T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ FONKSİYONLARI TARAFINDAN TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL ASİMPTOTİK DENK DİZİLER

DOKTORA TEZİ

Selma ALTUNDAĞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin BAŞARIR

Şubat 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ FONKSİYONLARI TARAFINDAN TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL ASİMPTOTİK DENK DİZİLER

DOKTORA TEZİ

Selma ALTUNDAĞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 05 / 02 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ekrem Savaş **Jüri Başkanı**	**Prof. Dr. Metin Başarır** **Üye**	**Prof. Dr. Fatih Nuray** **Üye**
Doç. Dr. Vatan Karakaya **Üye**		**Yard. Doç. Dr. Serpil Halıcı** **Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı büyük bir titizlikle yöneten, çalışma süresince yüksek bilgi ve tecrübelerinden istifade ettiğim kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Metin BAŞARIR'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca fikirleriyle destek ve yardımlarını gördüğüm Araş. Gör. Mahpeyker ÖZTÜRK'e, tüm Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve tezin bitirilmesindeki katkılarından dolayı Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ' a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Çalışmalarımda yardımlarını benden esirgemeyen çok kıymetli aileme ve yine bugüne kadar desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen ve her zaman yanımda olan, eşim Hüseyin ALTUNDAĞ'a, gösterdiği sabır ve anlayışından ötürü teşekkür ederim.

Bu çalışma, SAÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2006-50-02-048 nolu proje ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Kompleks terimli sıfıra yakınsayan diziler uzayı
$\hat{c}$	: Hemen hemen yakınsak diziler uzayı
$\bar{c}$	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
K	: Reel veya kompleks sayılar cismi
$\lvert K \rvert$	: Doğal sayılar kümesinin bir K alt kümesinin eleman sayısı
l_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
m	: Sınırlı, istatistiksel yakınsak diziler uzayı
m_0	: Sınırlı, sıfıra istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
T	: Öteleme operatörü
$x \sim y$	: Asimptotik denk x ve y dizileri
$\left\{ x \overset{[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y \right\}$	: $[w]_{\sigma,\theta}^{L}$ denk olan x ve y dizilerinin kümesi
$\left\{ x \overset{st-[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y \right\}$	:İstatistiksel $[w]_{\sigma,\theta}^{L}$ denk olan x ve y dizilerinin kümesi
$\left\{ x \overset{S_{\theta}^{L}(\Delta)}{\sim} y \right\}$	: Δ-lacunary istatistiksel asimptotik denk olan x ve y dizilerinin kümesi
$\left\{ x \overset{N_{\theta}^{L}(\Delta)}{\sim} y \right\}$	: Kuvvetli Δ-lacunary asimptotik denk olan x ve y dizilerinin kümesi
w	: Kompleks terimli diziler uzayı
$w(X)$	: X değerli diziler uzayı

$\delta(K)$	: K kümesinin yoğunluğu
$\theta=(k_r)$	: Lacunary dizisi
σ -limit	: İnvaryant limit
$\varnothing$	: Boş küme

ÖZET

Anahtar kelimeler: Orlicz fonksiyonu, lacunary dizisi, invaryant yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, asimptotik denklik.

Dört bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, Orlicz fonksiyonu ve invaryant yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık kavramları birleştirilerek bazı yeni dizi uzayları tanımlandı ve bu uzayların çeşitli özellikleri incelendi.

Üçüncü bölümde, fark dizisi ve lacunary dizisi kullanılarak yeni asimptotik denklik tanımları verildi ve asimptotik denklikler arasındaki bağıntılar incelendi.

Son bölümde ise, bazı genel sonuçlar ve araştırma problemleri verildi.

THE GENERALIZED STATISTICAL CONVERGENT SEQUENCE SPACES DEFINED BY ORLICZ FUNCTIONS AND STATISTICAL ASYMPTOTICALLY EQUIVALENT SEQUENCES

SUMMARY

Key Words: Orlicz function, lacunary sequence, invariant means, statistical convergence, asymptotically equivalence.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, literature notices, some fundamantel definitions and theorems will be used in the later chapters were given.

In the second chapter, by combining concepts of invariant or σ- convergence, Orlicz function and statistical convergence, some new sequence spaces were defined and some topological properties were examined.

In the third chapter, Δ- lacunary statistically asimptotic equivalent sequences and $\left[w\right]_{\sigma,\theta}^{L}$- statistically asimptotic equivalent sequences were defined and some theorems were proved.

In the last chapter, the main results reached were summarized.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler verildi.

Tanım 1.1.1. [20] X boş olmayan bir küme ve K, reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+: X \, x \, X \rightarrow X \qquad \qquad \cdot : K \, x \, X \rightarrow X$$
$$(x, y) \rightarrow x + y \qquad \qquad (x, y) \rightarrow x.y$$

ikili işlem olmak üzere $\forall \ \alpha, \beta \in K$ ve $\forall \ x, y, z \in X$ için,

i) $x + y = y + x$

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii) $\forall x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

iv) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x$ olacak biçimde $(-x) \in X$ vardır.

v) $1.x = x$

vi) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

vii) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

viii) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$

özelliklerini sağlıyorsa X kümesine K cismi üzerinde bir lineer (vektör) uzay adı verilir.

Tanım 1.1.2. [20] X , K cismi üzerinde bir lineer uzay ve M de X in bir alt kümesi olsun. $x, y \in M$ ve $\alpha , \beta \in K$ olmak üzere $\alpha x + \beta y \in M$ ise M ye X in bir lineer alt uzayı denir.

Tanım 1.1.3. [20] X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|.\| : X \to R$ fonksiyonu, $\forall\ x, y \in X$ ve $\forall\ \alpha \in K$ için,

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|\alpha .x\| = |\alpha| . \|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu lineer uzay veya kısaca normlu uzay denir.

Tanım 1.1.4. [20] X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $q : X \to R$ fonksiyonu $\forall\ x, y \in X$ ve $\forall\ \lambda \in K$ için,

i) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$

ii) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$

şartlarını sağlarsa q ya bir yarı norm, (X, q) ya da yarı normlu uzay denir. p ve q, X üzerinde iki yarınorm ve (x_n), X de bir dizi olmak üzere $p(x_n) \to 0$ iken

$q(x_n) \to 0$ ise, p yarınormu q yarınormundan daha kuvvetlidir denir. Eğer her biri diğerinden kuvvetli ise p ve q yarınormları denktirler.

Lemma 1.1.1. [43] p ve q, X üzerinde iki yarınorm olsun. p nin q dan daha kuvvetli olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $q(x) \leq Mp(x)$ olacak şekilde bir M sabitinin var olmasıdır.

Tanım 1.1.5. [20] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $g : X \to R$ fonksiyonu

i) $g(\theta) = 0$

ii) $\forall\, x \in X$ için $g(x) = g(-x)$

iii) $\forall\, x, y \in X$ için $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$

iv) (λ_n) K da, (x_n) de X de bir dizi olmak üzere, $n \to \infty$ için $\lambda_n \to \lambda_0$ ve $g(x_n - x_0) \to 0$ iken $g(\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0) \to 0$

şartlarını sağlarsa g ye bir paranorm, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir.

Tanım 1.1.6. [20] $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x_0 a yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x_0 a yakınsak ise $\lim\limits_n x_n = x_0$ veya $x_n \to x_0$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.7. [20] $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ iken $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.1.8. [20] $(X,\|.\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Tanım 1.1.9. [20] (X,g) paranormlu uzayında alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise bu (X,g) uzayına tam paranormlu uzay denir.

Tanım 1.1.10. [20] $x=(x_k)$ $(k=1,2,3,...)$ şeklindeki reel veya kompleks terimli bütün sınırlı veya sınırsız dizilerden oluşan uzay w ile gösterilsin. $x=(x_k)$, $y=(y_k)\in w$ ve λ bir sabit sayı olmak üzere

$$x+y=(x_k+y_k) \qquad \lambda x=(\lambda x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında w bir lineer uzaydır. İyi bilinen c_0, c, l_∞ dizi uzayları sırasıyla, sıfıra yakınsayan diziler uzayı, yakınsak diziler uzayı ve sınırlı diziler uzayı, w dizi uzayının alt uzayıdır ve $\|.\|=\sup_k|x_k|$ normuyla birer Banach uzayıdırlar.

Tanım 1.1.11. [20] X bir kompleks lineer uzay olmak üzere $L:X\to\mathbb{C}$ dönüşümüne bir fonksiyonel denir. Eğer her $x,y\in X$ için

$$L(x+y)\leq L(x)+L(y)$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa L fonksiyoneline alt toplamsal,

$$L(x+y)=L(x)+L(y)$$

gerçekleniyorsa toplamsaldır denir. Eğer her $x\in X$ ve her λ skaleri için

$$L(\lambda x)=\lambda L(x)$$

ise L fonksiyoneline homojendir. Homojen ve alt toplamsal olan bir fonksiyonele alt lineer, toplamsal ve homojen olan bir fonksiyonele ise lineer fonksiyonel denir. L homojen bir fonksiyonel ise $L(\theta)=0$ dır ve L lineer ise

$$L(-x)+L(x)=L(-x+x)=L(\theta)=0$$

olup $L(-x)=-L(x)$ dir. Buna göre bir lineer fonksiyonel, her $x,y\in X$ ve her α ve β skaleri için

$$L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

bağıntısını gerçekler.

Teorem 1.1.1. [20] X bir lineer uzay ve Y de onun bir alt uzayı olsun. p, X üzerinde alt lineer bir fonksiyonel olmak üzere, eğer f, Y üzerinde lineer bir fonksiyonel ve

$$f(x)\leq p(x)$$

ise bu taktirde X üzerinde

$$g(x)\leq p(x)$$

olacak şekilde f nin X e bir g lineer genişlemesi vardır.

Sonuç 1.1.1. [20] X bir lineer uzay ve p, X üzerinde bir alt lineer fonksiyonel olsun. Bu taktirde her $x\in X$ için

$$F(x)\leq p(x)$$

olacak şekilde X de tanımlı bir F lineer fonksiyoneli mevcuttur.

Hahn-Banach teoreminin sınırlı dizilerin uzayı olan l_∞ a bir uygulaması, Banach limit kavramının doğmasına yol açmıştır. Banach limitleri ilk olarak Banach [1] tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 1.1.12. [1] L, l_∞ üzerinde tanımlı bir lineer fonksiyonel olsun. Eğer L lineer fonksiyoneli

i) $n = 1, 2, \ldots$ için $x_n \geq 0$ iken $L(x_n) \geq 0$

ii) $Tx = T(\{x_n\}) = \{x_{n+1}\}$ olmak üzere $L(x) = L(Tx)$

iii) $e = (1,1,1,\ldots)$ olmak üzere $L(e) = 1$

özelliklerine sahip ise bir Banach limiti adını alır. L bir Banach limiti olmak üzere her $x = (x_n) \in l_\infty$ için

$$\liminf x_n \leq L(x_n) \leq \limsup x_n$$

dir. Banach limitlerinin kümesi B ile gösterilsin. c uzayı üzerindeki bütün Banach limitleri aynıdır. Eğer $x \in c$ ise her $L \in B$ için $L(x) = l(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ dir. Fakat yakınsak olmayıp, bütün Banach limitleri aynı olan diziler de vardır. Örneğin, $x = (1,0,1,0,\ldots)$ ise bu takdirde her $L \in B$ için

$$L(x) = \frac{1}{2}[L(x) + L(Dx)] = \frac{1}{2}L(x + Dx) = \frac{1}{2}L(e) = \frac{1}{2}$$

dir.

