \end{array} \right. \right\rangle$$

in $GLS(2, p)$ içinde bir takdim olduğunu gösterilebilir. $bt = t$ ilişkisini çıkarmak için $\overline{\beta_5}$ in son ilişkisinin ($b^{\xi-1}atb = a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1}$) bir sonucu olan,

$$t = a^{-1}b^{-\xi+1}a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-1} \quad (3.2.4)$$

ilişkisini kullanalım. (3.2.4) yi soldan c ile çarparak

$$\begin{aligned} ct &= ca^{-1}b^{-\xi+1}a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-1} && (ca = a^{\xi}c \text{ eşitliğinden}) \\ &= a^{-\xi}cb^{-\xi+1}a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-1} && (cb = b^{\xi-1}c \text{ eşitliğinden}) \\ &= a^{-\xi}b^{-1+\xi-1}ca^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-1} && (ca = a^{\xi}c \text{ eşitliğinden}) \\ &= a^{-\xi}b^{-1+\xi-1}actb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-1} && (ct = t \text{ ilişkisinden}) \\ &= a^{-\xi}b^{-1+\xi-1}atb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-1} \end{aligned}$$

$$t = ct = ca^{-1}b^{-\xi+1}a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-1} = a^{-\xi}b^{-1+\xi-1}atb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-1} \quad (3.2.5)$$

(3.2.4) ve (3.2.5) birleştirilirse

$$t = a^{-1}b^{-\xi+1}a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-1} = a^{-\xi}b^{-1+\xi-1}atb^{\xi}a^{1-\xi-1}b^{-1}$$

$a^{-1}b^{-\xi+1}a^{\xi-1}t = a^{-\xi}b^{-1+\xi-1}at$ olduğundan

$$t = a^{-\xi-1}b^{\xi-1}aa^{-\xi}b^{-1+\xi-1}at = a^{-\xi-1}b^{\xi-1}a^{1-\xi}b^{-1+\xi-1}at = b^{(\xi-1)^2}t \quad (3.2.6)$$

elde edilir. Çünkü,

$$\begin{aligned} &a^{-\xi-1}b^{\xi-1}a^{1-\xi}b^{-1+\xi-1}a \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-\xi-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\xi-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{1-\xi} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1+\xi-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\xi^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \xi-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\xi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1+\xi-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (\xi - 1)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b^{(\xi-1)^2}$$

$GL(2, p)$ de sağlanır. (3.2.6) ilişkisi $p > 2$ için $bt = t$ yi verir. Yine $ta = t$ ilişkisini kullanmadık dual yaklaşımı bu ilişkinin gereksiz olduğunu gösterir. ■



BÖLÜM 4

MATRİS YARIGRUPLARI İÇİN YERİNE-YAZMA SİSTEMLERİ

4.1. Serbest Monoidlerde Sıralamalar

Tanım 4.1.1. S boş olmayan bir küme olsun. S üzerinde aşağıdaki aksiyomları sağlayan $<$ bağıntısına S üzerinde bir **lineer sıralama** ve bu durumda S ye bir **lineer sıralı küme** denir. Bu aksiyomlar

- (i) $<$ geçişmeli,
- (ii) $<$ ters simetrik ve
- (iii) Her $r, s \in S$ ve $r \neq s$ için $r < s$ veya $s < r$

şeklindedir.

Eğer $<$ bağıntısı S üzerinde (i) ve (ii) özelliklerini sağlıyorsa $<$ bağıntısına bir **kısmi sıralama** ve bu durumda S ye bir **kısmi sıralı küme** denir.

S üzerinde kesin azalan sonsuz bir diziyeye sahip olmayan bir lineer sıralamaya ise S üzerinde bir **iyi sıralama** ve bu durumda S ye bir **iyi sıralı küme** denir.

Örnek 4.1.2. S sonlu bir küme ise S nin herhangi bir lineer sıralaması iyi sıralamadır.

Örnek 4.1.3. Doğal sayılar kümesi bildiğimiz sıralama ile iyi sıralı kümedir.

Tanım 4.1.4. $S, <$ bağıntısı ile lineer sıralı bir küme ve $S^n = S \times \dots \times S$ de S nin n –li elemanlarının oluşturduğu bir küme olsun. $(r_1, r_2, \dots, r_n), (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n$ için eğer $r_1 < s_1$ veya $s_1 = r_1, \dots, s_{i-1} = r_{i-1}$ ve $r_i < s_i$ olacak şekilde bir $1 \leq i \leq n$ mevcut ise

$$(r_1, r_2, \dots, r_n) < (s_1, s_2, \dots, s_n)$$

yazılır. Bu sıralamaya S^n üzerinde bir (soldan sağa) **alfabetik sıralama** denir.

Tanım 4.1.5. $A, <$ ile lineer sıralı bir alfabe olsun. Aşağıda tanımlanan sıralamaya A^* üzerindeki alfabetik sıralama denir.

$r \equiv r_1 r_2 \dots r_k$ ve $s \equiv s_1 s_2 \dots s_l \in A^*$ olmak üzere $r < s$ olması için gerek ve yeter koşul

- (i) r elemanının s nin bir ön eki olması, yani $k < l$ ve $r_1 = s_1, \dots, r_k = s_k$ olması veya
- (ii) $r_1 = s_1, \dots, r_{i-1} = s_{i-1}$ ve $r_i < s_i$ olacak şekilde bir $1 \leq i \leq \min\{k, l\}$ nin mevcut olmasıdır.

Uyarı 4.1.6. A^* üzerindeki alfabetik sıralama lineerdir.

Uyarı 4.1.7. $|A| \geq 2$ ise A^* üzerindeki alfabetik sıralama iyi sıralı olmayabilir.

Örneğin, $A = \{a, b, \dots, z\}$ ve $a < b < \dots < z$ olmak üzere

$$hello > helllo > hellllo > \dots$$

dizisi A^* da kesin azalan sonsuz bir dizidir.

Tanım 4.1.8. A bir alfabe ve $r, s \in A^*$ olmak üzere

$r < s \Leftrightarrow \|r\| < \|s\|$ veya $\|r\| = \|s\|$ iken r, s den alfabetik sıralama ile daha küçük şeklinde tanımlanan sıralamaya **uzunluk artı alfabetik (l-p-l) sıralama** denir. l-p-l sıralamayı diğerlerinden ayırmak için \ll ile gösterilecektir.

Eğer A iyi sıralı ise A^* , l-p-l sıralaması ile iyi sıralı ve lineerdir.

Tanım 4.1.9. A^* üzerinde $r, s \in A^*$ olmak üzere

$$r < s \Leftrightarrow \|r\| < \|s\|$$

şeklinde tanımlanan sıralamaya **uzunluk uyumlu (azaltan) sıralama**; ve her $u, v \in A^*$ için

$$r < s \Leftrightarrow urv < usv$$

şeklinde tanımlanan sıralamaya **tercüme-değişmez sıralama** denir. Bir tercüme-değişmez iyi sıralamaya **indirgenmiş sıralama** denir.

Örnek 4.1.10. Boş kelime ε indirgenmiş sıralamada en küçük elemandır.

İspat: Kabul edelim ki $\varepsilon > r$ olacak şekilde bir $r \in A^+$ mevcut olsun. O zaman sıralamanın tercüme-değişmez oluşundan

$$\begin{aligned} r &\equiv \varepsilon.\varepsilon.r > \varepsilon.r.r \equiv r^2, \\ r^2 &\equiv \varepsilon.r.r > \varepsilon.r^2.r \equiv r^3 \end{aligned}$$

benzer şekilde devam edilirse

$$\varepsilon > r > r^2 > r^3 > \dots$$

şeklinde kesin azalan sonsuz bir dizi elde edilir. Bu durum indirgenmiş sıralamanın iyi sıralama oluşuyla çelişir. ■

Uyarı 4.1.11. İyi sıralı bir tercüme-değişmez sıralamada $urv < usv$ ise $r < s$ olduğu açıktır. Diğer yandan; $r > s$ ise $urv > usv$ olur.

Uyarı 4.1.12. Bir sıralamanın tercüme-değişmez olduğunu göstermek için her $r, s \in A^*$ ve her $x, y \in A$ için $r < s$ olduğunda $xr < xs$ ve $ry < sy$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Uyarı 4.1.13. $|A| \geq 2$ ise A^* da tanımlı alfabetik sıralama tercüme-değişmez değildir. Örneğin; $A = \{x, y\}$ ve $x < y$ olsun. Fakat $x < xx$ iken $xy > xxy$ dir. Ancak, aynı uzunluktaki kelimeler için tercüme-değişmez özelliği sağlanır. Gerçekten de $\|r\| = \|s\|$ ve $r < s$ iken $xr < xs$ ve $ry < sy$ olur.

Uyarı 4.1.14. l-p-l sıralamada $\|r\| < \|s\|$ ve $r < s$ iken $\|xr\| < \|xs\|$ ve $\|ry\| < \|sy\|$ olduğundan, ayrıca $\|r\| = \|s\|$ ve $r < s$ iken $xr < xs$ ve $ry < sy$

olduğundan l-p-l sıralama bir tercüme değişmez sıralama olur. Dolayısıyla l-p-l sıralama, bir indirgenmiş sıralamadır.

4.2. Yerine-yazma Sistemleri

Tanım 4.2.1. A bir alfabe ve A^* , A üzerindeki serbest monoid olmak üzere $<, A^*$ üzerinde bir indirgenmiş sıralama ve $R, A^* \times A^*$ kümesinin her $(r, s) \in R$ için $r > s$ şeklindeki elemanlarından oluşan bir altkümesi olsun. O zaman $(A, <, R)$ üçlüsüne A üzerinde bir **yerine-yazma sistemi** denir. Bu durumda $(r, s) \in R$ elemanına bir **yerine-yazma kuralı** denir ve $r \rightarrow s$ şeklinde gösterilir.

Genel olarak $w_1, w_2 \in A^*$ olsun. Eğer $w_1 \equiv urv$ ve $w_2 \equiv usv$ şeklinde $u, v \in A^*$ ve $r \rightarrow s \in R$ mevcut ise w_2, R deki bir ilişki bir kez uygulanarak w_1 den elde edilmiştir denir ve $w_1 \rightarrow w_2$ veya $w_1 \xrightarrow{R} w_2$ yazılır. Eğer $w_1 \equiv w_2$ veya her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_i \in A^*$ olmak üzere sonlu bir

$$w_1 \equiv \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \equiv w_2$$

dizisi mevcut ise w_1, w_2 yi **R ile yerine yazar** denir ve $w_1 \xrightarrow{*} w_2$ yazılır. Diğer bir ifade ile $\rightarrow_R^*, \rightarrow_R$ nin yansımali ve geçişmeli kapanışdır.

Ayrıca \rightarrow_R nin yansımali, simetrik ve geçişmeli kapanışını \leftrightarrow_R^* ile gösterelim. \leftrightarrow_R^*, A^+ üzerinde R tarafından doğurulan kongrüans olup A^*/\leftrightarrow_R^* bölüm grubunu tanımlar ve $u \in A^+$ için u nun modül \leftrightarrow_R^* sınıfı $[u]_R$ ile gösterilir.

Eğer $w \xrightarrow{*} z$ olacak şekilde bir $z \in A^*$ kelimesi mevcut ise $w \in A^*$ kelimesine (R ye göre) **indirgenebilir kelime** denir. Aksi halde w ye (R ye göre) **indirgenemez kelime** denir ve A^+ da R nin hiçbir kuralı ile indirgenemez olan elemanların kümesi $Irr(R)$ veya $IrrR$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.2. Eğer $w \xrightarrow{*} y$ ve y indirgenemez ise y kelimesine w kelimesinin (R ye göre) **indirgenemez (normal) formu** denir.

Uyarı 4.2.3. Bir yerine yazma sisteminde normal (indirgenemez) kelimelerin kümesi normal formları oluşturur.

Örnek 4.2.4. $A = \{x, y\}$ ve $x < y$ olsun. Ayrıca \langle, A^* da bir l-p-l sıralama ve $R = \{x^2 \rightarrow e, y^2 \rightarrow e, yxy \rightarrow xyx\}$ olsun. Örneğin,

$$\underline{xyxyyx} \rightarrow \underline{xyxyyx} \rightarrow \underline{yxyx} \rightarrow \underline{xyxx} \rightarrow xy$$

olur. Benzer şekilde normal formların kümesinin $\{e, x, y, xy, yx, xyx\}$ olduğu kolayca görülür.

Örnek 4.2.5. $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ ve $a > b > a^{-1} > b^{-1}$ olsun. Ayrıca \langle, A^* bir l-p-l sıralama ve $R = \{aa^{-1} \rightarrow e, a^{-1}a \rightarrow e, bb^{-1} \rightarrow e, b^{-1}b \rightarrow e\}$ olsun. Eğer $w \equiv aba^{-1}ab^{-1}a^{-1}b^{-1}bab$ ise R deki farklı kuralları uygulayarak

$$\begin{aligned} w \equiv aba^{-1}ab^{-1}a^{-1}b^{-1}bab &\rightarrow \underline{abb^{-1}a^{-1}b^{-1}bab} \rightarrow \underline{aa^{-1}b^{-1}bab} \\ &\rightarrow \underline{b^{-1}bab} \rightarrow ab \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} w \equiv aba^{-1}ab^{-1}a^{-1}\underline{b^{-1}bab} &\rightarrow \underline{aba^{-1}ab^{-1}a^{-1}ab} \rightarrow \underline{aba^{-1}ab^{-1}b} \\ &\rightarrow \underline{aba^{-1}a} \rightarrow ab \end{aligned}$$

olur. Dikkat edilirse bu iki yerine-yazmanın sonucunda aynı eleman elde edildi.

