

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MANDELBROT CÜMLESİ VE TARİHÇESİ

Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2009**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MANDELBROT CÜMLESİ VE TARİHÇESİ

Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALIHOĞLU

Matematikte en güzel ve en karmaşık şekillerden biri 1980 yılında Benoit Mandelbrot tarafından keşfedilen Mandelbrot cümlesidir. 0 in $x^2 + c$ altında sonsuza gitmeyen yörüngesindeki tüm kompleks c - değerlerinin cümlesi olan Mandelbrot cümlesi iterasyon ile oluşturulur. Her c - değeri için bir Julia cümlesi, J_f vardır ve bu cümle ya irtibatlıdır ya da bir Cantor cümlesidir. Eğer 0 in yörüngesi bir n - periyotlu çeken yörüngeye (attracting cycle) yöneliyorsa o halde her bir dekorasyon için n sayısını tomurcukların periyodu olarak belirleyebiliriz. Mandelbrot cümlesinin sınırında sonsuz çoklukta tomurcuk vardır. Ana kardiyoide tutturulmuş olan her bir temel tomurcuğu bir $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı ile bağdaştıracağız. $\frac{p}{q}$ tomurcukların rotasyon sayısıdır. Paydadaki q değeri tomurcuğun periyodu ve paydaki p değeri ise tomurcuğun neslidir. Ve nihayet Mandelbrot cümlesinin tomurcukları arasında Fibonacci dizisi vardır. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu çalışmanın kapsamı anlatılmaktadır. İkinci bölümde temel tanımlar verilmiştir. Mandelbrot cümlesinin özellikleri, sınırı, tomurcukları, tomurcuklarının periyotları, karmaşık yapısı üçüncü bölümde açıklanmakta ve sonuçlar dördüncü bölümde verilmektedir.

Şubat 2009, 97 sayfa

Anahtar Kelimeler: Mandelbrot cümlesi, iterasyon, tomurcuk, rotasyon sayısı.

ABSTRACT

Master Thesis

MANDELBROT SET AND ITS HISTORY

Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

One of the most intricate and beautiful images in all of mathematics is the Mandelbrot set, discovered by Benoit Mandelbrot in 1980. The Mandelbrot set which consists of all of those complex c - values for which the corresponding orbit of 0 under $x^2 + c$ does not escape to infinity is generated by iteration. For each c - value, there is a Julia set, J_f and it is either a connected set or a Cantor set. If the orbit of 0 tends to an attracting cycle of period n then we may assign n to each decoration as the period of the bulb. There are infinitely many bulbs on its boundary. We associate a rational number $\frac{p}{q}$ to each primary bulb which is directly attached to the main cardioid. $\frac{p}{q}$ is bulb's rotational number. The denominator q simply is the period and the nominator p is the generation of the bulb. And finally there is a Fibonacci sequence between the bulbs of Mandelbrot set. This thesis is composed of four chapters. In the first chapter, the content of the thesis are explained. In the second chapter, basic definitions are given. Properties of the Mandelbrot set, its boundary, bulbs, bulb's period, complex structure, ...are described in the third chapter and conclusions are given in the fourth chapter.

February 2009, 97 pages

Key Words: Mandelbrot set, iteration, bulb, rotation number.

TEŞEKKÜR

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapmış olduğum yüksek lisans tezimin bu alandaki kaynakların artması adına faydalı olacağını umuyorum.

Araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek fikirleriyle gelişmeye katkıda bulunan, manevi desteğini her zaman yanımda hissettiğim danışman hocam sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU' na (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) ve çalışmalarım süresince beni destekleyen aileme ve arkadaşlarıma en derin duygularla teşekkür ederim.

Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ

Ankara, Şubat 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Cantor Cümlesi	3
2.2 Altın Oran	4
2.2.1 Altın dikdörtgen ve spiraller	6
2.3 Fibonacci Sayıları ve Tavşan Problemi.....	8
2.3.1 Fibonacci dikdörtgenleri ve Fibonacci spirali	12
2.4 Kompleks Sayılar	13
2.4.1 Kutupsal gösterim	16
2.4.2 Üstel gösterim	17
2.5 Kompleks Düzlemde Bölgeler	17
2.6 İterasyon	19
2.7 İterasyon süreçlerinin Çeşitleri.....	20
2.7.1 Bir kademeli makineler	20
2.7.2 İki kademeli makineler	20
2.8 Kompleks Kuadratik Polinomlar	21
2.8.1 $f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ Kuadratik polinomun köklerinin bulunuşu	21
2.9 Kompleks Kuadratiklerin Tekrarlanması.....	24
2.10 Kompleks Dinamik Sistemler	25
2.11 Julia Cümlesi	29
2.11.1 Julia cümlesine örnekler.....	32
2.12 Farey Ağacı.....	36
3. MANDELBROT CÜMLESİ.....	38
3.1 Oluşumu ve Matematiksel Olarak Açıklanması	38

3.2 Mandelbrot Cümlesinin Kısımları	44
3.2.1 Ana kardiyoid	44
3.2.2 Ana daire.....	49
3.3 n- Periyotlu Yörünge'nin Merkezi.....	54
3.4 Mandelbrot Cümlesinin Tomurcukları	56
3.4.1 Tomurcukların periyotları	57
3.4.2 Rotasyon sayıları	63
3.4.3 Tomurcukların üzerindeki tomurcuklar	71
3.4.4 Mandelbrot cümlesinin tomurcukları arasında saklı Fibonacci dizisi	72
3.5 Misiurewicz Noktası.....	73
3.6 Mandelbrot Cümlesi ve Kendine Benzerlik.....	75
3.7 Mandelbrot Cümlesinin Derinlikleri.....	78
3.8 Mandelbrot Cümlesi ile Julia Cümlesi Arasındaki İlişki	80
3.9 Mandelbrot Galerisi.....	85
4. SONUÇ.....	93
KAYNAKLAR	94
ÖZGEÇMİŞ.....	97

SİMGELER DİZİNİ

φ	Altın oran
C	Cantor cümlesi
$F(n)$	Fibonacci dizisi
$L(n)$	Lucas dizisi
$f^{(n)}$	f polinomunun n-inci iterasyonu
K_f	Doldurulmuş Julia cümlesi
J_f	Julia cümlesi
Ω_f	f polinomunun kritik noktalarının cümlesi
$A_f(\infty)$	∞ un çekim havzası
M	Mandelbrot cümlesi
$D_r(z)$	Yarıçapı r , merkezi z olan çember
$\frac{p}{q}$	Tomurcukların rotasyon sayısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor(1845–1918).....	3
Şekil 2.2 Cantor cümlesi	4
Şekil 2.3 Altın dikdörtgen	7
Şekil 2.4 Altın dikdörtgen ve spiral	8
Şekil 2.5 Leonardo Fibonacci (1175?-1250).....	9
Şekil 2.6 Edouard Lucas (1842-1891)	9
Şekil 2.7 Fibonacci dikdörtgenleri	12
Şekil 2.8 Fibonacci spirali.....	13
Şekil 2.9 Kompleks sayının kutupsal gösterimi	17
Şekil 2.10 Geri besleme mekanizması	19
Şekil 2.11 Bir kademeli dinamik sistem	20
Şekil 2.12 Kuadratiklerin tekrarlanması	24
Şekil 2.13 Siegel daresi (Siegel disc).....	29
Şekil 2.14 İrtibatsız Julia cümlesi (Cantor cümlesi)	32
Şekil 2.15 $ z < 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için $f^{(n)}(z) \rightarrow 0$	32
Şekil 2.16 $ z > 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için $f^{(n)}(z) \rightarrow \infty$	33
Şekil 2.17 $ z = 1$ ise $f^{(n)}(z) = 1$	33
Şekil 2.18 $f(z) = z^2$ için Julia cümlesi yeşil bölge ile mor renkli bölge arasındaki sınır	34
Şekil 2.19 $c = i$ için Julia cümlesi	35
Şekil 2.20 $c = -1$ için Julia cümlesi	36
Şekil 3.1 Benoit Mandelbrot (1924 -)	38
Şekil 3.2 Mandelbrot cümlesi	40
Şekil 3.3 Reel eksene göre simetrik Mandelbrot cümlesi	43
Şekil 3.4 1- Periyotlu ve 2- periyotlu noktaların oluşturduğu bölgeler	45
Şekil 3.5 $c(\Phi) = \frac{e^{i\Phi}}{2} - \frac{e^{2i\Phi}}{4}$ ile oluşan ana kardioid	47
Şekil 3.6 Ana daire ile ana kardioid	53

Şekil 3.7 Mandelbrot cümlesinin sınırı	54
Şekil 3.8 Ana kardiyoid, ana daire ve diğer tomurcukların merkezleri	56
Şekil 3.9 Mandelbrot cümlesi ve tomurcukları	57
Şekil 3.10 Üst temel seri ve alt temel seri	58
Şekil 3.11 n - Periyotlu n antene sahip tomurcuklar	58
Şekil 3.12 Üst temel serinin 3- periyotlu elemanı	59
Şekil 3.13 Üst temel serinin 4- periyotlu elemanı	59
Şekil 3.14 Temel seriden elde edilen 2. nesil tomurcuklar	60
Şekil 3.15 Temel seriden elde edilen 3. nesil tomurcuklar	61
Şekil 3.16 Temel seriden Farey toplamı ile elde edilen 2. nesil 5- periyotlu tomurcuk	62
Şekil 3.17 Temel seriden Farey toplamı ile elde edilen 2. nesil 9- periyotlu tomurcuk	62
Şekil 3.18 3. nesil 7- periyotlu tomurcuk	63
Şekil 3.19 $\frac{2}{5}$ rotasyon sayılı tomurcuk	64
Şekil 3.20 $\frac{3}{7}$ rotasyon sayılı tomurcuk	65
Şekil 3.21 $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$	65
Şekil 3.22 $\frac{1}{2} \oplus \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$	66
Şekil 3.23 $\frac{2}{5} \oplus \frac{3}{7} = \frac{5}{12}$	67
Şekil 3.24 Mandelbrot cümlesinin tomurcukları ve bu tomurcukların rotasyon sayıları	70
Şekil 3.25 Tomurcukların tomurcukları	71
Şekil 3.26 Fibonacci dizisi: 1, 2, 3, 5, 8, 13,	72
Şekil 3.27 Mandelbrot cümlesinin sınırındaki Misiurewicz noktaları	73
Şekil 3.28 $c = i$ Misiurewicz noktası	75
Şekil 3.29 a.b.c. Mandelbrot cümlesinin küçük kopyaları	76
Şekil 3.30 Mandelbrot cümlesi ve kopyaları	77

Şekil 3.31 $c \approx -0,1011 + 0,9563i$ Misiurewicz noktası etrafında kendine benzerlik	77
Şekil 3.32 Fil vadisi ve denizati vadisi	78
Şekil 3.33 Denizati vadisi	79
Şekil 3.34 Fil vadisi	79
Şekil 3.35 Mandelbrot cümlesindeki Julia cümleleri	80
Şekil 3.36 Farklı c - değerleri için Julia cümleleri	82
Şekil 3.37 $c = -0.12 + 0.75i$, Douady tavşanı	83
Şekil 3.38 2- periyotlu tomurcuktaki Julia cümleleri (sol) $c = -1$, (sağ) $c = -0,83 + 0,16i$	83
Şekil 3.39 $c = 0,28 + 0,53i$, 4- periyotlu tomurcuktaki Julia cümlesi	84
Şekil 3.40 Julia spiralleri	84
Şekil 3.41 Mandelbrot cümlesinin içinde yolculuk	85
Şekil 3.42 Şekil 3.41' in yaklaştırılmış hali	86
Şekil 3.43 Şekil 3.42' nin yaklaştırılmış hali	86
Şekil 3.44 Şekil 3.43' ün yaklaştırılmış hali	87
Şekil 3.45 Şekil 3.44' ün yaklaştırılmış hali	87
Şekil 3.46 Şekil 3.45' in yaklaştırılmış hali	88
Şekil 3.47 Şekil 3.46' nın yaklaştırılmış hali	88
Şekil 3.48 Şekil 3.47' nin yaklaştırılmış hali	89
Şekil 3.49 Şekil 3.48' in yaklaştırılmış hali	89
Şekil 3.50 Şekil 3.49'un yaklaştırılmış hali	90
Şekil 3.51 Şekil 3.50'nin yaklaştırılmış hali	90
Şekil 3.52 Şekil 3.51' in yaklaştırılmış hali	91
Şekil 3.53 Şekil 3.52' nin yaklaştırılmış hali	91
Şekil 3.54 Şekil 3.53' ün yaklaştırılmış hali	92
Şekil 3.55 Şekil 3.54' ün yaklaştırılmış hali	92

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 Ana kardioidi oluşturan bazı Φ , x ve y değerleri	47
Çizelge 3.2 Ana daireyi oluşturan bazı Φ , x ve y değerleri	53

1. GİRİŞ

Fraktal kelimesi Latince’ de “kırıklı” anlamına gelen *fractus* kelimesinden türetilmiştir. İlk matematiksel fraktal 1861 yılında keşfedilmiştir. **Karl Weierstrass** sürekli fakat hiçbir noktada diferensiyellenemeyen, yani köşe noktalarından oluşan bir eğri üzerindeki değişimleri araştırırken, hiçbir noktada değişme oranının bulunmayacağı kanaati ile sarsılmıştır. Fraktal kelimesini Weierstrass bu cins eğriler için ilk defa kullanmıştır.

Geometricilerin **Fraktal geometri** adını vererek ele alıp inceledikleri fraktallar, yeni bir bilim alanı olarak meşhur olmuşlardır. Diğer bütün bilim dalları da fraktallardan yararlanmakta ve bahsetmektedir.

Fraktallar çoğunlukla kendine benzeme özelliği gösteren karmaşık, geometrik şekillerin ortak adıdır. Fraktallar düzensiz gibi görünen şekillerin içindeki gizli düzeni kapsarlar. Düzensiz ayrıntılar ya da desenler giderek küçülen örneklerde yinelenir ve tümüyle soyut nesnelere sonsuza kadar sürebilir; tam tersi her parçanın her bir parçası büyütüldüğünde, yine cismin bütününe benzer. Çalışmamızın konusunu oluşturan **Mandelbrot cümlesi** de bir fraktaldır. Basit bir matematiksel formülden **iterasyon** yöntemiyle kaotik bir sistem üretilebileceğinin en güzel örneği olan Mandelbrot cümlesinin sınırı sonsuz bir karmaşıklık göstermektedir. Sınırının derinlikleri, cümlenin tamamından çok daha karmaşık bir yapıya sahiptir ve Mandelbrot fraktalı zig-zagli, spiral kenarları içinde sonsuz sayıda küçük Mandelbrot fraktalına benzer cümleler içermektedir.

Mandelbrot cümlesi matematiksel olarak, kompleks düzlemde $z \rightarrow z^2 + c$ iterasyon kuralı ile elde edilen belli özellikteki kompleks sayıların cümlesidir. **Benoit Mandelbrot** daha çok, $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = az^2 + bz + c$ kuadratik polinomu ile aynı dinamiklere sahip olan $g(z) = z^2 + c$ polinomunun kompleks düzlemde tekrarlanması üzerine çalışmıştır. Bu alanda sadece kuadratik değil kompleks düzlemde

tanımlı rasyonel, üstel, trigonometrik, ...vs dönüşümler de ele alınmaktadır. Fakat biz Mandelbrot' u takip edeceğimiz için diğer dönüşümlere yer vermeyeceğiz.

Halen yaşamakta ve bu alanda yaptığı çalışmaları ile birçok ödüle layık görülen Polonya asıllı matematikçi Benoit Mandelbrot' un, $z \rightarrow z^2 + c$ iterasyon kuralı ile bilgisayar grafiklerini birleştirerek keşfettiği Mandelbrot cümlesi, belki de dünyanın en meşhur geometrik fraktal şekillerinden birisidir. Fakat şu var ki Mandelbrot cümlesinin mevcudiyeti onun keşfinden öncesine dayanmaktadır. Bilim kendisine bir içerik yarattığı- yani kompleks sayılardan oluşan bir çerçeve ve iterasyonlu fonksiyonlar yaklaşımı yarattığı- andan beri mevcut olan Mandelbrot cümlesi ondan sonra sırrının çözülmesini beklemiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Cantor Cümlesi

Adını Alman matematikçi **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (1845–1918)' dan alan **Cantor cümlesi** ile ilgili ilk çalışma 1883 yılında yayınlanmıştır. (G. Cantor, Über Unendliche, Lineare punktmannigfaltigkeiten V.Mathematische Annalen 21 (1883) 545-591) (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor(1845–1918)

Cantor cümlesi matematiğin pek çok alanında özellikle Kaotik Dinamik Sistemlerde önemli rol oynamaktadır ve birçok fraktal (Julia cümleleri gibi) için de gerekli bir model örneği sergilemektedir.

Cantor cümlesini oluşturmak için bir doğru parçası ile başlanır: doğru üç eşit parçaya ayrılır ve ortadaki parça çıkarılır; başlangıçtaki doğrunun üçte biri uzunluğunda iki yeni doğru parçası elde edilir. Bu iki doğru parçası da aynı şekilde tekrar üç parçaya daha ayrılır, ortadaki parça çıkarılır, tekrar iki yeni doğru parçası elde edilir. Bu işlem sonsuza kadar tekrarlanırsa Cantor tozu (Cantor dust) ile de anılan Cantor cümlesi elde edilir. Her bir adımda kendisinin farklı ölçeklerde iki kopyasından oluşan Cantor cümlesi kendine benzer bir yapıya sahiptir. Şimdi matematiksel olarak Cantor cümlesinin oluşumuna bakalım.

Reel sayılar cümlesinin $C_0 = [0,1]$ aralığı ile başlayalım. C_0 cümlesinden ortadaki üçte bir açık aralığı çıkaralım. Geriye kalan C_1 cümlesi her biri $\frac{1}{3}$ uzunluğa sahip iki kapalı aralıktan oluşmaktadır. $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ dir. Şimdi de C_1 cümlesindeki iki kapalı aralığın her birinin üçte bir açık aralığını çıkaralım. $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ elde edilir. Benzer şekilde devam ederek C_j cümlesindeki her bir kapalı aralıktan üçte bir açık aralıkları çıkararak C_{j+1} cümlesini oluşturalım. Bu durumda Cantor cümlesi $C = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$ olarak tanımlanır (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Cantor cümlesi

2.2 Altın Oran

Altın orana ilişkin matematik bilgisinin M.Ö. 3. yüzyılda **Öklid**' in (M.Ö. 325-265?) “Elementler” isimli 13 kitaptan oluşan çalışmasının 13. kitabında ilk kez ortaya atıldığı düşünülmektedir. Bununla birlikte, bu bilginin geçmişinin Eski Mısır’ da M.Ö. 3 bin yıl öncesine dayandığını gösteren bilgilere rastlanmıştır. Eski Yunan dünyasına da **Pisagor** ve izleyenleri tarafından tanıtıldığı ileri sürülmektedir. Altın Oran’ a armağan edilmiş ilk kitap 1519’ da basılmış ve **Luca Pacioli** (1445-1519) ye ait “De Divina Proportione” adlı kitaptır (Akdeniz 2007).

20. yüzyılın başından beri altın oran için φ simgesi kullanılmaya başlanmıştır. φ Yunan alfabesinin 21. harfidir. M.Ö. 5. yüzyılda yaşamış Atinalı ünlü heykeltıraş Phidias anısına bu harf seçilmiştir.

Tanım 2.1 : $x + y$ uzunluğunda bir doğru parçası çizelim. Bu doğru parçasını iki parçaya bölelim. x büyük parça, y küçük parça olsun. $x + y$ toplamının x ' e oranı, x ' in y ' ye oranına eşit ise

$$\frac{x + y}{x} = \frac{x}{y}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitlikte paydaları eşitlersek

$$xy + y^2 = x^2$$

bulunur. Şimdi her iki tarafı y^2 ye bölelim

$$\frac{x}{y} + 1 = \left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

Bu aşamada $\frac{x}{y} = \varphi$ konumunu yapalım. Yukarıdaki eşitlikten

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

olup, buradan φ için iki değer bulunur:

$$\varphi_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \varphi_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$x, y > 0$ olduğundan $\frac{x}{y} > 0$ ve dolayısı ile pozitif olan ifadeyi almalıyız. Yani

$$\frac{x}{y} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

oranı elde edilmiş olur. Bu orana **altın oran** denir.

$\varphi^2 = 1 + \varphi$ eşitliğini ele alalım. Her iki yanın karekökü alınırsa $\varphi = \sqrt{1 + \varphi}$ elde edilir. Eşitliğin ikinci yanında φ yerine $\sqrt{1 + \varphi}$ yazılırsa $\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}}$ olur. Ardışık olarak φ yerine $\sqrt{1 + \varphi}$ yazılmaya devam edildiğinde altın oranın aşağıdaki gösterimi elde edilir:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Bu kez $\varphi^2 = 1 + \varphi$ eşitliğini $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ olarak ele alalım. Eşitliğin ikinci yanında φ yerine $1 + \frac{1}{\varphi}$ yazılırsa $\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}$ olur. Bu işleme devam edildiğinde altın oranın

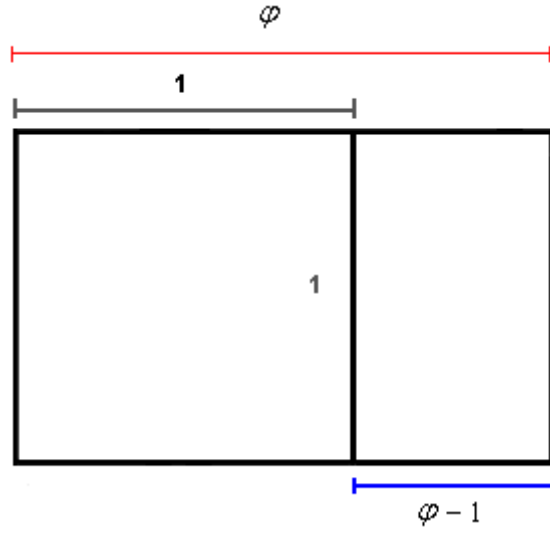
ikinci bir ifadesi olan

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

elde edilir.

2.2.1 Altın dikdörtgen ve spiraller

Kısa kenarı 1 birim ve uzun kenarı altın orana, yani φ ye eşit olan bir dikdörtgen düşünelim. Dikdörtgenin kenarlarının oranı $1:\varphi$ dir. Böyle bir dikdörtgene **altın dikdörtgen** denir.

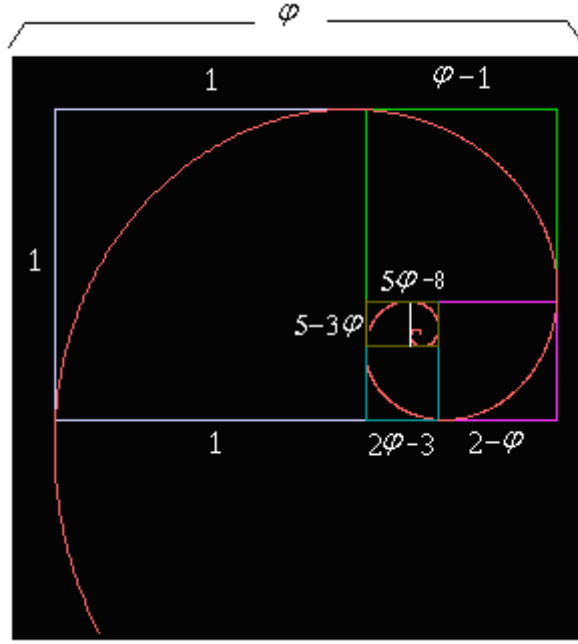


Şekil 2.3 Altın dikdörtgen

Şekil 2.3' teki dikdörtgenin içinde kenar uzunluğu 1 birim olan kare ayrılırsa geri kalan dikdörtgenin kısa kenarı $\varphi - 1$ ve uzun kenarı 1 birim olur. Bu işleme devam edildiğinde oluşacak dikdörtgenlerin kenarları da aynı orana sahip olur. Bu durumda Şekil 2.4' te görüldüğü gibi karelerin kenar uzunlukları $1, 2 - \varphi, 2\varphi - 3, 5 - 3\varphi, 5\varphi - 8, \dots$ olacaktır. Böylece;

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{\varphi - 1}{2 - \varphi} = \frac{2 - \varphi}{2\varphi - 3} = \frac{2\varphi - 3}{5 - 3\varphi} = \dots = \varphi$$

yazabiliriz.



Şekil 2.4 Altın dikdörtgen ve spiral

Spiral, merkezden sürekli uzaklaşan ve merkezi etrafında birçok defa dönen bir eğridir. Spiral ilk kez Archimedes (M.Ö. 287?-212) tarafından tanımlanmıştır (Akdeniz 2007).

2.3 Fibonacci Sayıları ve Tavşan Problemi

Leonardo Fibonacci 1175 yılı civarında İtalya' nın Pisa kentinde doğmuştur (Şekil 2.5). Bonacci' nin oğlu anlamındaki Fibonacci' nin bir diğer adı da **Leonardo Pisano'** dur. Doğum yeri olan Pisa' da devamlı oturmaya başlamadan önce bütün Akdeniz' i dolaşmıştır. Bu seyahat sırasında Arapların kullandığı, içinde sıfırın da bulunduğu 10' luk sayma sistemi ile hesaplamaların daha kolay yapıldığını fark etmiştir. Pisa' ya döndükten sonra 1202 yılında tamamladığı **Liber Abaci** (Hesaplama Kitabı) adlı kitabında onluk sistemde nasıl aritmetik yapılacağını anlatmıştır. Bu kitap Avrupa' ya Hint-Arap sayı sistemini tanıtmıştır. Orta çağda Avrupa' nın en büyük matematikçisi olan Fibonacci, ilköğretimde öğrendiğimiz sayıların toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerine ait kuralları vermiştir. Kitabının üçüncü bölümündeki problem Fibonacci sayılarıyla tanışmamız için yol göstericidir: Bu problem çok iyi bilinen tavşan problemidir.



Şekil 2.5 Leonardo Fibonacci (1175?-1250)

Tavşan popülasyonlarının çizelgesini yaparak Fibonacci, elde ettiği ardışık sayıları birbirine bölmüş ve altın orana ulaşılan aşağıdaki $F(n)$ sayı dizisini bulmuştur:

$$F(n) = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots\}$$

Ancak bu sayı dizisi, ismini Fibonacci' nin ölümünden sonra, **Edouard Lucas** isimli matematikçiden almıştır (Şekil 2.6). Birçok matematikçi gibi Lucas da Fibonacci sayıları üzerine çalışmalar yapmış ve Fibonacci sayılarının oluşma mantığına benzer bir mantıkla oluşturduğu kendi adıyla anılan **Lucas dizisini** bulmuştur.



Şekil 2.6 Edouard Lucas (1842-1891)

Fibonacci sayıları 0 ve 1 değerleri ile oluşturulurken Lucas dizisi 2 ve 1 değerleri ile oluşmaktadır. $n > 1$ olmak üzere $L(n)$ ile gösterilen Lucas dizisi:

$$L(n) = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, \dots\}$$

şeklindedir. Fibonacci dizisi ile Lucas dizisi arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$L(n) = F(n+2) - F(n-2).$$

www.facstaff.bucknell.edu/udaapp/090/w3/emilyc.htm.

www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html.

www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibBio.html.

Ünlü İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci' nin Liber Abaci kitabında yer alan, ideal durumlarda tavşanların ne kadar yavruladıklarını göstermek amacıyla yapılan araştırma bizim Fibonacci sayılarını fark etmemizi sağlamıştır. Problem şudur:

“Biri erkek diğeri dişi olan bir çift tavşan ile başlayalım. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan yavruladığı, her yeni çiftin de erginleşebilmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği varsayılırsa, 1 yıl sonunda kaç çift tavşan olur?”

Problemin çözümü için tavşan popülasyonunun yetişkin ve genç tavşanlarını ayıralım. Yeni doğmuş olan çift gençtir ve bir ay sonunda yetişkin olacaktır. Yetişkin çift de yine bir ay sonra yeni bir çift verecektir. J_n ve A_n , sırası ile, n ay sonraki genç ve yetişkin tavşan çiftlerinin sayısını gösterebilir. $n = 0$ başlangıç anından başlamak üzere J_n ve A_n lerin sayısını bulalım:

$n = 0$	$J_0 = 1, A_0 = 0$ (Başlangıç anında 1 genç çift var, yetişkin çift yok)
$n = 1$	$J_1 = 0, A_1 = 1$ (1. ay sonunda genç çift yetişkin olur)
$n = 2$	$J_2 = 1, A_2 = 1$ (2. ay sonunda 1 genç ve 1 yetişkin çift olur)
$n = 3$	$J_3 = 1, A_3 = 2$ (3. ay sonunda 1 genç ve 2 yetişkin çift olur)
$n = 4$	$J_4 = 2, A_4 = 3$ (4. ay sonunda 2 genç ve 3 yetişkin çift olur)
$n = 5$	$J_5 = 3, A_5 = 5$ (5. ay sonunda 3 genç ve 5 yetişkin çift olur)

⋮

bu şekilde devam eder. Genel kural şudur: Yeni doğan çiftlerin sayısı, bir önceki aydaki yetişkinlerin sayısına eşit olacaktır;

$$J_{n+1} = A_n. \quad (1)$$

Ayrıca bir sonraki aydaki yetişkinlerin sayısı, bir önceki aydaki genç ve yetişkinlerin sayıları toplamına eşit olacaktır;

$$A_{n+1} = J_n + A_n. \quad (2)$$

Tavşan popülasyonunun dinamiğini bu iki formül çok iyi açıklamaktadır. $J_0 = 1$, $A_0 = 0$ başlangıç değerleri için (1) den $J_n = A_{n-1}$ kolayca yazılabilir. Bu eşitliği (2) de yerine koyarsak, $A_0 = 0$ ve $A_1 = 1$ olmak üzere,

$$A_{n+1} = A_{n-1} + A_n$$

elde edilir. Oluşacak çiftlerin sayısı bu formül ile hesaplandığında aşağıdaki gibi olur:

$$F(n) = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots\}$$

Bu dizi Fibonacci dizisi olup $F(n)$ ile gösterilir. O halde F_i ile i-nci Fibonacci sayısı gösterilmek üzere $F_1 = F_2 = 1$ alınması şartı ile

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

formülü Fibonacci sayılarını üretir. Fibonacci sayılarının dinamiklerle ilişkisi $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ eşitliğinin iki kademeli makineyi temsil etmesinden, yani her adımda kendinden önceki son iki değer kullanılmasıdır. Bu tekrarlı bir süreç olup,

dinamik sistemler bu iterasyon sonucu oluşan değerlerin cümlesinin akıbeti ile ilgilenmektedir.

