

YENİ BİR NEWTONYEN OLMAYAN AKIŞKAN MODELİNİN
BORU İÇERİSİNDEKİ AKIŞININ İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine CERYAN

DANIŞMAN

Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

Haziran 2010

AFYONKARAHİSAR KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YENİ BİR NEWTONYEN OLMAYAN AKIŞKAN MODELİNİN BORU
İÇERİSİNDEKİ AKIŞININ İNCELENMESİ

Emine CERYAN

DANIŞMAN
Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

Haziran 2010

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY danışmanlığında, **Emine CERYAN** tarafından hazırlanan “**Yeni Bir Newtonyen Olmayan Akışkan Modelinin Boru İçerisindeki Akışının İncelenmesi**”

başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 25/06/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Eğitimi Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY	
Üye	Doç. Dr. Yılmaz İÇAĞA	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Abdurrahman KARABULUT	

Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1 Akışkanlar Mekaniği Nedir	5
2.2 Akışkanların Fiziksel Özellikleri	5
2.2.1 Özgül Ağırlık	6
2.2.2 Yoğunluk	6
2.2.2 Basınç	7
2.2.4 Viskozite	7
2.3 Non-Newtonyen Akışkan Modelleri	10
2.3.1 Newtonyen Akışkanlar	10
2.3.2 Non-Newtonyen Akışkanlar	13
2.3.2.1 Zamana Bağlı Non-Newtonyen Akışkanlar	14
2.3.2.2 Zamana Bağlı Olmayan Non-Newtonyen Akışkanlar	14
3. MATERYAL VE METOT	16
3.1 Silindirik Koordinatlarda Genelleştirilmiş Üçüncü Derece Akışkanlara Ait Momentum ve Enerji Denklemleri	16
3.2 Hız ve Sıcaklık Profilleri için Analitik Çözümlerin Bulunması	17
4. SONLU FARKLAR METODU	29
4.1 İleri Farklar ve Δ Operatörü	29
4.2 Geri Farklar ve ∇ Operatörü	30
4.3 Merkezi Farklar ve δ Operatörü	31
4.4 Momentum ve Enerji Denklemlerinin Sonlu Farklarla Tanımlanması	32

5. ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLER	36
6. SONUÇLAR	45
7. KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	48
EKLER	49
EK-1	49

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YENİ BİR NEWTONYEN OLMAYAN AKIŞKAN MODELİNİN BORU İÇERİSİNDEKİ AKIŞININ İNCELENMESİ

EMİNE CERYAN

**Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Eğitimi Anabilim Dalı**

Danışman: Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

Bu çalışmada, non-Newtonyen bir akışkan modelinin boru içerisindeki akışı incelenmiştir. Silindirik koordinatlarda üçüncü derece akışkanlara ait genel hareket denklemlerinden faydalanılarak boru içerisindeki tek boyutlu akış için momentum ve enerji denklemleri elde edilmiştir. Bulunan bu denklemler için boru içerisindeki akışı ifade eden sınır şartları belirlenmiştir. Elde edilen denklemler boyutlu denklemler olmakla birlikte daha genel olabilmesi amacıyla boyutsuz hale getirilmiştir. Böylece, silindirik koordinatlarda tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklem sistemleri elde edilmiştir. Bu denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümleri için perturbasyon tekniklerinden yaya açılımı yöntemi kullanılmıştır. Çözümlerde viskozite sabit alınmıştır. Analitik çözümlerin yanı sıra nümerik çözümler de yapılmıştır. Nümerik çözümlerin elde edilmesinde sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Çözümler diferansiyel denklemi çözen bir program olan Matlab paket programı kullanılarak elde edilmiştir. Çeşitli akışkan sabitlerinin hız ve sıcaklık profili üzerindeki etkisi incelenmiştir. Analitik ve nümerik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

2010, 50 sayfa

Anahtar kelimeler: Newtonyen Olmayan Akışkanlar, Perturbasyon Tekniği, Sonlu Farklar, Boru İçerisindeki Akış.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

INVESTIGATION OF FLOW IN A PIPE FOR A NEW NON-NEWTONYEN FLUID MODEL

EMİNE CERYAN

**Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Education**

Supervisor: Assoc. Prof. Muhammet YÜRÜSOY

In this study, the flow of a kind of non-Newtonyen fluid model in a pipe is investigated. By using the general equations of motion that have gained for cylindrical coordinates, momentum and energy equations for one-dimensional flow in a pipe are determined. For the determined equations the boundary conditions explaining flow in pipe are established. Although these equations and boundary conditions are dimensional equations, size is made to be more general. Thus, ordinary differential equation systems that regard the one-dimensional flow in cylindrical coordinates are achieved. Perturbation method, a pedestrian approach, is used for the approximate solutions of these equations. In solutions, it is admitted that the viscosity is constants. As well as approximate solutions, numerical solutions are done. Finite Differentiations method is used to obtain the numerical solutions. Solutions are reached by using Matlab packet program. The effect of various fluid constants on velocity and heat profiles is investigated. Analytical and numerical solutions are compared.

2010, 50 pages

Keywords: Non-Newtonian Fluids, Perturbation Techniques, Finite Differentiations, Pipe Flow.

TEŞEKKÜR

Yapılan tez çalışması sırasında danışmanlığımı yürüten hocam Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY'a ve tüm öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini yanımda hissettiğim aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen Arş. Grv. Ali KEÇEBAŞ'a ve tüm bölüm hocalarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

EMİNE CERYAN

Afyonkarahisar, Haziran 2010

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

α	İkinci Derece Akışkan Terimi
β	Üçüncü Derece Akışkan Terimi
μ	Viskozite
ν	Kinematik Viskozite
ρ	Özgül Kütle
ε	Pertürbasyon Parametresi
Λ	Non-Newtonyen Akışkan Katsayısı
Γ	Brinkman Sayısı
Q_m	Ortalama Sıcaklık
Q_w	Levha Sıcaklığı
k	Isı İletim Katsayısı
m	Eleman Hacim Kütle
v_0	Ortalama Hızı
T	Mutlak Sıcaklık
P	Mutlak Basınç
R	Gaz Sabiti
A_1	Rivlin Ericksen Tensörü
A_2	Rivlin Ericksen Tensörü
C_1	Eksenel Yöndeki Basınç Değişimi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 2.1 İki Paralel Plaka Arasındaki Akışkanın Laminer Akış Davranışı	8
Şekil 2.2 İki Sonsuz Plaka Arasında Durgun Akışkan	10
Şekil 2.3 İki Sonsuz Plaka Arasındaki Akışkan İçin Üst Plakanın Hareket Ettiği Durum	11
Şekil 2.4 Newtonyen Akışkanda Düşük Ve Yüksek Viskozite Değerleri İçin Kayma Gerilmesi Hız Gradyanı Grafiği	12
Şekil 2.5 Newton ve non-Newtonyen Akışkanlar için Kayma Gerilmesinin Deformasyon Hızıyla Değişimi	15
Şekil 3.1 Boru İçindeki Akışın Şematik Gösterimi	18
Şekil 5.1 Çeşitli Λ değerleri için hız profilleri ($m=0.2, \Gamma=1, C=-1$)	36
Şekil 5.2 Çeşitli Λ değerleri için sıcaklık profilleri ($m=0.2, \Gamma=1, C=-1$)	37
Şekil 5.3 Çeşitli pozitif m değerleri için hız profilleri ($\Lambda=0.01, \Gamma=1, C=-1$)	38
Şekil 5.4 Çeşitli pozitif m değerleri için sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01, \Gamma=1, C=-1$)	38
Şekil 5.5 Çeşitli negatif m değerleri için hız profilleri ($\Lambda=0.01, \Gamma=1, C=-1$)	39
Şekil 5.6 Çeşitli negatif m değerleri için sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01, \Gamma=1, C=-1$)	40
Şekil 5.7 Çeşitli C değerleri için hız profilleri ($\Lambda=0.01, \Gamma=81, m=0.2$)	41
Şekil 5.8 Çeşitli C değerleri için sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01, \Gamma=81, m=0.2$)	41
Şekil 5.9 Çeşitli Γ değerleri için sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01, C=-1, m=0.2$)	42
Şekil 5.10 Analitik ve nümerik hız profilleri ($\Lambda=0.01, C=-1, m=0.2, \Gamma=1$)	43
Şekil 5.11 Analitik ve nümerik sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01, C=-1, m=0.2, \Gamma=1$)	43

1. GİRİŞ

Akışkanlar mekaniği, nano ölçekli sistemlerden devasa yapılara kadar yaşamın her alanında uygulama alanı bulmuş ve temelleri iyi oturmuş bir konudur. Bu yönüyle mühendislik bölümlerinin çoğunda vazgeçilmez konulardan birisi olmuştur. Akışkanlar mekaniği, elektrik süpürGESinden süpersonik uçaklar kadar günlük hayatta ve gelişmiş mühendislik sistemlerinin tasarımında yaygın olarak kullanılmaktadır. En başta akışkanlar mekaniği insan vücudunda hayati bir rol oynar. Kalp, sürekli olarak atardamarlar ve toplardamarlar ile insan vücudunun her yerine kan pompalar ve akciğerler hava akış yönünün sürekli değiştiği organlardır. Bütün yapay kalpler, solunum cihazları ve diyaliz sistemleri akışkanlar dinamiği kullanılarak tasarlanmaktadır. Sıradan bir ev akışkanlar mekaniğinin uygulamaları ile doludur. Bir evin ve bütün şehrin temiz su, doğal gaz ve atık su tesisatları akışkanlar mekaniği prensiplerine göre tasarlanmaktadır. Buzdolabında soğutkan akışkanın; içerisine aktığı borular, basınçlandırıldığı kompresör, ısıyı çektiği ve attığı ısı değiştiriciler de akışkanlar mekaniği kullanılarak yapılmaktadır. Akışkanlar mekaniğinin sayısız uygulaması otomobillerde de görülmektedir. Yakıtı depodan silindirlere kadar ulaştıran tüm parçalar, yakıt boruları, yakıt pompası, karbüratörler, silindirlere yakıt ve havanın karışması, yanmış gazların egzoz boruları ile atılması akışkanlar mekaniği yardımıyla incelenmektedir. Akışkanlar mekaniği, ısıtma ve klima sistemlerinin hidrolik frenlerin, otomatik vitesin, yağlama sisteminin ve hatta lastiklerin tasarımında da kullanılmaktadır. Daha genel bir değerlendirme ile akışkanlar mekaniği; uçakların, gemilerin, denizaltılarının, biyomedikal cihazların yanı sıra, elektronik elemanların soğutulması, su, ham petrol ve doğalgazın taşınması gibi uygulamaların tasarım ve incelenmesinde önemli bir yere sahiptir.

Yakın tarihe kadar akışkanlar mekaniği bilimi hidrolik adı altında ele alınmaktaydı. Hidroliğin genel olarak su ile ilgilenmesi, içerdiği akışkan sorunlarının sınırlı kalması ve matematiksel anlamda yetersiz kalması akışkanlar mekaniği konusundaki çalışmaları arttırmıştır. Bilhassa, sınır tabakası teorisinin geliştirilmesi ile beraber Navier-Stokes denklemlerinin basit bir forma indirgenmesi ve çözüme ulaşılması imkânına ulaşılmıştır. Özellikle düşük moleküler ağırlığa sahip akışkanların mekanik davranışları

Navier-Stokes yaklaşımıyla doğru olarak belirlenmektedir. Hareketleri Navier-Stokes teorisi ile ifade edilebilen ve düşük moleküler ağırlığa sahip olan akışkanlar Newtonyen akışkanlar olarak adlandırılmaktadır. Aldığımız nefes, hava, su, süt ve benzin Newtonyen akışkanlara örnek verilebilir. Non-Newtonyen akışkanlar ise yüksek moleküler ağırlığa sahip akışkanlardır. İnce çamurumsu karışımlar, bal, hamur, mayonez, boya, asfalt ve tutkal non-Newtonyen akışkanlardan bazılarıdır. Non-Newtonyen akışkanların Newtonyen akışkanlardan temel farkı, kayma gerilmesi ile şekil değiştirme hızı yani hızın konuma bağlı olarak değişimi arasında doğrusal olmayan (non lineer) bir ilişki olmasıdır. Başka bir deyişle Newtonyen akışkanlarda viskozite olarak adlandırılan kayma gerilmesi ile hız gradyanı arasındaki orantı katsayısı sabitken non-Newtonyen akışkanlarda değişkendir.

Tabiatta bulunan akışkanların büyük bir kısmı non-Newtonyen akışkan modeline uymaktadır. Bazı non-Newtonyen akışkanlar, bir tür hafıza özelliği taşır ve bunlarda kayma gerilmesi sadece yerel şekil değiştirme hızına değil ayrıca gerilmenin önceki değişimlerine de bağlı olarak değişmektedir. Uygulanan gerilme kaldırıldığında baştaki asıl şekline dönen akışkana viskoelastik denilmektedir. Bazı non-Newtonyen akışkanlar, şekil değiştirme hızları arttıkça daha az viskoz duruma geldiklerinden incelen akışkanlar veya sanki plastik akışkanlar olarak adlandırılmaktadır. Boya buna en iyi örnektir. Boya, kabından dökülürken veya bir fırçaya alınırken gerilme küçük olduğundan oldukça viskozdur. Bununla birlikte boyayı duvara sürdüğümüzde, fırça ile duvar arasındaki ince boya tabakası yüksek kayma gerilmesine maruz kalır ve daha az viskoz hale gelir. Bazı akışkanları harekete geçirebilmek için akma gerilmesi denilen sonlu bir gerilmenin uygulanmasına ihtiyaç vardır. Bu tür akışkanlar Bingham plastik akışkanları olarak bilinmektedir. Cilt kremi ve diş macunu Bingham akışkana örnek verilebilir. Eğer diş macunu tüpünün ağzını aşağı doğru tutarsanız yerçekiminden dolayı bir gerilme bulunmasına rağmen macun akmaz. Bununla birlikte eğer tüpü sıkarsanız, macun oldukça viskoz bir akışkan gibi akmaya başlar.

