

**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**(YÜKSEK LİSANS TEZİ)**

**KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
WAVELET YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ**

**Şerife GÜL**

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.06.01

**Sunuş Tarihi: 22.12.2008**

**Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Fadime DAL**

**Bornova – İZMİR**



### III

Şerife GÜL tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN WAVELET YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 22/12/2008 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

#### Jüri Üyeleri:

#### İmza

<b>Jüri Başkanı</b>	<b>: Yrd. Doç. Dr. Fadime DAL</b>	.....
<b>Raportör Üye</b>	<b>: Doç. Dr. Emine MISIRLI</b>	.....
<b>Üye</b>	<b>: Yrd. Doç. Dr. Seval ÇATAL</b>	.....



## V

### ÖZET

#### KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN WAVELET YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

GÜL, Şerife

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Fadime DAL

Aralık 2008, 65 sayfa

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde, konu ile ilgili bölümler için gerekli matematiksel altyapı çalışmalarına yer verilmiştir.

İkinci bölümde, Dalgacık fonksiyonları, bunların özellikleri ve Çoklu Çözünürlük Analizi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Böylece ayrışım ve yeniden oluşum algoritmalarının matris formu Ayrık Dalgacık Dönüşümü olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde, dalgacık yönteminin yakınsaklığını hızlandıran Multigrid şeması ek olarak anlatılmış, Çoklu Çözünürlük Analizi ile benzer yanları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Dalgacık – Multigrid yöntemi anlatılmış, uygulanma biçimi verilmiştir.

Beşinci bölümde, yöntemin daha iyi anlaşılması için eliptik kısmi diferansiyel denklem örneğine yer verilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Multigrid Yöntemi, Çoklu Çözünürlük Analizi, Ayrık Dalgacık Dönüşümü, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler



## VII

### ABSTRACT

#### THE SOLUTION OF PARTIAL DIFERANTIAL EQUATIONS BY USING WAVELET METHOD

GÜL, Şerife

Msc. in Mathematics

Supervisor: Assistant Prof. Dr. Fadime DAL

December 2008, 65 pages

In the first chapter of this thesis, the mathematical constructions required for the other chapters are given.

In the second chapter, the wavelet functions, their properties and the multiresolution analysis are studied in detail. Thus, the matrix forms the decomposition and the reconstruction algorithms are presented as the wavelet transform.

In the third chapter, the multigrid scheme accelerating the wavelet method is defined. Also, the similarities between the two methods are explained.

In the fourth chapter, the wavelet – multigrid method and its application are studied.

In the fifth chapter, the method above is illustrated with a simple elliptic partial differential equation.

**Keywords:** Multigrid method, multiresolution analysis, discrete wavelet transform, partial differential equations



## **IX**

### **TEŞEKKÜR**

Bu alıőmamda deneyim, dűőünce ve destekleri ile her zaman yanımda olan danıőman hocam Yrd. Do. Dr. Fadime DAL' a, yardımları ve paylaőımları için lisans arkadaőlarım Hasan TEMİZ ve Metin ŐAYBAK' a, yetiőmemdeki emeiği ve çalıőmalarım sırasındaki sabrı için aileme, ayrıca bir yıldır bana burs veren TUBİTAK' a teőekkürü bir borç bilirim.



# XI

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
<b>ÖZET</b> .....	<b>V</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>VII</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>IX</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>XI</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>XIII</b>
<b>TABLolar DİZİNİ</b> .....	<b>XV</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
1.1 Fourier Analizi .....	1
1.2 Neden Dalgacıklar .....	1
<b>2. DALGACIKLAR (WAVELETS)</b> .....	<b>3</b>
2.1 Dalgacıkların Tarihi.....	3
2.2 Çoklu Çözünürlük Analizi ve Dalgacıkların Oluşturulması .....	4
2.3 Ölçekleme Bağıntısı.....	13
2.4. Dalgacık ve Dalgacık Uzayı.....	19
2.5. Ayrışım ve Yeniden Oluşum Formülleri.....	25
2.5.1. Ayrışım ve Yeniden Oluşum Formüllerinin Uygulanması.....	28
2.5.1.a. Ayrışım Algoritması.....	28

## XII

2.5.1.b. Yeniden Oluşum Algoritması.....	31
2.6. Daubechies Dalgacıları ve Ayrık Dalgacık Dönüşümü.....	33
<b>3. MULTİGRİD YÖNTEMİ.....</b>	<b>41</b>
3.1 Çoklu Çözünürlük Analizi ile Multigrid Yöntemi Arasındaki Benzerlikler.....	43
<b>4. DALGACIK – MULTİGRİD YAKLAŞIMI.....</b>	<b>44</b>
<b>5. NÜMERİK UYGULAMA .....</b>	<b>47</b>
<b>6. SONUÇ.....</b>	<b>63</b>
<b>KAYNAKLAR DİZİNİ.....</b>	<b>64</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>65</b>

### XIII

#### ŞEKİLLER DİZİNİ

##### Şekil No

##### Sayfa No

Şekil1 :  $f(t) = \sin(t) + 2 \cos(3t) + 0.3 \sin(50t)$  fonksiyonunun grafiği.....2

Şekil 2 : Genel çoklu çözünürlük analizli için ayrışım diyagramı.....30

Şekil 3: Genel çoklu çözünürlük analizli için yeniden oluşum  
diyagramı.....33

Şekil 4: En kaba seviye V- döngüsü .....42

Şekil 5: En kaba seviye modifiye V- döngüsü.....45



## XV

### TABLolar DİZİNİ

#### **Tablo No**

#### **Sayfa No**

Tablo1: $2^4$ çözünürlükte $D_4$ dalgacıları kullanılarak elde edilen dalgacık – multigrad çözümünün tam çözüm ile karşılaştırılması.....	50
Tablo2: $2^8$ çözünürlükte $D_4$ dalgacıları kullanılarak elde edilen dalgacık – multigrad çözümünün tam çözüm ile karşılaştırılması.....	51



# 1-GİRİŞ

## 1.1. Fourier Analizi

Fourier serilerinin temel amacı bir  $t$  sinyali  $t$  zaman değişkeninin bir fonksiyonu olarak ele almak ve onu çeşitli frekans bileşenlerine ayrıştırmaktır. Bir sinyal verildiğinde, bir ses veya bir görüntü olabilir. Fourier analizi; frekansları ve sinyali oluşturan bu frekansların büyüklüklerini kolayca hesaplar.

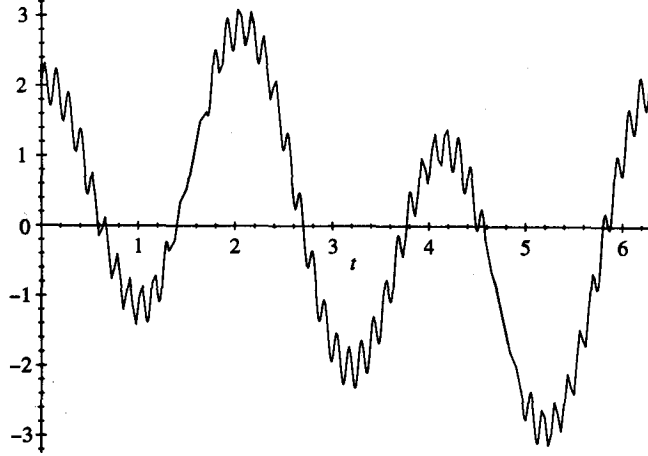
Ancak, Fourier inversiyonu belli durumlar altında mümkün olmasına karşın, Fourier yöntemleri özellikle yüksek seviyede düzensüzlüğe sahip bir fonksiyonu yeniden oluşturmak için her zaman iyi bir araç değildir. Sinyali lokal olarak yeniden oluşturmak için çok sayıda Fourier bilgisine ihtiyaç vardır (Boggess and Narcowich, 2001).

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (1.1)$$

## 1.2. Neden Dalgacıklar?

Fourier serisinin bir dezavantajı, yapı blokları sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının sonsuza kadar devam eden periyodik dalgalar olmalarıdır. Bu yaklaşım şekli, **Şekil 1** deki gibi zamana bağlı dalga benzeri özellikleri olan sinyalleri filtreleme veya sıkıştırma için

uygundur. Ancak daha bölgesel özellikleri taşıyan fonksiyonlar için uygun olmayabilir.



**Şekil 1** -  $f(t) = \sin(t) + 2 \cos(3t) + 0.3 \sin(50t)$  fonksiyonunun grafiği

Başka bir deyişle, bir Fourier açılımı sadece frekans çözünürlüğünü verir ancak zamana ait çözünürlüğü vermez. Bunun anlamı, bir sinyalde var olan tüm frekansları belirleyebilmemize rağmen bu frekansların hangi zamanda var olduklarını belirleyememektir.

Bu problemin üstesinden gelmek amacıyla bir frekansı aynı anda hem zaman hem de frekans tanım kümesinde ifade edebilmeyi sağlayan çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Zaman- frekans bitişik sunumlarının arkasındaki düşünce sinyali çeşitli ilgi alanlarına bölmek ve parçaları ayrı ayrı analiz etmektir. Dalgacıklar (wavelets), farklı yapı bloklarından

oluşan bir küme ile bu tipteki sinyalleri modellemek ve incelemek için iyi bir araçtır (Boggess and Narcowich, 2001).

## **2. DALGACIKLAR (WAVELETS)**

### **2.1. Dalgacıkların Tarihi**

Tarihsel bir bakış açısıyla bakıldığında, matematiksel temelleri 19. yüzyılda Joseph Fourier' in çalışmalarına dayanmasına karşın, dalgacık analizi yeni bir yöntemdir. Fourier, çok önemli ve etkili olduğu ispat edilen teorileriyle birlikte frekans analizinin temellerini atmıştır .

Farklı ölçeklerde ortalama dalgalanmayı ölçen bir yaklaşımın gürültüye karşı daha az duyarlı olduğunun ispat edilebilmesi açıklığa kavuşmaya başladığından bu yana araştırmacıların ilgisi gittikçe frekans tabanlı analizden ölçek tabanlı analize dönmüştür.

“Dalgacık (Wavelet)” olarak adlandırılan kavram ilk olarak 1909 yılında Alfred Haar tarafından yapılan yüksek lisans tezinde ele alınmıştır.

Teorik olarak dalgacıklardan bahseden kavram Fransa' da, Marseille Teorik Fizik Merkezin' de Jean Morlet ve takım arkadaşları tarafından tasarlanmıştır. Dalgacık analizi yöntemleri çoğunlukla Y. Meyer ve çalışma arkadaşları tarafından geliştirilmiştir. Ana algoritma 1988' de Stephane Mallat' ın çalışmasına dayanmaktadır. Bundan sonra dalgacıklar üzerine yapılan araştırmalar uluslararası boyuta ulaşmıştır

Bu araştırmacıların başında çalışmaları diğerlerine öncülük eden Ingrid Daubechies, Ronald Coifman ve Victor Wickerhauser gelmektedir.

Dalgacıkların çalışma ve uygulama alanı çok hızlı bir biçimde büyümektedir. Genellikle veri ve sinyal işleme alanlarına uygulama yapılmıştır. Dalgacıkların diğer uygulama alanları astronomi, akustik, nükleer mühendislik, sinyal ve görüntü işleme, manyetik rezonans görüntüleme, nörofizyoloji, müzik, optik, türbülans, deprem tahmini, radar, insan görünüşü, ve kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ve pür matematik uygulamalarıdır.

## 2.2-Çoklu Çözünürlük Analizi ve Dalgacıkların Oluşturulması

“ Çoklu çözünürlük analizi, dalgacık bazlarının anlaşılması ve yeni örneklerin oluşturulması için doğal bir sistem oluşturur. Çoklu çözünürlük analizi formülasyonunun tarihi, teorik gelişmeleri canlandıran uygulamaların güzel bir örneğidir.”