Örnek 4.2.6. $A = \{x, y\}$, $x < y$ ve $R = \{x^2 \rightarrow e, y^3 \rightarrow e, (xy)^3 \rightarrow e\}$ olsun. R, \langle sıralaması ile A^* üzerinde bir yerine-yazma sistemidir. Eğer $w \equiv x^2yxyxy$ alınır ise R deki farklı kuralları uygulayarak

$$w \equiv x(xy)^3 \rightarrow x \text{ veya } w \equiv x^2yxyxy \rightarrow yxyxy$$

olur. Bu durumda iki yerine-yazmanın sonucunda farklı (indirgenemez) elemanlar elde edildi.

Teorem 4.2.7. $u \rightarrow_R^* v$ ise her $w \in A^*$ için $uw \rightarrow_R^* vw$ ve $wu \rightarrow_R^* wv$ olur.

İspat: İspat için bkz. [29].

Teorem 4.2.8. $(A, <, R)$ bir yerine-yazma sistemi ve " \sim " da R nin A^* üzerinde doğurduğu kongrüans olmak üzere w/\sim nin en küçük elemanına $w \in A^*$ in **kanonik formu** denir.

Önerme 4.2.9. Bir kanonik formun her alt kümesi de kanoniktir.

İspat: v bir kanonik form ve u da v nin bir alt kümesi olsun. O zaman $v \equiv aub$ olacak şekilde a ve b kelimeleri vardır. Eğer u kanonik form olmasaydı $u \sim u'$ ve $u' < u$ olacak şekilde $u' \in u/\sim$ var olup $au'b < aub$ olurdu. Ayrıca $<$ sıralaması tercüme değişmez olduğundan $v' \equiv au'b < aub \equiv v$ olurdu. Ancak, $v' \in u/\sim$ olup bu durum v nin en küçük olması ile çelişir. O halde u bir kanonik formdur. ■

Uyarı 4.2.10. Eğer $u \sim v$ ise her $i = 1, 2, \dots, l$ için $u_i \rightarrow^* u_{i-1}$ veya $u_{i-1} \rightarrow^* u_i$ olacak şekilde bir $u \equiv u_0, u_1, \dots, u_l \equiv v$ sonlu dizisi vardır.

Tanım 4.2.11. Eğer $u \sim v$ şeklindeki tüm $u, v \in A^*$ için $u \rightarrow^* w$ ve $v \rightarrow^* w$ olacak şekilde bir $w \in A^*$ mevcut ise bu yerine-yazma sistemine **Church-Rosser özelliğine sahiptir** denir.

Teorem 4.2.12. Eğer bir yerine-yazma sistemi Church-Rosser özelliğine sahip ise her kongrüans sınıfı tam olarak bir tane indirgenmiş forma sahiptir.

İspat: $u, v \in A^*, u \sim v$ ve u ile v nin ikisi de indirgenemez olsun. Church-Rosser özelliğinden $u \rightarrow^* w$ ve $v \rightarrow^* w$ olacak şekilde bir $w \in A^*$ vardır. u ve v nin indirgenmezliğinden $u \equiv w \equiv v$ olur. ■

Tanım 4.2.13. Eğer $u \rightarrow^* v$ ve $u \rightarrow^* w$ şeklindeki her $u, v, w \in A^*$ için $v \rightarrow^* t$ ve $w \rightarrow^* t$ olacak şekilde bir $t \in A^*$ mevcut ise bu yerine-yazma sistemine **konfluent (confluent) sistem** denir.

Eğer $u \rightarrow v$ ve $u \rightarrow w$ şeklindeki her $u, v, w \in A^*$ için $v \rightarrow^* t$ ve $w \rightarrow^* t$ olacak şekilde bir $t \in A^*$ mevcut ise bu yerine-yazma sistemine **yerel konfluent sistem** denir.

Teorem 4.2.14. Bir yerine-yazma sistemi için Church-Rosser özelliğine sahip olma yerel konfluent sistem olma ve konfluent sistem olma denktir.

İspat: İspat için bkz. [30].

Sonuç 4.2.15. Eğer bir yerine-yazma sistemi konfluent ise yerine yazılan bir kelimededen elde edilen indirgenmiş form kanonik formdur. ■

Örnek 4.2.16. (i) $\langle x, y | x^2 \rightarrow e, y^2 \rightarrow e, yxy \rightarrow xyx \rangle$ yerine-yazma sistemi konfluent sistemdir. Örneğin;

$$\begin{array}{lcl} \underline{xxx} \rightarrow x & \text{ve} & \underline{xxx} \rightarrow x \\ \underline{yyxy} \rightarrow \underline{yxyx} \rightarrow \underline{xyxx} \rightarrow xy & \text{ve} & \underline{yyxy} \rightarrow xy \\ \underline{yxyy} \rightarrow yx & \text{ve} & \underline{yxyy} \rightarrow \underline{xyxy} \rightarrow \underline{xxyx} \rightarrow yx \\ \underline{yxyxy} \rightarrow \underline{yxxyx} \rightarrow \underline{yyx} \rightarrow x & \text{ve} & \underline{yxyxy} \rightarrow \underline{xyxxy} \rightarrow \underline{xyy} \rightarrow x \end{array}$$

(ii) $A = \{a < b\}$ olmak üzere $<$, A^* üzerinde l-p-l sıralama ve $R = \{ab^i a \rightarrow aba, \forall i \geq 2\}$ olsun. Bu yerine-yazma sistemi konfluent sistemdir. Örneğin; $\forall i, j \geq 2$ için

$$ab^i \underline{ab^j} a \rightarrow \underline{ab^i} aba \rightarrow ababa \text{ ve } \underline{ab^i} ab^j a \rightarrow ab \underline{ab^j} a \rightarrow ababa$$

olur.

Tanım 4.2.17. Bir yerine-yazma sisteminde her $n \geq 1$ için $w_n \rightarrow w_{n+1}$ olacak şekilde (w_n) sonsuz diziler mevcut değil ise bu yerine-yazma sistemine **sonlanan (terminating) sistem** denir.

Tanım 4.2.18. Bir yerine-yazma sistemi hem konfluent hem de sonlanan sistem ise bu sisteme **tam (complete) yerine-yazma sistemi** denir.

R bir yerine-yazma sistemi olsun. Her $u \rightarrow v \in R$ için $\|u\| > \|v\|$ ise R ye **uzunluk azaltan (length-reducing) sistem** denir.

Tanım 4.2.19. R bir yerine-yazma sistemi olsun. Uzunluk artı alfabetik (l-p-l) sıralaması ile R ye **Lexicographic yerine-yazma** sistemi denir. Bu durumda R nin bir sonlanan yerine-yazma sistemi olduğu açıktır.

Tanım 4.2.20. Verilen bir R yerine-yazma sistemi için $R_1 \subseteq A^*$ alt kümesini

$$R_1 = \{r \in A^* : (r, s) \in R \text{ olacak şekilde bir } s \in A^* \text{ vardır}\}$$

olarak tanımlayalım.

Her $(r, s) \in R \subseteq A^* \times A^*$ için $R_1 \cap A^*rA^* = \{r\}$ ve s indirgenemez ise R ye bir **indirgenmiş (reduced) yerine-yazma sistemi** denir. Eğer R indirgenmiş ve tam yerine-yazma sistemi ise R ye **tek türlü sonlanan (uniquely terminating) yerine-yazma sistemi** denir.

Lemma 4.2.21. R bir sonlanan yerine-yazma sistemi olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

- (1) R konflüenttir.
- (2) Herhangi bir $x \in A^*$ kelimesi bir tek indirgenemez forma sahiptir. Ayrıca, $x \sim y$ olması için gerek ve yeter koşul x ile y nin aynı indirgenemez forma sahip olmasıdır.
- (3) $u, w, p, q \in A^*$ ve $v \in A^+$ olmak üzere her $(uv, p), (vw, q) \in R$ için $pw \rightarrow^* z$ ve $uq \rightarrow^* z$ olacak şekilde bir $z \in A^*$ vardır. Ayrıca, her $(uvw, p), (v, q) \in R$ için de $p \rightarrow^* z$ ve $uqw \rightarrow^* z$ olacak şekilde bir $z \in A^*$ vardır.

İspat: İspat için bkz. [31].

$[(r_1r_2, s_{12}), (r_2r_3, s_{23})]$ ve $[(r_4r_5r_6, s_{45}), (r_5, s_{56})]$ formundaki sıralı ikilileri **overlap** (örtüşme, çakışma, kesişimler) olarak tanımlayalım. Burada $(r_1r_2r_3, s_{12}), (r_2r_3, s_{23}), (r_4r_5r_6, s_{45}), (r_5, s_{56}) \in R$ ve r_2 ve r_5 boş olmayan kelimelerdir.

Örnek 4.2.22. $R = \langle a, b \mid a^3 = a, b^3 = b, ba = ab \rangle$ yerine-yazma sistemi konflüenttir. Gerçekten de;

$$\begin{aligned}
&(a^2a, a), (aa^2, a) \in R \text{ için } aa^2 \rightarrow a^3 \rightarrow a, a^2a \rightarrow a^3 \rightarrow a; \\
&(aa^2, a), (a^2a, a) \in R \text{ için } aa \rightarrow a^2; \\
&(b^2b, b), (bb^2, b) \in R \text{ için } bb^2 \rightarrow b^3 \rightarrow b, b^2b \rightarrow b^3 \rightarrow b; \\
&(bb^2, b), (b^2b, b) \in R \text{ için } bb \rightarrow b^2; \\
&(b^2b, b), (ba, ab) \in R \text{ için } ba \rightarrow ab, b^2ab \rightarrow b^2ba \rightarrow b^3a \rightarrow ba \rightarrow ab; \\
&(ba, ab), (aa^2, a) \in R \text{ için } ba \rightarrow ab, aba^2 \rightarrow baa^2 \rightarrow ba^3 \rightarrow ba \rightarrow ab
\end{aligned}$$

şeklindedir.

4.3 Özel Linear Yarıgruplar $SLS(2, p)$ için Yerine-yazma Sistemleri

Özel lineer yarıgruplar için Teorem 3.1.1'de verilen takdime geri dönelim.

$$\pi_1 = \left(a, b, s \left| \begin{array}{l} a^p = b^p = 1, b = (a^{p-1}b)^4 a^{p-1} (a^{p-1}b)^2, \\ (ba^{p-1}b)^2 = (aba^{p-1}b)^3 = \left(a^4 ba^{p-1} ba^{\frac{p+1}{2}} ba^{p-1} b \right)^2, bs = sa = s \\ sba^{p-1}s = 0, ba^{\xi-1}s = a^{1-\xi-1}s^2, sb^{\xi-1}a = s^2b^{1-\xi-1} \end{array} \right. \right)$$

A, B ve S doğuraylarına göre $SLS(2, p)$ için bir takdim olduğunu 3. bölümde verilmiştir.

π_1 takdiminde kullanacağımız bazı notasyonları şu şekilde alalım.

$$b^{p-1} = k_0 = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a^{p-1}b)^4 a^{p-1} a^{p-1} b a^{p-1} = k_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a^{p-1} b^2 a^{p-1} b = k_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (aba^{p-1}b)^2 aba^{p-1}b = k_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\left(a^4 ba^{p-1} ba^{\frac{p+1}{2}} ba^{p-1} b \right)^2 = k_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad ba^{p-1}s = k_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\xi & 0 \end{pmatrix},$$

$$a^{\xi-1}s = k_6 = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \xi^2 - \xi & 0 \end{pmatrix}, \quad a^{1-\xi-1}s^2 = k_7 = \begin{pmatrix} \xi^2 & 0 \\ \xi^2 - \xi & 0 \end{pmatrix},$$

$$b^{\xi-1}a = k_8 = \begin{pmatrix} \xi & \xi-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad s^2 b^{1-\xi-1} = k_9 = \begin{pmatrix} \xi^2 & \xi^2 - \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a^{p-1} = m_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Doğuray kümesi $Y = \{a, b, s, k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, m_{10}\}$ dir. π_1 takdimi şuna dönüşür.

$$\overline{\pi_1} = \left\langle Y \left| \begin{array}{l} k_0b = 1, k_1b = b, bk_2 = k_3, bk_2 = k_4, sk_5 = 0 \\ bk_6 = k_7, sk_8 = k_9, bs = s, sa = s, bs = sa, m_{10}a = 1 \end{array} \right. \right\rangle$$

Tietze dönüşümleri ile $k_3 = k_4$ ve $bs = sa = s$ olduğundan $bk_2 = k_4$, $bs = sa$ ilişkileri ile k_4 doğurayını $\overline{\pi_1}$ takdiminden çıkarılabilir.

$\overline{\pi_1}$ takdiminde bazı örtüşmeler vardır. Örneğin;

$$[k_0b = 1, bk_6 = k_7]$$

Dolayısıyla bu örnek takdimin ilişkilerinin tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olmadığını gösterir. Şimdi ilişkileri bir tek sonlanan yerine-yazma sistem oluşturan bir takdim inşa edilecektir. $\langle X|R \rangle$ takdimini Cayley tablosu olarak alabiliriz öyle ki $X = G$

$$R = \{(x_1x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in X, x_1x_2 = x_3 \in G\}$$

R, X üzerinde bir tek türlü sonlanan yerine-yazma sistemi olduğu açıktır. G grubunun birim elemanı $k_1 \in X$ temsil edilsin. O halde $e \equiv k_1$ alalım $SLS(2, p)$ de sağlanan $k_1k_3 = k_3$, $k_0k_7 = k_6$, $bk_9 = k_9$, $k_1k_9 = k_9$, $k_0k_9 = k_9$, $k_0s = s$, $k_1s = s$, $k_0k_3 = k_2$, $k_1k_7 = k_7$ yeni ilişkiler eklemekle,

$$\overline{\overline{\pi_1}} = \left\langle \overline{Y} \left| \begin{array}{l} k_0b = 1, k_1b = b, bk_2 = k_3, sk_5 = 0, bk_6 = k_7, sk_8 = k_9, k_0k_3 = k_2 \\ k_0k_7 = k_6, bk_9 = k_9, k_1k_9 = k_9, k_0k_9 = k_9, k_1k_7 = k_7, bs = s, sa = s, \\ k_0s = s, k_1s = s, m_{10}a = 1, k_1k_3 = k_3 \end{array} \right. \right\rangle$$

takdimi elde edilir. Doğuray kümesi

$$\overline{Y} = \{a, b, s, k_0, k_1, k_2, k_3, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, m_{10}\} \text{ dir.}$$

Şimdi özel lineer yarıgruplar için birinci temel sonucumuzu verelim.