Tanım 1.1.13. [1] Bir $x = (x_n) \in l_\infty$ dizisi verilsin. Her L Banach limiti için $L(x) = s$ ise x dizisine hemen hemen yakınsak dizi ve s ye de x in *f*-limiti denir.

Hemen hemen yakınsak bir dizi Lorentz [18] tarafından aşağıdaki teoremle karakterize edilmiştir.

Teorem 1.1.2. [18] Bir x dizisinin bir s sayısına hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m\to\infty} d_{mn}(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}}{m+1} = s$$

olmasıdır. Hemen hemen yakınsak dizilerin sınıfı $\hat{c}$ ile ve $s = 0$ için sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin sınıfı $\hat{c}_0$ ile gösterilecektir.

Schaefer [35] öteleme operatörü altında limitin değişmezliği yerine genel bir öteleme operatörü altında limitin değişmezliğini alarak Banach limitlerinin bir genelleştirilmesi olan invaryant limitleri ve buna bağlı olarak invaryant yakınsaklığı vermiştir.

Tanım 1.1.14. [35] $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ her *m, n* pozitif tam sayıları için $\sigma^m(n) \neq n$ olacak şekilde bir bire-bir dönüşüm olsun. $x = (x_n)$ olmak üzere sürekli bir $\phi : l_\infty \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli

i) Her n için $x_n \geq 0$ iken $\phi(x_n) \geq 0$

ii) Her $x \in l_\infty$ için $\phi(\{x_{\sigma(n)}\}) = \phi(x)$

iii) $e = (1,1,1,\ldots)$ olmak üzere $\phi(e) = 1$

özelliklerini sağlarsa invaryant limit veya σ-limit adını alır. Özel olarak $\sigma(n) = n+1$ alınırsa ϕ bir Banach limiti olur.

Tanım 1.1.15. [35] İnvaryant limitleri eşit olan sınırlı bir diziye invaryant yakınsak veya $\sigma-$yakınsak dizi denir. $\sigma-$yakınsak dizilerin kümesi V_σ ile gösterilir.

Teorem 1.1.3. [35] $x = (x_n)$ ve $Tx = (Tx_n) = (x_{\sigma(n)})$, $T^2x = (T^2x_n) = (x_{\sigma^2(n)})$, $\ldots$,

$T^m x = (T^m x_n) = (x_{\sigma^m(n)})$ olarak verilsin. $t_{mn}(x) = \dfrac{(x_n + Tx_n + T^2 x_n + \ldots + T^m x_n)}{m+1}$ ve $t_{-1,n}(x) = 0$ olmak üzere $x \in V_\sigma$ olması için gerek ve yeter şart n ye göre düzgün olarak $\lim\limits_m t_{mn}(x) = L$ limitinin mevcut olmasıdır.

Bu L limitine $x = (x_n)$ dizisinin $\sigma -$ limiti denir ve $L = \sigma - \lim x$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $\sigma(n) = n+1$ olması halinde $\sigma -$ limitleri, l_∞ üzerindeki klasik Banach limitlerine ve V_σ kümesi de hemen hemen yakınsak dizilerin *f* kümesine indirgenir. $\sigma^m(n) \neq n$ olmak üzere her invaryant limit her $x \in c$ için $\phi(x) = \lim x$ anlamında c üzerindeki limit fonksiyoneline genişler.

Tanım 1.1.16. [16] Her $u_1,\ u_2 \in \mathbb{R}$ için

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[M(u_1) + M(u_2)\right]$$

eşitsizliğini sağlayan reel değerli *M* fonksiyonuna konvekstir denir.

Teorem 1.1.4. [16] $M(a) = 0$ şartını sağlayan her konveks $M(u)$ fonksiyonu, $p(t)$ azalmayan, sağdan sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$M(u) = \int_a^u p(t)dt$$

formunda temsil edilebilir.

Tanım 1.1.17. [12] Aşağıdaki şartları sağlayan $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna, Orlicz fonksiyonu denir.

i) $M(0) = 0$,

ii) Her *x* için $M(x) > 0$,

iii) Sürekli, azalmayan ve konveks,

iv) $x \to \infty$ iken $M(x) \to \infty$.

Tanım 1.1.18. [16] *M* bir Orlicz fonksiyonu olsun. $u \geq 0$ olmak üzere,

$$M(2u) \leq KM(u)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa *M*, *u* nun bütün değerleri için Δ_2 şartını sağlıyor denir. Δ_2 şartı, $l > 1$ ve *u* nun bütün değerleri için

$$M(lu) \leq KlM(u)$$

eşitsizliğine denktir.

Tanım 1.1.19. [5] $\theta = (k_r)$ pozitif tamsayıların bir dizisi

i) $k_0 = 0$

ii) $0 < k_r < k_{r+1}$

iii) $r \to \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$

şartlarını sağlasın. Bu durumda θ ya bir lacunary dizisi denir. Burada θ ile belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve $\dfrac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı da q_r ile gösterilir.

Teorem 1.1.5. [19] a_k, $b_k \in \mathbb{C}$, $0 < p_k \leq \sup p_k = H$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D\left(|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\right) \tag{1.1.1.}$$

dır.

Lemma 1.1.2. [40] (p_k) ve (t_k) iki reel sayı dizisi olmak üzere $m_0(t) \subseteq m_0(p)$ olması için gerek ve yeter şart $\delta(K)=1$ i sağlayan $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için $\liminf_{k\in K} \frac{p_k}{t_k} > 0$ olmasıdır.

Lemma 1.1.3. [40] $h = \inf p_k$ ve $G = \sup p_k$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) $G < \infty$ ve $h > 0$ dır.
(ii) $m(p) = m$ dir.

Buradaki $m(p)$ uzayı Sayfa 18 de tanımlıdır.

1.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde, öncelikle yoğunluk kavramı tanıtılarak bunun yardımıyla istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılacak ve bu tezde kullanılan istatistiksel yakınsaklıkla ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.2.1. [22] K, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi ve

$$K_n = \{k \le n : k \in K\}$$

olsun. $|K_n|$, K_n kümesinin eleman sayısını göstermek üzere eğer

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

mevcut ise $\delta(K)$ sayısına K kümesinin yoğunluğu denir.

K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta(K)=0$ olduğu açıktır. $\delta(K)=0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu denir. Doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi de sıfır yoğunlukludur. Ayrıca doğal sayılar kümesinin yoğunluğunun 1 olduğu kolayca görülebilir. Bir B kümesi $\delta(B)$ yoğunluğuna sahip ise $\delta(\mathbb{N}\setminus B)=1-\delta(B)$ dir.

Tanım 1.2.2. Bir $x=(x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k değerleri için bir P özelliğini sağlıyorsa bu takdirde (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve "*h.h.h.k.*" şeklinde gösterilir.

Sıfır yoğunluklu küme tanımından hareketle istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 1.2.3. [6] $x=(x_k)$ bir kompleks sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\delta\left\{k\le n:\left|x_k-L\right|\ge\varepsilon\right\}=0$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:\left|x_k-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisine L sayısına istatistiksel yakınsak denir ve $stat-\lim x=L$ veya $x_k\xrightarrow{stat}L$ olarak gösterilir. İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $\bar{c}$ ile gösterilecektir.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere, eğer x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise, L sayısının herhangi bir ε komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşulu ile, yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu ise istatistiksel yakınsaklığın adi yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. Böylece yakınsak diziler uzayını c ve istatistiksel yakınsak diziler uzayını da $\bar{c}$ ile gösterecek olursak $c\subset\bar{c}$ olduğu açıktır. Yani yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat bu önermenin karşıtı her zaman doğru değildir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 1.2.1. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dizi adi anlamda yakınsak değildir. Fakat her $\varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \left|\left\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \left|\left\{k \leq n : x_k \neq 0\right\}\right| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : x_k \neq 0\right\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

bulunur. Böylece $stat - \lim x = 0$ elde edilir.

Klasik analizde yakınsak diziler için verilen teoremlerin benzerleri aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 1.2.1. [3] $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ istatistiksel yakınsak diziler ve α, β skalerler olmak üzere

(i) $stat - \lim(\alpha x + \beta y) = \alpha . stat - \lim x + \beta . stat - \lim y$

(ii) $stat - \lim(xy) = (stat - \lim x)(stat - \lim y)$

(iii) $k \in \mathbb{N}$ ve $(Tx_k) = x_{k+1}$ olmak üzere $stat - \lim x = stat - \lim(Tx)$

dir.

Teorem 1.2.2. [3] Bir reel sayı dizisinin istatistiksel limiti varsa tektir.

Teorem 1.2.3. [38] Her $n \in K \subset \mathbb{N}$ için $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\delta(K) = 1$ ve $stat - \lim x_n = stat - \lim z_n = L$ olsun. Bu takdirde, $stat - \lim y_n = L$ dir.

Teorem 1.2.4. [38] $\delta(K)=1$ olmak üzere $n \in K \subset \mathbb{N}$ için $x_n \leq y_n$ olsun. Eğer $stat-\lim x_n$ ve $stat-\lim y_n$ mevcut ise $stat-\lim x_n \leq stat-\lim y_n$ dir.

BÖLÜM 2. ORLICZ FONKSİYONLARI TARAFINDAN TANIMLANAN İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİ UZAYLARI

Konveks fonksiyonlar teorisinin temeli, 1906 da J. Jensel ile oluşturulmuş, 1934 de G. Hardy, J. Littlewood ve G. Poyla tarafından yazılan "Inequalities" isimli eserde konveks fonksiyonlar ayrıntılı olarak incelenmiştir. 1931 yılında Z.W. Birnbaum ve W. Orlicz konveks fonksiyonların özel bir sınıfında yer alan *N*-fonksiyonları tanımlamıştır. *N*-fonksiyonların ayrıntılı bir incelemesi, 1961 de M.A. Krasnoselskii ve Y.B. Rutickii [16] tarafından "Convex functions and Orlicz spaces" adlı çalışmayla yapılmıştır. 1991 de M.M. Rao ve Z.D. Ren [27] "Theory of Orlicz Spaces" adlı çalışmada, *N*-fonksiyonların daha kapsamlı ve sistematik bir incelemesini verdiler. Bir *N*-fonksiyonu ile Orlicz fonksiyonu arasında çok yakın bir ilişki vardır.

$M(a)=0$ olacak şekildeki her konveks fonksiyonun

$$M(u)=\int_a^u p(t)dt$$

şeklinde bir integral gösterimine sahip olması, bu konveks fonksiyonun sahip olduğu özellikleri, $p(t)$ fonksiyonu ile inceleme imkanı tanır.

W. Orlicz, l_p uzayının inşasında t^p fonksiyonun rol oynamasından esinlenerek, t^p yerine daha genel bir *M* fonksiyonu alıp, $\sum_{k=1}^{\infty} M\left(|a_k|\right)$ serisi yakınsak olacak şekildeki tüm (a_k) dizilerinin kümesinde çalışılabileceği fikrini doğal bularak, bu şekildeki dizilerin kümesinin bir Banach uzayı yapısına sahip olması için *M* üzerinde ne gibi kısıtlamalar yapılması gerektiğini araştırmıştır.

Orlicz fonksiyonu ile tanımlanan Orlicz dizi uzayı 1971 yılında Lindenstrauss ve Tzafriri [17] tarafından

$$l_M = \left\{ x \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ bazı } \rho{>}0 \text{ lar için} \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu uzay

$$\|x\| = \inf\left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır. Ayrıca, l_M uzayı, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $M(x) = |x|^p$ olduğunda bir Orlicz dizi uzayı olan l_p uzayı ile yakın ilişkilidir.