Ingrid Daubechies

Çoklu çözünürlük kavramı sezgisel olarak sinyallerin veya görüntülerin piramide benzer şekilde farklı çözünürlük seviyelerinde çalışılmasıyla bağlantılıdır. Matematiksel olarak, çoklu çözünürlük analizinin temel fikri bir  $f$  fonksiyonunu (veya bir sinyali), her biri  $f$  fonksiyonunun daha ince versiyonları olan ardışık yaklaşımların bir limiti

olarak sunmaktadır. Bu ardışık yaklaşımlar farklı çözünürlük seviyelerine karşılık gelir.

MRA ( multiresolution analysis, çoklu çözünürlük analizi) nın temel ilkesi tüm fonksiyon uzayını  $V_n \subset V_{n+1}$  alt uzaylara ayırmaktır; öyle ki  $V_{n+1}$ ,  $V_n$  uzayında yeniden ölçeklenmiş olan tüm fonksiyonları içerir (Bogges and Narcowich, 2001).

**Tanım 2.2.1.** Bir çoklu çözünürlük analizi (MRA, multiresolution analysis), aşağıdaki koşulları sağlayan  $L^2(\mathbb{R})$  nin gömülmüş kapalı alt uzaylarının bir  $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$  dizisini içerir (Debnath, 2002):

(i)  $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \dots$  (iç içe geçmiş uzaylar)

(ii)  $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j(\mathbb{R}), \quad L^2(\mathbb{R})$  içinde yoğundur.

$$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \text{ (yoğunluk)}$$

(iii)  $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$  (ayırma)

(iv)  $f(x) \in V_j$  ancak ve ancak  $f(2x) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$  (ölçekleme)

(v)  $\{\phi_{0,k} = \phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$  kümesi  $V_0$  için ortonormal bir baz

oluşturacak şekilde  $\phi \in V_0$  fonksiyonu vardır:

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |(f, \phi_{0,k})|^2, \quad \forall f \in V_0. \quad (2.1)$$

Burada  $\phi$  fonksiyonu ölçekleme fonksiyonu olarak adlandırılır. Eğer  $\{V_j\}$ ,  $L^2(\mathbb{R})$  nin bir çoklu çözünürlüğü ve  $V_0$  tek bir  $\phi$  fonksiyonunun tam sayı ötelemeleri tarafından doğurulan kapalı bir alt uzay ise,  $\phi$  çoklu çözünürlük analizi oluşturur.  $V_j$  uzayları, yaklaşım uzaylarıdır. Her biri bir yaklaşım uzayları sistemine karşılık gelen çeşitli  $\phi$  seçimleri olabilir.

### Tanım 2.2.1' in Sonuçları

1. (iv) şartının art arda uygulanması,  $\forall j, m \in \mathbb{Z}$  için,  $f \in V_j$  ancak ve ancak  $f(2^m x) \in V_{j+m}$  sonucuna götürür. Başka bir deyişle,  $\forall j \in \mathbb{Z}$  için  $f \in V_j$  için  $f(2^{-j} x) \in V_0$ .

Bu ifade  $V_j$  de bulunan fonksiyonların,  $V_0$  da bulunan fonksiyonların  $2^{-j}$  ile ölçeklenmesi ile elde edildiğini gösterir. Eğer  $j=0$  ölçeği  $V_0$  ile ilgili ise  $2^{-j}$  ölçeği  $V_j$  ile ilgilidir. Böylece,  $V_j$  alt uzayları, sadece  $V_0$  merkez uzayının ölçeklenmiş versiyonlarıdır (Debnath, 2002).

**2. Tanım 2.2.1'** den hareketle, bir çoklu çözünürlük analizinin tamamen  $\phi$  ölçekleme fonksiyonu tarafından belirlendiği sonucuna varılır. Verilen bir  $\phi \in V_0$  için, ilk olarak

$$V_0 = \left\{ f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_{0,k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(x-k) : \{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}, \quad (2.2)$$

tanımlansın. **(iv)** koşulu  $V_0$  uzayının ortonormal  $\{\phi_{0,k}\} = \{\phi(x-k)\}$  ortonormal bazının olduğunu işaret eder. Bu nedenle,

$V_0$ , tüm  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(x-k)$  fonksiyonlarını içerir, öyleki

$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ . Benzer şekilde  $V_j$  uzayı da

$\{\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  ortonormal bazına sahiptir, öyle ki

$$f_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \phi_{j,k}(x) \text{ ve } \|f_k(x)\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{j,k}|^2 < \infty, \quad (2.3)$$

(Debnatht, 2002).

**3. (ii)** ve **(iii)** koşulları  $P_j$  nin  $V_j$  üzerine ortogonal projeksiyonları cinsinden ifade edilebilir:  $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0$  ve  $\lim_{j \rightarrow +\infty} P_j f = f$  (Debnatht, 2002).

**Tanım 2.2.2.**  $V_0$ , sonlu boyutlu bir  $V$  iç çarpım uzayının sonlu boyutlu alt uzayı olsun. Herhangi bir  $v \in V$  vektörü için,  $v$  nin  $V_0$

üzerine ortogonal projeksiyonu  $v$  ye en yakın olan  $v_0 \in V_0$  vektörüdür, öyle ki

$$\|v - v_0\| = \min_{w \in V_0} \|v - w\|. \quad (2.4)$$

$P_j f$  projeksiyonu,  $2^{-j}$  ölçeğinde  $f$  'nin bir yaklaşımı olarak ele alınabilir. Bu nedenle, verilen bir  $f$  fonksiyonunun ardışık yaklaşımları  $V_j$  uzayı üzerine  $P_j$  ortogonal projeksiyonları olarak tanımlanır:

$$P_j f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \cdot \phi_{j,k}, \quad (2.5)$$

Burada,  $\phi_{j,k}(x)$ ,  $V_j$  uzayı için ortonormal bir bazdır (Boggess and Narcowich, 2001).

(4).  $V_0 \subset V_1$  olduğundan dolayı,  $V_0$  için bir baz oluşturan  $\phi$  ölçekleme fonksiyonu, aynı zamanda  $V_1$  için de bir bazdır.  $\phi \in V_1$  ve  $\phi_{j,k}(x) = \sqrt{2} \phi(2x - k)$ ,  $V_1$  için ortonormal bir baz olduğundan dolayı,  $\phi$ ;

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(2x - k), \quad (2.6)$$

$$c_k = \langle \phi, \phi_{1,k} \rangle \text{ ve } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 1, \quad (2.7)$$

yazılabilirler (Debnath, 2002).

(2.6) denklemi genişleme denklemi olarak adlandırılır.  $x$  ve  $2x$  ifadelerini aynı anda içerir ve sık sık “iki ölçek denklemi” veya “inceltme denklemi” olarak belirtilir. Çünkü  $\phi(x)$ , inceltmiş  $V_1$  uzayında gösterilir.  $V_1$  uzayı daha ince  $2^{-1}$  ölçeğine sahiptir ve ölçeği 1 olan  $\phi(x)$ ’i içerir.

Ölçekleme fonksiyonlarının içinde belki de en çok yararlı olan sınıf kompakt veya sonlu destekli olanlardır. Bir fonksiyonun kompakt desteği varsa, sonlu bir aralık dışında değeri 0’a özdeştir. Haar ölçekleme fonksiyonu, kompakt destekli fonksiyona güzel bir örnektir. Daubechies dalgacıklarıyla ilgili ölçekleme fonksiyonu sadece kompakt destekli değil aynı zamanda süreklidir. Bir ölçekleme fonksiyonunun her iki özelliği de sahip olması özellikle istenir, çünkü ilgili ayrışım ve yeniden düşünüm algoritmaları fonksiyonları analiz ederken ve yeniden oluştururken daha hızlı hesaplamayı sağlar.

**Örnek 2.2.1.** Haar ölçekleme fonksiyonu;

$$\phi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{array} \right\},$$

süresizlik noktaları  $2^{-j}$ ’nin tamsayı katları kümesinde bulunan kompakt destekli parçalı sabit fonksiyonları (adım fonksiyonları) içeren  $V_j$  alt uzaylarını doğurur.

$\{V_j, j \geq 0\}$  kümesinin,  $\phi$  Haar ölçkleme fonksiyonu ile birlikte çoklu çözünürlük analizi şartlarını yerine getirdiğini görelim.

J negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. j. seviye adım fonksiyonlarının uzayı  $V_j$ , reel sayılar üzerinde  $\{\dots, \phi(2^j x+1), \phi(2^j x), \phi(2^j x-1), \dots\}$ , kümesi ile gerilen uzay olarak tanımlanır.  $V_j$  uzayı aynı zamanda süreksizlik noktaları

$\left\{\dots, -\frac{1}{2^j}, 0, \frac{1}{2^j}, \frac{2}{2^j}, \frac{3}{2^j}, \dots\right\}$  kümesinde bulunan sonlu destekli parçalı sabit fonksiyonların uzayıdır.

$V_j$ 'den alınan bir fonksiyon, aynı zamanda  $V_{j+1}$  uzayının elemanıdır.  $V_{j+1}$  uzayını süreksizlik noktaları,  $\left\{\dots, -\frac{1}{2^{j+1}}, 0, \frac{1}{2^{j+1}}, \frac{2}{2^{j+1}}, \frac{3}{2^{j+1}}, \dots\right\}$  kümesinde bulunan kompakt destekli adım fonksiyonlarının uzayıdır.

$\left\{\dots, -\frac{1}{2^j}, 0, \frac{1}{2^j}, \frac{2}{2^j}, \frac{3}{2^j}, \dots\right\} \subset \left\{\dots, -\frac{1}{2^{j+1}}, 0, \frac{1}{2^{j+1}}, \frac{2}{2^{j+1}}, \frac{3}{2^{j+1}}, \dots\right\}$  olduğundan  $V_j \subset V_{j+1}$ , dir.

Yoğunluk şartlarını sağlamak için  $V_{j+1}$  uzayını,  $V_j$  ve  $V_j$ 'nin  $V_{j+1}$  içinde var olan tümleyeninin ortogonal toplamı olarak ayrıştıralım.  $W_j$ ,  $V_j$  uzayının  $V_{j+1}$  uzayı içindeki tümleyenidir ve  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ . Bu durumda  $L^2(\mathbb{R})$  uzayı,  $L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots$ , sonsuz ortogonal

toplama direkt olarak ayrıştırılabilir. Özel olarak,  
 $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$  fonksiyonu;

$$f = f_0 + \sum_{j=0}^{\infty} w_j, \quad (2.8)$$

olarak tek bir biçimde yazılabilir.  $f_0 \in V_0, w_j \in W_j,$

$$f = f_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N w_j. \quad (2.9)$$

Bunun anlamı  $j \rightarrow \infty$  giderken,  $V_j$  uzayında alınan bir yaklaşım fonksiyonunun orijinal fonksiyonun özelliklerini tamamen kapsamasıdır.

Ayrışım şartı için,  $V_j$ 'nin tanımında  $j$ 'nin pozitif olduğu kadar negatif olabildiğine de dikkat edilmelidir. Eğer  $f \in V_{-j}, j > 0$  ise,  $f$  fonksiyonu elemanları  $\dots, [-2^j, 0), [0, 2^j), \dots$  aralıklarında sabitler olan  $\left\{ \phi\left(\frac{x}{2^j} - k\right), k \in \mathbb{Z} \right\}$  bazlarının sonlu bir lineer kombinasyonu olmalıdır.  $j$  büyüdükçe aralıklar da büyür. Diğer taraftan  $f$ 'nin desteği ( $f$ 'nin 0'dan farklı olduğu küme) sonlu kalmalıdır. Böylece  $j \rightarrow \infty$  iken  $f$  tüm  $V_j$ 'lere ait ise,  $f$ 'nin sabit değeri 0 olmalıdır.