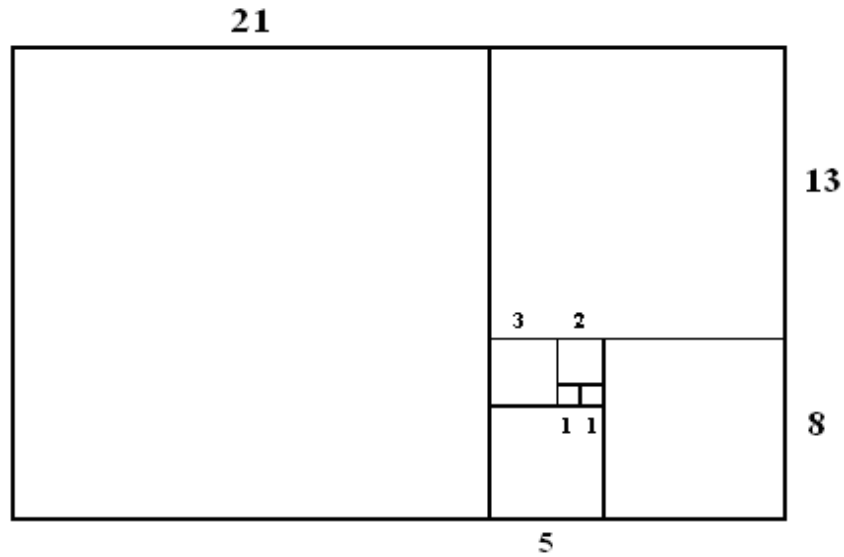
Ardışık Fibonacci sayılarının oranlanmasıyla Fibonacci dizisinin temel özeliği olan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

altın oranı elde edilir. Bu oran yavaş yavaş 1,6180339874... sayısına yaklaşmaktadır (Peitgen *et al.* 2004).

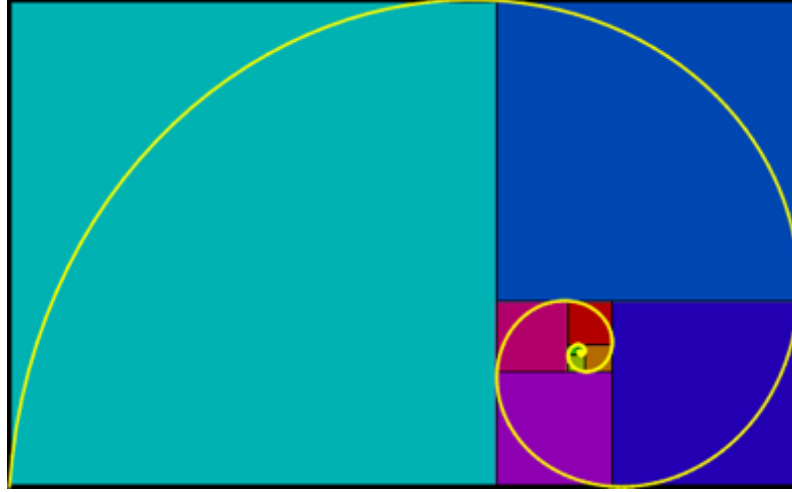
2.3.1 Fibonacci dikdörtgenleri ve Fibonacci spirali

Kenar uzunluğu 1 birim olan ve birbirine bitişik iki küçük kare ile başlayarak bu iki karenin her ikisinin tepesinde kenar uzunluğu 2 birim olan bir kare çizilir. Böylece bu üç kare ile kenar uzunluğu 2 ve 3 birim olan bir dikdörtgen bulunur. Bunların sağında 3 birimlik bir kare çizildiğinde her bir yeni karenin kenar uzunluğunun, önceki iki karenin kenar uzunluklarının toplamı olduğu görülür. Dikdörtgenlerin kenar uzunlukları ardışık Fibonacci sayıları olan 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... dir. Böylece **Fibonacci dikdörtgenleri** elde edilmektedir (Şekil 2.7).



Şekil 2.7 Fibonacci dikdörtgenleri

Her bir Fibonacci dikdörtgeninin içindeki karelerin köşelerinden geçen çeyrek çember yayları ile oluşturulan sarmala **Fibonacci spirali (sarmalı)** denir (Şekil 2.8) (Akdeniz 2007).



Şekil 2.8 Fibonacci spirali

2.4 Kompleks Sayılar

Kompleks sayılar cümlesi reel sayıların yetersiz kaldığı durumları açıklamak, örneğin $x^2 + 1 = 0$ gibi denklemlerin çözümlerini bulmak için tanımlanmıştır. Kompleks sayılar hem matematikte hem de elektrik mühendisliği, salınım teorisi ve benzeri uygulamalı bilim dallarında ve hemen hemen matematiği kullanan her branşta kullanılabilmekte ve çok önemli rol oynamaktadır. Aslında kompleks sayılar $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ kartezyen çarpımının elemanları olan sıralı ikililerdir. Kompleks sayılar cisimi, reel sayılar cümlesinin kendi kendisi ile kartezyen çarpımı olan \mathbb{R}^2 de tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte cisim olan \mathbb{R}^2 olarak tanımlanmaktadır. Reel sayılar cümlesinde çözümü olmayan

$$x^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

denklemini göz önüne alalım. (1) denkleminde x yerine $\sqrt{-1}$ veya $-\sqrt{-1}$ koyulur ve $(\sqrt{-1})^2 = -1$ yazılırsa denklemin sağlandığı görülür. Fakat karesi -1 olan

reel sayı bulunmadığından, (1) deki $\sqrt{-1}$ ifadesi ile yapılan bu işlemin bir anlamının olamayacağı açıktır, ancak sonucun sifira eşit olması, yani denklemin sağlanıyor olması, buna şeklen de olsa bir anlam verilmesi gereğini ortaya koymaktadır. Bunun için karesi -1 sayısına eşit olmaktan başka hiçbir özeliği ile ilgilenmeyeceğimiz bir sembole gerek vardır. Bu sembole i denmektedir. Eğer yukarıda (1) denkleminde x yerine i ve $-i$ den herhangi birini koyup, reel sayılarda yaptığımız gibi işlemleri yaparsak ve $i^2 = -1$ olduğunu göz önüne alırsak denklem sağlanır. O halde (1) denkleminin köklerinin i ve $-i$ olduğunu düşünebiliriz. Ancak burada dikkat edilmesi gereken en önemli husus i nin karesi -1 e eşit olan yani kendisi ile çarpımı -1 e eşit olan bir sembol olduğudur.

Kompleks sayılarda işlem her ne kadar reel sayılarda olduğu gibi ise de i^2 görülen yerde -1 alarak yapılıyorsa da kompleks sayıların aslında her bir bileşeninin sıralı ikililer olduğunu gözden kaçırmamalıyız. Kompleks sayı tanımını aşağıda veriyoruz:

Tanım 2.1 : Reel sayıların her bir sıralı (a, b) ikilisine bir **kompleks** (ya da karmaşık) **sayı** denir. Buna göre a ve b iki reel sayı ise (a, b) sıralı ikilisi bir kompleks sayıdır. $x = (a, b)$ ve $y = (c, d)$ iki kompleks sayı olsun. $a = c$ ve $b = d$ oluyorsa $x = y$ olarak tanımlanmaktadır. O halde iki kompleks sayının eşit olması için gerek ve yeter koşul kompleks sayıların birinci bileşenlerinin birbirine ve ikinci bileşenlerinin birbirine eşit olmasıdır. Diğer bir ifadeyle karşılıklı bileşenler eşit ise kompleks sayılar eşittir.

İki kompleks sayının toplamı:

$$x + y = (a + c, b + d)$$

ve iki kompleks sayının çarpımı:

$$x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$$

olarak tanımlanır. Bütün kompleks sayılar cümlesi C ile gösterilir. C kompleks sayılar cümlesi dendiğinde yukarıdaki toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte $IR \times IR = IR^2$ kartezyen çarpım cümlesi dikkate alınır.

Tanım 2.2 : (0,1) sıralı ikilisi i ile gösterilir.

Teorem 2.1 : $i^2 \hat{=} -1$ dir.

İspat : $i^2 = i.i = (0,1)(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0) \hat{=} -1$.

Teorem 2.2 : a ve b reel sayılar olmak üzere $(a,b) = a + ib$.

İspat : $a + ib = (a,0) + (0,1)(b,0) = (a,0) + (0.b - 1.0, 0.0 + 1.b) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$.

Tanım 2.3 : a ve b reel sayılar ve $z = a + ib$ olsun. Bu takdirde $a - ib$ kompleks sayısına z kompleks sayısının **eşleniği** denir ve \bar{z} ile gösterilir. Buna göre $\bar{\bar{z}} = z$ dir. a sayısına z kompleks sayısının reel kısmı denir. $\text{Re}(z)$ ile gösterilir ve b sayısına z kompleks sayısının sanal kısmı denir, $\text{Im}(z)$ ile gösterilir. Bu tanımlara göre $z = a + ib$ şeklindeki bir kompleks sayı için $\text{Re}(z) = a$, $\text{Im}(z) = b$ olacaktır. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere a şeklindeki kompleks sayıya sırf reel kompleks sayı ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere ib şeklindeki bir kompleks sayıya da sırf sanal kompleks sayı denir.

Tanım 2.4 : Eğer z bir kompleks sayı ise z nin 0 dan uzaklığına z kompleks sayısının **mutlak değeri** denir ve $|z|$ ile gösterilir.

z ve w kompleks sayılar olmak üzere mutlak değerinin birkaç özeliği:

- a) $|\bar{z}| = |z|$
- b) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- c) $|zw| = |z||w|$
- d) $|z + w| \leq |z| + |w|$

dir.

Reel sayılar ile yapılan tüm aritmetik işlemler kompleks sayılar ile de yapılır. Fakat reel sayılar ile kompleks sayılar arasındaki en önemli fark; reel sayılarda sıralama bağıntısı olmasına rağmen kompleks sayılarda olmamasıdır.

2.4.1 Kutupsal gösterim

Bir z kompleks sayısı düzlemde, koordinatları x ve y olan bir noktaya karşılık gelir. Bu noktanın yer vektörü r ise r vektörünün uzunluğu $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ olup $|z|$ ye z kompleks sayısının **modülü**, r vektörünün pozitif reel eksen ile saat yönünün tersinde yaptığı Φ açısına da z kompleks sayısının **argümanı** denir ve $\text{Arg } z$ ile gösterilir.

Bir kompleks sayı kartezyen koordinatlarda $x = \text{Re}(z)$ ve $y = \text{Im}(z)$ ile belirli iken, kutupsal koordinatlarda $r = |z|$ ve $\Phi = \text{Arg } z$ ile belirlidir. O halde sinus ve cosinus trigonometrik fonksiyonları yardımıyla

$$\sin \Phi = \frac{y}{r} \quad \cos \Phi = \frac{x}{r}$$

olacağından x ve y değerleri

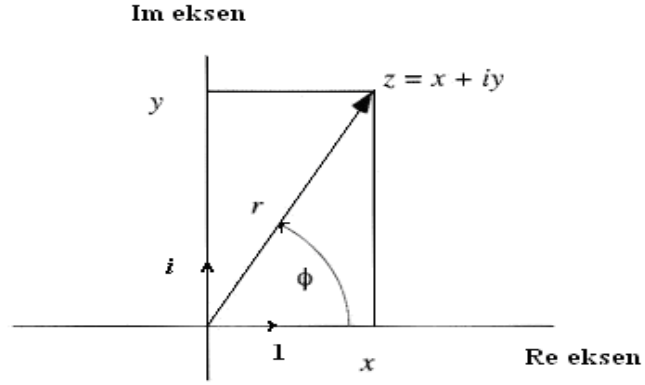
$$x = r \cos \Phi$$

$$y = r \sin \Phi$$

olarak bulunur. O halde buradan z kompleks sayısının kutupsal koordinatlarda gösterimi (Şekil 2.9).

$$z = r \cos \Phi + ir \sin \Phi$$

dir.



Şekil 2.9 Kompleks sayının kutupsal gösterimi

2.4.2 Üstel gösterim

Kutupsal koordinatlar ile yakından ilişkili bir gösterim Euler gösterimidir. Modülü 1 ve argümanı Φ olan bir z kompleks sayısı:

$$e^{i\Phi} = \cos \Phi + i \sin \Phi$$

şeklinde gösterilir ve buna **Euler formülü** denir. Modülü r ve argümanı Φ olan bir kompleks sayının gösteriminin ise

$$re^{i\Phi} = r(\cos \Phi + i \sin \Phi)$$

olacağı açıktır.

2.5 Kompleks Düzlemde Bölgeler

Tanım 2.5 : $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$\{z : z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \varepsilon\}$$

cümlesine z_0 **in ε komşuluğu** denir.

O halde bu tanımdan hareketle yararlı olacak şu tanımı verelim:

Tanım 2.6 : Merkezi z_0 ve yarıçap uzunluğu r olan bir çemberin içi:

$$D_r(z) = \{z \in C : |z - z_0| < r\},$$

merkezi z_0 ve yarıçapı r olan bir çemberin sınırı:

$$D_r(z) = \{z \in C : |z - z_0| = r\},$$

merkezi z_0 ve yarıçapı r olan bir çemberin dışı:

$$D_r(z) = \{z \in C : |z - z_0| > r\}$$

dir.

Tanım 2.7 : S kompleks düzlemde herhangi bir cümle ve z_0 bir nokta olsun. Eğer z_0 ın yalnız S nin noktalarını içeren komşuluğu varsa z_0 a S cümlesinin bir **iç noktası** denir. Eğer z_0 , S nin hiçbir noktasını içermeyen bir komşuluğa sahipse z_0 a S cümlesinin bir **dış noktası**, z_0 S nin ne iç ne de dış noktası değil ise z_0 a S cümlesinin **sınır noktası** denir.

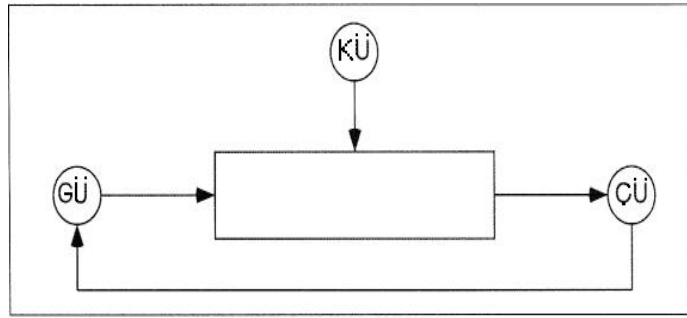
Tanım 2.8 : Sınır noktalarının hiçbirini içermeyen cümleye **açık cümle**, sınır noktalarının hepsini içeren cümleye **kapalı cümle** denir.

Tanım 2.9 : S açık bir cümle olmak üzere, S de bulunan z_1 ve z_2 nokta çifti, tamamen S de kalacak biçimde uç uca birleştirilmiş sonlu sayıda doğru parçalarından oluşan, poligonal eğri ile birleştirilebilirse S cümlesine **irtibatlıdır** denir.

Tanım 2.10 : Bir S cümlesinin her bir noktası $|z| = R$ çemberinin içinde kalırsa bu durumda S ye **sınırlı cümle** aksi halde **sınırsız cümle** denir.

2.6 İterasyon

Kelime anlamı itibariyle tekerrür, tekrarlama, yineleme ve ardışık işlem anlamlarına gelir. İterasyon bir süreci tekrarlamak demektir. Matematiksel manada iterasyon, matematiksel bir fonksiyonun bir girdiye uygulanarak bir çıktı elde edilmesi ve bundan sonraki her adımda oluşan çıktının bu sürece dahil edilmesidir. Tekrarlama işlemini gerçekleştiren formülleri tekrarlayıcı (iteratör) kelimesi ile eş anlamlı olan geri besleme kelimesi ile ifade edeceğiz. Burada GÜ giriş ünitesi, KÜ kontrol ünitesi ve ÇÜ çıkış ünitesini ifade etmektedir (Şekil 2.10).



Şekil 2.10 Geri besleme mekanizması

Geri besleme süreçleri tüm bilimlerde esas alınmaktadır. Aslında ilk olarak 300 yıl önce, dinamik yasaların içinde **Sir Isaac Newton** ve **Gottfried W. Leibniz** tarafından tanımlanmıştır ve şimdi bu yasalar kullanılarak doğal olayların modellenmesi gerçekleştirilmektedir. Mesela yer değiştiren bir taneciğin daha önceki bir zamandan şimdiki zamana kadarki konumu ve hızı bu yasalarca belirlenir.

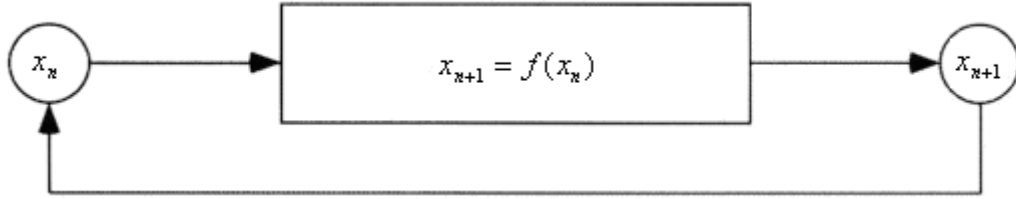
2.7 İterasyon Süreçlerinin Çeşitleri

2.7.1 Bir kademeli makineler

f herhangi bir matematiksel dönüşüm olmak üzere $x_{n+1} = f(x_n)$ tekrarlama formülü ile karakterize edilen makinelerin her birine **bir kademeli makine** denir. Çünkü bu makineye tek bir sayı girer ve yeni bir sayıya dönüşür. Örneğin $f(x_n) = x_n^2 + 1$ dönüşümüne x_n girer ve $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ olarak çıkar. Bu formül sabit bir c kontrol parametresi ile kontrol edilebilir, bu durumda örnekteki formül;

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2 + c$$

şeklinde genelleştirilebilir. Bir kademeli makinelerde tekrarlama süreci Şekil 2.11' deki gibi resmedilir:



Şekil 2.11 Bir kademeli dinamik sistem

Bir kademeli makineler çok kullanışlı matematiksel araçlardır ve özellikle karmaşık problemlerin nümerik çözümleri için geliştirilmişlerdir. Bunların tarihçesi en az birkaç bin yıl eskiye dayanır. Karekök hesaplama makinesi yaklaşık 4000 yıl önce, Sümer matematikçileri tarafından bilindiği kabul edilen bir algorithmadan ibarettir.

2.7.2 İki kademeli makineler

İki kademeli makinelerde çıktı, tek bir girdiye değil iki girdiye bağlı olarak hesaplanır. İsmi de bundan dolayı iki kademeli makinedir. O halde g herhangi bir matematiksel fonksiyon olmak üzere, iki kademeli makineleri karakterize eden gösterim şu şekildedir:

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}).$$

x_{n+1} değeri sadece kendinden bir önceki adımda oluşan x_n değerine değil, iki önceki adımda oluşan x_{n-1} değerine de bağlıdır.

İki kademeli makinelerin çalışma mantığı Fibonacci sayılarının oluşma mantığı ile aynıdır (Peitgen *et al.* 2004).

2.8 Kompleks Kuadratik Polinomlar

Tanım 2.11 : $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere $f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan polinomlara **kompleks kuadratik polinomlar** denir. Burada α, β, γ kompleks sayıları katsayılar ve z polinomun köküdür.

2.8.1 $f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ Kompleks kuadratik polinomunun köklerinin bulunuşu

$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ kuadratik polinomuna $\frac{\beta}{2\alpha}$ kesrinin karesi eklenip çıkarılırsa polinomun kökleri kolayca bulunur:

$$\begin{aligned} \alpha z^2 + \beta z + \gamma &= \alpha \left(z^2 + \frac{\beta}{\alpha} z + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \\ &= \alpha \left(z^2 + \frac{\beta}{\alpha} z + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right) \\ &= \alpha \left[\left(z^2 + \frac{\beta}{\alpha} z + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right) - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \right] \\ &= \alpha \left[\left(z + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right] \\ &= \alpha \left(z + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = 0 \end{aligned}$$

⇒

$$\alpha \left(z + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$$

⇒ $\left(z + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$

⇒ $\left(z + \frac{\beta}{2\alpha} \right) = \pm \sqrt{\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}}$

⇒ $z + \frac{\beta}{2\alpha} = \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

⇒ $z = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

⇒ $z = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

O halde $z_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a}$ ve $z_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a}$ elde edilir.

Kuadratik polinomların kökleri ile katsayıları arasında şu bağıntılar vardır:

$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ kuadratik polinomunun kökleri $z_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a}$ ve

$z_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a}$ idi. Buna göre;

1. Köklerin toplamı : $z_1 + z_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a} + \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a} = \frac{-\beta}{2a}$

2. Köklerin çarpımı : $z_1 \cdot z_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a} \cdot \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a} =$

$$\frac{\beta^2 - \beta^2 + 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

$$= \frac{\gamma}{\alpha}$$

dır.

Tanım 2.12 (Eşleşik Fonksiyonlar): $f : C \rightarrow C$ ve $g : C \rightarrow C$ iki dönüşüm,

$$g = h \circ f \circ h^{-1}$$

olmak üzere $h : C \rightarrow C$ dönüşümü varsa, f fonksiyonuna g nin **eşleştiği** denir.

Teorem 2.3 : Her $f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, $\alpha \neq 0$ kompleks kuadratik polinomu $g_c(z) = z^2 + c$ polinomunun eşleştiği ise bir tek c değeri vardır (Beardon 1991).

İspat : $f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ genel bir kuadratik polinom ve $g_c(z) = z^2 + c$ kompleks kuadratik polinomların özel bir formu olsun. O halde $h : C \rightarrow C$, $h(z) = Az + B$ bir homeomorfizim ve $h^{-1}(z) = \frac{z-B}{A}$ ise,

$$\begin{aligned} h \circ f \circ h^{-1}(z) &= A \left[\alpha \left(\frac{z-B}{A} \right)^2 + \beta \frac{z-B}{A} + \gamma \right] + B \\ &= A \left[\frac{\alpha}{A^2} z^2 + \left(\frac{\beta}{A} - \frac{2B\alpha}{A^2} \right) z + \frac{B^2\alpha}{A^2} - \frac{B\beta}{A} + \gamma \right] + B \\ &= \frac{\alpha}{A} z^2 + \left(\beta - \frac{2B\alpha}{A} \right) z + \frac{\beta^2\alpha}{A} - B\beta + A\alpha + B \end{aligned}$$

ise $f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ olduğundan katsayılar $A = \alpha$, $B = \frac{\beta}{2}$ ve $c = \alpha\gamma + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4}$

olarak elde edilir.

$f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ genel formüllü kompleks kuadratik polinomlar $g_c(z) = z^2 + c$ formuna kısıtlanarak çalışılabilir. Çünkü $f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ genel kuadratik polinomu

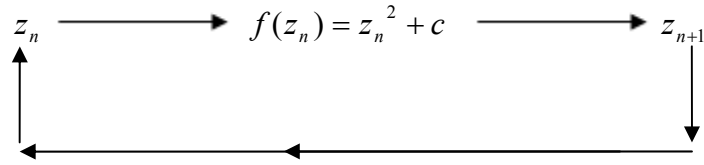
ile $g_c(z) = z^2 + c$ polinomu aynı dinamiklere sahiptir. Bu nedenle ikinci dereceden genel bir polinomu temsil etmek için $g(z) = z^2 + c$ polinomu alınabilir.

2.9 Kompleks Kuadratiklerin Tekrarlanması

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow f(z) = z^2 + c, \quad z, c \in \mathbb{C}$$

kompleks kuadratik polinomu ile oluşacak sürecin geri besleme makinesi şöyledir:



Şekil. 2.12 Kuadratiklerin tekrarlanması

Şekil 2.12' deki iterasyon işlemine devam ettikçe elde edilecek sonuç bir sonraki adım için başlangıç verisi olacaktır.

Bir z_0 başlangıç değeri ve c kontrol parametresi ile başlayan süreç şöyledir:

$$z_1 = f(z_0) = z_0^2 + c$$

$$z_2 = f(z_1) = f(z_0^2 + c) = (z_0^2 + c)^2 + c = f^2(z_0)$$

$$z_3 = f(z_2) = f((z_0^2 + c)^2 + c) = [(z_0^2 + c)^2 + c]^2 + c = f^3(z_0)$$

⋮

$$z_n = f(z_{n-1}) = f^n(z_0)$$

$$z_{n+1} = f(z_n) = f^{n+1}(z_0).$$

$z_n, c \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z_n = x_n + iy_n$, $c = a + ib$, $x_n, y_n, a, b \in \mathbb{R}$ değerleri aşağıdaki eşitlikte yerlerine koyulduğunda;

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= z_n^2 + c \\
z_{n+1} &= (x_n + iy_n)^2 + a + ib \\
z_{n+1} &= x_n^2 + 2ix_ny_n - y_n^2 + a + ib \\
z_{n+1} &= (x_n^2 - y_n^2 + a) + i(2x_ny_n + b) \\
\Rightarrow \quad x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + a \\
y_{n+1} &= 2x_ny_n + b
\end{aligned}$$

dinamik sistemi elde edilir. f kompleks kuadratik polinomunun dinamiği, f nin iterasyonu ve bu iterasyon ile elde edilecek sonuçlardır.

2.10 Kompleks Dinamik Sistemler

Kompleks Dinamikler alanı nispeten iki kısa periyot görmüştür. Bu alan orijinlerini 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında çizmiştir. O zamanlarda **Leau**, **Schröder**, **Koenigs**, **Böttcher** gibi matematikçiler iterasyon altında kompleks fonksiyonların belli davranışları ile ilgilenmişlerdir. Çalışmaları öncelikli olarak sabit nokta etrafındaki iterasyonların davranışlarına odaklanmıştır. Bu köklü çalışmanın iyi bir referansı **D. Alexander** (Boston University, 1992)' in tez çalışmasıdır.

1918-1920 tarihlerinde iki Fransız matematikçi **Gaston Julia** ve **Pierre Fatou**' nun öncülüğünde çarpıcı bir gelişme meydana geldi. Sadece belli dinamiksel davranışlar yerine, Julia ve Fatou daha evrensel bir görüşe vardılar. Sabit noktaların dışında oldukça farklı dinamik davranışlar buldular. **Adrien Douady** ve **John H. Hubbard**, kuadratik polinomların parametreler düzlemi üzerine çalışmalar yapmış, kuadratik dinamiklerin mümkün olan tüm çeşitlerini sınıflandırmışlar ve **Douady tavşanı** olarak anılan bir cümle keşfetmişlerdir.

1980' lerde kompleks dinamikleri keşfetmek için bilgisayar grafiklerini ilk kullanan kişi olan Mandelbrot' tan sonra çalışmaların ikinci büyük periyodu başlamıştır. Onun Mandelbrot cümlesini keşfi, birçok matematikçiyi bu alanda yeniden araştırma yapmaya

itti. **Mikhail Lyubich, Curt McMullen, John Milnor, Mitsuhiro Shishikura, Jean-Christophe Yoccoz** gibi isimler de bu cümle ile ilgili araştırma yapanlar arasındadır (Devaney 1994).

Kompleks dinamikler, kompleks düzlemde tanımlı dönüşümlerin iterasyonları ile oluşan sonuçları inceler. Biz çalışmamızda kompleks dinamiklerin $f_c(z) = z^2 + c$ ile tanımlı kompleks kuadratik polinomu ile ilgili bilgiler sunacağız.

$f_c(z) = z^2 + c$ kompleks kuadratik polinomunun iterasyonlar altında davranışlarını incelemek için bazı tanımlar ile başlayalım. Basitlik açısından f nin n -inci tekrarlamasını $f^{(n)}$ ile göstereceğiz. Yani,

$$\begin{aligned} f^{(2)} &= f \circ f \\ f^{(3)} &= f \circ f \circ f \\ &\vdots \\ f^{(n)} &= \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ tane}}. \end{aligned}$$

Tanım 2.13 (Yörünge) : $f : C \rightarrow C$, $f_c(z) = z^2 + c$ için $z_0 \in C$ olmak üzere

$$z_0, f(z_0), f^{(2)}(z_0), \dots$$

sayı dizisine z_0 **in yörüngesi** denir.

Aslında dinamiklerin temel problemi $n \rightarrow \infty$ için $\{f^{(n)}(z_0)\}$ dizisinin yani f nin yörüngesinin akıbetinin ne olacağıdır. O halde birkaç tanım ile devam edelim.

Tanım 2.14 (Kritik nokta) : $f : C \rightarrow C$, $z \in C$ olmak üzere $f'(z) = 0$ koşulunu sağlayan z noktasına **kritik nokta** denir.

Tanım 2.15 (Sabit nokta) : $f : C \rightarrow C$, $z \in C$ olmak üzere $f(z) = z$ ise z noktasına **sabit nokta** denir.

Tanım 2.16 (Periyodik nokta) : $f : C \rightarrow C$, $z \in C$ olmak üzere $f^{(p)}(z) = z$ koşulunu sağlayan en küçük $p \in \mathbb{N}$ ($p \geq 1$) sayısına **periyot**, z noktasına **periyodik nokta** denir.

Tanım 2.17 (Periyodik olmayan nokta) : $f : C \rightarrow C$, $z \in C$ olmak üzere bazı $j > 0$ için $f^{(p+j)}(z) = f^{(j)}(z)$ koşulunu sağlayan z noktasına **periyodik olmayan (preperiodic) nokta** denir.

Tanım 2.18 (Çekim havzası) : Yörüngeleri, çeken (attractive) periyodik yörüngeler olan tüm noktaların cümlesine o yörünge için **çekim havzası (basin of attraction)** denir.