1994 yılında, S.D. Parashar ve B. Choudhary [23], pozitif reel sayıların sınırlı bir (p_k) dizisini kullanarak, l_M uzayının, bir $\rho{>}0$ reel sayısı için $\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$ serisi yakınsak olacak şekildeki (x_k) dizilerinin uzayı olan $l_M(p)$ ye genelleştirmesini verdiler. Ayrıca üzerinde tanımladıkları bir paranormla $l_M(p)$ uzayının tam olduğunu da gösterdiler.

2.1. İstatistiksel Yakınsak Dizi Uzayları

İstatistiksel yakınsaklık fikri ilk defa Steinhaus [37] tarafından bir konferansta ortaya atılmıştır. Daha sonra Fast [4] tarafından çalışılmıştır. Bu konunun toplanabilme teorisiyle ilişkisi Schoenberg [36] tarafından verilmiş ve Salat [29], Fridy [6], Fridy ve Miller [7], Fridy ve Orhan [8,9] tarafından aynı özelliklerin incelenmesine devam edilmiştir. İstatistiksel yakınsaklığın fonksiyonel analiz açısından önemi Connor ın [3] yaptığı çalışmayla ve trigonometrik serilerde uygulaması da Zygmund un [44] yaptığı çalışmayla ortaya konmuştur. Ayrıca Savaş [30], Savaş ve Nuray [34], Kolk [14,15], Tripathy [39,42], Rath ve Tripathy [28], Tripathy, Altın ve Et [41] istatistiksel yakınsaklığı çeşitli şekillerde kullanmış ve çalışmışlardır.

İnvaryant yakınsaklıkla, istatistiksel yakınsaklığın ilişkisi Savaş ve Nuray [34] tarafından aşağıdaki tanımla verildi.

Tanım 2.1.1. [34] Her $\varepsilon > 0$ için *m* ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|x_{\sigma^k(m)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine L sayısına $\sigma-$istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $stat_\sigma - \lim x = L$ veya $x_k \xrightarrow{stat_\sigma} L$ olarak gösterilir. $\sigma-$istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$\bar{c}(\sigma) = \left\{x : \text{bazı } L \text{ ler için } stat_\sigma - \lim x = L\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda tanımlanan uzay $L = 0$ için $\bar{c}_0(\sigma)$ uzayına, invaryant limit yerine adi anlamda limit alındığında ise Fridy [6] tarafından çalışılan $\bar{c}$ uzayına indirgenir.

Ayrıca $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayı dizisi olmak üzere, $\bar{c}$ ve $\bar{c}_0$ uzayları Tripathy ve Sen [40] tarafından

$$\bar{c}(p) = \left\{(x_k) \in w : \left|x_k - L\right|^{p_k} \xrightarrow{stat} 0,\ k \to \infty,\ \text{bazı } L \text{ ler için}\right\}$$

$$\bar{c}_0(p) = \left\{(x_k) \in w : \left|x_k\right|^{p_k} \xrightarrow{stat} 0,\ k \to \infty\right\}$$

uzaylarına genelleştirildi. Burada aynı zamanda

$$l_\infty(p) = \left\{ (x_k) \in w : \sup_k |x_k|^{p_k} < \infty \right\}$$

olmak üzere $m(p) = \bar{c}(p) \cap l_\infty(p)$ ve $m_0(p) = \bar{c}_0(p) \cap l_\infty(p)$ uzaylarının da $M = \max(1, \sup p_k)$ olmak üzere

$$g(x) = \sup_k |x_k|^{p_k/M}$$

paranormuyla birlikte birer paranormlu uzay oldukları gösterildi.

2.2. Orlicz Fonksiyonları Tarafından Tanımlanan Paranormlu σ-İstatistiksel Yakınsak Dizi Uzayları

Bu bölümde Orlicz fonksiyonu ve invaryant limit kavramları kullanılarak bazı yeni dizi uzayları tanımlandı.

Tanım 2.2.1. $p = (p_k)$ bir pozitif reel sayı dizisi ve q bir yarınorm olmak üzere (X, q) uzayı $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı yarınormlu bir uzay olsun. Aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlayalım:

$$\bar{c}(\sigma, M, p, q, s) = \{ (x_k) \in l_\infty(X) : k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)} - L}{\rho} \right)\right)\right]^{p_k} \xrightarrow{stat} 0,\ k \to \infty,\ n \text{ ye göre}$$

$$\text{düzgün}, s \geq 0,\ \text{bazı } \rho > 0 \text{ lar için}, L \in X\},$$

$$\bar{c}_0(\sigma, M, p, q, s) = \{ (x_k) \in l_\infty(X) \ : \ k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{\rho} \right)\right)\right]^{p_k} \xrightarrow{stat} 0,\ k \to \infty,\ n \text{ ye göre}$$

$$\text{düzgün}, s \geq 0, \text{bazı } \rho > 0 \text{ lar için}\},$$

$$l_\infty(\sigma, M, p, q, s) = \{(x_k) \in l_\infty(X) \ : \ \sup_{k,n} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{\rho} \right)\right)\right]^{p_k} < \infty, s \geq 0,\ \text{bazı } \rho > 0 \text{ lar}$$

$$\text{için}\},$$

$W(\sigma, M, p, q, s) = \{(x_k) \in l_\infty(X):\ \lim\limits_{j} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)} - L}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} = 0,\ n$ ye göre

düzgün, $s \geq 0,$ bazı $\rho > 0$ lar için$\}$.

$$m(\sigma, M, p, q, s) = \bar{c}(\sigma, M, p, q, s) \cap l_\infty(\sigma, M, p, q, s)$$

ve

$$m_0(\sigma, M, p, q, s) = \bar{c}_0(\sigma, M, p, q, s) \cap l_\infty(\sigma, M, p, q, s)$$

olsun.

Eğer $M(x) = x,\ q(x) = |x|,\ s = 0$ ve σ-limit yerine adi anlamda limit alınırsa yukarıda tanımlanan uzaylar Tripathy ve Sen [40] tarafından tanımlanan sırasıyla

$$\bar{c}(p) = \{\ (x_k) \in w:\ |x_k - L|^{p_k} \overset{stat}{\rightarrow} 0,\ \ k \to \infty \text{ ve } L \in X\},$$

$$\bar{c}_0(p) = \{\ (x_k) \in w:\ |x_k|^{p_k} \overset{stat}{\rightarrow} 0,\ \ k \to \infty\},$$

$$l_\infty(p) = \{\ (x_k) \in w:\ \sup_{k} |x_k|^{p_k} < \infty\},$$

$$m(p) = \bar{c}(p) \cap l_\infty(p)$$

ve

$$m_0(p) = \bar{c}_0(p) \cap l_\infty(p)$$

uzaylarına indirgenir.

Teorem 2.2.1. $\bar{c}(\sigma, M, p, q, s)$, $\bar{c}_0(\sigma, M, p, q, s)$, $m(\sigma, M, p, q, s)$ ve $m_0(\sigma, M, p, q, s)$ uzayları birer lineer uzaylardır.

İspat. (x_k), $(y_k) \in \bar{c}(\sigma, M, p, q, s)$ olsun. Bu takdirde $k \to \infty$, n ye göre düzgün olmak üzere,

$$k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)} - K}{\rho_1}\right)\right)\right]^{p_k} \xrightarrow{stat} 0$$

ve

$$k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{y_{\sigma^k(n)} - L}{\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k} \xrightarrow{stat} 0$$

olacak şekilde ρ_1, ρ_2 pozitif reel sayıları ve $K,\ L \in X$ mevcuttur.

$\alpha,\ \beta$ skaler olmak üzere $\rho_3 = \max(2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ olsun. Bu takdirde (1.1.1.) den $k \to \infty$, n ye göre düzgün olmak üzere,

$$k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\alpha x_{\sigma^k(n)} + \beta y_{\sigma^k(n)} - (\alpha K + \beta L)}{\rho_3}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)} - K}{2\rho_1}\right) + q\left(\frac{y_{\sigma^k(n)} - L}{2\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq k^{-s}\frac{1}{2^{p_k}}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)} - K}{\rho_1}\right)\right) + M\left(q\left(\frac{y_{\sigma^k(n)} - L}{\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\{k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)} - K}{\rho_1}\right)\right)\right]^{p_k} + k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{y_{\sigma^k(n)} - L}{\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k}\} \xrightarrow{stat} 0$$

elde edilir.

Böylece $\bar{c}(\sigma, M, p, q, s)$ uzayı bir lineer uzaydır. Diğer uzaylar için benzer işlemler yapılarak ispat elde edilir.

Teorem 2.2.2. $m(\sigma, M, p, q, s)$ ve $m_0(\sigma, M, p, q, s)$ uzayları $H = \max(1, \sup p_k)$ olmak üzere,

$$g(x) = \inf\{\rho^{p_m/H} : \sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{\rho}\right)\right) \leq 1,\ n \text{ ye göre düzgün}, s \geq 0,\ \rho > 0 \text{ ve } m \in \mathbb{N}\}$$

ile birlikte birer paranormlu uzaylardır.

İspat. İspatı $m_0(\sigma, M, p, q, s)$ uzayı için yapalım. Diğer uzay için benzer yolla ispat yapılabilir. Her $x \in m_0(\sigma, M, p, q, s)$ için $g(x) = g(-x)$ ve $g(\theta) = 0$ olduğu açıktır. $x,\ y \in m_0(\sigma, M, p, q, s)$ olsun. Bu takdirde n ye göre düzgün olmak üzere,

$$\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{\rho_1}\right)\right) \leq 1$$

ve

$$\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{y_{\sigma^k(n)}}{\rho_2}\right)\right) \leq 1$$

olacak şekilde $\rho_1, \rho_2 > 0$ sayıları mevcuttur.

$\rho = \rho_1 + \rho_2$ olsun. M nin konveksliğinden n ye göre düzgün olmak üzere

$$\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}+y_{\sigma^k(n)}}{\rho}\right)\right) \le \sup_k k^{-s} M\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2} q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{\rho_1}\right)+\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2} q\left(\frac{y_{\sigma^k(n)}}{\rho_2}\right)\right)$$

$$\le \frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{\rho_1}\right)\right)$$

$$+\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{y_{\sigma^k(n)}}{\rho_2}\right)\right) \le 1$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki eşitsizlikten

$$g(x+y)=\inf\ \{\ \rho^{p_m/H}:\ \sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}+y_{\sigma^k(n)}}{\rho}\right)\right)\ \le\ 1,\ n \text{ ye göre düzgün}, \rho>0\}$$

$$\le \inf\{\rho_1^{\,p_m/H}:\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{\rho_1}\right)\right)\le 1,\ n \text{ ye göre düzgün}, \rho_1>0\}$$

$$+\inf\{\rho_2^{\,p_m/H}:\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{y_{\sigma^k(n)}}{\rho_2}\right)\right)\le 1,\ n \text{ ye göre düzgün}, \rho_2>0\}$$

$$=g(x)+g(y)$$

olur.