Son olarak Haar sisteminin ölçekleme sabiti;

$$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j, \quad (2.10)$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0, \quad (2.11)$$

ifadesinden ortaya çıkar. Ortonormallik şartı ise;  $\int_{-\infty}^{\infty} (\phi(2^j x))^2 dx = \frac{1}{2^j}$  olduğunu görerek,  $\left\{ 2^{j/2} \phi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z} \right\}$  fonksiyonlar kümesinin  $V_j$  için ortonormal bir baz oluşturduğunu görmek gereklidir. Böylece  $\{V_j\}$  Haar sistemi, çoklu çözünürlük analizinin tüm özelliklerini sağlar.

**Teorem 2.2.1.**  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}, \phi$  ölçekleme fonksiyonu ile birlikte bir çoklu çözünürlük analizi olsun. Bu durumda herhangi bir  $j \in \mathbb{Z}$  için,

$$\left\{ \phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z} \right\},$$

fonksiyonlar kümesi  $V_j$  için ortonormal bir bazdır (Bogges and Narcowich, 2001).

**İSPAT:** Herhangi bir  $f(x) \in V_j$ 'nin,  $\left\{ \phi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z} \right\}$  fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğini göstermek gerekir. Ölçekleme özelliğinden,  $f(2^{-j}x) \in V_0$  ve bu nedenle  $f(2^{-j}x), \left\{ \phi(x - k); k \in \mathbb{Z} \right\}$ 'nin bir lineer kombinasyonudur.  $x$  yerine  $2^j x$

yazarak;  $f(x)$  fonksiyonunun  $\{\phi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ , nin bir lineer kombinasyonu olduğu görölür.

$\{\phi_{jk}, k \in \mathbb{Z}\}$  kümesinin ortonormal olduğunu göstermek için

$$2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j x - k) \overline{\phi(2^j x - \ell)} dx = \delta_{k\ell} = \begin{cases} 1, & k = \ell \\ 0, & k \neq \ell \end{cases}, \quad (2.12)$$

olduğunu göstermek gerekir.  $y = 2^j x \Rightarrow dy = 2^j dx$  değişken dönüşümü ile bu sonuca  $2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y - k) \overline{\phi(y - \ell)} dy$  ifadesinden ulaşılır.

### 2.3. Ölçkleme Bağıntısı

**Teorem 2.3.1.**  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\phi$  ölçkleme fonksiyonu ile birlikte bir çoklu çözünürlük analizi olsun. Bu durumda aşığıdaki ölçkleme bağıntısı geçerlidir:

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k), \quad p_k = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x - k)} dx, \quad (2.13)$$

Ayrıca,

$$\phi(2^{j-1} x - \ell) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2\ell} \phi(2^j x - k), \quad (2.14)$$

veya denk olarak;

$$\phi_{j-1,\ell} = 2^{-j/2} \sum p_{k-2\ell} \phi_{jk}, \quad \phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad (2.15)$$

vardır.

**UYARI:**  $\phi(x)$  ile  $\phi(2x)$ 'in ötelemelerini birbirine bağlayan denklem “ölçekleme bağıntısı” veya “iki ölçek bağıntısı” olarak adlandırılır.  $\phi$ 'nin desteği kompakt olduğu zaman, yalnızca sonlu sayıda  $P_k$  sıfırdan farklı olduğunda,  $|k|$  yeterince büyük olduğu için,  $\phi(2x-k)$ 'nin desteği  $\phi(x)$ 'in desteği dışında olacaktır. Bu nedenle, yukarıdaki teoremden ortaya çıkan toplam sonludur. Genellikle  $P_k$  katsayılarının reel olduğu durumlarda  $\phi$  fonksiyonu da reel değerlidir.

**İSPAT:**  $\phi(x) = \sum \tilde{p}_k \phi_{1k}(x)$  belli  $\tilde{p}_k$  seçimleri için sağlanmalıdır. Çünkü  $\phi(x) \in V_0 \subset V_1$ 'dir.  $V_1$  uzayının lineer gereni  $\{\phi_{1,k}, k \in \mathbb{Z}\}$  fonksiyonlar kümesidir.  $\{\phi_{1,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $V_1$  için ortonormal bir baz olduğundan dolayı,  $\tilde{p}_k$ 'lar aşağıdaki gibi belirlenebilirler:

$$\tilde{p}_k = \langle \phi, \phi_{1k} \rangle_{L^2} = 2^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x-k)} dx. \quad (2.15)$$

Bu nedenle;

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{p}_k \phi_{1k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{p}_k 2^{1/2} \phi(2x-k), \quad (2.16)$$

$$p_k = 2^{1/2} \tilde{p}_k = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x-k)} dx, \quad (2.17)$$

alınır ve

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x-k), \quad (2.18)$$

olur.  $x$  yerine  $2^{j-1}x-l$  alınarak, ikinci denklem elde edilir. İkinci denklemde düzenleme yapılarak da üçüncü denklem bulunur.

**Örnek:** Haar sistemi için  $p_k$  değerleri  $p_0 = p_1 = 1$ 'dir. Diğer tüm  $p_k$  değerleri sıfırdır.

**Örnek:** Sürekli ölçekleme fonksiyonlarına sahip Daubechies sisteminin  $p_k$  değerleri

$$p_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, p_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, p_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, p_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

dir.

**Teorem 2.3.2.**  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\phi$  ölçekleme fonksiyonu ile birlikte bir çoklu çözünürlük analizi olsun. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$1) \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \bar{p}_k = 2\delta_{l0}$$

$$2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_k|^2 = 2$$

$$3) \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} = 2$$

$$4) \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} = 1 \text{ ve } \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1} = 1$$

**İSPAT:** 1) İki ölççek bağıntısı ve  $\{\phi(x-k); k \in \mathbb{Z}\}$  kümesinin ortonormal olmasından yola çıkarak bu özelliği ispatlayalım. Bunlara ek olarak,  $V$  ortonormal  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$  bazı ile birlikte bir kompleks iç çarpım uzayı olsun.  $f \in V$  ve  $g \in \mathbb{Z}$  fonksiyonlar aşağıdaki

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k \text{ ve } g = \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k, \quad (2.19)$$

açılımlarına sahip iseler;

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k, \quad (2.20)$$

özelliği vardır. Buna Parseval denklemi denir. Bu denklemi de kullanarak;

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x-k), \quad \phi(2^{j-1}x-l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \phi(2^j x-k),$$

$$\begin{aligned}
\langle \phi(x), \phi(2^{j-1}x-l) \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \cdot \overline{p_{k-2l}} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x-k)} dx \right) \cdot \left( 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x+2l-k)} dx \right) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( 4 \int_{-\infty}^{\infty} (\phi(x))^2 \overline{\phi(2x-k)} \overline{\phi(2x-2l-k)} dx \right) = 2\delta_{0l}, \tag{2.21}
\end{aligned}$$

2)  $l=0$  alınırsa  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \bar{p}_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_k|^2 = 2$  sonucuna ulaşılır.

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x-k) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k) dx,$$

$\left( \begin{array}{l} t = 2x - k \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right)$  değişken dönüşümü ile

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt, \tag{2.22}$$

bulunur.  $\int \phi(t) dt$  sifıra eşit olamaz, aksi takdirde  $f \in L^2(\mathbb{R})$  fonksiyonuna  $V_j$  uzayı içindeki fonksiyonlarla  $\int f(t) dt \neq 0$  ile yaklaşamayız. Bu nedenle her iki taraftaki integraller sadeleşebilir. Bu şekilde üçüncü denklem ortaya çıkar.

4) İlk denklemde  $l$  yerine  $-l$  alalım ve  $l$  üzerinden toplama geçelim;

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (p_{k+2l} + \bar{p}_k) = 2, \quad (2.23)$$

$k$  üzerinden olan toplamı tek ve çift terimlerine ayıralım;

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+2l} \bar{p}_{2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1+2l} \bar{p}_{2k+1} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2k+2l} \right) \bar{p}_{2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2k+1+2l} \right) \bar{p}_{2k+1}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

parantez içinde yer alan toplamlarda  $l$  yerine  $l - k$  yazılırsa ;

$$2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{p}_{2k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2l} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{p}_{2k+1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2l+1} = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} \right|^2 + \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{p}_{2k+1} \right|^2, \quad (2.25)$$

$$E = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{p}_{2k} \quad \text{ve} \quad O = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1}, \quad (2.26)$$

olsun. Bu durumda denklem  $|E|^2 + |O|^2 = 2$  olarak ifade edilir. İkinci bir denklem olarak ikinci özelliği tek ve çift terimlerine ayırdığımızda  $E + O = 2$  bulunur. Bu iki denklemden hareketle yalnızca tek bir çözüm

vardır.  $E = O = 2$  böylece dördüncü özellik ispat edilmiş olur (Bogges and Narcowich, 2001).

## 2.4. Dalgacık ve Dalgacık Uzayları

$V_j \subset V_{j+1}$  özelliğinden yola çıkarak genel bir ayrışım algoritması gerçekleştirmek için,  $V_{j+1}$  uzayına,  $V_j$  ile  $W_j$  ile belirtilen ortogonal tümleyenin direkt toplamı olarak ayrıştırmaya ihtiyaç vardır. Ek olarak, ötelemeleri  $W_j$  uzayını geren bir  $\psi$  fonksiyonu oluşturulmalıdır.  $\phi$  fonksiyonu bir kere belirlendikten sonra ölçekleme bağıntısı  $W_j$  uzayını geren ilgili  $W_j$  uzayını geren  $\psi$  fonksiyonun oluşturulması için kullanılabilir.

**Teorem 2.4.1.**  $\{V_j; j \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k)$ ,

ölçekleme fonksiyonu ile birlikte bir çoklu çözünürlük analizi olsun,  $W_j$ ,

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \bar{p}_{1-k} \phi(2x - k) \text{ olmak üzere}$$

,  $\{\psi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$  nin gereni olsun. Bu durumda  $V_j \subset V_{j+1}$ ,  $V_j$  uzayının  $V_{j+1}$  uzayı içindeki ortogonal tümleyenidir. Ayrıca,  $\{\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $W_j$  için ortonormal bir bazdır.

**İSPAT:** İlk olarak  $j = 0$  için ispatı yapılır.  $j > 0$  durumu ise ölçekleme bağıntısı kullanılarak bulunur.

$j = 0$  için teoremi ispat ederken aşağıdaki üç ifade ispat edilmelidir:

1)  $\{\psi_{ok}(x) = \psi(x-k); k \in \mathbb{Z}\}$  kümesi ortonormaldir.

2)  $\psi_{ok}(x) = \psi(x-m); \forall m \in \mathbb{Z}$  için  $V_o$  a ortogondur. Denk olarak,  $W_o$  uzayı,  $V_o$ 'ın  $V_1$  içindeki ortogonal tümleyeninde bulunur.

3)  $V_1$  içindeki  $V_o$  a ortogonal olan herhangi bir fonksiyon,  $\psi(x-k)$  fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Denk olarak  $W_o, V_o$  uzayının  $V_1$  içindeki ortogonal tümleyenidir.

İlk ifade için,

$$\langle \psi_{om}, \psi_{ol} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{p}_{l-k+2m} p_{-k+2m}, \quad (2.27)$$

alınmalıdır.  $k' = 1 - k + 2m$  indeks değişikliği ve teorem 5.9 un ilk kısmını kullanarak

$$\langle \psi_{om}, \psi_{ol} \rangle = \frac{1}{2} \bar{p}_{k'} p_{k'+2l-2m} = \delta_{m-l,o} = \delta_{m,l}, \quad (2.28)$$

bulunur. Böylece  $\psi_{o,m}$  ortonormaldir.