Teorem 4.3.1. $\langle X|R \rangle$ takdimi bir sonlu G grubunun Cayley tablosu olsun. $k_1 \in X$ birim elemanının temsilcisi olsun. Yukarıdaki notasyonları ile bu takdim,

$$\overline{\pi_1} = \left\langle \bar{Y} \left| \begin{array}{l} k_0b = 1, k_1b = b, bk_2 = k_3, sk_5 = 0, bk_6 = k_7, sk_8 = k_9, k_0k_3 = k_2 \\ k_0k_7 = k_6, bk_9 = k_9, k_1k_9 = k_9, k_0k_9 = k_9, k_1k_7 = k_7, bs = s, sa = s, \\ k_0s = s, k_1s = s, m_{10}a = 1, k_1k_3 = k_3 \end{array} \right. \right\rangle$$

\bar{Y} üzerinde ilişkilerinin kümesi tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olan bir $SLS(2, p)$ özel lineer matris yarı grubunu tanımlar.

İspat: $Q, \overline{\pi_1}$ deki ilişkilerin kümesi olsun. R içindeki bütün yerine-yazma kuralları $(x_1x_2, x_3)(x_1, x_2, x_3 \in X)$ formuna sahip olduğunu hatırlayalım. Öyle ki Q içindeki bütün yerine-yazma kuralları uzunluk azaltabilme özelliğine sahiptir. Bundan dolayı Q sonlanandır. Q nun indirgenebilir olduğu açıktır. Q nun konfluent olduğunu gösterelim.

$$U_{1,k_1,b,k_2} = [(k_1b, b), (bk_2, k_3)]$$

$$U_{2,b,s,a} = [(bs, s), (sa, s)]$$

$$U_{3,b,s,k_5} = [(bs, s), (sk_5, 0)]$$

$$U_{4,k_0,b,k_2} = [(k_0b, 1), (bk_2, k_3)]$$

$$U_{5,k_0,b,k_6} = [(k_0b, 1), (bk_6, k_7)]$$

$$U_{6,b,s,k_8} = [(bs, s), (sk_8, k_9)]$$

$$U_{7,k_0,b,k_9} = [(k_0b, 1), (bk_9, k_9)]$$

$$U_{8,k_1,b,k_9} = [(k_1b, b), (bk_9, k_9)]$$

$$U_{9,k_0,b,s} = [(k_0b, 1), (bs, s)]$$

$$U_{10,k_1,b,s} = [(k_1b, b), (bs, s)]$$

$$U_{11,k_0,s,a} = [(k_0s, s), (sa, s)]$$

$$U_{12,k_0,s,k_8} = [(k_0s, s), (sk_8, k_9)]$$

$$U_{13,k_0,s,k_5} = [(k_0s, s), (sk_5, 0)]$$

$$U_{14,k_1,b,k_6} = [(k_1b, b), (bk_6, k_7)]$$

$$U_{15,k_1,s,k_8} = [(k_1s, s), (sk_8, k_9)]$$

$$U_{16,k_1,s,a} = [(k_1s, s), (sa, s)]$$

$$U_{17,k_1,s,k_5} = [(k_1s, s), (sk_5, 0)]$$

olsun. Şimdi Lemma 4.2.21 (3) kullanılırsa,

U_{1,k_1,b,k_2} için $(k_1b)k_2 \rightarrow bk_2 \rightarrow k_3$ ve $k_1(bk_2) \rightarrow k_1k_3 \rightarrow k_3$ olacak şekilde bazı $k_3 \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

$U_{2,b,s,a}$ için $(bs)a \rightarrow sa \rightarrow s$ ve $b(sa) \rightarrow bs \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

U_{3,b,s,k_5} için $(bs)k_5 \rightarrow sk_5 \rightarrow 0$ ve $b(sk_5) \rightarrow b0 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

U_{4,k_0,b,k_2} için $(k_0b)k_2 \rightarrow 1k_2 \rightarrow k_2$ ve $k_0(bk_2) \rightarrow k_0k_3 \rightarrow k_2$ olacak şekilde bazı $k_2 \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

U_{5,k_0,b,k_6} için $(k_0b)k_6 \rightarrow 1k_6 \rightarrow k_6$ ve $k_0(bk_6) \rightarrow k_0k_7 \rightarrow k_6$ olacak şekilde bazı $k_6 \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

U_{6,b,s,k_8} için $(bs)k_8 \rightarrow sk_8 \rightarrow k_9$ ve $b(sk_8) \rightarrow bk_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

U_{7,k_0,b,k_9} için $(k_0b)k_9 \rightarrow 1k_9 \rightarrow k_9$ ve $k_0(bk_9) \rightarrow k_0k_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

U_{8,k_1,b,k_9} için $(k_1b)k_9 \rightarrow bk_9 \rightarrow k_9$ ve $k_1(bk_9) \rightarrow k_1k_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

$U_{9,k_0,b,s}$ için $(k_0b)s \rightarrow 1s \rightarrow s$ ve $k_0(bs) \rightarrow k_0s \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

$U_{10,k_1,b,s}$ için $(k_1b)s \rightarrow bs \rightarrow s$ ve $k_1(bs) \rightarrow k_1s \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

$U_{11,k_0,s,a}$ için $(k_0s)a \rightarrow sa \rightarrow s$ ve $k_0(sa) \rightarrow k_0s \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

U_{12,k_0,s,k_8} için $(k_0s)k_8 \rightarrow sk_8 \rightarrow k_9$ ve $k_0(sk_8) \rightarrow k_0k_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

U_{13,k_0,s,k_5} için $(k_0s)k_5 \rightarrow sk_5 \rightarrow 0$ ve $k_0(sk_5) \rightarrow k_00 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

U_{14,k_1,b,k_6} için $(k_1b)k_6 \rightarrow bk_6 \rightarrow k_7$ ve $k_1(bk_6) \rightarrow k_1k_7 \rightarrow k_7$ olacak şekilde bazı $k_7 \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

U_{15,k_1,s,k_8} için $(k_1s)k_8 \rightarrow sk_8 \rightarrow k_9$ ve $k_1(sk_8) \rightarrow k_1k_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

$U_{16,k_1,s,a}$ için $(k_1s)a \rightarrow sa \rightarrow s$ ve $k_1(sa) \rightarrow k_1s \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}^+$ lar vardır,

U_{17,k_1,s,k_5} için $(k_1s)k_5 \rightarrow sk_5 \rightarrow 0$ ve $k_1(sk_5) \rightarrow k_10 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}^+$ lar vardır.

Böylece Q nun konfluent olduğunu ispatladık. O halde Q, \bar{Y} üzerinde bir tek türlü sonlanan yerine-yazma sistemidir. ■

Uyarı 4.3.2. $\bar{\pi}_1$ normal formlarının kümesi $\{0,1,b,s,k_2,k_3,k_6,k_7,k_9\}$ dir.

Özel lineer yarıgruplar için Teorem 3.1.2’de verilen takdime geri dönelim.

$$\pi_2 = \left\langle a, b, t \left| \begin{array}{l} a^p = b^p = 1, b = (a^{p-1}b)^4 a^{p-1} (a^{p-1}b)^2, \\ (ba^{p-1}b)^2 = (aba^{p-1}b)^3 = \left(a^4 ba^{p-1} ba^{\frac{p+1}{2}} ba^{p-1} b \right)^2, \\ t^2 = bt = ta = t, tba^{p-1}t = 0, b^{\xi-1}atb = a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1} \end{array} \right. \right\rangle$$

A, B ve T doğuraylarına göre $SLS(2, p)$ için bir takdim olduğunu 3. bölümde verilmiştir.

π_2 takdiminde Teorem 4.3.1. de kullandığımız $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, m_{10}$ notasyonlarını aynı şekilde diğerlerini şu şekilde alalım.

$$ba^{p-1}t = k_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^{\xi-1}tb^{\xi}a^{1-\xi-1} = k_{12} = \begin{pmatrix} \xi & \xi \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b^{\xi-1}at = k_{11} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k_{11}k_3 = k_{12}k_2 = k_{13} = \begin{pmatrix} -\xi & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Doğuray kümesi $Z = \{a, b, t, k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_{10}, k_{11}, k_{12}, m_{10}\}$. π_2 takdimi şuna dönüşür.

$$\bar{\pi}_2 = \left\langle Z \left| \begin{array}{l} tt = t, bt = t, ta = t, t^2 = bt = ta, k_0b = 1, k_1b = b, bk_2 = k_3, \\ bk_2 = k_4, tk_{10} = 0, k_{11}b = k_{12}, m_{10}a = 1 \end{array} \right. \right\rangle$$

Tietze dönüşümleri ile $k_3 = k_4$ ve $t^2 = bt = ta = t$ olduğundan $bk_2 = k_4$, $t^2 = bt = ta$ ilişkileri ile k_4 doğurayını $\bar{\pi}_2$ takdiminden çıkarılabilir.

$\bar{\pi}_2$ takdiminde bazı örtüşmeler vardır. Örneğin;

$$[k_0b = 1, bk_2 = k_3]$$

Dolayısıyla bu örnek takdimin ilişkilerinin tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olmadığını gösterir. Şimdi ilişkileri bir tek sonlanan yerine-yazma sistem oluşturan bir takdim inşa edilecektir. $\langle X|R \rangle$ takdimini Cayley tablosu olarak alabiliriz öyle ki $X = G$

$$R = \{(x_1x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in X, x_1x_2 = x_3 \in G\}$$

R, X üzerinde bir tek türlü sonlanan yerine-yazma sistemi olduğu açıktır. G grubunun birim elemanı $k_1 \in X$ temsil edilsin. O halde $e \equiv k_1$ alalım $SLS(2, p)$ de sağlanan $k_0k_3 = k_2, k_0t = t, k_1k_3 = k_3, k_1t = t, k_{12}k_2 = k_{13}, k_{11}k_3 = k_{13}, k_{11}t = k_{11}, k_{12}t = k_{11}, k_{11}k_{10} = 0, k_{11}a = k_{11}$ yeni ilişkiler eklemekle,

$$\overline{\pi_2} = \left\langle \bar{Z} \left| \begin{array}{l} tt = t, bt = t, ta = t, k_0b = 1, k_1b = b, k_{11}a = k_{11}, k_{11}k_3 = k_{13}, \\ bk_2 = k_3, tk_{10} = 0, k_{11}b = k_{12}, k_1k_3 = k_3, k_{12}k_2 = k_{13}, \\ k_0k_3 = k_2, k_0t = t, k_{11}k_{10} = 0, k_1t = t, \\ k_{12}t = k_{11}, m_{10}a = 1, k_{11}t = k_{11} \end{array} \right. \right\rangle$$

\bar{Z} üzerinde ilişkilerinin kümesi tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olan bir $SLS(2, p)$ özel lineer matris yarıgrubunu tanımlar. Burada $\bar{Z} = \{a, b, t, k_0, k_1, k_2, k_3, k_{10}, k_{11}, k_{12}, k_{13}, m_{10}\}$ dir.

Şimdi özel lineer yarıgruplar için ikinci temel sonucumuzu verelim.

Teorem 4.3.3. $\langle X|R \rangle$ takdimi bir sonlu G grubunun Cayley tablosu olsun. $k_1 \in X$ birim elemanının temsilcisi olsun. Yukarıdaki notasyonları ile bu takdim,

$$\overline{\pi_2} = \left\langle \bar{Z} \left| \begin{array}{l} tt = t, bt = t, ta = t, k_0b = 1, k_1b = b, k_{11}a = k_{11}, k_{11}k_3 = k_{13}, \\ bk_2 = k_3, tk_{10} = 0, k_{11}b = k_{12}, k_1k_3 = k_3, k_{12}k_2 = k_{13}, \\ k_0k_3 = k_2, k_0t = t, k_{11}k_{10} = 0, k_1t = t, \\ k_{12}t = k_{11}, m_{10}a = 1, k_{11}t = k_{11} \end{array} \right. \right\rangle$$

\bar{Z} üzerinde ilişkilerinin kümesi tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olan bir $SLS(2, p)$ özel lineer matris yarıgrubunu tanımlar.