Şimdi skalerle çarpımın sürekli olduğunu gösterelim. $\lambda \ne 0$ olmak üzere λ bir kompleks sayı olsun. Bu takdirde $r=\dfrac{\rho}{|\lambda|}$ olmak üzere g nin tanımından

$$g(\lambda x)=\inf\{\rho^{p_m/H}:\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{\lambda x_{\sigma^k(n)}}{\rho}\right)\right)\le 1,\ n \text{ ye göre düzgün},\ \rho>0\}$$

$$=\inf\{r|\lambda|^{p_m/H}:\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{r}\right)\right)\le 1,\ n \text{ ye göre düzgün},\ r>0\}$$

elde edilir. $|\lambda|^{p_m} \le \max(1,|\lambda|^H)$ olduğundan $|\lambda|^{p_m/H} \le (\max(1,|\lambda|^H))^{1/H}$ dir. Böylece

$$g(\lambda x) \leq$$

$$(\max(1,|\lambda|^{H}))^{1/H} \ \inf\{(r)^{p_m/H} : \sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{r}\right)\right) \leq 1, \ n \text{ ye göre düzgün}, r > 0\}$$

$$= (\max(1,|\lambda|^{H}))^{1/H} g(x)$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikten $g(x) \to 0$ veya $\lambda \to 0$ iken $g(\lambda x) \to 0$ olduğu görülür. Böylece $m(\sigma, M, p, q, s)$ ve $m_0(\sigma, M, p, q, s)$ uzayları g ile birlikte birer paranormlu uzaydır.

Teorem 2.2.3. (X, q) tam yarınormlu uzay olsun. Bu takdirde $m(\sigma, M, p, q, s)$ ve $m_0(\sigma, M, p, q, s)$ uzayları tamdır.

İspat. İspatı $m_0(\sigma, M, p, q, s)$ uzayı için yapalım. Diğer uzay için ispat benzer şekilde yapılabilir. Her $k, n \in \mathbb{N}$ için $x^s = (x^s_{\sigma^k(n)})$, $m_0(\sigma, M, p, q, s)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Cauchy dizisi tanımından $i, j \to \infty$ iken $g(x^i - x^j) \to 0$ dır. Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\frac{\varepsilon}{r\delta} > 0$ olmak üzere $r > 0$ ve $\delta > 0$ sayıları alınsın. Bu takdirde her $i, j \geq N$ için,

$$g(x^i - x^j) < \frac{\varepsilon}{r\delta}$$

olacak şekilde pozitif bir N sayısı mevcuttur. g paranormunun tanımından

$$\inf\{\rho^{p_k/H} : \sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x^i_{\sigma^k(n)} - x^j_{\sigma^k(n)}}{\rho}\right)\right) \leq 1, \ n \text{ ye göre düzgün}, \ \rho > 0\} < \frac{\varepsilon}{r\delta}$$

dır. Buradan x^i nin (X, q) da bir Cauchy dizisi olduğu görülür. Böylece $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere her bir ε sayısı ve her $i, j \geq N$ için

$$q(x^i - x^j) < \varepsilon$$

olacak şekilde pozitif bir N sayısı mevcuttur. M nin sürekliliğinden

$$\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x^i - \lim_j x^j}{\rho}\right)\right) \leq 1$$

bulunur. Buradan

$$\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x^i - x}{\rho}\right)\right) \leq 1$$

olur. ρ lar üzerinden infimum alınırsa her $i \geq N$ ve $j \to \infty$ için

$$\inf\{\rho^{p_k/H} : \sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{x^i - x}{\rho}\right)\right) \leq 1\} < \varepsilon$$

dur. $x^i \in m_0(\sigma, M, p, q, s)$ ve M sürekli olduğundan $x \in m_0(\sigma, M, p, q, s)$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.4. M_1 ve M_2, Δ_2- şartını sağlayan iki Orlicz fonksiyonu olsun. Bu takdirde, $Z = \bar{c}, m, \bar{c}_0$ ve m_0 olmak üzere,

(i) $Z(\sigma, M_1, p, q, s) \subseteq Z(\sigma, M_2 \circ M_1, p, q, s)$

(ii) $Z(\sigma, M_1, p, q, s) \cap Z(\sigma, M_2, p, q, s) \subseteq Z(\sigma, M_1 + M_2, p, q, s)$

dir.

İspat. (i) İspatın bu kısmını yalnızca $Z = \overline{c}_0$ için yapalım. Diğer durumlar benzer şekilde ispatlanabilir. $(x_k) \in \overline{c}_0(\sigma, M, p, q, s)$ olsun. Bu takdirde verilen bir $0 < \varepsilon < 1$ sayısı için,

$$B = \max\left(1, \sup\left[M_2\left(\frac{1}{(k^{-s})^{1/p_k}}\right)\right]^{p_k}\right)$$

ve

$$K = \{k \in \mathbb{N} : k^{-s}\left[M_1\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} < \frac{\varepsilon}{B}\} \qquad (2.2.1.)$$

olmak üzere $\delta(K) = 1$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ nin bir K altkümesi vardır. Eğer $a_k = (k^{-s})^{1/p_k} M_1\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{\rho}\right)\right)$ alınırsa $a_k^{p_k} < \frac{\varepsilon}{B} < 1$ ve buradan da $a_k < 1$ elde edilir. M nin konveksliğinden

$$\left(M_2 \circ M_1\right)\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{\rho}\right)\right) = M_2\left(\frac{a_k}{(k^{-s})^{1/p_k}}\right) \le a_k M_2\left(\frac{1}{(k^{-s})^{1/p_k}}\right)$$

olur. Bu son eşitsizlikten

$$k^{-s}\left[M_2\left(a_k\right)\right]^{p_k} \le k^{-s}\left[M_2\left(\frac{a_k}{(k^{-s})^{1/p_k}}\right)\right]^{p_k} \le k^{-s}B\left(a_k\right)^{p_k} \le B\left(a_k\right)^{p_k} < \varepsilon$$

dur. Böylece (2.2.1.) den verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : k^{-s}\left[M_2\left(M_1\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}}{\rho}\right)\right)\right)\right]^{p_k} < \varepsilon\right\}\right) = 1$$

olacak şekilde $\rho > 0$ sayısı mevcuttur. Sonuç olarak $(x_k) \in \bar{c}_0(\sigma, M_2 \circ M_1, p, q, s)$ elde edilir.

Teorem 2.2.5. $p = (p_k)$ pozitif reel sayı dizisi, q_1 ve q_2 de X üzerinde iki seminorm olsun. Bu takdirde $Z = \bar{c}, m, \bar{c}_0$ ve m_0 olmak üzere,

$$Z(\sigma, M, p, q_1, s) \cap Z(\sigma, M, p, q_2, s) \neq \varnothing$$

dir.

İspat. Teoremin ifadesindeki dizi uzayı sınıflarının her birine en azından sıfır dizisi dahil olduğundan ispat kolayca tamamlanır.

Aşağıdaki önermede, dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntıları ve q_1 ve q_2 ye bağlı olan kapsama bağıntıları ispatsız olarak verilmiştir.

Önerme 2.2.1. M, Δ_2- şartını sağlayan Orlicz fonksiyonu ve q_1 ve q_2 de X üzerinde iki yarınorm olsun. Bu takdirde,

(i) $\bar{c}_0(\sigma, M, p, q_1, s) \subseteq \bar{c}(\sigma, M, p, q_1, s)$,

(ii) $m_0(\sigma, M, p, q_1, s) \subseteq m(\sigma, M, p, q_1, s)$,

(iii) $Z = \bar{c}, m, \bar{c}_0$ ve m_0 olmak üzere

$Z(\sigma, M, p, q_1, s) \cap Z(\sigma, M, p, q_2, s) \subseteq Z(\sigma, M, p, q_1 + q_2, s)$,

(iv) $Z = \bar{c}, m, \bar{c}_0$ ve m_0 olmak üzere, eğer q_1 yarınormu q_2 den daha kuvvetli ise

$Z(\sigma, M, p, q_1, s) \subseteq Z(\sigma, M, p, q_2, s)$

dir.

Önerme 2.2.2. (p_k) ve (t_k) dizileri için $m_0(\sigma, M, p, q, s) \supseteq m_0(\sigma, M, t, q, s)$ olması için gerek ve yeter şart $\delta(K)=1$ şartını sağlayan $K \subseteq \mathbb{N}$ için $\liminf\limits_{k\in K} \frac{p_k}{t_k} > 0$ olmasıdır.

İspat. Lemma 1.1.2. den kolayca görülür.

Aşağıdaki Sonuç Önerme 2.2.2. nin bir sonucudur.

Sonuç 2.2.1. (p_k) ve (t_k) dizileri için $m_0(\sigma, M, p, q, s) = m_0(\sigma, M, t, q, s)$ olması için gerek ve yeter şart $\delta(K)=1$ şartını sağlayan $K \subseteq \mathbb{N}$ için $\liminf\limits_{k\in K} \frac{p_k}{t_k} > 0$ ve $\liminf\limits_{k\in K} \frac{t_k}{p_k} > 0$ olmasıdır.

Önerme 2.2.3. $h = \inf p_k$ ve $G = \sup p_k$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) $G < \infty$ ve $h > 0$,
(ii) $m(\sigma, M, p, q, s) = m(\sigma, M, q, s)$.

İspat. Lemma 1.1.3. den kolayca görülür.

Teorem 2.2.6. $p = (p_k)$ dizisi, $\inf p_k > 0$ olmak üzere negatif olmayan, sınırlı reel sayı dizisi olsun. Bu takdirde,

$$m(\sigma, M, p, q, s) = W(\sigma, M, p, q, s) \cap l_\infty(\sigma, M, p, q, s)$$

dir.

İspat. $(x_k) \in W(\sigma, M, p, q, s) \cap l_\infty(\sigma, M, p, q, s)$ olsun. Bu takdirde, düz çizgiler küme içindeki eleman sayısını göstermek üzere, verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\sum_{k=1}^{j} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \geq \left|\left\{k \leq j : k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon\right\}\right|.\varepsilon$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikten $(x_k) \in m(\sigma, M, p, q, s)$ olduğu görülür.

Tersine, $(x_k) \in m(\sigma, M, p, q, s)$ olsun. Bu takdirde $k \to \infty$, n ye göre düzgün olmak üzere,

$$k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \xrightarrow{stat} 0$$

olacak şekilde $\rho > 0$ sayısı mevcuttur. Ayrıca verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$B = \sup_k \left(k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right)^{1/h} < \infty$$

ve

$$L_j = \left|\left\{k \leq j : k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

olsun. $(x_k) \in m(\sigma, M, p, q, s)$ olduğundan $j \to \infty$, n ye göre düzgün olmak üzere $\frac{|\{L_j\}|}{j} \to 0$ dır ve her $j > n_0$ için $\frac{|\{L_j\}|}{j} < \frac{\varepsilon}{2B^h}$ olacak şekilde bir n_0 pozitif tamsayısı mevcuttur. O halde $j > n_0$ için

$$\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} = \frac{1}{j}\sum_{k \notin L_j} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$+\frac{1}{j}\sum_{k\in L_j} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \frac{j-\left|\{L_j\}\right|}{j}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\left|\{L_j\}\right|}{j}B^h<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

olur. Böylece $(x_k)\in W(\sigma,M,p,q,s)\cap l_\infty(\sigma,M,p,q,s)$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki Sonuç 2.2.2 yukarıdaki teoremin sonucudur.

Sonuç 2.2.2. $p=(p_k)$ ve $t=(t_k)$ dizisi, $\inf p_k>0$ ve $\inf t_k>0$ olmak üzere negatif olmayan, sınırlı reel sayı dizisi olsunlar. Bu takdirde,

$$W(\sigma,M,p,q,s)\cap l_\infty(\sigma,M,p,q,s)=W(\sigma,M,t,q,s)\cap l_\infty(\sigma,M,t,q,s)$$

dir.