İkinci ifade için,  $\psi(x-m)$  fonksiyonunun her bir  $l \in \mathbb{Z}$  için  $\phi(x-l)$  ye ortogonal olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü  $V_o, \{\phi(x-l), l \in \mathbb{Z}\}$  ile gerilir.

$$\langle \phi_{0l}, \psi_{0m} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2m} p_{k-2l}, \quad (2.29)$$

olsun, sağdaki toplam sıfırdır.

$l = m = 0$  ise, toplam

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1k} p_k = \dots - p_2 p_{-1} + p_1 p_0 - p_0 p_1 + p_{-1} p_2 + \dots, \quad (2.30)$$

olur.

Genel durumda,  $k = l + m - j$ ,  $j \geq 0$  için terimler  $(-1)^{l+m-j} p_{1-l+m+j} p_{m-l-j}$  biçimindedir. Bu terimler  $k = l + m + j + 1$  indeksli terimlerle birbirlerini yok ederler.

$$(-1)^{l+m+j+1} p_{m-l-j} p_{m+j+1-1} = -(-1)^{l+m-j} p_{m-l-j} p_{m+j+1-1}, \quad (2.31)$$

Böylece ikinci ifade de ispat edilmiş olur.

Üçüncü ifadenin ispatı biraz daha karmaşık bir yapıya sahiptir. İspat için,  $\phi$  sonlu sayıda sıfırdan farklı  $p_k$  sabiti için  $\phi(x) = \sum_l \phi(2x-l)$  ispatını sağlayan bir ölçekleme fonksiyonu olmak üzere,  $V_1, \{\phi(2x-j); j \in \mathbb{Z}\}$  gerilen bir lineer uzay olarak tanımlanır. İlgili dalgacık fonksiyonu  $\psi(x) = \sum_l (-1)^l \bar{p}_{1-l} \phi(2x-l)$  olarak tanımlanır.

Burada amaç  $V_1$  uzayının  $\phi$  ve  $\psi$  fonksiyonlarının ötelemeleri tarafından gerildiğini göstermektir. Ayrıca bu ifade  $V_0$  uzayının  $V_1$  içindeki ortogonal tümleyeni olan  $W_0$  uzayında bulunan herhangi bir elemanın  $\psi$  fonksiyonunun ötelemelerinin bir lineer kombinasyonu olduğu anlamına da gelir.

Şimdi her  $j$  için belli  $a_k$  ve  $b_k$  sabitleri seçimlerine karşılık

$$\phi(2x-j) = \sum_k a_k \phi(x-k) + b_k \psi(x-k), \quad (2.32)$$

olduğu gösterilmelidir.  $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$  ortonormal olduğundan dolayı eğer varsa,  $a_k$  sabitleri,

$$\begin{aligned} a_k &= \int \phi(2y-j) \overline{\phi(y-k)} dy \\ &= \int \sum_l \phi(2y-j) \bar{p}_l \phi(2y-2k-l) = \left(\frac{1}{2}\right) \bar{p}_{j-2k}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

ile verilmelidir. Benzer şekilde, eğer varsa  $b_k$  sabitleri

$$b_k = 2^{-1} (-1)^j p_{1-j+2k}, \quad (2.34)$$

ile verilmelidirler.

Böylece;

$$\phi(2x-j) = 2^{-1} \sum_k \left( \bar{p}_{j-2k} \phi(x-k) + (-1)^j p_{1-j+2k} \psi(x-k) \right), \quad (2.35)$$

olduğu gösterilmelidir. Bu denklem aynı zamanda

$$\phi(2x-j) = \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{k,l} \left( (-1)^{j+l} p_{1-j+2k} \bar{p}_{1-l} p_l \right) \phi(2x-2k-l), \quad (2.36)$$

ifadesine denktir. Bu denklemin geçerli olması için,  $2k+1=j$  olmadığı sürece  $\phi(2x-2k-l)$ , fonksiyonlarının katsayıları sıfıra eşit olmalıdır.

Bu nedenle  $1 = j - 2k + t$  ise,

$$\sum_k \left( p_{1-j+2k} \bar{p}_{1-j+2k} + \bar{p}_{j-2k} p_{j-2k} \right) = 2, \quad (2.37)$$

ve  $t \neq 0$  için  $1 = j - 2k + t$  ise tüm  $t \neq 0$  için;

$$\sum_k (-1)^t \left( p_{1-j+2k} \bar{p}_{1-j+2k-t} \right) + \sum_k \left( \bar{p}_{j-2k} p_{j-2k+t} \right) = 0, \quad (2.38)$$

olduğu gösterilmelidir.  $\tau = 1 - j + 2k$  ve  $\tau = j - 2k$  olarak (2.37)

denkleminin sol tarafı  $\sum_{\tau} \bar{p}_{\tau} p_{\tau}$  olarak yoğunlaştırılabilir. Denklem (2.38)

için t nin çift ve tek değerleri ayrı ayrı incelemeye ihtiyaç vardır. t tek,

$t = 2s + 1$  ise, (2.38) denklemindeki ilk toplam  $k' = s + j + k$  indeks değişimi ile

$$\sum_{k'} -P_{j-2k'+t} \bar{P}_{j-2k'}, \quad (2.39)$$

toplamına dönüşür. Bu toplamda ikinci toplamı yok eder,  $t$  çift,  $t=2s$  ise  $k = -k' + j + s$  indeks değişimi ikinci toplamı

$$\sum_{k'} P_{-j+2k'} \bar{P}_{-j+2k-t}, \quad (2.40)$$

biçimine dönüştürür.  $\tau = -j + 2k'$  ve  $\tau = 1 - j + 2k$  olarak (2.38) denklemi

$$\sum P_{\tau} \bar{P}_{\tau-2s}, \quad (2.41)$$

biçimine dönüşür. Bu toplam teorem 5.9 gereğince sıfıra eşittir. Böylece ispat biter.

**Teorem 2.4.2.**  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\phi$  ölçekleme fonksiyonu ile birlikte bir çoklu çözünürlük analizi olsun.  $W_j, V_j$  uzayının  $V_{j+1}$  içindeki ortogonal tümleyeni olsun. Bu durumda  $L^2(\mathbb{R}) = \dots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots$ , özel olarak, her  $f \in L^2(\mathbb{R})$  fonksiyonu  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k$  toplamı olarak tek bir

biçimde ifade edilebilir. Öyle ki,  $w_k \in W_k$  ve  $w_k$  lar karşılıklı olarak ortogondur. Denk olarak, tüm dalgacıkların kümesi  $\{\psi_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ ,  $L^2(\mathbb{R})$  için ortonormal bir bazdır.

Bu teoremdede görünen sonsuz toplam, sonlu toplamlarla yapılan bir yaklaşım olarak düşünülebilir. Başka bir deyişle, her  $f \in L^2(\mathbb{R})$  fonksiyonuna  $w_{-j} + w_{1-j} + \dots + w_{j-1} + w_j$  formundaki sonlu toplamla (uygun olarak büyük  $j$  için)  $L^2$  normunda keyfi yakınlıkta yaklaşılabilir (Bogges and Narcowich, 2001).

## 2.5. Ayrışım ve Yeniden Oluşum Formülleri

Bir  $f$  fonksiyonu (sinyali)  $V_j$  gibi bir yaklaşım uzayının elemanı olsun.  $f$  fonksiyonunu ifade etmek için iki ana ortonormal baz vardır. İlki  $V_j$  uzayının doğal  $\{\phi_{jk}, k \in \mathbb{Z}\}$  bazıdır. Bu baz cinsinden  $f$  fonksiyonu,

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{jk} \rangle \phi_{jk} , \quad (2.42)$$

yazılır.  $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$  ortogonal direkt toplama var olduğundan dolayı  $\{\phi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  bazı kullanılabilir. Bu ortonormal baza bağlı olarak  $f$  fonksiyonu

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle \phi_{j-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \psi_{j-1,k} , \quad (2.43)$$

formunda yazılabilir. Ayrışım formülü ilk bazdaki katsayılarla başlar ve bu katsayıları ikinci baza bağlı katsayıları hesaplamak için kullanır. Yeniden oluşum formülü ise tam tersi biçimde işlem yapar.

Ayrışım formülü;

$$\begin{cases} \langle f, \phi_{j-1,l} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{p}_{k-2l} \langle f, \phi_{jk} \rangle \\ \langle f, \psi_{j-1,l} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2l} \langle f, \phi_{jk} \rangle \end{cases}, \quad (2.44)$$

olarak yazılır. Yeniden oluşum formülü ise;

$$\langle f, \phi_{jk} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \langle f, \phi_{j-1,l} \rangle + 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \bar{p}_{1-k+2l} \langle f, \psi_{j-1,l} \rangle, \quad (2.45)$$

$f$  fonksiyonunun açılımı

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\frac{j}{2}} \underbrace{\langle f, \phi_{jk} \rangle}_{a_k^j} \underbrace{2^{-\frac{j}{2}} \phi_{jk}}_{\phi(2^j x - k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \phi(2^j x - k), \quad (2.46)$$

yazılabilir. Benzer şekilde diğer açılım

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{j-1} \phi(2^{j-1}x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{j-1} \psi(2^{j-1}x - k), \quad (2.47)$$

biçiminde,

$$a_k^{j-1} = 2^{\frac{(j-1)}{2}} \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle \text{ ve } b_k^{j-1} = 2^{\frac{(j-1)}{2}} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle, \quad (2.48)$$

olmak üzere yazılabilir. Burada  $a_k^j$  katsayıları, yaklaşım katsayıları ve  $b_k^j$  katsayıları, ayrıştırma katsayıları olarak adlandırılır. Ayrıştırma ve yeniden oluşum formülleri bu katsayılar cinsinden,

$$\text{ayrıştırma: } \begin{cases} a_l^{j-1} = 2^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{p}_{k-2l} a_k^j \\ b_l^{j-1} = 2^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2l} a_k^j \end{cases}, \quad (2.49)$$

$$\text{yeniden oluşum: } \begin{cases} a_k^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} a_l^{j-1} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^k \bar{p}_{1-k+2l} b_l^{j-1} \end{cases}, \quad (2.50)$$

olarak daha sistematik olarak ifade edilebilir (Boggess and Narcowich, 2001).

## 2.5.1. Ayrışım ve Yeniden Oluşum Formüllerinin Uygulanması

### 2.5.1.a. Ayrışım Algoritması

Bir sinyali (fonksiyonu) işlemek için filtreleme veya veri sıkıştırma gibi, sinyali salınan karaktere sahip bölgelerine ait bilgilerini içeren parçalara ayırmaya ihtiyaç vardır. Bu amaç için bir çoklu çözünürlük analizi kullanıldığı takdirde, sinyali dalgacık  $(W_j)$  uzaylarına ayıran bir algoritmaya gereksinim duyulur.

Bir sinyali ayrıştırmak için üç ana adım bulunmaktadır: Başlama, iterasyon ve sonlandırma.

**Başlama:** Bu adım iki kısımdan oluşur. İlk kısım  $f$  üzerindeki bilgilere en iyi uyan  $V_j$  yaklaşım uzayının belirlenmesidir. Örnekleme oranı ve çoklu çözünürlük analizinin kişisel seçimi hangi  $V_j$  uzayının kullanılacağı belirler. İkinci kısım  $f$  nin kendisine en iyi olan  $f_j \in V_j$  nin seçimidir.

$V_j$  uzayından  $f$  ' e olan en iyi yaklaşım,  $f$  fonksiyonunun  $V_j$  üzerine ortogonal izdüşümüdür.  $2^{j/2} \phi(2^j x - k)$  ortonormal olduğundan dolayı

$$P_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \phi(2^j x - k), \quad a_k^j = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\phi(2^j x - k)} dx, \quad (2.51)$$

vardır.