Çok çeşitli alanlardan verilen bu örnekler non-Newtonyen akışkanların kullanım alanlarının genişliliği ve çeşitliliğini göstermektedir. Özellikle son yıllarda non-Newtonyen akışkanlar üzerindeki çalışmalar gelişme göstermiştir. Non-Newtonyen akışkanlara ve boru içerisindeki akışa ait yapılan çalışmalar şu şekildedir:

Malin (1997), power-law akışkanlarda pürüzsüz boru içindeki türbülanslı akışı sayısal olarak incelemiş ve deneysel sonuçlarla karşılaştırmıştır. Wang et al.(1997), iç içe geçmiş iki boru arasındaki power law akışkanın kararsız Couette akışını analiz etmişlerdir. Burada içteki borunun hareketi söz konusudur. Power law akışkana ait hareket denklemi analitik olarak çözülmüştür. Gupta (2001), power law modelindeki non-Newtonyen akışkanın laminar akış için yaklaşık bir çözümünü dairesel boru ve düz kanal için ortaya koymuştur. Yürüsoy ve Pakdemirli (1999), kaymalı yatakların yağlanması üçüncü dereceden non-Newtonyen akış modelini kullanmışlardır. Bu çalışmada; üçüncü derece akışkan etkilerinin viskoz etkilerden daha küçük olduğu kabul edilmiştir. Massoudi ve Christie (1995), boru içerisindeki üçüncü derece akışkanlar için hareket ve enerji denklemlerinin çözümlerini nümerik olarak yapmışlardır. Bu çalışmada da yine akışkanın viskozitesinin sıcaklığa göre değiştiği göz önüne alınmıştır. Yürüsoy ve Pakdemirli (2002), borularda üçüncü derece akışkan akışını yeniden incelemişlerdir. Massoudi ve Christie (1995)'nin çalışmasından farklı olarak perturbasyon yöntemini kullanarak diferansiyel denklem sistemi için analitik çözümler bulmuşlardır.

Bu tez çalışmasında genelleştirilmiş bir üçüncü derece non-Newtonyen akışkan modeline ait boru içerisindeki akışı incelenmiştir. Silindirik koordinatlarda genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemleri elde edilmiştir. Denklemlerin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılmıştır. Boru içerisindeki akışı ifade eden sınır şartları belirlenmiştir. Elde edilen momentum ve enerji denklemleri ile sınır şartları boyutlu parametrelerden oluşmaktadır. Çözümlerin daha genel olabilmesi için denklemler boyutsuzlaştırılmıştır. Böylece, silindirik koordinatlar için tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklem sistemleri elde edilmiştir. Bu denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümleri yapılmıştır. Denklemlerin analitik çözümü için bir perturbasyon metodu olan yaya açılımı kullanılmıştır. Yaya açılımı

yapılarak hız ve sıcaklık profillerine ait denklemler, Newtonyen ve non-Newtonyen kısımlara ayrılmıştır. Öncelikle Newtonyen kısmın, daha sonra da non-Newtonyen kısmın çözümleri yapılmıştır. Çözümlerde viskozite değeri sabit alınmıştır. Bu açılım sayesinde hız ve sıcaklık profillerinin yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Tez çalışmasında analitik çözümlerin yanı sıra nümerik çözümler de yapılmıştır. Nümerik çözümlerin elde edilmesinde sonlu farklar metodu kullanılmıştır. En iyi yaklaşımı veren merkezi fark yaklaşımı kullanılmıştır. Nümerik çözümler 100 düğüm noktası için yapılmıştır. Yüz düğüm noktası için elde edilen denklemler özel bir sonlu farklar programı kullanılarak çözülmüştür. Daha sonra elde edilen analitik çözümler çeşitli akışkan sabitleri için çizdirilmiştir. Bu fiziksel parametrelerin hız ve sıcaklık profilleri üzerindeki etkileri açıkça ortaya konmuştur. Ayrıca, bu tez kapsamında analitik ve nümerik çözümlerin karşılaştırılması da yapılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Akışkanlar Mekaniği Nedir

Maddelerin temel olarak üç fiziksel hali vardır. Bunlar katı, sıvı ve gaz halleridir. Sıvı ve gaz halindeki madde akışkan olarak nitelendirilir. Mekanik, kuvvet ve hareket bilimidir. Akışkanlar mekaniği de akışkanların hareketini ve etki eden kuvvetleri inceleyen bilim dalıdır. Zorlama etkisi altında maddesel ortamlarda gerilmeler meydana gelebilir. Gerilme, zorlamaya karşı direnmeyi sembolize eden bir büyüklüktür. Bunlar genellikle Normal (çekme veya basma) gerilme ve Teğetsel (kayma) gerilmelerdir. Bu gerilme değerleri katı cisimlerde çok yüksek değerlere çıkabildiği halde akışkan maddelerde, basma gerilmesi hariç, çok küçüktür. Katı, uygulanan kayma gerilmesine bir miktar şekil değiştirerek direnebilir. Aksine sıvı, kayma gerilmesi ne kadar küçük olursa olsun sürekli olarak şekil değiştirir. Sıvılar ve gazlar gerilmeye karşı farklı davranış göstermektedirler. Sıvılar normal doğrultudaki gerilmelere (basınç) karşı bir katı gibi direnç gösterirken, gazlar normal doğrultudaki gerilmelere de karşı koyamazlar. Bundan dolayı sıvıları ve gazları birbirinden ayıran en önemli özellik, sıkıştırılabilirlik özelliğidir. Teorik olarak sıvılar sıkıştırılamayan akışkanlar olarak kabul edilir. Gazlar ise çok kolay sıkıştırılabilirlik genişleyebilirler (Yılmaz S., 2008).

2.2 Akışkanların Fiziksel Özellikleri

Madde doğada genel olarak katı, sıvı ve gaz olmak üzere üç halde bulunmaktadır. Sıvı ve gaz halindeki maddeleri akışkan başlığı altında ele alınmaktadır. Akışkanların fiziksel özelliklerinin temelini moleküller arası mesafenin uzaklığı oluşturmaktadır. Bunun bir sonucu olarak, akışkanlar konulduğu kabın şeklini almaktadırlar. Akışkanlarla ilgili bu tanı, yerçekiminin etkisi sonucu meydana gelmektedir. Yerçekiminin etkisinin olmadığı bir ortamda örneğin uzayda incelenilecek olursa, konulduğu kabın şeklini alma durumunun sıvı akışkanlar için geçerli olmadığı görülmektedir. Bu sebepten, akışkanlarla ilgili bazı genel özelliklerin incelenmesi yarar sağlayacaktır (Cengel Y. A., Cimbala J.M. 2008).

2.2.1 Özgöl Ağırlık

Bir akışkanın özgöl ağırlığı, birim hacmini ağırlığıdır.

$$\gamma = \frac{\Delta W}{\Delta V}$$

Burada ΔW ; ΔV elemanter hacmin ağırlığıdır.

$$\Delta W = \Delta mg$$

$$\gamma = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\Delta mg}{\Delta V} = \rho g$$

Veya

$$\gamma = \rho g \text{ 'dir}$$

2.2.2 Yoğunluk

Yoğunluk, birim hacimdeki kütle miktarıdır.

$$\rho = \frac{m}{v} (kg / m^3) \quad \text{şeklinde ifade edilmektedir.}$$

Burada, m; cismin kütlesi, v; cismin hacmi olarak verilmektedir. Özellik tabloları, özellikler hakkında çok doğru ve hassas bilgiler sağlamaktadır, ancak bazen özellikler arasında yeterince genel ve doğru sonuç veren basit bağıntılara gereksinim duyulmaktadır. Bir maddenin basıncı, sıcaklığı ve hacmi arasındaki bağıntıya hal denklemi denilmektedir. Gaz fazındaki maddeler için en basit ve iyi bilinen hal denklemi ideal gaz denklemi olup;

$P \cdot v = R \cdot T$ veya $P = \rho \cdot R \cdot T$ şeklinde ifade edilmektedir.

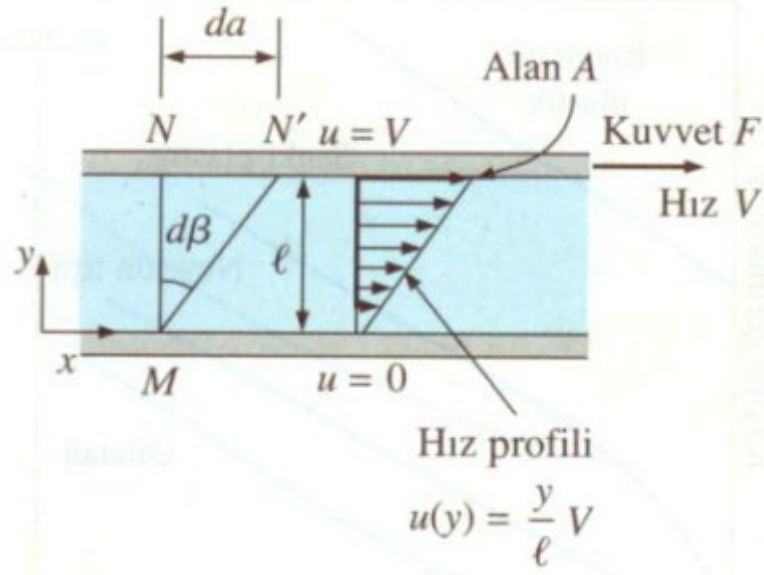
Burada P mutlak basıncı, v özgül hacmi, T mutlak sıcaklığı, ρ yoğunluğu ve R gaz sabitini belirtmektedir. Gazlar içinde bulundukları kabın şeklini ve hacmini almaktadırlar, yani kabı daima doldurmaktadırlar. Gaz molekülleri bir kap içerisinde çok sıkıştırıldığı durumlar haricinde, moleküllerin toplam hacmi gazın hacmi yanında yok sayılabilir ve aralarındaki çekim dikkate alınmayabilir. Böyle bir gaza ideal gaz denilmektedir. Bir maddenin yoğunluğu, genel anlamda sıcaklık ve basınca bağlı olarak değişmektedir. Genellikle sıvıların yoğunluğu, sıcaklıkla değişmesine karşın basınca çok az değişir, gazların yoğunluğu ise hem sıcaklık hem de basınç ile değişmektedir (Cengel Y. A., Cimbala J.M. 2008).

2.2.3 Basınç

Basınç, bir akışkan tarafından birim alana uygulanan kuvvet olarak tanımlanmaktadır. Basınç sadece sıvılar ve gazlar için kullanılan bir tanımlamadır. Basıncın katılardaki karşılığı normal gerilmedir. Verilen bir konumdaki gerçek basınca mutlak basınç denir ve mutlak vakuma (mutlak sıfır basınca) göre ölçülmektedir. Bununla birlikte basınç ölçme cihazlarının çoğu atmosferde sıfıra kalibre edilmektedir. Dolayısıyla bu cihazlar mutlak basınç ile yerel atmosferik basınç arasındaki farkı göstermektedir. Bu fark etkin basınç olarak adlandırılmaktadır (Soğukoğlu M., 1995).

2.2.4 Viskozite

Katıların kayma gerilmelerine karşı dirençlerinin büyük olmasına rağmen akışkanların gösterdiği direnç oldukça küçüktür. En küçük kayma gerilmesi etkisi altında bile akışkan sürekli olarak şekil değiştirmektedir. Doğadaki bütün akışkanlar, akışkan tabakalarının birbirleri üzerinde hareket etmelerine karşı direnç göstermektedirler. Bu direnç akışkan viskozitesi olarak adlandırılmaktadır. Viskozite, komşu tabakaların birbirlerine göre hareketlerinde içsel direncin ölçümü olan bir akışkan özelliğidir (Cengel Y. A., Cimbala J.M. 2008).



Şekil 2.1 İki Paralel Plaka Arasındaki Akışkanın Laminer Akış Davranışı

Viskozite için bir bağıntı elde etmek üzere aralarında l kadar mesafe bulunan iki paralel plaka arasındaki akışkan tabakasını dikkate alalım (Şekil 2.1). Alttaki plaka sabit tutulurken üstteki plakaya paralel sabit bir F kuvveti kuvvetinin uygulandığını düşünelim. Uygulanan bu kuvvetin etkisiyle üstteki plakanın sabit bir V hızıyla hareket ettiği gözlenir. Üstteki plakayla temas eden akışkan plaka yüzeyine yapışır ve onunla aynı hızda hareket eder. Bu durumda akışkan tabakasına etki eden kayma gerilmesi;

$$\tau = \frac{F}{A} \quad \text{ifadesiyle verilir.}$$

Burada A , plaka ve akışkan arasındaki temas alanıdır. Alttaki plaka ile temas halindeki akışkanın ise bu plakanın sıfır olan hızına sahip olduğu kabul edilir. İki plaka arasındaki akışkan hızı 0 'dan V ' ye doğrusal olarak değişir ve böylece hız profili ve hız gradyeni;

$$u(y) = \frac{y}{l} \cdot V \quad \text{ve} \quad \frac{du}{dy} = \frac{V}{l} \quad \text{olarak yazılır.}$$

Burada y alt plakadan olan düşey mesafedir. Diferansiyel bir dt zaman aralığında, akışkan parçacıklarının kenarları bir MN çizgisi boyunca diferansiyel bir $d\beta$ açısı kadar döner ve bu esnada üstteki plaka diferansiyel $da = V \cdot dt$ mesafesini alır. Bunun sonucunda ortaya çıkan açısal yer değiştirme veya deformasyon;

$$d\beta \approx \tan \beta = \frac{da}{l} = \frac{V \cdot dt}{l} = \frac{du}{dy} \cdot dt \quad \text{olarak ifade edilebilir.}$$

Tekrar düzenlemeyle kayma gerilmesinin etkisi altındaki deformasyon hızı;

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{du}{dy} \quad \text{halini alır.}$$

Buna göre bir akışkan elemanının deformasyon hızı, du/dy hız gradyenine eşittir. Ayrıca çoğu akışkan için deformasyon hızının doğrudan kayma gerilmesi ile orantılı olduğu sonucuna varılmaktadır:

$$\tau \approx \frac{d\beta}{dt} \quad \text{veya} \quad \tau \propto \frac{du}{dy}$$

Deformasyon hızının kayma gerilmesiyle orantılı olduğu akışkanlara Newton tipi akışkanlar denilmektedir. Bir boyutlu Newton tipi kayma akışında kayma gerilmesi;

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} \quad \text{ifade edilebilir.}$$

Buradaki orantı sabiti μ , akışkanın viskozite katsayısı veya dinamik viskozite olarak adlandırılmaktadır. Akışkanlar mekaniğinde dinamik viskozitenin yoğunluğa oranıyla sıkça karşılaşılmaktadır. Bu orana kinematik viskozite denilmektedir ve