İspat: \bar{Q} , $\overline{\pi_2}$ deki ilişkilerin kümesi olsun. R içindeki bütün yerine-yazma kuralları $(x_1 x_2, x_3)(x_1, x_2, x_3 \in X)$ formuna sahip olduğunu hatırlayalım. Öyle ki \bar{Q} içindeki bütün yerine-yazma kuralları uzunluk azaltabilme özelliğine sahiptir. Bundan dolayı \bar{Q} sonlanandır. \bar{Q} nun indirgenebilir olduğu açıktır. \bar{Q} nun konfluent olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ll}
U_{1,k_0,b,k_2} = [(k_0 b, 1), (b k_2, k_3)] & U_{2,k_0,b,t} = [(k_0 b, 1), (b t, t)] \\
U_{3,k_1,b,k_2} = [(k_1 b, b), (b k_2, k_3)] & U_{4,k_1,b,t} = [(k_1 b, b), (b t, t)] \\
U_{5,t} = [(t t, t), (t t, t)] & U_{6,t,k_{10}} = [(t t, t), (t k_{10}, 0)] \\
U_{7,t,a} = [(t t, t), (t a, t)] & U_{8,b,t} = [(b t, t), (t t, t)] \\
U_{9,b,t,a} = [(b t, t), (t a, t)] & U_{10,b,t,k_{10}} = [(b t, t), (t k_{10}, 0)] \\
U_{11,k_{11},b,k_2} = [(k_{11} b, k_{12}), (b k_2, k_3)] & U_{12,k_{11},b,t} = [(k_{11} b, k_{12}), (b t, t)] \\
U_{13,k_0,t} = [(k_0 t, t), (t t, t)] & U_{14,k_0,t,a} = [(k_0 t, t), (t a, t)] \\
U_{15,k_0,t,k_{10}} = [(k_0 t, t), (t k_{10}, 0)] & U_{16,k_1,t} = [(k_1 t, t), (t t, t)] \\
U_{17,k_1,t,a} = [(k_1 t, t), (t a, t)] & U_{18,k_1,t,k_{10}} = [(k_1 t, t), (t k_{10}, 0)] \\
U_{19,k_{12},t} = [(k_{12} t, k_{11}), (t t, t)] & U_{20,k_{12},t,a} = [(k_{12} t, k_{11}), (t a, t)] \\
U_{21,k_{12},t,k_{10}} = [(k_{12} t, k_{11}), (t k_{10}, 0)] & U_{22,k_{11},t} = [(k_{11} t, k_{11}), (t t, t)] \\
U_{23,k_{11},t,a} = [(k_{11} t, k_{11}), (t a, t)] & U_{24,k_{11},t,k_{10}} = [(k_{11} t, k_{11}), (t k_{10}, 0)]
\end{array}$$

olur. Teorem 4.3.1. ispatındaki gibi Lemma 4.2.21 (3)'yi kullanılarak benzer yolla gösterebilir.

Böylece \bar{Q} nun konfluent olduğunu ispatladık. O halde \bar{Q} , \bar{Z} üzerinde bir tek türlü sonlanan yerine-yazma sistemidir. ■

Uyarı 4.3.4. $\overline{\pi_2}$ normal formlarının kümesi $\{0, 1, b, t, k_2, k_3, k_{11}, k_{12}, k_{13}\}$ dir.

4.4 Genel Lineer Yarıgruplar $GLS(2, p)$ için Yerine-yazma Sistemleri

Genel lineer yarıgruplar için Teorem 3.4.1'de verilen takdime geri dönelim.

$$\pi_3 = \left\langle a, b, c, s \left| \begin{array}{l} a^p = b^p = 1, b = (a^{p-1}b)^4 a^{p-1} (a^{p-1}b)^2, \\ (ba^{p-1}b)^2 = (aba^{p-1}b)^3 = \left(a^4 ba^{p-1} ba^{\frac{p+1}{2}} ba^{p-1} b \right)^2, \\ c^{p-1} = 1, ac = ca^{\xi^{-1}}, bc = cb^\xi, cs = sc = s, \\ sba^{p-1}s = 0, ba^{\xi^{-1}}s = a^{1-\xi^{-1}}s^2, sb^{\xi-1}a = s^2b^{1-\xi^{-1}} \end{array} \right. \right\rangle$$

A, B, S ve C doğuraylarına göre $GLS(2, p)$ için bir takdim olduğunu 3. Bölümde verilmiştir.

π_3 takdiminde Teorem 4.3.1. de kullandığımız $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, m_{10}$ notasyonları aynı şekilde diğerlerini şu şekilde alalım.

$$\begin{aligned} ba^{\xi^{-1}} = k_{14} &= \begin{pmatrix} \xi & 1 \\ \xi - 1 & 1 \end{pmatrix}, & ca^{\xi^{-1}} = k_{15} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \xi \end{pmatrix}, \\ cb^\xi = k_{16} &= \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, & c^{p-2} = k_{17} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi^{p-2} \end{pmatrix}, \\ as = k_{18} &= \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \xi & 0 \end{pmatrix}, & k_7 k_8 = k_{14} k_9 = k_{19} &= \begin{pmatrix} \xi^3 & \xi^3 - \xi^2 \\ \xi^3 - \xi^2 & \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \end{pmatrix}, \\ ak_9 = k_{18} k_8 = k_{15} k_9 = k_{20} &= \begin{pmatrix} \xi^2 & \xi^2 - \xi \\ \xi^2 & \xi^2 - \xi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Doğuray kümesi

$$Y' = \{a, b, c, s, k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_7, k_8, k_9, k_{14}, k_{15}, k_{16}, k_{17}, m_{10}\} \text{ dir.}$$

π_3 takdimi şuna dönüşür.

$$\bar{\pi}_3 = \left\langle Y' \left| \begin{array}{l} k_0 b = 1, k_1 b = b, bk_2 = k_3, bk_2 = k_4, sk_5 = 0, sk_8 = k_9 \\ ac = k_{15}, k_{17} c = 1, bc = k_{16} cs = s, sc = s, \\ cs = sc, k_{14} s = k_7 m_{10} a = 1 \end{array} \right. \right\rangle$$

Tietze dönüşümleri ile $k_3 = k_4$ ve $sc = cs = s$ olduğundan $bk_2 = k_4, sc = cs$ ilişkileri ile k_4 doğurayını $\bar{\pi}_3$ takdiminden çıkarılabilir.

$\bar{\pi}_3$ takdiminde bazı örtüşmeler vardır. Örneğin;

$$[k_1 b = b, bk_2 = k_3]$$

Dolayısıyla bu örnek takdimin ilişkilerinin tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olmadığını gösterir. Şimdi ilişkileri bir tek sonlanan yerine-yazma sistem oluşturan bir takdim inşa edilecektir. $\langle X|R \rangle$ takdimini Cayley tablosu olarak alabiliriz öyle ki $X = G$

$$R = \{(x_1x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in X, x_1x_2 = x_3 \in G\}$$

R, X üzerinde bir tek türlü sonlanan yerine-yazma sistemi olduğu açıktır. G grubunun birim elemanı $k_1 \in X$ temsil edilsin. O halde $e \equiv k_1$ alalım $SLS(2, p)$ de sağlanan $k_0k_3 = k_2, k_0k_{16} = c, k_1k_3 = k_3, ck_9 = k_9, k_7c = k_7, k_7k_5 = 0, k_{16}s = s, bs = s, k_{15}s = k_{18}, as = k_{18}, k_7k_8 = k_{19}, k_{14}k_9 = k_{19}, k_{17}s = s, k_{17}k_9 = k_9, k_{16}k_9 = k_9, bk_9 = k_9, k_0s = s, k_1s = s, k_{18}k_5 = 0, k_{18}k_8 = k_{20}, k_{15}k_9 = k_{20}, k_{18}c = k_{18}, ak_9 = k_{20}, k_0k_9 = k_9, k_1k_9 = k_9, m_{10}k_{15} = c, m_{10}k_{18} = s, m_{10}k_{20} = k_9, k_1k_{16} = k_{16}$ yeni ilişkiler eklemekle,

$$\bar{\pi}_3 = \left\langle \bar{Y}' \left| \begin{array}{l} m_{10}a = 1, k_0b = 1, k_1b = b, bk_2 = k_3, sk_5 = 0, sk_8 = k_9 \\ ac = k_{15}, k_{17}c = 1, bc = k_{16}, cs = s, sc = s, k_{14}s = k_7, k_0k_3 = k_2, \\ k_0k_{16} = c, k_1k_{16} = k_{16}, k_1k_3 = k_3, ck_9 = k_9, k_7c = k_7, \\ k_7k_5 = 0, k_{16}s = s, bs = s, k_{15}s = k_{18}, as = k_{18}, k_7k_8 = k_{19}, \\ k_{14}k_9 = k_{19}, k_{17}s = s, k_{17}k_9 = k_9, k_{16}k_9 = k_9, bk_9 = k_9, k_0s = s, \\ k_1s = s, k_{18}k_5 = 0, k_{18}k_8 = k_{20}, k_{15}k_9 = k_{20}, k_{18}c = k_{18}, ak_9 = k_{20}, \\ k_0k_9 = k_9, k_1k_9 = k_9, m_{10}k_{15} = c, m_{10}k_{18} = s, m_{10}k_{20} = k_9 \end{array} \right. \right\rangle$$

\bar{Y}' üzerinde ilişkilerinin kümesi tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olan bir $GLS(2, p)$ genel lineer matris yarıgrubunu tanımlar. Burada

$$\bar{Y}' = \{a, b, c, s, k_0, k_1, k_2, k_3, k_5, k_7, k_8, k_9, k_{14}, k_{15}, k_{16}, k_{17}, k_{18}, k_{19}, k_{20}, m_{10}\} \text{ dir.}$$

Şimdi genel lineer yarıgruplar için birinci temel sonucumuzu verelim.

Teorem 4.4.1. $\langle X|R \rangle$ takdimi bir sonlu G grubunun Cayley tablosu olsun. $k_1 \in X$ birim elemanın temsilcisi olsun. Yukarıdaki notasyonları ile bu takdim,

$$\overline{\pi}_3 = \left\langle \overline{Y}' \left| \begin{array}{l} m_{10}a = 1, k_0b = 1, k_1b = b, bk_2 = k_3, sk_5 = 0, sk_8 = k_9 \\ ac = k_{15}, k_{17}c = 1, bc = k_{16}, cs = s, sc = s, k_{14}s = k_7, k_0k_3 = k_2, \\ k_0k_{16} = c, k_1k_{16} = k_{16}, k_1k_3 = k_3, ck_9 = k_9, k_7c = k_7, \\ k_7k_5 = 0, k_{16}s = s, bs = s, k_{15}s = k_{18}, as = k_{18}, k_7k_8 = k_{19}, \\ k_{14}k_9 = k_{19}, k_{17}s = s, k_{17}k_9 = k_9, k_{16}k_9 = k_9, bk_9 = k_9, k_0s = s, \\ k_1s = s, k_{18}k_5 = 0, k_{18}k_8 = k_{20}, k_{15}k_9 = k_{20}, k_{18}c = k_{18}, ak_9 = k_{20}, \\ k_0k_9 = k_9, k_1k_9 = k_9, m_{10}k_{15} = c, m_{10}k_{18} = s, m_{10}k_{20} = k_9, \end{array} \right. \right\rangle$$

\overline{Y}' üzerinde ilişkilerinin kümesi tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olan bir $GLS(2, p)$ genel lineer matris yarıgrubunu tanımlar.

İspat: Q' , $\overline{\pi}_3$ deki ilişkilerin kümesi olsun. R içindeki bütün yerine-yazma kuralları $(x_1x_2, x_3)(x_1, x_2, x_3 \in X)$ formuna sahip olduğunu hatırlayalım. Öyle ki Q' içindeki bütün yerine-yazma kuralları uzunluk azaltabilme özelliğine sahiptir. Bundan dolayı Q' sonlanandır. Q' nun indirgenebilir olduğu açıktır. Q' nun konfluent olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ll} U_{1,k_0,b,k_2} = [(k_0b, 1), (bk_2, k_3)] & U_{2,k_0,b,c} = [(k_0b, 1), (bc, k_{16})] \\ U_{3,k_1,b,k_2} = [(k_1b, b), (bk_2, k_3)] & U_{4,c,s} = [(cs, s), (sc, s)] \\ U_{5,c,s,k_5} = [(cs, s), (sk_5, 0)] & U_{6,c,s,k_8} = [(cs, s), (sk_8, k_9)] \\ U_{7,s,c} = [(sc, s), (cs, s)] & U_{8,b,c,s} = [(bc, k_{16}), (cs, s)] \\ U_{9,a,c,s} = [(ac, k_{15}), (cs, s)] & U_{10,k_{14},s,c} = [(k_{14}s, k_7), (sc, s)] \\ U_{11,k_{14},s,k_5} = [(k_{14}s, k_7), (sk_5, 0)] & U_{12,k_{14},s,k_8} = [(k_{14}s, k_7), (sk_8, k_9)] \\ U_{13,k_{17},c,s} = [(k_{17}c, 1), (cs, s)] & U_{14,k_{17},c,k_9} = [(k_{17}c, 1), (ck_9, k_9)] \\ U_{15,b,c,k_9} = [(bc, k_{16}), (ck_9, k_9)] & U_{16,s,c,k_9} = [(sc, s), (ck_9, k_9)] \\ U_{17,k_0,b,s} = [(k_0b, 1), (bs, s)] & U_{18,k_1b,s} = [(k_1b, b), (bs, s)] \\ U_{19,k_{16},s,k_5} = [(k_{16}s, s), (sk_5, 0)] & U_{20,k_{16},s,k_8} = [(k_{16}s, s), (sk_8, k_9)] \\ U_{21,k_{16},s,c} = [(k_{16}s, s), (sc, s)] & U_{22,b,s,k_5} = [(bs, s), (sk_5, 0)] \\ U_{23,b,s,k_8} = [(bs, s), (sk_8, k_9)] & U_{24,b,s,c} = [(bs, s), (sc, s)] \\ U_{25,k_{15},s,k_5} = [(k_{15}s, k_{18}), (sk_5, 0)] & U_{26,k_{15},s,k_8} = [(k_{15}s, k_{18}), (sk_8, k_9)] \\ U_{27,k_{15},s,c} = [(k_{15}s, k_{18}), (sc, s)] & U_{28,a,s,k_5} = [(as, k_{18}), (sk_5, 0)] \\ U_{29,a,s,k_8} = [(as, k_{18}), (sk_8, k_9)] & U_{30,a,s,c} = [(as, k_{18}), (sc, s)] \\ U_{31,k_{17},s,k_5} = [(k_{17}s, s), (sk_5, 0)] & U_{32,k_{17},s,k_8} = [(k_{17}s, s), (sk_8, k_9)] \\ U_{33,k_{17},s,c} = [(k_{17}s, s), (sc, s)] & U_{34,k_0,s,k_5} = [(k_0s, s), (sk_5, 0)] \end{array}$$