**Teorem 2.5.1.a.**  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ , kompakt destekli bir  $\phi$  ölçekleme fonksiyonu ile birlikte verilen bir çoklu çözünürlük analizi olsun. Eğer  $f \in L^2(\mathbb{R})$  sürekli ise yeterince büyük  $j$  için;

$$a_k^j = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\phi(2^j x - k)} dx \approx m f\left(\frac{k}{2^j}\right), \quad m = \int \overline{\phi(x)} dx, \quad (2.52)$$

vardır.

**İterasyon:** Başlama adımından sonra  $f \approx f_j \in V_j$  dir.  $f_j$  ile başlanabilir ve düşük seviyeli yaklaşım kısmı  $f_{j-1} \in V_{j-1}$  ve dalgacık kısmı  $w_{j-1} \in W_{j-1}$  kısmının toplamına  $f_j = f_{j-1} + w_{j-1}$  olarak ayrıştırılır. Bu süreç  $f_{j-1}, f_{j-2}, \dots$  biçiminde devam eder. Bu süreç 0 seviyesinde biten aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{array}{cccccccc} f \approx f_j & \rightarrow & f_{j-1} & \rightarrow & f_{j-2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & f_1 & \rightarrow & f_0 \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & w_{j-1} & & w_{j-2} & & \dots & & w_1 & & w_0 \end{array}$$

**Tanım 2.5.1.a.** Bir  $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$  dizisinin alt örneği (down sample),

$$Dx = (\dots, x_{-2}, x_0, x_2, \dots),$$

veya  $(Dx)_l = x_{2l}, \forall l \in \mathbb{Z}$  dizisidir.

Tanımdan sonra, ayrık filtreleri (konvolüsyon operatörleri) kullanarak algoritmada iteratif adım formüle edilir.  $h$  ve  $l$  filtreleri sırasıyla ayrışım yüksek geçiş (decomposition, high-pass) ve ayrışım alçak geçiş (decomposition, low-pass) filtreleri olarak adlandırılırlar.

$$\text{Konvolüsyon form: } a^{j-1} = D(l * a^j) \text{ ve } b^{j-1} = D(h * a^j)$$

$$\text{Operatör form : } a^{j-1} = DLa^j \text{ ve } b^{j-1} = DHa^j$$

**Not:**  $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$  ve  $y = (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots)$  dizilerinin konvolüsyonu  $(x * y)_l = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{l-k}$  olarak tanımlanır.  $h$  ve  $l$ ,  $h_l := \frac{1}{2}(-1)^k p_{k+1}$ ,  $l_k := \frac{1}{2} \bar{p}_{-k}$  dizileri ise, iki ayrık filtre (konvolüsyon operatörleri)  $H(x) = h * x$ ,  $L(x) = l * x$  olarak tanımlanır.

$$a^j \begin{array}{l} H \quad 2 \downarrow \dots b^{j-1} \\ \dots \\ L \quad 2 \downarrow \dots a^{j-1} \end{array}$$

**Şekil 2: Genel çoklu çözünürlük analizi için ayrışım diyagramı**

**Sonlandırma:** Ayrışımı bitirmek için çeşitli kriterler vardır. En sade biçimi, sonlu sayıda örnek elde edinceye kadar ayırıştırmaaktır. Diğer taraftan, bu gerekli olmayabilir. Genelde, durma noktası ulaşmak istenen noktanın ne olduğuna bağlı olarak değişir (Bogges and Narcowich, 2001).

### 2.5.1.b. Yeniden Oluşum Algoritması

Sinyal (fonksiyon) ayrıştırıldıktan sonra, çeşitli amaçlar için  $W_j$  bileşenleri modifiye edilebilir. Amaç parazit yok etmek ise, istenmeyen frekanslara karşılık gelen  $f$ , nin ilgili  $W_j$  bileşenleri atılır ve sonuç sinyali önemli derecede düşük parazitli olacaktır. Eğer amaç veri sıkıştırma ise, küçük olan  $W_j$  bileşenleri atılabilir; ki bu durum sinyali çok fazla değiştirmez. Yalnızca önemli  $W_j$  bileşenleri geçer ve veri sıkıştırma gerçekleşir. Her iki durumda da  $W_j$  bileşenleri modifiye olduğundan dolayı sıkıştırılmış veya filtrelenmiş sinyali  $W_j$  nin  $\phi(2^j x - l)$  baz elemanları cinsinden yeniden oluşturulan bir algoritmaya ihtiyaç vardır. Fikir  $f_j \approx f$  ifadesini  $j=1$  için  $f_j = f_{j-1} + w_{j-1}$  kullanarak oluşturmaktır. Fikrin şeması aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{cccccccc}
 f_0 & \rightarrow & f_1 & \rightarrow & f_2 & \rightarrow & \dots & f_{j-2} & \rightarrow & f_{j-1} & \rightarrow & f_j \approx f \\
 & \nearrow & w_1 & \nearrow & w_2 & \nearrow & \dots & \nearrow & w_{j-2} & \nearrow & w_{j-1} & \nearrow
 \end{array}$$

ayrışımında olduğu gibi yeniden oluşumun üç ana adımı vardır; Başlama, İterasyon, Sonlandırma.

**Başlama:** yeniden oluşum için elde bulunan küme  $j=0$  seviyesinden başlayarak  $\{a_k^0\}$  yaklaşım ve  $\{b_k^{j'}\}$ ,  $j'=0,\dots,1$  detay (dalgacık) katsayılarından oluşan kümedir. Bu katsayılar aşağıdaki açılımlarda bulunur:

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \phi(x-k) \in V_0, \quad (2.53)$$

$$w_{j'}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{j'} \psi(2^{j'}x-k) \in W_{j'}, \quad 0 \leq j' \leq j, \quad (2.54)$$

**İterasyon:** Bu adım için de ayrık filtrelerden yararlanır.

**Tanım 2.5.1.b.**  $x = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$  bir dizi olsun.  $U$  üst örnekleme operatörü

$$Ux = (\dots, x_{-2}, 0, x_{-1}, 0, x_0, x_1, 0, x_2, 0, \dots),$$

veya

$$(Ux)_k = \begin{cases} 0 & , k \text{ tek ise} \\ x_{k/2} & , k \text{ çift ise} \end{cases},$$

şeklinde tanımlanır.

Yeniden oluşturma için kullanılmak istenen iterasyon süreci ayrık filtreler (konvolüsyon operatörleri) cinsinden

$$\text{Konvolüsyon form: } a^j = \tilde{l} * (Ua^{j-1}) + \tilde{h} * (Ub^{j-1}),$$

Operatör form:  $a^j = \tilde{L}Ua^{j-1} + \tilde{H}Ub^{j-1}$ ,

biçiminde formüle edilebilir.

$$\begin{array}{c} b^{j-1} \dots 2 \uparrow \dots \tilde{H} \dots \\ a^{j-1} \dots 2 \uparrow \dots \tilde{L} \dots \dots a^j \end{array}$$

### Şekil 3 : Genel çoklu çözünürlük analizi için yeniden oluşturma diyagramı

**Sonlandırma:** Ayırışım ve yeniden oluşum algoritması gerçek  $\phi(x)$  ve  $\psi(x)$  formüllerini değil  $p_k$  ölçekleme katsayılarını kullanırlar. Fonksiyon veya sinyal  $f(x) = \sum_l a_l^j \phi(2^j x - l)$  biçiminde oluşturulup  $a_l^j$  katsayıları elde edilir. Bu adımda grafik çizilerek süreç sonlandırılır (Boggess and Narcowich, 2001).

### 2.6. Daubechies Dalgacıkları ve Ayrık Dalgacık Dönüşümü (DWT)

Daubechies dalgacıkları, Ingrid Daubechies keşfedilen bir dalgacık sistemine sahiptir. Daubechies dalgacıkları ayrıca iki önemli özelliğe de sahiptir. Birincisi, sonlu sayıda sıfırdan farklı  $p_k$  ölçekleme katsayıları vardır. Bunun anlamı, ölçekleme fonksiyonlarının ve dalgacıklarının kompakt olmasıdır.  $N$ -mertebeli Daubechies ölçekleme fonksiyonu  $2^N$  adet sıfırdan farklı ölçekleme katsayısına

sahiptir ve ölçekleme fonksiyonu ile ana dalgacık fonksiyonunun desteği  $[0, 2N-1]$  aralığı üzerindedir.

N-mertebeli Daubechies dalgacığının ikinci önemli özelliği, dalgacıkların ilk  $N-1$  momentlerinin sıfır olmasıdır.  $\phi(x)$ , ölçekleme fonksiyonu ve  $\psi(x)$ , dalgacık fonksiyonu olmak üzere, ölçekleme ve dalgacık fonksiyonlarının momentleri sırasıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) x^m dx, \quad (2.55)$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) x^m dx, \quad (2.56)$$

olarak tanımlanır. Kompakt destekli dalgacıklar için bu integraller dalgacığın desteği üzerinde alınan integrale denktirler. Daubechies dalgacıklarının momenti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_N(x) x^m dx = 0, \quad m=0, \dots, N-1, \quad (2.57)$$

olur.  $\psi_N$  dalgacığının ilk  $N$  momentinin sıfırlanması genellikle,  $\psi_N$   $N$  tane sıfırlanan momente sahiptir biçiminde kısaltılır, ki bu ifadeden ilk  $N$  tanesi anlaşılır. Sıfırlanan momentler, N-mertebeli her Daubechies

dalgacık baz fonksiyonunun, derecesi  $N$  den küçük olan tüm polinomlara ortogonal olduğu anlamına gelir.

Yukarıda bahsedilen konudan hareketle, Daubechies dalgacıkları sahip oldukları sıfırlanan moment sayısına göre sınıflandırılırlar. Ölçekleme fonksiyonunun ve dalgacığın düzgünlüğü sıfırlanan momentlerin sayısı ile birlikte artar.  $N=1$  durumunda, hem ölçekleme fonksiyonu hem de dalgacık fonksiyonu süreksizdir.  $N=2$  durumunda, Daubechies ölçekleme fonksiyonu ve dalgacığı süreklidir, ancak kesinlikle düzgün türevlere sahip değildirler.  $N=3$  durumunda, her ikisi de sürekli olarak diferansiyellenebilir.  $N$  büyük olduğunda,  $\phi_N$  ve  $\psi_N$  fonksiyonlarının sürekli türevlerinin sayısı kabaca  $\frac{N}{5}$  kadardır.

Daubechies dalgacıkları tanımlanırken,  $\phi(x)$  ölçekleme fonksiyonu,  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$  biçiminde normalize edilmek üzere,

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi(2x - k), \quad (2.58)$$

genişleme (dilation) denkleminin çözümü olarak ve  $\psi(x)$  dalgacığı ölçekleme fonksiyonu cinsinden

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} r_k \phi(2x - k), \quad (2.59)$$

olarak tanımlanır.  $\phi(x)$  ve  $\psi(x)$  fonksiyonlarından öteleme ve genişleme yoluyla

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad (2.60)$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad (2.61)$$

fonksiyonlarını elde etmek için ortonormal bir baz oluşturulabilir.