Tanım 2.19 (Sabit noktanın çeşitleri) : z_0 , $f_c(z) = z^2 + c$ kuadratik polinomu için sabit bir nokta olmak üzere $f'(z_0) = \lambda$ sayısı f nin z_0 daki çarpanı olsun. O halde z_0 :

1- Attracting(çeken) nokta; $0 < |\lambda| < 1$

2- Superattracting(kuvvetli çeken) nokta; $\lambda = 0$

3- Repelling(ıten) nokta; $|\lambda| > 1$

4- Neutral(etkisiz) nokta; $|\lambda| = 1 = e^{2\pi i\theta}$ olsun.

i) θ rasyonel ise z_0 rationally indifferent (rasyonel olarak değişmeyen nokta),

ii) θ irrasyonel ise z_0 irrationally indifferent (irrasyonel olarak değişmeyen nokta)

dır.

z_0 in irrationally indifferent olduğu durumun özel bir hali vardır. $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ için θ irrasyonel ve $\theta \in (0,1)$ dir. Bu durumda her bir a_j pozitif tamsayı olmak üzere θ sonsuz kesirli yapıya sahip olup

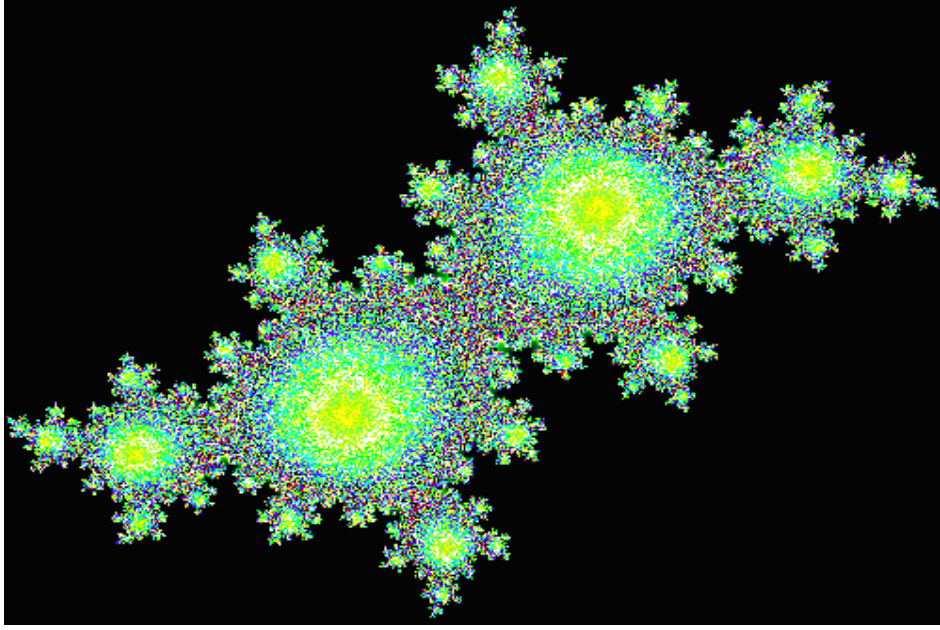
$$\theta = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 \dots}}}}$$

dir (Beardon 1991).

Örnek 2.1 : $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ için özel bir hal ortaya çıkmaktadır. Altın oranın sonsuz kesirli ifadesini daha önce elde etmiştik. O halde

$$\theta = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

yazabiliriz. $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ eşitliğinde $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olduğunda **Siegel dairesi** oluşmaktadır (Şekil 2.13).



Şekil 2.13 Siegel dairesi (Siegel disc)

$f_c(z) = z^2 + c$ iterasyon kuralı ile elde edilen belli özellikteki noktaların bir araya toplanması sonucu iki farklı düzlem oluşmuştur. Bunlar:

1- Parametreler düzlemi (c - düzlemi) : $z_0 = 0$ başlangıç noktası seçilerek, $f_c(z) = z^2 + c$ iterasyonu tüm kompleks düzlemde tekrarlanır. Yani z sabit, c değişkendir.

2- Dinamik düzlem : Belli bir c - değeri seçildikten sonra kompleks düzlemdeki tüm z sayıları kullanılıncaya kadar $f_c(z) = z^2 + c$ iterasyonuna devam edilir. Yani c sabit, z değişkendir.

2.11 Julia Cümleleri

$f(z_n) = z_n^2 + c$ kompleks kuadratik polinomu için Julia cümlelerinin oluşumu $z_{n+1} \longrightarrow z_n^2 + c$ algoritma kuralı ile olur. Bir $c \in \mathbb{C}$ değeri belirlenip, tüm kompleks düzlemdeki sayılar kontrol edilinceye kadar bu algoritma uygulanır. Bu işlem tamamlandığında tek bir **Julia cümlesi** elde edilir. Yani her bir c - değeri farklı bir Julia

cümlesi üretir. c - değeri belirlendikten sonra $z_{n+1} \longrightarrow z_n^2 + c$ algoritma kuralı ile elde edilecek kompleks sayıların dizisi;

$$z_{n+1} \longrightarrow z_n^2 + c \longrightarrow (z_n^2 + c)^2 + c \longrightarrow ((z_n^2 + c)^2 + c)^2 + c \longrightarrow \dots$$

olacaktır. Bu dizi için ortaya çıkabilecek iki sonuç vardır: ya **sınırlı**dır ya da **sınırsız**dır. Dizi sınırlı ise elemanları belirli bir alanda kalacak, sınırsız ise sonsuza gidecektir. O halde $f(z_n) = z_n^2 + c$ kompleks kuadratik polinomunun belirli bir c - değeri için sınırlı bir alanda kalan dizi K_f ve elemanları sonsuza giden dizi A_f olmak üzere aşağıdaki tanımlar verilebilir:

Tanım 2.19 : f nin iterasyonları altında sınırlı kalan yörüngelerin cümlesine **doldurulmuş Julia cümlesi** denir ve K_f ile gösterilmek üzere,

$$K_f = \{ z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) \not\rightarrow \infty \}$$

şeklinde tanımlanır (Branner 1989).

$f_c(z) = z^2 + c$ kuadratik polinomunun K_f doldurulmuş Julia cümlesi, merkezi orijinde ve yarıçapı $R = \max(2, |c|)$ olan bir daire tarafından içerilir. $|z| > R$ olmak üzere;

$$\frac{|f_c(z)|}{|z|} \geq |z| - \frac{|c|}{|z|} \geq |z| - 1 > 1$$

olur. Dolayısıyla

$$|z| > R \Rightarrow f_c^{(n)}(z) \rightarrow \infty .$$

(Beardon 1991).

Tanım 2.20 : f nin iterasyonları altında sonsuza giden yörüngelerin cümlesine ∞ **ün çekim havzası (basin of attractive) denir** ve $A_f(\infty)$ ile gösterilir:

$$A_f(\infty) = \mathbb{C} \setminus K_f = \{ z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) \longrightarrow \infty \}$$

dir (Branner 1989).

Tanım 2.21 : J_f Julia cümlesi olmak üzere, kompleks düzlemdeki her c - değeri için oluşacak Julia cümlesine, K_f doldurulmuş Julia cümlesinin **sınırı** denir.

Teorem 2.4 (P. Fatou ve G. Julia) : Ω_f , f polinomunun kritik noktalarının cümlesi olmak üzere

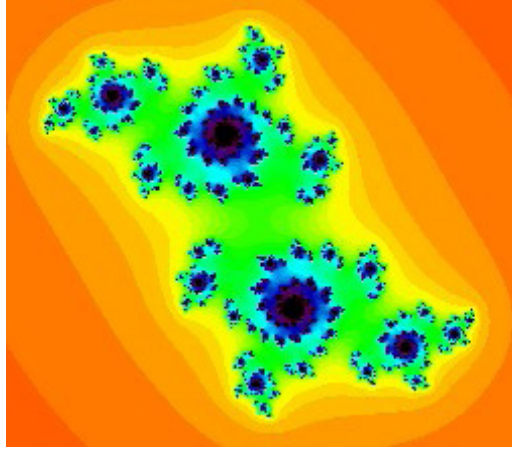
$$\Omega_f \subset K_f \quad \Leftrightarrow \quad J_f \text{ irtibatlıdır}$$

$$\Omega_f \cap K_f = \emptyset \quad \Rightarrow \quad J_f \text{ bir Cantor cümlesidir (Branner 1989).}$$

O halde bu teorem ışığında, $f_c(z) = z^2 + c$ kuadratik polinomunun tek bir kritik noktası olan 0 için şu ayırma teoremi verilebilir:

Teorem 2.5 (Fundamental Dichotomy) : Kompleks düzlemdeki herhangi bir c - değeri için $f_c(0)$ 0 ın yörüngesi olmak üzere, $f_c(0) \in K_f$ ise J_f irtibatlıdır, $f_c(0) \notin K_f$ ise J_f Cantor cümlesidir (Devaney 1994).

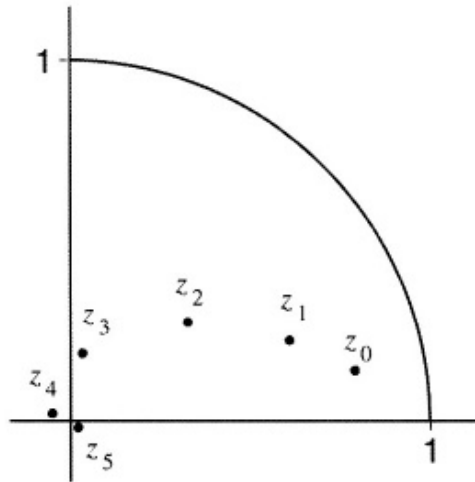
İrtibatlı cümleler tek bir parçadan oluşurken Cantor cümlesi sonsuz çoklukta parçadan oluşur. Dahası Cantor cümlesinin her bir parçası da birer Cantor cümlesidir ve Cantor cümlesindeki her nokta diğer noktaların limit noktasıdır. Bu nedenle Cantor cümlesi noktalardan oluşmuş bir cümle olup, Cantor tozu olarak da anılmaktadır. İrtibatsız Julia cümleleri Cantor cümlesi yapısındadırlar (Şekil 2.14).



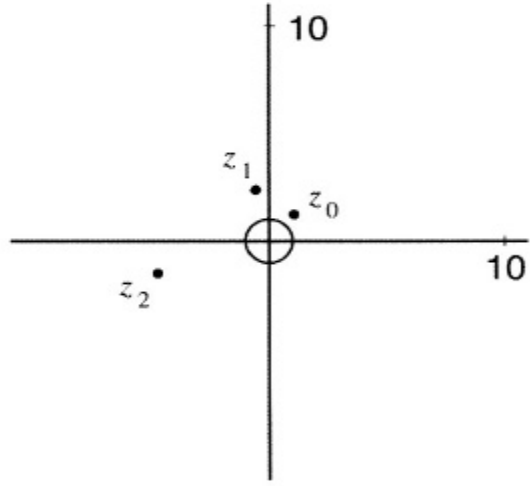
Şekil 2.14 İrtibatsız Julia cümlesi (Cantor cümlesi)

2.11.1 Julia cümlelerine örnekler

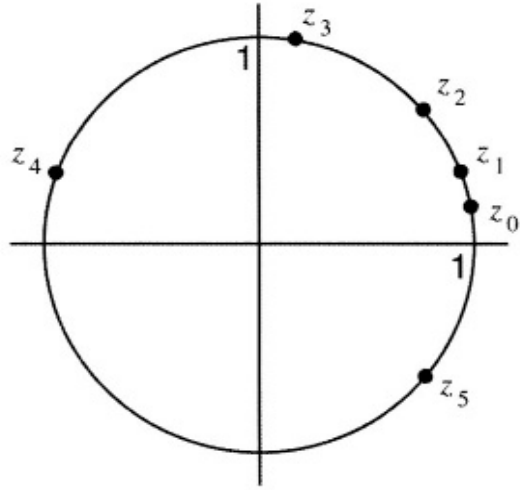
Örnek 2.3 : $c = 0$ için $f(z) = z^2$ polinomunun Julia cümlesi $|z| = 1$ çemberidir (Şekil 2.17). Bu çemberin bilgisayar grafikleri yardımıyla elde edilen renkli görüntüsü Şekil 2.18’ de gösterilmiştir. $|z| < 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için $f^{(n)}(z) \rightarrow 0$ (Şekil 2.15), $|z| > 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için $f^{(n)}(z) \rightarrow \infty$, $|z| = 1$ ise $f^{(n)}(z)$ çember üzerinde kalacaktır (Şekil 2.16). Görüldüğü gibi üç farklı durum ortaya çıkmaktadır: Birim çember üzerindeki veya içindeki herhangi bir noktanın yörüngesi sınırlı bir alanda kalırken, çemberin dışındaki herhangi bir noktanın yörüngesi sonsuza gidecektir.



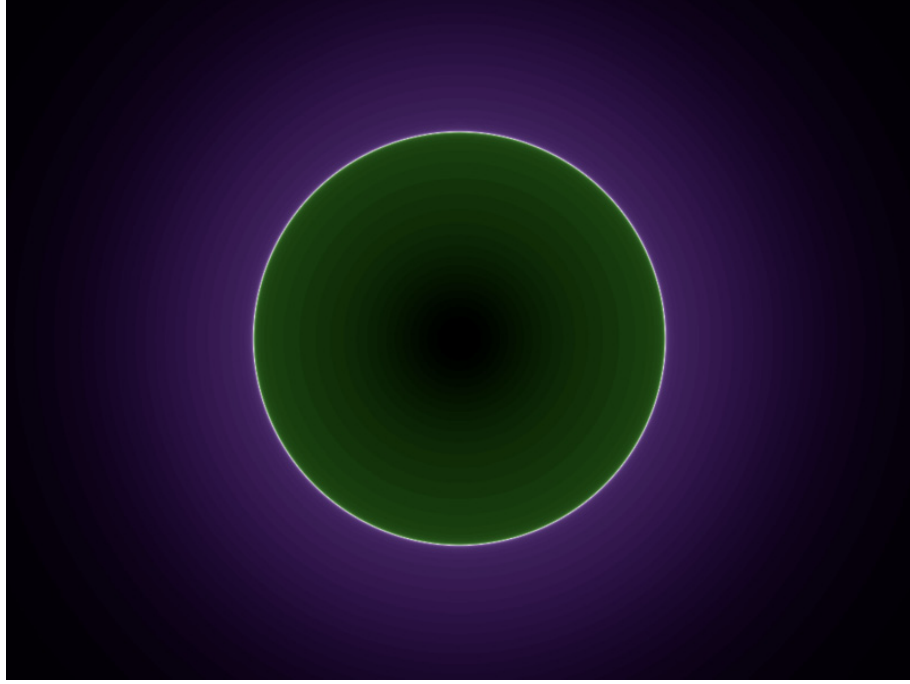
Şekil 2.15 $|z| < 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için $f^{(n)}(z) \rightarrow 0$



Şekil 2.16 $|z| > 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için $f^{(n)}(z) \rightarrow \infty$



Şekil 2.17 $|z| = 1$ ise $f^{(n)}(z) = 1$



Şekil 2.18 $f(z) = z^2$ İçin Julia cümlesi yeşil bölge ile mor renkli bölge arasındaki sınır

Örnek 2.4 : $f_c(z) = z^2 + c$ kuadratik polinomunun $c = i$ için oluşacak Julia cümlesini incelemek için ayırma teoremi ışığında $f_i(z) = z^2 + i$ altında 0 ın yörüngesini bulacağız.

$$f_i(0) = i$$

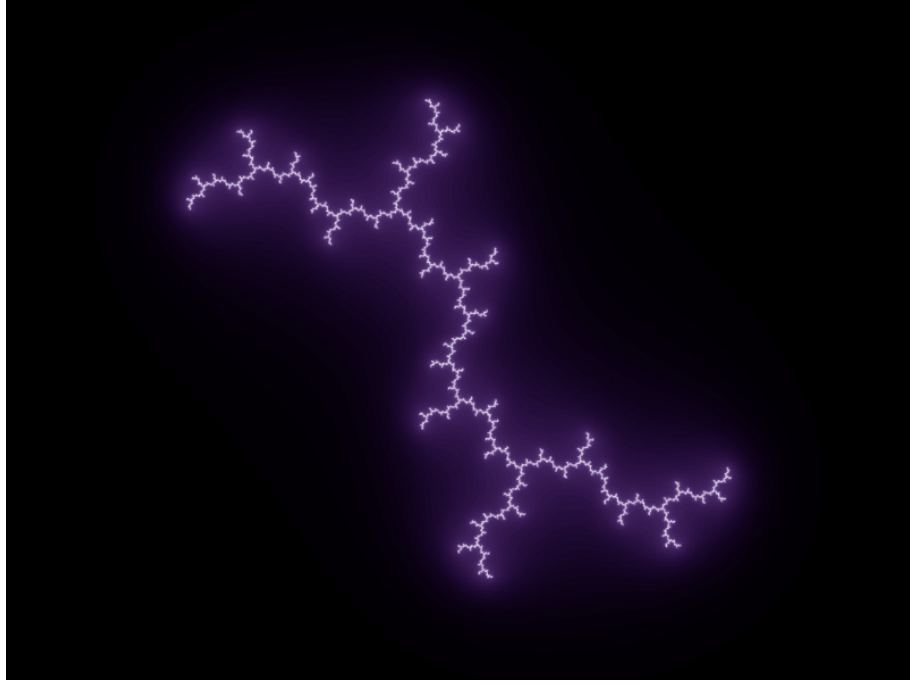
$$f_i(i) = -1 + i$$

$$f_i(-1 + i) = -i$$

$$f_i(-i) = -1 + i$$

⋮

0 ın yörüngesi $\{0, -1 + i, -i, -1 + i, -i, \dots\}$ olup, sınırlı olduğu açıktır. O halde ayırma teoremi gereğince f_i için oluşan Julia cümlesi irtibatlıdır (Şekil 2.19).



Şekil 2.19 $c = i$ İçin Julia cümlesi

Örnek 2.5 : $c = -1$ için oluşacak Julia cümlesini bulmak için $f_{-1}(z) = z^2 - 1$ altında 0'ın yörüngesini bulalım:

$$f_{-1}(0) = -1$$

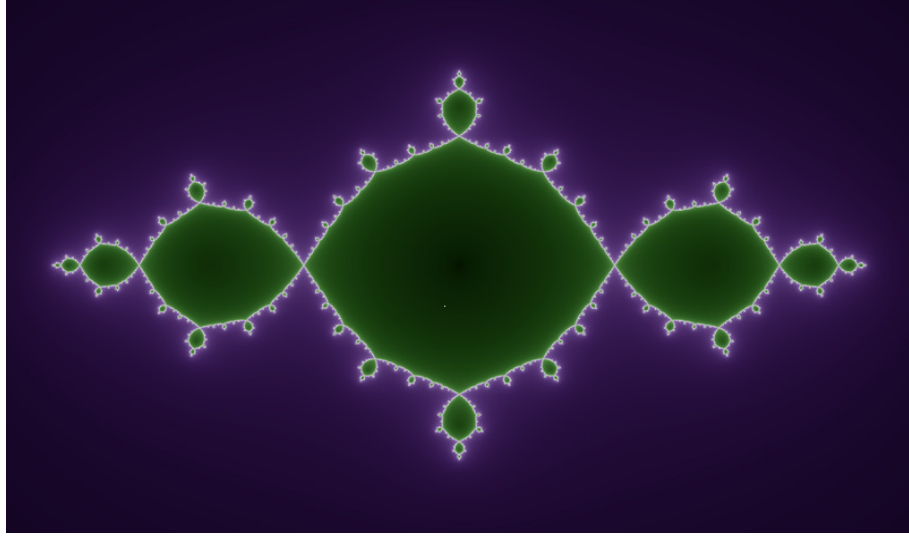
$$f_{-1}(-1) = 0$$

$$f_{-1}(0) = -1$$

$$f_{-1}(-1) = 0$$

⋮

$c = -1$ için 0'ın yörüngesi $\{0, -1, 0, -1, 0, \dots\}$ olduğundan sınırlıdır, dolayısıyla Julia cümlesi irtibatlıdır (Şekil 2.20).



Şekil 2.20 $c = -1$ İçin Julia cümlesi

2.12 Farey Ağacı

Farey ağacı, 0 ile 1 arasındaki tüm rasyonel sayıları içeren bir ağaçtır. Kendi yapısının her katında rasyonel sayıların sonlu bir listesinden oluşur. Bu listedeki bitişik rasyonel sayılar **Farey komşuları** olarak adlandırılır. Ağaç tümevarımsal olarak şöyle oluşturulur: Her Farey komşu çifti bir **Farey çocuğu** üretir ki bu, iki komşu arasında en küçük değere sahip olan bir rasyonel sayıdır. Doğal olarak Farey çocuğu üreten rasyonel sayılar onun **Farey ailesi** olarak adlandırılır.

Farey ağacının en ilginç özeliği, Farey çocuklarının **Farey toplaması** ile elde edilmesidir. Yani $\frac{\alpha}{\beta}$ ve $\frac{\gamma}{\delta}$ Farey komşuları arasındaki kesir:

$$\frac{\alpha}{\beta} \oplus \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

Yani en küçük paydalı iki Farey komşusu arasındaki kesiri oluşturmak için, ailelerin pay ve paydaları ayrı ayrı toplanır ve çocuk oluşturulmuş olur.

$\frac{0}{1}$ ve $\frac{1}{1}$ olarak yazacağımız 0 ve 1 rasyonel sayı çifti ile Farey ağacının yapımına başlayalım. Farey toplamı ile bunların çocukları:

$$\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

dir, dolayısıyla yapının ikinci katındaki rasyonellerin listesi:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$$

dir. Bir sonraki katta iki yeni Farey çocuğu elde edilir:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1}$$

Dördüncü katta bulunan rasyoneller:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1}$$

dir. Her Farey komşusu için bu toplam sonsuza kadar gider, böylece Farey ağacı tüm rasyonel sayıları içerir.

Farey ağacının bir diğer özeliği:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} \text{ ve } \frac{\gamma}{\delta} \text{ Farey komşularıdır.}$$

Bu özellikten hareketle

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} \right| = \frac{1}{\beta\delta}$$

olduğu açıkça görülmektedir (Devaney 1999).

3. MANDELBROT CÜMLESİ

Fraktal geometrinin babası olarak bilinen Benoit Mandelbrot, dünyadaki yüksek hızlı bilgisayarları kullanan ilk matematikçilerden biridir (Şekil 3.1). Ekonomi alanındaki en meşhur çalışması pamuk fiyatları ile ilgili araştırmasıdır. Pamuk fiyatlarındaki dalgalanmaların günlük değişimi önceden tahmin edilemezdi fakat bilgisayar analizi ile bunun görüntüsü incelenebilirdi. Uzun dönem pamuk fiyatlarının dalgalanması ile kısa dönem pamuk fiyatlarının dalgalanması arasında bir simetri buldu. Bu şaşırtıcı sonucu ancak, ekonomik verideki tüm ölçeklerde kendini tekrar eden, kendine benzer bir fraktal keşfettikten sonra anladı. Mandelbrot' un bu araştırması onu basit bir matematiksel formül ile özetlenen büyük buluşuna götürmüştür. Adını Benoit Mandelbrot' tan alan ve aslında basit bir ifadeyle kompleks sayıların bir cümlesi olan Mandelbrot cümlesi, iterasyon yönteminin bilgisayar grafikleri ile zenginleştirilmesiyle tam anlamıyla kendini göstermiştir. Basit bir denklem belki de daha önce kimsenin akıl etmediği şekilde tekrarlanıp, iterasyonlarının sonuçları bilgisayar yardımıyla incelendiğinde ortaya çıkan muhteşem şekiller, bizi hala bir yerlerde var olan ama şu ana kadar göremediğimiz birçok matematiksel olguyu keşfe çağırılmaktadır.



Şekil 3.1 Benoit Mandelbrot (1924 -)

3.1 Oluşumu ve Matematiksel Olarak Açıklanması

Mandelbrot cümlesi, $z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c$ kompleks kuadratik polinomunun tekrarlanmasıyla oluşur. Kompleks sayılar dinamiği bakımından Mandelbrot cümlesi,

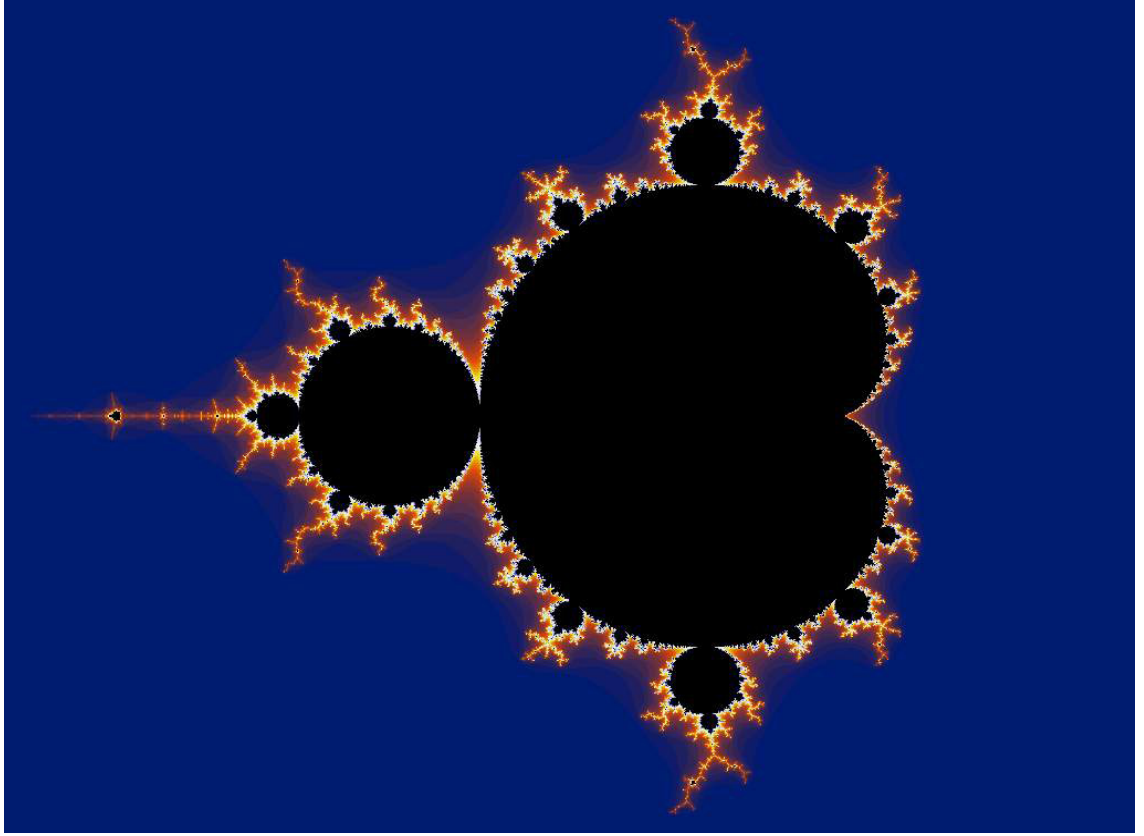
temel geometrideki bir çember kadar doğal bir objedir (Şekil 3.2). Mandelbrot cümlesini oluşturmak için başlangıç değeri olarak $z_0 = 0 + 0i$ alınır ve c kontrol parametresi belirli değildir. $z_0 = 0$ noktasının her $c \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı için $f(z_n) = z_n^2 + c$ iterasyonu altında oluşacak yörüngelerin davranışları incelendiğinde şu sonuç ortaya çıkar: yörünge ya sonsuza gider ya da sınırlı bir alanda kalır. İşte Mandelbrot cümlesi, kompleks düzlemde tarayacağımız tüm c - değerleri için f iterasyonu altında 0 ın sonsuza kaçmayan yörüngelerini oluşturan c - değerlerinden oluşur. Aşağıda Mandelbrot cümlesinin tanımı bulunmaktadır:

Tanım 3.1 : Mandelbrot cümlesi $f(z_n) = z_n^2 + c$, $z, c \in \mathbb{C}$ kuadratik polinomu için sınırlı kalan yörüngeleri oluşturan c - değerlerinin cümlesi, yani

$$\mathbf{M} = \{ c \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(0) \text{ sınırlı} \}$$

dır (Crownover 1995).

$z_0 = 0$ alınarak, $z_{n+1} = z_n^2 + c$ iterasyon kuralı ile z_0, z_1, z_2, \dots dizisi elde edilir. Eğer bu dizi sonsuza kaçmıyorsa $c \in \mathbf{M}$, sonsuza kaçıyorsa $c \notin \mathbf{M}$ dir.



Şekil 3.2 Mandelbrot cümlesi

Mandelbrot cümlesi, kompleks dinamiklerde bir ikon haline gelmiştir. Bir iterasyon altında oluşacak yörüngelerin akıbetinin ne olacağı dinamikler konusu içinde yer alır. Her c değeri için oluşan ve $z_0 = 0$ in yörüngesi olarak anılan diziler nasıl davranırlar? Aslında Mandelbrot cümlesi bu sorulara verilecek cevabın geometrik açıklamasıdır. Farklı c - değerleri için $z_0 = 0$ in yörüngeleri yakınsarlar mı ıraksarlar mı? Bu sorunun cevabı için aşağıda örnekler verilmiştir.

Örnek 3.1 : $c = 1$ için $z_0 = 0$ in $f(z_n) = z_n^2 + c$ altında oluşan yörüngesi:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 0^2 + 1 = 1$$

$$z_2 = 1^2 + 1 = 2$$

$$z_3 = 2^2 + 1 = 5$$

$$z_4 = 5^2 + 1 = 26$$

$$z_5 = 26^2 + 1 = 677$$

$$z_6 = 677^2 + 1 = 458.330$$

⋮

dir. $c = 1$ için $z_0 = 0$ in yörüngesi sonsuza gider o halde $c = 1 \notin \mathbf{M}$ dir.

Örnek 3.2 : $c = i$ için $z_0 = 0$ in $f(z_n) = z_n^2 + c$ altında oluşan yörüngesi:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = i$$

$$z_2 = -1 + i$$

$$z_3 = -i$$

$$z_4 = -1 + i$$

$$z_5 = -i$$

$$z_6 = -1 + i$$

⋮

dir. $c = i$ için $z_0 = 0$ in yörüngesi belli değerler almakta ve bunun dışına çıkmamaktadır. O halde $c = i \in \mathbf{M}$ dir.

Örnek 3.3 : $c = 0$ için $z_0 = 0$ in $f(z_n) = z_n^2 + c$ altında oluşan yörüngesi:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 0$$

$$z_3 = 0$$

$$z_4 = 0$$

⋮

dir. Oluşan bu yörünge ise yukarıdaki diğer iki yörüngeden oldukça farklıdır çünkü tüm iterasyonlar için sabit kalır.