Teorem 2.2.7. q, X üzerinde bir yarınorm olsun. Bu takdirde,

(i) $W(\sigma,q)\subset \bar{c}(\sigma,q)$,

(ii) $(x_k)\in l_\infty(\sigma,q)$ ise $\bar{c}(\sigma,q)\subset W(\sigma,q)$,

(iii) $l_\infty(\sigma,q)\cap \bar{c}(\sigma,q)=l_\infty(\sigma,q)\cap W(\sigma,q)$

dur.

İspat. (i) $\varepsilon>0$ verilsin ve $(x_k)\in W(\sigma,q)$ olsun. O halde,

$$\sum_{k=1}^{j} q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq \sum_{\substack{k=1\\ q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq\varepsilon}}^{j} q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq\left|\left\{k\leq j: q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq\varepsilon\right\}\right|.\varepsilon$$

yazılabilir. Böylece $(x_k)\in \bar{c}(\sigma,q)$ elde edilir.

(ii) $(x_k)\in l_\infty(\sigma,q)$ olduğundan $q(x_{\sigma^k(n)}-L)\le K$ olacak şekilde pozitif bir K sayısı mevcuttur. $(x_k)\in \bar{c}(\sigma,q)$ olsun. $\varepsilon>0$ verilsin. O halde her $n\in\mathbb{N}$ ve $j>j_0$ için

$$\frac{1}{j}\left|\left\{k\le j: q(x_{\sigma^k(n)}-L)\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|<\frac{\varepsilon}{2K}$$

olacak şekilde $j_0\in\mathbb{N}$ vardır. $L_j=\left\{k\le j: q(x_{\sigma^k(n)}-L)\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ diyelim. O halde her $j>j_0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} q(x_{\sigma^k(n)}-L) &= \frac{1}{j}\sum_{k\in L_j} q(x_{\sigma^k(n)}-L)+\frac{1}{j}\sum_{k\notin L_j} q(x_{\sigma^k(n)}-L)\\ &< \frac{1}{j}\left(\frac{j\varepsilon}{2K}\right)K+\frac{1}{j}\,j\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon\end{aligned}$$

olur. Böylece $(x_k)\in W(\sigma,q)$ elde edilir.

(iii) İspat (i) ve (ii) den açıktır.

Teorem 2.2.8. M bir Orlicz fonksiyonu ve $0<\inf p_k\le p_k\le\sup p_k<\infty$ olsun. Bu takdirde,

$$W(\sigma,M,p,q)\subset \bar{c}(\sigma,q)$$

dur.

İspat. $(x_k)\in W(\sigma,M,p,q)$ olsun. O halde $j\to\infty$ için n ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\to 0$$

olacak şekilde bir $\rho>0$ sayısı mevcuttur. Verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} &= \frac{1}{j}\sum_{\substack{k=1\\ q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq\varepsilon}}^{j}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\\
&\quad+\frac{1}{j}\sum_{\substack{k=1\\ q(x_{\sigma^k(n)}-L)<\varepsilon}}^{j}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\\
&\geq\frac{1}{j}\sum_{\substack{k=1\\ q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq\varepsilon}}^{j}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\\
&\geq\frac{1}{j}\sum_{\substack{k=1\\ q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq\varepsilon}}^{j}\left[M\left(\varepsilon_1\right)\right]^{p_k}\ ,\ \frac{\varepsilon}{\rho}=\varepsilon_1\\
&\geq\frac{1}{j}\sum_{\substack{k=1\\ q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq\varepsilon}}^{j}\min\left\{\left[M\left(\varepsilon_1\right)\right]^{\inf p_k},\left[M\left(\varepsilon_1\right)\right]^{\sup p_k}\right\}\\
&\geq\frac{1}{j}\left|\left\{k\leq j: q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq\varepsilon\right\}\right|.\min\left\{\left[M\left(\varepsilon_1\right)\right]^{\inf p_k},\left[M\left(\varepsilon_1\right)\right]^{\sup p_k}\right\}
\end{aligned}$$

olur. Böylece $(x_k)\in\overline{c}(\sigma,q)$ elde edilir.

Teorem 2.2.9. M bir Orlicz fonksiyonu ve $0<\inf p_k\leq p_k\leq\sup p_k<\infty$ olsun. Bu takdirde,

$$\overline{c}(\sigma,q)\cap l_\infty(\sigma,q)=W(\sigma,M,p,q)\cap l_\infty(\sigma,q)$$

dur.

İspat. Teorem 2.2.8. den, yalnızca $\bar{c}(\sigma,q)\cap l_\infty(\sigma,q)\subseteq W(\sigma,M,p,q)\cap l_\infty(\sigma,q)$ kapsamasının varlığını göstermek yeterlidir. $(x_k)\in \bar{c}(\sigma,q)\cap l_\infty(\sigma,q)$ olsun. $(x_k)\in l_\infty(\sigma,q)$ olduğundan her $k,n\in\mathbb{N}$ için $q(x_{\sigma^k(n)}-L)\leq K$ olacak şekilde pozitif bir K sayısı mevcuttur. O halde her bir $j\in\mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} &= \frac{1}{j}\sum_{\substack{k=1\\ q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq\varepsilon}}^{j}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\\
&+\frac{1}{j}\sum_{\substack{k=1\\ q(x_{\sigma^k(n)}-L)<\varepsilon}}^{j}\left[M\left(q\left(\frac{x_{\sigma^k(n)}-L}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\\
&\leq\frac{1}{j}\sum_{\substack{k=1\\ q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq\varepsilon}}^{j}\max\left\{\left[M\left(\frac{K}{\rho}\right)\right]^{\inf p_k},\left[M\left(\frac{K}{\rho}\right)\right]^{\sup p_k}\right\}\\
&+\frac{1}{j}\sum_{\substack{k=1\\ q(x_{\sigma^k(n)}-L)<\varepsilon}}^{j}\left[M\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)\right]^{p_k}\\
&\leq\max\left\{\left[M(T)\right]^{\inf p_k},\left[M(T)\right]^{\sup p_k}\right\}.\frac{1}{j}\left|\left\{k\leq j: q(x_{\sigma^k(n)}-L)\geq\varepsilon\right\}\right|\\
&+\max\left\{\left[M(\varepsilon_1)\right]^{\inf p_k},\left[M(\varepsilon_1)\right]^{\sup p_k}\right\},
\end{aligned}
$$

olur ($\frac{K}{\rho}=T,\frac{\varepsilon}{\rho}=\varepsilon_1$). $(x_k)\in\bar{c}(\sigma,q)$ olduğundan $(x_k)\in W(\sigma,M,p,q)\cap l_\infty(\sigma,q)$ elde edilir.

BÖLÜM 3. İSTATİSTİKSEL ASİMPTOTİK DENK DİZİLER

Asimptotik denk dizi ve asimptotik regüler matris tanımları Pobyvanets [26] tarafından verildi. Marouf [21] tarafından asimptotik denk diziler arasındaki ilişki ve bu denklik ile ilgili diziden diziye matris dönüşümleri incelendi. Pobyvanets [26] in tanımlarına benzer olarak *L* çarpanlı istatistiksel asimptotik denk dizi ve istatistiksel asimptotik regüler matris tanımları Patterson [24] tarafından verildi. Ayrıca, asimptotik denk diziler, Savaş ve Başarır [31], Patterson ve Savaş [25], [32] tarafından da çalışılmıştır.

3.1. Δ - Lacunary İstatistiksel Asimptotik Denk Diziler

Bu bölümde, önce Δ-asimptotik denklik tanımı verilerek, daha sonra lacunary istatistiksel asimptotik denklik kavramı fark dizisiyle birlikte düşünülüp yeni asimptotik denklik tanımları verilmiştir. Bu tanımlara ilave olarak bazı kapsama bağıntıları da ispatlanmıştır. Bu tanımları vermeden önce, asimptotik denklikle ilgili yapılan çalışmalarda elde edilen tanımlar aşağıdaki gibidir:

Tanım 3.1.1. [21] $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ pozitif iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_k \frac{x_k}{y_k}=1$$

ise *x* ve *y* dizilerine asimptotik denk diziler denir ve $x \sim y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.2. [24] $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ pozitif iki dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

oluyorsa x ve y dizilerine L çarpanlı istatistiksel asimptotik denk diziler denir ve $x\overset{S^L}{\sim}y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.3. [25] θ bir lacunary dizisi ve $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ pozitif iki dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise x ve y dizilerine L çarpanlı S_θ-asimptotik denktir denir ve $x\overset{S_\theta^L}{\sim}y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.4. [2] Her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:\left|\Delta x_k-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına Δ-istatistiksel yakınsaktır denir. Δ-istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S(\Delta)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. [11] θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|\Delta x_k-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına Δ-lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve Δ-lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\theta(\Delta)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6. [11] $x=(x_k)$ herhangi bir dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta x_k - L\right)=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına Δ-Cesaro toplanabilirdir denir ve Δ-Cesaro toplanabilir dizilerin kümesi $(\sigma_1)(\Delta)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.7. [11] $x=(x_k)$ herhangi bir dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta x_k - L\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli Δ-Cesaro toplanabilirdir denir ve kuvvetli Δ-Cesaro toplanabilir dizilerin kümesi $|\sigma_1|(\Delta)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.8. [11] θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\Delta x_k - L\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli Δ-lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli Δ-lacunary yakınsak dizilerin kümesi $N_\theta(\Delta)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.9. [11] $x=(x_k)$ herhangi bir dizi olmak üzere, eğer m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta x_{k+m} - L\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli Δ-hemen hemen yakınsaktır denir ve kuvvetli Δ-hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi $|AC|(\Delta)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımlardan yola çıkarak aşağıdaki yeni tanımlar elde edildi.

Tanım 3.1.10. $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ pozitif iki dizi ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\Delta y_k \neq 0$ olsun. Eğer,

$$\lim_k \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}=1$$

ise x ve y dizilerine Δ-asimptotik denk diziler denir ve $x \overset{\Delta}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.11. $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ pozitif iki dizi ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\Delta y_k \neq 0$ olsun. Eğer, her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

oluyorsa x ve y dizilerine L çarpanlı Δ-istatistiksel asimptotik denk diziler denir ve $x \overset{S^L(\Delta)}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

E herhangi bir dizi uzayı olmak üzere, $E\subset \Delta E$ kapsamasının doğru olduğu kolayca görülür. Fakat bu kapsamanın tersi her zaman doğru değildir. Benzer ilişki, [24] de tanımlanan S^L-asimptotik denklik ve Tanım 3.1.11 de verilen Δ-istatistiksel asimptotik denklik arasında da verilebilir. Yani, $x \overset{S^L}{\sim} y$ ise $x \overset{S^L(\Delta)}{\sim} y$ dir. Fakat bu bağıntının da tersi her zaman doğru olmayabilir. $(x_k)=(k)$ ve α bir sabit olmak üzere $(y_k)=(\alpha-(k-1))$ alınırsa $x \overset{S^L(\Delta)}{\sim} y$ fakat $x \overset{S^L}{\nsim} y$ olur.