Bu açılımlarda bulunan  $p_k$  ve  $r_k$  sayıları özel dalgacık kümeleri oluştururlar ve dalgacık filtre katsayıları olarak adlandırılırlar.  $H = \{p_k\}_{k=0}^{N-1}$  ve  $G = \{r_k\}_{k=0}^{N-1}$  filtreleri  $r_k = (-1)^k p_{N-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , ile birbirlerine bağlıdır. Sinyal işlemede H ve G ikilisi dördül ayna filtresi (the quadrature mirror filters) olarak adlandırılır. Tüm dalgacık özellikleri bu parametreler tarafından belirlenir. Örneğin,  $N = 4$  için Daubechies,  $D4$  filtre katsayılarını bulalım. Bu katsayılar  $p_0, p_1, p_2$  ve  $p_3$  olsun. Bir sütun vektörüne uygulanan dönüşüm matrisi



biçimindedir. Ters dönüşüm matrisinin  $W$  ayrık dalgacık dönüşüm matrisinin tersi olması için

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \quad (2.64)$$

$$p_2 p_0 + p_3 p_1 = 0, \quad (2.65)$$

denklemlerini sağlamalıdır. Ayrıca,

$$-p_3 - p_2 + p_1 - p_0 = 0, \quad (2.66)$$

$$0p_3 - 1p_2 + 2p_1 - 3p_0 = 0, \quad (2.67)$$

denklemlerine ihtiyaç vardır. Bu dört denklem kullanılarak

$$p_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, p_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, p_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, p_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

filtre katsayıları elde edilir (Pres et al., 2002).

Filtre katsayıları kullanılarak oluşturulan  $W$  ve  $W^{-1} = W^T$  matrislerinin gerçekleştirdiği dönüşümler sırasıyla ayrık dalgacık dönüşümü (the discrete wavelet transform, DWT) ve ters ayrık dalgacık dönüşümü (the inverse discrete wavelet transform, IWT) olarak adlandırılırlar.

Kullanılacak yöntemde ayrık sinyallerin ve ayrık dalgacık dönüşümünün matris formülasyonu önemli bir yer tutar. Matris formülasyonu özellikle nümerik hesaplamalar için son derece uygundur. Pratikte yalnızca sonlu sinyallerle ilgilenildiği için şöyle bir soru ortaya çıkar: Sonlu bir sinyalin ayrık dalgacık dönüşümü nasıl sunulur ve nasıl alınır? Bunu gerçekleştirmenin birçok yolu bulunmaktadır. Bunlardan biri, sinyali ilgi alanının dışına doğru genişletmektir. Eğer sonlu bir sinyal, tüm tanım kümesinin tamamı üzerinde tekrar eden periyodik bir sinyal olarak görülürse (periyodizasyon) daha etkin bir yönteme erişilir. Bir sonraki adım, bir  $f$  vektörünü ( ayrık işlemlerde vektörlerle fonksiyonlar yer değiştirir.) farklı ölçeklere (çözünürlüklere) ayırmaktır. Bu adıma,  $\hat{f} = Wf$  formunda bir matris olarak,  $n \times n$  tipinde ayrık dalgacık dönüşümü matrisi  $W$  ile ulaşılır. Böylece sinyalin uygun bir matris ile çarpılması ile ayrık dalgacık dönüşümü gerçekleşir. Ölçekleme ve dalgacık filtrelerinin ortogonal özelliklerinden dolayı,  $W$  ortogonal bir matristir. Yeniden oluşum tek bir matris-vektör çarpımı ile gerçekleştirilebilir.  $W$  ayrık dalgacık dönüşümü matrisinin bir diğer avantajı ise,  $Lu = f$  denkleminin sonlu fark ile ayrıklaştırılması ile elde edilen matrisin koşul sayısını (condition number) düşürmesidir. Düşürme işlemine önkoşullama (preconditioning) adı verilir ve dalgacıkların ortogonalite özellikleri ile gerçekleştirilir.

Koşul sayısı,  $Ax = y$  lineer sisteminin,  $y$  nin olduğu kadar  $A$  nın küçük yayılımları altındaki kararlılığını ölçer. Bu nedenle uygulamalarda küçük bir koşul sayısı (örneğin 1'e yakın) tercih edilir. Eğer koşul sayısı yüksek ise,  $Ax = y$  lineer sisteminin düşük koşul sayılı bir matrise sahip

olan denk bir sistemle yer değiştirmesi gerekir. Bu işleme bir örnek vermek gerekirse;  $W$  önkoşullama matrisi ile  $Ax = y$  lineer sistemi çarpılır:

$$WAx = Wy.$$

Oluşan yeni denk lineer sistemin matrisinin koşul sayısı bir öncekinden düşüktür,  $C^\#(AW) \leq C^\#(A)$ .

Verinin periyodik olduğu kabul edilip, D4 filtre katsayıları kullanılarak sarma (wrap around effect) etkisine sahip 8x8 boyutlu bir  $W$  ayrık dalgacık dönüşüm matrisi

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & -p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & -p_2 & p_1 & -p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & -p_2 & p_1 & -p_0 \\ p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 \\ p_1 & -p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & -p_2 \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

olarak belirlenir (Bujurke et al., 2007).

### 3. MULTİGRİD YÖNTEMİ

Multigrid yöntemi çok etkili lineer çözücüler oluşturmaya olanak tanır ve en hızlı çözüm yöntemleri arasındadır. Multigrid yönteminin karakteristik özelliği, yakınsaklığın  $h$  adım büyüklüğünden bağımsız olması ve her adımdaki aritmetik işlem sayısının ağ noktalarının sayısı ile doğru orantılı oluşudur. Multigrid yöntemleri tam bir etkinlikle

- Değişken katsayılı genel eliptik denklemlere,
- Genel tanım kümelerinde,
- Genel sınır koşulları için,
- Bir boyutlu, iki boyutlu, üç boyutlu ve daha yüksek boyutlarda,
- Skaler denklemler ve denklem sistemlerine,

uygulanabilir.

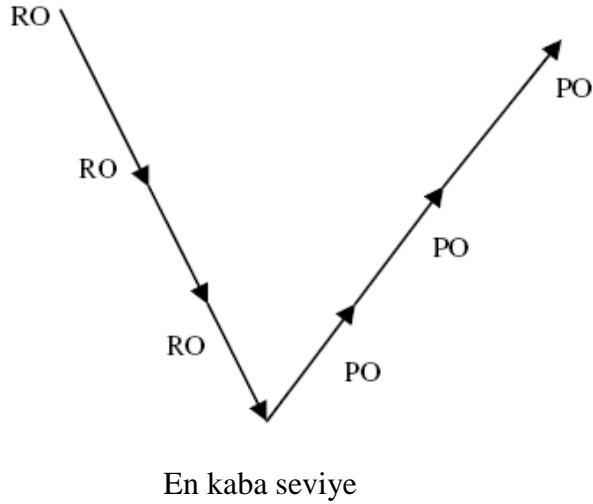
Bu yöntem ayrıca direkt olarak, global lineerleştirme olmaksızın lineer olmayan eliptik problemlere de uygulanabilir.

Multigrid yönteminin iki temel prensibi vardır: Düzgünleştirme iterasyonu (the smoothing iteration) ve kaba ağ düzeltmesi (the coarse grid correction). Klasik multigrid yönteminde

$$Lu = f, \quad (3.1)$$

denkleminin çözümü aranır. Burada  $L, \Omega_h = \{(x_i, y_k); 0 \leq i, k \leq N+1\}$  ince ağı üzerinde standart yöntemlerle elde edilen (Gauss-Seidel) kendine

ek (self-adjoint) operatördür. Çözüm sonucunda ortaya çıkan hataya ağ yerleşimi ikinin kuvvetleri şeklinde artan  $\Omega_{2h}, \Omega_{4h}, \dots$  hiyerarşik yapıya sahip kaba ağlar üzerinde yaklaşılır. Çünkü hatanın yüksek frekanslı yani gözle görünür kısmı ince ağ üzerinde çeşitli iterasyonlarla yok olur. Amaç düşük frekanslı (düzgün) hatayı daha az işlemle yok etmektir. Bu nedenle hata, ince ağdan daha kaba ağa geçen bir artık olarak düşünülür. Bu işlemi yaparken; vektörleri ve matrisleri ince ağdan daha kaba ağa transfer etmek için kısıtlama operatörü  $(RO)I_h^{2h}$  (the restriction operator) ve kaba ağdan daha ince ağa transfer etmek için yayma operatörü  $(PO)I_{2h}^h$  (the prolongation operator) kullanılır. Şekil 4 standart multigrid V- döngüsünü gösterir. Sol tarafta bulunan kol, döngünün daha inceden daha kaba ağlara giden ilk kısmını ve sağ tarafta bulunan kol ise, en ince ağa giden diğer kısmını gösterir.



#### Şekil 4: En kaba seviye V- döngüsü

Temel multigrid prensibi, hatanın düzgün kısmına daha kaba ağlar üzerinde yaklaşmaktır. Hatanın düzgün olmayan veya kaba kısmı, daha ince ağ üzerinde az sayıda iterasyon ile indirgenir. Diğer bilinen yöntemlerin aksine multigrid,  $N$  bilinmeyenli problemi  $O(N)$  adet işlemle çözüme ve daha az saklama yeri olanağı sunar ve klasik nümerik şemaların kısıtlamalarının üstesinden gelerek, ağ büyüklüğü sıfıra giderken multigrid çözümünün tam çözüme yaklaşmasını sağlar. Yöntemin dikkate değer bir diğer özelliği ise, ağ noktaları arttığında yakınsaklık hızında bir bozulma olmamasıdır (Bujurke et al., 2007; Trottenberg et al., 2001; Wesseling, 1992; McCormick, 1982).

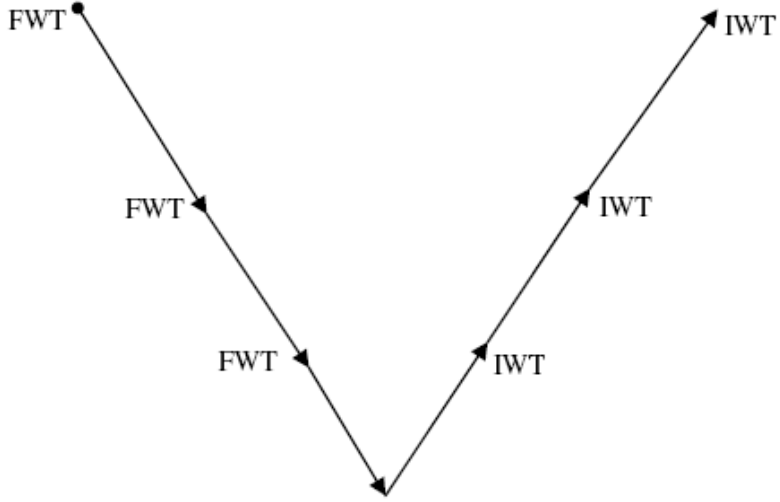
### 3.1. Çoklu Çözünürlük Analizi ile Multigrid Yöntemi Arasındaki Benzerlikler

1. Bir çoklu çözünürlük analizinde bulunan en yüksek çözünürlüklü  $V_0$  uzayı multigrid yönteminde ince ağ vektörlerinin uzayı  $\Omega_h$  a karşılık gelir.
2. Dalgacık analiz (ayrışım) adımı, kısıtlama operasyonuna özdeştir. Denk olarak, ayrık dalgacık dönüşümü (DWT),  $I_h^{2h}$  kısıtlama operatörüne denktir.

3. Dalgacık sentez (yeniden oluşum) adımı, yayma operasyonuna özdeştir. Denk olarak, ters ayrık dalgacık dönüşümü (IWT),  $I_{2h}^h$  yayma operatörüne özdeştir.
4.  $W$  dalgacık dönüşüm matrisi olmak üzere,  $WW^T = I$  koşulu  $I_h^{2h} I_{2h}^h = I$  koşuluna karşılık gelir.
5. Çoklu çözünürlük analizinde  
 $V_0 = \text{span}\{\phi_{1,k}\} \oplus \text{span}\{\psi_{1,k}\} = V_1 \oplus W_1$  ifadesi,  
 multigrid algoritmasında  
 $\Omega_h = \text{Range}\{I_{2h}^h\} \oplus \text{Nullspace}\{I_h^{2h}\}$  ifadesine özdeştir  
 (Bujurke et al., 2007).