Örneklerden de anlaşılacağı üzere $z_0 = 0$ in $f(z_n) = z_n^2 + c$ altında oluşacak yörüngeleri ya sonsuza gider ya da gitmez. Eğer yörünge sonsuza gitmezse birçok şekilde davranabilir: sabit, periyodik veya kaotik, fakat esas olan bazen sonsuza gitmesi diğer zamanlarda ise gitmemesidir. Mandelbrot cümlesi tam da bu özel durumun resmidir.

Bir nokta Mandelbrot cümlesince içeriliyorsa orijin ile o nokta arasındaki uzaklık 2 den büyük olamaz. O halde şu teorem verilebilir:

Teorem 3.1 : $|c| > 2$ ve $|z| \geq |c|$ ise z nin yörüngesi sonsuza gider (Brinks 2005).

İspat: $|c| = 2 + p$ ve $p > 0$ olsun.

$$|z_n^2| = |z_n^2 + c - c|$$

$$|z_n^2 + c - c| \leq |z_n^2 + c| + |c| \quad (\text{Üçgen eşitsizliği})$$

$$|z_n^2| \leq |z_n^2 + c| + |c|$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n^2| - |c|$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n^2| - |z_n| \quad ; \quad |z_n| \geq |c|$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n| (|z_n| - 1)$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n| (|c| - 1) \quad ; \quad |z_n| \geq |c|$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n| (2 + p - 1) \quad ; \quad |c| = 2 + p$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n| (p + 1)$$

İterasyon ile $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ve $|z_n^2 + c| \geq |z_n|(p+1)$ olduğundan

$$|z_{n+2}| \geq |z_n|(p+1)(p+1) = |z_n|(p+1)^2, p > 0$$

$$|z_{n+3}| \geq |z_n|(p+1)^2(p+1) = |z_n|(p+1)^3, p > 0$$

⋮

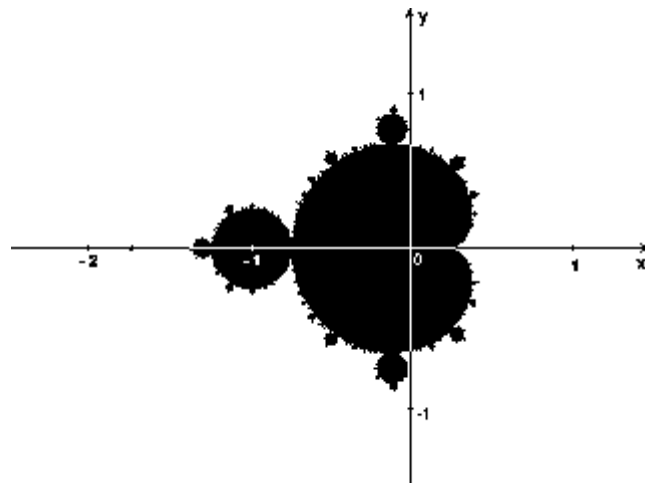
$$|z_{n+k}| \geq |z_n|(p+1)^k, k \in \mathbb{N}$$

Dolayısıyla $n \rightarrow \infty$ için z nin yörüngesi de sonsuza gider.

Yörüngenin sonsuza gidip gitmediğini açıklayan bu teorem şunu söylemektedir:

Kompleks düzlemden seçilecek her c sayısı için $|c| > 2$ ise $c \notin \mathbf{M}$ dir. Yani $c = 0, -1, -1.1, -1.3, -1.48, i$ değerlerinin hepsi Mandelbrot cümlesinde yer alırken $c = 2 + 3i$ Mandelbrot cümlesinin dışında yer alır.

\mathbf{M} Mandelbrot cümlesi, kompleks kuadratik polinomların bir ailesi ve c bir kompleks parametredir. Her bir c için, f nin kritik noktadan başlayan iterasyonu ile elde edilen dizinin davranışları kompleks dinamik sistemler konusu içinde yer alır.



Şekil 3.3 Reel eksene göre simetrik Mandelbrot cümlesi

Mandelbrot cümlesi reel eksen simetri eksenini olarak kabul eder (Şekil 3.3).
(www.en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set).

Teorem 3.2 : Mandelbrot cümlesi, kompleks düzlemde reel eksene göre simetriktir.

İspat: $|f_{\bar{c}}(0)| = |\bar{c}| = |c| = |f_c(0)|,$

$$|f_{\bar{c}}^2(0)| = |(\bar{c}) + c| = |\overline{c^2 + c}| = |c^2 + c| = |f_c^2(0)|,$$

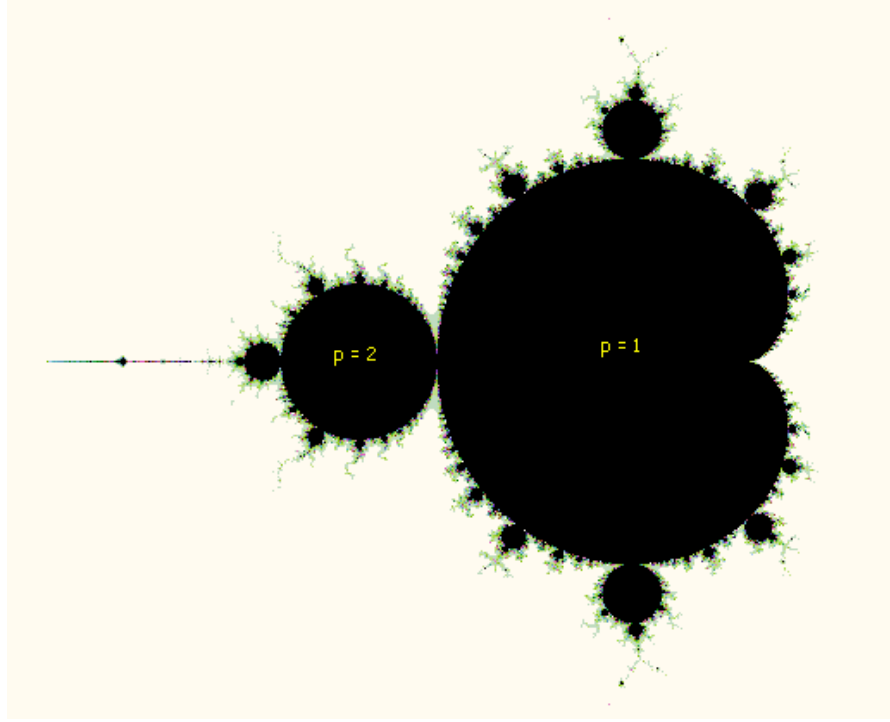
⋮

$$|f_{\bar{c}}^n(0)| = |f_c^n(0)|.$$

3.2 Mandelbrot Cümlesinin Kısımları

3.2.1 Ana kardioid

Kardioid şeklindeki büyük bölge Mandelbrot cümlesi içinde **ana kardioid** adını alır. Ana kardioidin içi f nin attracting sabit noktalara sahip c - değerlerinin cümlesidir. Veya ana kardioid, $f(z) = z^2 + c$ iterasyonu altında sabit bir noktaya yakınsayan c - değerlerinin cümlesidir. Bu nedenle ana kardioid içinden hangi c - değerini seçersek seçelim, $f(z) = z^2 + c$ iterasyonu tek bir kompleks değeri verecektir.



Şekil 3.4 1- periyotlu ve 2- periyotlu noktaların oluşturduğu bölgeler

Periyodik yörünge tanımından $f^p(z) = z$ ve $p = 1$ olup, ana kardioidi yeniden 1-periyotlu periyodik yörüngelere sahip c - değerlerinin cümlesi olarak da tanımlayabiliriz (Şekil 3.4). $p = 1$ olduğundan $f(z) = z$, yani z bir sabit nokta olacaktır. O halde 1-periyotlu noktaların $f: z \longrightarrow z^2 + c$ kompleks kuadratik polinomunun bir kere tekrarlanmasıyla oluşan sabit noktalar olacağı açıktır. Buradan;

$$f(z) = z$$

$$z^2 + c = z \Rightarrow z^2 - z + c = 0$$

denkleminin çözümü 1- periyotlu sabit noktalar olup $f: z \longrightarrow z^2 + c$ polinomunun z sabit noktasındaki türevi $\frac{d}{dz}(z^2 + c) = 2z$ dir. Kutupsal koordinatlarda

$$2z = re^{i\Phi}$$

$$z = \frac{re^{i\Phi}}{2}, \quad r \geq 0 \text{ ve } 0 \leq \Phi < 2\pi$$

yazılabilir. Bu $z^2 - z + c$ eşitliğinde yerine koyulursa;

$$\left(\frac{re^{i\Phi}}{2}\right)^2 - \frac{re^{i\Phi}}{2} + c = 0$$

olur. Bu eşitliğin çözülmesiyle $c(\Phi)$:

$$c(\Phi) = \frac{re^{i\Phi}}{2} - \frac{r^2 e^{2i\Phi}}{4}$$

olarak elde edilir. Kompleks koordinatlarda $c = x + iy$ olmak üzere r ve Φ nin seçimlerine bağlı olarak elde edilen c parametreleri, oluşacak cümlenin şeklini belirler. Şöyle ki, $r = 1$ alındığında ana kardioidin sınırı oluşur.

$r = 1$ için $c(\Phi) = \frac{e^{i\Phi}}{2} - \frac{e^{2i\Phi}}{4}$ olur. $c = x + iy$ olarak yazarsak;

$$x = \frac{\cos\Phi}{2} - \frac{\cos 2\Phi}{4}$$

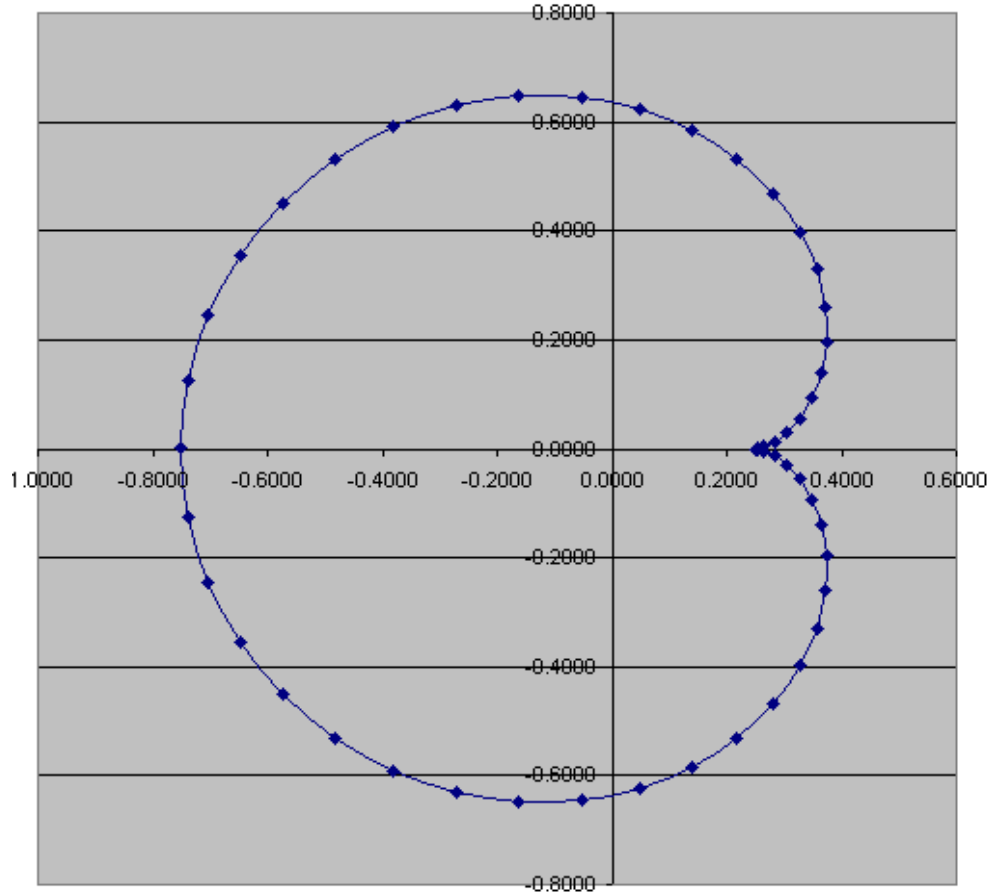
$$y = \frac{\sin\Phi}{2} - \frac{\sin 2\Phi}{4}$$

elde edilir. Bu eşitlikler $\text{Arg } \Phi$ ye bağlı olarak kompleks noktalar üretir. Bu durumda kutupsal koordinatlarda parametre değeri Φ açısidir diyebiliriz. Φ nin beş değeri için belirlenen x ve y değerleri aşağıdaki Çizelge 3.1' de yer almaktadır:

Çizelge 3.1 Ana kardioidi oluşturan bazı Φ , x ve y değerleri

Φ	x	y
0	0.25	0.0
$2\pi/5$	0.35676	0.32858
$\pi/2$	0.25	0.5
$2\pi/3$	-0.12500	0.64952
π	-0.75	0.0

$0 \leq \Phi < 2\pi$ olmak üzere Φ nin 50 farklı değeri için çizilmiş ana kardioidin sınırı Şekil 3.5' te gösterilmiştir.



Şekil 3.5 $c(\Phi) = \frac{e^{i\Phi}}{2} - \frac{e^{2i\Phi}}{4}$ ile oluşan ana kardioid

$c(\Phi) = \frac{re^{i\Phi}}{2} - \frac{r^2 e^{2i\Phi}}{4}$ olmak üzere, $r < 1$ için ise ana kardioidin iç bölgesi oluşur. Φ parametresine bağlı olarak elde edilecek kompleks sayılar benzer şekilde bu kez ana kardioidin içini oluşturacaktır.

Lemma 3.1 : Ana kardioid merkezi $(-\frac{1}{4}, 0)$, yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan açık daireyi kapsar (Beardon 1991).

İspat: $D_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{4}) = \left\{ \left| z + \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{2} \right\}$ merkezi $(-\frac{1}{4}, 0)$ ve yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan açık daire olmak üzere, $D_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{4})$ cümlesinin ana kardioid içinde olduğunu göstereceğiz. $-\frac{3}{4} \in \mathbf{M}$ ve $\frac{1}{4} \in \mathbf{M}$ olduğundan $D_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{4})$ nin sınırı \mathbf{M} de kapsanır. Ana kardioidin sınırı $c(\Phi) = \frac{e^{i\Phi}}{2} - \frac{e^{2i\Phi}}{4}$, $0 \leq \Phi \leq 2\pi$ olup, $\left| c(\Phi) + \frac{1}{4} \right| \geq \frac{1}{2}$, $0 \leq \Phi \leq 2\pi$ olduğunu göstereceğiz ve bu eşitlik ancak $\Phi \in \{0, \pi\}$ olduğu zaman sağlanır.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^{i\Phi}}{2} - \frac{e^{2i\Phi}}{4} + \frac{1}{4} \right| \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \left| \frac{e^{i\Phi}}{2} - \frac{e^{2i\Phi}}{4} + \frac{1}{4} \right| \geq \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{e^{i\Phi}(2 - e^{i\Phi}) + 1}{4} \right| \geq \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow |e^{i\Phi}(2 - e^{i\Phi}) + 1| \geq 2 \\
&\Leftrightarrow |e^{i\Phi}(2 - e^{i\Phi}) + 1|^2 \geq 4 \\
&\Leftrightarrow (e^{i\Phi}(2 - e^{i\Phi}) + 1)\overline{(e^{i\Phi}(2 - e^{i\Phi}) + 1)} \geq 4 \\
&\Leftrightarrow (e^{i\Phi}(2 - e^{i\Phi}) + 1)(e^{-i\Phi}(2 - e^{-i\Phi}) + 1) \geq 4 \\
&\Leftrightarrow (2 - e^{i\Phi})(2 - e^{-i\Phi}) + e^{i\Phi}(2 - e^{i\Phi}) + e^{-i\Phi}(2 - e^{-i\Phi}) + 1 \geq 4 \\
&\Leftrightarrow 6 - (e^{2i\Phi} + e^{-2i\Phi}) \geq 4 \\
&\Leftrightarrow 6 - \cos 2\Phi \geq 4 \\
&\Leftrightarrow \cos 2\Phi \leq 1
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\Phi < 1 \text{ ve } \cos 2\Phi = 1, \Phi \in \{0, \pi\}$$

Sonuç olarak $0 \in D_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{4})$ dir.

3.2.2 Ana daire

Ana kardiyoidin sol kısmına $c = -0.75$ noktasında tutturulmuş olan daire şeklindeki f nin 2- periyotlu attracting noktalara sahip c - değerlerinden oluşan bölge “**ana daire**”dir. f nin bir kere tekrarlanmasıyla oluşan sabit noktalar 1- periyotlu olup ana kardiyoidi oluşturmuştu. Şimdi de f nin iki kere tekrarlanmasıyla oluşan 2- periyotlu noktaları oluşturalım. $f: z \longrightarrow z^2 + c$ iterasyonunda tekrarlanma sayısı iki ise oluşacak eşitlik:

$$(z^2 + c)^2 + c = z$$

dir. f nin bir kere tekrarlanmasıyla oluşan sabit noktaların denklemi olan $z^2 - z + c = 0$, $(z^2 + c)^2 + c = z$, 4. dereceden polinomunun bir çarpanıdır. Gerçekten,

$$(z^2 + c)^2 - z + c = (z^2 + z + 1 + c).(z^2 - z + c)$$

dir ve $z^2 - z + c = 0$ denkleminin çözümleri $\frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$ olup bir önceki bölümdeki hesaplanmıştır. $z^2 + z + 1 + c = 0$ denkleminin çözümleri olan z_1 ve z_2 2- periyotlu olup

$$z_1^2 + c = z_2$$

$$z_2^2 + c = z_1$$

dir. Çözüm için bu eşitlikler yetersiz olup, $f: z \longrightarrow (z^2 + c)^2 + c$ dönüşümünün z_1 periyodik noktasında türevini alırsak;

$$2(z_1^2 + c).2z_1$$

bulunur. $z_1^2 + c = z_2$ olduğundan yukarıda yerine yazılırsa

$$4z_1 \cdot z_2$$

elde edilir.

$z^2 + z + 1 + c = 0$ kuadratik polinomunun köklerinin çarpımı kısaca $z_1 \cdot z_2 = c + 1$ olarak yazılabilir. O halde $4(c + 1)$ elde edilir ki bu değer ana daireyi oluşturan denklemler için gereklidir. 2- periyotlu periyodik attracting noktalara sahip c - değerlerinin bulunduğu ana dairenin sınırı $|c + 1| = \frac{1}{4}$, içi $|c + 1| \leq \frac{1}{4}$ denklemlerinin çözümü olan c - değerleri ile belirlenir. Bu da bize ana dairenin merkezi $c = -1$ de olan, $\frac{1}{4}$ yarıçaplı bir daire olduğunu söyler.

Lemma 3.2 : $|c + 1| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow f, 2$ - periyotlu attracting sabit noktalara sahiptir.

İspat: Ana daireyi oluşturan 2- periyotlu periyodik attracting noktalara sahip c - değerlerini kutupsal koordinatlarda elde edelim:

$$\begin{array}{ll} z \longrightarrow z^2 + c & 1. \text{ iterasyon} \\ z^2 + c \longrightarrow (z^2 + c)^2 + c & 2. \text{ iterasyon} \end{array}$$

olup, 2. iterasyon sonucu oluşacak eşitlik:

$$(z^2 + c)^2 + c = z$$

dir. c ye göre bir polinom olarak düşünülüp, çözümlerse:

$$z^4 + 2z^2c + c^2 + c - z = 0$$

$$c^2(2z^2 + 1) + z^4 - z = 0$$

olup, yine 2. dereceden bir polinomun çözümünden, polinomun kökleri c_1 ve c_2 olmak üzere $c_1 \cdot c_2 = z^4 - z$ ve $c_1 + c_2 = -2z^2 - 1$ dir. $c_1 \cdot c_2 = z^4 - z$ eşitliğinin çarpanlara ayrılmış hali

$$z^4 - z = (z - z^2)(-z^2 - z - 1)$$

olup, $c_1 = z - z^2$ ve $c_2 = -z^2 - z - 1$ eşitliklerinden ilki ana kardioidi belirleyen c -değerlerini hesapladığından göz ardı edilebilir. O halde $f(f(z)) = f^2(z)$ olmak üzere:

$$|(f^2)'(z)| = 1$$

eşitliğinin çözümü olan neutral z noktaları ana dairenin sınırını,

$$|(f^2)'(z)| < 1$$

eşitsizliğinin çözümü olan attracting z noktaları ise ana dairenin içini oluşturur.

$$(f^2)'(z) = 4z(z^2 + c)$$

olup kutupsal koordinatlarda

$$4z(z^2 + c) = e^{i\Phi}$$

dir. O halde

$$4z(z^2 + c) = e^{i\Phi}$$

ve

$$c = -z^2 - z - 1$$

eşitliklerinden

$$c = \frac{e^{i\Phi}}{4} - 1$$

elde edilir. Bu eşitlik $c + 1 = \frac{e^{i\Phi}}{4}$ olup, bu da $|c + 1| = \frac{1}{4}$ demektir.

$$c = \frac{1}{4} (\cos \Phi + i \sin \Phi) - 1$$

eşitliğinden $c = x + iy$ olmak üzere

$$x = \frac{\cos \Phi}{4} - 1$$

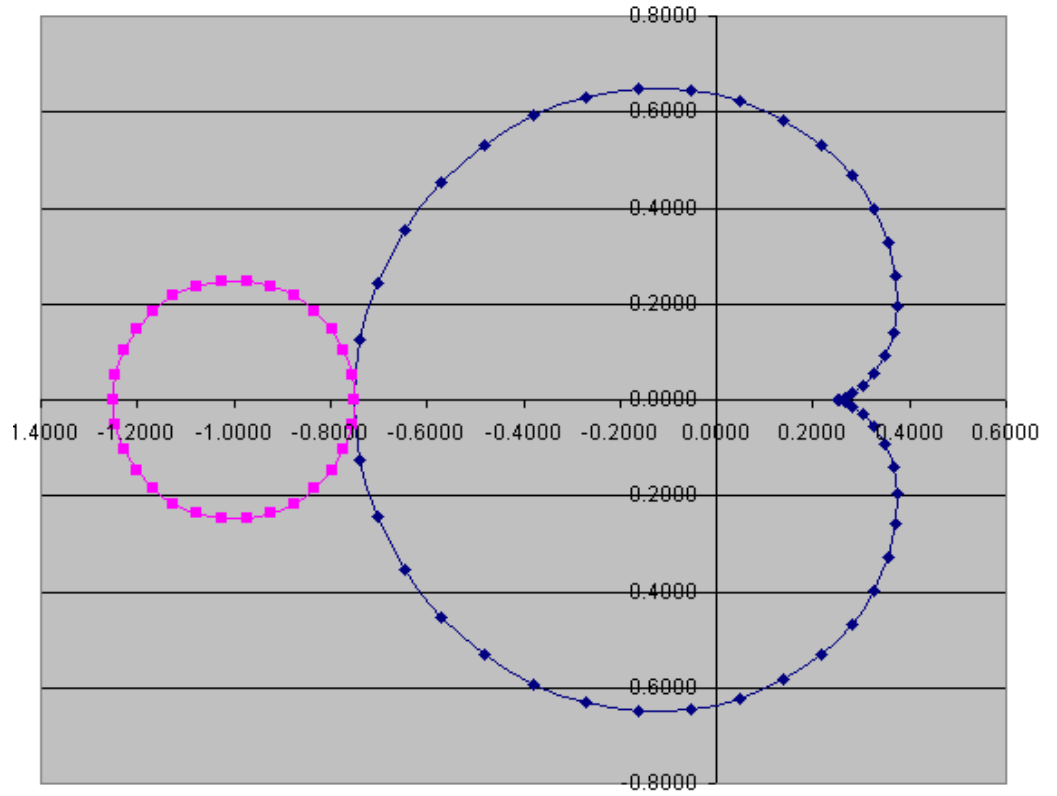
$$y = \frac{\sin \Phi}{4}$$

elde edilir. Φ nin seçimine bağlı olarak ana daireyi oluşturan bazı noktalar aşağıdaki Çizelge 3.2' de gösterilmiştir.

Çizelge 3.2 Ana daireyi oluşturan bazı Φ , x ve y değerleri

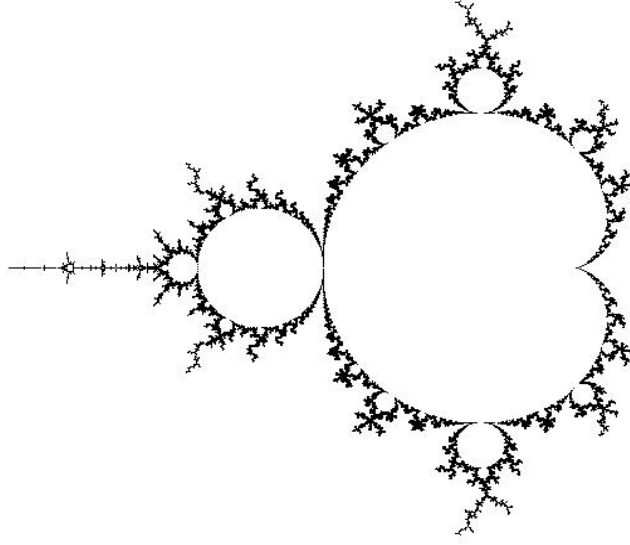
Φ	x	y
0	-0.75	0.0
$\pi/2$	-1	0.32858
π	-1.25	0.0
$3\pi/2$	-1	-0.25

$0 \leq \Phi < 2\pi$ olmak üzere Φ nin 30 farklı değeri için çizilmiş ana dairenin sınırı Şekil 3.6' da gösterilmiştir.



Şekil 3.6 Ana daire ile ana kardioid

Birçok manada Mandelbrot cümlesinin en ilginç kısmı sınırır. Sınırın aslında oldukça karmaşık bir yapıya sahip olduğu, çok büyük ölçeklerde incelendiğinde ortaya çıkmaktadır (Şekil 3.7).



Şekil 3.7 Mandelbrot cümlesinin sınırı

3.3 n - Periyotlu Yörünge'nin Merkezi ($n \geq 1$)

n - periyotlu yörünge'nin oluşturduğu cümlenin merkezi, $z_0 = 0$ kritik noktasının n -inci iterasyonunun değerini 0 yapan c - değeridir.

$n = 1$, 1- Periyotlu yörünge (Ana kardivoid):

1- periyotlu yörünge'nin merkezini bulmak için f nin 1-inci iterasyonu ile ilgileniriz. $z_0 = 0$ iken $f^{(1)}(0) = 0$ eşitliğini gerçekleştirecek c değerini arayalım:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = f^{(1)}(0) = z_0^2 + c = 0^2 + c = c$$

$$\Rightarrow f^{(1)}(0) = c = 0 \Rightarrow c = 0.$$

O halde

$$f^{(1)}(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

olup 1- periyotlu ana kardioidin merkezi $c = 0 + i0$ noktasıdır.

$n = 2$, 2- Periyotlu yörünge (Ana daire):

2- periyotlu yörüngeyi bulmak için de f nin 2-nci iterasyonu ile ilgileniriz. $z_0 = 0$ iken $f^{(2)}(0) = 0$ eşitliğini gerçekleştirecek c değerini arayalım:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = f^{(1)}(0) = z_0^2 + c = 0^2 + c = c$$

$$z_2 = f^{(2)}(0) = z_1^2 + c = c^2 + c$$

$$\Rightarrow f^{(2)}(0) = c^2 + c = 0 \text{ ise } c = -1.$$

O halde

$$f^{(2)}(0) = 0 \Leftrightarrow c = -1$$

olup 2- periyotlu ana dairenin merkezi $c = -1 + i0$ noktasıdır.

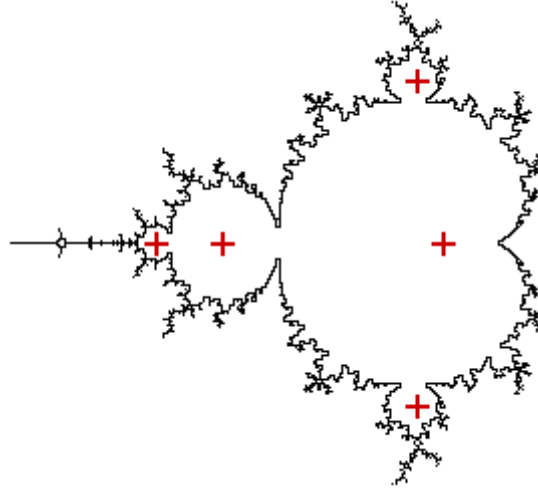
Bu örnekleri genelleştirirsek;

n - Periyotlu yörünge:

n - periyotlu yörüngeyi bulmak için $z_0 = 0$ başlangıç noktası için f nin n -inci iterasyonunu 0 yapan c - değeridir (Şekil 3.8).

$$f^{(n)}(0) = 0 \Leftrightarrow c \text{- değeri } n\text{- periyotlu yörüngeyi bulmak için } c \text{- değeridir.}$$

(www.classes.yale.edu/fractals/).



Şekil 3.8 Ana kardiyoid, ana daire ve diğer tomurcukların merkezleri

3.4 Mandelbrot Cümlesinin Tomurcukları

$f(z) = z^2 + c$; $f(z) = z$ eşitliğinin çözümü olan c ler 1- periyotlu sabit noktalar,

$f(f(z)) = (z^2 + c)^2 + c$; $f^2(z) = z$ eşitliğinin çözümü olan c ler 2- periyotlu sabit noktalar,

$f(f(f(z))) = ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c$; $f^3(z) = z$ eşitliğinin çözümü olan c ler 3- periyotlu sabit noktalar,

⋮

$f(f(f(z) \dots)) = (((z^2 + c)^2 + c)^2 + c \dots)$; $f^n(z) = z$ eşitliğinin çözümü olan c ler n - periyotlu sabit noktalardır.