$$U_{35,k_0,s,k_8} = [(k_0s, s), (sk_8, k_9)]$$

$$U_{36,k_0,s,c} = [(k_0s, s), (sc, s)]$$

$$U_{37,k_1,s,k_5} = [(k_1s, s), (sk_5, 0)]$$

$$U_{38,k_1,s,k_8} = [(k_1s, s), (sk_8, k_9)]$$

$$U_{39,k_1,s,c} = [(k_1s, s), (sc, s)]$$

$$U_{40,k_{18},c,s} = [(k_{18}c, k_{18}), (cs, s)]$$

$$U_{41,k_{18},c,k_9} = [(k_{18}c, k_{18}), (ck_9, k_9)]$$

$$U_{42,k_0,b,k_9} = [(k_0b, 1), (bk_9, k_9)]$$

$$U_{43,k_1,b,k_9} = [(k_1b, b), (bk_9, k_9)]$$

$$U_{44,m_{10},a,c} = [(m_{10}a, 1), (ac, k_{15})]$$

$$U_{45,m_{10},a,s} = [(m_{10}a, 1), (as, k_{18})]$$

$$U_{46,m_{10},a,k_9} = [(m_{10}a, 1), (ak_9, k_{20})]$$

$$U_{47,m_{10},k_{15},s} = [(m_{10}k_{15}, c), (k_{15}s, k_{18})]$$

$$U_{48,m_{10},k_{15},k_9} = [(m_{10}k_{15}, c), (k_{15}k_9, k_{20})]$$

$$U_{49,m_{10},k_{18},c} = [(m_{10}k_{18}, s), (k_{18}c, k_{18})]$$

$$U_{50,m_{10},k_{18},k_5} = [(m_{10}k_{18}, s), (k_{18}k_5, 0)]$$

$$U_{51,m_{10},k_{18},k_8} = [(m_{10}k_{18}, s), (k_{18}k_8, k_{20})]$$

$$U_{52,k_1,b,c} = [(k_1b, b), (bc, k_{16})]$$

$$U_{53,a,c,k_9} = [(ac, k_{15}), (ck_9, k_9)]$$

$$U_{54,k_7,c,s} = [(k_7c, k_7), (cs, s)]$$

$$U_{55,k_7,c,k_9} = [(k_7c, k_7), (ck_9, k_9)]$$

olur. Şimdi Lemma 4.2.21 (3) kullanılarak,

U_{1,k_0,b,k_2} için $(k_0b)k_2 \rightarrow 1k_2 \rightarrow k_2$ ve $k_0(bk_2) \rightarrow k_0k_3 \rightarrow k_2$ olacak şekilde bazı $k_2 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{2,k_0,b,c}$ için $(k_0b)c \rightarrow 1c \rightarrow c$ ve $k_0(bc) \rightarrow k_0k_{16} \rightarrow c$ olacak şekilde bazı $c \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{3,k_1,b,k_2} için $(k_1b)k_2 \rightarrow bk_2 \rightarrow k_3$ ve $k_1(bk_2) \rightarrow k_1k_3 \rightarrow k_3$ olacak şekilde bazı $k_3 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{4,c,s}$ için $(cs)c \rightarrow sc \rightarrow s$ ve $c(sc) \rightarrow cs \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{5,c,s,k_5} için $(cs)k_5 \rightarrow sk_5 \rightarrow 0$ ve $c(sk_5) \rightarrow c0 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{6,c,s,k_8} için $(cs)k_8 \rightarrow sk_8 \rightarrow k_9$ ve $c(sk_8) \rightarrow ck_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{7,s,c}$ için $(sc)s \rightarrow ss \rightarrow s^2$ ve $s(cs) \rightarrow ss \rightarrow s^2$ olacak şekilde bazı $s^2 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{8,b,c,s}$ için $(bc)s \rightarrow k_{16}s \rightarrow s$ ve $b(cs) \rightarrow bs \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{9,a,c,s}$ için $(ac)s \rightarrow k_{15}s \rightarrow k_{18}$ ve $a(cs) \rightarrow as \rightarrow k_{18}$ olacak şekilde bazı $k_{18} \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{10,k_{14},s,c}$ için $(k_{14}s)c \rightarrow k_7c \rightarrow k_7$ ve $k_{14}(sc) \rightarrow k_{14}s \rightarrow k_7$ olacak şekilde bazı $k_7 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{11,k_{14},s,k_5} için $(k_{14}s)k_5 \rightarrow k_7k_5 \rightarrow 0$ ve $k_{14}(sk_5) \rightarrow k_{14}0 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{12,k_{14},s,k_8} için $(k_{14}s)k_8 \rightarrow k_7k_8 \rightarrow k_{19}$ ve $k_{14}(sk_8) \rightarrow k_{14}k_9 \rightarrow k_{19}$ olacak şekilde bazı $k_{19} \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{13,k_{17},c,s}$ için $(k_{17}c)s \rightarrow 1s \rightarrow s$ ve $k_{17}(cs) \rightarrow k_{17}s \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{14,k_{17},c,k_9} için $(k_{17}c)k_9 \rightarrow 1k_9 \rightarrow k_9$ ve $k_{17}(ck_9) \rightarrow k_{17}k_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{15,b,c,k_9} için $(bc)k_9 \rightarrow k_{16}k_9 \rightarrow k_9$ ve $b(ck_9) \rightarrow bk_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{16,s,c,k_9} için $(sc)k_9 \rightarrow sk_9$ ve $s(ck_9) \rightarrow sk_9$ olacak şekilde bazı $sk_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{17,k_0,b,s}$ için $(k_0b)s \rightarrow 1s \rightarrow s$ ve $k_0(bs) \rightarrow k_0s \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{18,k_1b,s}$ için $(k_1b)s \rightarrow bs \rightarrow s$ ve $k_1(bs) \rightarrow k_1s \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{19,k_{16},s,k_5} için $(k_{16}s)k_5 \rightarrow sk_5 \rightarrow 0$ ve $k_{16}(sk_5) \rightarrow k_{16}0 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{20,k_{16},s,k_8} için $(k_{16}s)k_8 \rightarrow sk_8 \rightarrow k_9$ ve $k_{16}(sk_8) \rightarrow k_{16}k_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{21,k_{16},s,c}$ için $(k_{16}s)c \rightarrow sc \rightarrow s$ ve $k_{16}(sc) \rightarrow k_{16}s \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{22,b,s,k_5} için $(bs)k_5 \rightarrow sk_5 \rightarrow 0$ ve $b(sk_5) \rightarrow b0 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{23,b,s,k_8} için $(bs)k_8 \rightarrow sk_8 \rightarrow k_9$ ve $b(sk_8) \rightarrow bk_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{24,b,s,c}$ için $(bs)c \rightarrow sc \rightarrow s$ ve $b(sc) \rightarrow bs \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{25,k_{15},s,k_5} için $(k_{15}s)k_5 \rightarrow k_{18}k_5 \rightarrow 0$ ve $k_{15}(sk_5) \rightarrow k_{15}0 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{26,k_{15},s,k_8} için $(k_{15}s)k_8 \rightarrow k_{18}k_8 \rightarrow k_{20}$ ve $k_{15}(sk_8) \rightarrow k_{15}k_9 \rightarrow k_{20}$ olacak şekilde bazı $k_{20} \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{27,k_{15},s,c}$ için $(k_{15}s)c \rightarrow k_{18}c \rightarrow k_{18}$ ve $k_{15}(sc) \rightarrow k_{15}s \rightarrow k_{18}$ olacak şekilde bazı $k_{18} \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{28,a,s,k_5} için $(as)k_5 \rightarrow k_{18}k_5 \rightarrow 0$ ve $a(sk_5) \rightarrow a0 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{29,a,s,k_8} için $(as)k_8 \rightarrow k_{18}k_8 \rightarrow k_{20}$ ve $a(sk_8) \rightarrow ak_9 \rightarrow k_{20}$ olacak şekilde bazı $k_{20} \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{30,a,s,c}$ için $(as)c \rightarrow k_{18}c \rightarrow k_{18}$ ve $a(sc) \rightarrow as \rightarrow k_{18}$ olacak şekilde bazı $k_{18} \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{31,k_{17},s,k_5} için $(k_{17}s)k_5 \rightarrow sk_5 \rightarrow 0$ ve $k_{17}(sk_5) \rightarrow k_{17}0 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{32,k_{17},s,k_8} için $(k_{17}s)k_8 \rightarrow sk_8 \rightarrow k_9$ ve $k_{17}(sk_8) \rightarrow k_{17}k_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{33,k_{17},s,c}$ için $(k_{17}s)c \rightarrow sc \rightarrow s$ ve $k_{17}(sc) \rightarrow k_{17}s \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{34,k_0,s,k_5} için $(k_0s)k_5 \rightarrow sk_5 \rightarrow 0$ ve $k_0(sk_5) \rightarrow k_00 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{35,k_0,s,k_8} için $(k_0s)k_8 \rightarrow sk_8 \rightarrow k_9$ ve $k_0(sk_8) \rightarrow k_0k_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{36,k_0,s,c}$ için $(k_0s)c \rightarrow sc \rightarrow s$ ve $k_0(sc) \rightarrow k_0s \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{37,k_1,s,k_5} için $(k_1s)k_5 \rightarrow sk_5 \rightarrow 0$ ve $k_1(sk_5) \rightarrow k_10 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{38,k_1,s,k_8} için $(k_1s)k_8 \rightarrow sk_8 \rightarrow k_9$ ve $k_1(sk_8) \rightarrow k_1k_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{39,k_1,s,c}$ için $(k_1s)c \rightarrow sc \rightarrow s$ ve $k_1(sc) \rightarrow k_1s \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{40,k_{18},c,s}$ için $(k_{18}c)s \rightarrow k_{18}s$ ve $k_{18}(cs) \rightarrow k_{18}s$ olacak şekilde bazı $k_{18}s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{41,k_{18},c,k_9} için $(k_{18}c)k_9 \rightarrow k_{18}k_9$ ve $k_{18}(ck_9) \rightarrow k_{18}k_9$ olacak şekilde bazı $k_{18}k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{42,k_0,b,k_9} için $(k_0b)k_9 \rightarrow 1k_9 \rightarrow k_9$ ve $k_0(bk_9) \rightarrow k_0k_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{43,k_1,b,k_9} için $(k_1b)k_9 \rightarrow bk_9 \rightarrow k_9$ ve $k_1(bk_9) \rightarrow k_1k_9 \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{44,m_{10},a,c}$ için $(m_{10}a)c \rightarrow 1c \rightarrow c$ ve $m_{10}(ac) \rightarrow m_{10}k_{15} \rightarrow c$ olacak şekilde bazı $c \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{45,m_{10},a,s}$ için $(m_{10}a)s \rightarrow 1s \rightarrow s$ ve $m_{10}(as) \rightarrow m_{10}k_{18} \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{46,m_{10},a,k_9} için $(m_{10}a)k_9 \rightarrow 1k_9 \rightarrow k_9$ ve $m_{10}(ak_9) \rightarrow m_{10}k_{20} \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{47,m_{10},k_{15},s}$ için $(m_{10}k_{15})s \rightarrow cs \rightarrow s$ ve $m_{10}(k_{15}s) \rightarrow m_{10}k_{18} \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{48,m_{10},k_{15},k_9} için $(m_{10}k_{15})k_9 \rightarrow ck_9 \rightarrow k_9$ ve $m_{10}(k_{15}k_9) \rightarrow m_{10}k_{20} \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{49,m_{10},k_{18},c}$ için $(m_{10}k_{18})c \rightarrow sc \rightarrow s$ ve $m_{10}(k_{18}c) \rightarrow m_{10}k_{18} \rightarrow s$ olacak şekilde bazı $s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{50,m_{10},k_{18},k_5} için $(m_{10}k_{18})k_5 \rightarrow sk_5 \rightarrow 0$ ve $m_{10}(k_{18}k_5) \rightarrow m_{10}0 \rightarrow 0$ olacak şekilde bazı $0 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{51,m_{10},k_{18},k_8} için $(m_{10}k_{18})k_8 \rightarrow sk_8 \rightarrow k_9$ ve $m_{10}(k_{18}k_8) \rightarrow m_{10}k_{20} \rightarrow k_9$ olacak şekilde bazı $k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{52,k_1,b,c}$ için $(k_1b)c \rightarrow bc \rightarrow k_{16}$ ve $k_1(bc) \rightarrow k_1k_{16} \rightarrow k_{16}$ olacak şekilde bazı $k_{16} \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{53,a,c,k_9} için $(ac)k_9 \rightarrow k_{15}k_9 \rightarrow k_{20}$ ve $a(ck_9) \rightarrow ak_9 \rightarrow k_{20}$ olacak şekilde bazı $k_{20} \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

$U_{54,k_7,c,s}$ için $(k_7c)s \rightarrow k_7s$ ve $k_7(cs) \rightarrow k_7s$ olacak şekilde bazı $k_7s \in \bar{Y}'^+$ lar vardır,

U_{55,k_7,c,k_9} için $(k_7c)k_9 \rightarrow k_7k_9$ ve $k_7(ck_9) \rightarrow k_7k_9$ olacak şekilde bazı $k_7k_9 \in \bar{Y}'^+$ lar vardır.