Tanım 3.1.12. θ bir lacunary dizisi ve $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ pozitif iki dizi ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\Delta y_k \neq 0$ olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise x ve y dizilerine L çarpanlı Δ-lacunary istatistiksel asimptotik denktir denir ve $x \overset{S_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.13. θ bir lacunary dizisi ve $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ pozitif iki dizi ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\Delta y_k \neq 0$ olsun. Eğer,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|=0$$

ise x ve y dizilerine L çarpanlı kuvvetli Δ-lacunary asimptotik denktir denir ve $x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.14. $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ pozitif iki dizi ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\Delta y_k \neq 0$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right)=0$$

ise x ve y dizilerine L çarpanlı Δ-Cesaro asimptotik denktir denir ve $x \overset{(\sigma_1)^L(\Delta)}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.15. $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ pozitif iki dizi ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\Delta y_k \neq 0$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|=0$$

ise x ve y dizilerine L çarpanlı kuvvetli Δ-Cesaro asimptotik denktir denir ve $x \overset{|\sigma_1|^L(\Delta)}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.16. $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ pozitif iki dizi ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\Delta y_k\neq 0$ olsun. Eğer *m* ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\Delta x_{k+m}}{\Delta y_{k+m}}-L\right|=0$$

ise *x* ve *y* dizilerine L çarpanlı kuvvetli Δ-hemen hemen asimptotik denktir denir ve $x \overset{|AC|^L(\Delta)}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Şimdi yukarıda tanımlanan asimptotik denklik kavramları arasındaki ilişkileri veren teoremleri verelim.

Teorem 3.1.1. x ve y, Δ-sınırlı iki dizi olsun. Eğer x ve y dizileri L çarpanlı Δ-istatistiksel asimptotik denk ise L çarpanlı Δ-Cesaro asimptotik denktir.

İspat. $x,y\in l_\infty(\Delta)$ ve $x \overset{S^L(\Delta)}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde hemen hemen her *k* için,

$$\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|\leq M$$

olacak şekilde bir *M* pozitif sayısı vardır. $\varepsilon>0$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right)\right|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|=\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\ \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|\geq\varepsilon}}^{n}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|+\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\ \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|<\varepsilon}}^{n}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|$$

$$< \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| + \frac{1}{n} n\varepsilon$$

dir. Böylece $x \overset{|\sigma_1|^L(\Delta)}{\sim} y$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.2. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olmak üzere $\liminf q_r > 1$ olsun. Bu takdirde,

$$x \overset{S^L(\Delta)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{S^L_\theta(\Delta)}{\sim} y$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki $x \overset{S^L(\Delta)}{\sim} y$ ve $\liminf q_r > 1$ olsun. Bu takdirde yeterince büyük r ler için $q_r \ge 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$\frac{h_r}{k_r} \ge \frac{\delta}{1+\delta}$$

olduğu görülür. Ayrıca $x \overset{S^L(\Delta)}{\sim} y$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r ler için

$$\frac{1}{k_r}\left|\left\{k \le k_r : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \ge \frac{1}{k_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

$$\ge \frac{\delta}{1+\delta}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

elde dilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.3. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olmak üzere $\limsup q_r < \infty$ olsun. Bu takdirde,

$$x \overset{S_\theta^L(\Delta)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{S^L(\Delta)}{\sim} y$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki $\limsup q_r < \infty$ olsun. Bu takdirde, her $r \in \mathbb{N}$ için $q_r < B$ olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı mevcuttur. $x \overset{S_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$ ve $\varepsilon_1 > 0$ olsun. Her $j \geq R$ için

$$A_j = \frac{1}{h_j}\left|\left\{k \in I_j : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| < \varepsilon_1$$

olacak şekilde $R > 0$ ve $\varepsilon > 0$ sayıları vardır.

Ayrıca, her $j = 1, 2, \ldots$ için $A_j < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı bulunabilir. Şimdi $r > R$ için $k_{r-1} < n < k_r$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısını alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| &\leq \frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{k \leq k_r : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq \frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{k \in I_1 : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\quad + \frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{k \in I_2 : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\quad + \ldots + \frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{k_1}{k_{r-1}k_1}\left|\left\{k \in I_1 : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\quad + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}(k_2 - k_1)}\left|\left\{k \in I_2 : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|
\end{aligned}$$

$$+\ldots+\frac{k_R-k_{R-1}}{k_{r-1}(k_R-k_{R-1})}\left|\left\{k\in I_R:\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$+\ldots+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}(k_r-k_{r-1})}\left|\left\{k\in I_r:\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\frac{k_1}{k_{r-1}}A_1+\frac{k_2-k_1}{k_{r-1}}A_2$$

$$+\ldots+\frac{k_R-k_{R-1}}{k_{r-1}}A_R+\frac{k_{R+1}-k_R}{k_{r-1}}A_{R+1}$$

$$+\ldots+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}A_r$$

$$\leq\left\{\sup_{j\geq 1}A_j\right\}\frac{k_R}{k_{r-1}}+\left\{\sup_{j\geq R}A_j\right\}\frac{k_r-k_R}{k_{r-1}}$$

$$\leq K\frac{k_R}{k_{r-1}}+\varepsilon_1 B$$

olur. $r\to\infty$ için $k_r\to\infty$ olduğundan $\frac{k_R}{k_{r-1}}\to 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.1. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi olmak üzere $1<\liminf q_r\leq\limsup q_r<\infty$ olsun. Bu takdirde,

$$x\overset{S_\theta^L(\Delta)}{\sim}y\Leftrightarrow x\overset{S^L(\Delta)}{\sim}y$$

dir.

İspat. Teorem 3.1.2. ve Teorem 3.1.3. den açıkça görülür.

Teorem 3.1.4. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde,

i) $x\overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim}y\Rightarrow x\overset{S_\theta^L(\Delta)}{\sim}y$,

ii) x ve y, Δ-sınırlı diziler olmak üzere $x\overset{S_\theta^L(\Delta)}{\sim}y\Rightarrow x\overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim}y$,

iii) $\left\{ x \overset{S_\theta^L(\Delta)}{\sim} y \right\} \cap l_\infty(\Delta) = \left\{ x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y \right\} \cap l_\infty(\Delta)$

dır.

İspat. i) $x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k \in I_r} \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L \right| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L \right| \geq \varepsilon}} \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L \right| \geq \varepsilon \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olur. Böylece $x \overset{S_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$ elde edilir.

ii) $x, y \in l_\infty(\Delta)$ ve $x \overset{S_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde hemen hemen her *k* için

$$\left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L \right| \leq M$$

olacak şekilde bir *M* pozitif sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L \right| &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L \right| \geq \varepsilon}} \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L \right| + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L \right| < \varepsilon}} \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L \right| \\ &\leq \frac{M}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon \end{aligned}$$

dur. Böylece $x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$ olduğu görülür.

iii) İspat i) ve ii) den görülür.

Uyarı 3.1.1. Teorem 3.1.4. (i) nin tersi her zaman doğru değildir. Şimdi bununla ilgili örneği verelim.

Örnek 3.1.1. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olmak üzere L=1 alalım. $x = (x_n)$ dizisini, $[\sqrt{h_r}]$, $\sqrt{h_r}$ sayısından büyük olmayan tamsayıların en büyüğünü göstermek üzere,

$$x_n = \begin{cases} k_{r-1} - (n-1) + [\sqrt{h_r}], & n = 1, 2, \ldots, k_{r-1} \\ [\sqrt{h_r}] - \dfrac{(i-1)i}{2}, & n = k_{r-1} + i,\ i = 1, 2, \ldots, [\sqrt{h_r}] \\ [\sqrt{h_r}] - \dfrac{[\sqrt{h_r}]([\sqrt{h_r}]+1)}{2} - (i-1), & n = k_{r-1} + i,\ \text{i}= [\sqrt{h_r}]+1, \ldots, k_r, \ldots \end{cases}$$

ve

$y = (y_n)$ dizisini de α bir sabit olmak üzere $(y_n) = (\alpha - (n-1))$ şeklinde tanımlayalım. O halde, Δx_n ve Δy_n dizileri sırasıyla

$$\Delta x_n = \begin{cases} i, & n = k_{r-1} + i,\ i = 1, 2, \ldots, [\sqrt{h_r}] \\ 1, & \text{diğer} \end{cases}$$

ve Δy_n=1 olarak elde edilir. Dikkat edersek x dizisi Δ-sınırlı değildir. Ayrıca $\varepsilon > 0$ olmak üzere $r \to \infty$ için

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r} \to 0$$

dır. Yani $x \overset{S_\theta(\Delta)}{\sim} y$ dır. Diğer yandan $r \to \infty$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - 1\right| = \frac{1}{h_r}\frac{[\sqrt{h_r}]([\sqrt{h_r}]-1)}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

olduğundan $x \overset{N_\theta(\Delta)}{\nsim} y$ dır.

Teorem 3.1.5. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olmak üzere

$$x \overset{|AC|^L(\Delta)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$$

dır.

İspat. Kabul edelim ki $x \overset{|AC|^L(\Delta)}{\sim} y$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde, $n \geq n_0$ ve $m = 0,1,2,\ldots$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}\left|\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} - L\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. θ bir lacunary dizisi olduğundan $r \geq R$ için $h_r > n_0$ olacak şekilde bir $R > 0$ sayısı seçilebilir. Sonuç olarak,

$$\tau_r = \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} - L\right| < \varepsilon$$

dur. Böylece $x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$ elde edilir.

Örnek 3.1.2. Teorem 3.1.5. in tersinin her zaman doğru olmadığını göstermek için $x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$ olup $x \overset{|AC|^L(\Delta)}{\sim} y$ olmayan yani $x \overset{|AC|^L(\Delta)}{\nsim} y$ olan x ve y dizilerini araştıralım.

$\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olmak üzere L=1 alalım. $x = (x_n)$ dizisini, $[\sqrt{h_r}\,]$, $\sqrt{h_r}$ sayısından büyük olmayan tamsayıların en büyüğünü göstermek üzere,

$$x_n = \begin{cases} \alpha-(n-1), & n=1,2,\ldots,k_{r-1}+1 \\ \alpha-(n+i-2), & n=k_{r-1}+i,\ i=2,\ldots,[\sqrt{h_r}\,]+1 \\ \alpha-(n+[\sqrt{h_r}\,]-1), & n=k_{r-1}+i,\ i=[\sqrt{h_r}\,]+2,\ldots,k_r,\ldots \end{cases}$$

ve

$y=(y_n)$ dizisini de α bir sabit olmak üzere $(y_n)=(\alpha-(n-1))$ şeklinde tanımlayalım. O halde, Δx_n ve Δy_n dizileri sırasıyla

$$\Delta x_n = \begin{cases} 2, & n=k_{r-1}+i,\ i=1,2,\ldots,[\sqrt{h_r}\,] \\ 1, & \text{diğer} \end{cases}$$

ve Δy_n =1 olarak elde edilir. Ayrıca $r\to\infty$ içi

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-1\right| = \frac{1}{h_r}[\sqrt{h_r}\,]\to 0$$

dır. Yani $x \overset{N_\theta(\Delta)}{\sim} y$ dır. Diğer yandan $r\to\infty$ için i ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}\left|\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}-1\right| \not\to 0$$

olduğundan $x \overset{|AC|(\Delta)}{\nsim} y$ dır.

Teorem 3.1.6. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi olmak üzere

i) $\liminf q_r > 1$ ise $x \overset{|\sigma_1|^L(\Delta)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$,

ii) $\limsup q_r < \infty$ ise $x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{|\sigma_1|^L(\Delta)}{\sim} y$,

iii) $1 < \liminf q_r \le \limsup q_r < \infty$ ise $x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{|\sigma_1|^L(\Delta)}{\sim} y$

dır.