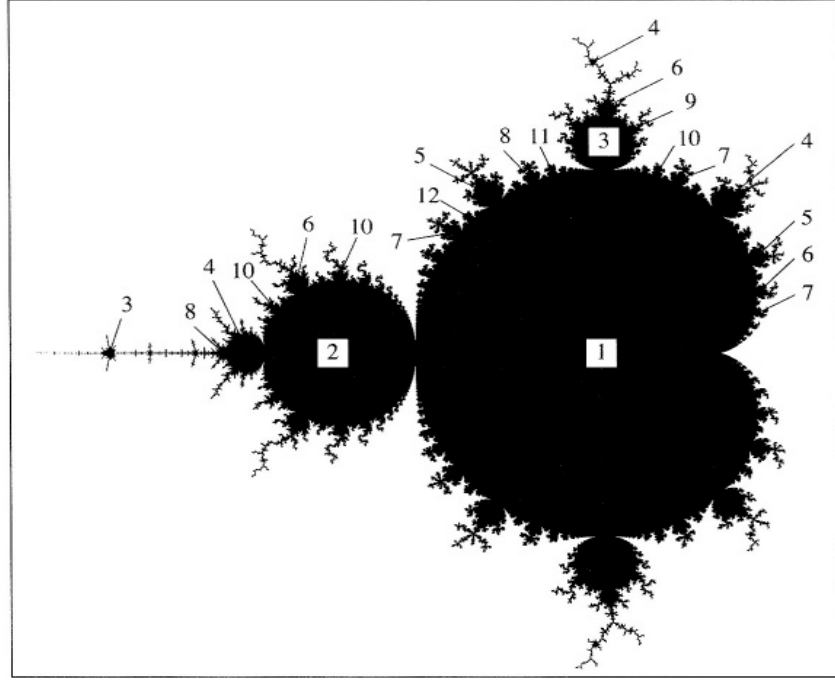
Mandelbrot cümlesinin sınırındaki tomurcuklar $f(z) = z^2 + c$ nin iterasyon sayısına bağlıdır. Daha önceki hesaplamalardan;

Ana kardiyoid: 1- periyotlu noktalara sahip bir cümle,

Ana daire: 2- periyotlu noktalara sahip bir cümle,

olarak bilinmektedir ve Mandelbrot cümlesinin sınırındaki her tomurcuğun, ana kardioid ve ana daire örneğinde olduğu gibi, iterasyon sayısına bağlı bir periyodu vardır.

3.4.1 Tomurcukların periyotları



Şekil 3.9 Mandelbrot cümlesi ve tomurcukları

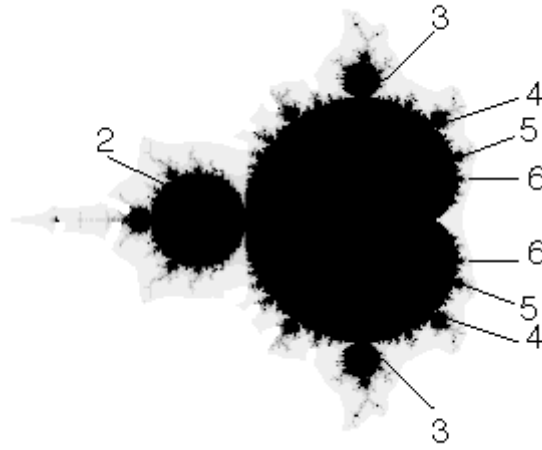
Şekil 3.9' da görülen 1 numaralı bölge ana kardioid, 2 numaralı bölge de ana dairedir. 3 numaralı bölge $f(z) = z^2 + c$ nin üç kere tekrarlanmasıyla oluşan 3- periyotlu noktaların cümlesidir.

Ana kardioidin üst kısmına 2- periyotlu tomurcuk da dahil olmak üzere tutturulmuş tomurcuklar;

- 3- periyotlu bir tomurcuk,
- 4- periyotlu bir tomurcuk,
- 5- periyotlu bir tomurcuk,

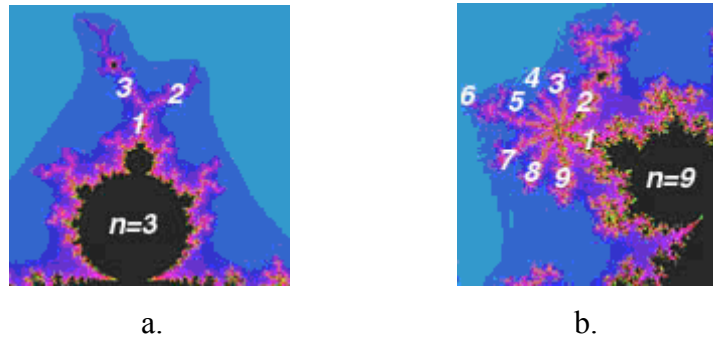
⋮

şeklinde devam eder. Bu üst temel seridir. Ana kardiyoidin alt kısmında oluşacak serinin adı da alt temel seridir. Bu da Mandelbrot cümlesinin ana kardiyoidine tutturulmuş olan tomurcukların kartezyen koordinatlarda, x -eksenine göre simetrik bir şekilde sıralandıkları Şekil 3.10’ da gösterilmiştir (www.classes.yale.edu/fractals/).



Şekil 3.10 Üst temel seri ve alt temel seri

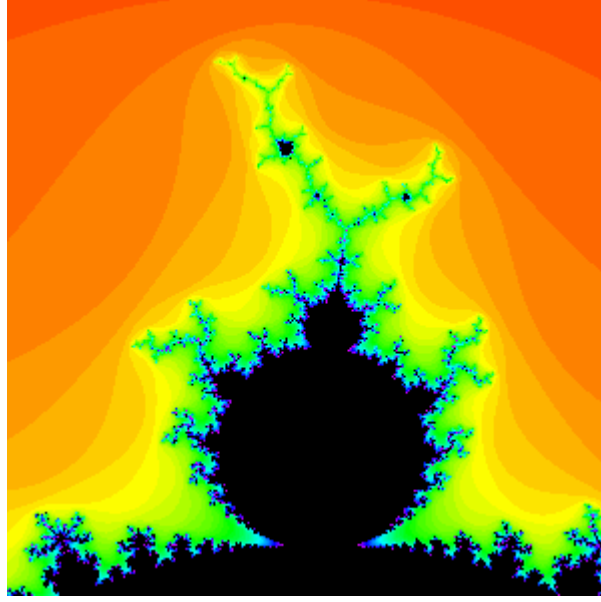
Tomurcukların periyotları, f kuadratik polinomunun tekrarlanma sayısı ile belirlenebildiği gibi üzerlerindeki anten sayılarıyla da belirlenebilir: n - periyotlu bir tomurcuğun anten sayısı da n dir. Buna dair resimler Şekil 3.11’ de verilmiştir.



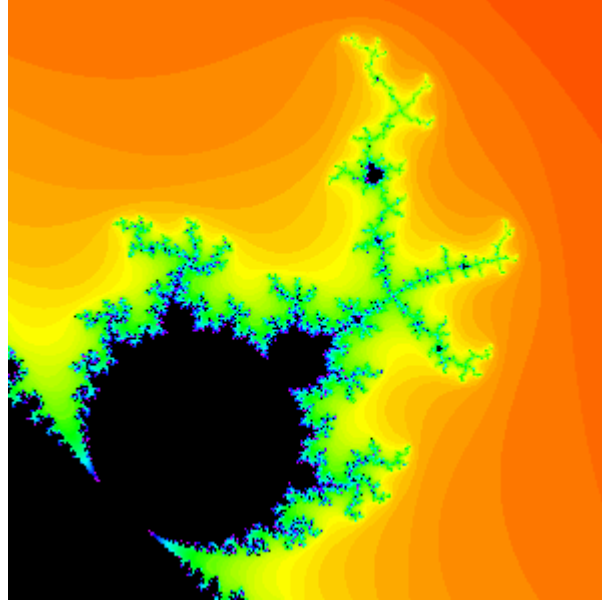
Şekil 3.11 n - periyotlu n antene sahip tomurcuklar

- a. $n = 3$, 3- periyotlu 3 antene sahip tomurcuk
- b. $n = 9$, 9- periyotlu 9 antene sahip tomurcuk

Ana kardiyoide tutturulmuş 3- periyotlu ve 4- periyotlu tomurcuklar Şekil 3.12 ve Şekil 3.13' te gösterilmiştir.



Şekil 3.12 Üst temel serinin 3- periyotlu elemanı

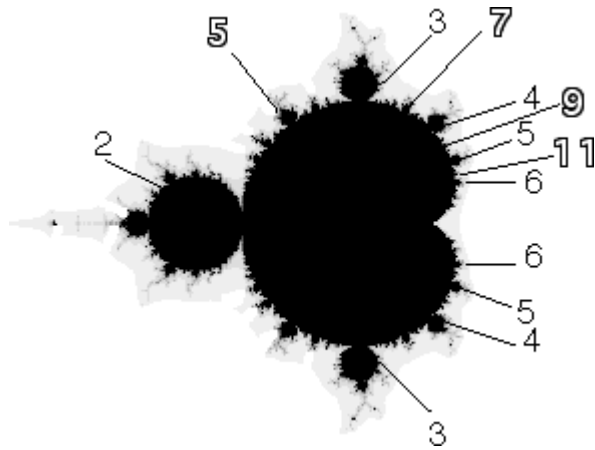


Şekil 3.13 Üst temel serinin 4- periyotlu elemanı

Temel serinin n - ve $(n + 1)$ - periyotlu tomurcukları arasındaki en küçük periyotlu tomurcuğun değeri $(2n + 1)$ dir. Örneğin:

- 2- ile 3- periyotlu tomurcukların arasındaki 5- periyotlu,
- 3- ile 4- periyotlu tomurcukların arasındaki 7- periyotlu,
- 4- ile 5- periyotlu tomurcukların arasındaki 9- periyotlu,
- ⋮

tomurcuk olup, tomurcukların periyotlarını bulma işlemi sonsuza doğru bu şekilde gider. Temel seriden üreyecek bu tomurcuklara 2. nesil tomurcuk adını verelim (Şekil 3.14).



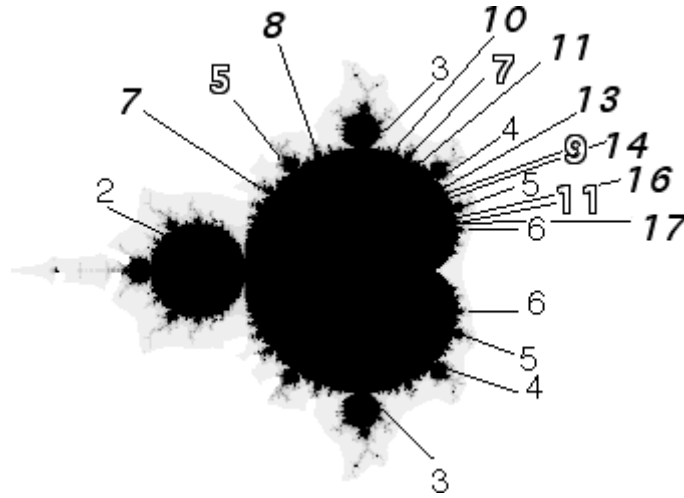
Şekil 3.14 Temel seriden elde edilen 2. nesil tomurcuklar

Temel serinin elemanlarından Farey toplamı ile elde edilen ardışık tomurcuklar ile temel serinin elemanları yani, 1. nesil ve 2. nesil tomurcuklar arasında da yine benzer ilişki olup en küçük periyotlu tomurcuğun değeri bunların periyot değerlerinin toplamıdır. Örneğin:

- 2- ile 5- periyotlu tomurcukların arasındaki 7- periyotlu,
- 5- ile 3- periyotlu tomurcukların arasındaki 8- periyotlu,
- 3- ile 7- periyotlu tomurcukların arasındaki 10- periyotlu,
- 7- ile 4- periyotlu tomurcukların arasındaki 11- periyotlu,
- 4- ile 9- periyotlu tomurcukların arasındaki 13- periyotlu,

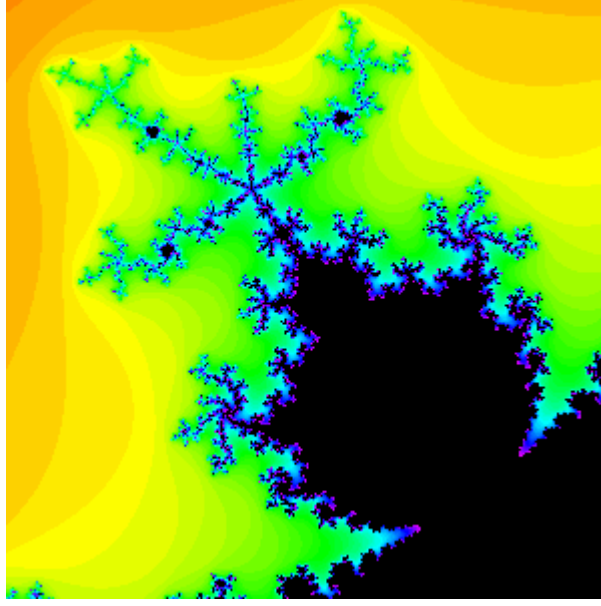
9- ile 5- periyotlu tomurcukların arasındaki 14- periyotlu,
5- ile 11- periyotlu tomurcukların arasındaki 16- periyotlu,
11- ile 6- periyotlu tomurcukların arasındaki 17- periyotlu,
⋮

tomurcuk olup bu şekilde devam eder. Bunlara da 3. nesil tomurcuk adını verelim (Şekil 3.15).

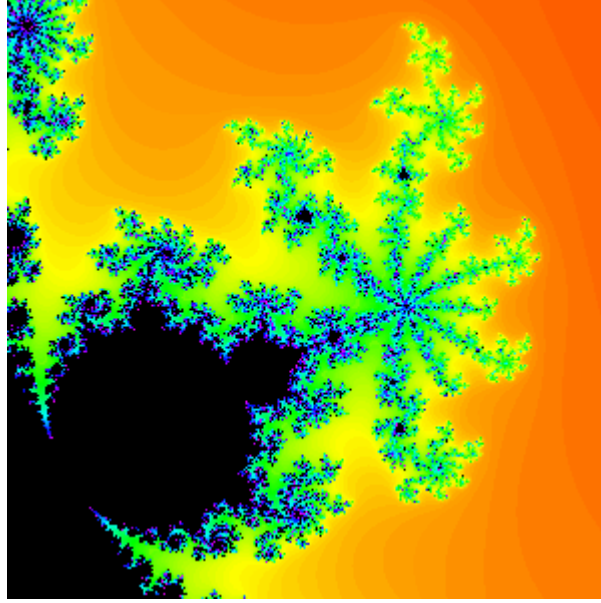


Şekil 3.15 Temel seriden elde edilen 3. nesil tomurcuklar

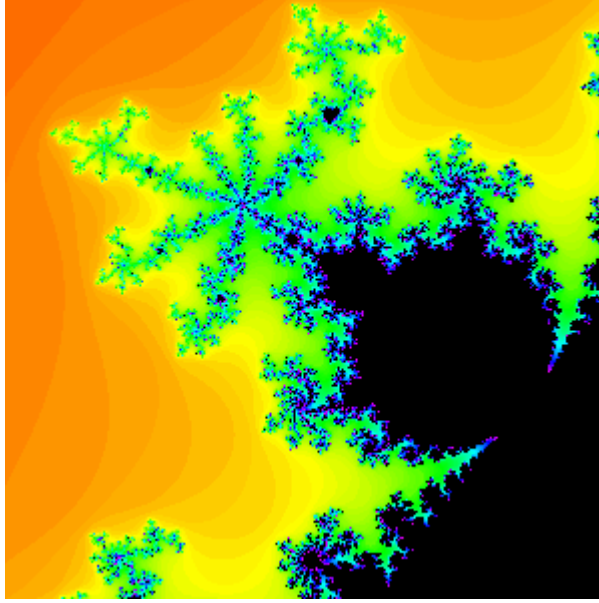
Farey toplamı ile elde edilen ve 2. nesile örnek teşkil eden tomurcuklar Şekil 3.16 ve Şekil 3.17' de, 3. nesil tomurcuk için verilen bir örnek ise Şekil 3.18' de gösterilmiştir (www.classes.yale.edu/fractals/).



Şekil 3.16 Temel seriden Farey toplamı ile elde edilen 2. nesil 5- periyotlu tomurcuk



Şekil 3.17 Temel seriden Farey toplamı ile elde edilen 2. nesil 9- periyotlu tomurcuk



Şekil 3.18 3. nesil 7- periyotlu tomurcuk

Ardışık tomurcukların periyotlarını bulmak için kullanılan bu toplama yöntemi, her derecedeki periyotlar için sonuç verir. Ardışık iki tomurcuğun periyot değerleri p ve q olmak üzere bunların arasındaki en küçük periyot değeri $p + q$ ile hesaplanır (Peitgen *et al.* 1992).

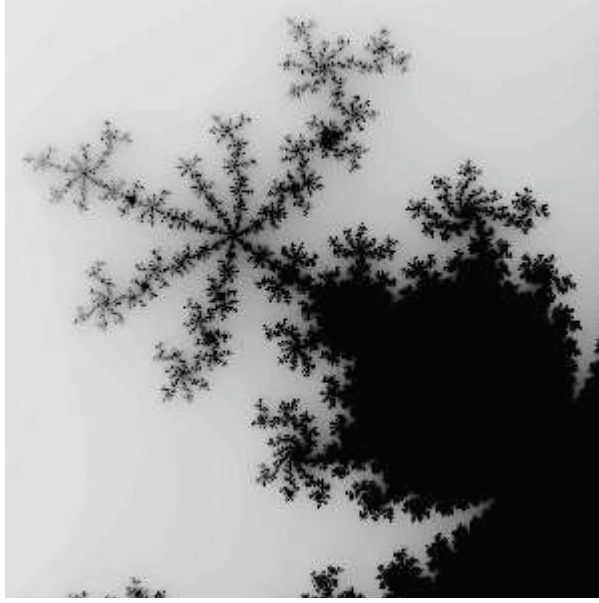
3.4.2 Rotasyon sayıları

Ana kardioid üzerindeki tomurcukların kendi geometrileri birazdan bahsedeceğimiz $\frac{p}{q}$ rotasyon sayılı tomurcukları fark etmemizi sağlamıştır. Tomurcukların kaçınıcı nesil oldukları ve periyot değerleri bizi, p ve q rakamlarını da kullanarak bir formül geliştirmeye itmektedir. $\frac{p}{q}$ bir rasyonel sayı olmak üzere p ile tomurcuğun nesil sayısı, q ile de periyodu gösterilmek üzere $\frac{p}{q}$ sayısına **tomurcuğun rotasyon sayısı** denir. Bir tomurcuk p ve q sayılarıyla belirlenmektedir. Tomurcukların periyot toplamlarına ilişkin verdiğimiz Farey toplamı kuralını şimdi de $\frac{p}{q}$ rotasyon sayılarına uygulayacağız. O halde birkaç örnekle inceleyelim:



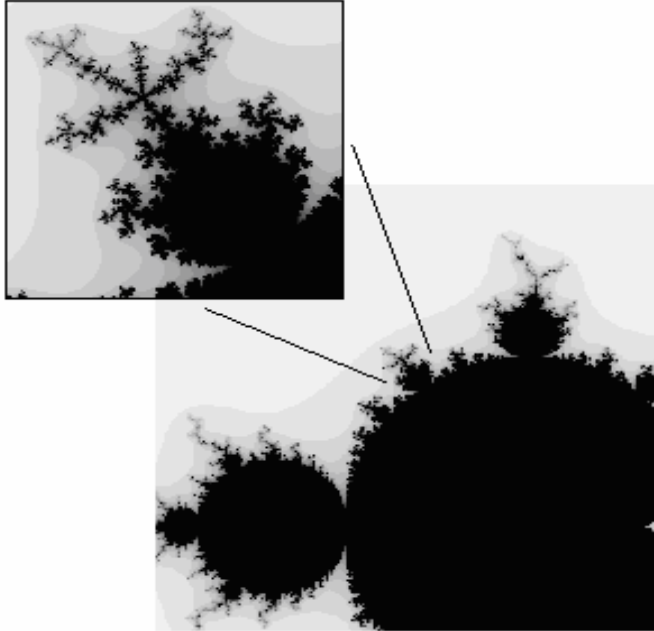
Şekil 3.19 $\frac{2}{5}$ rotasyon sayılı tomurcuk

Şekil 3.19' da görülen $\frac{2}{5}$ rotasyon sayılı tomurcuktur. Yani bu tomurcuk 2. nesil ve 5-periyotludur. f kuadratik polinomu, daire şeklinde olan geniş kısımdaki her c - değeri için rotasyon sayısı $\frac{2}{5}$ olan bir **attracting(çeken) yörünge** belirtir. Bu tomurcuğun üst kısmının bağlantı noktasından yayılan 5 tane **anten** vardır, bunlardan biri $\frac{2}{5}$ rotasyon sayılı tomurcuğa doğrudan bağlı olan **ana antendir**.



Şekil 3.20 $\frac{3}{7}$ rotasyon sayılı tomurcuk

Bir diğer örnek de şekil 3.20' de görülen $\frac{3}{7}$ rotasyon sayılı tomurcuktur. Üst kısmındaki bağlantı noktasından yayılan 7 tane anteni vardır.

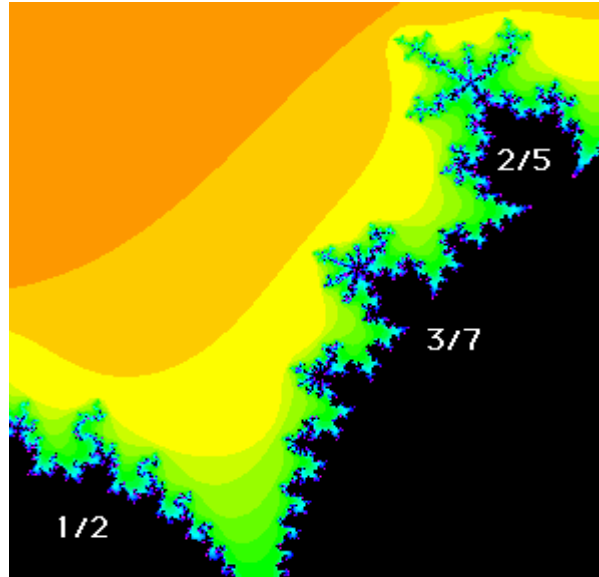


Şekil 3.21 $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$

Mandelbrot cümlerinin geometrisi ile dinamikleri arasındaki etkileşim hakkında birçok hikaye vardır. Şekil 3.21’de $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ rotasyon sayılı tomurcuklar görülmektedir. Sol taraftaki büyük olan $\frac{1}{2}$ rotasyon sayılı, tepe kısmındaki $\frac{1}{3}$ rotasyon sayılı tomurcuktur. Bu iki tomurcuk arasında bu ikisinden daha küçük sonsuz çoklukta tomurcuk vardır fakat bunların en büyüğünün $\frac{2}{5}$ rotasyon sayılı tomurcuk olduğu açıkça görülmektedir. O halde $\frac{2}{5}$ rotasyon sayılı tomurcuk $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ rotasyon sayılı tomurcukların Farey toplamı ile elde edilebilir:

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$

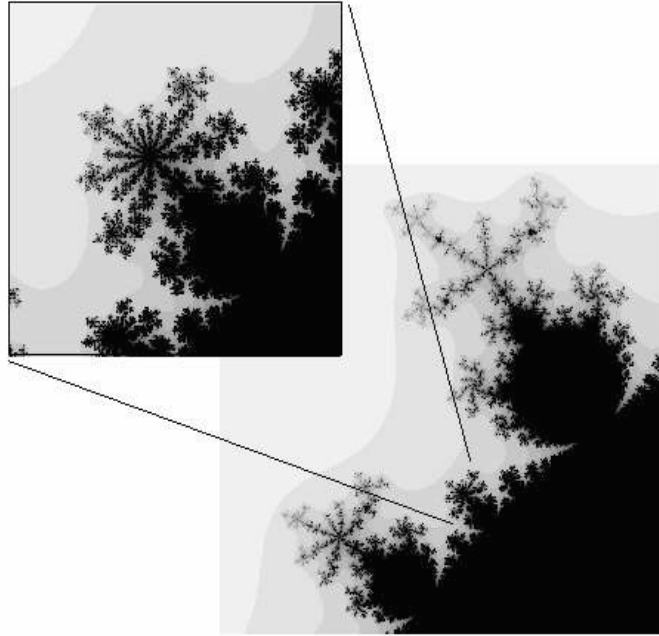
Yani verilen iki tomurcuk arasındaki en büyük tomurcuğun sayısını elde etmek için verilen kesirlerin payları toplanarak paya, paydaları toplanarak paydaya yazılır.



Şekil 3.22 $\frac{1}{2} \oplus \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$

Üst temel serinin elemanı olan $\frac{1}{2}$ rotasyon sayılı tomurcuk ile bir önceki örnekte elde edilen $\frac{2}{5}$ rotasyon sayılı tomurcuğunun Farey toplamı $\frac{1}{2} \oplus \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$ olup, $\frac{3}{7}$ rotasyon sayılı tomurcuk Şekil 3.22' de açıkça görülmektedir.

Şekil 3.23' de, sırasıyla, daha önce elde edilen $\frac{2}{5}$ ve $\frac{3}{7}$ rotasyon sayılı tomurcukların arasındaki en büyük tomurcuk olan $\frac{5}{12}$ rotasyon sayılı tomurcuğun sayısının $\frac{2}{5} \oplus \frac{3}{7} = \frac{5}{12}$ Farey toplamı ile elde edilişi gösterilmektedir.



Şekil 3.23 $\frac{2}{5} \oplus \frac{3}{7} = \frac{5}{12}$

$f(z) = z^2 + c$ dönüşümü altında Mandelbrot cümlesinin ana kardiyoidinin sınırını oluşturan c - değerlerini, Φ parametresine bağlı olarak $c(\Phi) = \frac{e^{i\Phi}}{2} - \frac{e^{2i\Phi}}{4}$, $0 \leq \Phi < 2\pi$ şeklinde ifade etmiştik. f fonksiyonu ana kardiyoidin sınırını oluşturan $c(\Phi)$ değerinde neutral(etkisiz) sabit noktaya sahiptir. O halde neutral sabit noktanın tanımından, f nin

$c(\Phi)$ değerindeki türevi 1 olup bu noktadaki türevi $e^{2\pi i\Phi}$ dir. Ana kardiyoide $c(\Phi)$ noktasında tutturulmuş $\frac{p}{q}$ rotasyon sayılı tomurcuğun Φ açısı;

$$\Phi = 2\pi \frac{p}{q}$$

ile tanımlıdır (Devaney 1999).

Bazı $\frac{p}{q}$ rotasyon sayılı tomurcuklar için örnekler verelim:

Örnek 3.4 : $\frac{p}{q} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi = 2\pi \frac{1}{2} = 180^\circ$

$\frac{1}{2}$ rotasyon sayılı tomurcuk ana kardiyoide $\Phi = 180^\circ$ açısı ile $c(\Phi)$ noktasında tutturulmuş olup bu tomurcuk için

$$\begin{aligned} c(\Phi) &= \frac{e^{i\Phi}}{2} - \frac{e^{2i\Phi}}{4} \\ &= \frac{\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ}{2} - \frac{\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ}{4} \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

dir.

$\frac{1}{2}$ rotasyon sayılı tomurcuk ana kardiyoide yukarıdaki hesaplama ile bulduğumuz $-\frac{3}{4}$ noktasında tutturulmuş olan ana dairedir.

$$\text{Örnek 3.4 : } \frac{p}{q} = \frac{1}{3} \Rightarrow \Phi = 2\pi \frac{1}{3} = 120^\circ$$

$\frac{1}{3}$ rotasyon sayılı tomurcuk ana kardiyoide $\Phi = 120^\circ$ açı ile $c(\Phi)$ noktasında tutturulmuş olup bu tomurcuk için

$$\begin{aligned} c(\Phi) &= \frac{e^{i\Phi}}{2} - \frac{e^{2i\Phi}}{4} \\ &= \frac{\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ}{2} - \frac{\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) i \end{aligned}$$

dir.

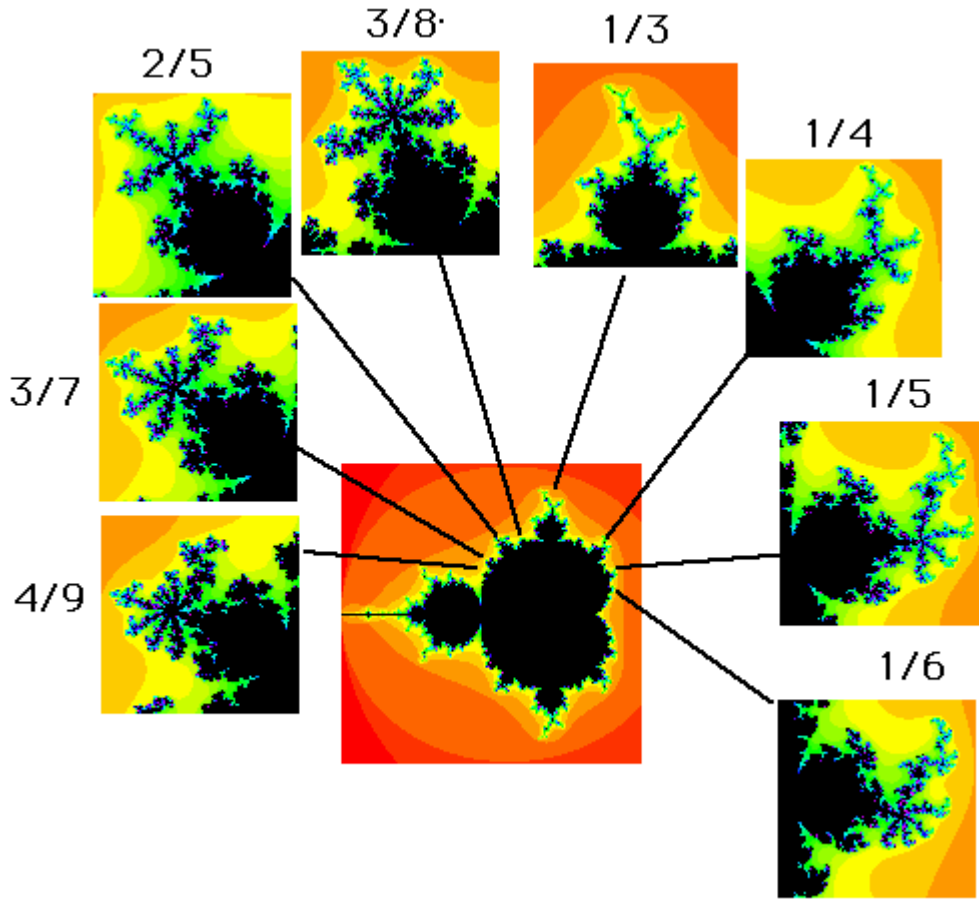
$$\text{Örnek 3.6 : } \frac{p}{q} = \frac{1}{4} \Rightarrow \Phi = 2\pi \frac{1}{4} = 90^\circ$$

$\frac{1}{4}$ rotasyon sayılı tomurcuk ana kardiyoide $\Phi = 90^\circ$ açı ile $c(\Phi)$ noktasında tutturulmuş olup bu tomurcuk için

$$\begin{aligned} c(\Phi) &= \frac{e^{i\Phi}}{2} - \frac{e^{2i\Phi}}{4} \\ &= \frac{\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ}{2} - \frac{\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

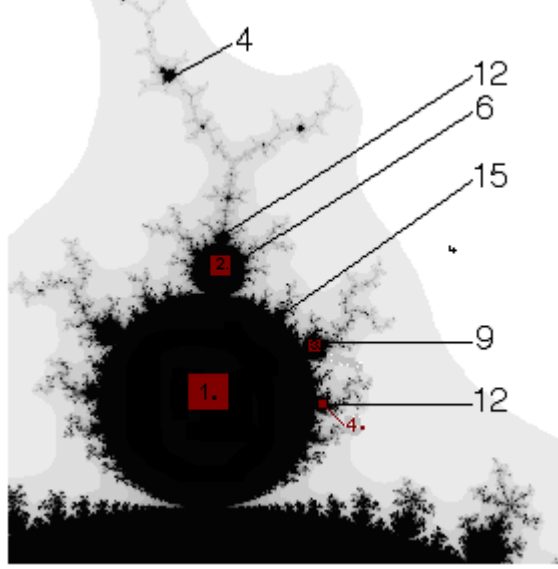
dir.