Böylece Q' nun konfluent olduğunu ispatladık. O halde Q', Y' üzerinde bir tek türlü sonlanan yerine-yazma sistemidir. ■

Uyarı 4.4.2. $\bar{\pi}_3$ normal formlarının kümesi

$\{0, 1, b, c, s, t, k_2, k_3, k_7, k_9, k_{15}, k_{16}, k_{18}, k_{19}, k_{20}\}$ dir.

Genel lineer yarıgruplar için Teorem 3.2.1'de verilen takdime geri dönelim.

$$\pi_4 = \left(a, b, c, t \left| \begin{array}{l} a^p = b^p = 1, b = (a^{p-1}b)^4 a^{p-1} (a^{p-1}b)^2, \\ (ba^{p-1}b)^2 = (aba^{p-1}b)^3 = \left(a^4 ba^{p-1} ba^{\frac{p+1}{2}} ba^{p-1} b \right)^2, \\ c^{p-1} = 1, ac = ca^{\xi-1}, bc = cb^\xi, t^2 = ct = tc = t \\ tba^{p-1}t = 0, b^{\xi-1}atb = a^{\xi-1}tb^\xi a^{1-\xi-1} \end{array} \right. \right)$$

A, B, T ve C doğuraylarına göre $GLS(2, p)$ için bir takdim olduğunu 3. bölümde verilmiştir.

π_4 takdiminde Teorem 4.3.1. de kullandığımız $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, m_{10}, k_{11}, k_{12}, k_{15}, k_{16}, k_{17}$ notasyonları aynı şekilde diğerlerini şu şekilde alalım.

$$k_{12}c = k_{11}k_{16} = k_{30} = \begin{pmatrix} \xi & \xi^2 \\ 1 & \xi \end{pmatrix},$$

$$k_{12}k_2 = k_{11}k_3 = k_{31} = \begin{pmatrix} -\xi & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$k_{15}t = at = k_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Doğuray kümesi

$$Z' = \{a, b, c, s, k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_7, k_8, k_9, k_{14}, k_{15}, k_{16}, k_{17}, m_{10}\} \text{ dir.}$$

π_4 takdimi şuna dönüşür.

$$\overline{\pi_4} = \left\langle Z' \left| \begin{array}{l} k_0b = 1, k_1b = b, bk_2 = k_3, bk_2 = k_4, tk_{10} = 0, k_{11}b = k_{12} \\ ac = k_{15}, k_{17}c = 1, bc = k_{16}, tt = t, ct = t, tc = t \\ t^2 = ct = tc, m_{10}a = 1 \end{array} \right. \right\rangle$$

Tietze dönüşümleri ile $k_3 = k_4$ ve $t^2 = ct = tc = t$ olduğundan $bk_2 = k_4$, $t^2 = ct = tc$ ilişkileri ile k_4 doğurayını $\overline{\pi_4}$ takdiminden çıkarılabilir.

$\overline{\pi_4}$ takdiminde bazı örtüşmeler vardır. Örneğin;

$$[k_1b = b, bk_2 = k_3]$$

Dolayısıyla bu örnek takdimin ilişkilerinin tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olmadığını gösterir. Şimdi ilişkileri bir tek sonlanan yerine-yazma sistem oluşturan bir takdim inşa edilecektir. $\langle X|R \rangle$ takdimini Cayley tablosu olarak alabiliriz öyle ki $X = G$

$$R = \{(x_1x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in X, x_1x_2 = x_3 \in G\}$$

R, X üzerinde bir tek türlü sonlanan yerine-yazma sistemi olduğu açıktır. G grubunun birim elemanı $k_1 \in X$ temsil edilsin. O halde $e \equiv k_1$ alalım. $SLS(2, p)$ de sağlanan $k_0k_3 = k_2, k_0k_{16} = c, k_1k_3 = k_3, k_1k_{16} = k_{16}, m_{10}k_{15} = c, k_{12}c = k_{30}, k_{11}k_{16} = k_{30}, k_{12}k_2 = k_{31}, k_{15}t = k_{32}, k_{17}t = t, k_{11}k_3 = k_{31}, at = k_{32}, m_{10}k_{32} = t, k_{30}t = k_{11}, k_{12}t = k_{11}, k_{32}t = k_{32}, k_{32}c = k_{32}, k_{32}k_{10} = 0, k_{11}t = k_{11}, k_{11}c = k_{11}, k_{11}k_{10} = 0, bt = t, k_{16}t = t, k_0t = t, k_1t = t$ yeni ilişkiler eklemekle,

$$\overline{\pi}_4 = \left\langle \overline{Z}' \left| \begin{array}{l} m_{10}a = 1, k_0b = 1, k_1b = b, bk_2 = k_3, tk_{10} = 0, k_{11}b = k_{12}, ac = k_{15}, \\ k_{17}c = 1, bc = k_{16}, tt = t, ct = t, tc = t, k_0k_3 = k_2, k_0k_{16} = c, \\ k_1k_3 = k_3, k_1k_{16} = k_{16}, m_{10}k_{15} = c, k_{12}c = k_{30}, k_{11}k_{16} = k_{30}, \\ k_{12}k_2 = k_{31}, k_{15}t = k_{32}, k_{17}t = t, k_{11}k_3 = k_{31}, at = k_{32}, m_{10}k_{32} = t, \\ k_{30}t = k_{11}, k_{12}t = k_{11}, k_{32}t = k_{32}, k_{32}c = k_{32}, k_{32}k_{10} = 0, \\ k_{11}t = k_{11}, k_{11}c = k_{11}, k_{11}k_{10} = 0, bt = t, k_{16}t = t, k_0t = t, k_{1t} = t \end{array} \right. \right\rangle$$

\overline{Z}' üzerinde ilişkilerinin kümesi tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olan bir $GLS(2, p)$ genel lineer matris yarıgrubunu tanımlar. Burada

$$\overline{Z}' = \{a, b, c, t, k_0, k_1, k_2, k_3, k_{10}, k_{11}, k_{12}, k_{16}, k_{17}, k_{30}, k_{31}, m_{10}\}.$$

Şimdi genel lineer yarıgruplar için ikinci temel sonucumuzu verelim.

Teorem 4.4.3. $\langle X|R \rangle$ takdimi bir sonlu G grubunun Cayley Tablosu olsun. $k_1 \in X$ birim elemanın temsilcisi olsun. Yukarıdaki notasyonları ile bu takdim,

$$\overline{\pi}_4 = \left\langle \overline{Z}' \left| \begin{array}{l} m_{10}a = 1, k_0b = 1, k_1b = b, bk_2 = k_3, tk_{10} = 0, k_{11}b = k_{12}, ac = k_{15}, \\ k_{17}c = 1, bc = k_{16}, tt = t, ct = t, tc = t, k_0k_3 = k_2, k_0k_{16} = c, \\ k_1k_3 = k_3, k_1k_{16} = k_{16}, m_{10}k_{15} = c, k_{12}c = k_{30}, k_{11}k_{16} = k_{30}, \\ k_{12}k_2 = k_{31}, k_{15}t = k_{32}, k_{17}t = t, k_{11}k_3 = k_{31}, at = k_{32}, m_{10}k_{32} = t, \\ k_{30}t = k_{11}, k_{12}t = k_{11}, k_{32}t = k_{32}, k_{32}c = k_{32}, k_{32}k_{10} = 0, \\ k_{11}t = k_{11}, k_{11}c = k_{11}, k_{11}k_{10} = 0, bt = t, k_{16}t = t, k_0t = t, k_{1t} = t \end{array} \right. \right\rangle$$

\overline{Z}' üzerinde ilişkilerinin kümesi tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olan bir $GLS(2, p)$ genel lineer matris yarıgrubunu tanımlar.

İspat: \overline{Q}' , $\overline{\pi}_4$ deki ilişkilerin kümesi olsun. R içindeki bütün yerine-yazma kuralları (x_1x_2, x_3) ($x_1, x_2, x_3 \in X$) formuna sahip olduğunu hatırlayalım. Öyle ki \overline{Q}' içindeki bütün yerine-yazma kuralları uzunluk azaltabilme özelliğine sahiptir. Bundan dolayı \overline{Q}' sonlanandır. \overline{Q}' nun indirgenebilir olduğu açıktır. \overline{Q}' nun konfluent olduğunu gösterelim.

$$U_{1, k_0, b, k_2} = [(k_0b, 1), (bk_2, k_3)]$$

$$\begin{aligned}
U_{2,k_0,b,c} &= [(k_0b, 1), (bc, k_{16})] \\
U_{3,k_1,b,k_2} &= [(k_1b, b), (bk_2, k_3)] \\
U_{4,k_1,b,t} &= [(k_1b, b), (bc, k_{16})] \\
U_{5,t} &= [(tt, t), (tt, t)] \\
U_{6,t,k_{10}} &= [(tt, t), (tk_{10}, 0)] \\
U_{7,t,c} &= [(tt, t), (tc, t)] \\
U_{8,m_{10},a,c} &= [(m_{10}a, 1), (ac, k_{15})] \\
U_{9,k_{11},b,c} &= [(k_{11}b, k_{12}), (bc, k_{16})] \\
U_{10,k_{11},b,k_2} &= [(k_{11}b, k_{12}), (bk_2, k_3)] \\
U_{11,a,c,t} &= [(ac, k_{15}), (ct, t)] \\
U_{12,k_{17},c,t} &= [(k_{17}c, 1), (ct, t)] \\
U_{13,m_{10},a,t} &= [(m_{10}a, 1), (at, k_{32})] \\
U_{14,m_{10},k_{15},t} &= [(m_{10}k_{15}, c), (k_{15}t, k_{32})] \\
U_{15,k_{12},c,t} &= [(k_{12}c, k_{30}), (ct, t)] \\
U_{16,k_{15},t} &= [(k_{15}t, k_{32}), (tt, t)] \\
U_{17,k_{15},t,c} &= [(k_{15}t, k_{32}), (tc, t)] \\
U_{18,k_{15},t,k_{10}} &= [(k_{15}t, k_{32}), (tk_{10}, 0)] \\
U_{19,k_{17},t} &= [(k_{17}t, t), (tt, t)] \\
U_{20,k_{17},t,c} &= [(k_{17}t, t), (tc, t)] \\
U_{21,k_{17},t,k_{10}} &= [(k_{17}t, t), (tk_{10}, 0)] \\
U_{22,a,t} &= [(at, k_{32}), (tt, t)] \\
U_{23,a,t,c} &= [(at, k_{32}), (tc, t)] \\
U_{24,a,t,k_{10}} &= [(at, k_{32}), (tk_{10}, 0)] \\
U_{25,k_{30},t} &= [(k_{30}t, k_{11}), (tt, t)] \\
U_{26,k_{30},t,c} &= [(k_{30}t, k_{11}), (tc, t)] \\
U_{27,k_{30},t,k_{10}} &= [(k_{30}t, k_{11}), (tk_{10}, 0)] \\
U_{28,k_{12},t} &= [(k_{12}t, k_{11}), (tt, t)] \\
U_{29,k_{12},t,c} &= [(k_{12}t, k_{11}), (tc, t)] \\
U_{30,k_{12},t,k_{10}} &= [(k_{12}t, k_{11}), (tk_{10}, 0)] \\
U_{31,k_{32},t} &= [(k_{32}t, k_{32}), (tt, t)] \\
U_{32,k_{32},t,c} &= [(k_{32}t, k_{32}), (tc, t)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{33,k_{32},t,k_{10}} &= [(k_{32}t, k_{32}), (tk_{10}, 0)] \\
U_{34,m_{10},k_{32},t} &= [(m_{10}k_{32}, t), (k_{32}t, k_{32})] \\
U_{35,m_{10},k_{32},c} &= [(m_{10}k_{32}, t), (k_{32}c, k_{32})] \\
U_{36,m_{10},k_{32},k_{10}} &= [(m_{10}k_{32}, t), (k_{32}k_{10}, 0)] \\
U_{37,k_{32},c,t} &= [(k_{32}c, k_{32}), (ct, t)] \\
U_{38,k_{11},t} &= [(k_{11}t, k_{11}), (tt, t)] \\
U_{39,k_{11},t,c} &= [(k_{11}t, k_{11}), (tc, t)] \\
U_{40,k_{11},t,k_{10}} &= [(k_{11}t, k_{11}), (tk_{10}, 0)] \\
U_{41,k_{11},c,t} &= [(k_{11}c, k_{11}), (ct, t)] \\
U_{42,c,t} &= [(ct, t), (tt, t)] \\
U_{43,c,t} &= [(ct, t), (tc, t)] \\
U_{44,c,t,k_{10}} &= [(ct, t), (tk_{10}, 0)] \\
U_{45,t,t} &= [(tc, t), (ct, t)] \\
U_{46,b,c,t} &= [(bc, k_{16}), (ct, t)] \\
U_{47,k_0,b,t} &= [(k_0b, 1), (bt, t)] \\
U_{48,k_1,b,t} &= [(k_1b, b), (bt, t)] \\
U_{49,b,t} &= [(bt, t), (tt, t)] \\
U_{50,b,t,c} &= [(bt, t), (tc, t)] \\
U_{51,b,t,k_{10}} &= [(bt, t), (tk_{10}, 0)] \\
U_{52,k_{16},t} &= [(k_{16}t, t), (tt, t)] \\
U_{53,k_{16},t,c} &= [(k_{16}t, t), (tc, t)] \\
U_{54,k_{16},t,k_{10}} &= [(k_{16}t, t), (tk_{10}, 0)] \\
U_{55,k_{11},k_{16},t} &= [(k_{11}k_{16}, k_{30}), (k_{16}t, t)] \\
U_{56,k_1,k_{16},t} &= [(k_1k_{16}, k_{16}), (k_{16}t, t)] \\
U_{57,k_0,t} &= [(k_0t, t), (tt, t)] \\
U_{58,k_0,t,c} &= [(k_0t, t), (tc, t)] \\
U_{59,k_0,t,k_{10}} &= [(k_0t, t), (tk_{10}, 0)] \\
U_{60,k_1,t} &= [(k_1t, t), (tt, t)] \\
U_{61,k_1,t,c} &= [(k_1t, t), (tc, t)] \\
U_{62,k_1,t,k_{10}} &= [(k_1t, t), (tk_{10}, 0)] \\
U_{63,k_0,k_{16},t} &= [(k_0k_{16}, c), (k_{16}t, t)]
\end{aligned}$$

$$U_{64,k_{11},b,t} = [(k_{11}b, k_{12}), (bt, t)]$$

olur. Teorem 4.4.1 ispatındaki gibi Lemma 4.2.21 (3) kullanılarak benzer yolla gösterilebilir. ■

Uyarı 4.4.4. $\overline{\pi_4}$ normal formlarının kümesi

$\{0, 1, b, c, t, k_2, k_3, k_{11}, k_{12}, k_{15}, k_{16}, k_{30}, k_{31}, k_{32}\}$ dir.