İspat. i) Kabul edelim ki $\liminf q_r > 1$ olsun. Bu takdirde yeterince büyük r ler için $q_r \geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$$

olduğu görülür. O halde

$$\frac{1}{k_r}\sum_{k=1}^{k_r}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right| \geq \frac{1}{k_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right| \geq \frac{h_r}{k_r}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|$$
$$\geq \frac{\delta}{1+\delta}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|$$

elde edilir. Bu son ifadeden $x \overset{|\sigma_1|^L(\Delta)}{\sim} y$ iken $x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$ olduğu görülür.

ii) Eğer $\limsup q_r < \infty$ ise, her $r \in \mathbb{N}$ için $q_r < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur. $x \overset{N_\theta^L(\Delta)}{\sim} y$, $\varepsilon > 0$ ve $\tau_i = \frac{1}{h_i}\sum_{k\in I_i}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-L\right|$ olsun. $\sup_{i\geq R}\tau_i < \varepsilon$ ve her $i = 1,2,\ldots$ için $\tau_i < K$ olacak şekilde $R > 0$ ve $K > 0$ sayıları vardır. Bu takdirde, eğer $r > R$ için $k_{r-1} < t \leq k_r$ olacak şekilde bir t pozitif tamsayısı alınırsa

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}\left|\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}-L\right| \leq \frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_r}\left|\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}-L\right| = \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sum_{i\in I_1}\left|\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}-L\right| + \sum_{i\in I_2}\left|\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}-L\right| + \ldots + \sum_{i\in I_r}\left|\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}-L\right|\right)$$
$$\leq \frac{k_1}{k_{r-1}}\tau_1 + \frac{k_2-k_1}{k_{r-1}}\tau_2$$
$$+\ldots+\frac{k_R-k_{R-1}}{k_{r-1}}\tau_R + \frac{k_{R+1}-k_R}{k_{r-1}}\tau_{R+1}$$
$$+\ldots+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}\tau_r$$

$$\leq \left\{\sup_{i\geq 1}\tau_i\right\}\frac{k_R}{k_{r-1}}+\left\{\sup_{i\geq R}\tau_i\right\}\frac{k_r-k_R}{k_{r-1}}$$

$$\leq K\frac{k_R}{k_{r-1}}+\varepsilon M$$

elde edilir. $t\to\infty$ için $k_{r-1}\to\infty$ olduğundan $\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}\left|\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}-L\right|\to 0$ dır. Sonuç olarak $x\overset{|\sigma_1|^L(\Delta)}{\sim}y$ elde edilir.

iii) i ve ii den açıkça görülür.

3.2. $[w]_{\sigma,\theta}^{L}$-İstatistiksel Asimptotik Denk Diziler

Bu bölümde, önce $[w]_\sigma$-asimptotik denklik tanımı verilmiş, daha sonra $t_{km}(x)=\dfrac{x_m+x_{\sigma(m)}+\ldots+x_{\sigma^k(m)}}{k+1}$ ortalama dizisi, lacunary istatistiksel asimptotik denklik kavramıyla birlikte düşünülüp $st-[w]_{\sigma,\theta}^{L}$-asimptotik denklik tanımı verilmiştir. Bu tanımlara ilave olarak bazı kapsama bağıntıları da elde edilmiştir. Bu tanımları vermeden önce, asimptotik denklikle ilgili yapılan çalışmalarda elde edilen tanımlar aşağıdaki gibidir:

Tanım 3.2.1. [13] θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için *m* ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|t_{km}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına $[w]_{\sigma,\theta}$-istatistiksel yakınsaktır denir ve $st-[w]_{\sigma,\theta}-\lim x=L$ veya $x_k\to L\left(st-[w]_{\sigma,\theta}\right)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.2. [13] θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer *m* ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|t_{km}(x)-L\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına $[w]_{\sigma,\theta}$-yakınsaktır denir ve $[w]_{\sigma,\theta}-\lim x=L$ veya $x_k\to L\left([w]_{\sigma,\theta}\right)$ şeklinde yazılır. $[w]_{\sigma,\theta}$-yakınsak dizilerin kümesi $[w]_{\sigma,\theta}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.3. [33] θ bir lacunary dizisi ve $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ pozitif iki dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için *m* ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise x ve y dizilerine L çarpanlı $S_{\sigma,\theta}$-asimptotik denktir denir ve $x\overset{S^L_{\sigma,\theta}}{\sim}y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.4. [33] θ bir lacunary dizisi ve $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ pozitif iki dizi olsun. Eğer *m* ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|=0$$

ise x ve y dizilerine L çarpanlı kuvvetli σ-lacunary asimptotik denktir denir ve $x\overset{N^L_{\sigma,\theta}}{\sim}y$ şeklinde gösterilir.

Yukarıda verilen tanımlardan yola çıkarak, $[w]_\sigma$-asimptotik denklik, st-$[w]_\sigma^L$-asimptotik denklik ve $[w]_{\sigma,\theta}^L$-asimptotik denklik tanımları verilebilir.

Tanım 3.2.5. $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ pozitif iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_k \frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} = 1$$

ise *x* ve *y* dizilerine $[w]_\sigma$-asimptotik denk diziler denir ve $x \overset{[w]_\sigma}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.6. $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ pozitif iki dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa x ve y dizilerine L çarpanlı st-$[w]_\sigma^L$- asimptotik denk diziler denir ve $x \overset{st-[w]_\sigma^L}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.7. θ bir lacunary dizisi ve $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ pozitif iki dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için *m* ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise x ve *y* dizilerine L çarpanlı st-$[w]_{\sigma,\theta}^L$- asimptotik denk diziler denir ve $x \overset{st-[w]_{\sigma,\theta}^L}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.8. θ bir lacunary dizisi ve $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ pozitif iki dizi olsun. Eğer m ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)}-L\right|=0$$

ise x ve y dizilerine L çarpanlı $[w]_{\sigma,\theta}^{L}$-asimptotik denktir denir ve $x \overset{[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Şimdi yukarıda tanımlanan asimptotik denklik kavramları arasındaki ilişkileri veren teoremleri verelim.

Teorem 3.2.1. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde,

i) $x \overset{[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y \Rightarrow x \overset{st-[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y$,

ii) $x,y\in l_\infty$ olmak üzere $x \overset{st-[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y \Rightarrow x \overset{[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y$,

iii) $\left\{x \overset{st-[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y\right\}\cap l_\infty = \left\{x \overset{[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y\right\}\cap l_\infty$

dur.

İspat. i) $x \overset{[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y$ olmak üzere $\varepsilon>0$ için

$$\sum_{k\in I_r}\left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)}-L\right| \geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)}-L\right|\geq\varepsilon}}\left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)}-L\right| \geq \varepsilon\left|\left\{k\in I_r : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

olur. Böylece $x \overset{st-[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y$ elde edilir.

ii) Kabul edelim ki $x, y \in l_\infty$ ve $x \overset{st-[w]_{\sigma,\theta}^L}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde hemen hemen her *k* ve her *m* için

$$\left| \frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L \right| \leq M$$

olacak şekilde bir *M* pozitif sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L \right| = \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \left| \frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L \right| \geq \varepsilon}} \left| \frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L \right| + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \left| \frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L \right| < \varepsilon}} \left| \frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L \right|$$

$$\leq \frac{M}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon$$

dur. Böylece $x \overset{[w]_{\sigma,\theta}^L}{\sim} y$ olduğu görülür.

iii) İspat i ve ii den görülür.

Teorem 3.2.1. in tersinin her zaman doğru olmadığını göstermek için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.2.1. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olmak üzere *L*=1 alalım. $x = (x_i)$ dizisini, $[\sqrt{h_r}]$, $\sqrt{h_r}$ sayısından büyük olmayan tamsayıların en büyüğünü göstermek üzere,

$$x_i = \begin{cases} 1, & \begin{array}{l} i = \sigma^k(m),\ k = 0,1,2,\ldots,k_{r-1}+1, \\ k_{r-1}+[\sqrt{h_r}]+2, k_{r-1}+[\sqrt{h_r}]+4, k_{r-1} \\ +[\sqrt{h_r}]+5,\ldots \end{array} \\ k_{r-1}+2n, & i = \sigma^k(m),\ k = k_{r-1}+n,\ n = 2,3,\ldots,[\sqrt{h_r}] \\ k_{r-1}-[\sqrt{h_r}]k_{r-1}-[\sqrt{h_r}]^2+2 & i = \sigma^k(m),\ k = k_{r-1}+\ [\sqrt{h_r}]+1 \\ 3 & i = \sigma^k(m),\ k = k_{r-1}+\ [\sqrt{h_r}]+3 \end{cases}$$

ve

$y=(y_n)$ dizisini de her $k\in\mathbb{N}$ için $y_k=1$ şeklinde tanımlayalım. Dikkat edersek x dizisi sınırlı değildir. $m\geq 1$ olmak üzere,

$$t_{km}(x)=\begin{cases} i, & k=k_{r-1}+i,\ i=1,2,\ldots,[\sqrt{h_r}\,] \\ 1, & \text{diğer} \end{cases}$$

ve her k ve m için $t_{km}(y)=1$ olarak elde edilir. Ayrıca $\varepsilon>0$ olmak üzere $r\to\infty$ için

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)}-1\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=\frac{[\sqrt{h_r}\,]}{h_r}\to 0$$

dır. Yani $x\overset{st-[w]_{\sigma,\theta}}{\sim}y$ dır. Diğer yandan $r\to\infty$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}-1\right|=\frac{1}{h_r}\frac{[\sqrt{h_r}\,]([\sqrt{h_r}\,]-1)}{2}\to\frac{1}{2}\neq 0$$

olduğundan $x\overset{[w]_{\sigma,\theta}}{\nsim}y$ dır.

Lemma 3.2.1. $\varepsilon_1>0$ olmak üzere her $\varepsilon>0$ ve $n\geq n_0$, $m\geq m_0$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{0\leq k\leq n-1:\left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|<\varepsilon_1$$

olacak şekilde m_0 ve n_0 sayıları mevcut olsun. Bu takdirde $x\overset{st-[w]_{\sigma}^{L}}{\sim}y$ dir.

İspat. $\varepsilon_1>0$ verilsin. Her $\varepsilon>0$, $n\geq n_0'$ ve $m\geq m_0'$ için,

$$\frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le n-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| < \frac{\varepsilon_1}{2} \tag{3.2.1.}$$

olacak şekilde n_0' ve m_0' mevcut olsun. İspatı tamamlamak için $n \ge n_0''$ ve $0 \le m \le m_0'$ olduğunda

$$\frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le n-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| < \varepsilon_1 \tag{3.2.2.}$$

olacak şekilde n_0'' nün varlığını göstermek yeterli olacaktır. O zaman $n_0 = \max\left(n_0', n_0''\right)$ alınarak her m ve $n \ge n_0$ için (3.2.2.) sağlanacağından istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Bunun için m_0 sabit olmak üzere,

$$\frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le m_0 - 1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = M$$

olsun. $0 \le m \le m_0'$, $n \ge m_0$ ve (3.2.1.) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le n-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| &= \frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le m_0 - 1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&\quad + \frac{1}{n}\left|\left\{m_0 \le k \le n-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{M}{n} + \frac{1}{n}\left|\left\{m_0 \le k \le n-1 : \left|\frac{t_{km_0}(x)}{t_{km_0}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&< \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon_1}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. n yeterince büyük alınarak

$$\frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le n-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| < \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1$$

yapılabilir. Bu da (3.2.2.) yi verir ki istenilen sonuç da budur.

Teorem 3.2.2. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olmak üzere

$$x \overset{st-[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{st-[w]_{\sigma}^{L}}{\sim} y$$

dir.