0 ile 1 arasındaki her bir sayıya bir $\frac{p}{q}$ rotasyon sayılı tomurcuk karşılık gelir. Yani Mandelbrot cümlesinin üzerindeki tomurcuklar ile reel sayıların (0,1) açık aralığındaki sayılar eşleşirler (Şekil 3.24).



Şekil 3.24 Mandelbrot cümlesinin tomurcukları ve bu tomurcukların rotasyon sayıları

3.4.3 Tomurcukların üzerindeki tomurcuklar



Şekil 3.25 Tomurcukların tomurcukları

Mandelbrot cümlesinin sınırı onun en karmaşık yeri olup, burada hem ana kardiyoid üzerine hem de ana daire üzerine tutturulmuş sonsuz çoklukta tomurcuk vardır. Her n -periyotlu tomurcuğun etrafına tutturulmuş olan tomurcukların periyotları bulunurken de temel seri ile Farey dizisi kuralı uygulanır fakat yeni periyot değerleri, tomurcuğun periyodu olan n ile çarpılarak elde edilir. Örneğin 3- periyotlu daireye tutturulmuş daireler şöyle hesaplanır: 3- periyotlu daire temel seride olduğu gibi 1. daire olarak kabul edilerek işlem yapılır. 3- periyotlu daireye tutturulmuş ilk daire de 2. daireymiş gibi düşünülür ancak periyodu $3 \cdot 2 = 6$, 3- periyotlu daireye tutturulmuş ikinci daire de 3. daireymiş gibi düşünülür ve periyodu $3 \cdot 3 = 9$ ve üçüncü daire de 4. daireymiş gibi düşünülerek periyodu $3 \cdot 4 = 12$ olarak bulunur. Gerçekten de bu durum Şekil 3.25' ten açıkça görülmektedir (www.classes.yale.edu/fractals/).

3.4.4 Mandelbrot cümlesinin tomurcuqları arasında saklı Fibonacci dizisi

Yukarıda yapılan çalışmalar, Mandelbrot cümlesinin içinde Fibonacci dizisinin olabileceğini akla getiriyor. Şimdi adım adım Fibonacci dizisinin oluşumunu inceleyelim. Mandelbrot cümlesinde;

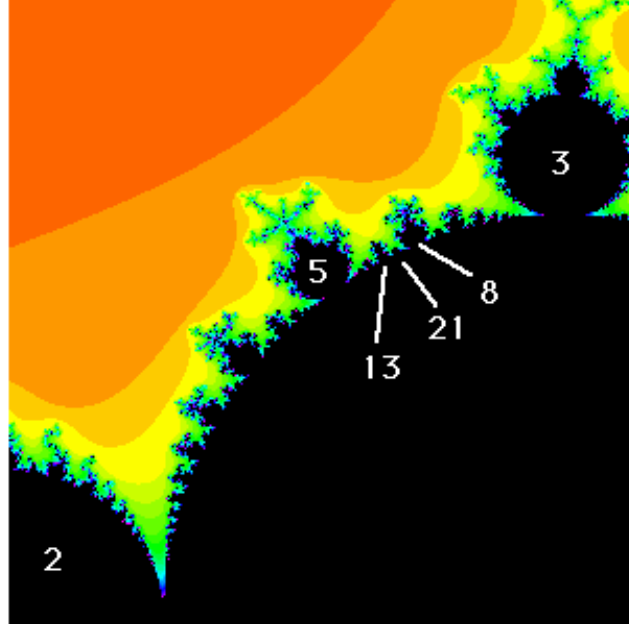
ana kardioid = 1- periyotlu,

ana daire = 2- periyotlu,

ana kardioidin hem alt hem de üst kısmında bulunan dairenin de 3- periyotlu olduğu bilinmektedir. 2- ve 3- periyotlu daireler arasındaki en düşük dereceden tomurcuğun 5- periyotlu, 3- ve 5- periyotlu daireler arasındaki tomurcuğun 8- periyotlu olduğu ve bu toplamın sonsuza doğru bu şekilde gittiği daha önceki bölümde gösterildi. O halde bunun sonucunda oluşacak dizi

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

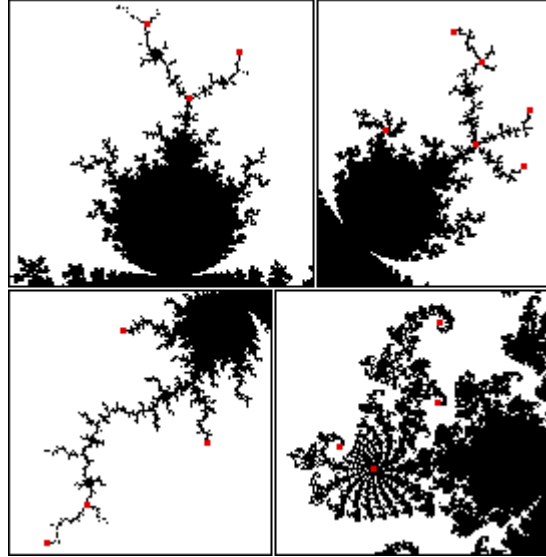
olup bir Fibonacci dizisidir (Şekil 3.26).



Şekil 3.26 Fibonacci dizisi: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

3.5 Misiurewicz Noktası

Bazı c - değerleri için $z_0 = 0$ noktası yörüngede yer almazken iterasyonlarından bazıları yörüngede yer alır. Yani periyodik olmayan bir yörünge oluşur. O halde $f(z_n) = z_n^2 + c$ iterasyonu altında periyodik olmayan yörüngeye sahip c - değerine karşılık gelen noktaya **Misiurewicz noktası** denir. Yani $z_0 = 0$ sabit nokta iken iterasyonlar sonucu oluşan diğer noktalar sabittir. Tüm Misiurewicz noktaları Mandelbrot cümlesinin sınırında yer alır. Bu noktalar dalların ucu, spirallerin merkezi ve dalların birleşme noktalarıdır. Şekil 3.27' de bazı Misiurewicz noktaları kırmızı renk ile gösterilmiştir.



Şekil 3.27 Mandelbrot cümlesinin sınırındaki Misiurewicz noktaları

Örnek 3.6 : $c = -2$ için $f(z_n) = z_n^2 + c$ altında $z_0 = 0$ noktasının yörüngesini inceleyelim:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = z_0^2 + c = 0^2 - 2 = -2$$

$$z_2 = z_1^2 + c = (-2)^2 - 2 = 2$$

$$z_3 = z_2^2 + c = 2^2 - 2 = 2$$

⋮

$$z_n = 2, n > 1$$

olup $z_0 = 0$ noktası periyodik değildir ve yörüngesi 2. iterasyondan sonra sabit kalmaktadır. Dolayısıyla $c = -2$ noktası bir Misiurewicz noktasıdır.

[\(www.classes.yale.edu/fractals/\)](http://www.classes.yale.edu/fractals/).

Örnek 3.7 : $c = i$ için $f(z_n) = z_n^2 + c$ altında $z_0 = 0$ noktasının yörüngesini inceleyelim:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = z_0^2 + c = 0^2 + i = i$$

$$z_2 = z_1^2 + c = i^2 + i = -1 + i$$

$$z_3 = z_2^2 + c = (-1 + i)^2 + i = -i$$

$$z_4 = z_3^2 + c = (-i)^2 + i = -1 + i$$

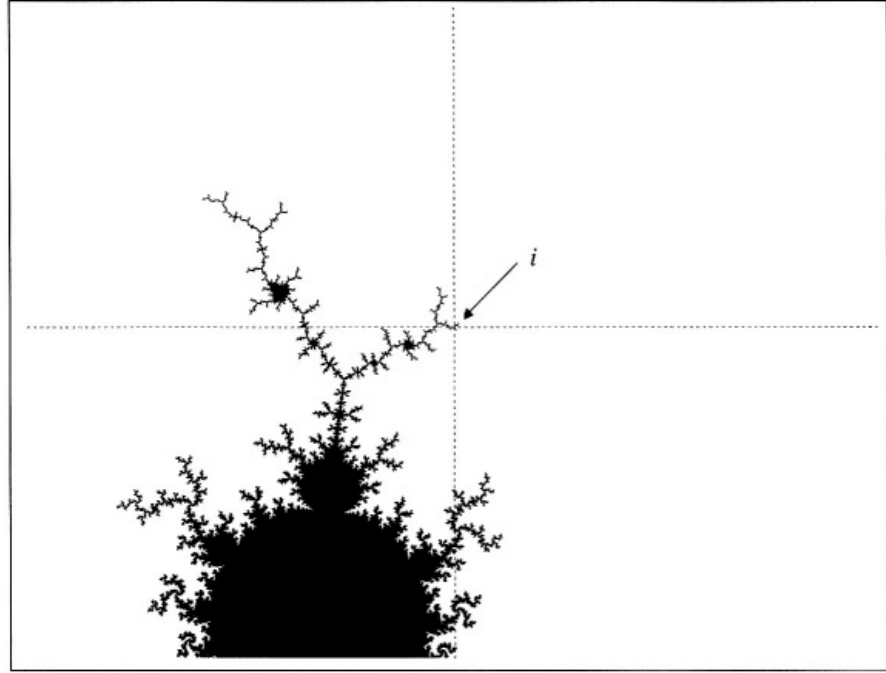
$$z_5 = z_4^2 + c = (-1 + i)^2 + i = -i$$

⋮

$$z_{2n+1} = -i, n > 1$$

$$z_{2n} = -1 + i, n > 1$$

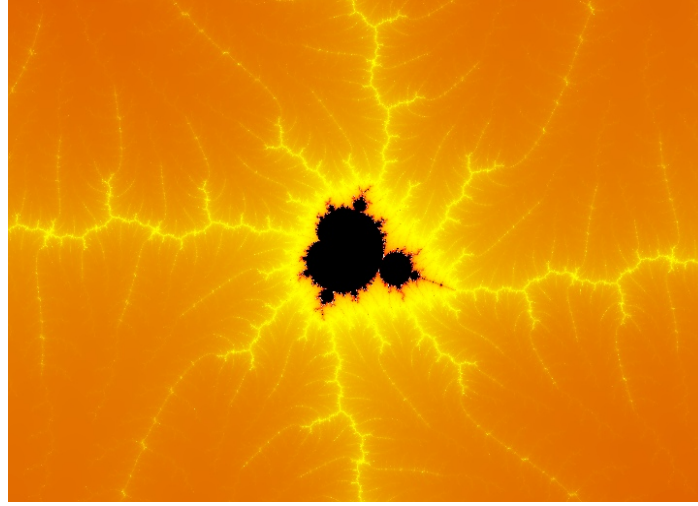
$z_0 = 0$ sabit nokta değildir fakat $c = i$ için $f(z_n) = z_n^2 + c$ iterasyonu altında belli iterasyondan hep aynı değerlerin oluştuğu görülür. 2. iterasyondan sonra periyodik yörünge oluşmaktadır. O halde $c = i$ bir Misiurewicz noktadır (Şekil 3.28).



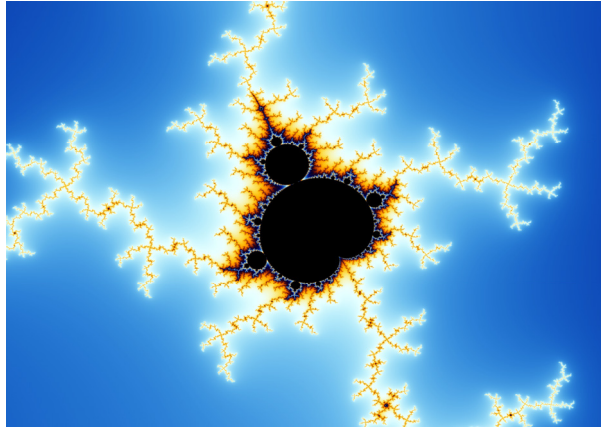
Şekil 3.28 $c = i$ Misiurewicz noktası

3.6 Mandelbrot Cümlesi ve Kendine Benzerlik (Self Similarity)

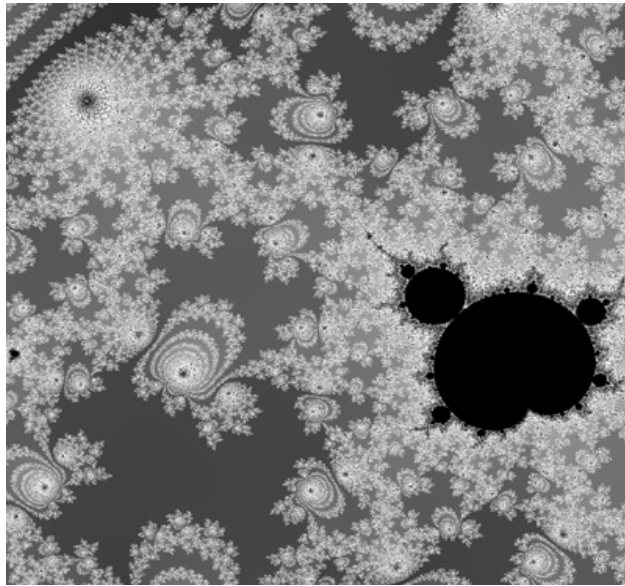
Mandelbrot cümlesi kendisinin sonsuz çoklukta kopyasını içerir. Bu yaklaşım, Mandelbrot cümlesinin kendine benzer olduğu yanlış sonucuna yol açabilir. Gerçekten her küçük Mandelbrot cümlesinin dışındaki lifler kendine has dekorasyonlara sahiptir ve her biri bir diğerinden farklıdır (Şekil 3.29).



a.



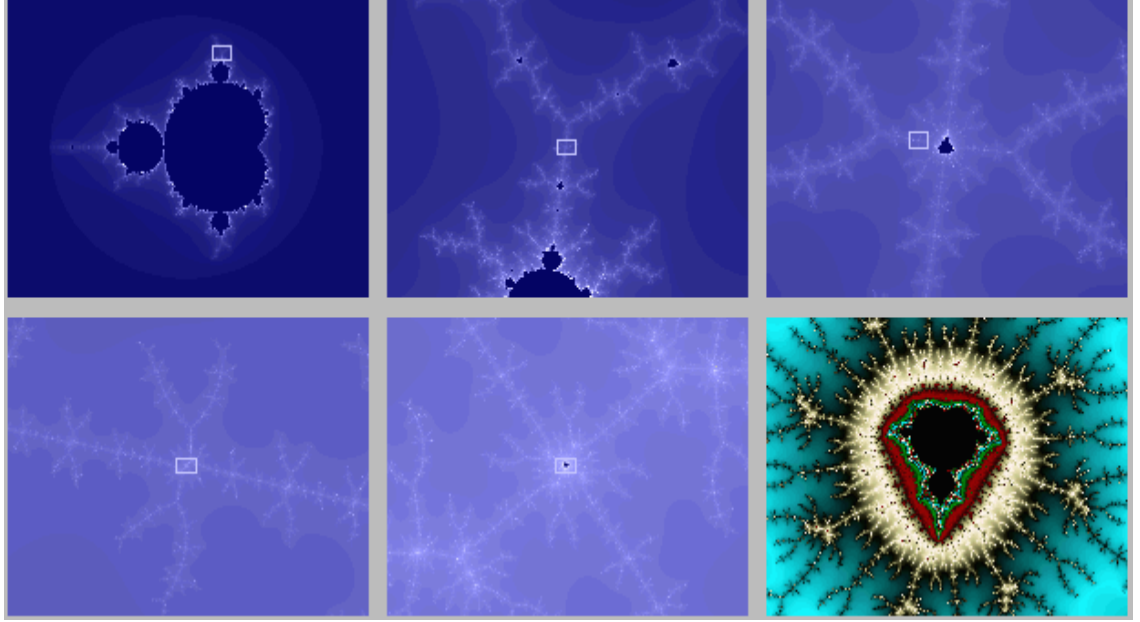
b



c.

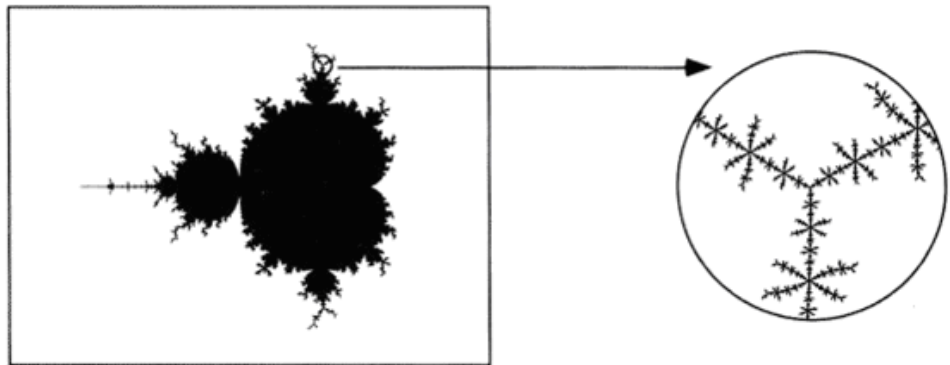
Şekil 3.29 a.b.c. Mandelbrot cümlesinin küçük kopyaları

Mandelbrot cümlesinin sınırında bulunan bir küçük kopyasının yakınlaştırılmış hali Şekil 3.30' da görülmektedir.



Şekil 3.30 Mandelbrot cümlesi ve kopyaları

Mandelbrot cümlesindeki Misiurewicz noktaları kendine benzer bir yapı sergiler. Bu benzerlik çok küçük ölçeklerde yakınlaştırıldığında görülebilir. Mandelbrot cümlesinin sınırındaki $c \approx -0,1011 + 0,9563i$ değerine karşılık gelen Misiurewicz noktasının daha küçük ölçeklerde incelendiğinde kendine benzer bir yapı sergilediği Şekil 3.31' de görülmektedir.

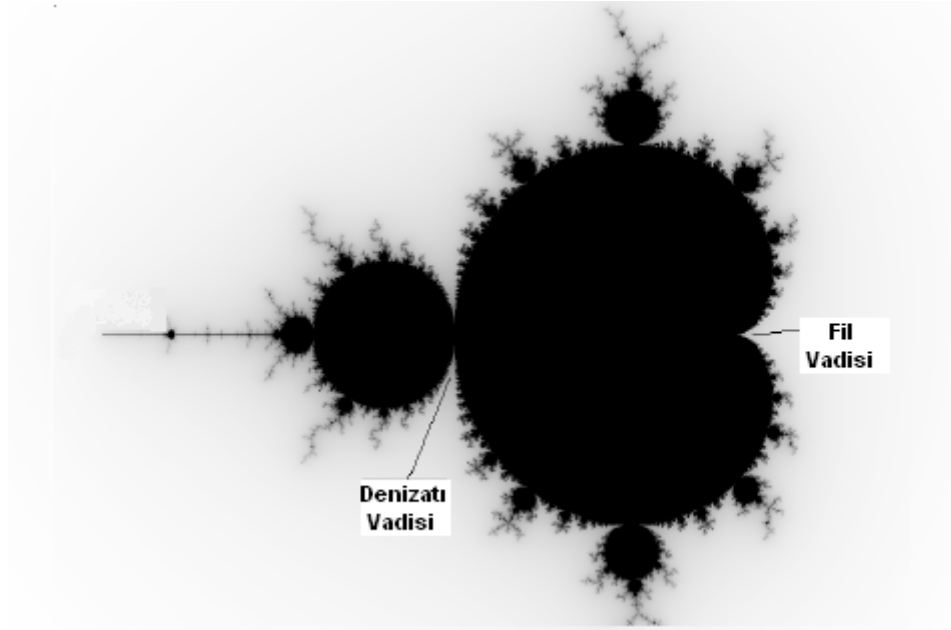


Şekil 3.31 $c \approx -0,1011 + 0,9563i$ Misiurewicz noktası etrafında kendine benzerlik

O halde Mandelbrot cümlesinin kendisi yarı kendine benzer bir cümle olup, sınırında barındırdığı Misiurewicz noktalarının etrafında kendine benzerlik mevcuttur.

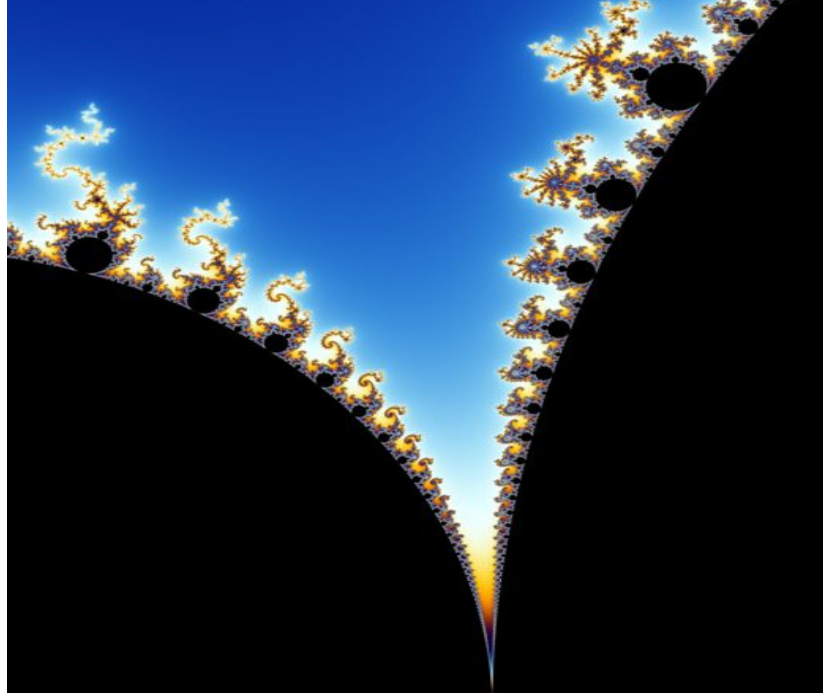
3.7 Mandelbrot Cümlesinin Derinlikleri

Kompleks dinamik sistemlerin en ünlü fraktalı olan Mandelbrot cümlesinin bazı kısımları, küçük ölçeklerde yaklaşıldıklarında ortaya çıkan görsel sonuçlara göre isimlendirilmiştir (Şekil 3.32).



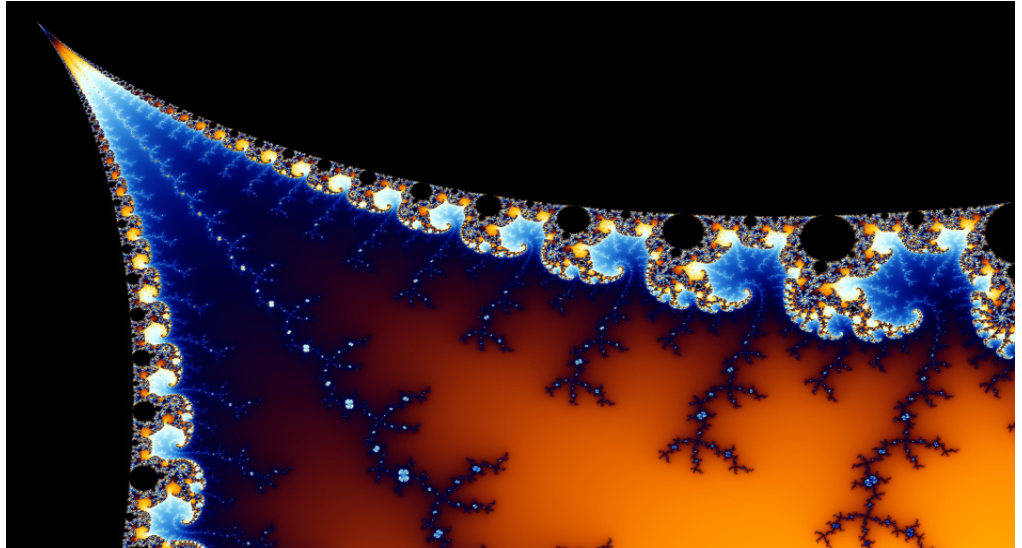
Şekil 3.32 Fil vadisi ve denizati vadisi

Bunlardan biri denizati vadisidir. Bu vadi negatif x -ekseninde, ana kardioid ile ana daireyi birbirine bağlayan $z = 0,75 + i0$ noktasında oluşur. Burada denizatına benzeyen tomurcuklar görülmektedir, adı bundan dolayı **denizati vadisidir** (Şekil 3.33).



Şekil 3.33 Denizati vadisi

Fil vadisi ise pozitif x -ekseninin $z = 0,25 + i0$ yani simetri ekseninin başlangıç noktasında oluşur. Küçük dairesel tomurcuklar fil görüntülerine benzetildiğinden bu ismi almıştır. Daha fazla yakınlaştırıldığında birçok ilginç yapı gözlenir (Şekil 3.34).

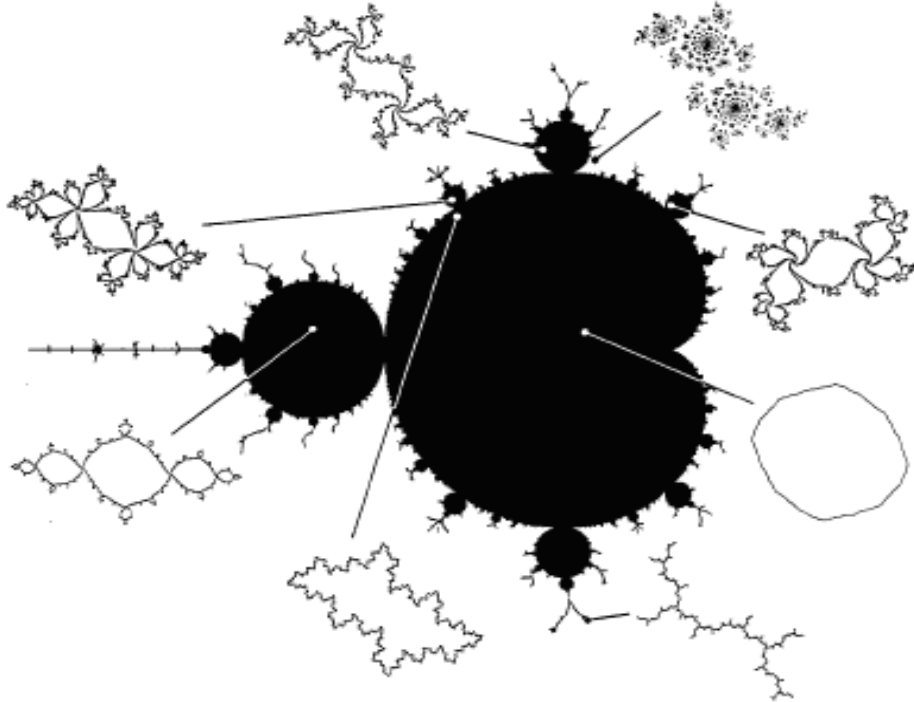


Şekil 3.34 Fil vadisi

3.8 Mandelbrot Cümlesi ile Julia Cümlesi Arasındaki İlişki

Dinamik düzlemde bir c parametresi belirlenir ve kompleks düzlemdeki tüm z noktalarının $f(z_n) = z_n^2 + c$ iterasyonu altındaki davranışları incelenir. Parametre düzleminde ise bir $z_0 = 0$ başlangıç değeri seçilir ve tüm parametre değerleri için $f(z_n) = z_n^2 + c$ iterasyonu altında 0'ın yörüngesi incelenir.

Mandelbrot cümlesi, kendisini oluşturan algoritma kuralı gereği Parametreler düzleminde, Julia cümleleri ise dinamik düzlemde yer alır. Dinamik düzlemde yer alan Julia cümlelerinin oluşması için tek yapılması gereken bir c -değerinin belirlenmesi ve iterasyon işlemine tüm düzlemde devam edilmesidir. Bir başka deyişle her bir c -değeri $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 + c$ iterasyon kuralı ile farklı bir Julia cümlesi oluşturur. Dolayısıyla Mandelbrot cümlesi, yörüngesi sınırlı olan c -değerlerinin cümlesi olduğundan, **Mandelbrot cümlesi içindeki her c -değerine bir Julia cümlesi karşılık gelir** (Şekil 3.35).