#### 4. DALGACIK – MULTİGRİD YAKLAŞIMI

İkinci bölümde bir fonksiyonun dalgacık ayrışımının aynı fonksiyonun çoklu çözünürlük gösterimiyle sonuçlandığı görüldü. Buradan hareketle, doğal çoklu çözünürlük analizi özellikleri multigrid fikri ile birleştirilirse hesaplama zamanının indirgenmesine ve uygulama sürecinin kolaylaştırılmasına olanak tanır. Dalgacıklar yalnızca yaklaşım uzaylarının bazıları değildirler, ardışık uzaylar arasında temel yayma ve kısıtlama rolü oynarlar. Bu anlamdaki modifiye edilmiş V- döngüsü Şekil 5' te gösterilmiştir.



En kaba seviye

**Şekil 5: En kaba seviye modifiye V- döngüsü**

$Lu = f$  formundaki genel operasyon denklemi göz önüne alınsın, örneğin bu bir genel eliptik sınır değer problemi olsun. Bu denklemin sonlu fark ayrıklaştırması matris formunda

$$Ax = y, \quad (4.1)$$

olarak ifade edilir.  $n \times n$  boyutunda bir  $W$  dalgacık dönüşüm matrisi ve  $n$  boyutlu bir  $x$  vektörü verildiğinde, ileri ve geri dalgacık dönüşümleri matris – vektör çarpımları kullanılarak

$$\hat{x} = Wx, \quad x = W^T \hat{x}, \quad (4.2)$$

biçiminde hesap edilir.

$$\hat{x} = W_x x, \quad \hat{y} = W_y y \text{ ve } \hat{A} = W_y A W_x^T, \quad (4.3)$$

dönüşümleri (4.1) denkleminin elemanlarının dalgacık dönüşümleri olsun. Bu durumda (4.1) denklemi

$$\hat{A} \hat{x} = \hat{y}, \quad (4.4)$$

olarak elde edilir. Böylece (4.4) denklemi dalgacık uzaylarının tanım kümesindedir. (4.4) denklemi  $x$  için,

$$x = W_x^T \hat{x}, \quad (4.5)$$

bağıntısı kullanılarak çözülür. Bu işlem sadece tek bir ağ çözümü verir.

Bir sonraki adım için,  $J$  dalgacık ayrışım seviyesi olmak üzere, modifiye edilmiş V- döngüsü aşağıdaki adımları içerir:

(1)  $\hat{y}_l$  ve  $\hat{A}_l$ ,  $l = -1, -2, -3, \dots, -J$ , elde etmek amacıyla  $y$  ve  $A$  üzerine ayrık dalgacık dönüşümü (FWT) uygulanır.  $l = -J$  alınır.

(2) En kaba seviyede  $\hat{A}_l \hat{x}_l = \hat{y}_l$  denklemi çözülerek  $\bar{\hat{x}}_l$  elde edilir.

(3)  $\bar{\hat{x}}_l$ ,  $l = -J, \dots, -2, -1$ , üzerine ters dalgacık dönüşümü (IWT) uygulanarak istenilen sonuç elde edilir.

Bu yöntem,  $\log_2 2^J$  seviyesinden daha küçük çözünürlükte çözümü verir, burada bulunan  $J$  dalgacık ayrışım seviyesini gösterir.

Başka bir deyişle,  $J$  seviyesini geçmeyen sayıda iterasyonla tam çözüme yakınsaklık garanti edilir (Bujurke et al., 2007).

## 6. NÜMERİK UYGULAMA

Bir boyutlu tanımlayıcı basit eliptik sınır değer problemi ile dalgacık – multigrid yönteminde yer alan temel adımlar açıklanır.

**Örnek .** Bir boyutlu

$$u_{xx} + \frac{16\pi^2}{9}u = \frac{7}{9}\pi^2 \sin \pi x, \quad (5.1)$$

denklemini  $u(0) = u(1) = 0$  Dirichlet sınır koşulları ile birlikte göz önüne alınsın. Bu denklemin analitik çözümü, denkleminde sadece tek bir değişken olması nedeniyle adi diferansiyel denklem çözümü biçiminde yapılabilir. İlk olarak

$$u_{xx} + \frac{16\pi^2}{9}u = 0, \quad (5.2)$$

homojen denkleminin çözümü aşağıdaki gibi yapılır:

$$m^2 + \frac{16\pi^2}{9} = 0 \Rightarrow m^2 = -\frac{16\pi^2}{9}$$

$$m_{1,2} = \pm \frac{4\pi}{3}i \Rightarrow u_h(x) = c_1 \cos \frac{4\pi}{3}x + c_2 \sin \frac{4\pi}{3}x, \quad (5.3)$$

Sınır koşulları kullanılarak  $c_1$  ve  $c_2$  katsayıları elde edilir:

$$u_h(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$u_h(1) = c_2 \sin \frac{4\pi}{3} = 0 \Rightarrow c_2 = 0, \quad (5.4)$$

Dolayısıyla homojen denklemin çözümü  $u_h(x) = 0$  biçiminde elde edilir. Diğer taraftan, denklemin özel çözümü  $u_p(x) = A \sin \pi x + B \cos \pi x$  belirlenir. özel çözümde yer alan katsayıları bulmak için ,

$$u_p(x) = A \sin \pi x + B \cos \pi x$$

$$\left(u_p\right)_x(x) = \pi A \cos \pi x - \pi B \sin \pi x, \quad (5.5)$$

$$\left(u_p\right)_{xx}(x) = -\pi^2 A \sin \pi x - \pi^2 B \cos \pi x$$

türevleri denkleme yerine yazılarak  $A=1, B=0$  elde edilir. Özel çözüm  $u_p(x) = \sin \pi x$  bulunur.  $u(x) = u_h(x) + u_p(x) = \sin \pi x$  analitik çözümü elde edilir.

Türev için standart sonlu fark operatörleri kullanılarak (5.1) denlemi

$$\frac{1}{h^2} \left[ u_{i+1} - \left( 2 - \frac{16\pi^2}{9} \right) u_i + u_{i-1} \right] = \frac{7}{9} \pi^2 \sin \pi x, \quad h = \frac{1}{N+1}, \quad (5.6)$$

olarak yazılabilir. (5.2) denkleminin matris formülasyonu

$$Ax = y, \quad (5.7)$$

olsun. Bir önceki kısımda açıklandığı gibi en kaba  $-J$  seviyesine ulaşıncaya kadar ardışık olarak ayırık dalgacık dönüşümü uygulanır. Daha sonra,  $\hat{A}_l \hat{x}_l = \hat{y}_l$  denklemi en kaba seviyede Gauss-Jordan yöntemi kullanılarak  $\hat{x}_l$  elde etmek amacıyla çözülür. Son olarak,  $\hat{x}_l$  ( $l = -J$ ) üzerinde ters dalgacık dönüşümü uygulanır, ki bu işlem ile birlikte istenen doğruluk elde edilir.  $D_4$  dalgacıkları kullanılarak  $2^4$  ve  $2^8$  çözünürlüklerinde elde edilen çözüm Tablo 1 ve Tablo 2 de verilmiştir.  $2^4$  çözünürlüğünde sınırlar haricinde toplam 16 nokta,  $2^8$  çözünürlünde sınırlar haricinde toplam 256 nokta bulunmaktadır.  $h = \frac{1}{N+1}$  olarak tanımlandığından,  $2^4$  ve  $2^8$  çözünürlüklerinde artış miktarları sırasıyla  $\frac{1}{16+1} = 0,0588$  ve  $\frac{1}{256+1} = 0,0039$  olarak belirlenmiştir. Elde edilen çözümler  $u = \sin \pi x$  tam çözümü ile karşılaştırılmıştır (Bujurke et al., 2007).

**Tablo 1:  $2^4$  çözünürlükte  $D_4$  dalgacı kullanılarak elde edilen dalgacık – multigrid çözümünün tam çözüm ile karşılaştırılması**

$x$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.0588	.18375E+00	.18308E+00
.1176	.36124E+00	.35992E+00
.1765	.52643E+00	.52451E+00
.2353	.67370E+00	.67124E+00
.2941	.79802E+00	.79511E+00
.3529	.89516E+00	.89190E+00
.4118	.96183E+00	.95832E+00
.4706	.99573E+00	.99210E+00
.5294	.99573E+00	.99210E+00
.5882	.96183E+00	.95832E+00
.6471	.89516E+00	.89190E+00
.7059	.79802E+00	.79511E+00
.7647	.67370E+00	.67124E+00
.8235	.52643E+00	.52451E+00
.8824	.36124E+00	.35992E+00
.9412	.18375E+00	.18308E+00

**Tablo2:  $2^8$  çözünürlükte  $D_4$  dalgacığı kullanılarak elde edilen dalgacık – multigrid çözümünün tam çözüm ile karşılaştırılması**

$x$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.0039	.12224E-01	.52275E+00
.0078	.24446E-01	.53313E+00
.0117	.36664E-01	.54343E+00
.0156	.48877E-01	.55365E+00
.0195	.61082E-01	.56379E+00
.0233	.73279E-01	.57384E+00
.0272	.85464E-01	.58381E+00
.0311	.97637E-01	.59369E+00
.0350	.10980E+00	.60348E+00
.0389	.12194E+00	.61318E+00
.0428	.13406E+00	.62279E+00
.0467	.14616E+00	.63231E+00
.0506	.15825E+00	.64173E+00
.0545	.17030E+00	.65106E+00
.0584	.18234E+00	.66029E+00
.0623	.19434E+00	.66942E+00
.0661	.20632E+00	.67845E+00
.0700	.21826E+00	.68738E+00
.0739	.23018E+00	.69621E+00
.0778	.24205E+00	.70493E+00
.0817	.25390E+00	.71354E+00
.0856	.26570E+00	.72206E+00
.0895	.27746E+00	.73046E+00

**Tablo2: Devamı**

$\chi$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.0934	.28919E+00	.73875E+00
.0973	.30087E+00	.74693E+00
.1012	.31250E+00	.75501E+00
.1051	.32409E+00	.76296E+00
.1089	.33563E+00	.77081E+00
.1128	.34712E+00	.77854E+00
.1167	.35856E+00	.78615E+00
.1206	.36994E+00	.79365E+00
.1245	.38127E+00	.80102E+00
.1284	.39254E+00	.80828E+00
.1323	.40376E+00	.81542E+00
.1362	.41491E+00	.82243E+00
.1401	.42600E+00	.82932E+00
.1440	.43703E+00	.83609E+00
.1479	.44799E+00	.84273E+00
.1518	.45888E+00	.84925E+00
.1556	.46971E+00	.85564E+00
.1595	.48047E+00	.86190E+00
.1634	.49115E+00	.86804E+00
.1673	.50176E+00	.87404E+00
.1712	.51230E+00	.87991E+00

**Tablo2: Devamı**

$\chi$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.1751	.52276E+00	.12224E-01
.1790	.53314E+00	.24445E-01
.1829	.54344E+00	.36663E-01
.1868	.55366E+00	.48876E-01
.1907	.56380E+00	.61081E-01
.1946	.57385E+00	.73277E-01
.1984	.58382E+00	.85462E-01
.2023	.59370E+00	.97635E-01
.2062	.60350E+00	.10979E+00
.2101	.61320E+00	.12193E+00
.2140	.62281E+00	.13406E+00
.2179	.63232E+00	.14616E+00
.2218	.64175E+00	.15824E+00
.2257	.65107E+00	.17030E+00
.2296	.66030E+00	.18233E+00
.2335	.66943E+00	.19434E+00
.2374	.67846E+00	.20631E+00
.2412	.68739E+00	.21826E+00
.2451	.69622E+00	.23017E+00
.2490	.70494E+00	.24205E+00
.2529	.71356E+00	.25389E+00
.2568	.72207E+00	.26569E+00