İspat. $x \overset{st-[w]_{\sigma,\theta}^{L}}{\sim} y$ olsun. $\varepsilon_1 > 0$ olmak üzere Tanım 3.2.8. den $r \ge r_0$ ve $m = k_{r-1} + 1 + u$, $u \ge 0$ için

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| < \varepsilon_1$$

olacak şekilde r_0 ve L sayısı vardır. $n \ge h_r$ olsun. i bir tamsayı ve $0 \le t \le h_r$ olmak üzere $n = ih_r + t$ alalım. Bu takdirde, $i \ge 1$ ve $n \ge h_r$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le n-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| &\le \frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le (i+1)h_r - 1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{i}\left|\left\{jh_r \le k \le (j+1)h_r - 1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\ &< \frac{(i+1)h_r}{n}\varepsilon_1 < \frac{2ih_r\varepsilon_1}{n}\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{h_r}{n} \le 1$ için $\frac{ih_r}{n} \le 1$ olduğundan

$$\frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le n-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| < 2\varepsilon_1$$

olur. Lemma 3.2.1. den $x \overset{st-[w]^L_{\sigma,\theta}}{\sim} y \Rightarrow x \overset{st-[w]^L_{\sigma}}{\sim} y$ elde edilir.

Şimdi $x \overset{st-[w]^L_{\sigma}}{\sim} y \Rightarrow x \overset{st-[w]^L_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ olduğunu gösterelim. $x \overset{st-[w]^L_{\sigma}}{\sim} y$ olsun. Tanım 3.2.7. den $\varepsilon_1 > 0$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le n-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| < \varepsilon_1 \qquad (3.2.3.)$$

dir. $n \ge h_r$ olsun. $0 \le t \le h_r$ ve i bir tamsayı olmak üzere $n = ih_r + t$ alalım. $n \ge ih_r$ ve $n \le (i+1)h_r$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le n-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| &\ge \frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le ih_r-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&\ge \frac{1}{(i+1)h_r}\left|\left\{0 \le k \le ih_r-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&\ge \frac{1}{2ih_r}\left|\left\{0 \le k \le ih_r-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{1}{2ih_r}\sum_{j=0}^{i}\left|\left\{(j-1)h_r \le k \le jh_r-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&\ge \frac{1}{2h_r}\left|\left\{0 \le k \le h_r-1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|
\end{aligned}$$

olur. (3.2.3.) den

$$\frac{1}{2h_r}\left|\left\{0 \le k \le h_r - 1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \le \frac{1}{n}\left|\left\{0 \le k \le n - 1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| < \varepsilon_1$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{0 \le k \le h_r - 1 : \left|\frac{t_{km}(x)}{t_{km}(y)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| < 2\varepsilon_1$$

elde edilir. Dolayısıyla $x \overset{st-[w]_\sigma^L}{\sim} y \Rightarrow x \overset{st-[w]_{\sigma,\theta}^L}{\sim} y$ olduğu gösterilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, tezde elde edilen önceki bölümlerdeki orijinal sonuçlar özetlenecektir. Bunlar, matematiğe yeni tanımlarla katkı sağlayan ve bir boşluğu dolduran kavramlardır. Tezdeki ikinci ve üçüncü bölümler orijinal çalışmaları bulundurmaktadır.

Bölüm 2 de Tripathy ve Sen tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsak dizi uzayları invaryant limit ve Orlicz fonksiyonu kullanılarak $\bar{c}(\sigma, M, p, q, s)$, $\bar{c}_0(\sigma, M, p, q, s)$, $m(\sigma, M, p, q, s)$ ve $m_0(\sigma, M, p, q, s)$ uzaylarına genelleştirilmiş ve bu uzayların birer lineer uzay oldukları gösterilmiştir. Ayrıca $m(\sigma, M, p, q, s)$ ve $m_0(\sigma, M, p, q, s)$ uzayları birer paranormlu uzay oldukları da ispatlanmıştır. (X, q) tam yarınormlu uzay olmak üzere $m(\sigma, M, p, q, s)$ ve $m_0(\sigma, M, p, q, s)$ uzayları aynı zamanda tam uzaylardır. Bununla birlikte, tanımlanan uzaylar arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiştir.

Bölüm 3 ün ilk kısmında önce Δ-asimptotik denklik tanımı verilmiş, daha sonra lacunary istatistiksel asimptotik denklik kavramı fark dizisiyle birlikte düşünülüp yeni asimptotik denklik tanımları verilmiştir. Bu tanımlara ilave olarak bazı kapsama bağıntıları da ispatlanmıştır. İkinci kısmında ise önce $[w]_\sigma$-asimptotik denklik tanımı verilmiş, daha sonra $t_{km}(x)$ ortalama dizisi, lacunary istatistiksel asimptotik denklik kavramıyla birlikte düşünülüp $st-[w]_{\sigma,\theta}^{L}$-asimptotik denklik tanımı verilmiştir ve bazı kapsama bağıntıları da elde edilmiştir.

Bu çalışmaların devamında istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan *I*-yakınsaklık (ideal yakınsaklık) kavramı kullanılarak daha genel sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] BANACH, S., Theorie Des Operations Lineraies, Chelsea, New York, 1932.

[2] BAŞARIR, M., On the $\Delta -$Statistical Convergence of Sequences, Fırat Univ. J. of Sci., 2, 1-6, 1995.

[3] CONNOR, J.S., Some Applications of Functional Analysis to Summability Theory, Ph. D., Kent State University, 1985.

[4] FAST, H., Sur la Convergence Statistique, Colloq. Math., 2, 241-244, 1951.

[5] FREEDMAN, A.R., SEMBER, J.J., RAPHAEL, M., Some Cesaro Type Summability Spaces. Proc. London Math. Soc. 37, 508-520,1978.

[6] FRIDY, J.A., On Statistical Convergence, Analysis, 5, 301-313, 1985.

[7] FRIDY, J.A., MILLER, H.I., A Matrix Characterization of Statistical Convergence, Analysis, 11, 59-66, 1991.

[8] FRIDY, J.A., ORHAN, C., Lacunary Statistical Summability, J. Math. Anal. Appl., 173, 497-504, 1993.

[9] FRIDY, J.A., ORHAN, C., Lacunary Statistical Convergence, Pacific J. Math., 160, 43-51, 1993.

[10] GHOSH, D., SRIVASTAVA, P.D., On Some Vector Valued Sequence Spaces Using Orlicz Functions, Glasnik Matematicki, 34 (2), 819-826, 1999.

[11] GÜNGÖR, M., ALTIN, Y., ET, M., On $\Delta -$Lacunary Statistical Convergence, Fırat Univ. J. of Sci., 14, 167-173, 2002.

[12] KAMPTHAN, P.K., GUPTA, M., Sequence Spaces and Series, Marcel Dekkar, 1980.

[13] KARAKAYA, V., Some New Sequence Spaces Defined by a Sequence of Orlicz Functions, Taiwanese Jour. of Math., 9 (4), 617-627, 2005.

[14] KOLK, E., The Statistical Convergence in Banach spaces, Acta et Comment. Univ. Tartuensis, 928, 41-52, 1991.

[15] KOLK, E., Inclusion Relations Between the Statistical Convergence and Strong Summability, Acta et Comment. Univ. Tartuensis, 12, 39-54, 1998.

[16] KRASNOSELSKII, M.A., RUTICKII, Y.B., Convex Functions and Orlicz Spaces, Nordhoff, Ltd., Groningen, Netherlands, 1961.

[17] LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L., On Orlicz Sequence Spaces. Israel J. Math. 10 (3), 379-390, 1971.

[18] LORENTZ, G.G., A Contribution to the Theory of Divergent Sequences, Acta Math., 80, 345-355, 1948.

[19] MADDOX, I.J., Spaces of Strongly Summable Sequences, Quart. J. Math., 18, 345-355, 1967.

[20] MADDOX, I.J., Elements of Functional Analysis, Camb. Univ. Pres, 1970.

[21] MAROUF, M., Asymptotic Equivalence and Summability, Int. J. Math. Sci., 16 (4), 755-762, 1993.

[22] NIVEN, I., ZUCKERMAN, H.S., An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley, New York, 1980.

[23] PARASHAR, S.D., CHOUDRY, B.,. Sequence Spaces Defined By Orlicz Functions, Indian J.Pure Appl. Math. 25 (4), 419-428, 1994.

[24] PATTERSON, R.F., On Asymptotically Statistically Equivalent Sequences, Demonstratio Math., 36 (1), 149-153, 2003.

[25] PATTERSON, R.F., SAVAŞ E., On Asymptotically Lacunary Statistical Equivalent Sequences, Thai J. of Math., 4 (2), 267-272, 2006.

[26] POBYVANETS, I.P., Asymptotic Equivalence of Some Linear Transformation Defined by a Nonnegative Matrix and Reduced to Generalized Equivalence in the sense of Cesaro and Abel, Math. Fiz., 28, 83-87, 1980.

[27] RAO, M.M., REN, Z.D., Theory of Orlicz Spaces, Marcel Dekker, New York, 1991.

[28] RATH, D., TRIPATHY, B.C., On Statistical Convergent and Statistically Cauchy Sequences, Indian J. Pure Appl. Math., 25 (4) , 381-386, 1994.

[29] SALAT, T., On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, Math. Slovaca, 30, 139-150,1980.

[30] SAVAŞ, E., On Sequence Spaces and $\hat{S}$-convergence, Demost. Math., 33 (1), 165-170, 2000.

[31] SAVAŞ, R., BAŞARIR, M., (σ,λ)-asymptotically Statistically Equivalent Sequences, Filomat, 20 (1), 35-42, 2006.

[32] SAVAŞ, E., PATTERSON, R., An Extension Asymptotically Lacunary Statistical Equivalent Sequences, Aligarh Bull. Math., 27 (2), 109-113, 2008.

[33] SAVAŞ, E., PATTERSON, R., $\sigma-$Asymptotically Lacunary Statistically Equivalent Sequences, Centr. Euro. J. of Math., 4 (4), 648-655, 2006.

[34] SAVAŞ, E., NURAY, F., On σ-statistically Convergence and Lacunary σ-statistically Convergence, Math. Slovaca, 43 (3), 309-315, 1993.

[35] SCHAEFER, P., Infinite Matrices and Invariant Means, Proc. Amer. Math. Soc., 36 (1), 104-110, 1972.

[36] SCHOENBERG, I.J., The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, Amer. Math. Montly, 66, 361-375, 1959.

[37] STEINHAUS, H., Sur la Convergence Ordinaire et la Convergence Asymptotique, Colloq. Math. 2, 73-74, 1951.

[38] TRIPATHY, B.C., On Statistical Convergent and statistically bounded sequences, Bull. Cal. Math. Soc., 20, 31-33, 1997.

[39] TRIPATHY, B.C., On Statistical Convergence, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 47:4 , 299-303, 1998.

[40] TRIPATHY, B.C., SEN M., On Generalized Statistically Convergent Sequence Spaces, Indian J. Pure Appl. Math., 32:11, 1689-1694, 2001.

[41] TRIPATHY, B.C., ALTIN, Y., ET, M., Generalized Difference Sequence Spaces on Seminormed Spaces, Jour. Analysis Appl., 1:3, 175-192, 2003.

[42] TRIPATHY, B.C., On Generalized Difference Paranormed Statistically Convergent Sequences, Indian J. Pure Appl. Math., 35:5, 655-663, 2004.

[43] WILANSKY, A., Functional Analysis, Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.

[44] ZYGMUND, A., Trigonometric Series, Cambridge Univ. Press, 1979.

ÖZGEÇMİŞ

Selma ALTUNDAĞ, 1977 yılında Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sakarya'da tamamladı. 1997'de Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başlayıp 2001 yılında mezun oldu. 2001 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı Yüksek Lisansı Mayıs 2004 de tamamladı. 2004 yılında doktora öğrenimine başladı. Aralık 2001 yılından beri Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk annesidir.