Şekil 3.35 Mandelbrot cümlesindeki Julia cümleleri

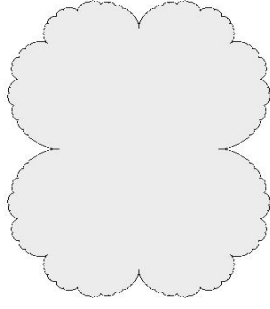
Belirli bir c - değeri için $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 + c$ iterasyon kuralı ile $z_0 = 0$ dan başlanarak elde edilecek $\{z_k\}$ - lar sınırlı bir yörünge oluşturuyorsa J_f irtibatlı, $\{z_k\}$ - lar sonsuza gidiyorsa J_f Cantor cümlesidir. O halde Julia cümleleri ile Mandelbrot cümlesini aynı noktada buluşturan tanımı verelim:

Tanım 3.1 : Mandelbrot cümlesi irtibatlı Julia cümlelerini oluşturan c - değerlerinin cümlesidir. Yani M ;

$$\begin{aligned} M &= \{ c \in \mathbb{C} \mid J_f \text{ irtibatlı} \} \\ &= \{ c \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(0) \not\rightarrow \infty \} \\ &= \{ c \in \mathbb{C} \mid c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots \not\rightarrow \infty \}. \end{aligned}$$

O halde $c \in M \Rightarrow c$ - değerine karşılık gelen Julia cümlesi irtibatlıdır,
 $c \notin M \Rightarrow c$ - değerine karşılık gelen Julia cümlesi Cantor cümlesidir.

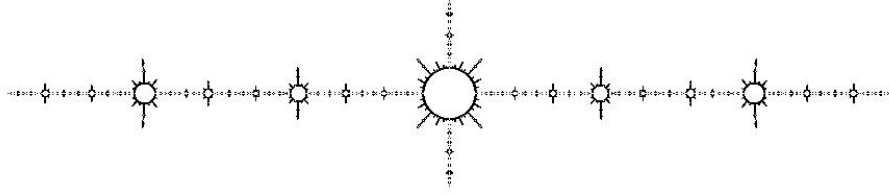
Şekil 3.36 farklı c - değerleri için verilmiş Julia cümlelerinin resimlerini göstermektedir.



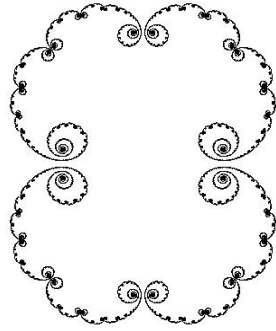
a. $c = 0,25$ Julia cümlesi



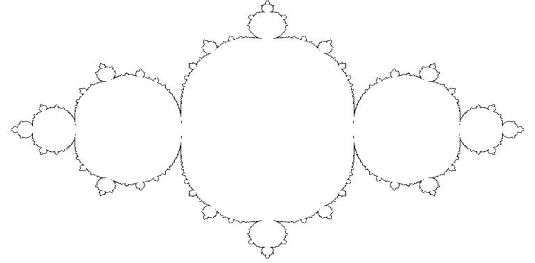
b. $c = -2$ Julia cümlesi



c. Airplane cümlesi, $c \approx -1,754878$



d. $c = 0,26$ Julia cümlesi

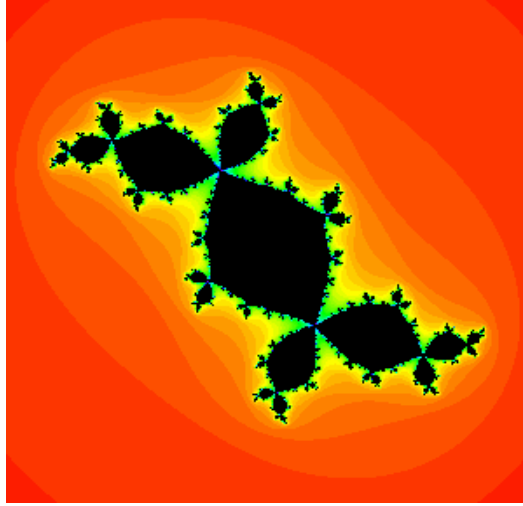


e. $c = -0,75$ Julia cümlesi

Şekil 3.36 Farklı c - değerleri için Julia cümleleri

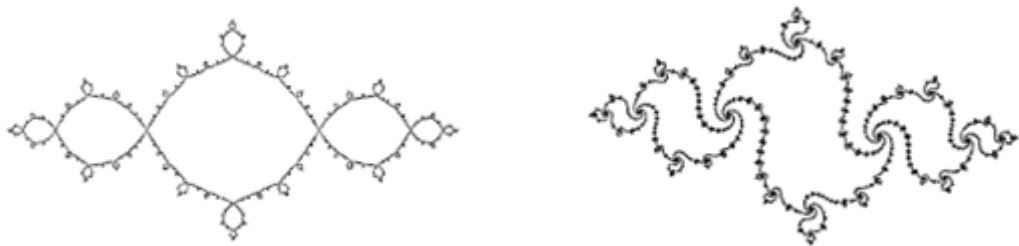
Julia cümleleri sonsuz çoklukta bağlantı noktası içermektedir. Bağlantı noktası, Julia cümlesinin her defasında kendisinin küçük kopyasının eklendiği noktadır. Şekil 3.37' de fraktal tavşan olarak adlandırılan Douady tavşanının resmi görülmektedir. Her bağlantı noktasında yeni bir Douady tavşanı vardır ve her bağlantı noktasında Julia cümlesinin 3

parçaya sahip olması elbette sürpriz değildir. Çünkü Douady tavşanını oluşturan c -değeri Mandelbrot cümlesinin 3- periyotlu tomurcuğunda bulunmaktadır.



Şekil 3.37 $c = -0.12 + 0.75i$, Douady tavşanı

O halde Mandelbrot cümlesinin n - periyotlu tomurcuğundan seçeceğimiz c - değeri için oluşacak Julia cümlesi, içerdiği sonsuz çokluktaki her bağlantı noktasında n parçaya sahiptir. Şekil 3.38' de 2- periyotlu yani bağlantı noktalarında 2 parçaya sahip olan Julia cümleleri gösterilmiştir.



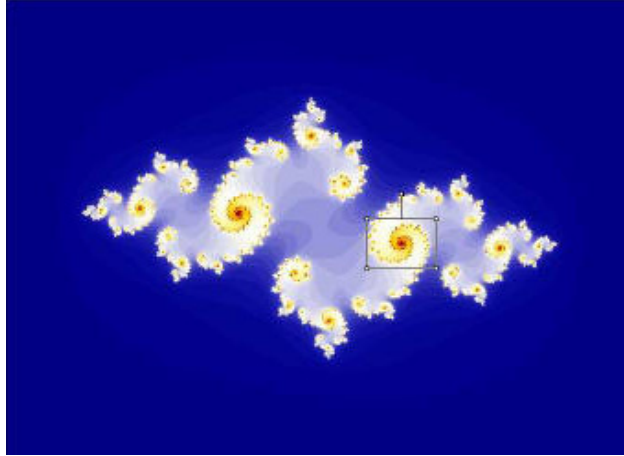
Şekil 3.38 2- periyotlu tomurcuktaki Julia cümleleri (sol) $c = -1$, (sağ) $c = -0,83 + 0,16i$

4- periyotlu ve bağlantı noktalarının her birinde 4 parçaya sahip olan Julia cümlesi de Şekil 3.39' da gösterilmiştir.

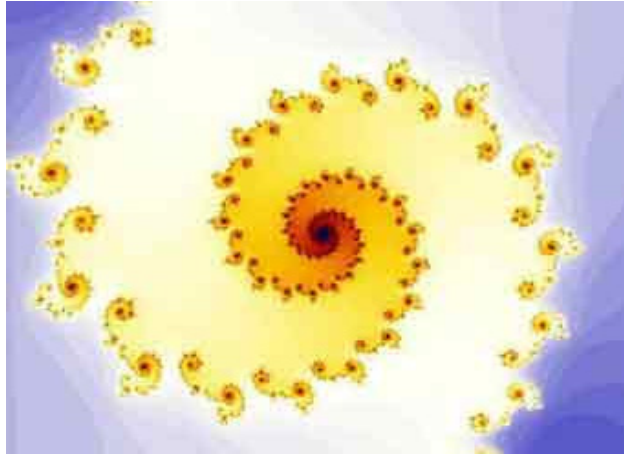


Şekil 3.39 $c = 0,28 + 0,53i$, 4- periyotlu tomurcuktaki Julia cümlesi

Tıpkı altın dikdörtgen ve Fibonacci spirallerinde olduğu gibi Julia cümlesinin içinde de spiraller vardır. Şekil 3.40 Julia cümlesinin bir kısmını ve yakınlaştırıldığında daha açık olarak ortaya çıkan spiralleri göstermektedir.



a.



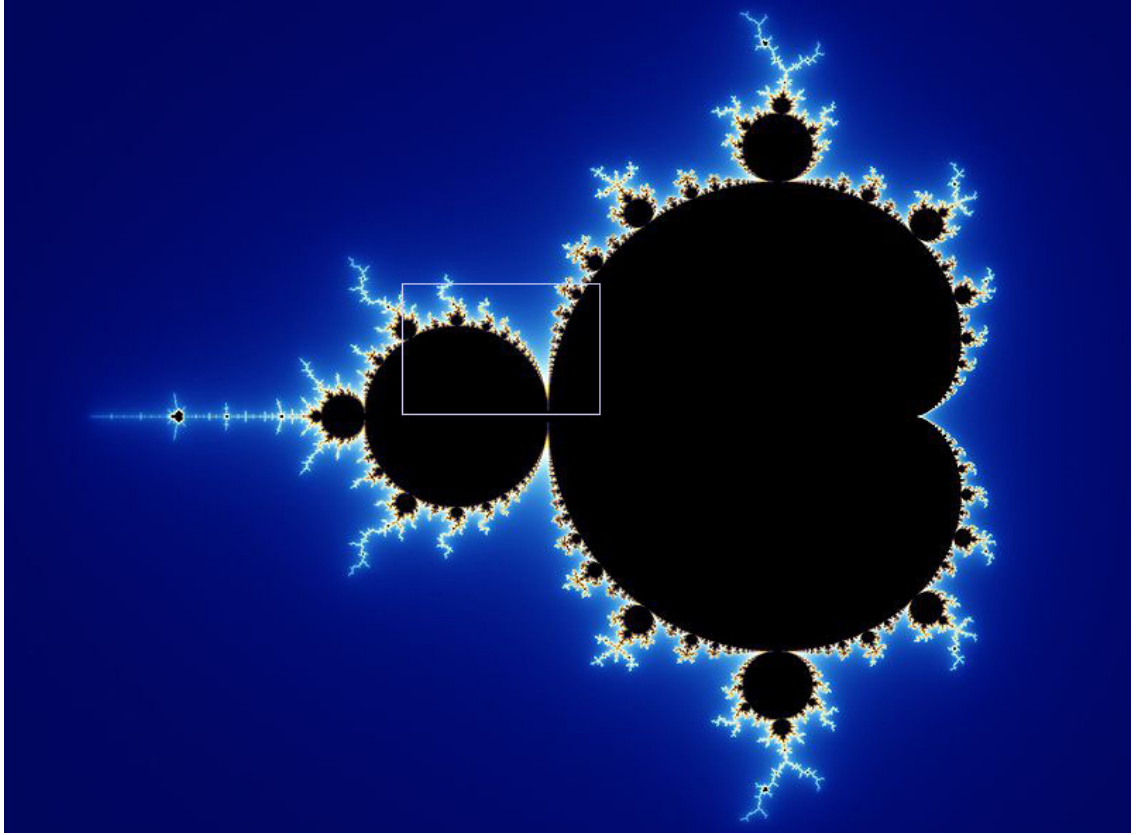
b.

Şekil 3.40 a.b. Julia spiralleri

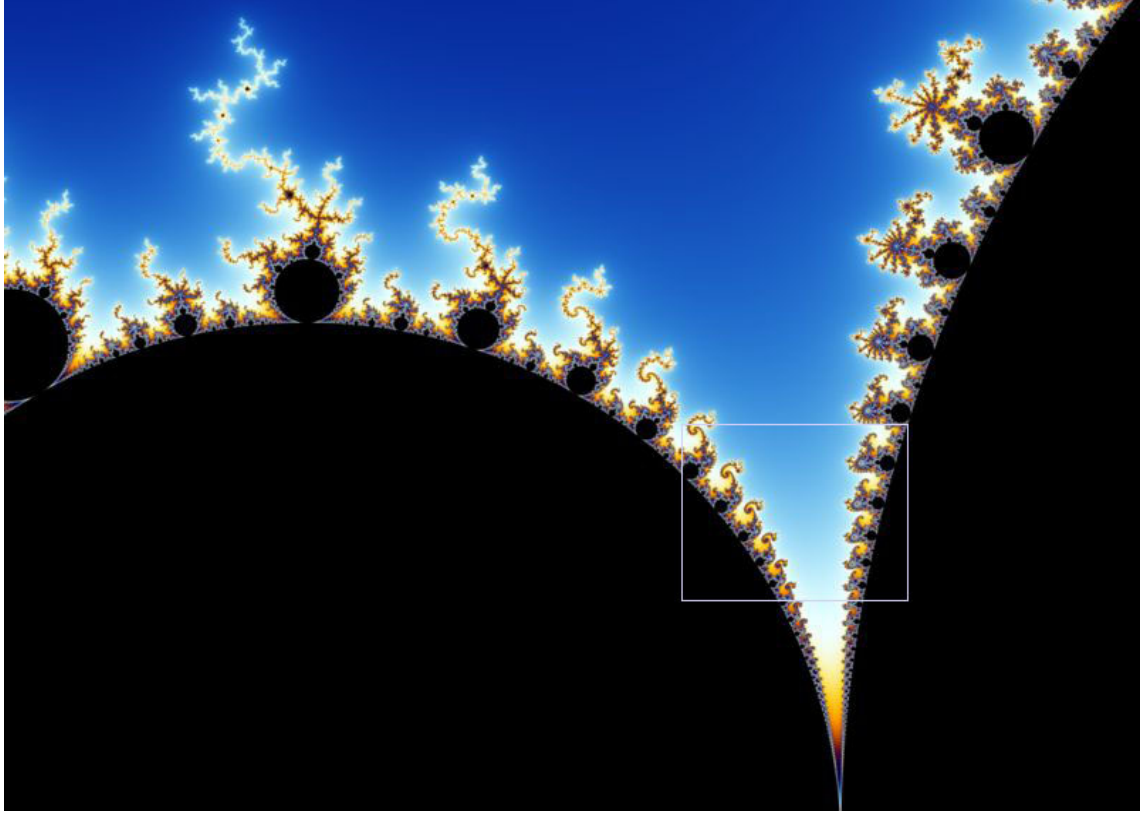
3.9 Mandelbrot Galerisi

Burada Mandelbrot cümlesinin yaklaştırıldıkça ortaya çıkan denizati vadisi motifleri, bu vadideki Julia cümlelerinin oluşturduğu spiralleri, spirallerin arasına gizlenmiş küçük Mandelbrot cümlelerini gösteren resimler çerçeve içine alınarak bir sonraki resimde büyütülmüş şekli ile adım adım verilmiştir.

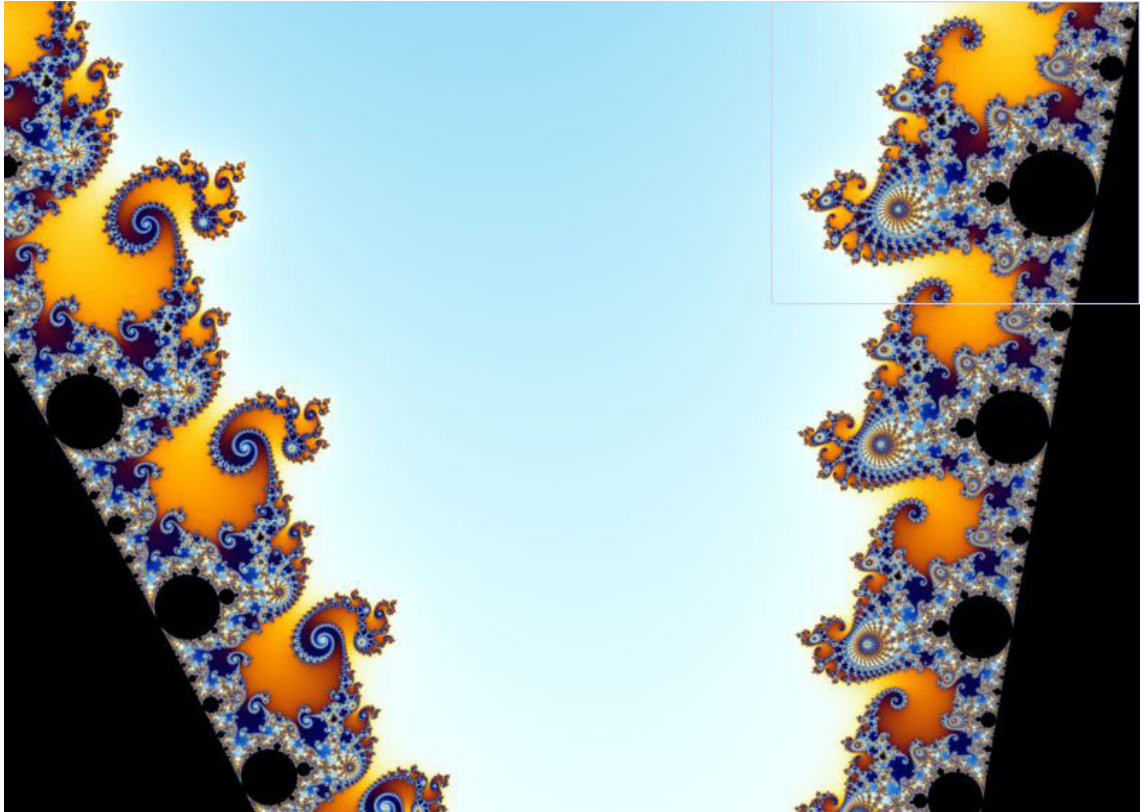
www.en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set.



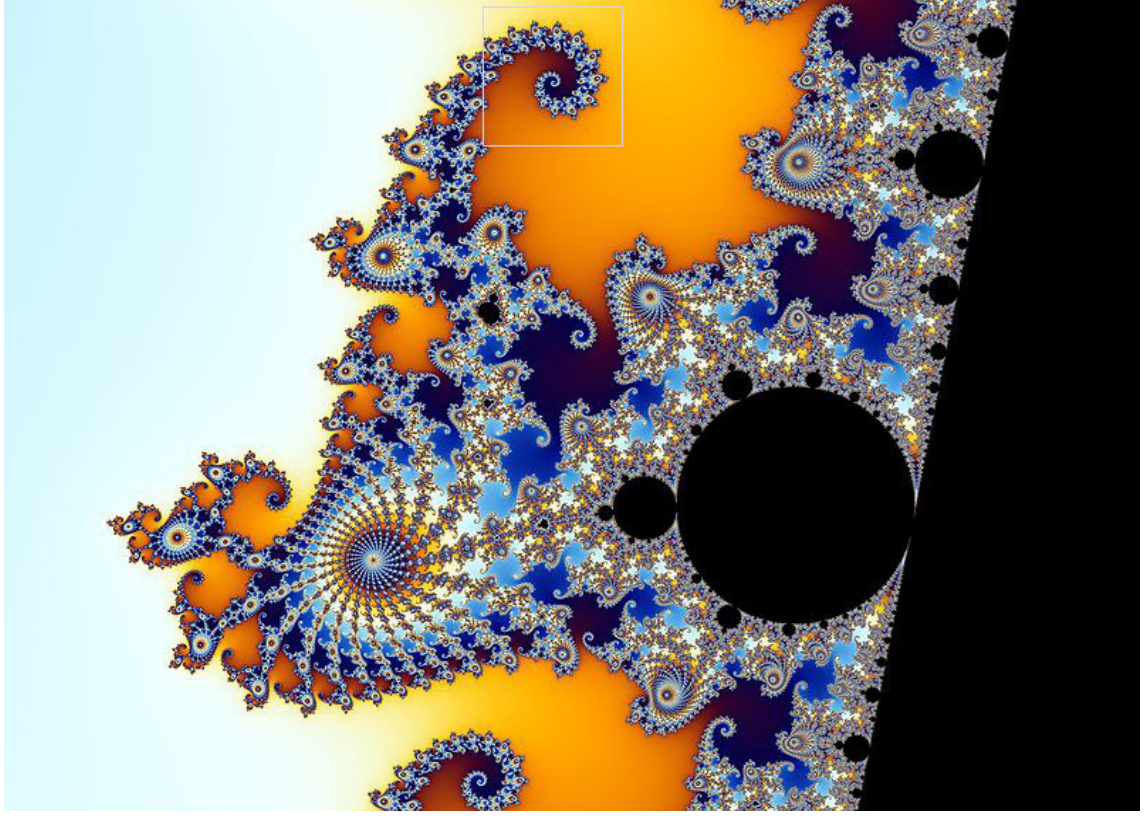
Şekil 3.41 Mandelbrot cümlesinin içinde yolculuk



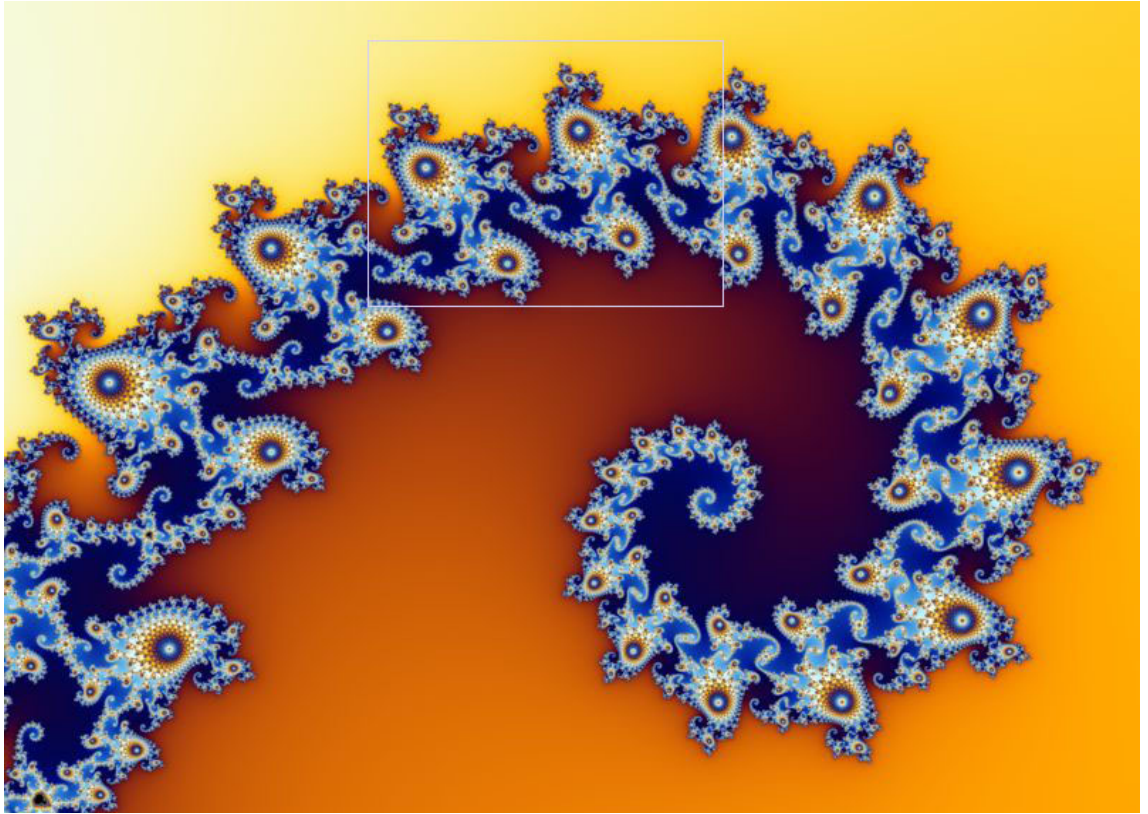
Şekil 3.42 Şekil 3.41' in yaklaştırılmış hali



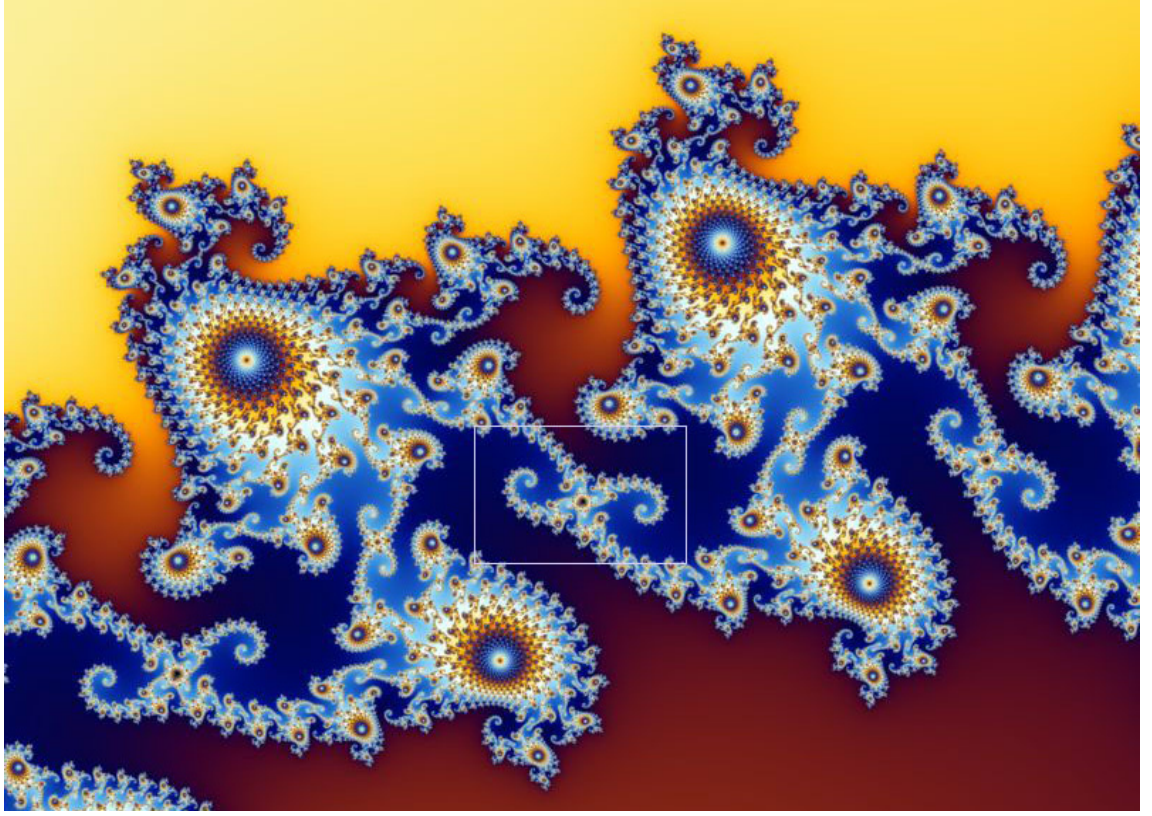
Şekil 3.43 Şekil 3.42' nin yaklaştırılmış hali



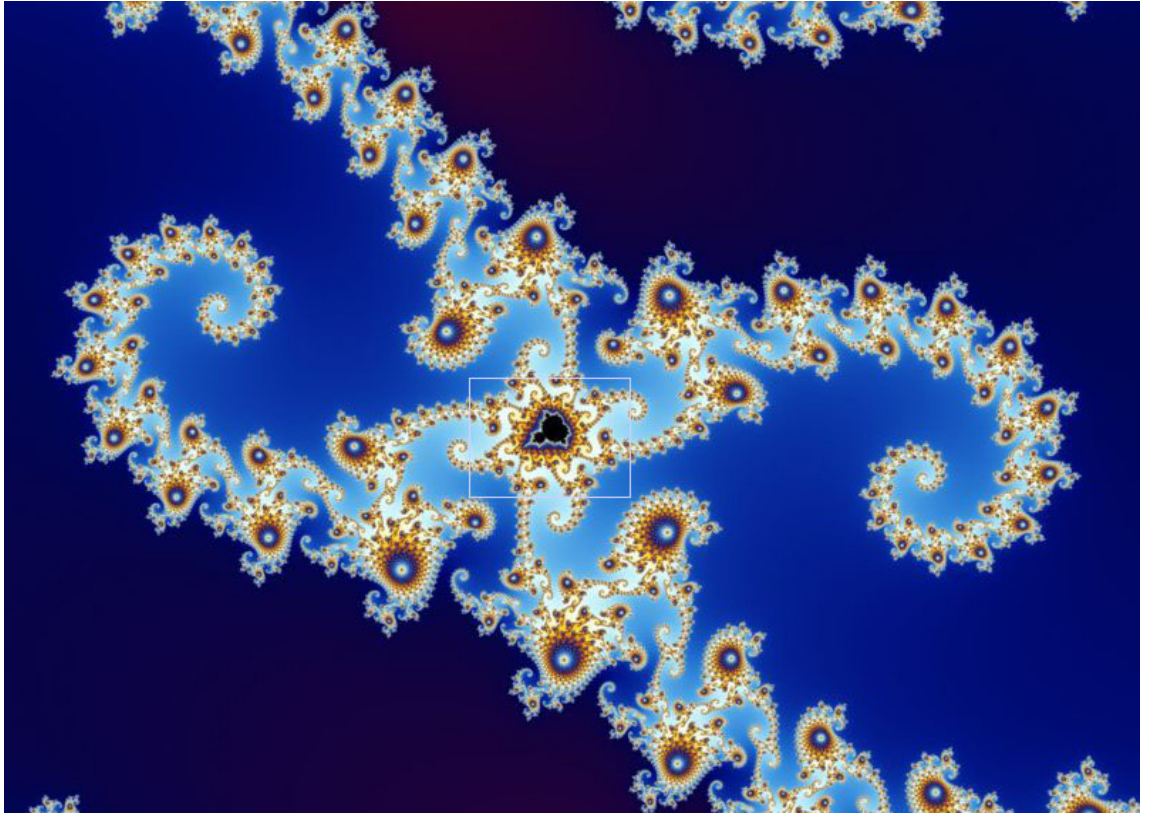
Şekil 3.44 Şekil 3.43' ün yaklaştırılmış hali