**Tablo2: Devamı**

$\chi$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.2607	.73047E+00	.27746E+00
.2646	.73877E+00	.28918E+00
.2685	.74695E+00	.30086E+00
.2724	.75502E+00	.31250E+00
.2763	.76298E+00	.32408E+00
.2802	.77082E+00	.33562E+00
.2840	.77855E+00	.34711E+00
.2879	.78617E+00	.35855E+00
.2918	.79366E+00	.36993E+00
.2957	.80104E+00	.38126E+00
.2996	.80830E+00	.39253E+00
.3035	.81543E+00	.40375E+00
.3074	.82245E+00	.41490E+00
.3113	.82934E+00	.42599E+00
.3152	.83611E+00	.43702E+00
.3191	.84275E+00	.44798E+00
.3230	.84927E+00	.45888E+00
.3268	.85566E+00	.46970E+00
.3307	.86192E+00	.48046E+00
.3346	.86806E+00	.49114E+00
.3385	.87406E+00	.50175E+00
.3424	.87993E+00	.51229E+00

**Tablo2: Devamı**

$\chi$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.3463	.88567E+00	.88566E+00
.3502	.89128E+00	.89127E+00
.3541	.89676E+00	.89674E+00
.3580	.90210E+00	.90208E+00
.3619	.90731E+00	.90729E+00
.3658	.91238E+00	.91236E+00
.3696	.91732E+00	.91730E+00
.3735	.92212E+00	.92210E+00
.3774	.92678E+00	.92676E+00
.3813	.93130E+00	.93128E+00
.3852	.93568E+00	.93566E+00
.3891	.93992E+00	.93990E+00
.3930	.94403E+00	.94401E+00
.3969	.94799E+00	.94797E+00
.4008	.95181E+00	.95179E+00
.4047	.95549E+00	.95547E+00
.4086	.95902E+00	.95900E+00
.4125	.96241E+00	.96239E+00
.4163	.96566E+00	.96564E+00
.4202	.96877E+00	.96874E+00
.4241	.97172E+00	.97170E+00
.4280	.97454E+00	.97452E+00

**Tablo2: Devamı**

$\chi$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.4319	.97721E+00	.97719E+00
.4358	.97973E+00	.97971E+00
.4397	.98210E+00	.98208E+00
.4436	.98433E+00	.98431E+00
.4475	.98641E+00	.98639E+00
.4514	.98835E+00	.98833E+00
.4553	.99014E+00	.99011E+00
.4591	.99177E+00	.99175E+00
.4630	.99326E+00	.99324E+00
.4669	.99461E+00	.99459E+00
.4708	.99580E+00	.99578E+00
.4747	.99684E+00	.99682E+00
.4786	.99774E+00	.99772E+00
.4825	.99849E+00	.99847E+00
.4864	.99908E+00	.99906E+00
.4903	.99953E+00	.99951E+00
.4942	.99983E+00	.99981E+00
.4981	.99998E+00	.99996E+00
.5019	.99998E+00	.99996E+00
.5058	.99983E+00	.99981E+00
.5097	.99953E+00	.99951E+00
.5136	.99908E+00	.99906E+00

**Tablo2: Devamı**

$\chi$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.5175	.99849E+00	.99847E+00
.5214	.99774E+00	.99772E+00
.5253	.99684E+00	.99682E+00
.5292	.99580E+00	.99578E+00
.5331	.99461E+00	.99459E+00
.5370	.99326E+00	.99324E+00
.5409	.99177E+00	.99175E+00
.5447	.99014E+00	.99011E+00
.5486	.98835E+00	.98833E+00
.5525	.98641E+00	.98639E+00
.5564	.98433E+00	.98431E+00
.5603	.98210E+00	.98208E+00
.5642	.97973E+00	.97971E+00
.5681	.97721E+00	.97719E+00
.5720	.97454E+00	.97452E+00
.5759	.97172E+00	.97170E+00
.5798	.96877E+00	.96874E+00
.5837	.96566E+00	.96564E+00
.5875	.96241E+00	.96239E+00
.5914	.95902E+00	.95900E+00
.5953	.95549E+00	.95547E+00

**Tablo2: Devamı**

$x$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.5992	.95181E+00	.95179E+00
.6031	.94799E+00	.94797E+00
.6070	.94403E+00	.94401E+00
.6109	.93992E+00	.93990E+00
.6148	.93568E+00	.93566E+00
.6187	.93130E+00	.93128E+00
.6226	.92678E+00	.92676E+00
.6265	.92212E+00	.92210E+00
.6304	.91732E+00	.91730E+00
.6342	.91238E+00	.91236E+00
.6381	.90731E+00	.90729E+00
.6420	.90210E+00	.90208E+00
.6459	.89676E+00	.89674E+00
.6498	.89128E+00	.89127E+00
.6537	.88567E+00	.88566E+00
.6576	.87993E+00	.87991E+00
.6615	.87406E+00	.87404E+00
.6654	.86806E+00	.86804E+00
.6693	.86192E+00	.86190E+00
.6732	.85566E+00	.85564E+00
.6770	.84927E+00	.84925E+00
.6809	.84275E+00	.84273E+00
.6848	.83611E+00	.83609E+00

**Tablo2: Devamı**

$\chi$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.6887	.82934E+00	.82932E+00
.6926	.82245E+00	.82243E+00
.6965	.81543E+00	.81542E+00
.7004	.80830E+00	.80828E+00
.7043	.80104E+00	.80102E+00
.7082	.79366E+00	.79365E+00
.7121	.78617E+00	.78615E+00
.7160	.77855E+00	.77854E+00
.7198	.77082E+00	.77081E+00
.7237	.76298E+00	.76296E+00
.7276	.75502E+00	.75501E+00
.7315	.74695E+00	.74693E+00
.7354	.73877E+00	.73875E+00
.7393	.73047E+00	.73046E+00
.7432	.72207E+00	.72206E+00
.7471	.71356E+00	.71354E+00
.7510	.70494E+00	.70493E+00
.7549	.69622E+00	.69621E+00
.7588	.68739E+00	.68738E+00
.7626	.67846E+00	.67845E+00
.7665	.66943E+00	.66942E+00
.7704	.66030E+00	.66029E+00

**Tablo2: Devamı**

$x$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.7743	.65107E+00	.65106E+00
.7782	.64175E+00	.64173E+00
.7821	.63232E+00	.63231E+00
.7860	.62281E+00	.62279E+00
.7899	.61320E+00	.61318E+00
.7938	.60350E+00	.60348E+00
.7977	.59370E+00	.59369E+00
.8016	.58382E+00	.58381E+00
.8054	.57385E+00	.57384E+00
.8093	.56380E+00	.56379E+00
.8132	.55366E+00	.55365E+00
.8171	.54344E+00	.54343E+00
.8210	.53314E+00	.53313E+00
.8249	.52276E+00	.52275E+00
.8288	.51230E+00	.51229E+00
.8327	.50176E+00	.50175E+00
.8366	.49115E+00	.49114E+00
.8405	.48047E+00	.48046E+00
.8444	.46971E+00	.46970E+00
.8482	.45888E+00	.45888E+00
.8521	.44799E+00	.44798E+00
.8560	.43703E+00	.43702E+00

**Tablo2: Devamı**

$x$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.8599	.42600E+00	.42599E+00
.8638	.41491E+00	.41490E+00
.8677	.40376E+00	.40375E+00
.8716	.39254E+00	.39253E+00
.8755	.38127E+00	.38126E+00
.8794	.36994E+00	.36993E+00
.8833	.35856E+00	.35855E+00
.8872	.34712E+00	.34711E+00
.8911	.33563E+00	.33562E+00
.8949	.32409E+00	.32408E+00
.8988	.31250E+00	.31250E+00
.9027	.30087E+00	.30086E+00
.9066	.28919E+00	.28918E+00
.9105	.27746E+00	.27746E+00
.9144	.26570E+00	.26569E+00
.9183	.25390E+00	.25389E+00
.9222	.24205E+00	.24205E+00
.9261	.23018E+00	.23017E+00

**Tablo2: Devamı**

$x$	Dalgacık - multigrid	Tam çözüm
.9300	.21826E+00	.21826E+00
.9339	.20632E+00	.20631E+00
.9377	.19434E+00	.19434E+00
.9416	.18234E+00	.18233E+00
.9455	.17030E+00	.17030E+00
.9494	.15825E+00	.15824E+00
.9533	.14616E+00	.14616E+00
.9572	.13406E+00	.13406E+00
.9611	.12194E+00	.12193E+00
.9650	.10980E+00	.10979E+00
.9689	.97637E-01	.97635E-01
.9728	.85464E-01	.85462E-01
.9767	.73279E-01	.73277E-01
.9805	.61082E-01	.61081E-01
.9844	.48877E-01	.48876E-01
.9883	.36664E-01	.36663E-01
.9922	.24446E-01	.24445E-01
.9961	.12224E-01	.12224E-01

## 6. SONUÇ

Dalgacık dönüşümünün ön koşul olarak oynadığı rol bir  $A$  matrisi üzerine ardışık olarak uygulanan ayrık dalgacık dönüşümü ile örneklendirilir. Dalgacık fikrini multigrid ile birleştirmenin birçok avantajı vardır. Birincisi, ayrıklaştırılan denklemler, dalgacık bazında ele alındığında, örnekte olduğu gibi koşul sayısının düşürülmesi nedeniyle düşük bir koşul sayısına sahip olurlar. İkincisi, dönüşüm matrislerinin seyrekliği ve dalgacıkların doğal ölçekleme ve çoklu çözünürlük analizi özellikleri multigrid şeması gibi iteratif çözümleri hızlandırır. Bilgisayar çözümlerinde ise daha az işlem ve daha az saklama kapasitesi ile hızlı ve yakınsak çözümler elde etmeye olanak tanır. Dalgacıkların mertebeleri artırılarak daha kısa sürede tam çözüme yakın sonuçlar elde edilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

**Bogges, A. and Narcowich, F.J.**, 2001, A First Course in Wavelets with Fourier Analysis, Prentice Hall, 260p.

**Bujurke, N.M. and Kudenatti, R.B., Salimath, C.S. and Kudenatti, R.B.**, 2007, A fast wavelet-multigrid method to solve elliptic partial differential equations, Applied Mathematics and Computation, 185:667-680.

**Debnath, L.**, 2002, Wavelet Transforms and Their Applications, Birkhäuser, Boston, 555p.

**McCormick, S.F.**, 1982, An algebraic interpretation of multigrid methods, SIAM Journal of Numerical Analysis, 19 (3):548-560.

**Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T.**, 1992, Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, USA, 965p.

**Trotenberg, U., Oosterlee, C.W. and Schüller, A.**, 2001, Multigrid, Academic Press, England, 613p.

**Wesseling, P.**, 1992, An Introduction to Multigrid Methods, John Wiley & Sons, England, 275p.

## **ÖZGEÇMİŞ**

Türkiye Cumhuriyeti vatandaşı olan Şerife GÜL 1983 yılında İzmir’ de doğdu. İlkokulu, Konak Cemil Midilli İlkokulunda okudu. Orta öğretimini Konak Ali Erentürk Ortaokulu’ nda, Lise eğitimini Konak İnönü Lisesi’ nde tamamlayarak 2000 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’ nü kazandı. 2005 yılında Uygulamalı Matematik Ağırlıklı Matematik’ den “iyi” dereceyle mezun olarak aynı yıl Uygulamalı Matematik anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Şuan özel bir eğitim kurumunda öğretmenlik yapmakta ve eğitim hayatına devam etmektedir.