BÖLÜM 5

MATRİS YARIGRUPLARININ İKİNCİ İNTEGRAL HOMOLOJİSİ

5.1. Özel Lineer Matris Yarıgruplarının İkinci İntegral Homolojisi

Sonlu bir özel lineer yarıgrupların ikinci homolojisini hesaplamak için [18] de Squier tarafından \mathbb{Z} nin çözümlenmesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

S , bir monoid olsun ve $\langle A|R \rangle$ de S için bir takdimi olsun. Öyle ki bu takdimde R de tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olsun. Squier \mathbb{Z} nin serbest çözümlenmesi aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$$P_3 \xrightarrow{\partial_3} P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

burada P_0 , tek formal sembol $[]$ üzerinde serbest $\mathbb{Z}S$ – modüldür. ε genişletme homomorfizmi

$$\varepsilon: P_0 \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\varepsilon([]) = 1$$

olarak tanımlanır.

Her $x \in A$ için P_1 $[x]$ formal sembollerinin kümesi üzerinde bir serbest $\mathbb{Z}S$ – modüldür ve

$$\partial_1: P_1 \rightarrow P_0$$

$$\partial_1([x]) = (x - 1)[]$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca,

P_2 , her bir $(r, s) \in R$ için $[r, s]$ formal sembollerinin kümesi üzerinde bir serbest $\mathbb{Z}S$ –modüldür. $x \in A$ için tümevarımla şöyle bir fonksiyon tanımlayalım;

$$\partial/\partial_x: A^* \rightarrow \mathbb{Z}A^*$$

$$\partial/\partial_x(1) = 0$$

$$\partial/\partial_x(wy) = \begin{cases} \partial/\partial_x(w) + w & (w \in A^* \text{ ve } x = y \text{ ise}) \\ \partial/\partial_x(w) & (w \in A^* \text{ ve } x \neq y \text{ ise}) \end{cases}$$

Bu fonksiyon türev fonksiyonu adını alır. Şimdi

$$\partial_2: P_2 \rightarrow P_1 \text{ fonksiyonunu}$$

$$\partial_2([r, s]) = \sum_{x \in A} \phi(\partial/\partial_x(r) - \partial/\partial_x(s)) [x]$$

şeklinde tanımlarız, burada $\Phi: \mathbb{Z}A^* \rightarrow \mathbb{Z}S$, dönüşümü $A^* \rightarrow S$ 'ye doğal homomorfizma tarafından elde edilir.

$P_3, [(r_1r_2, s_{12})(r_2r_3, s_{23})]$ R deki örtüşmelerin kümesi üzerinde serbest $\mathbb{Z}S$ –modüldür. w, A^* 'da bir kelime olsun. u da w nın bir indirgenemez formu olsun. O takdirde aşağıdaki zincire sahip olunur.

$$w \equiv b_1r_1c_1, b_1s_1c_1 \equiv b_2r_2c_2, \dots, b_qs_qc_q \equiv u,$$

$b_i, c_i \in A^*$ ve $(r_i, s_i) \in R, i = 1, \dots, q$ olmak üzere

$$\Phi: A^* \rightarrow P_2$$

$$\Phi(w) = \sum_{i=1}^q \phi(b_i)[r_i, s_i]$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi de

$\partial_3: P_3 \rightarrow P_2$ fonksiyonunu

$\partial_3([(r_1 r_2, s_{12})(r_2 r_3, s_{23})]) = r_1[r_2 r_3, s_{23}] - [r_1 r_2, s_{12}] + \Phi(r_1 s_{23}) - \Phi(s_{12} r_3)$ şeklinde tanımlayalım.

Squier (bkz. [18]), R bir tek türlü sonlanan yerine-yazma sistemi olduğunda aşağıdaki dizinin tam dizi olduğunu gösterdi.

$$P_3 \xrightarrow{\partial_3} P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Sonlu $SLS(2, p)$ özel lineer yarıgrubunun ikinci homolojisini hesaplamak için bu çözümlenme kullanılır.

Teorem 5.2. $SLS(2, p)$ bir sonlu özel lineer yarıgrubu olsun. $SLS(2, p)$ 'nin ikinci integral homolojisi için değişmeli bir grup takdimi bulunabilir.

İspat: Teorem 4.3.1. de verilen \bar{Y} üzerinde tek türlü sonlanan yerine-yazma sistem olan Q yu ve Q nun kullanılmasıyla \mathbb{Z} nin çözümlenmesini göz önüne alalım. Bu çözümlenme $\mathbb{Z}_{\otimes \mathbb{Z} S_1}$ faktörünün uygulanmasıyla

$$\mathbb{Z} \otimes P_3 \xrightarrow{1 \otimes \partial_3} \mathbb{Z} \otimes P_2 \xrightarrow{1 \otimes \partial_2} \mathbb{Z} \otimes P_1 \xrightarrow{1 \otimes \partial_1} \mathbb{Z} \otimes P_0 \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

zinciri elde edilir.

Bu zincir daha basit olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\bar{P}_3 \xrightarrow{\bar{\partial}_3} \bar{P}_2 \xrightarrow{\bar{\partial}_2} \bar{P}_1 \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Burada \bar{P}_1, \bar{P}_2 ve \bar{P}_3 sırasıyla $[x](x \in \bar{Y}), [r, s]((r, s) \in Q)$ ve $[(r_1 r_2, s_{12})(r_2 r_3, s_{23})]$ formal semboller için kümeleri üzerinde serbest değişmeli gruplardır.

$\bar{\partial}_2: \bar{P}_2 \rightarrow \bar{P}_1$ ve $\bar{\partial}_3: \bar{P}_3 \rightarrow \bar{P}_2$ dönüşümleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\overline{\partial}_2[r, s] = \sum_{x \in \overline{Y}} [(r \text{ de geçen } x \text{ lerin sayısı}) - (s \text{ de geçen } x \text{ lerin sayısı})][x]$$

ve

$$\overline{\partial}_3([(r_1 r_2, s_{12})(r_2 r_3, s_{23})]) = [r_2 r_3, s_{23}] - [r_1 r_2, s_{12}] + \Phi(r_1 s_{23}) - \Phi(s_{12} r_3)$$

Eğer $\Phi(w) = \sum_{i=1}^q \phi(b_i)[r_i, s_i]$ şeklinde ise o takdirde $\overline{\Phi}$ 'de

$$\overline{\Phi}(w) = \sum_{i=1}^q [r_i, s_i]$$

şeklinde tanımlanabilir.

$SLS(2, p)$ 'nin ikinci homolojisini $H_2(SLS(2, p)) \cong \ker \overline{\partial}_2 / \text{im} \overline{\partial}_3$ olduğunu varsayalım.

Teorem 4.3.1.'in ispatındaki örtüşmeler kullanılarak $\text{im} \overline{\partial}_3$ için bir doğuray kümesi bulunur. İlk önce $\overline{\partial}_3(U_{1, k_1, b, k_2})$ nin bir doğuray kümesi bulalım.

$$\overline{\Phi}(k_1 k_3) = [k_1 k_3, k_3] \text{ ve } \overline{\Phi}(b k_2) = [b k_2, k_3]$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_3(U_{1, k_1, b, k_2}) &= [b k_2, k_3] - [k_1 b, b] + \overline{\Phi}(k_1 k_3) - \overline{\Phi}(b k_2) \\ &= [k_1 k_3, k_3] - [k_1 b, b] \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde aşağıdakiler hesaplanabilir.

$$\overline{\partial}_3(U_{2, b, s, a}) = 0,$$

$$\overline{\partial}_3(U_{3, b, s, k_5}) = [b 0, 0] - [b s, s],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{4, k_0, b, k_2}) = [k_0 k_3, k_2] - [k_0 b, 1],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{5, k_0, b, k_6}) = [b k_6, k_7] - [k_0 b, 1],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{6, b, s, k_8}) = [b k_9, k_9] - [b s, s],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{7, k_0, b, k_9}) = [b k_9, k_9] - [k_0 b, 1],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{8, k_1, b, k_9}) = [k_1 k_9, k_9] - [k_1 b, b],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{9, k_0, b, s}) = [b s, s] - [k_0 b, 1],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{10, k_1, b, s}) = [k_1 s, s] - [k_1 b, b],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{11, k_0, s, a}) = 0,$$

$$\overline{\partial}_3(U_{12,k_0,s,k_8}) = [k_0k_9, k_9] - [k_0s, s],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{13,k_0,s,k_5}) = [k_00, 0] - [k_0s, s],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{14,k_1,b,k_6}) = [k_1k_7, k_7] - [k_1b, b],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{15,k_1,s,k_8}) = [k_1k_9, k_9] - [k_1s, s],$$

$$\overline{\partial}_3(U_{16,k_1,s,a}) = 0,$$

$$\overline{\partial}_3(U_{17,k_1,s,k_5}) = [k_10, 0] - [k_1s, s].$$

$im\overline{\partial}_3$ için daha küçük bir doğuray kümesi olduğunu görmek kolaydır.

$$V_1 = [k_1k_3, k_3] - [k_1b, b]$$

$$V_7 = [k_1s, s] - [k_1b, b]$$

$$V_2 = [sk_5, 0] - [sa, s]$$

$$V_8 = [k_1k_9, k_9] - [k_1b, b]$$

$$V_3 = [k_0k_3, k_2] - [k_0b, 1]$$

$$V_9 = [k_0k_9, k_9] - [k_0s, s]$$

$$V_4 = [bk_9, k_9] - [k_0b, 1]$$

$$V_{10} = [k_00, 0] - [k_0s, s]$$

$$V_5 = [bk_6, k_7] - [k_0b, 1]$$

$$V_{11} = [k_1k_7, k_7] - [k_1b, b]$$

$$V_6 = [bk_9, k_9] - [bs, s]$$

$$V_{12} = [k_10, 0] - [k_1s, s]$$

$$\overline{\partial}_3(U_{9,k_0,b,s}) = -V_6 + V_4 \text{ ve } \overline{\partial}_3(U_{15,k_1,s,k_8}) = V_8 - V_7 \text{ olduğundan}$$

$$B = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11}, V_{12}\}$$

kümesi $im\overline{\partial}_3$ yi gerer.

Bundan sonraki adımda $ker\overline{\partial}_2$ için bir doğuray kümesi bulalım.