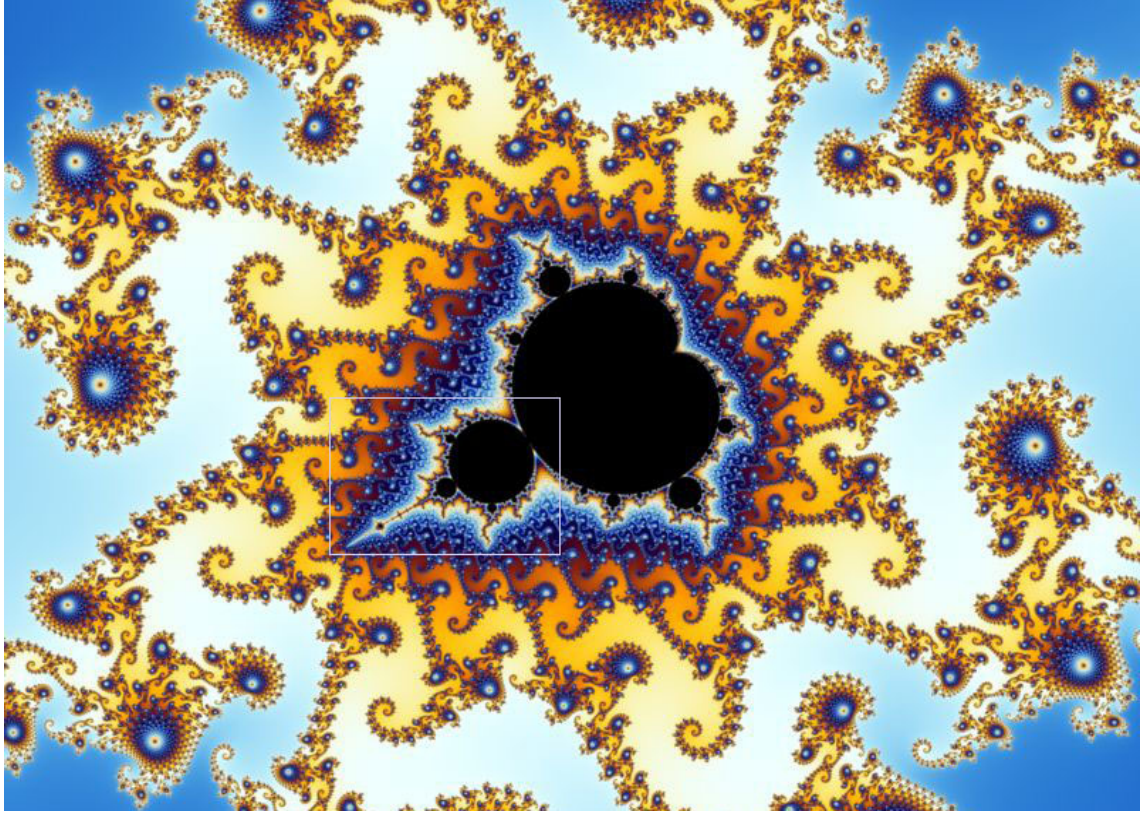
Şekil 3.45 Şekil 3.44' ün yaklaştırılmış hali



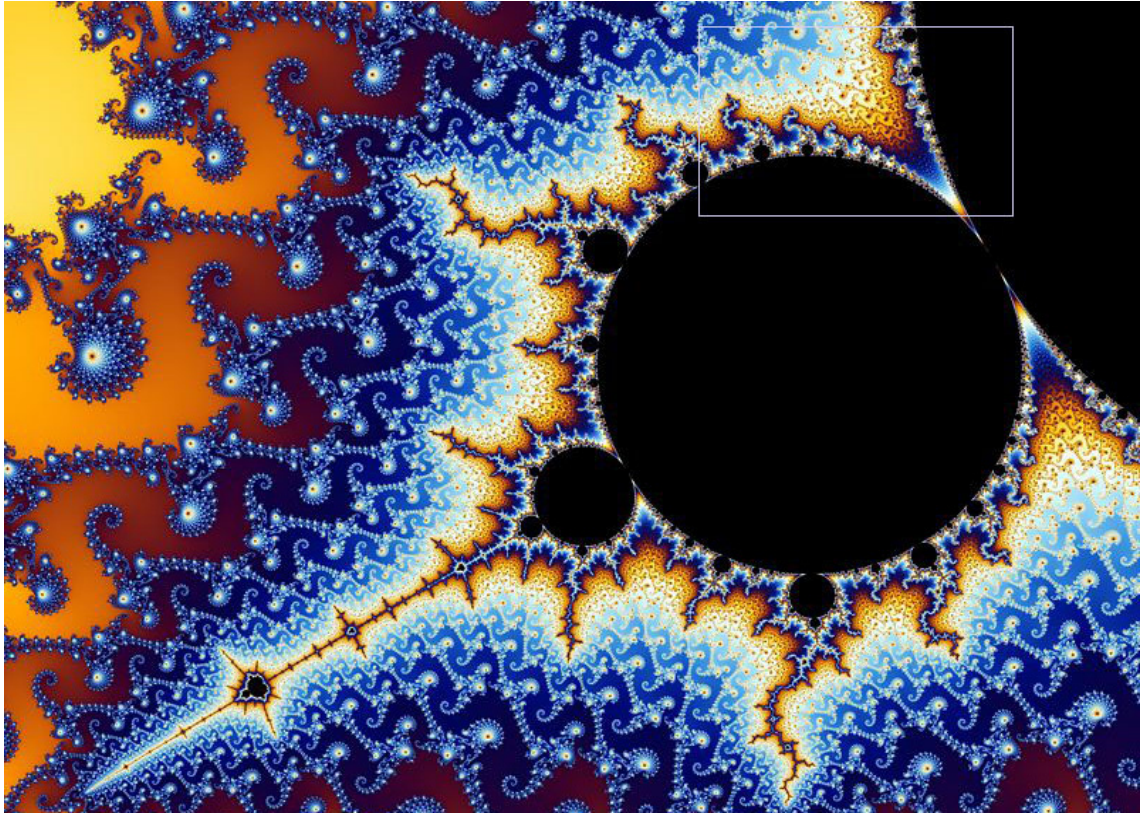
Şekil 3.46 Şekil 3.45' in yaklaştırılmış hali



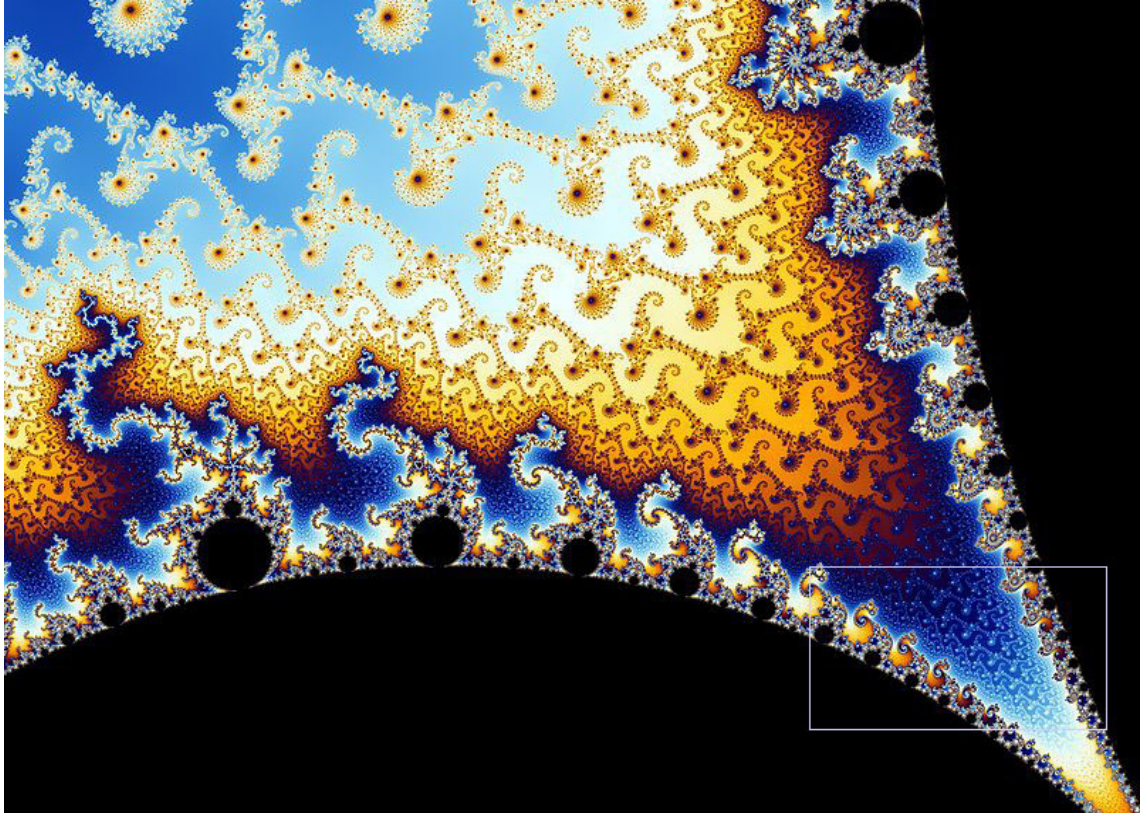
Şekil 3.47 Şekil 3.46' nın yaklaştırılmış hali



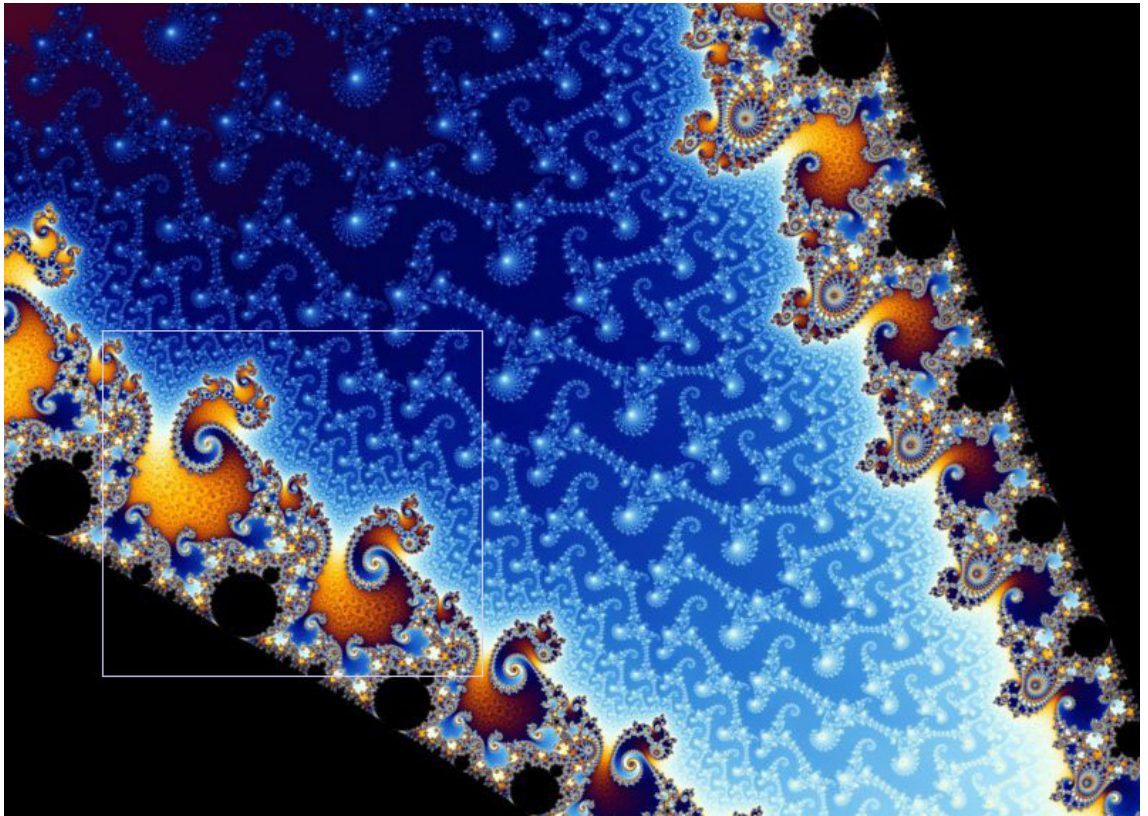
Şekil 3.48 Şekil 3.47' nin yaklaştırılmış hali



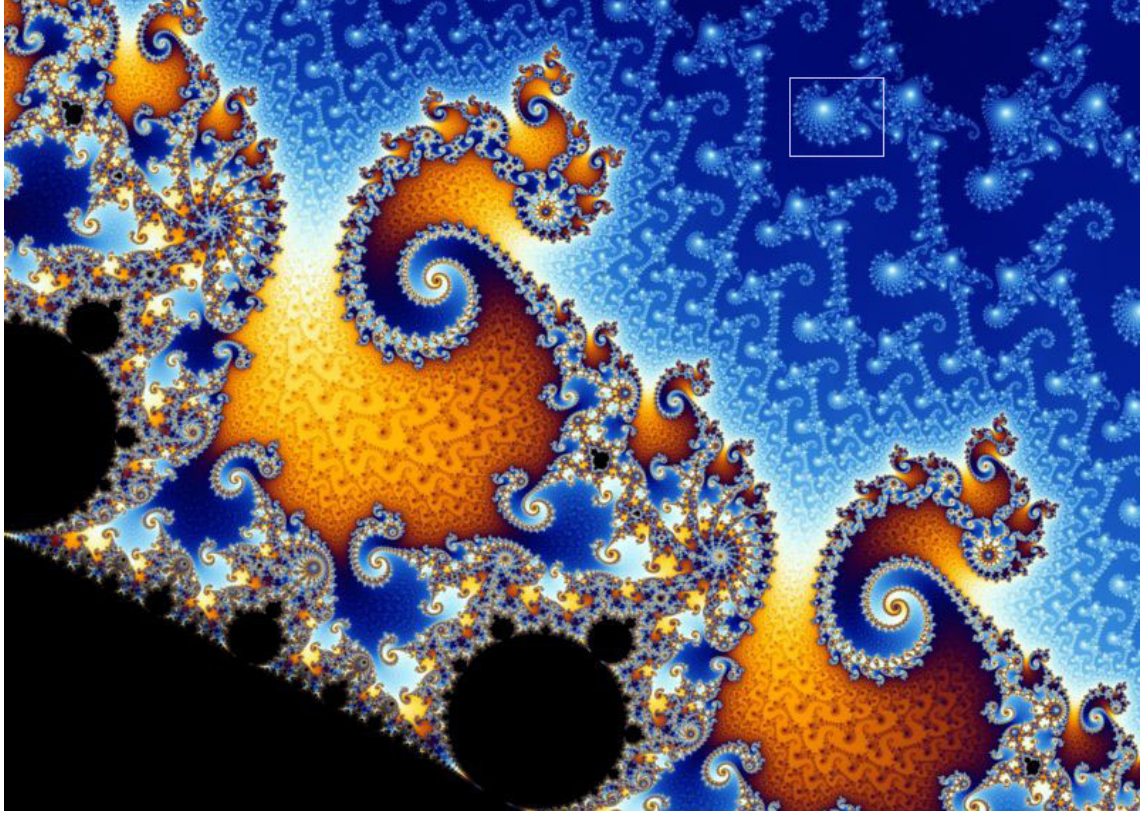
Şekil 3.49 Şekil 3.48' in yaklaştırılmış hali



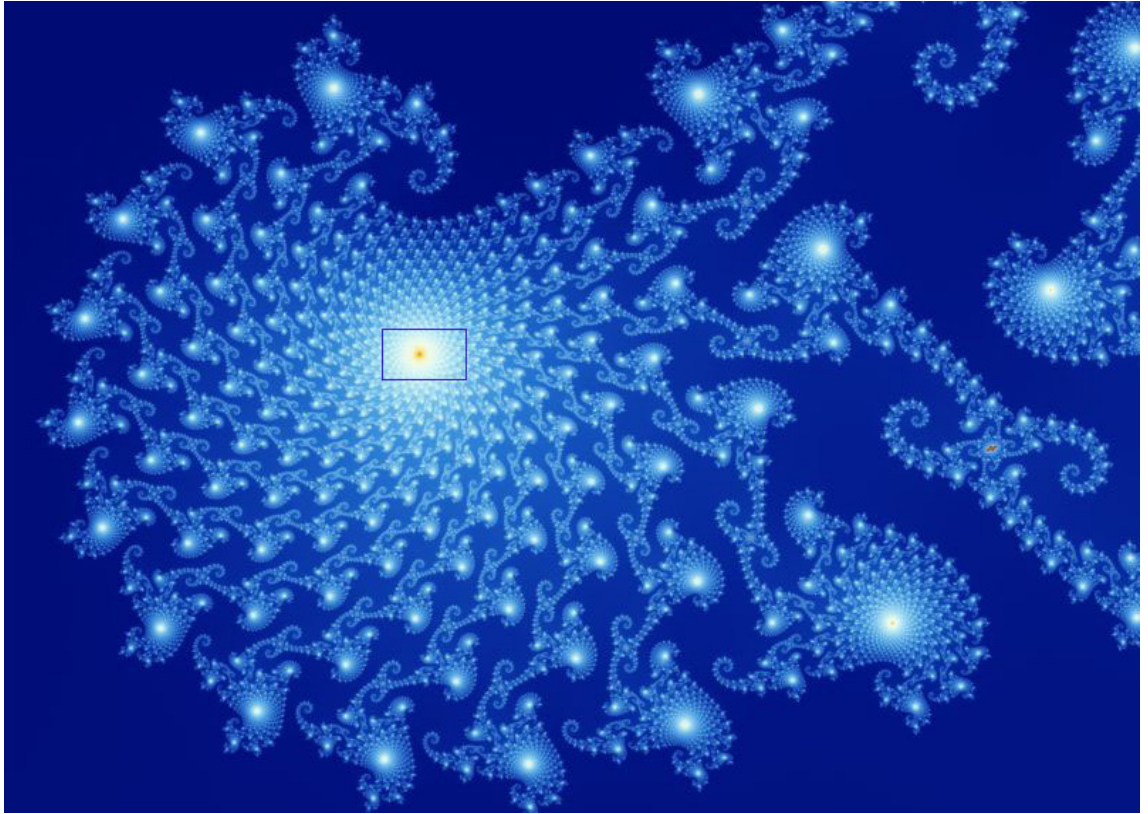
Şekil 3.50 Şekil 3.49'un yaklaştırılmış hali



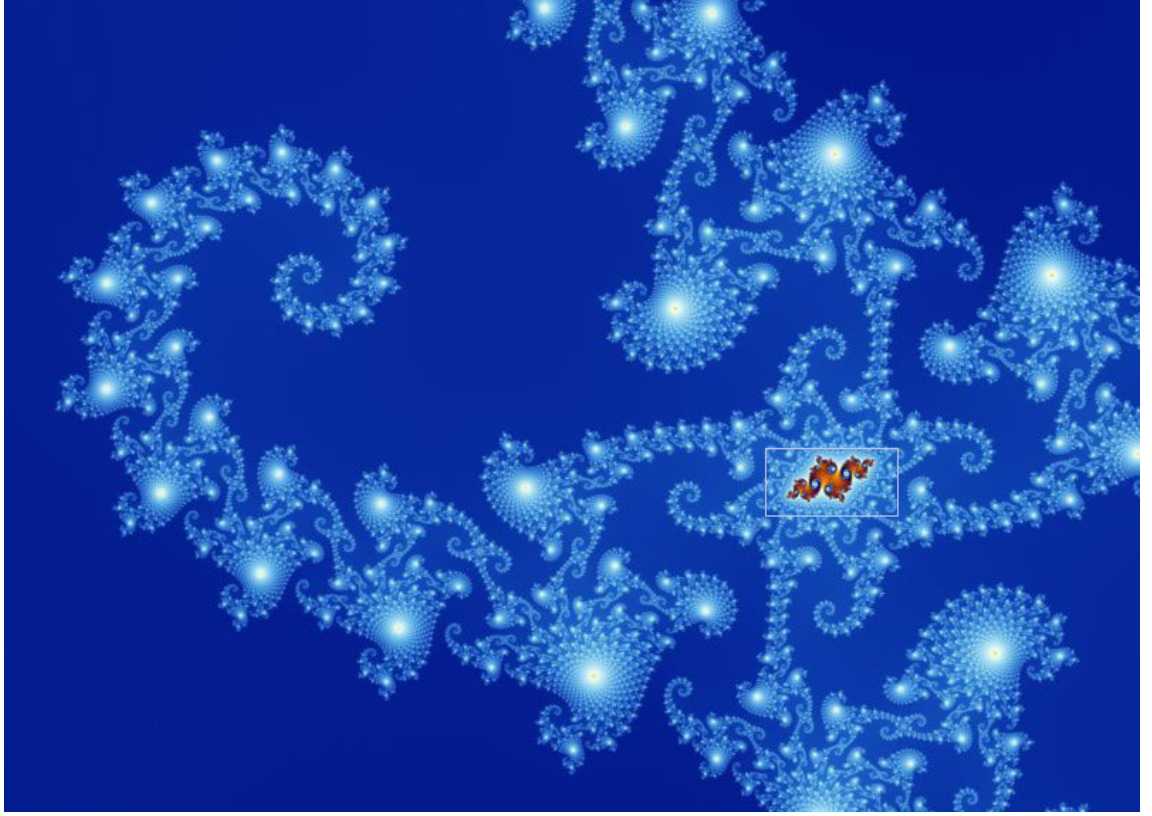
Şekil 3.51 Şekil 3.50' nin yaklaştırılmış hali



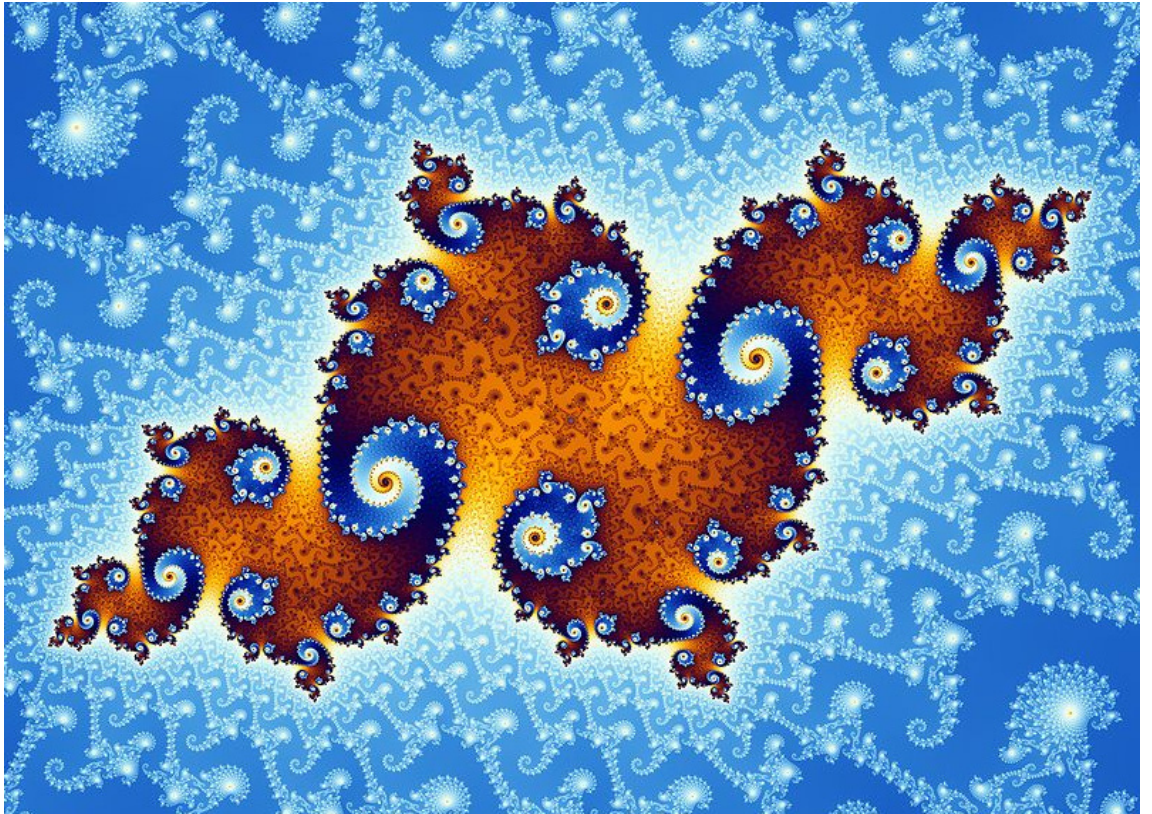
Şekil 3.52 Şekil 3.51' in yaklaştırılmış hali



Şekil 3.53 Şekil 3.52' nin yaklaştırılmış hali



Şekil 3.54 Şekil 3.53' ün yaklaştırılmış hali



Şekil 3.55 Şekil 3.54' ün yaklaştırılmış hali

4. SONUÇ

Mandelbrot cümlesi $f: z \longrightarrow z^2 + c$ iterasyon kuralı ile elde edilir. Kompleks düzlemdeki sayıların bu iterasyon kuralı altındaki görüntüleri nokta dizilerini (yörünge) oluşturur. Mandelbrot cümlesini yörüngeleri sınırlı kalan c - değerleri oluşturur. Kompleks düzlemi ikiye ayırdığımızda birincisi dinamik düzlem, diğeri parametreler düzlemidir ve Mandelbrot cümlesi parametreler düzleminde yer alır. Mandelbrot cümlesini oluşturan her bir c - değerine bir Julia cümlesi karşılık gelir ve bu cümleler irtibatlı Julia cümleleridir. Reel eksenin $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$ kapalı aralığı Mandelbrot cümlesinin içinde yer alır. Mandelbrot cümlesinin sınırı onun en karmaşık yerdir. Sınırdaki her bir noktaya farklı ölçeklerde yaklaştıkça sonsuz karmaşıklıkla resmi daha da net görünür. Mandelbrot cümlesi iki ana parçadan oluşur: ana kardiyoid ve ana daire. Ana kardiyoidin üzerine tutturulmuş olan tomurcuklar iterasyon sayısına göre elde edilir. Her bir tomurcuk $\frac{p}{q}$ rotasyon sayısı ile belirlidir ki p tomurcuğun nesil sayısı ve q periyodudur. Her bir tomurcuğa karşılık gelen $\frac{p}{q}$ rasyonel sayıları Reel sayıların $(0,1)$ açık aralığı ile eşleşir. Mandelbrot cümlesi basit bir iterasyon kuralı ile elde edilen en karmaşık ve en güzel cümledir.

KAYNAKLAR

Addison, P. S. 1997. “Fractals and Chaos: An Illustrated Course”, Institute of Physics Publishing.

Akdeniz, F. 2007. “Doğada, Sanatta, Mimaride Altın Oran ve Fibonacci Sayıları”, Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü.

Anonymous. 1996. Web Sitesi:

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>,

Erişim Tarihi: 06.01.2009.

Anonymous. 1996. Web Sitesi:

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibBio.html>,

Erişim Tarihi: 06.01.2009.

Anonymous. 1999. Web Sitesi:

<http://www.facstaff.bucknell.edu/udaapp/090/w3/emilyc.htm>,

Erişim Tarihi: 14.01.2009.

Anonymous. 2000. Web Sitesi: <http://classes.yale.edu/fractals/>,

Erişim Tarihi: 07.01.2009.

Anonymous. 2001. Web Sitesi: http://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set,

Erişim Tarihi: 06.02.2009.

Barnsley, M. 1988. “Fractals Everywhere”, Academic Pres. Inc.

Beardon, A. F. 1991. “Iteration of Rational Functions”, Springer.

Blanchard, P. 1984. “Complex Analytic Dynamics”, Institute for Mathematics and Its Applications, University of Minnesota, Preliminary Version.

- Branner, B. 1989. "Chaos and Fractals, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: The Mandelbrot Set", American Mathematical Society, Providence, RI. ISBN 0-8218-0137-6 Volume 39, 75-105.
- Branner, B. 1994. "Complex Dynamic Systems, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: Puzzles and Pölya-Puzzles of Quadratic and Cubic Polynomials", American Mathematical Society, Providence, RI. ISBN 0-8218-0290-9, Volume 49, 31-67.
- Brincks, L. 2005. "Fractals and Chaos", Master of Science, Iowa State University, Thesis.
- Bullet, S. 2005. "One-Dimensional Complex Dynamics", University of London, London Dynamical Systems Group Graduate School.
- Crowover, R. M. 1995. "Introduction to Fractals and Chaos", Boston M.A: Johns and Bartlett.
- Devaney, R. L. 1999. "The Mandelbrot Set and The Farey Tree", American Mathematical Monthly, 106, 289-302.
- Devaney, R. L. 1994. "Complex Dynamical Systems, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: The Complex Dynamics of Quadratic Polynomials", American Mathematical Society, Providence, RI. ISBN 0-8218-0290-9, Volume 49, 1-29p.
- Devaney, R. L. "The Fractal Geometry of The Mandelbrot Set: I. The Periods of the Bulbs", Department of Mathematics, Boston University.
<http://math.bu.edu/DYSYS/FACGEOM/FACGEOM.html>.
Erişim Tarihi: 14.01.2009.
- Devaney, R. L. "The Fractal Geometry of The Mandelbrot Set: II. How to Count and How to Add", Department of Mathematics, Boston University .
<http://math.bu.edu/DYSYS/FACGEOM2/FACGEOM2.html>.
Erişim Tarihi: 08.01.2009.

- Edgar, G. A. 1990. "Measure, Topology and Fractal Geometry", Springer-Verlag, Newyork.
- Falconer, K. 1990. "Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications", University of Bristol, Wiley, Newyork, 288p.
- Gleick, J. 2005. "Kaos", Tübitak Yayınları, ISBN 975-403-029-4.
- Hacısalıhoğlu, H. ve Yaz, N. 2006. "Fraktal Geometri", Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü.
- Keen, L. 1994. "Complex Dynamical Systems, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: Julia Sets of Rational Mappings", American Mathematical Society, Providence, RI. ISBN 0-8218-0290-9, Volume 49, 71-89p.
- Mandelbrot, B.B. 1983. "Fractal Geometry of Nature", W. H. Freeman and Company ISBN 0-7167-1186-9.
- Miller, S. 2006. "The Dynamics of Newton's Method on Cubic Polynomials ", The Graduate College of Marshall University, Thesis.
- Peitgen, H. and Saupe, D. 2004. "Chaos and Fractals", Springer-Verlag, Newyork.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 29.09.1983

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ankara Bahçelievler Deneme Lisesi (1999)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim
Dalı (2000)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı (2006)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Tapu ve Kadastro Genel Müdürlüğü – Bilgisayar Programcısı (2007)