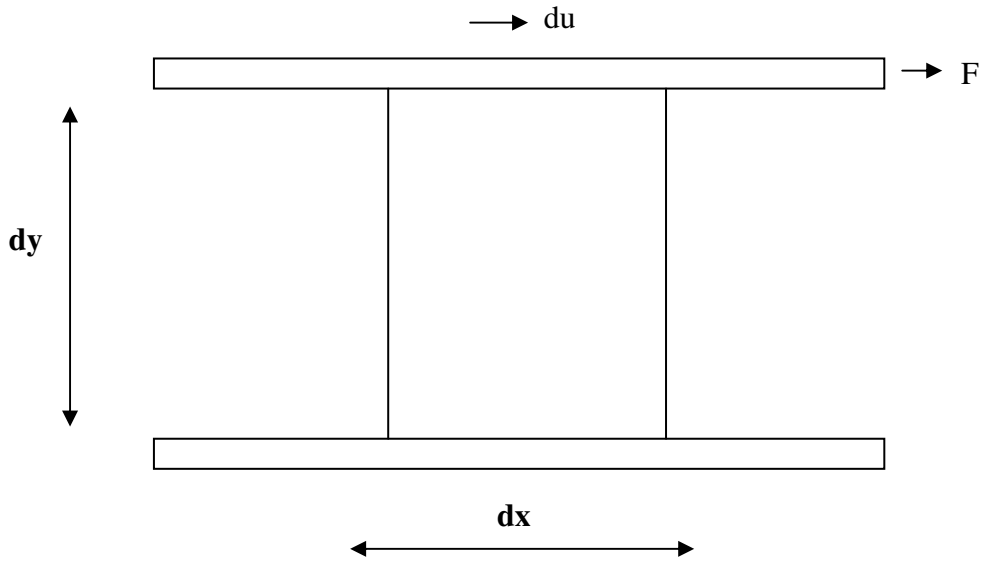
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{olarak ifade edilmektedir.}$$

2.3 NON-NEWTONYEN AKIŞKAN MODELLERİ

Bu bölümde Newtonyen ve Non-Newtonyen akışkan tanımlamaları yapılacak ve aynı zamanda Non-Newtonyen akışkanlar daha ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

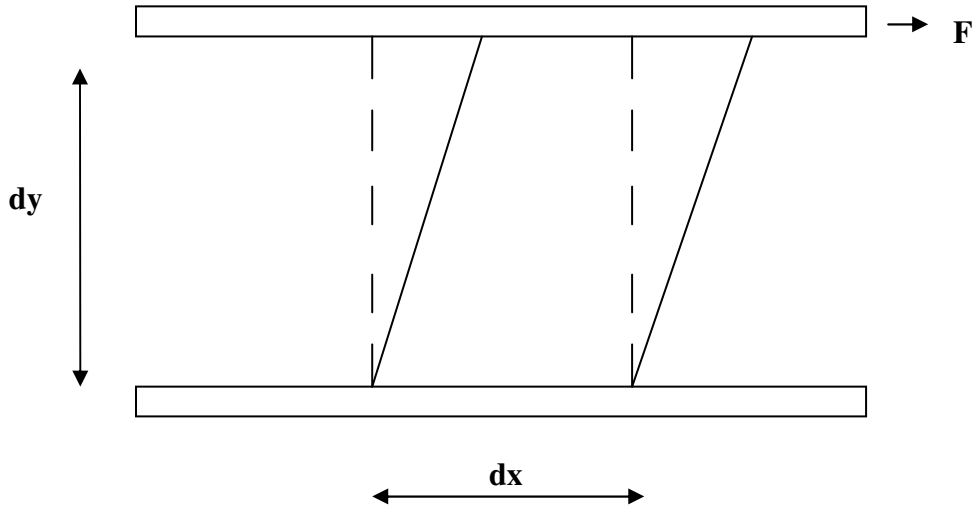
2.3.1 Newtonyen Akışkan Modeli

Aralarında dy kadar mesafe bulunan sonsuz iki plaka arasında Şekil 3.1'deki gibi x eksenini boyunca dx kadar mesafeye yayılmış akışkan bulunsun.



Şekil 2.2 İki Sonsuz Plaka Arasında Durgun Akışkan

Üst plaka bir F kuvveti yardımı ile du hızıyla hareket ettirilsin ve dx kadar yer değiştirsin. Bu durum Şekil 2.2'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3 İki Sonsuz Plaka Arasındaki Akışkan için Üst Plakanın Hareket Ettiği Durum

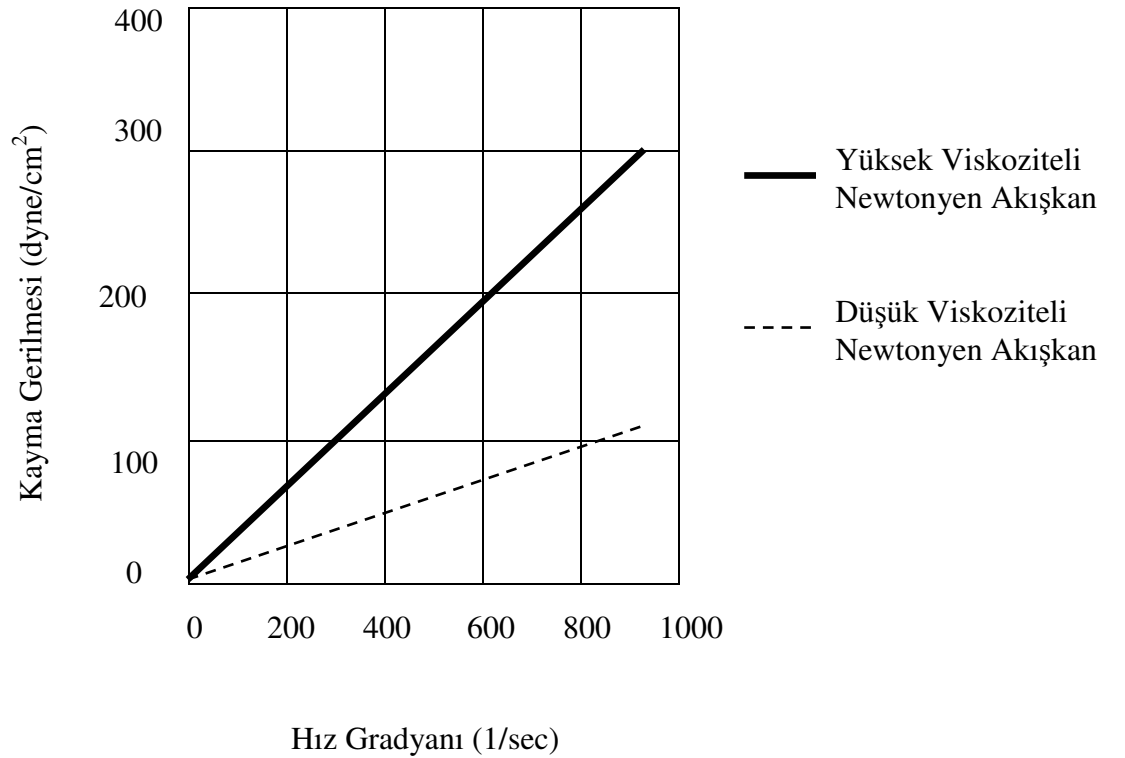
Bu durumda deformasyon oranı du / dy olarak ifade edilir. Kayma gerilmesi ise;

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır. Buradaki μ terimi akışkanın viskozitesi olarak adlandırılır.

Sürekli ortamların mekaniği incelenirken uygulanan kuvvetlere göre şekil değişimini ölçen bazı katsayılar tanımlanmıştır. Katı sürekli ortamlar için elastisite modülü, poisson oranı ve kayma modülü gibi katsayılar (oranlar) vardır. Bir sürekli ortam olarak akışkan için de hacim modülü ve viskozite katsayısı gibi iki katsayı tanımlanmıştır. Bunlar akışkana bir kuvvet uygulandığında yapacağı davranışı öngörmemizi sağlarlar. Denklem 2.1’de bulduğumuz viskozitenin böyle bir önemi vardır. Katılar için, akışkandaki viskoziteye karşılık gelen kayma modülü, kayma gerilmesinin yer değiştirmeye oranı olarak tanımlanırken akışkanda viskozite, kayma gerilmesinin hız gradyenine oranı olarak tanımlanır.

Bir başka tanımla viskozite hareket halindeki akışkandaki yerel gerilmelerle şekil değiştirme hızı arasındaki ilişkiyi ortaya koyar. Newtonyen akışkanlar için verilen herhangi bir sıcaklık için viskozite sabittir. Newtonyen akışkanlarda viskozite, basınç arttıkça çok az artar, sıcaklık arttıkça –sıvılarda- azalır. Düşük ve yüksek viskozite değerleri için Newtonyen akışkanların örnek grafiği Şekil 2.4’te verilmiştir. Şekil 2.4’te Newtonyen akışkanlarda kayma gerilmesi ile hız gradyanı arasında lineer bir ilişki olduğu görülmektedir. Viskozite değerinin düşük veya yüksek olması durumunda kayma gerilmesi ile hız gradyanı arasındaki ilişki değişmemekte, doğrusal olarak kalmaktadır (Akgül M.B., 2008).



Şekil 2.4 Newtonyen Akışkanda Düşük ve Yüksek Viskozite Değerleri İçin Kayma Gerilmesi Hız Gradyanı Grafiği

2.3.2 Non-Newtonyen Akışkanlara Ait Modeller

Non-Newtonyen akışkanların özellikleri ve sınıflandırması “Reoloji” denilen bilim dalı dahilinde incelenmektedir. Reoloji, şekil değiştirme – kuvvet ilişkisiyle uğraşan bilim dalıdır. Cisimlerin davranışlarını şekil değiştirme, kuvvet ve/veya zaman faktörleri altında ele alır (Akgül M.B., 2008).

Bölüm 1’de genel olarak bahsettiğimiz gibi non-Newtonyen akışkanların Newtonyen akışkanlardan farkı, kayma gerilmesiyle hız gradyeni arasında doğrusal bir ilişkinin olmamasıdır. Bölüm 2.3.1’de Newtonyen akışkanları denklem (2.1)’le matematiksel olarak ifade ettik. Ancak böyle tek bir genel modeli non-Newtonyen akışkanlar için yazabilmek pek mümkün değildir. Newtonyen olmayan davranış gösteren akışkanlar için birçok model ileri sürülmüştür. Akışkana ve akış biçiminin değişimine göre kullanılabilecek non-Newtonyen akışkan modelleri farklılık gösterir. Çünkü her bir modelin değişik şartlar için uygun veya uygun olmayan yönleri mevcuttur. Bazı non-Newtonyen akışkan modellerini sıralayalım:

Power Law Modeli:
$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (2.2)$$

Hershell- Bulkley Modeli:
$$\tau_{yx} = \tau_0 + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (2.3)$$

Prandtl Modeli:
$$\tau_{yx} = A \sin^{-1} \left(\frac{du/dy}{c} \right) \quad (2.4)$$

Powell- Eyring Modeli:
$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} + \frac{1}{B} \sinh^{-1} \left(\frac{du/dy}{c} \right) \quad (2.5)$$

Williamson Modeli:
$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} + \frac{Adu/dy}{B + du/dy} \quad (2.6)$$

Akışkanları en genel olarak Newtonyen akışkanlar ve non-Newtonyen akışkanlar olarak iki gruba ayırdıktan sonra yukarıda bazı örnek modellerini verdiğimiz non-Newtonyen akışkanların temel parametresi olan viskozitenin zamana bağlılığına göre gruplamak istersek iki gruba ayırabiliriz: i) Zamana bağımlı akışkanlar, ii) Zamandan bağımsız akışkanlar (Akgül M.B., 2008).

2.3.2.1 Zamana Bağımlı Non-Newtonyen Akışkanlar

Tiksotropik ve Reopektik olarak adlandırılan akışkanlar bu gruba girer. Tiksotropik akışkanların görünür viskozitesi kayma gerilmesiyle azalır. Zamanla inceliyorlar ve azalan gerilmeye ihtiyaç duyarlar. Bir başka deyişle sabit hız gradyeni için kayma gerilmesi zamana bağlı olarak azalır. Reopektik akışkanların görünür viskozitesi kayma gerilmesiyle artar. Sabit şekil değiştirme hızını koruyabilmek için yavaşça artan kayma gerilmesine ihtiyaç duyarlar. Sabit hız gradyeni için kayma gerilmesi zamana bağlı olarak artar. Tiksotropik akışkanlara örnekler boya, bal, ketçap ve yoğurt sayılabilir. Reopektik akışkanlara örnek olarak ta temel mantığı hareket eden iki yüzey arasındaki sürtünmeyi azaltan ve mekanik uygulama alanları oldukça fazla olan yağlama maddeleri verilebilir. Bitkisel, sentetik ve mineral yağlar bu gruba verilebilecek örneklerdir (Akgül M.B., 2008).

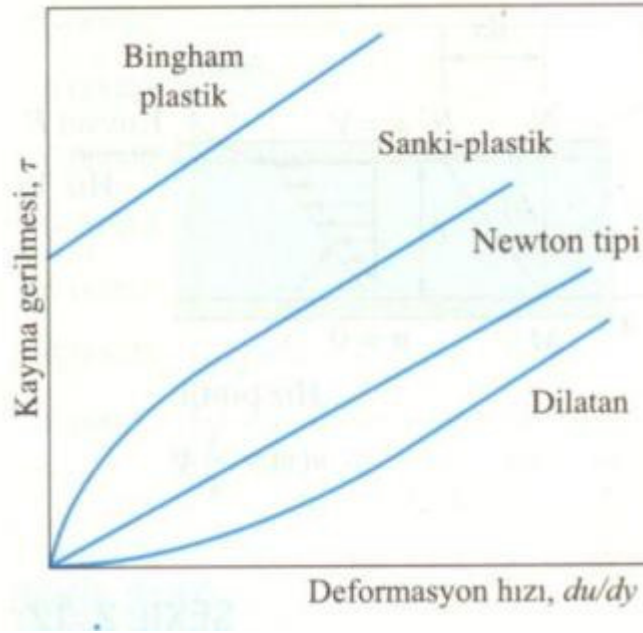
2.3.2.2 Zamana Bağlı Olmayan Non-Newtonyen Akışkanlar

Bazı besin grubu ve biyolojik sistemlerdeki akışkanlar bu gruba girer. Power Law akışkanlar için verilen modeli,

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad \text{şeklinde ifade etmiştik. Burada,}$$

$n < 1$ ise akışkan, alçalıcı veya kayma incelmesi davranışı gösteren akışkan (shear thinning) olarak tanımlanır. Bunlar Pseudeplastik akışkanlardır. Hız gradyeni arttıkça görünür viskozitesi azalır. Saç şekillendirici jöleler bu gruba örnek verilebilir.

$n > 1$ ise kabaran veya kayma kalınlaşması davranışı gösteren akışkan (shear thickening) olarak tanımlanır. Bunlar Dilatant akışkanlardır. Hız gradyeni arttıkça görünür viskozitesi artar. Su ve un karışımı bu gruba örnek verilebilir. Şekil 2.5'te Pseudeplastik ve Dilatant akışkanların hız gradyenine bağlı olarak kayma gerilmesinin değişimi grafik olarak gösterilmiştir. Şekil 2.5'te Newtonyen akışkanlarda kayma gerilmesi ile şekil değiştirme hızı doğru orantılıdır. Buna karşın non-Newtonyen akışkanlarda ise kayma gerilmesi ile deformasyon hızı lineer olmayan bir ilişki olduğu görülmektedir (Akgül M.B., 2008).



Şekil 2.5 Newton ve non-Newtonyen Akışkanlar için Kayma Gerilmesinin Deformasyon Hızıyla Değişimi (Cengel Y. A., Cimbala J.M. 2008).

3. MATERYAL VE METOT

3.1 Silindirik Koordinatlarda Genelleştirilmiş Üçüncü Derece Akışkanlara Ait Momentum ve Enerji Denklemleri

Bu bölümde silindirik koordinatlarda genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemlerinin çıkışı yapılacaktır. Genelleştirilmiş üçüncü dereceden non-Newtonyen akışkanların momentum ve enerji denklemlerinin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılacaktır. Bu bölümde elde edilen momentum ve enerji denklemleri üç boyutlu kararlı akış içindir.

Genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait bünye denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\mathbf{T}^* = -p^* \mathbf{I} + \Pi^{m/2} \left[(\mu \mathbf{A}_1^* + \alpha_1 \mathbf{A}_2^* + \alpha_2 \mathbf{A}_1^{*2}) + \beta (\text{tr} \mathbf{A}_1^{*2}) \mathbf{A}_1^* \right] \quad (3.1)$$

Burada p basınç, μ viskozite, α_1 , α_2 ve β akışkan sabitleri A_1 ve A_2 ilk iki Rivlin-Ericksen tensörleridir. Bu tensörler şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^* &= \mathbf{L}^* + \mathbf{L}^{*T} \\ \mathbf{A}_2^* &= \frac{d\mathbf{A}_1^*}{dt^*} + \mathbf{A}_1^* \mathbf{L}^* + \mathbf{L}^{*T} \mathbf{A}_1^* \\ \Pi &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}_1^{*2}) \\ \mathbf{L}^* &= \nabla^* \mathbf{v}^* \end{aligned} \quad (3.2)$$

Lineer momentum denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\text{div} \mathbf{T} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (3.3)$$

Denklem (3.1) ve (3.2)'deki ifadeler denklem (3.3)'e yerleştirilip gerekli işlemler yapılırsa;

$$\rho \left(\frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 + \omega \times \mathbf{v} \right) = -\text{grad} p + \text{grad} \left[\left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right)^{m/2} \right] \left[\mu \nabla^2 \mathbf{v} + \beta \mathbf{A}_1^* \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1^*|^2 + \beta |\mathbf{A}_1^*|^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \right] \quad (3.4)$$

genelleştirilmiş üçüncü dereceden akışkanlara ait en genel hareket denklemi, denklem (3.4)'teki gibi elde edilmiş olur.

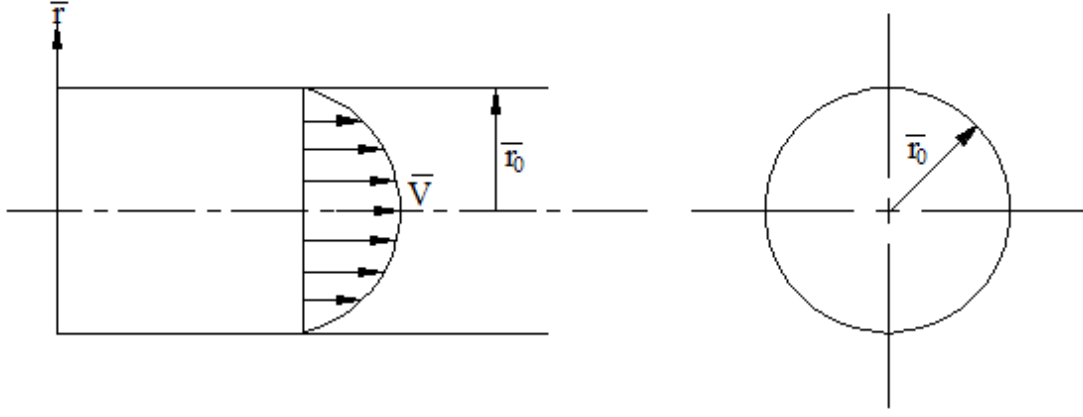
Genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait enerji denkleminin en genel hali aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \text{grad} \left[\left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right)^{m/2} \right] \left(\frac{1}{2} \mu |\mathbf{A}_1^*|^2 + \frac{\beta}{2} |\mathbf{A}_1^*|^4 + k \nabla^2 \mathbf{v} \right) \quad (3.5)$$

Burada ε iç enerji, k ısı iletim katsayısını, β üçüncü derece akışkan terimini ifade etmektedir.

3.2 Hız ve Sıcaklık Profilleri İçin Analitik Çözümlerin Bulunması

Bu bölümde; silindirik koordinatlarda tek boyutlu akış için elde edilen denklemlerin çözümü yapılacaktır. Bu denklemler için sınır şartları belirlenecektir. Elde edilen denklemler boyutsuz denklemlerdir. Sonuçların genelleştirilebilmesi amacıyla denklemler boyutsuz hale getirilecektir. Bu bölümde denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri bulunacaktır. Analitik çözümlerin elde edilmesinde bir çeşit seri açılım olan perturbasyon yönteminin yaya açılımı metodundan yararlanılacaktır. Çözümler sonucunda hız ve sıcaklık profilleri elde edilecektir. Hız ve sıcaklığa ait çözümler Matlab programı kullanılarak grafiksel olarak elde edilecektir.



Şekil 3.1 Boru İçerisindeki Akışın Şematik Gösterimi

Bu tez çalışmasında r ve θ yönündeki hızlar sıfır kabul edilmiştir. Hareketin sadece z yönünde olduğu ve r 'ye bağlı olarak değiştiği kabulü yapılmıştır. Bu tanımlama aşağıda matematiksel olarak ifade edilmiştir.

$$\bar{v}_r = 0 \quad , \quad \bar{v}_\theta = 0 \quad , \quad \bar{v}_z = \bar{v}_z(\bar{r}) \quad (3.6)$$

Denklem (3.4), (3.5) ve (3.6)'dan yararlanılarak boru içerisindeki genelleştirilmiş üçüncü derece akışkana ait denklemler elde edilmiştir:

$$\left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}}\right)^m \left[\left((m+1) \frac{d^2\bar{v}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right) \bar{\mu} + 2\beta \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}}\right)^2 \left((m+3) \frac{d^2\bar{v}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right) \right] = \frac{d\bar{P}}{d\bar{z}} \quad (3.7)$$

$$k \frac{d^2\bar{\theta}}{d\bar{r}^2} + \frac{k}{\bar{r}} \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{r}} + \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}}\right)^{m+2} \left[\bar{\mu} + \beta \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}}\right)^2 \right] = 0 \quad (3.8)$$

$$\bar{v}(\bar{r}) = 0 \quad , \quad \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}}(0) = 0 \quad , \quad \bar{\theta}(\bar{r}) = 0 \quad , \quad \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{r}}(0) = 0 \quad (3.9)$$

Denklem (3.7) momentum denklemini, denklem (3.8) enerji denklemini ve denklem (3.9) ise probleme ait sınır şartlarını ifade etmektedir. Yapılan tez çalışmasında μ yani viskozite sabit olarak kabul edilecek ve değeri 1 olarak alınacaktır. Verilen bu

denklemlerdeki ifadeler boyutlu ifadelerdir. Çözümlerin genelleştirilebilmesi için boyutsuz olarak ifade edilmeleri gerekmektedir. Boyutsuzlaştırma için kullanılan dönüşümler aşağıda verilmiştir.

$$r = \frac{\bar{r}}{R} \quad v = \frac{\bar{v}}{v_0} \quad \mu = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} \quad \theta = \frac{\bar{\theta} - \theta_w}{\bar{\theta}_m - \theta_w} \quad (3.10)$$

Denklem (3.10)'daki v_0 referans hızını, μ_0 referans viskoziteyi, θ_m ortalama akışkan sıcaklığını ve θ_w cidar sıcaklığını ifade etmektedir.

Öncelikle denklem (3.7) ve (3.8) için boyutsuzlaştırma işlemi yapılacaktır. Daha sonra boyutsuz hale gelen denklemlere ait perturbatif çözümler detaylı olarak verilecektir. Çözümlerde $\mu=1$ olarak alınacaktır. Denklem (3.9)'daki ifadeler denklem (3.7) ve (3.8)'de yerine yerleştirilirse boyutsuz denklemler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)^m \left[\left((m+1) \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) \mu + \Lambda \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 \left((m+3) \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) \right] = C \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} + \Gamma \left(\frac{dv}{dr} \right)^{m+2} \left[\mu + \Lambda \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.12)$$

$$v(1) = \theta(1) = 0 \quad \frac{dv}{dr}(0) = \frac{d\theta}{dr}(0) = 0 \quad (3.13)$$

Denklemlerde v boyutsuz akışkan hızını, θ boyutsuz sıcaklığı ifade etmektedir.

$$\Lambda = \frac{2\beta v_0^2}{\mu_0 R^2} \quad C_1 = \frac{d\bar{P}}{d\bar{z}} \quad C = \frac{C_1 R^2}{\mu_0 v_0} \left(\frac{R}{v_0} \right)^m \quad \Gamma = \frac{\mu_0 v_0^{m+2}}{R^m (\bar{\theta}_m - \theta_w) k} \quad (3.14)$$

Denklem (3.14)'te C_1 eksenel yöndeki basınç değişimini, Λ boyutsuz non-Newtonyen akışkan katsayısı, β boyutlu üçüncü derece akışkan katsayısını, Γ Brinkman sayısını ve

k ısı iletim katsayısını ifade etmektedir. Bundan sonraki aşamada elde edilen boyutsuz denklemlerin perturbatif çözümleri yapılacaktır.

Momentum ve enerji denklemlerindeki hız ve sıcaklığın yaya açılımları aşağıdaki gibidir.

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 \quad (3.15)$$

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 \quad (3.16)$$

Burada ε perturbasyon parametresidir. Ayrıca çözümlerde non-Newtonyen katsayısı Λ , aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$\Lambda = \varepsilon \lambda \quad (3.17)$$

Yani denklem (3.17)'deki tanımlama ile Λ , ε mertebesinde kabul edilmiştir. Yapılan tanımlama ve kabullerden sonra denklem (3.15) ve (3.17), denklem (3.11) ve (3.13)'e yerleştirilirse;

$$\begin{aligned} (v_0' + \varepsilon v_1')^m & \left[\left((m+1)(v_0'' + \varepsilon v_1'') + \frac{1}{r}(v_0' + \varepsilon v_1') \right) \right. \\ & \left. + \varepsilon \lambda (v_0' + \varepsilon v_1')^2 \left((m+3)(v_0'' + \varepsilon v_1'') + \frac{1}{r}(v_0' + \varepsilon v_1') \right) \right] = C \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir. $(v_0' + \varepsilon v_1')^m$ ifadesini ε 'ye göre seriye açarak yazarsak denklem aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} ((v_0')^m + \varepsilon m v_0'^{(m-1)} v_1') & \left[\left((m+1)(v_0'' + \varepsilon v_1'') + \frac{1}{r}(v_0' + \varepsilon v_1') \right) \right. \\ & \left. + \varepsilon \lambda (v_0' + \varepsilon v_1')^2 \left((m+3)(v_0'' + \varepsilon v_1'') + \frac{1}{r}(v_0' + \varepsilon v_1') \right) \right] = C \end{aligned} \quad (3.19)$$

Denklem (3.19) momentum denkleminde uygulanan yaya açılımını ifade etmektedir. Benzer şekilde enerji denkleminde de yaya açılımını uygulamak için denklem (3.15), (3.16) ve (3.17)'deki tanımlamalar denklem (3.12) ve (3.13)'e yerleştirildiğinde;

$$\begin{aligned}
 (\theta_0'' + \varepsilon \theta_1'') + \frac{(\theta_0' + \varepsilon \theta_1')}{r} + \Gamma((v_0')^{m+2} + \varepsilon(m+2)(v_0')^{m+1} v_1') \\
 + \Gamma \varepsilon \lambda ((v_0')^{m+4} + \varepsilon(m+4)(v_0')^{m+3} v_1') = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

elde edilir. Elde edilen denklem (3.19) ve (3.20)'deki ifadelerden 1 ve ε mertebeleri dikkate alınacaktır. Bu mertebeler yazılır ise;

1. Sınıf

$$(v_0')^m \left[v_0''(m+1) + \frac{v_0'}{r} \right] = Cr
 \tag{3.21}$$

$$\theta_0'' + \frac{\theta_0'}{r} + \Gamma(v_0')^{m+2} = 0
 \tag{3.22}$$

Sınır şartları aşağıdaki gibi olur.

$$v_0(1) = \theta_0(1) = 0 \quad v_0'(0) = \theta_0'(0) = 0
 \tag{3.23}$$

ε Mertebesi

$$v_1''(m+1)(v_0')^m + \frac{v_1'}{r}((v_0')^m + mr(m+1)v_0'^{(m-1)}v_0'' + m(v_0')^m) = -\lambda(v_0')^{(m+2)} \left(v_0''(m+3) + \frac{v_0'}{r} \right) \quad (3.24)$$

$$\theta_1'' + \frac{\theta_1'}{r} + \Gamma(m+2)(v_0')^{m+1}v_1' + \Gamma\lambda(v_0')^{m+4} = 0 \quad (3.25)$$

ε mertebesine göre sınır şartları aşağıda verilmiştir.

$$v_1(1) = \theta_1(1) = 0 \quad v_1'(0) = \theta_1'(0) = 0 \quad (3.26)$$

Şimdi bulunan bu denklemlerin ayrıntılı olarak çözümleri yapılacaktır. Denklem (3.21)'i ele alalım. İşlemi kolaylaştırmak için denklem (3.21)'de $v_0' = K$ olarak yazarsak;

$$K' + \frac{K}{r(m+1)} = \frac{C}{m+1} K^{-m} \quad (3.27)$$

şeklinde Bernoulli diferansiyel denklemi oluşur. Buradan,

$$z = K^{1+m} \quad (3.28)$$

bağıntısına ulaşılır. Buna göre denklem (3.27)'yi düzenlersek;

$$z' + \frac{1}{r}z = C \quad (3.29)$$

denklemini elde edilir. Denklemin sadece sol tarafını dikkate alarak sıfıra eşitlersek;

$$\frac{dz}{dr} + \frac{z}{r} = 0 \quad (3.30)$$

ayrışabilen denklemi elde edilir. İntegral alırsak;

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dr}{r} \Rightarrow z = \frac{C_1}{r} \quad (3.31)$$

olur. $C_1 = C_1(r)$ olsun. Bu durumda;

$$z = \frac{C_1(r)}{r} \quad \text{ve} \quad z' = \frac{C_1' r - C_1}{r^2} \quad (3.32)$$

haline gelir. Denklem (3.32)'deki tanımlamaları denklem (3.29)'da yerine yazarsak;

$$C_1 = \frac{Cr^2}{2} + C_2 \quad (3.33)$$

elde edilir. Bu ifadeyi denklem (3.32)'deki ifadede yerine yerleştirirsek;

$$z = \frac{Cr}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (3.34)$$

olarak elde edilir. (3.34)'teki ifadeyi denklem (3.28)'de yerine yazdığımızda, K yani v_0' 'ın değerı elde edilir:

$$v_0' = 2^{-\frac{1}{m+1}} \left(Cr + \frac{C_2}{r} \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (3.35)$$

Denklem (3.23)'te verilen sınır şartları denklem (3.35)'te uygularsak;

$$v_0'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (3.36)$$

olur. $C_2 = 0$ alındıđında denklem (3.35)'i yeniden dűzenlersek;

$$v_0' = 2^{\frac{1}{m+1}} (Cr)^{\frac{1}{m+1}} \quad (3.37)$$

haline gelir. İntegral alırsak;

$$v_0 = \frac{2^{\frac{1}{m+1}} C^{\frac{1}{m+1}} (m+1)}{(m+2)} r^{\frac{m+2}{m+1}} + C_3 \quad (3.38)$$

elde edilir. (3.23)'teki sınır şartının denklem (3.38)'de uygulanması sonucu;

$$C_3 = -\frac{2^{\frac{1}{m+1}} C^{\frac{1}{m+1}} (m+1)}{(m+2)} \quad (3.39)$$

olarak bulunur. C_3 integral sabitidir. Denklem (3.39)'da bulduğumuz C_3 sabitini denklem (3.38)'de yerine yazarsak;

$$v_0 = \frac{2^{\frac{1}{m+1}} C^{\frac{1}{m+1}} (m+1)}{m+2} (r^{\frac{m+2}{m+1}} - 1) \quad (3.40)$$

hız ifadesinin lineer kısmı elde edilmiş olur. ε mertebesindeki çözümler için aşağıdaki denklemlerden yararlanılacaktır.

$$v_0' = 2^{\frac{1}{m+1}} C^{\frac{1}{m+1}} r^{\frac{1}{m+1}} \quad (3.41)$$

$$v_0'' = \frac{2^{\frac{1}{m+1}} C^{\frac{1}{m+1}}}{m+1} (r^{-\frac{m}{m+1}}) \quad (3.42)$$

Bu denklemlerden yararlanılarak v_1 değeri elde edilecektir. Denklem (3.41) ve (3.42)'deki ifadeler denklem (3.24)'te yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında;

$$v_1''(m+1) + \frac{v_1'}{r}(1+2m) = -\lambda(C^{\frac{3}{m+1}}r^{\frac{2-m}{m+1}}2^{\frac{m-2}{m+1}})\left(\frac{m+2}{m+1}\right) \quad (3.43)$$

eşitliği elde edilir. İşlem kolaylı açısından $v_1' = z$ olarak kabul edelim. Buna göre denklem (3.43)'ü yeniden düzenlersek;

$$z'(m+1) + \frac{z}{r}(1+2m) = -\lambda(C^{\frac{3}{m+1}}r^{\frac{2-m}{m+1}}2^{\frac{m-2}{m+1}})\left(\frac{m+2}{m+1}\right) \quad (3.44)$$

Elde edilen eşitliğin sol tarafını dikkate alarak sıfıra eşitlersek;

$$z'(m+1) + \frac{z}{r}(1+2m) = 0 \quad (3.45)$$

lineer denkleme ulaşılır. Bütün denklemi (m+1) ifadesine bölersek;

$$\frac{dz}{dr} + \frac{z}{r}\left(\frac{1+2m}{m+1}\right) = 0 \quad (3.46)$$

haline gelir. Denklemi düzenlersek;

$$\frac{dz}{z} + \frac{dr}{r}\left(\frac{1+2m}{m+1}\right) = 0 \quad (3.47)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\left(\frac{1+2m}{m+1}\right) = K$ olarak alırsak denklem (3.47) aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{dz}{z} + \frac{dr}{r}K = 0 \quad (3.48)$$

İntegral aldığımız takdirde;

$$z = C_1 \frac{1}{r^k} \quad (3.49)$$

olur. $C_1 = C_1(r)$ olsun. Bu durumda;

$$z = C_1(r) \frac{1}{r^k} \quad \text{ve} \quad z' = \frac{C_1' r^k - K r^{K-1} C_1}{(r^k)^2} \quad (3.50)$$

olur. Denklem (3.50)'deki ifadeleri denklem (3.44)'te yerine yerleştirirsek;

$$C_1 = -\frac{\lambda 2^{\frac{3}{m+1}} C^{\frac{3}{m+1}}}{(m+1)} r^{\frac{-3}{m+1}} + C_2 \quad (3.51)$$

elde edilir. Denklem (3.51)'i denklem (3.49)'da yerine yerleştirirsek;

$$v_1' = -\frac{\lambda C^{\frac{3}{m+1}} r^{\frac{3}{m+1}} 2^{\frac{-3}{m+1}}}{m+1} + C_2 \quad (3.52)$$

Denklem (3.26)'daki sınır şartları denklem (3.52)'ye uygulanırsa;

$$v_1'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (3.53)$$

olarak bulunur. (3.53)'e göre denklem (3.52)'yi yeniden yazarsak;

$$v_1' = -\frac{\lambda C^{\frac{3}{m+1}} r^{\frac{3}{m+1}} 2^{\frac{-3}{m+1}}}{m+1} \quad (3.54)$$

haline gelir. İntegre edersek;

$$v_1 = -\frac{\lambda 2^{\frac{3}{m+1}} C^{\frac{3}{m+1}} r^{\frac{m+4}{m+1}}}{m+4} + C_3 \quad (3.55)$$

elde edilir. Denklem (3.26)'da verilen sınır şartını denklem (3.55)'e uygularsak;

$$C_3 = \frac{\lambda 2^{\frac{3}{m+1}} C^{\frac{3}{m+1}}}{m+4} \quad (3.56)$$

olarak bulunur. Denklem (3.56)'da bulduğumuz C_3 integral sabitini denklem (3.56)'da yerine yazdığımızda;

$$v_1 = \frac{\lambda 2^{\frac{3}{m+1}} C^{\frac{3}{m+1}}}{m+4} (r^{\frac{m+4}{m+1}} - 1) \quad (3.57)$$

Denklem (3.57)'deki gibi v_1 ifadesine ulaşılır. Elde edilen denklem (3.40) ve (3.57), denklem (3.15)'te yerine yerleştirildiği takdirde;

$$v = \frac{(m+1)^{m+1} \sqrt{C}}{(m+2)^{m+1} \sqrt{2}} (r^{\frac{m+2}{m+1}} - 1) - \Lambda \frac{m+1 \sqrt{C^3}}{(m+4)^{m+1} \sqrt{8}} (r^{\frac{m+4}{m+1}} - 1) \quad (3.58)$$

hız profili tam olarak elde edilmiş olunur. Şimdi de Denklem (3.22) ve (3.25)'in çözümleri yapılacaktır. Denklem (3.22)'yi ele alalım. Öncelikle daha önce elde edilen denklem (3.41)'deki v_0' tanımını denklem (3.22)'de yerine yerleştirirsek;

$$\theta_0'' + \frac{\theta_0'}{r} = -\Gamma \frac{C^{\frac{m+2}{m+1}}}{2^{\frac{m+2}{m+1}}} r^{\frac{m+2}{m+1}} \quad (3.59)$$

halini alır. Gerekli çözümlerin yapılması ve denklem (3.23)'teki sınır şartlarının denklem (3.59)'a uygulanması sonucu θ_0 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\theta_0 = \Gamma \frac{m+1 \sqrt{C^{m+2}}}{m+1 \sqrt{2^{m+2}}} \left(\frac{m+1}{3m+4} \right)^2 (1 - r^{\frac{3m+4}{m+1}}) \quad (3.60)$$

Böylece, sıcaklık profilinin lineer kısmı elde edilmiş olur. Denklem (3.25)'in çözümü için denklem (3.41) ve (3.54), denklem (3.25)' te yerine yazılırsa;

$$\theta_1'' r + \theta_1' = \frac{\Gamma \lambda C^{\frac{m+4}{m+1}}}{(m+1)2^{\frac{m+4}{m+1}}} r^{\frac{2m+5}{m+1}} \quad (3.61)$$

şeklinde yazılır. Gerekli işlemlerin yapılması ve denklem (3.26)'daki sınır şartının uygulanması sonucunda;

$$\theta_1 = \frac{\Gamma \lambda^{\frac{m+1}{m+1}} \sqrt{C^{m+4}}}{m+1 \sqrt{2^{m+4}}} \frac{m+1}{(3m+6)^2} \left(r^{\frac{3m+6}{m+1}} - 1 \right) \quad (3.62)$$

elde edilir. Denklem (3.60) ve (3.62), denklem (3.16)'daki ifadede yerine yerleştirildiğinde;

$$\theta = \frac{\Gamma \lambda^{\frac{m+1}{m+1}} \sqrt{C^{m+2}}}{m+1 \sqrt{2^{m+2}}} \left(\frac{m+1}{3m+4} \right)^2 (1-r^4) + \frac{\Gamma \lambda^{\frac{m+1}{m+1}} \sqrt{C^{m+4}}}{m+1 \sqrt{2^{m+4}}} \frac{m+1}{(3m+6)^2} \left(r^{\frac{3m+6}{m+1}} - 1 \right) \quad (3.63)$$

sıcaklık profili tam olarak elde edilmiş oldu.

Bu bölümde; tez çalışmasında kullanılan kayma gerilmesi modeli verilmiştir. Bu kayma gerilmesi modeline göre momentum ve enerji denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen denklemler boyutlu denklemlerdir. Denklemler boyutsuz hale getirilerek çözümlerin genelleştirilebilmesi amaçlanmıştır. Denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri yaya açılımı metodu kullanılarak elde edilmiştir. Çözümler sonucunda hız ve sıcaklık profilleri elde edilmiştir. $m=0$ değeri için çözümler, Yürüsoy ve Pakdemirli (2002) makalesindeki sonuçlarla aynıdır. Bu da elde edilen sonuçların doğru olduğunu göstermektedir. Bundan sonraki bölümde ise denklemlerin nümerik çözümleri yapılacaktır. Nümerik çözümlerin elde edilmesinde sonlu farklar yöntemi kullanılacaktır.

4. SONLU FARKLAR METODU

Bu bölümde önceki bölümde elde edilen genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemlerinin nümerik çözümleri yapılacaktır. Nümerik çözümler için sonlu farklar yönteminden yararlanılacaktır.

Sonlu farklar; fiziksel, mühendislik problemlerinin bilgisayar yardımı ile çözümünde, kısmi diferansiyel denklemleri bilgisayar tarafından hesaplanabilir kılan, Taylor serisi açılımı yardımıyla türetilmiş bir yöntemdir.

Sonlu farklar yaklaşımı sayısal türev alma işlemine dayanmaktadır. Tüm fark yaklaşımları;

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanan Taylor seri açılımı yardımıyla elde edilir.

4.1 İleri Farklar ve Δ Operatörü

Bir $f(x)$ fonksiyonunun x_i noktasında f_i , x_{i+h} noktasında f_{i+1} değeri aldığını varsayalım. Bu halde $f_{i+1} - f_i$ farkına f fonksiyonunun x_i noktasındaki ileri farkı denir ve Δ ile gösterilir.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad (4.2)$$

Buradaki h 'a fark aralığı veya adım denir. Benzer şekilde ikinci dereceden ileri fark tanımını aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \quad (4.3)$$

Fonksiyonun birinci mertebeden türevinin, ileri farklar yardımıyla nasıl hesaplanabileceğini öğrenmek için $f(x)$ fonksiyonunun Taylor seri açılımını göz önüne alırsak;

$$f_{i+1} = f_i + \frac{h}{1!}f'_i + \frac{h^2}{2!}f''_i + \dots \quad (4.4)$$

yazılabilir. Böylece,

$$f_{i+1} - f_i = hf'_i + \frac{h^2}{2!}f''_i + \dots \quad (4.5)$$

elde edilir. h değerinin çok küçük olması durumunda h^2 'li ve daha sonraki terimler ihmal edilerek ,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad (4.6)$$

Birinci mertebeden türevin ileri farklar kullanılarak çözümü elde edilir. İkinci mertebeden türev için ileri fark denklemi benzer işlemler yapılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h^2) \quad (4.7)$$

4.2 Geri Farklar ve ∇ Operatörü

Geriye fark operatörü ∇ 'dır. f fonksiyonunun x_i noktasındaki geri farkı;

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad (4.8)$$

şeklinde gösterilir. İkinci mertebeden geri farkları benzer şekilde tanımlayabiliriz.

$$\nabla^2 f_i = f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i \quad (4.9)$$

Geri farklar ile fonksiyonun türevleri arasındaki ilişkiyi yazmak için Taylor seri açılımını göz önüne alırsak;

$$f_{i-1} = f_i - \frac{h}{1!} f'_i - \frac{h^2}{2!} f''_i - \dots \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.10)'u düzenlersek;

$$f_i - f_{i-1} = \frac{h}{1!} f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots \quad (4.11)$$

şeklinde yazılır. h^2 'li ve sonraki terimler ihmal edilerek;

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \quad (4.12)$$

Birinci mertebeden türev için geri farklar denklemi (4.12)'deki gibi elde edilir. İkinci mertebeden türev benzer şekilde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i+2}}{h^2} + O(h^2) \quad (4.13)$$

4.3 Merkezi Farklar ve δ Operatörü

Bir $f(x)$ fonksiyonunda, bağımsız değişkenin yarım adım ilerisindeki değer ile yarım adım gerisindeki değer arasındaki fark merkezi fark olarak bilinir ve δ ile sembolize edilir.

$$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \quad (4.14)$$

İkinci mertebeden merkezi farklar;

$$\delta^2 f_i = \delta \left(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad (4.15)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (4.4) ve denklem (4.11)'deki Taylor seri açılımları göz önüne alınarak taraf tarafa çıkarma işlemi yapılırsa;

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf'_i + \frac{1}{3}h^3f'''_i + \dots \quad (4.16)$$

elde edilir. Böylece,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h) \quad (4.17)$$

Birinci dereceden türev için merkezi fark yaklaşımı elde edilmiş olur. Merkezi fark denklemi ikinci mertebeden türev için aşağıdaki gibi yazılır.

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (4.18)$$

Bu denklemlerdeki $O(h)$ 'lar hatanın mertebesini ifade etmektedir. Denklem (4.6), (4.12) ve (4.17) karşılaştırıldığında, $O(h)$ küçüldükçe yapılacak hatanın, denklem (4.17)'de diğer iki denkleme nazaran daha hızlı küçüldüğü görülür.

4.4 Momentum ve Enerji Denklemlerinin Sonlu Farklarla Tanımlanması

Bu tez aşamasında nümerik çözümlerin elde edilmesinde hata oranının az olmasından dolayı merkezi fark denklemleri kullanılmıştır. 100 düğüm için, h değeri 0.01 olarak

alınarak çözümler elde edilecektir. Denklem (3.11) için merkezi farkları uygulayalım.

Öncelikle denklemdeki türevlerin merkezi fark dönüşümlerini yazarsak;

$$\left(\frac{dv}{dr}\right) = \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}\right) \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{d^2v}{dr^2}\right) = \left(\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}\right) \quad (4.20)$$

ifadeleri ede edilir. Denklem (4.19) ve (4.20)'yi denklem (3.11)'de yerlerine yazarsak;

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}\right)^m \left[\left((m+1) \frac{r_i}{h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + \frac{1}{2h} (f_{i+1} - f_{i-1}) \right) \right. \\ & \left. + \Lambda \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}\right)^2 \left((m+3) \frac{r_i}{h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + \frac{1}{2h} (f_{i+1} - f_{i-1}) \right) \right] = Cr_i \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. Denklem (3.13)'te verilen sınır şartlarını göz önüne alarak (4.17) ve (4.18)'te uygularsak;

$$f_1 = f_{-1} \quad , \quad f_{100} = 0 \quad , \quad f_0 = f_1 - \frac{h^2 a}{2} \quad (4.22)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (4.22)'deki ifadeleri denklem (4.21)'de yerine yerleştirerek ilk ve son düğümlere ait denklemleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f_2 - f_1 + \frac{h^2 a}{2}}{2h}\right)^m \left[\left((m+1) \left(f_2 - f_1 - \frac{h^2 a}{2}\right) \frac{0.01}{h^2} + \frac{f_2 - f_1 + \frac{h^2 a}{2}}{2h} \right) \right. \\ & \left. + \Lambda \left(\frac{f_2 - f_1 + \frac{h^2 a}{2}}{2h}\right)^2 \left((m+3) \left(f_2 - f_1 - \frac{h^2 a}{2}\right) \frac{0.01}{h^2} + \frac{f_2 - f_1 + \frac{h^2 a}{2}}{2h} \right) \right] = 0.01C \end{aligned} \quad (4.23)$$

Denklem (4.23)'de denklem (4.21)'in ilk düğüm için merkezi fark denklemi verilmiştir. Son düğüm için merkezi fark denklemi ise aşağıdaki gibi olur.

$$\left(\frac{f_{98}}{2h}\right)^m \left[\left((m+1)(-2f_{99} + f_{98}) \frac{0.99}{h^2} - \left(\frac{f_{98}}{2h}\right) \right) + \Lambda \left(\frac{f_{98}}{2h}\right)^2 \left((m+3)(-2f_{99} + f_{98}) \frac{0.99}{h^2} + \left(\frac{f_{98}}{2h}\right) \right) \right] = 0.99C \quad (4.24)$$

Denklem (3.12) için merkezi farkları uygulamak için denklemdeki türevleri merkezi farklara uygularsak;

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right) = \left(\frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h}\right) \quad (4.25)$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{dr^2}\right) = \left(\frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2}\right) \quad (4.26)$$

elde edilir. Denklem (4.25) ve (4.26)'yı denklem (3.12)'de yerlerine yazarsak;

$$\frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2} + \left(\frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2hr_i}\right) + \Gamma \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}\right)^{m+2} \left[1 + \Lambda \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}\right)^2 \right] = 0 \quad (4.27)$$

Denklem (3.12) merkezi farklara uygun olarak elde edilmiş olur. Denklem (3.13)'te verilen sınır şartları göz önüne alınarak (4.17) ve (4.18)'te uygularsak;

$$g_1 = g_{-1} \quad , \quad g_{100} = 0 \quad , \quad g_0 = g_1 \frac{h^2 b}{2} \quad (4.28)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (4.28)'deki ifadeleri kullanarak denklem (4.27) için ilk ve son düğümlere ait denklemleri elde edebiliriz.

$$\left(\frac{g_2 - g_1 - \frac{h^2 b}{2}}{h^2}\right) + \left(\frac{g_2 - g_1 + \frac{h^2 b}{2}}{2h0.01}\right) + \Gamma \left(\frac{f_2 - f_1 + \frac{h^2 a}{2}}{2h}\right)^{m+2} \left[1 + \Lambda \left(\frac{f_2 - f_1 + \frac{h^2 a}{2}}{2h}\right)^2\right] = 0 \quad (4.29)$$

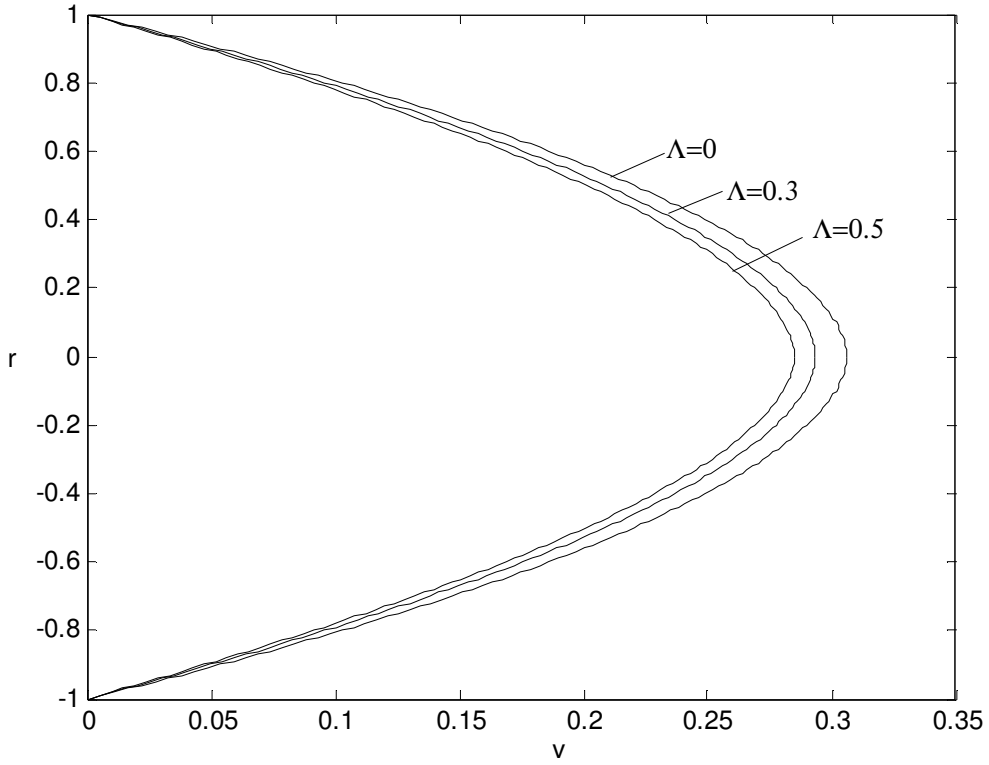
Denklem (4.29), denklem (4.27)'in ilk düğüm için yazımını ifade etmektedir. (4.27)'i son düğüm için yazımı aşağıda verilmiştir.

$$\left(\frac{-2g_{99} + g_{98}}{h^2}\right) + \left(\frac{-g_{98}}{2h0.99}\right) + \Gamma \left(\frac{-f_{98}}{2h}\right)^{m+2} \left[1 + \Lambda \left(\frac{-f_{98}}{2h}\right)^2\right] = 0 \quad (4.30)$$

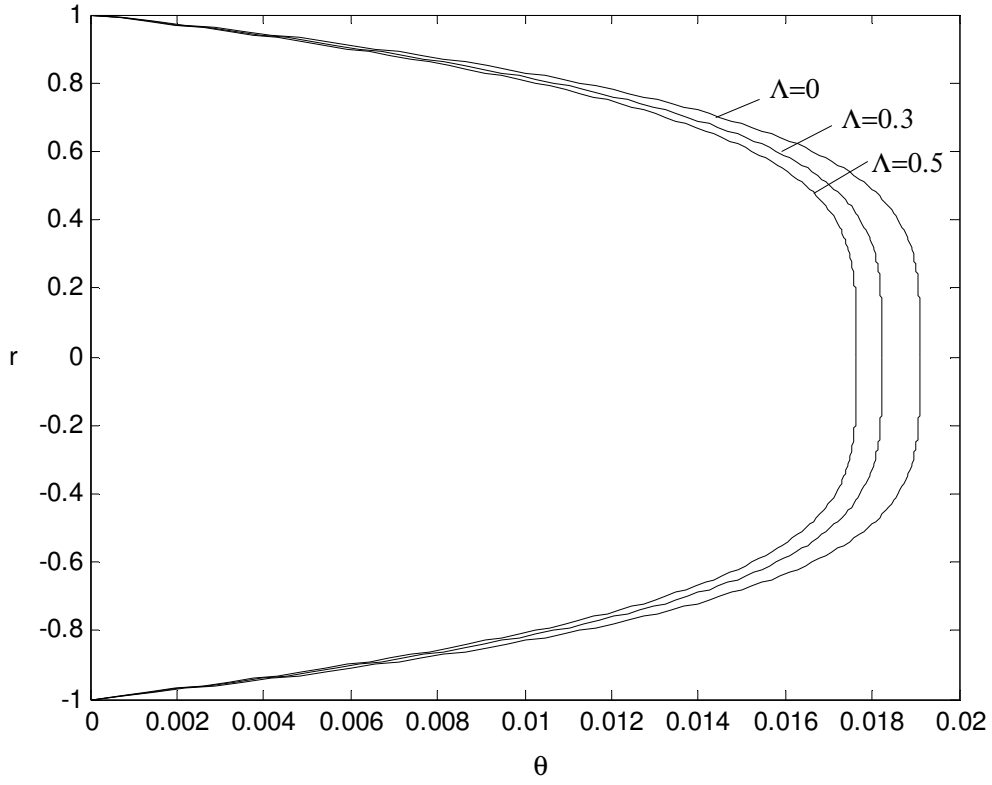
Böylelikle, genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemlerinin nümerik çözümleri sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Sonuçlardaki hata oranının düşük olması açısından merkezi fark yaklaşımı kullanılmıştır. Momentum ve enerji denklemleri sınır şartları dikkate alınarak merkezi fark denklemlerine uygulanmıştır. Elde edilen (4.21), (4.23) ve (4.24) ile denklem (4.27), (4.29) ve (4.30) Matlab Paket programına aktarılmıştır. Böylece nümerik çözümler, sonlu farklar yaklaşımıyla yazılarak Matlab programı yardımıyla çözülmüştür. Bundan sonraki bölümde üçüncü kısımda elde edilen analitik çözümler grafiksel olarak ifade edilecektir. Denklemlerdeki katsayıların hız ve sıcaklık profilleri üzerindeki etkileri gözlemlenecektir. Ayrıca, analitik ve nümerik çözümlerin karşılaştırılması yapılacaktır.

5. ANALİTİK ve NÜMERİK ÇÖZÜMLER

Bu bölümde üçüncü kısımda elde edilen hız ve sıcaklığa ait analitik çözümlerin grafiksel olarak ifadesi yer alacaktır. Analitik çözümlerin grafikleri Matlab paket programı kullanılarak elde edilmiştir. Grafikler denklemdaki sabitlerin farklı değerleri için çizilmiştir. Farklı değerlerde hız ve sıcaklık değişimi incelenmiştir. Bunun yanı sıra yine Matlab paket programı yardımıyla ve Sonlu Farklar yönteminden yararlanılarak hız ve sıcaklığa ait nümerik çözümler elde edilmiştir. Analitik ve nümerik çözümden elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapılacaktır.

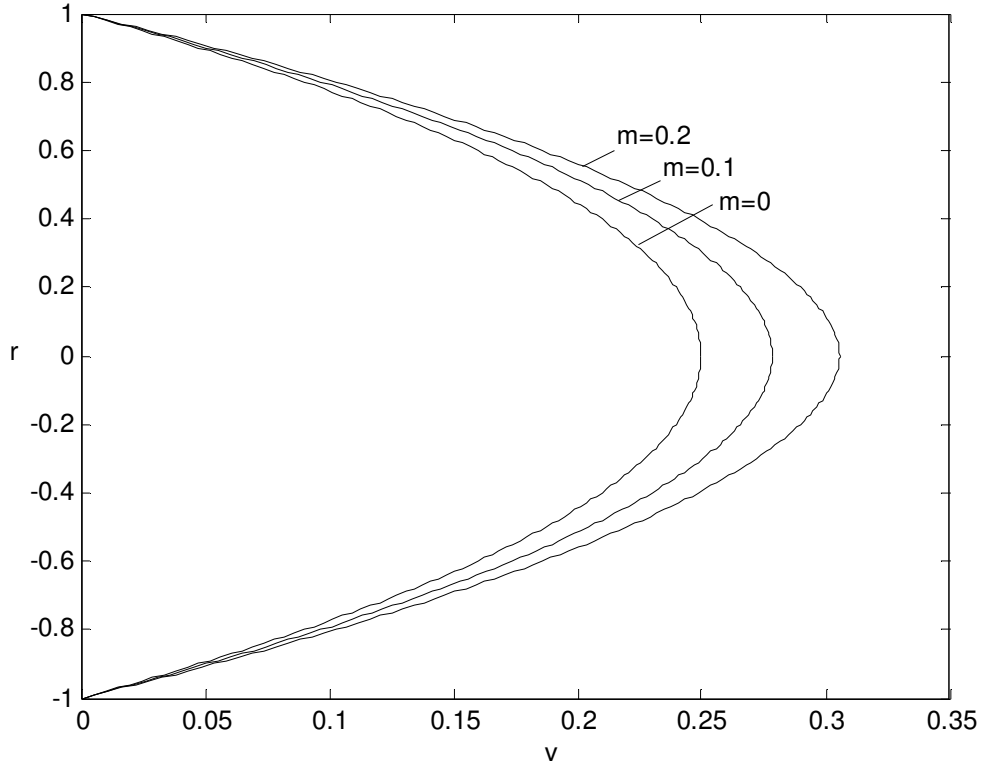


Şekil 5.1 Çeşitli Λ değerleri için hız profilleri ($m=0.2$, $\Gamma=1$, $C=-1$)

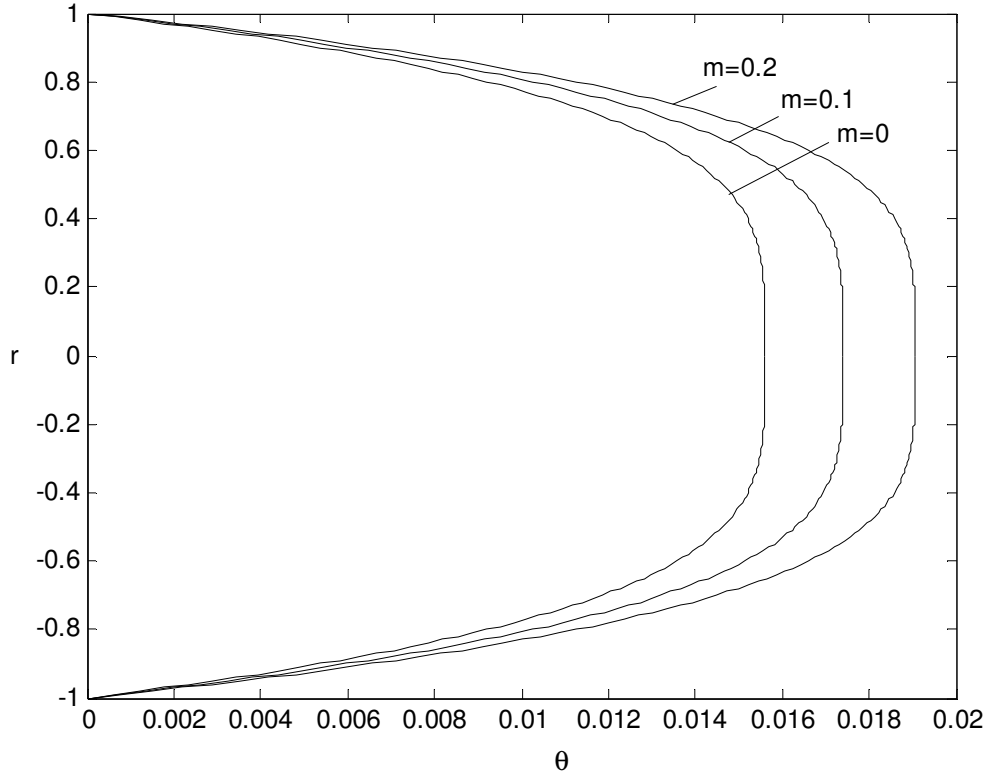


Şekil 5.2 Çeşitli Λ değerleri için sıcaklık profilleri ($m=0.2$, $\Gamma=1$, $C=-1$)

Şekil 5.1 ve Şekil 5.2’de değişik non-Newtonyen katsayıları (Λ) için hız ve sıcaklık profillerinin değişimi gösterilmiştir. $\Lambda=0$ olması akışkanın Newtonyen akışkan olduğunu belirtmektedir. Şekil 5.1’de non-Newtonyen katsayısı arttırıldığında hızın azaldığı görülmektedir. Şekil 5.2’de de non-Newtonyen katsayısı arttığında sıcaklığın azaldığı gözlemlenmektedir.

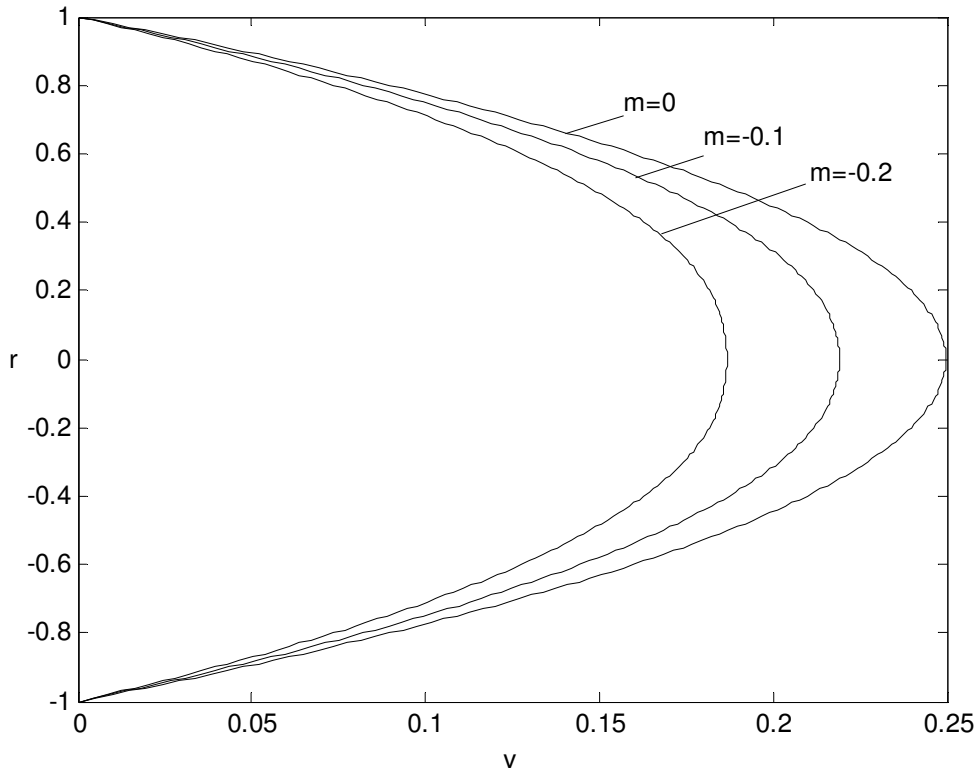


Şekil 5.3 Çeşitli pozitif m değerleri için hız profilleri ($\Lambda=0.01, \Gamma=1, C=-1$)

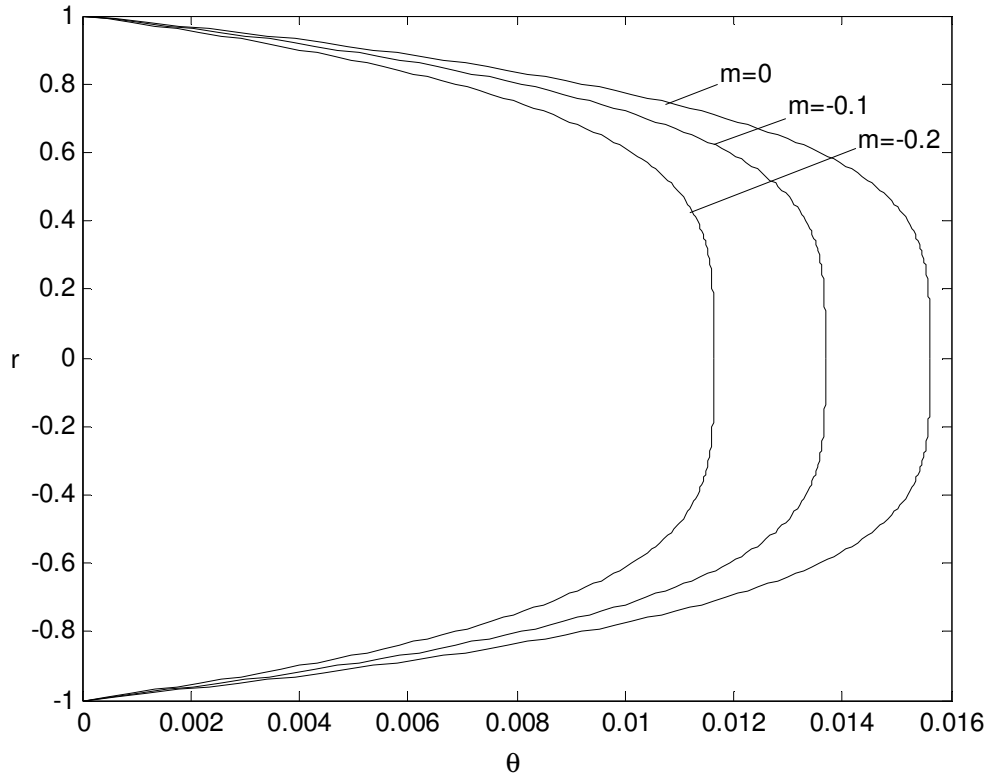


Şekil 5.4 Çeşitli pozitif m değerleri için sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01, \Gamma=1, C=-1$)

Şekil 5.3 ve 5.4'te farklı m değerlerinin pozitif olmasının hız ve sıcaklık üzerindeki etkisi verilmiştir. Buna göre; Şekil 5.3'te pozitif m değerleri arttıkça hızın da arttığı görülmektedir. Aynı şekilde, Şekil 5.4'te de sıcaklığın pozitif m değerleriyle doğru orantılı bir biçimde değişimi söz konusudur.

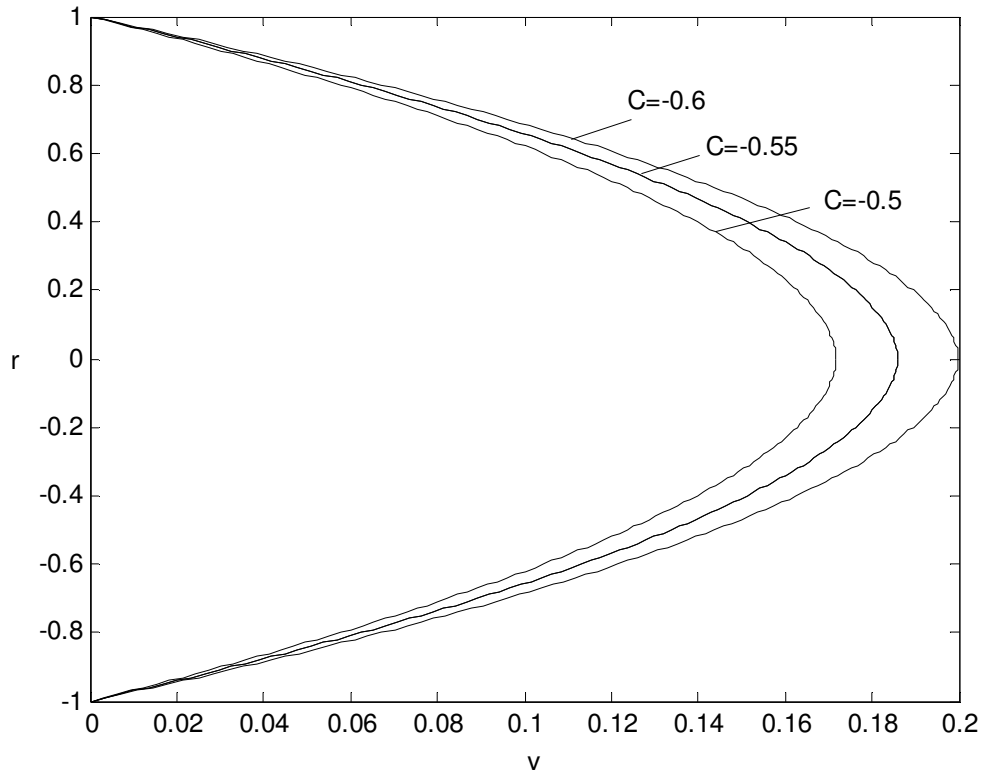


Şekil 5.5 Çeşitli negatif m değerleri için hız profilleri ($\Lambda=0.01$, $\Gamma=1$, $C=-1$)

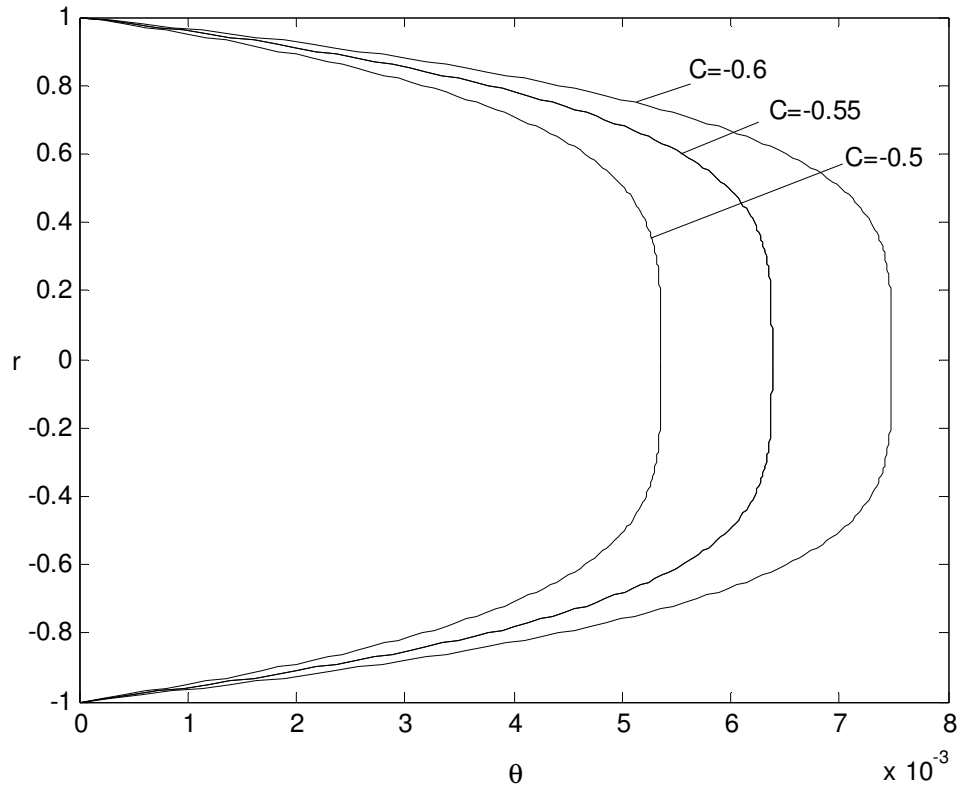


Şekil 5.6 Çeşitli negatif m değerleri için sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01$, $\Gamma=1$, $C=-1$)

Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'da değişik m değerlerinin negatif olmasının hız ve sıcaklık değişimine etkisi görülmektedir. Şekil 5.5'e göre negatif m değerleri azaldıkça hız da azalmaktadır. Şekil 5.6'yı incelediğimizde de m 'in negatif değerlerinin azalması sıcaklığı azalttığı görülmektedir.

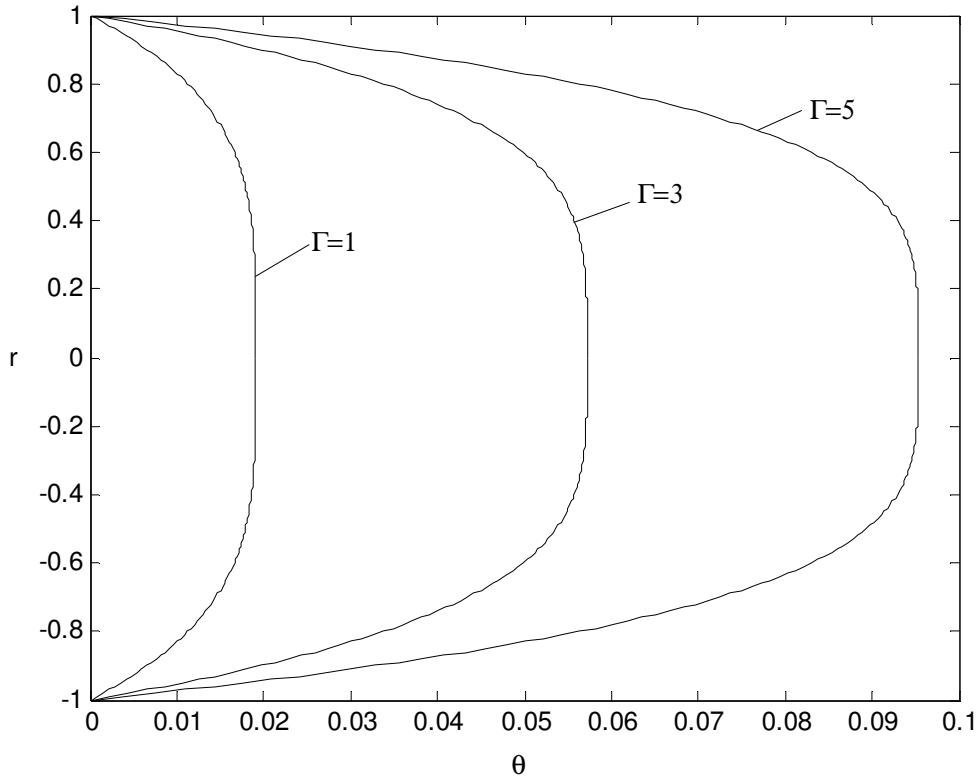


Şekil 5.7 Çeşitli C değerleri için hız profilleri ($\Lambda=0.01$, $\Gamma=1$, $m=0.2$)



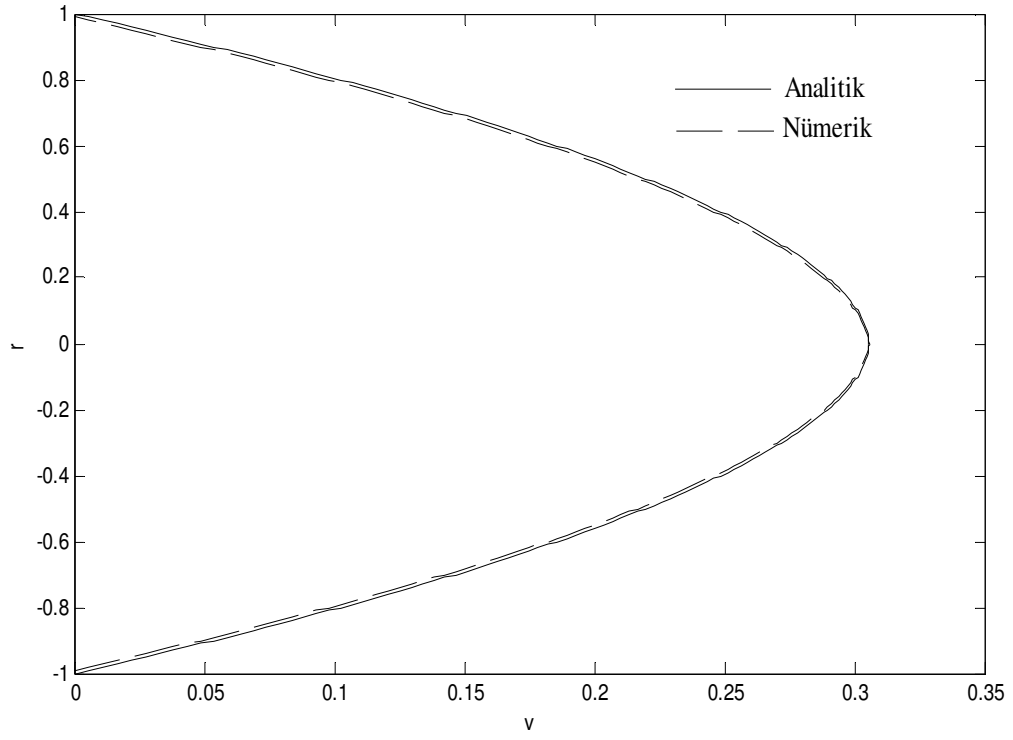
Şekil 5.8 Çeşitli C değerleri için sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01$, $\Gamma=1$, $m=0.2$)

Şekil 5.7 ve Şekil 5.8’de farklı değerlerdeki C (Basınç farkı) parametresi için hız ve sıcaklık profillerinin değişimi sırasıyla gösterilmiştir. Şekil 5.7’de C değerinin mutlak olarak artmasıyla hızın arttığı görülmektedir. Şekil 5.8’de C ’nin mutlak değerce artışının sıcaklığı da arttırdığı gözlemlenmektedir.

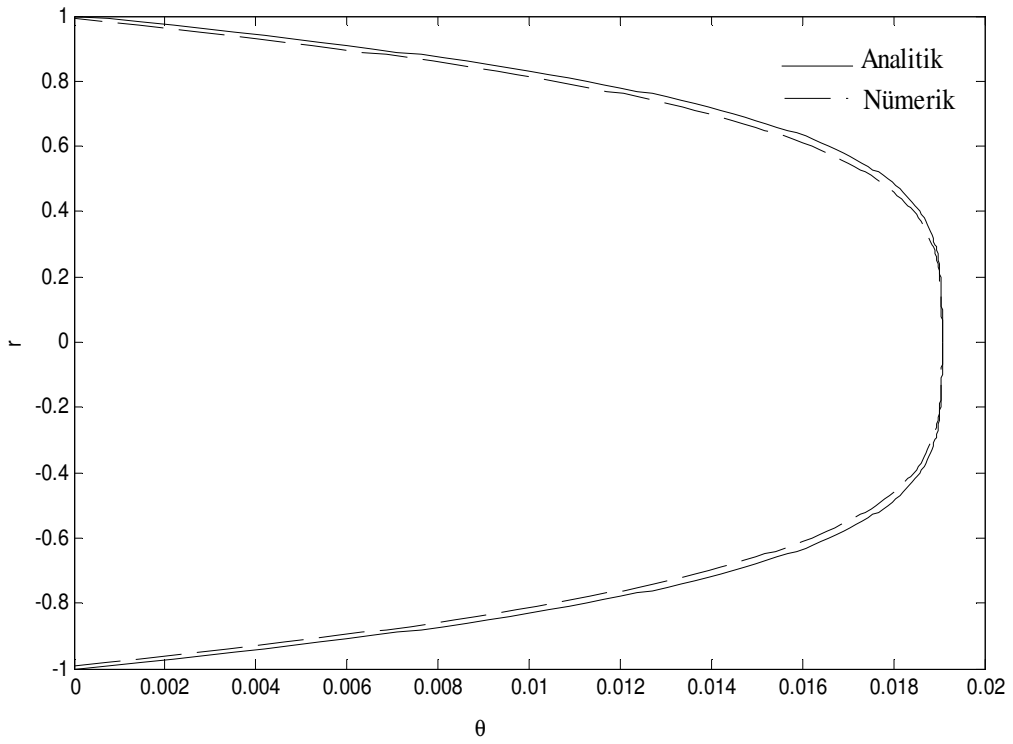


dŞekil 5.9 Çeşitli Γ değerleri için sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01$, $C=-1$, $m=0.2$)

Şekil 5.9’da değişik Γ değerlerinin sıcaklığın değişimine etkisini göstermektedir. Şekil 5.9’u incelediğimizde Γ değerinin artmasının sıcaklık değerini arttırdığı anlaşılmaktadır.



Şekil 5.10 Analitik ve nümerik hız profilleri ($\Lambda=0.01$, $C=-1$, $m=0.2$, $\Gamma=1$)



Şekil 5.11 Analitik ve nümerik sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01$, $C=-1$, $m=0.2$, $\Gamma=1$)

Şekil 5.10 ve Şekil 5.11 ise bize yaptığımız analitik ve nümerik çözümlerin karşılaştırma grafiklerini vermektedir. Nümerik çözümlerin elde edilmesinde Sonlu Farklar yöntemi ve Matlab paket programından yararlanılmıştır. Katsayı ve parametrelerin belirtilen değerleri için nümerik ve analitik çözümler grafiksel olarak belirtilmiştir. Kesik çizgilerle verilen grafik nümerik sonuçları, düz çizgilerle verilen grafik ise analitik sonuçları ifade etmektedir. Şekil 5.10 analitik ve nümerik çözümlerin hız açısından karşılaştırılması verilmiştir. Şekil 5.11’de ise sıcaklık analitik ve nümerik çözümler bakımından kıyaslanmıştır. Buna göre; her iki şekilde de sonuçların birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu da tezde yapmış olduğumuz analitik çözümlerin doğru olduğu anlamına gelmektedir.

5. SONUÇLAR

Yapılan çalışmada boru içerisindeki genelleştirilmiş üçüncü dereceden non-Newtonyen akışkan akışında hareket ve enerji değişimi incelenmiştir. İlk olarak silindirik koordinatlarda genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemleri elde edilmiştir. Denklemlerin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılmıştır. Bu denklem için boru içerisindeki akışı ifade eden sınır şartları belirlenerek çözümlerin daha genel olabilmesi için denklemler boyutsuz hale getirilmiştir. Sonuçta, silindirik koordinatlar için tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklem sistemleri elde edilmiştir. Bu denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümleri yapılmıştır. Denklemlerin analitik çözümü için bir perturbasyon metodu olan yaya açılımı kullanılmıştır. Yaya açılımı yapılarak hız ve sıcaklık profillerine ait denklemler Newtonyen ve non-Newtonyen kısımlara ayrılmıştır. Öncelikle Newtonyen kısmın, daha sonra da non-Newtonyen kısmın çözümleri yapılmıştır. Çözümlerde viskozite değeri sabit olarak kabul edilmiştir. Analitik çözümlerin yanı sıra nümerik çözümler de yapılmıştır. Nümerik çözümlerin elde edilmesinde sonlu farklar metodu kullanılmıştır. Hata oranının az olması sebebiyle sonlu fark yaklaşımlarından merkezi farklardan yararlanılmıştır. Nümerik çözümler, 100 düğüm için h değeri 0.01 alınarak elde edilmiştir. Elde edilen denklemler Matlab paket programı yardımıyla çözülmüştür. Son olarak elde edilen analitik çözümler grafiksel olarak açıklanmıştır. Denklemlerdeki katsayıların değişiminin hız ve sıcaklık üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Ayrıca, analitik ve nümerik çözümler grafiksel olarak karşılaştırılmıştır.

Yapılan çalışmalar neticesinde non-Newtonyen parametre (Λ) arttığında hız ve sıcaklık değerinin azaldığı gözlemlenmiştir. m sabitinin pozitif değerinin artırılmasını ile hız ve sıcaklığın da doğru orantılı olarak arttığı görülmektedir. m sabitinin negatif olması durumu incelenmiştir. Negatif m değerlerinin azalması hız ve sıcaklık değerlerini düşürmektedir. C (basınç farkı) değerindeki artışın hızı ve sıcaklığı arttırdığı görülmektedir. Γ (Brinkman sayısı)'nın artması hızın değerini değiştirmemektedir. Sıcaklık ise Γ arttığı müddetçe artmaktadır.

KAYNAKLAR

Akgül M.B., Elektroosmotik Kuvvetin Etkisi Altındaki Mikrokanallarda Üçüncü Derece Akışkanların İncelenmesi, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2008.

Cengel Y. A., Cimbala J.M., Akışkanlar Mekaniği Temelleri ve Uygulamaları, Güven Bilimsel Kitapevi, 2008.

Gupta R. C., On developing laminar non-Newtonian flow in pipes and channel, nonlinear Analysis: Real World Applications 2 (2001) 171 – 193.

Kurt B.B., Zaman Ortamında Sonlu Farklar Yöntemi İle İki Boyutlu Yer Radarı Modellemesi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009.

Malin, M. R., Turbulent pipe flow of power-law fluids, Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 24, No. 7, (1997) 977-988.

Massoudi M., Christie I., Effects of variable viscosity and viscous dissipation on the flow of a third grade fluid in a pipe, 1995.

Sogukoglu M., Akışkanlar Mekaniği, Fatih Ofset Yayınevi, 1995.

Türker E. S., Can E., Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz, Değişim Yayınları.

Wang Y., Chukwu G. A., Application of unsteady couette flow of non-Newtonian Power Law fluids in concentric annular wellbore, Journal of Petroleum Science and Engineering 17 (1997) 229-235.

White F. M., Fluid Mechanics, McGraw-Hill Book Company.

Yılmaz S., Non-Newtonyen Akışkanlarda Paralel İki Levha Arasındaki Akışın İncelenmesi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2008.

Yurusoy M., Pakdemirli M., Lubrication of a slider bearing with a special third-grade fluid, Applied Mechanics and Engineering, 1999.

Yurusoy M., Pakdemirli M., Approximate analytical solutions for the flow of a third grade fluid in a pipe, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Emine CERYAN
Doğum Yeri	KARABÜK
Doğum Tarihi	18/11/1986
Medeni Hali	BEKAR
Yabancı Dili	İNGİLİZCE
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	Avcılar 50.Yıl İnsa Lisesi (YDA)
Lisans	Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi Mak. Res. ve Konst. Öğr. (2004-2008)
Yüksek Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Makine Eğitimi Anabilim Dalı (2008-2010)

EK-1 Nümerik Çözümlerin Matlab Programına Aktarılması için Oluşturulan M-File Dosyası

```
clear all

L=0.01;
m=0.2;
a=0.0001;
b=-0.0001;
C=1;
A=1;

f0=[0:1/98:1 0:1/98:1];

options=optimset('Display','iter','TolFun',1e-
3,'MaxFunEvals',1e8,'MaxIter',40,'TolX',1e-
3,'LargeScale','on','PrecondBandWidth',inf);
[f,fval,exitflag,output,JAC] = fsolve(@emine,f0,options,L,m,a,b,A,C);

for i=1:100
    T1(1,i)=f(1,i);
end

T1(1,100)=0;

T11(1,1)=0;

for i=1:99
    T11(1,i+1)=T1(1,100-i);
end

for i=100:198
    T2(1,i-99)=f(1,i);
end

T2(1,100)=0;

T22(1,1)=0;

for i=1:99
    T22(1,i+1)=T2(1,100-i);
end

r=0:0.01:1;
r1=-1:0.01:0;
V=((m+1)*(C)^(1/(m+1))*((abs(r.^((m+2)/(m+1))))-
1))/((m+2)*2^(1/(m+1)))-L*(C)^(3/(m+1))*((abs(r.^((m+4)/(m+1))))-
1)/((m+4)*8^(1/(m+1)));
Q=(A*(C^((m+2)/(m+1)))*(1-
abs(r.^4))*((m+1)/(3*m+4))^2/(2^((m+2)/(m+1)))-
(L*A*(C^((m+4)/(m+1)))*(1-
abs(r.^((3*m+6)/(m+1))))*((m+1)/(3*m+6))^2/(2^((m+4)/(m+1)))));
```

```

t1=0:0.01:0.99;

t2=-0.99:0.01:0;

for i=1:101
    M(1,i)=V(1,102-i);
end

for i=1:101
    M1(1,i)=Q(1,102-i);
end

figure(1)
plot(-T1,t1,'--k',-T11,t2,'--k')
hold on
plot(-V,r,'k',-M,r1,'k')
hold on

figure(2)
plot(T2,t1,'--k',T22,t2,'--k')
hold on
plot(Q,r,'k',M1,r1,'k')
hold on

```