Her $\alpha \in \overline{P}_2$ için

$$\alpha = \sum_{k_0,b \in \overline{Y}} \alpha_{k_0,b} [k_0b, 1] + \sum_{k_1,b \in \overline{Y}} \alpha_{k_1,b} [k_1b, b] + \sum_{b,k_2,k_3 \in \overline{Y}} \alpha_{b,k_2,k_3} [bk_2, k_3]$$

$$+ \sum_{s,k_5 \in \overline{Y}} \alpha_{s,k_5} [sk_5, 0] + \sum_{b,k_6,k_7 \in \overline{Y}} \alpha_{b,k_6,k_7} [bk_6, k_7] + \sum_{s,k_8,k_9 \in \overline{Y}} \alpha_{s,k_8,k_9} [sk_8, k_9]$$

$$+ \sum_{k_0,k_3,k_2 \in \overline{Y}} \alpha_{k_0,k_3,k_2} [k_0k_3, k_2] + \sum_{k_0,k_7,k_6 \in \overline{Y}} \alpha_{k_0,k_7,k_6} [k_0k_7, k_6] + \sum_{b,k_9 \in \overline{Y}} \alpha_{b,k_9} [bk_9, k_9]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k_1, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, k_9} [k_1 k_9, k_9] + \sum_{k_0, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, k_9} [k_0 k_9, k_9] + \sum_{b, s \in \bar{Y}} \alpha_{b, s} [bs, s] \\
& + \sum_{s, a \in \bar{Y}} \alpha_{s, a} [sa, s] + \sum_{k_0, s \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, s} [k_0 s, s] + \sum_{k_1, s \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, s} [k_1 s, s] \\
& + \sum_{m_{10}, a \in \bar{Y}} \alpha_{m_{10}, a} [m_{10} a, 1] + \sum_{k_1, k_3 \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, k_3} [k_1 k_3, k_3] + \sum_{k_1, k_7 \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, k_7} [k_1 k_7, k_7].
\end{aligned}$$

formunda olduğundan ve tüm katsayılar tamsayı olduğundan $\alpha \in \ker \bar{\partial}_2$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}
0 = \bar{\partial}_2(\alpha) = & \sum_{k_0, b \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, b} ([k_0] + [b] - [1]) + \sum_{k_1, b \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, b} [k_1] + \sum_{k_1, k_7 \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, k_7} [k_1] \\
& + \sum_{b, k_2, k_3 \in \bar{Y}} \alpha_{b, k_2, k_3} ([b] + [k_2] - [k_3]) + \sum_{s, k_5 \in \bar{Y}} \alpha_{s, k_5} ([s] + [k_5]) \\
& + \sum_{b, k_6, k_7 \in \bar{Y}} \alpha_{b, k_6, k_7} ([b] + [k_6] - [k_7]) + \sum_{s, k_8, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{s, k_8, k_9} ([s] + [k_8] - [k_9]) \\
& + \sum_{k_0, k_3, k_2 \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, k_3, k_2} ([k_0] + [k_3] - [k_2]) \\
& + \sum_{k_0, k_7, k_6 \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, k_7, k_6} ([k_0] + [k_7] - [k_6]) \\
& + \sum_{b, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{b, k_9} ([b]) + \sum_{k_1, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, k_9} ([k_1]) + \sum_{k_0, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, k_9} ([k_0]) \\
& + \sum_{b, s \in \bar{Y}} \alpha_{b, s} ([b]) + \sum_{s, a \in \bar{Y}} \alpha_{s, a} ([a]) + \sum_{k_0, s \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, s} ([k_0]) + \sum_{k_1, s \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, s} ([k_1]) \\
& + \sum_{m_{10}, a \in \bar{Y}} \alpha_{m_{10}, a} ([m_{10}] + [a] - [1]) + \sum_{k_1, k_3 \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, k_3} ([k_1])
\end{aligned}$$

dir.

Buna denk olarak $\alpha \in \ker \bar{\partial}_2$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{k_1, b \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, b} [k_1] + \sum_{k_1, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, k_9} ([k_1]) + \sum_{k_1, s \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, s} ([k_1]) + \sum_{k_1, k_3 \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, k_3} ([k_1])$$

$$- \sum_{m_{10}, a \in \bar{Y}} \alpha_{m_{10}, a}([k_1]) - \sum_{k_0, b \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, b}([k_1]) + \sum_{k_1, k_7 \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, k_7}[k_1] = 0 \quad (5.2.1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k_0, b \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, b}([b]) + \sum_{k_1, b \in \bar{Y}} \alpha_{k_1, b}[b] + \sum_{b, k_2, k_3 \in \bar{Y}} \alpha_{b, k_2, k_3}([b]) \\ & + \sum_{b, k_6, k_7 \in \bar{Y}} \alpha_{b, k_6, k_7}[b] + \sum_{b, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{b, k_9}([b]) + \sum_{b, s \in \bar{Y}} \alpha_{b, s}([b]) = 0 \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k_0, b \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, b}([k_0]) + \sum_{k_0, k_7, k_6 \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, k_7, k_6}([k_0]) + \sum_{k_0, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, k_9}([k_0]) \\ & + \sum_{k_0, s \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, s}([k_0]) + \sum_{k_0, k_3, k_2 \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, k_3, k_2}([k_0]) = 0 \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

$$\sum_{s, k_5 \in \bar{Y}} \alpha_{s, k_5}([s]) + \sum_{s, k_8, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{s, k_8, k_9}([s]) = 0 \quad (5.2.4)$$

$$\sum_{k_0, k_3, k_2 \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, k_3, k_2}([k_3]) - \sum_{b, k_2, k_3 \in \bar{Y}} \alpha_{b, k_2, k_3}([k_3]) = 0 \quad (5.2.5)$$

$$\sum_{b, k_2, k_3 \in \bar{Y}} \alpha_{b, k_2, k_3}([k_2]) - \sum_{k_0, k_3, k_2 \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, k_3, k_2}([k_2]) = 0 \quad (5.2.6)$$

$$\sum_{s, a \in \bar{Y}} \alpha_{s, a}([a]) + \sum_{m_{10}, a \in \bar{Y}} \alpha_{m_{10}, a}([a]) = 0 \quad (5.2.7)$$

$$\sum_{b, k_6, k_7 \in \bar{Y}} \alpha_{b, k_6, k_7}([k_6]) - \sum_{k_0, k_7, k_6 \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, k_7, k_6}([k_6]) = 0 \quad (5.2.8)$$

$$\sum_{k_0, k_7, k_6 \in \bar{Y}} \alpha_{k_0, k_7, k_6}([k_7]) - \sum_{b, k_6, k_7 \in \bar{Y}} \alpha_{b, k_6, k_7}([k_7]) = 0 \quad (5.2.9)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s, k_5 \in \bar{Y}} \alpha_{s, k_5}[k_5] + \sum_{s, k_8, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{s, k_8, k_9}[k_8] - \sum_{s, k_8, k_9 \in \bar{Y}} \alpha_{s, k_8, k_9}[k_9] \\ & + \sum_{m_{10}, a \in \bar{Y}} \alpha_{m_{10}, a}[m_{10}] = 0 \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Yukarıdaki sistemleri kullanırsak $\ker \overline{\partial_2}$ için bir doğuray kümesi bulunur.

$\alpha_{k_1, k_3} = 1$, $\alpha_{k_1, b} = -1$ ve (5.2.1) in solundaki diğer değerleri 0 alırsak aşağıdaki doğuraylar elde edilir.

$$W_1 = [k_1 k_3, k_3] - [k_1 b, b]$$

Benzer şekilde (5.2.2)-(5.2.10) arasındaki denklemlerden aşağıdaki doğuraylar elde edilir.

$$\begin{aligned} W_2 &= [sk_5, 0] - [bs, s] & W_3 &= [k_0 k_3, k_2] - [k_0 b, 1] \\ W_4 &= [bk_6, k_7] - [k_0 b, 1] & W_5 &= [bk_9, k_9] - [bs, s] \\ W_6 &= [bk_9, k_9] - [k_0 b, 1] & W_7 &= [k_1 k_9, k_9] - [k_1 b, b] \\ W_8 &= [bs, s] - [k_0 b, k_1] & W_9 &= [k_1 s, s] - [k_1 b, b] \\ W_{10} &= [k_0 k_9, k_9] - [k_0 s, s] & W_{11} &= [sk_5, 0] - [k_0 s, s] \\ W_{12} &= [k_1 k_7, k_7] - [k_1 b, b] & W_{13} &= [k_1 k_9, k_9] - [k_1 s, s] \end{aligned}$$

$Z = \{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8, W_9, W_{10}, W_{11}, W_{12}, W_{13}\}$ nin $\ker \overline{\partial_2}$ için bir doğuray olduğu görülür.

Şimdi de B deki V leri Z deki W lar cinsinden aşağıdaki gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} V_1 &= W_1 & V_3 &= W_3 \\ V_4 &= W_6 = W_5 + W_8 & V_5 &= W_4 \\ V_6 &= W_5 = W_6 - W_8 & V_7 &= W_9 = W_7 - W_{13} \\ V_8 &= W_7 & V_9 &= W_{10} \\ V_{11} &= W_{12} \end{aligned}$$

$H_2(SLS(2, p))$ için aşağıdaki abelyan grup takdimi elde edilir.

$$\left\langle Z \left| \begin{array}{l} W_1 = 0, W_3 = 0, W_5 + W_8 = 0, W_4 = 0, W_6 - W_8 = 0 \\ W_7 - W_{13} = 0, W_7 = 0, W_{10} = 0, W_{12} = 0 \end{array} \right. \right\rangle$$

Yukarıdaki takdimde bazı ilişkiler gereksizdir. Gereksiz ilişkileri elimine ederek aşağıdaki abelyan grup takdimi elde edilir.

$$P = \langle W_{13}, W_5, W_6, W_7, W_8 | W_5 + W_8 = 0, W_6 - W_8 = 0, W_7 - W_{13} = 0 \rangle$$



SONUÇLAR

$GL(p)$ (p asal) cismi üzerinden determinantı 0 ya da 1 olan 2×2 tipindeki matrisleri ve 2×2 tipindeki matris yarıgrupları için bazı takdimler ele alınmıştır. Bu takdimlerin normal formları bulunmuştur. Bu matris yarıgrupları için tek türlü sonlanan yerine-yazma sistemleri inşa edilmiştir. Ayrıca Squier çözümlemesi kullanılarak özel matris yarıgrupların ikinci integral homolojisi için değişmeli bir grup takdimi

$$\langle W_{13}, W_5, W_6, W_7, W_8 \mid W_5 + W_8 = 0, W_6 - W_8 = 0, W_7 - W_{13} = 0 \rangle$$

elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] J. Cassaigne and P. V. Silva. (2009). Infinite periodic points of endomorphisms over special confluent rewriting systems *Ann. Inst. Fourier*, 59(2):769-810.
- [2] J. Cassaigne and P. V. Silva. (2009). Infinite words and confluent rewriting systems endomorphism extensions. *Internat J. Algebra Comput.* 19(4):443-490.
- [3] F. Chouraqui. (2006). Rewriting systems in alternating knot groups. *Internat. J. Algebra Comput.* 16(4):749-769.
- [4] V. Diekert, A. Duncan and A. Miasnikov. (2009). Goodesic rewriting systems and pregroups. To appear in *Combinatorial and Geometric Group Theory*. Dortmund and Carleton Conferences. Series: Trends in Mathematics Bogopolski, O. Bumagin, I. Kharlampovich, O. Ventura, E. (Eds.). arXiv:0906.223v1.
- [5] O. Goodman and M. Shapiro. (2008). On a generalization of Dehn's algorithm. *Internat, J. Algebra Comput.* 18(7):1137-1177.
- [6] S. Hermiller and M. Shapiro. (1999). Rewriting systems and geometric three-manifolds. *Geom. Dedicata.* 76(2):211-228.
- [7] S. J. Pride and F. Otto. (2005). On higher order homological finiteness of rewriting systems. *J. Pure Appl. Algebra*, 200(1-2):149-161.
- [8] S. M. Hermiller. (1994). Rewriting Systems for Coxeter Groups, *J. Pure Appl. Algebra.* 92.137-148.
- [9] J. Pedersen and M. Yoder. (1994). Term rewriting for the conjugacy problem and the braid groups. *J. Symbolic Comput.* 18.563-572.
- [10] Campbell, C.M. and E.F. Robertson. (1980). A deficiency zero presentation for $SL(2, p)$, *Bull. London Math. Soc.* 12.17-20.
- [11] N. Ruskuc. (1995). Matrix semigroup-generators and relations, *Semigroup Forum.* 51.319-333.

- [12] Ayık H., N. Ruskuc. (1999). Generators and Relations of Rees Matrix Semigroup, *Proceedings of Edinburg Mathematical Society*.42.481-495.
- [13] Campbell C.M, Robertson E.F., Kawamata T., Miyamoto and Williams P.D. (1986). Deficiency zero presentations for certain perfect groups. *Proceeding of the Royal Society of Edinburg*. 103A.63-71.
- [14] Campbell C.M, Robertson E.F and Williams P.D. (1990). Efficient presentations of the groups $PSL(2, p) \times PSL(2, p)$, p prime. *J. London Math. Soc.* (2) 41.69-77.
- [15] Yağcı M., Bugay L., Ayık H. (2015). On the second homology of the schützenberger product of monoids. *Turk J. Math.* 39.763-772.
- [16] Ayık H., Campbell CM, O'Connor JJ, Ruskuc N. (2000). On the efficiency of finite simple semigroups. *Turk J. Math.* 24:129-146.
- [17] Guba VS, Pridge SJ. (1998). On the left and right cohomological dimension of monoids. *Bull London Math Soc.* 30:391-396.
- [18] Squier C. (1987). Word problems and homological finiteness condition for monoids. *J. Pure Appl. Algebra.* 49:201-217.
- [19] Mitchell J.D. (2002). Extremal Problems in Combinatorial Semigroup Theory, Ph.D. Thesis, University of St. Andrews.
- [20] R.V. Book and F. Otto. (1980). String-rewriting systems. Texts and Monographs in Computer Science. Springer-Verlag. Berlin.
- [21] Terese. (2003). Term rewriting systems. volume 55 of Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press. Cambridge.

- [22] Howie, J. (1995). *Fundamentals of Semigroup Theory*. Clarendon Pres. Oxford, 351p.
- [23] Özer, B. (2010). *Grup Tanımlayan Yarıgrup Takdimleri ve Adian Grafikleri*, Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi.
- [24] Ruskuc, N. (1995). *Semigroup Presentations*. Ph. D. Thesis, University of St. Andrews.
- [25] Johnson, D.L. (1976). *Presentations of Groups*. London Math. Soc. Lecture Notes. 22, Cambridge University Pres, Cambridge.
- [26] Rotman. (1965). J.J. *The Theory of Groups*. Allyn and Bacon Inc. Boston.
- [27] Coxeter, H.S.M. and W.O.J. Moser. (1980). *Generators and Relations for Discrete Groups*. Springer Verlag. Berlin.
- [28] Magnus, W., A. Karrass and D. Solitar. (1976). *Combinatorial Group Theory*. Dover, New York.
- [29] Çalışkan, B. (2002). *Grup Tanımlayan Bazı Yarıgrup ve Monoid Takdimleri*, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi.
- [30] Arthur, R., Araujo, I., and Thomson, R. (1999). *Seminar on Combinatorial Algebra*. University of St. Andrews.
- [31] Benlice M. (2014). *Yerine-Yazma Sistemleri*, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi.