

**WE NGARTEN YÜZEYLER
ÜZER NE**

DOKTORA TEZ

Özgür KALKAN

**DANI MAN
Yrd. Doç. Dr. Derya SA LAM
Prof. Dr. Rafael LOPEZ**

**MATEMAT K ANAB L M DALI
MAYIS 2010**

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**WEINGARTEN YÜZEYLERİ
ÜZERİNE**

Özgür KALKAN

DANIŞMAN

**Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM
Prof. Dr. Rafael LOPEZ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2010

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM ve Prof. Dr. Rafael LOPEZ (ikinci danışman) danışmanlığında Özgür KALKAN tarafından hazırlanan "Weingarten Yüzeyleri Üzerine" başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 11.05.2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof. Dr. Yusuf YAYLI	
Danışman	Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM	
Üye	Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE	
Üye	Doç. Dr. Nejat EKMEKÇİ	
Üye	Doç. Dr. Kazım İLARSLAN	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve
...../..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

WEINGARTEN YÜZEYLERİ ÜZERİNE

ÖZGÜR KALKAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM

Prof. Dr. Rafael LOPEZ

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, E^3 ve E_1^3 de paralel lineer Weingarten yüzeyleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, E_1^3 Minkowski uzayında yüzeyin ortalama eğriliği H , Gauss eğriliği K ve a, b, c sabit sayılar olmak üzere $aH + bK = c$ bağıntısını sağlayan spacelike ve timelike dönel yüzeyler sınıflandırılmıştır. Beşinci bölümde, E_1^3 Minkowski uzayında $aH + bK = c$ bağıntısını sağlayan çember parçalarının foliasyonu ile elde edilen spacelike cyclic yüzeyler incelenmiştir.

2010, 110 sayfa

ANAHTAR KELİMELEER: Weingarten yüzeyleri, lineer Weingarten yüzeyleri, paralel yüzeyler, dönel yüzeyler, cyclic yüzeyler.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ON WEINGARTEN SURFACES

ÖZGÜR KALKAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Derya SAĞLAM

Prof. Dr. Rafael LOPEZ

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provides a general knowledge of literature. In the second chapter, we have given about the basic concepts needed. In the third chapter, in E^3 and E_1^3 parallel linear Weingarten surfaces are examined. In the fourth chapter, spacelike and timelike surfaces of revolution in Minkowski space that satisfy $aH + bK = c$, where a, b, c are constants, H and K denote the mean curvature and Gauss curvature are classified. In the fifth chapter, spacelike surfaces in Minkowski space E_1^3 foliated by pieces of circles and that satisfy $aH + bK = c$ are examined.

2010, pages 110

KEY WORDS : Weingarten surfaces, linear Weingarten surfaces, parallel surfaces, surface of revolution (rotational surfaces), cyclic surfaces.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM (Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)'a, engin bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, ufkumu genişleten ikinci danışmanım Sayın Prof. Dr. Rafael LOPEZ (Granada Üniversitesi Topoloji ve Geometri Bölümü)'e, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya ve desteğini hiç esirgemeyen Bölüm Başkanım Sayın Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE (Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen sevgili Aileme, gösterdiği sabır ve anlayışla her zaman yanımda olan sevgili eşim Oğuzhan KALKAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Özgür KALKAN

SİMGELER DİZİNİ

E^3	Öklid Uzayı
E_1^3	3 – boyutlu Minkowski uzayı
\langle, \rangle	Lorentz metriği
$\ , \ $	Norm fonksiyonu
\mathcal{C}	E_1^3 uzayının ışık konisi
\mathcal{T}	E_1^3 uzayının zaman konisi
R_θ	Lorentz hareketlerinin grubunun matrisi
$T_p M$	M yüzeyinin p noktasındaki teğet düzlemi
I	Birinci temel form
II	İkinci temel form
D	E_1^3 üzerindeki koneksiyon
∇	M yüzeyi üzerindeki koneksiyon
S	Yüzeyin şekil operatörü
K	Yüzeyin Gauss eğriliği
H	Yüzeyin ortalama eğriliği
N	Yüzeyin birim normal vektör alanı
$[,]$	E^3 de determinant fonksiyonu
$X(u, v)$	Yüzeyin parametrik denklemi
$r(u)$	Foliasyonun u – çemberlerinin yarıçapı
$c(u)$	Foliasyonun u – çemberlerinin merkezi
Γ	N vektör alanının bir integral eğrisi
$H^{2,1}(r, p_0)$	r yarıçaplı ve p_0 merkezli pseudohiperbolik yüzey
$S^{2,1}(r, p_0)$	r yarıçaplı ve p_0 merkezli pseudoküre

İÇİNDEKİLER

TEZ JÜRİSİ VE ENSTİTÜ ONAYI	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
İÇİNDEKİLER	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1. E_1^3 Minkowski Uzayının İzometrilere.....	12
2.2. E_1^3 Minkowski Uzayında Eğriler.....	17
2.2.1. Eğrilik, Burulma ve Frenet Formülleri.....	18
2.3. E_1^3 Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike yüzeyler.....	20
3. E^3 VE E_1^3 DE PARALEL LİNEER WEİNGARTEN YÜZEYLERİ	26
3.1. E^3 de Paralel Yüzeyler.....	26
3.2. E^3 de Paralel Lineer Weingarten Yüzeyleri.....	28
3.3. E_1^3 de Paralel Yüzeyler.....	34
3.4. E_1^3 de Paralel Lineer Weingarten Yüzeyleri.....	40
4. E_1^3 DE $aH + bK = c$ BAĞINTISINI SAĞLAYAN NON-DEJENERE DÖNEL YÜZEYLER	47
4.1. E_1^3 de Dönel Yüzeyler.....	47
4.2. Ekseni Timelike Olan Dönel Yüzeyler.....	50
4.3. Ekseni Spacelike Olan Dönel Yüzeyler.....	52
4.4. Ekseni Lightlike Olan Dönel Yüzeyler.....	55
5. E_1^3 DE ÇEMBERLERİN FOLİASYONU İLE ELDE EDİLEN LİNEER WEİNGARTEN YÜZEYLERİ	59
KAYNAKLAR	106
ÖZGEÇMİŞ	110

1 GİRİŞ

Yüzey teorisinde Weingarten yüzeyleri önemli bir yere sahiptir. Yüzeyin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H arasında $W(K, H) = 0$ veya yüzeyin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 arasında $U(k_1, k_2) = 0$ olacak biçimde bir bağıntı varsa yüzeye Weingarten yüzeyi denir. Bu yüzeyler ilk olarak Weingarten tarafından 1861 ve 1863 yıllarında yapmış olduğu çalışmalarda tanımlanmıştır. Weingarten, çalışmalarında bir dönel yüzeye izometrik olan tüm yüzeylerin sınıflarını vererek bu alanda önemli bir ilerleme kaydetmiştir. Bu sebeple daha sonraki yıllarda sabit ortalama eğrilikli veya sabit Gauss eğrilikli yüzeyler Weingarten yüzeyleri olarak adlandırılmıştır ve bu yüzeyler yüzey teorisi ile ilgilenen bir çok bilim adamının ilgisini çekmiştir. İlerleyen yıllarda bu yüzeylere ait ilk çalışmalar 1945’de Chern, 1951’de Hopf tarafından yapılmıştır. Biraz daha yakın tarihe bakacak olursak 2003’de Galvez ve 2005’de Kühnel tarafından yapılan çalışmalar örnek olarak verilebilir. Brunt ve Grant’ın 1996 yılında yapmış olduğu çalışmada ise Weingarten yüzeylerinin bilgisayar destekli uygulamaları yer almaktadır.

Özel olarak a, b ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$ak_1 + bk_2 = c \quad \text{veya} \quad aH + bK = c$$

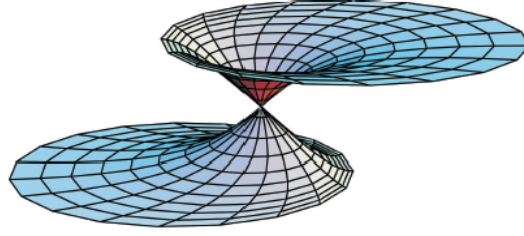
lineer bağıntılarından birini sağlayan yüzey lineer Weingarten yüzeyi olarak adlandırılır. Lineer Weingarten yüzeylerinin ilk örnekleri umbilik yüzeyler, sabit ortalama eğrilikli ($b = 0$) ve sabit Gauss eğrilikli ($a = 0$) yüzeylerdir. Literatürde bu yüzeylerle ilgili bir çok çalışma bulunmasına rağmen genel durumda lineer Weingarten yüzeylerinin sınıflandırması halen açık bir problemdir.

E^3 de düzgün bir parametrelili çember parçalarının ailesi ile tanımlanan yüzeye cyclic yüzey denir. Yani cyclic yüzey, çember parçalarının foliasyonu ile elde edilen yüzeydir. Cyclic yüzeylerin en iyi bilinen örneklerinden birisi dönel yüzeylerdir. 1785’de Meusnier, E^3 de bulunan tek minimal dönel yüzeyin katenoid olduğunu ispatlamıştır. Delaunay ise 1841’de sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip dönel yüzeyleri sınıflandırmıştır. 1868’de Riemann, paralel düzlemlerde çemberlerin foliasyonu ile elde edilen minimal

yüzeylerin ailesini elde etmiştir. Bundan sonra 1869'da Enneper tarafından yapılan çalışmada, çemberlerin foliasyonu ile elde edilen bir minimal yüzeyin foliasyon düzlemlerinin paralel olması gerektiği ve bu durumda yüzeyin bir katenoid veya minimal yüzeylerin Riemann örneklerinden birisi olduğu ispatlanmıştır. Nische ise E^3 de çember parçalarının foliasyonu ile elde edilen sıfırdan farklı sabit bir ortalama eğriliğe sahip bir yüzeyin foliasyon düzlemlerinin paralel olduğunu elde etmiştir. Ayrıca yüzeyin bir dönele yüzey olduğunu ve 1841 yılında Delaunay tarafından verilen yüzey örneklerinden birisi olduğunu ispatlamıştır (Nische^[1] 1989). Keyfi boyutta kürelerin foliasyonu ile elde edilen minimal hiperyüzeyler Jagy tarafından incelenmiştir. 1991 yılında Jagy tarafından yapılan çalışmada 3- boyutlu uzayda olduğu gibi yüzeyin bir dönele yüzey yani genelleştirilmiş katenoid olduğu gösterilmiştir.

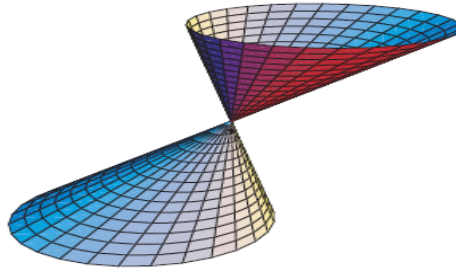
E_1^3 de yüzeyin ortalama eğriliği sıfır ($H = 0$) ise yüzey maksimal yüzey olarak adlandırılır. Minkowski uzayında maksimal yüzeyler ile Öklid uzayında minimal yüzeyler bazı benzer özelliklere sahiptir. Örneğin maksimal yüzeylerin Weierstrass gösterimi hemen hemen minimal yüzeylerde olduğu gibi kabul edilir. İlk olarak 1983'de E_1^3 de maksimal dönele yüzeyleri Kobayashi incelemiştir. 1984'de Hano ve Nomizu, E_1^3 de sabit ortalama eğrilikli dönele yüzeyleri sınıflandırmışlardır. 2000'de Lopez R., Lopez F. J. ve Souam R. yapmış oldukları çalışmada ise çemberlerin foliasyonu ile elde edilen spacelike maksimal yüzeyleri sınıflandırmışlardır. Çalışmalarında foliasyon düzlemlerinin kesinlikle paralel olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca 1983'de Kobayashi tarafından verilen dönele yüzey örneklerinin yanında Öklid uzayındaki Riemann yüzeyleri ile aynı özellikleri gösteren çemberlerin foliasyonu ile elde maksimal yüzey örneklerinin bulunduğunu ispatlamışlardır. 2000'de Lopez tarafından yapılan diğer bir çalışmada ise E_1^3 de tüm timelike maksimal cyclic yüzeyler sınıflandırılmıştır. Sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip bir yüzey için durum maksimal yüzeyden farklıdır. 1999'da Lopez bir çalışmasında sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip yüzeyler için foliasyon düzlemleri spacelike ise düzlemlerin paralel olduğunu ve aynı zamanda yüzeylerin dönele yüzey olduğunu ispatlamıştır. Çemberlerin bulunduğu düzlemlerin timelike veya lightlike olduğu durumlar için çemberler tarafından oluşturulan sabit ortalama eğrilikli dönele

yüzey dışında yüzey örnekleri verilmiştir (Lopez^[2] 1999).



Şekil 1.1. E_1^3 de $H = 0$ ortalama eğrilikli foliasyon düzlemleri paralel olan dönel yüzey dışında bir spacelike cyclic yüzey örneği

Lopez 2001'de yaptığı bir çalışmada, E^3 de sabit Gauss eğrilikli bir yüzey, çember parçalarının foliasyonu ile elde ediliyorsa bu yüzeyin kürenin bir altkümesi olduğunu veya yüzeyin foliasyon düzlemlerinin paralel olduğunu ispatlamıştır. Foliasyon düzlemlerinin paralel olması durumunda K sıfırdan farklı bir sabit ise yüzey bir dönel yüzeydir, $K = 0$ ise yüzey bir genelleştirilmiş konidir (Lopez^[2] 2001). E_1^3 de sabit Gauss eğrilikli yüzeyler için sınıflandırma yine Lopez tarafından yapılmıştır. Çalışmada sabit Gauss eğrilikli dönel yüzeyler ve sabit Gauss eğrilikli cyclic yüzeyler incelenmiştir (Lopez 2003).



Şekil 1.2. E_1^3 de $K = 0$ Gauss eğrilikli foliasyon düzlemleri paralel olan dönel yüzey dışında bir spacelike cyclic yüzey örneği

Lopez 2008'de yaptığı bir çalışmasında daha önce E^3 de yapılan çalışmaların daha genel bir halini incelemiştir. E^3 de $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a^2 + b^2 \neq 0$ olmak üzere

$$aH + bK = c$$

bağıntısını sağlayan lineer Weingarten yüzeyleri çalışmıştır. $c = 0$ ve $c \neq 0$ için "Dönel yüzeylerin yanında başka cyclic lineer Weingarten yüzeyler var mıdır?" sorusunun cevabını aramıştır. Çalışmasında iki önemli teorem bulunmaktadır. Birincisi, bir parametrelili düzlemlerin ailesi içinde bulunan çember parçalarının foliasyonu ile elde edilen bir lineer Weingarten yüzeyin ya bir kürenin altkümesi olduğu ya da foliasyon düzlemlerinin paralel olduğu ispatlanmıştır. İkincisi ise bir parametrelili paralel düzlemlerin ailesi içinde bulunan çember parçalarının foliasyonu ile elde edilen bir lineer Weingarten yüzeyin ya bir dönel yüzeyin parçası olduğu ya Riemann minimal yüzey ($H = 0$) örneklerinin bir parçası olduğu ya da genelleştirilmiş koninin ($K = 0$) bir parçası olduğu ispatlanmıştır. Bunların yanında sonuç olarak dönel yüzey hariç $aH + bK = c$ bağıntısını sağlayan cyclic yüzeylerin, minimal yüzeylerin Riemann örnekleri ve genelleştirilmiş koniler olduğu verilmiştir (Lopez^[3] 2008).

Lopez tarafından 2008 yılında yapılan diğer bir çalışmada ise E^3 de $m, n \in \mathbb{R}$ ve yüzeyin asli eğrilikleri k_1, k_2 olmak üzere

$$k_1 = mk_2 + n$$

bağıntısını sağlayan lineer Weingarten yüzeyleri ele alınmıştır. Bu çalışmada $(m, n) = (m, 0)$ olmak üzere bir cyclic lineer Weingarten yüzeyin foliasyon düzlemlerinin paralel olduğu kısaca yüzeyin Riemann tipli olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca bir Riemann tipli lineer Weingarten yüzeyin ya bir dönel yüzey ya da minimal yüzeylerin klasik Riemann örnekleri olduğu gösterilmiştir (Lopez^[1] 2008). Burada belirtelim ki umbilik yüzeyler $(m, n) = (1, 0)$ veya sabit ortalama eğrilikli yüzeyler ($m = -1$) birer lineer Weingarten yüzeyidir.

İkinci bölümde, 3–boyutlu Minkowski uzayı için temel kavramlar ve E_1^3 Minkowski uzayının izometrilere, E_1^3 Minkowski uzayında eğriler ve yüzeyler ile ilgili bazı temel özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, E^3 Öklid uzayında ve E_1^3 Minkowski uzayında bir M yüzeyinin lineer Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter koşulun bu yüzeyin paraleli olan

M_r yüzeyinin de lineer Weingarten yüzeyi olması gerektiği gösterilmiştir. Bir lineer Weingarten yüzeyin tipi $\Delta := a^2 + 4bc$ diskriminantının işaretine bağlıdır. Eğer $\Delta < 0$ ise M yüzeyi hiperbolik, $\Delta > 0$ ise M yüzeyi eliptik olarak adlandırılır. $\Delta = 0$ ise M yüzeyi bir tubular yüzeydir (Lopez^[1] 2008). Bu tanımdan yararlanılarak (M, M_r) yüzey çiftinin r uzaklığına göre tiplerini belirten teoremler ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde, E_1^3 Minkowski uzayında $aH + bK = c$ bağıntısını sağlayan spacelike ve timelike dönel yüzeyler incelenmiştir. Yüzeyin dönme ekseninin causal karakterine bağlı olarak dönel yüzeyler sınıflandırılmıştır.

Tez çalışmamızın asıl kısmını oluşturan beşinci bölümde $aH + bK = c$ bağıntısını sağlayan spacelike cyclic yüzeyler incelenmiştir. E_1^3 de foliasyon düzlemleri paralel olan bir M spacelike cyclic yüzey, lineer Weingarten yüzeyi ise M nin aşağıda verilen yüzeylerden birisi olduğu ispatlanmıştır.

1. M bir dönel yüzeydir.
2. M , maksimal yüzeylerin Riemann örneklerinden birisidir.
3. M , $K = 0$ şartını sağlayan yüzey örneklerinden birisidir.

Ayrıca bir M spacelike cyclic yüzey, lineer Weingarten yüzeyi ise M nin ya bir pseudo-hiperbolik yüzey olduğu ya da foliasyon düzlemlerinin paralel olduğu gösterilmiştir.

2 Temel Kavramlar

Tanım 2.1. $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$$

metriği ile verilen $E_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ metrik uzayına Lorentz-Minkowski uzayı denir. \langle, \rangle metriği de Lorentz metriği olarak adlandırılır.

Aynı zamanda $E_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ metrik uzayı Minkowski uzayı ve \langle, \rangle metriği de Minkowski metriği olarak da adlandırılır. \langle, \rangle Minkowski metriği indeksi 1 olan non-dejenere bir metriktir. Ayrıca

$$\langle u, v \rangle = u^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} v = u^t G v$$

yazılabilir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.2. Bir $v \in E_1^3$ vektörü için;

- (i) $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne spacelike (uzaysı) vektör,
- (ii) $\langle v, v \rangle < 0$ ise v vektörüne timelike (zamansı) vektör,
- (iii) $\langle v, v \rangle = 0$ ise v vektörüne lightlike veya null (ışıksı) vektör denir (O'Neill 1983,

Duggal ve Bejancu 1996).

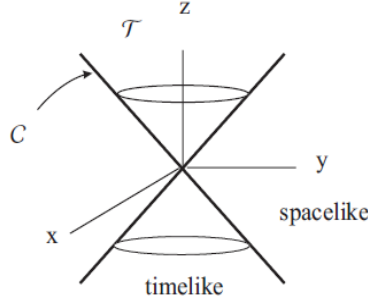
Burada belirtelim ki $v = 0$ vektörü için $\langle v, v \rangle = 0$ olmasına rağmen bu vektör spacelike vektördür.

Tanım 2.3. E_1^3 Minkowski uzayı olmak üzere;

(i) $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in E_1^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$ şeklinde tanımlı \mathcal{C} kümesine E_1^3 in ışık konisi,

(ii) $\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in E_1^3; x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$ şeklinde tanımlı \mathcal{T} kümesine E_1^3 in

zaman konisi denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).



Şekil 2.1. Minkowski uzayında causal karakter

Tanım 2.4. $u, v \in E_1^3$ için $u \neq 0$ ve $v \neq 0$ olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise, bu durumda u ve v vektörlerine ortogonal vektörler denir $u \perp v$ şeklinde gösterilir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.5. $E_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ Minkowski uzayı ve $U \subset \mathbb{R}^3$ olsun. U üzerinde indirgenmiş metrik \langle, \rangle_U olmak üzere

- (i) \langle, \rangle_U pozitif tanımlı ise U altuzayına spacelike,
- (ii) \langle, \rangle_U metriğinin indeksi 1 ve nondejenere ise U altuzayına timelike,
- (iii) \langle, \rangle_U dejenere ve $U \neq 0$ ise U altuzayına lightlike denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

$U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in U\}$ cümlesine de U nun dik uzayı denir. (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Önerme 2.1. U , skalar çarpımlı bir V vektör uzayının alt uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

- (i) $\text{boy}U^\perp = \text{boy}V - \text{boy}U$.
- (ii) $(U^\perp)^\perp = U$.
- (iii) U non-dejenere altuzay ise U^\perp de non-dejenere altuzaydır (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Şimdi causal karaktere bağlı olarak altuzayların karakterizasyonlarını verelim.

Önerme 2.2. $v \in E_1^3$ ve $U \subset E_1^3$ olmak üzere

(i) v vektörünün timelike vektör olması için gerek ve yeter koşul $\langle v \rangle^\perp$ düzleminin spacelike olmasıdır. Dolayısıyla $E_1^3 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$ olur. v nin spacelike vektör olması için gerek ve yeter koşul ise $\langle v \rangle^\perp$ düzleminin timelike olmasıdır.

(ii) U altuzayının spacelike olması için gerek ve yeter koşul U^\perp in timelike olmasıdır.

(iii) U altuzayının lightlike olması için gerek ve yeter koşul U^\perp in lightlike olmasıdır (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Önerme 2.3. $u, v \in E_1^3$ olsun.

(i) u ve v vektörleri lightlike vektörler ise $\langle u, v \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter koşul u ve v nin lineer bağımlı vektörler olmasıdır.

(ii) u ve v vektörleri $\langle u, v \rangle = 0$ şartını sağlayan timelike veya lightlike vektörler ise u ve v lightlike vektörlerdir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Önerme 2.4. $U \subset E_1^3$ iki boyutlu bir altuzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermelerdenktir:

(i) U timelike altuzaydır.

(ii) U da lineer bağımsız iki lightlike vektör vardır.

(iii) U da bir timelike vektör vardır (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

İspat (i \Rightarrow ii) $\{e_1, e_2, e_3\}$, E_1^3 in ortonormal tabanı olsun. Bu durumda $e_1 + e_2$ veya $e_2 - e_3$ lineer bağımsız lightlike vektörlerdir.

(ii \Rightarrow iii) u ve v lineer bağımsız lightlike vektörler ise

$$\langle u \pm v, u \pm v \rangle = \pm 2 \langle u, v \rangle$$

$\langle u, v \rangle \neq 0$ olduğundan $u + v$ veya $u - v$ timelike vektördür.

(iii \Rightarrow i) v , U da timelike vektör olsun. Bu durumda $U^\perp \subset \langle v \rangle^\perp$ ve $\langle v \rangle^\perp$ spacelike düzlem olduğundan U^\perp de spacelike olur. Dolayısıyla U timelike altuzaydır.

Tanım 2.6. $u \in E_1^3$ vektörü verilsin. $\sqrt{|\langle u, u \rangle|}$ sayısına u vektörünün normu denir ve $\|u\|$ ile gösterilir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Şimdi timelike vektörler için Cauchy-Shwartz eşitsizliğini verelim. Bu eşitsizlik iki timelike vektör arasındaki açıyı tanımlamamızı sağlar.

Teorem 2.1. u ve v timelike vektörler olsun. Bu takdirde

$$|\langle u, v \rangle| \geq \sqrt{-\langle u, u \rangle} \sqrt{-\langle v, v \rangle}$$

dir ve eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul u ve v vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır. u ve v vektörleri aynı zaman konisi içinde ise

$$\langle u, v \rangle = -|u||v| \cosh \varphi$$

olacak biçimde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. φ sayısına u ve v vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Sonuç 2.1. u, v aynı zaman konisinde yatan iki timelike vektör olsun. Bu takdirde

$$|u + v| \geq |u| + |v|$$

dir ve eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul u ve v vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır (Lopez^[4] 2008).

Tanım 2.7. u ve v , E_1^3 uzayının vektörleri olsun. $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere

$$u \times v = (-(u_2v_3 - u_3v_2), -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1)$$

eşitliğiyle belirli $u \times v$ vektörüne u ile v nin vektörel çarpımı denir (Lopez^[4] 2008).

$i \in \{1, 2, 3\}$ için $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ olmak üzere,

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

determinantı açılarak $e_1, e_2, -e_3$ vektörlerine göre düzenlenirse elde edilen vektörün $u \times v$ vektörüne eşit olduğu kolayca görülür (Lopez^[4] 2008).

Tanım 2.8. $u, v, w \in E_1^3$ olmak üzere $\langle u \times v, w \rangle$ sayısına u, v, w vektörlerinin karma çarpımı denir (Lopez^[4] 2008).

Önerme 2.7. $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$ dir (Lopez^[4] 2008).

Önerme 2.8. $u, v \in E_1^3$ olmak üzere

(i) $\forall u, v \in E_1^3, u \times v = -v \times u.$

(ii) $u \times v$ vektörü u ve v vektörlerine diktir.

(iii) $u \times v = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\{u, v\}$ nin lineer bağımlı olmasıdır.

(iv) $u \times v \neq 0$ vektörünün $P = \langle u, v \rangle$ düzleminde olması için gerek ve yeter koşul P düzleminin lightlike olmasıdır (Lopez^[4] 2008).

Şimdi zaman yönlendirmesi tanımını verelim. İlk olarak vektör uzayındaki yönlendirmeyi hatırlayalım.

Tanım 2.9. \mathbb{R}^3 vektör uzayının iki tabanı $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ve $B' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$ olsun. B' tabanının B tabanına göre matrisi P olduğuna göre, $\det P > 0$ ise B' tabanının yönü B tabanının yönüne eşittir denir.

B' tabanının yönü B tabanının yönüne eşit ise bu durumu $B'RB$ yazarak gösterebiliriz. Böylece \mathbb{R}^3 uzayının tabanının kümesinde R bağıntısı tanımlanmış olur. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

B' tabanında iki vektörün yeri değiştirildiğinde P matrisinde iki sütunun yeri değişir. Bundan dolayı da $\det P$ sayısının işareti değişir. Bu gerçekten yararlanarak R denklik bağıntısının birbirinden farklı iki tane denklik sınıfının bulunduğu gösterilebilir. Bu denklik sınıflarından birini seçip, o denklik sınıfına "pozitif yön" adını verelim. Bu denklik sınıfındaki her bir tabana da "pozitif yönlü taban" diyeceğiz. Öteki denklik sınıfına "negatif yönlü taban" diyeceğiz.

Bir denklik sınıfını belirtmek için bu denklik sınıfındaki elemanlardan birinin verilmesi yeterlidir. \mathbb{R}^n vektör uzayının doğal tabanının denklik sınıfını pozitif yön olarak seçmek akla en yakın bir seçimdir.

\mathbb{R}^n vektör uzayının doğal tabanı adını verdiğimiz taban,

$$e_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{nj})$$

eşitliğiyle tanımlanmış $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tabanıdır. $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$ tabanından $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tabanına geçiş matrisi P ise $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ olduğu gözönüne alınarak

$$\det(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) = \det(P) \det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

olduğundan

$$\det(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) = \det(P)$$

bulunur. Buna göre $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$ tabanının pozitif yönlü bir taban olması için gerek ve yeter koşul

$$\det(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) > 0$$

olmasıdır (Sabuncuoğlu, 2006).

E_1^3 Minkowski uzayında, \langle, \rangle Lorentz metriği kullanıldığından zaman yönlendirmesi kavramını metrikle birlikte vereceğiz.

E_1^3 de $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ ortonormal tabanlar olmak üzere \sim bağıntısını

$$e_3 \text{ ve } e'_3 \text{ aynı zaman konisi içinde yani } (\langle e_3, e'_3 \rangle < 0) \text{ ise } B \sim B'$$

olarak tanımlayalım. Bu bağıntı E_1^3 in ortonormal tabanlarının kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Zaman yönlendirmesi olarak adlandırılan iki tane denklik sınıfı vardır. Diğer taraftan her sınıf bir tek zaman konisini belirtir. Karşıt olarak zaman konisi verildiğinde bir tek zaman yönlendirmesi vardır ki bu yönlendirmeye ait tüm tabanların son vektörleri bu zaman konisinin içindedir (Lopez^[4] 2008).

Tanım 2.10. $E_3 = (0, 0, 1)$ olsun. Bir v timelike vektörü verildiğinde $v \in \mathcal{C}(E_3)$ yani $\langle v, E_3 \rangle < 0$ ise v vektörüne ileri yönlendirilmiş (future directed), $v \in \mathcal{C}(-E_3)$ yani $\langle v, E_3 \rangle > 0$ ise v vektörüne geri yönlendirilmiş (past directed) denir.

Diğer bir deyişle $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektöründe $v_3 > 0$ ise v ye ileri yönlendirilmiş (future directed) ve $v_3 < 0$ ise v ye geri yönlendirilmiş (past directed) denir (Lopez^[4] 2008).

2.1 E_1^3 Minkowski Uzayının İzometrileri

Bu kısımda E_1^3 Minkowski uzayının izometrilerini vereceğiz ve burada referansımız (Lopez^[4] 2008) olacaktır.

E_1^3 ün vektör izometrilerinin kümesini $O_1(3)$ ile göstereceğiz. B ve B' ortonormal tabanlar olmak üzere koordinat değişimleri için A matrisi $A^tGA = G$ eşitliğini sağlar. Dolayısıyla

$$O_1(3) = \{A \in GL(3, \mathbb{R}) : \det(A) = \pm 1, \quad A^tGA = G\}$$

dir. Determinantı 1 olan izometrilerin kümesini $SO_1(3)$ ile gösterelim. $SO_1(3)$ kümesi özel Lorentz grubu olarak adlandırılır. Bu grup, \mathbb{R}^3 deki yönlendirme ile ilişkilidir. Yönlendirmeyi doğal tabana göre seçelim. B ortonormal taban ise $B \in SO_1(3)$ olması için gerek ve yeter koşul B nin pozitif yönlendirilmiş olmasıdır.

Ortocrone grubunu

$$O_1^+(3) = \{A \in O_1(3) : A \text{ zaman yönlendirmesini korur.}\}$$

ile tanımlayalım. B tabanı ileri yönlendirilmiş ortonormal taban verildiğinde $B' = AB$ eşitliğiyle elde edilen B' tabanı da ileri yönlendirilmiş ise A zaman yönlendirmesini korur denir. Buna göre $A \in O_1^+(3)$ olması için gerek ve yeter şart $a_{33} > 0$ olmasıdır. $O_1^+(3)$ grubunun iki bileşeni vardır. Bunlardan biri $O_1^+(3) \cap SO_1(3)$, diğeri ise $O_1^+(3) - (O_1^+(3) \cap SO_1(3))$ dir.

Özel Lorentz ortocrone grubunun kümesini

$$O_1^{++}(3) = O_1^+(3) \cap SO_1(3) = \{A \in O_1(3) : \det(A) = 1, \quad A \text{ zaman yönlendirmesini korur.}\}$$

kümesiyle tanımlayalım. Bu küme bir gruptur ve $I \in O_1^{++}(3)$ dir. Topolojik olarak

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{array} \right); \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

altkümesi sınırlı olmadığından $O_1^{++}(3)$ kompakt değildir.

Teorem 2.1.1. $O_1(3)$ grubunun bağlantılı bileşenleri

$$O_1^{++}(3) = \{A \in O_1(3); \det(A) = 1, a_{33} > 0\},$$

$$O_1^{+-}(3) = \{A \in O_1(3); \det(A) = 1, a_{33} < 0\},$$

$$O_1^{-+}(3) = \{A \in O_1(3); \det(A) = -1, a_{33} > 0\},$$

$$O_1^{--}(3) = \{A \in O_1(3); \det(A) = -1, a_{33} < 0\}$$

dır.

E_1^3 de katı hareket bir vektör izometrisi ile bir ötelemenin bileşkesidir.

Şimdi L doğrusunu sabit bırakan $O_1^{++}(3)$ grubunun izometrisini verelim. Bu tip izometrilere itme (boost) denir. L doğrusunun causal karakterine bağlı olarak bu izometrilere üç tiptedir:

(1) L timelike bir doğru olsun. $L = \langle E_3 \rangle$ olduğunu kabul edelim.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

olmak üzere $AE_3 = E_3$ olduğundan $a_{13} = a_{23} = 0$ ve $a_{33} = 1$ dir.

$$A^tGA = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} & a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33} & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} & a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 \end{bmatrix}$$

olduğundan $A^tGA = G$ eşitliğinden $a_{31} = a_{32} = 0$ ve

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$$

elde edilir. Bu eşitliklerden

$$a_{11} = a_{22} = \cos \theta, \quad a_{12} = \sin \theta, \quad a_{21} = -\sin \theta$$

dır. Bu taktirde

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dır.

(2) L spacelike bir doğru olsun. $L = \langle E_1 \rangle$ olduğunu kabul edelim.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

olmak üzere $AE_3 = E_3$ olduğundan $a_{21} = a_{31} = 0$ ve $a_{11} = 1$ dir. $A^tGA = G$ eşitliğinden $a_{12} = a_{13} = 0$ ve

$$a_{22}^2 - a_{32}^2 = 1, \quad a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} = 0, \quad a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1$$

elde edilir. Eşitliklerden

$$a_{22} = a_{33} = \cosh \theta, \quad a_{23} = a_{32} = \sinh \theta$$

bulunur. Bu taktirde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$$

dır.

(3) L lightlike bir doğru olsun. $L = \langle E_2 + E_3 \rangle$ olduğunu kabul edelim.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

olmak üzere $A(E_2 + E_3) = E_2 + E_3$ olduğundan

$$a_{12} + a_{13} = 0, \tag{2.1}$$

$$a_{22} = 1 - a_{23}$$

ve

$$a_{32} = 1 - a_{33}$$

elde edilir. (2.1) de $a_{12} = \theta$ alınırsa $a_{13} = -\theta$ olacaktır. $G = A^tGA$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 &= 1, \\ a_{11}\theta + a_{22}a_{21} - a_{32}a_{31} &= 0, \\ -a_{11}\theta + a_{23}a_{21} - a_{33}a_{31} &= 0, \\ \theta^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 &= 1, \\ -\theta^2 + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} &= 0, \end{aligned}$$

ve

$$\theta^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden

$$a_{23} = \frac{\theta^2}{2}, \quad a_{32} = -\frac{\theta^2}{2}, \quad a_{33} = 1 + \frac{\theta^2}{2}, \quad a_{22} = 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (2.2)$$

bulunur. Bu taktirde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \theta & -\theta \\ -\theta & 1 - \frac{\theta^2}{2} & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & -\frac{\theta^2}{2} & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix}$$

dır.

Son olarak E_1^3 Minkowski uzayında çember kavramını verelim.

Tanım 2.1.1. E_1^3 Minkowski uzayında sıfırdan farklı sabit eğrilikli düzlemsel eğrilere çember denir.

Bu tür eğriler Öklid uzayında çemberlerle aynı rolü oynarlar. E^3 Öklid uzayında çember şöyle verilir: G bir L doğrusunu sabit bırakan dönmelerin grubu ve $p_0 \notin L$ olsun. $\{A.p_0 : A \in G\}$ kümesi, L 'ye dik düzlemde bulunan, p_0 noktasını içeren bir çemberdir.

E_1^3 Minkowski uzayında L bir doğru ve $p_0 \notin L$ olsun. L 'nin itmelerinin grubu G ile gösterilsin. L doğrusunun causal karakterine bağlı olarak çemberler aşağıdaki gibidir:

(1) L doğrusu timelike olsun. $L = \langle E_3 \rangle$ olduğunu düşünelim. Bu taktirde

$$G = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

ile verilir. Buna göre $\{R_\theta(p_0); \theta \in \mathbb{R}\}$ kümesi $z = z_0$ düzleminde yarıçapı $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ olan çemberdir. $r > 0$ ve $c \in L$ olmak üzere

$$\alpha(s) = c + r(\cos se_1 + \sin se_2)$$

dir.

(2) L doğrusu spacelike olsun. $L = \langle E_1 \rangle$ olduğunu düşünelim. Bu taktirde

$$G = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

ile verilir. Buna göre p_0 noktasının yörüngesi $x = x_0$ düzleminde $y^2 - z^2 = y_0^2 - z_0^2$ hiperbolünün kollarıdır. $r > 0$ ve $c \in L$ olmak üzere

$$\alpha(s) = c + r(\sinh se_2 + \cosh se_3)$$

dir.

(3) L doğrusu lightlike olsun. $L = \langle E_2 + E_3 \rangle$ olduğunu düşünelim. Bu taktirde

$$G = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & \theta & -\theta \\ -\theta & 1 - \frac{\theta^2}{2} & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & \frac{\theta^2}{2} & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

ile verilir. Buna göre $\{R_\theta(p); \theta \in \mathbb{R}\}$ kümesi, asal eksenini $\langle E_2 - E_3 \rangle$ doğrusuna paralel, $\{x_2 - x_3 = 0\}$ düzleminde bir paraboldür. $r > 0$ ve $c \in L$ olmak üzere

$$\alpha(s) = c + se_1 + \frac{rs^2}{2}(e_2 + e_3)$$

dir.

2.2 E_1^3 Minkowski Uzayında Eğriler

Tanım 2.2.1 I, R nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ biçiminde differensiyelenebilir bir dönüşüm ise α ya E_1^3 uzayında bir eğri denir (Lopez^[4] 2008).

Tanım 2.2.2. $\alpha_*(\frac{d}{dx}(t))$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir ve kısaca $\alpha'(t)$ ile gösterilir (Lopez^[4] 2008).

Tanım 2.2.3. $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ eğrisi verilsin.

- (i) $\alpha'(t)$ vektörü spacelike ise α ya spacelike eğri
- (ii) $\alpha'(t)$ vektörü timelike ise α ya timelike eğri
- (iii) $\alpha'(t)$ vektörü lightlike ise α eğrisine lightlike eğri denir (Lopez^[4] 2008).

Tanım 2.2.4. E_1^3 de, lightlike olmayan bir α eğrisi için $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \pm 1$ ve lightlike bir α eğrisi için $\langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle = 1$ ise α ya pseudo yay uzunluklu olarak parametrelendirilmiş denir (Lopez^[4] 2008).

Dikkat edilirse bir α lightlike eğrisi için $\alpha''(t)$ bir spacelike vektördür. Bundan sonra eğriler pseudo yay uzunluklu parametrelendirilmiş olarak alınacaktır.

Tanım 2.2.5. $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise bu eğriye regüler eğri denir (Lopez^[4] 2008).

Tanım 2.2.6. E_1^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ eğrisi için

$$T(t) = \alpha'(t)$$

eşitliğiyle belirli $T(t)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir (Lopez^[4] 2008).

$T(s)$ vektörü $\alpha(s)$ noktasında $T_{\alpha(s)}(E_1^3)$ vektör uzayının bir alt vektör uzayını gerer. Bu alt vektör uzay bir boyutlu bir alt vektör uzaydır. Geometrik olarak $\alpha(s)$ noktasından geçen ve $T(s)$ vektörüne paralel bir doğrudur. Bu doğruya eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet uzayı denir ve $T_{\alpha(s)}(\alpha(I))$ biçiminde gösterilir.

2.2.1 Eğrilik, Burulma ve Frenet Formülleri

Bu bölümde E_1^3 de birim hızlı bir eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları ile Frenet formüllerini vereceğiz. Bu kısım için referansımız (Lopez^[4] 2008) dir.

(a) α eğrisi timelike ise:

$\langle T'(t), T(t) \rangle = 0$ olduğundan sıfırdan farklı $T'(t)$ vektörü spacelike bir vektördür. α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliği $\kappa(t) = \|T'(t)\|$ ile tanımlanır. κ fonksiyonuna da α nın eğriliği denir.

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\kappa(t)} = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}$$

eşitliğiyle tanımlanan $N(t)$ vektörüne eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki normal vektörü denir. Ayrıca $\kappa(t) = \langle T'(t), N(t) \rangle$ olur.

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

eşitliğiyle tanımlanan $B(t)$ birim vektörüne eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki binormal vektörü denir. Burada $B(t)$ vektörü spacelike vektördür. $T(t), N(t), B(t)$ vektörlerine eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{T(t), N(t), B(t)\}$ kümesine eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki burulması

$$\sigma(t) = \langle N'(t), B(t) \rangle$$

olarak tanımlanır. σ fonksiyonuna da eğrinin burulması denir. Bu taktirde α eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \sigma \\ 0 & -\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

(b) α eğrisi spacelike ise:

Bu taktirde $T'(t)$ vektörünün causal karakterine bağlı olarak üç durum vardır:

(b.1) $T'(t)$ vektörü spacelike vektör olsun. Bu taktirde $\kappa(t) = \|T'(t)\|$, $N(t) = T'(t)/\kappa(t)$ ve $B(t) = T(t) \times N(t)$ yazılır. Eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki normal

vektörü $N(t)$, binormal vektörü $B(t)$ ve eğriliği $\kappa(t)$ olmak üzere eğrinin Frenet formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \sigma \\ 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki burulması

$$\sigma(t) = \langle -N'(t), B(t) \rangle$$

dir.

(b.2) $T'(t)$ vektörü timelike vektör olsun. Eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki normal vektörü $N(t) = T'(t)/\kappa(t)$ ve eğriliği $\kappa(t) = \sqrt{-\langle T'(t), T'(t) \rangle}$ dir. $B(t) = T(t) \times N(t)$ binormal vektörü spacelike olur. Bu taktirde Frenet formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \sigma \\ 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki burulması

$$\sigma(t) = \langle N'(t), B(t) \rangle$$

dir.

(b.3) $T'(t)$ vektörü lightlike vektör olsun. $T(t)$ vektörü ile lineer bağımsız olan normal vektörü $N(t) = T'(t)$ olarak tanımlayalım. $\langle N(t), B(t) \rangle = 1$ olmak üzere $T(t)$ vektörüne dik olacak biçimdeki bir tek lightlike $B(t)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki binormal vektörü denir. Bu taktirde Frenet formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ -\kappa & 0 & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

olarak elde edilir.

(c) α eğrisi lightlike ise:

α eğrisi lightlike olduğundan $\alpha''(t)$ birim spacelike vektördür. $T(t) = \alpha'(t)$ teğet vektörü lightlike vektördür. Eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki normal vektörünü $N(t) = T'(t)$ ve $\langle T(t), B(t) \rangle = 1$ olmak üzere $N(t)$ vektörüne dik olacak biçimdeki bir tek lightlike $B(t)$ vektörünü $\alpha(t)$ noktasındaki binormal vektör olarak tanımlayalım. Bu taktirde Frenet formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \sigma & 0 & -\kappa \\ 0 & -\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

olarak elde edilir. (2.3) ve (2.4) formüllerinde κ eğriliği 0 ve 1 değerini alır. $\kappa = 0$ ise α eğrisi bir doğru, diğer durumlarda $\kappa = 1$ alınarak işlemler yapılacaktır.

2.3 E_1^3 Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler

M , E_1^3 de bir yüzey ve $x : M \rightarrow E_1^3$ bir immersiyon olsun. Yani x , diferensiyelenebilir dönüşüm ve $\forall p \in M$ için $dx_p : T_p(M) \rightarrow E_1^3$ birebirdir. E_1^3 uzayında $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ Lorentz metriğinin x ile geri getirilmiş g_p olsun. Buna göre $g_p = x^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_p)$ olduğundan $\forall u, v \in T_p(M)$ olmak üzere

$$g_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p = \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle$$

olur. Burada $T_p(M)$ uzayı üç tipte olabilir:

- (1) g_p pozitif tanımlı ise $T_p M$ spacelike düzlemdir.
- (2) g_p metriğinin indeksi 1 ise $T_p M$ timelike düzlemdir.
- (3) g_p dejenere metrik ise $T_p M$ lightlike düzlemdir.

Tanım 2.3.2. Teğet düzlemleri spacelike (veya timelike, lightlike) olan immersiyona spacelike (veya timelike, lightlike) denir (Lopez^[4] 2008).

M yüzeyi içinde $X(U)$ basit yüzeyi için $q \in U$ ve $X(q) = p$ olmak üzere

$$X_u(q) = X_* \left(\frac{\partial}{\partial u}(q) \right), \quad X_v(q) = X_* \left(\frac{\partial}{\partial v}(q) \right)$$

olarak tanımlanır. $\{X_u(q), X_v(q)\}$ kümesi T_pM uzayının bir tabanıdır. $\{X_u(q), X_v(q)\}$ tabanının denklik sınıfını, T_pM vektör uzayının pozitif yönü olarak alacağız. Böylece $X(U)$ basit yüzeyinin her bir p noktasındaki teğet düzlemi yönlendirilmiş olur. $X(U)$ basit yüzeyinin her bir p noktasında $\{X_u(q), X_v(q), N(p)\}$ kümesi $T_p\mathbb{R}^3$ uzayının pozitif yönlü bir tabanı olacak biçimde $X(U)$ üstünde, birim dik N vektör alanı tek olarak belirlidir ve

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

dir. Bu N vektör alanına $X(U)$ basit yüzeyinin pozitif yönlü birim dik vektör alanı diyeceğiz.

N , $X(U)$ basit yüzeyinin pozitif yönlü birim dik vektör alanı ise,

$$\{X_u(q), X_v(q), -N(p)\}$$

kümesi $T_p\mathbb{R}^3$ uzayının negatif yönlü bir alanı olur. $-N$ vektör alanına, $X(U)$ basit yüzeyinin negatif yönlü birim dik vektör alanı denir.

Şimdi \mathbb{R}^3 uzayında bir M yüzeyini gözönüne alalım. $p \in M$ olsun. p noktasını içeren en az bir $X(U)$ basit yüzeyi bulunduğunu biliyoruz. Buna göre, p noktasında $X(U)$ basit yüzeyinden elde edilen pozitif yönlü bir $N(p)$ birim dik vektörü vardır. p noktasında, p noktasını içeren başka bir $X^*(H)$ basit yüzeyine göre de pozitif yönlü $Y(p)$ birim dik vektör alanı vardır.

$$Y(p) = N(p) \quad \text{veya} \quad Y(p) = -N(p)$$

olduğu açıktır.

Tanım 2.3.3. M yüzeyinin basit yüzeylerden oluşan bir örtüsü, bu basit yüzeylerin pozitif yönlü birim dik vektör alanları, basit yüzeylerin arakesit noktalarında çakışacak biçimde bulunabiliyorsa, M yüzeyi yönlendirilebilir yüzeydir, denir (Sabuncuoğlu 2006).

M bir yüzey ve $x : M \rightarrow E_1^3$ non-dejenere immersiyon ise M yüzeyi de non-dejenere olsun. M yönlendirilemeyen bir yüzeydir fakat immersiyon spacelike ise M yüzeyi

yönlendirilebilir olmak zorundadır. Bunun sebebi, $\forall p \in M$ noktasında $T_p M$ teğet düzlemine dik birim normal vektörü iki şekilde seçebiliriz. M yüzeyine dik birim normal vektör timelike ve Minkowski uzayında iki timelike vektör de birbirine dik değildir. $E_3 = (0, 0, 1)$ için $\forall p \in M$ noktasında $\langle N(p), E_3 \rangle < 0$ olacak biçimde $N(p)$ birim normal vektörünü alalım. $N(p)$ future directed (ileri yönlendirilmiş) bir vektördür. Böylece M yüzeyi yönlendirilebilir bir yüzey olur. İmmersiyonun timelike olması durumunda ise M yüzeyini yönlendirilebilir kabul edeceğiz.

M bir yüzey E_1^3 üzerindeki doğal koneksiyon D , M üzerindeki koneksiyon ∇ olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için Gauss eşitliği

$$D_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y)$$

şeklindedir. Burada $\nabla_X Y \in \chi(M)$ ve $II(X, Y) \in \chi(M)^\perp$ dir.

Tanım 2.3.4. M bir yüzey olsun.

$$\begin{aligned} II & : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)^\perp \\ (X, Y) & \rightarrow II(X, Y) = -(D_X Y)^\perp \end{aligned}$$

olarak tanımlanan simetrik bilineer II fonksiyonuna M nin ikinci temel form tensörü denir (Lopez^[4] 2008).

Tanım 2.3.5. M bir yüzey olsun. M yüzeyinin ileri yönlendirilmiş birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$\begin{aligned} S_N & : \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ X & \rightarrow S_N(X) = -D_X N \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı S_N dönüşümüne M nin N ye göre şekil operatörü (Weingarten dönüşümü) denir ve kısaca S ile gösterilir (Lopez^[4] 2008).

Ayrıca M spacelike bir yüzey ise $\varepsilon = 1$ ve M timelike bir yüzey ise $\varepsilon = -1$ olmak üzere

$$II(X, Y) = -\varepsilon \langle II(X, Y), N \rangle N = -\varepsilon \langle S(X), Y \rangle N \quad (2.5)$$

dir.

Tanım 2.3.6. Bir M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \frac{1}{2}iz(II)$$

ve Gauss eğriliği

$$K = \det(II)$$

şeklinde tanımlanır.

Bir M yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\vec{H} = HN$$

eşitliği ile verilen H fonksiyonudur ve

$$H = -\varepsilon \langle \vec{H}, N \rangle$$

dir. $\langle E_1, E_1 \rangle = 1$ ve $\langle E_2, E_2 \rangle = \varepsilon$ olmak üzere $\chi(M)$ nin $\{E_1, E_2\}$ ortonormal tabanı için,

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2}(II(E_1, E_1) + \varepsilon II(E_2, E_2)) \\ &= -\varepsilon \frac{1}{2}(\langle S(E_1), E_1 \rangle + \varepsilon \langle S(E_2), E_2 \rangle)N \\ &= -\varepsilon \left(\frac{1}{2}iz(S) \right)N \end{aligned}$$

ve

$$K = -\varepsilon \det(S)$$

şeklindedir (Lopez^[4] 2008).

Tanım 2.3.7. M bir yüzey olsun. $u_p, v_p \in T_pM$ olmak üzere M nin her bir p noktasına

$$I_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_p(u_p, v_p) = \langle u_p, v_p \rangle$$

fonksiyonunu karşılık getiren I_p fonksiyonuna, M üzerinde birinci temel form denir.

M nin her bir p noktasına

$$II_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad II_p(u_p, v_p) = \langle S(u_p), v_p \rangle$$

fonksiyonunu karşılık getiren II_p fonksiyonuna, M üzerinde ikinci temel form denir (Lopez^[4] 2008).

Tanım 2.3.8. M yüzeyinin parametrik denklemi $X = X(u, v)$ olsun. Her bir noktada teğet düzlemin tabanı $B = \{X_u, X_v\}$ olmak üzere

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle$$

$E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonlarına birinci temel formun katsayıları denir. Bu taktirde birinci temel form

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

şeklindedir.

$$\det I = EG - F^2 \neq 0$$

dır. M nin her bir p noktasında $\det I = EG - F^2 > 0$ ise M spacelike yüzey, $\det I = EG - F^2 < 0$ ise M timelike yüzey olarak adlandırılır. Spacelike bir yüzey için $\varepsilon = 1$ ve timelike bir yüzey için $\varepsilon = -1$ olmak üzere M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{\varepsilon(EG - F^2)}}$$

olur.

$$e = -\langle X_u, N_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle$$

$$f = -\langle X_u, N_v \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle$$

$$g = -\langle X_v, N_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle$$

düzgün fonksiyonlarına da ikinci temel formun katsayıları denir. Bu taktirde ikinci temel form

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

şeklinde ifade edilir. Böylece M yüzeyinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği sırasıyla

$$H = -\varepsilon \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \quad (2.6)$$

$$K = -\varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (2.7)$$

şeklindedir (Lopez^[4] 2008).

3 E^3 VE E_1^3 DE PARALEL LINEER WEINGARTEN YÜZEYLERİ

Bu bölümde E^3 de ve E_1^3 de bir M yüzeyinin lineer Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter koşulun bu yüzeyin paraleli olan M_r yüzeyinin de lineer Weingarten yüzeyi olması gerektiği gösterilmiştir. Ayrıca bu uzaylarda (M, M_r) paralel yüzey çiftinin r uzaklığına göre tiplerini belirten teoremler verilmiştir.

3.1 E^3 de Paralel Yüzeyler

Tanım 3.1.1. N, M yüzeyi üstünde birim dik vektör alanı olmak üzere $\forall v_p \in T_p M$ için M nin bir p noktasında

$$S(v_p) = D_{v_p} N$$

eşitliğiyle tanımlı $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ fonksiyonuna M yüzeyinin p noktasında N vektör alanına bağlı şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü) denir.

M nin her bir p noktasına S_p fonksiyonunu karşılık getiren S dönüşümüne M yüzeyinin N birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü) denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 3.1.2. M yüzeyinin bir p noktasında $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ lineer dönüşümünün karakteristik değerlerine, p noktasındaki asli eğrilikleri denir.

$S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ lineer dönüşümünün sıfırdan farklı karakteristik vektörlerine p noktasındaki eğrilik vektörleri denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 3.1.3. S_p lineer dönüşümünün determinantına M yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği denir ve $K(p)$ ile gösterilir. S_p lineer dönüşümünün izine M yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği denir ve $H(p)$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre

$$K(p) = \det S_p \quad \text{ve} \quad H(p) = iz S_p \quad (3.1)$$

dir. Böylece M yüzeyinin her bir p noktasına, $K(p)$ sayısını karşılık getiren K fonksiyonuna M yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. M yüzeyinin her bir p noktasına, $H(p)$ sayısını karşılık getiren H fonksiyonuna M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu denir. Öyleyse

$$K = \det S \quad \text{ve} \quad H = \dot{I}z S \quad (3.2)$$

dir (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 3.1.4. M ve M_r , E^3 de iki yüzey ve M yüzeyinin birim dik vektör alanı N olsun. r sabit bir reel sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow M_r \\ p &\rightarrow f(p) = p + rN_p \end{aligned}$$

biçiminde örten bir f fonksiyonu varsa M_r yüzeyi M yüzeyine paraleldir, denir.

Bu tanıma göre bir M yüzeyi verildiğinde $M_r = \{p + rN_p : p \in M\}$ eşitliğiyle verilen M_r kümesi, M yüzeyine paralel bir yüzeydir. Burada

$$f : M \rightarrow M_r, \quad f(p) = p + rN_p$$

dir (Sabuncuoğlu 2006).

Teorem 3.1.1. E^3 de M yüzeyine paralel M_r yüzeyi verilsin. M yüzeyi üzerindeki şekil operatörü S ve M_r yüzeyi üzerindeki şekil operatörü ise S_r olsun.

$$f : M \rightarrow M_r$$

ve $X \in \chi(M)$, $\bar{X} \in \chi(M_r)$ olmak üzere

$$(i) f_*(X) = \bar{X} + r\overline{S(X)}$$

$$(ii) S_r(f_*(X)) = \overline{S(X)}$$

(iii) M yüzeyinin asli eğriliği k ve buna karşılık gelen asli eğrilik doğrultusu X ise

$$S_r(f_*(X)) = \frac{k}{1 + kr} f_*(X)$$

dir (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 3.1.2. M yüzeyine paralel olan M_r yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonları K_r ve H_r olduğuna göre

$$K_r = \frac{K}{1 + rH + r^2K} \quad \text{ve} \quad H_r = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2K} \quad (3.3)$$

dir (Hacısalihoglu 1983).

3.2 E^3 de Paralel Lineer Weingarten Yüzeyleri

Tanım 3.2.1. $a, b, c \in R$ ve M yüzeyinin ortalama eğriliği H ve Gauss eğriliği K olmak üzere

$$aH + bK = c \quad (3.4)$$

bağıntısını sağlayan M yüzeyine lineer Weingarten yüzeyi denir. Burada $a^2 + b^2 \neq 0$ dır (Lopez^[3] 2008).

Bir lineer Weingarten yüzeyinin tipi $\Delta := a^2 + 4bc$ diskriminantının işaretine bağlıdır. Eğer $\Delta < 0$ ise M yüzeyi hiperbolik, $\Delta > 0$ ise M yüzeyi eliptik olarak adlandırılır. $\Delta = 0$ ise M yüzeyi bir tubular yüzeyidir (Lopez^[1] 2008).

Teorem 3.2.1. E^3 de M yüzeyinin bir lineer Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul M_r yüzeyinin de bir lineer Weingarten yüzeyi olmasıdır.

İspat M bir lineer Weingarten yüzeyi olsun. Öyleyse M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonları K ve H (3.4) bağıntısını sağlar. (3.3) den

$$K = \frac{K_r}{1 - rH_r + r^2K_r} \quad \text{ve} \quad H = \frac{H_r - 2rK_r}{1 - rH_r + r^2K_r}$$

elde edilir. Bu denklemleri (3.4) de yerine yazarsak

$$(a + cr)H_r + (b - 2ar - cr^2)K_r = c \quad (3.5)$$

bulunur. (3.5) de $a + cr = a_r$, $b - 2ar - cr^2 = b_r$ ve $c = c_r$ alınırsa

$$a_r H_r + b_r K_r = c_r$$

elde edilir. Dolayısıyla M_r bir lineer Weingarten yüzeyidir.

Karşıt olarak M_r nin bir lineer Weingarten yüzeyi olduğunu kabul edelim. Bu takdirde M_r yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonları K_r ve H_r (3.4) bağıntısını sağlar. (3.4) eşitliğinde (3.3) kullanılırsa

$$(a_r - c_r r)H_r + (b_r + 2a_r r - c_r r^2)K_r = c_r \quad (3.6)$$

elde edilir. $a_r - c_r r = a$, $b_r + 2a_r r - c_r r^2 = b$ ve $c_r = c$ alınırsa

$$aH + bK = c$$

olduğundan M bir lineer Weingarten yüzeyi olur.

Teorem 3.2.2. $c = 0$ olmak üzere M bir lineer Weingarten yüzeyi olsun. Buna göre M ve M_r eliptik lineer Weingarten yüzeylerdir.

İspat $c = 0$ olduğundan $\Delta = a^2 > 0$ ve (3.5) e göre $\Delta_r = a_r^2 > 0$ dır. Dolayısıyla M ve M_r eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.2.3. $c > 0$ olmak üzere M bir eliptik lineer Weingarten yüzeyi olsun.

$$(a) \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) < r < \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir eliptik}$$

lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(b) r < \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ veya } r > \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir}$$

hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(c) r = \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ veya } r = \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir tubu-}$$

lar lineer Weingarten yüzeyidir.

İspat $c > 0$ olmak üzere M bir eliptik lineer Weingarten yüzeyi olsun. (3.5) den $\Delta_r = -3c^2 r^2 - 6acr + \Delta$ dır. Buna göre $\Delta_r = 0$ denkleminin kökleri

$$r_1 = \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right)$$

bulunur. Bu değerler için kökler arasında $\Delta_r > 0$, kökler dışında $\Delta_r < 0$ ve kökler için ise $\Delta_r = 0$ olduğundan ispat açıktır.

Teorem 3.2.4. $c < 0$ olmak üzere M bir eliptik lineer Weingarten yüzeyi olsun.

$$(a) \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) < r < \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir eliptik}$$

lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(b) r < \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ veya } r > \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir}$$

hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(c) r = \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ veya } r = \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir}$$

tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.2.5. $c \neq 0$ olmak üzere M bir hiperbolik lineer Weingarten yüzeyi olsun.

$$(a) a^2 < -bc \text{ ise } M_r \text{ bir hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(b) a^2 = -bc \text{ olsun.}$$

$$(b.i) r \neq -\frac{a}{c} \text{ ise } M_r \text{ bir hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(b.ii) r = -\frac{a}{c} \text{ ise } M_r \text{ bir tubular lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(c) -bc < a^2 < -4bc \text{ ve } c > 0 \text{ olsun.}$$

$$(c.i) \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) < r < \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir eliptik}$$

lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(c.ii) r < \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ veya } r > \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir}$$

hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(c.iii) r = \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ veya } r = \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir}$$

tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

(d) $-bc < a^2 < -4bc$ ve $c < 0$ olsun.

(d.i) $\frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right) < r < \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right)$ ise M_r bir eliptik

lineer Weingarten yüzeyidir.

(d.ii) $r < \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right)$ veya $r > \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right)$ ise M_r bir

hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

(d.iii) $r = \frac{1}{c} \left(-a + \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right)$ veya $r = \frac{1}{c} \left(-a - \frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + bc)} \right)$ ise M_r bir

tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.2.6. $c > 0$ ve $a > 0$ veya $c < 0$ ve $a < 0$ olmak üzere M bir tubular lineer Weingarten yüzeyi olsun.

(a) $r < -\frac{2a}{c}$ veya $r > 0$ ise M_r bir hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

(b) $-\frac{2a}{c} < r < 0$ ise M_r bir eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

(c) $r = -\frac{2a}{c}$ veya $r = 0$ ise M_r bir tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.2.7. $c > 0$ ve $a < 0$ veya $c < 0$ ve $a > 0$ olmak üzere M bir tubular lineer Weingarten yüzeyi olsun.

(a) $r < 0$ veya $r > -\frac{2a}{c}$ ise M_r bir hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

(b) $0 < r < -\frac{2a}{c}$ ise M_r bir eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

(c) $r = 0$ veya $r = -\frac{2a}{c}$ ise M_r bir tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.2.8. $c_r = 0$ olmak üzere M_r bir lineer Weingarten yüzeyi olsun. Buna göre M ve M_r eliptik lineer Weingarten yüzeylerdir.

Teorem 3.2.9. $c_r > 0$ olmak üzere M_r bir eliptik lineer Weingarten yüzeyi olsun.

$$(a) \frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) < r < \frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) \text{ ise } M \text{ bir eliptik}$$

lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(b) r < \frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) \text{ veya } r > \frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) \text{ ise } M \text{ bir}$$

hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(c) r = \frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) \text{ veya } r = \frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) \text{ ise } M \text{ bir}$$

tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.2.10. $c_r < 0$ olmak üzere M_r bir eliptik lineer Weingarten yüzeyi olsun.

$$(a) \frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) < r < \frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) \text{ ise } M \text{ bir eliptik}$$

lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(b) r < \frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) \text{ veya } r > \frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) \text{ ise } M \text{ bir}$$

hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(c) r = \frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) \text{ veya } r = \frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) \text{ ise } M$$

bir tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.2.11. $c_r \neq 0$ olmak üzere M_r bir hiperbolik lineer Weingarten yüzeyi olsun.

$$(a) a_r^2 < -b_r c_r \text{ ise } M \text{ bir hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(b) a_r^2 = -b_r c_r \text{ olsun.}$$

$$(b.i) r \neq \frac{a_r}{c_r} \text{ ise } M \text{ bir hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(b.ii) r = \frac{a_r}{c_r} \text{ ise } M \text{ bir tubular lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

(c) $-b_r c_r < a_r^2 < -4b_r c_r$ ve $c_r > 0$ olsun.

(c.i) $\frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) < r < \frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right)$ ise M bir eliptik

lineer Weingarten yüzeyidir.

(c.ii) $r < \frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right)$ veya $r > \frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right)$ ise M bir

hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

(c.iii) $r = \frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right)$ veya $r = \frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right)$ ise M

bir tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

(d) $-b_r c_r < a_r^2 < -4b_r c_r$ ve $c_r < 0$ olsun.

(d.i) $\frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right) < r < \frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right)$ ise M bir eliptik

lineer Weingarten yüzeyidir.

(d.ii) $r < \frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right)$ veya $r > \frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right)$ ise M bir

hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

(d.iii) $r = \frac{1}{c_r} \left(a_r + \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right)$ veya $r = \frac{1}{c_r} \left(a_r - \frac{2}{3} \sqrt{3(a_r^2 + b_r c_r)} \right)$ ise M

bir tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.2.12. $c_r > 0$ ve $a_r > 0$ veya $c_r < 0$ ve $a_r < 0$ olmak üzere M_r bir tubular lineer Weingarten yüzeyi olsun.

(a) $r < 0$ veya $r > \frac{2a_r}{c_r}$ ise M bir hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

(b) $0 < r < \frac{2a_r}{c_r}$ ise M bir eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

(c) $r = 0$ veya $r = \frac{2a_r}{c_r}$ ise M bir tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.2.13. $c_r > 0$ ve $a_r < 0$ veya $c_r < 0$ ve $a_r > 0$ olmak üzere M_r bir tubular lineer Weingarten yüzeyi olsun.

- (a) $r < \frac{2a_r}{c_r}$ veya $r > 0$ ise M bir hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.
- (b) $\frac{2a_r}{c_r} < r < 0$ ise M bir eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.
- (c) $r = \frac{2a_r}{c_r}$ veya $r = 0$ ise M bir tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

Örnek 3.2.1. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ denklemlle verilen küre yüzeyini düşünelim. Yüzeyin Gauss eğriliği $K = 1$ ve ortalama eğriliği $H = 2$ dir. Eğer $a = 1$ ve $b = 1$ alınrsa (3.4) denkleminde $c = 3 > 0$ elde edilir. Buna göre $\Delta_r = -27r^2 - 18r + 13$ ve bu denklemin kökleri

$$r_1 = \frac{-6 - 8\sqrt{3}}{18} \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{-6 + 8\sqrt{3}}{18}$$

olur. Dolayısıyla

- (a) Eğer $\frac{-3 - 4\sqrt{3}}{9} < r < \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{9}$ ise M_r bir eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.
- (b) Eğer $r < \frac{-3 - 4\sqrt{3}}{9}$ veya $r > \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{9}$ ise M_r bir hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.
- (c) Eğer $r = \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{9}$ veya $r = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{9}$ ise M_r bir tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

3.3 E_1^3 de Paralel Yüzeyler

Bu kısımda E_1^3 de verilen bir M yüzeyinin paraleli olan M_r yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonları elde edilerek M_r yüzeyi için farklı uzaklıklarda elde edilen Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonlarını veren bazı teoremler ifade edilmiştir.

a_i fonksiyonları C^∞ sınıfından reel değerli fonksiyonlar ve $-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \pm 1$ olmak üzere bir M yüzeyinin birim normal vektör alanı $N = (a_1, a_2, a_3)$ olsun. $r \in \mathbb{R}$ olmak

üzere $M_r = \{P + rN_p : P \in M\}$ olsun. Dolayısıyla $P = (p_1, p_2, p_3) \in M$ ise

$$f(P) = P + rN_p = (p_1 + ra_1(p), p_2 + ra_2(p), p_3 + ra_3(p))$$

ile M_r yüzeyi tanımlanır. Böylece M den M_r yüzeyine tanımlanan f fonksiyonu örten ise M_r , M ye paralel bir yüzeydir. Ayrıca M_r yüzeyinin de birim normali N dir. Yani $\forall p \in M$ noktası için $N_{f(p)} = N_p$ dir.

Tanım 3.3.1. M yüzeyi E_1^3 de bir yüzey ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. E_1^3 Minkowski uzayının koneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} S & : \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ X & \rightarrow S(X) = D_X N \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir (Görgülü, Çöken 1994).

Tanım 3.3.2. M yüzeyi E_1^3 de bir yüzey ve M nin birim normal vektör alanı N ve şekil operatörü S olsun. $p \in M$ ve $-\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K & : M \rightarrow \mathbb{R} \\ p & \rightarrow K(p) = -\varepsilon \det S_p \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(p)$ değerine de M nin p noktasındaki Gauss eğriliği denir (O'Neill 1983).

Tanım 3.3.3. M yüzeyi E_1^3 de bir yüzey ve M nin birim normal vektör alanı N ve şekil operatörü S olsun. $p \in M$ ve $-\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H & : M \rightarrow \mathbb{R} \\ p & \rightarrow H(p) = -\varepsilon \operatorname{tr} S_p \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(p)$ değerine de p noktasındaki ortalama eğriliği denir (O'Neill 1983).

M yüzeyinin asli eğriliklerinin

$$\begin{aligned} 2k_1 & = -\varepsilon H + \sqrt{H^2 + 4\varepsilon K} \\ 2k_2 & = -\varepsilon H - \sqrt{H^2 + 4\varepsilon K} \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 3.3.1. M ve M_r , E_1^3 de birbirine paralel iki yüzey, M üzerinde Weingarten dönüşümü S ve M_r üzerinde Weingarten dönüşümü S_r olsun.

$$f : M \rightarrow M_r, \quad f(P) = (p_1 + ra_1(p), p_2 + ra_2(p), \dots, p_n + ra_n(p))$$

olmak üzere $X \in \chi(M)$ ve $\bar{X} \in \chi(M_r)$ için

$$(i) f_*(X) = \bar{X} + r\overline{S(X)}$$

$$(ii) S_r(f_*(X)) = \overline{S(X)}$$

(iii) M yüzeyinin p noktasındaki asli eğriliği k ve buna karşılık gelen asli eğrilik doğrultusu ise X olmak üzere

$$S_r(f_*(X)) = \frac{k}{1 + kr} f_*(X)$$

dir. Yani f , asli eğrilik doğrultusunu korur (Görgülü A., Çöken A. C., 1994).

Teorem 3.3.2. Bir $M \subset E_1^3$ yüzeyinin paralel yüzeyi M_r olsun. $p \in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K ve H , $f(p) \in M_r$ noktasında M_r nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K_r ve H_r olduğuna göre

$$K_r = \frac{K}{1 - \varepsilon r H - \varepsilon r^2 K} \quad (3.7)$$

ve

$$H_r = \frac{H + 2rK}{1 - \varepsilon r H - \varepsilon r^2 K} \quad (3.8)$$

dir.

İspat $p \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri k_1, k_2 ve bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları da sırasıyla X_1, X_2 olsun. $1 \leq i \leq 2$ olmak üzere asli eğrilik tanımına göre

$$S(X_i) = k_i X_i, \quad 1 \leq i \leq 2$$

dir. $N_r |_{f(p)} = N_p$ olduğundan M_r yüzeyinin birim normal vektör alanı N_r için

$$\begin{aligned} \langle N_r, N_r \rangle |_{f(p)} &= \langle N_r |_{f(p)}, N_r |_{f(p)} \rangle \\ &= \langle N_p, N_p \rangle \\ &= -\varepsilon \end{aligned}$$

dır. $\{X_1, X_2\}$ tabanına göre M yüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Gauss ve ortalama eğrilik tanımlarından

$$\begin{aligned} K &= -\varepsilon \det S \\ &= -\varepsilon k_1 k_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H &= -\varepsilon izS \\ &= -\varepsilon (k_1 + k_2). \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan Teorem 3.2.1 den $1 \leq i \leq 2$ olmak üzere $f_*(X_i)$, M_r yüzeyi için birer asli doğrultudur. M_r yüzeyinin $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$ tabanına göre şekil operatörü matrisi

$$S_r = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{1 + rk_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1 + rk_2} \end{bmatrix}$$

dir. $\langle N_r, N_r \rangle = -\varepsilon$ olduğundan

$$\begin{aligned} K_r &= -\varepsilon \det S_r = -\varepsilon \left(\frac{k_1}{1 + rk_1} \right) \left(\frac{k_2}{1 + rk_2} \right) & (3.9) \\ &= -\varepsilon \left(\frac{k_1 k_2}{(1 + rk_1)(1 + rk_2)} \right) \\ &= -\varepsilon \left(\frac{k_1 k_2}{1 + r(k_1 + k_2) + r^2 k_1 k_2} \right) \\ &= -\varepsilon \left(\frac{-\varepsilon K}{1 - \varepsilon r H - \varepsilon r^2 K} \right) \\ &= \frac{K}{1 - \varepsilon r H - \varepsilon r^2 K} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
H_r &= -\varepsilon izS_r = -\varepsilon \left(\frac{k_1}{1+rk_1} + \frac{k_2}{1+rk_2} \right) \\
&= -\varepsilon \left(\frac{(k_1+k_2) + 2r(k_1k_2)}{1+r(k_1+k_2) + r^2k_1k_2} \right) \\
&= -\varepsilon \left(\frac{-\varepsilon H - 2r\varepsilon K}{1+r(k_1+k_2) + r^2k_1k_2} \right) \\
&= \frac{H + 2rK}{1 - \varepsilon rH - \varepsilon r^2K}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.3. M , sıfırdan farklı Gauss eğriliğine sahip ve umbilik noktası olmayan bir yüzey olsun.

(i) M yüzeyi pozitif sabit ortalama eğriliğe sahip ise M yüzeyine paralel iki yüzey vardır. Bu yüzeylerden bir tanesinin Gauss eğriliği $K_r = -\varepsilon H^2$ ve diğerinin ortalama eğriliği ise $-H$ dir.

(ii) εK negatif sabit ise $r = \pm \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon K}}$ uzaklıkta ortalama eğrilikleri sabit ve $H_r = \mp \varepsilon \sqrt{-\varepsilon K}$ olan M yüzeyine paralel iki yüzey vardır.

İspat (i) Kabul edelim ki M yüzeyinin sabit ortalama eğriliği $H > 0$ olsun. (3.7) ve (3.8) de $r = \frac{\varepsilon}{H}$ kullanılırsa

$$\begin{aligned}
K_r &= \frac{K}{1 - \varepsilon \frac{\varepsilon}{H} H - \varepsilon \frac{1}{H^2} K} = -\varepsilon H^2 \\
H_r &= \frac{H + 2\frac{\varepsilon}{H} K}{1 - \varepsilon \frac{\varepsilon}{H} H - \varepsilon \frac{1}{H^2} K} \\
&= \frac{-(\varepsilon H^3 + 2HK)}{K}
\end{aligned}$$

elde edilir. $K \neq 0$ olduğundan $\frac{\varepsilon}{H}$ uzaklıkta M yüzeyine paralel yüzeyin Gauss eğriliği $-\varepsilon H^2$ dir.

(3.7) ve (3.8) de $r = \frac{2\varepsilon}{H}$ yazılırsa

$$K_r = \frac{K}{1 - \varepsilon \frac{2\varepsilon}{H} H - \frac{4\varepsilon}{H^2} K} = \frac{H^2 K}{-H^2 - 4\varepsilon K}$$

$$H_r = \frac{H + 4 \frac{\varepsilon}{H} K}{1 - \varepsilon \frac{2\varepsilon}{H} H - \varepsilon \frac{4}{H^2} K} = -H$$

elde edilir.

$$H^2 + 4\varepsilon K = 0 \iff (k_1 + k_2)^2 + 4\varepsilon(-\varepsilon k_1 k_2) = (k_1 - k_2)^2 = 0 \iff k_1 = k_2$$

olur. M yüzeyinin umbilik noktası olmadığından $H^2 + 4\varepsilon K \neq 0$ dır. Dolayısıyla $r = \frac{2\varepsilon}{H}$ uzaklıktaki paralel yüzeyin sabit ortalama eğriliği $-H$ dır.

(ii) (3.7) ve (3.8) de $r = \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon K}}$ yazılırsa

$$H_r = \frac{H + \frac{2}{\sqrt{-\varepsilon K}} K}{1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon K}} H + \frac{\varepsilon K}{\varepsilon K}}$$

$$= -\frac{(-\varepsilon H + 2\sqrt{-\varepsilon K}) \sqrt{-\varepsilon K}}{\varepsilon (-\varepsilon H + 2\sqrt{-\varepsilon K})}$$

$$= -\varepsilon \sqrt{-\varepsilon K}$$

elde edilir. $r = -\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon K}}$ için ispat benzerdir.

Teorem 3.3.4. $M \subset E_1^3$ bir yüzey olsun.

(i) M yüzeyinin Gauss eğriliği sıfırdan farklı ve ortalama eğriliği $H = \frac{\varepsilon}{r}$ ise M yüzeyine paralel olan M_r yüzeyinin Gauss eğriliği $K_r = -\frac{\varepsilon}{r^2}$ dir.

(ii) M yüzeyinin Gauss eğriliği $K \neq -\frac{\varepsilon}{4r^2}$ ve ortalama eğriliği $H = \frac{\varepsilon}{r}$ ise M yüzeyine paralel olan M_{2r} yüzeyinin ortalama eğriliği $H_{2r} = -\frac{\varepsilon}{r}$ dir.

(iii) M yüzeyinin Gauss eğriliği $K = -\frac{\varepsilon}{r^2}$ ve ortalama eğriliği $H \neq \pm \frac{2\varepsilon}{r}$ ise M yüzeyine paralel olan $M_{\pm r}$ yüzeyinin ortalama eğriliği $H_{\pm r} = \pm \frac{\varepsilon}{r}$ dir.

İspat (i) $H = \frac{\varepsilon}{r}$ ise (3.7) den

$$K_r = \frac{K}{1 - \varepsilon r \frac{\varepsilon}{r} - \varepsilon r^2 K} = -\frac{\varepsilon}{r^2}$$

elde edilir. (ii) ve (iii) şıkları (3.7) ve (3.8) den benzer biçimde elde edilir.

Teorem 3.3.5. $a > 0$ olmak üzere umbilik noktası olmayan $M \subset E_1^3$ yüzeyinin, sabit Gauss eğriliği $-\varepsilon a^{-2}$ olsun. Eğer M_r yüzeyi sabit ortalama eğriliğe sahip ise $r = \pm a$ dır.

İspat r uzaklığı için M_r yüzeyinin ortalama eğriliği sabit olsun. Bu taktirde (3.10) dan

$$\begin{aligned} -\varepsilon k_1(1 + rk_2) - \varepsilon k_2(1 + rk_1) &= H_r(1 + rk_1)(1 + rk_2) \\ -\varepsilon(k_1 + k_2) - 2\varepsilon r a^{-2} &= H_r(1 + r(k_1 + k_2) + r^2 a^{-2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliği tekrar düzenlersek

$$(k_1 + k_2)(-\varepsilon - rH_r) = H_r + H_r r^2 a^{-2} + 2\varepsilon r a^{-2} \quad (3.11)$$

bulunur. Hipotezden (3.11) eşitliğinin sağ tarafı sabittir. Sol tarafın da sabit olabilmesi için

$$\varepsilon + rH_r = 0 \quad (3.12)$$

olmalıdır. Bu taktirde (3.11) ve (3.12) den

$$\begin{aligned} 0 &= H_r + H_r r^2 a^{-2} + 2\varepsilon r a^{-2} \\ &= H_r(1 + r^2 a^{-2}) + 2\varepsilon r a^{-2} \\ &= -\frac{\varepsilon}{r} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{2\varepsilon r}{a^2} \\ &= -\frac{\varepsilon}{r} + \frac{\varepsilon r}{a^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $r = \pm a$ dır.

3.4 E_1^3 de Paralel Linear Weingarten Yüzeyleri

Teorem 3.4.1. E_1^3 de M yüzeyinin lineer Weingarten yüzeyi olması için gerek yeter koşul M_r yüzeyinin lineer Weingarten yüzeyi olmasıdır.

İspat Teorem 3.2.1 in ispatına benzer olarak kolayca görülebilir.

M ve M_r timelike yüzeyler ise $\varepsilon = -1$ olduğundan M ve M_r yüzeylerinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği

$$H = \frac{H_r - 2rK_r}{1 - rH_r + r^2K_r}, \quad K = \frac{K_r}{1 - rH_r + r^2K_r}$$

ve

$$H_r = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2K}, \quad K_r = \frac{K}{1 + rH + r^2K}$$

dir. Bu eşitlikler Öklid uzayında verilen eşitliklerle aynıdır. Dolayısıyla M yüzeyi için Teorem 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7 ve M_r yüzeyi için Teorem 3.2.8, 3.2.9, 3.2.10, 3.2.11, 3.2.12, 3.2.13 geçerlidir. Bu sebeple bu kısımda sadece spacelike yüzeyler için elde edilen teoremler verilecektir.

Teorem 3.4.2. $c = 0$ olmak üzere M bir spacelike lineer Weingarten yüzeyi olsun. Buna göre M ve M_r spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeylerdir.

Teorem 3.4.3. $c \neq 0$ olmak üzere M bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyi olsun.

(a) $a^2 < bc$ ise M_r bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

(b) $a^2 = bc$ olsun.

(b.i) $r \neq \frac{a}{c}$ ise M_r bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

(b.ii) $r = \frac{a}{c}$ ise M_r bir spacelike tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

(c) $a^2 > bc$ ve $c > 0$ olsun.

(c.i) $\frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) < r < \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right)$ ise M_r bir spacelike

hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

(c.ii) $r < \frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right)$ veya $r > \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right)$ ise M_r bir space-

like eliptik linear Weingarten yüzeyidir.

$$(c.iii) \ r = \frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ veya } r = \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir space-}$$

like tubular linear Weingarten yüzeyidir.

$$(d) \ a^2 > bc \text{ ve } c < 0 \text{ olsun.}$$

$$(d.i) \ \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) < r < \frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike}$$

hiperbolik linear Weingarten yüzeyidir.

$$(d.ii) \ r < \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ veya } r > \frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir space-}$$

like eliptik linear Weingarten yüzeyidir.

$$(d.iii) \ r = \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ veya } r = \frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir}$$

spacelike tubular linear Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.4.4. $c \neq 0$ olmak üzere M bir spacelike hiperbolik linear Weingarten yüzeyi olsun.

$$(a) \ a^2 < bc \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike eliptik linear Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(b) \ a^2 = bc \text{ olsun.}$$

$$(b.i) \ r \neq \frac{a}{c} \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike eliptik linear Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(b.ii) \ r = \frac{a}{c} \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike tubular linear Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(c) \ bc < a^2 < -4bc \text{ ve } c > 0 \text{ olsun.}$$

$$(c.i) \ \frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) < r < \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike}$$

hiperbolik linear Weingarten yüzeyidir.

$$(c.ii) \ r < \frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ veya } r > \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir space-}$$

like eliptik linear Weingarten yüzeyidir.

$$(c.iii) r = \frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ veya } r = \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir space-}$$

like tubular linear Weingarten yüzeyidir.

$$(d) bc < a^2 < -4bc \text{ and } c < 0 \text{ olsun.}$$

$$(d.i) \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) < r < \frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike}$$

hiperbolik linear Weingarten yüzeyidir.

$$(d.ii) r < \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ veya } r > \frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir space-}$$

like eliptik linear Weingarten yüzeyidir.

$$(d.iii) r = \frac{1}{c} \left(a + \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ veya } r = \frac{1}{c} \left(a - \frac{2}{5} \sqrt{5(a^2 - bc)} \right) \text{ ise } M_r \text{ bir}$$

spacelike tubular linear Weingarten yüzeyidir.

Theorem 3.4.5. $c > 0$ ve $a > 0$ veya $c < 0$ ve $a < 0$ olmak üzere M bir spacelike tubular linear Weingarten yüzeyi olsun.

$$(a) r < 0 \text{ veya } r > \frac{2a}{c} \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike eliptik linear Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(b) 0 < r < \frac{2a}{c} \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike hiperbolik linear Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(c) r = 0 \text{ veya } r = \frac{2a}{c} \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike tubular linear Weingarten yüzeyidir.}$$

Theorem 3.4.6. $c > 0$ ve $a < 0$ veya $c < 0$ ve $a > 0$ olmak üzere M bir spacelike tubular linear Weingarten yüzeyi olsun.

$$(a) r < \frac{2a}{c} \text{ veya } r > 0 \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike eliptik linear Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(b) \frac{2a}{c} < r < 0 \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike hiperbolik linear Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(c) r = 0 \text{ veya } r = \frac{2a}{c} \text{ ise } M_r \text{ bir spacelike tubular linear Weingarten yüzeyidir.}$$

Teorem 3.4.7. $c_r = 0$ olmak üzere M_r bir spacelike lineer Weingarten yüzeyi olsun. Bu taktirde M ve M_r spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeylerdir.

Teorem 3.4.8. $c_r \neq 0$ olmak üzere M_r bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyi olsun.

(a) $a_r^2 < b_r c_r$ ise M bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

(b) $a_r^2 = b_r c_r$ olsun.

(b.i) $r \neq -\frac{a_r}{c_r}$ ise M bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

(b.ii) $r = -\frac{a_r}{c_r}$ ise M bir spacelike tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

(c) $a_r^2 > b_r c_r$ ve $c_r > 0$ olsun.

(c.i) $\frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right) < r < \frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ ise M bir

spacelike hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

(c.ii) $r < \frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ veya $r > \frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ ise M

bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

(c.iii) $r = \frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ veya $r = \frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ ise

M bir spacelike tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

(d) $a_r^2 > b_r c_r$ ve $c_r < 0$ olsun.

(d.i) $\frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right) < r < \frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ ise M bir

spacelike hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

(d.ii) $r < \frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ veya $r > \frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ ise M

bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(d.iii) \ r = \frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right) \text{ veya } r = \frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right) \text{ ise}$$

M bir spacelike tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.4.9. $c_r \neq 0$ olmak üzere M_r bir spacelike hiperbolik lineer Weingarten yüzeyi olsun.

(a) $a_r^2 < b_r c_r$ ise M bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

(b) $a_r^2 = b_r c_r$ olsun.

(b.i) $r < -\frac{a_r}{c_r}$ veya $r > -\frac{a_r}{c_r}$ ise M bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

(b.ii) $r = -\frac{a_r}{c_r}$ ise M bir spacelike tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

(c) $b_r c_r < a_r^2 < -4b_r c_r$ ve $c_r > 0$ olsun.

(c.i) $\frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right) < r < \frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ ise M bir

spacelike hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

(c.ii) $r < \frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ veya $r > \frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ ise M

bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

(c.iii) $r = \frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ veya $r = \frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ ise

M bir spacelike tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

(d) $a_r^2 > b_r c_r$ ve $c_r < 0$ olsun.

(d.i) $\frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right) < r < \frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ ise M bir

spacelike hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.

(d.ii) $r < \frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ veya $r > \frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right)$ ise M

bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.

$$(d.iii) \ r = \frac{1}{c_r} \left(-a_r + \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right) \text{ veya } r = \frac{1}{c_r} \left(-a_r - \frac{2}{5} \sqrt{5(a_r^2 - b_r c_r)} \right) \text{ ise}$$

M bir spacelike tubular lineer Weingarten yüzeyidir.

Teorem 3.4.10. $c_r > 0$ ve $a_r > 0$ veya $c_r < 0$ ve $a_r < 0$ olmak üzere M_r bir spacelike tubular lineer Weingarten yüzeyi olsun.

$$(a) \ r < -\frac{2a_r}{c_r} \text{ veya } r > 0 \text{ ise } M \text{ bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(b) \ -\frac{2a_r}{c_r} < r < 0 \text{ ise } M \text{ bir spacelike hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(c) \ r = 0 \text{ veya } r = -\frac{2a_r}{c_r} \text{ ise } M \text{ bir spacelike tubular lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

Teorem 3.4.11. $c_r > 0$ ve $a_r < 0$ veya $c_r < 0$ ve $a_r > 0$ olmak üzere M_r yüzeyi spacelike tubular lineer Weingarten yüzeyi olsun.

$$(a) \ r < 0 \text{ veya } r > -\frac{2a_r}{c_r} \text{ ise } M \text{ bir spacelike eliptik lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(b) \ 0 < r < -\frac{2a_r}{c_r} \text{ ise } M \text{ bir spacelike hiperbolik lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

$$(c) \ r = 0 \text{ veya } r = -\frac{2a_r}{c_r} \text{ ise } M \text{ bir spacelike tubular lineer Weingarten yüzeyidir.}$$

4 E_1^3 DE $aH + bK = c$ BAĞINTISINI SAĞLAYAN NON-DEJENERE DÖNEL YÜZEYLER

Bu bölümde E_1^3 de $aH + bK = c$ bağıntısını sağlayan spacelike ve timelike dönel yüzeyler incelenmiştir. Dönme ekseninin causal karakterine bağlı olarak yüzeyler belirlenmiştir.

4.1 E_1^3 de Dönel Yüzeyler

Tanım 4.1. E_1^3 de L doğrusunu sabit bırakan dönme grupları altında değişmez kalan yüzeye dönel yüzey denir.

İkinci bölümde E_1^3 de L dönme eksenini sabit bırakan ve bu eksenin causal karakterine bağlı olarak izometri gruplarını

$$R_v : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$R_v : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$R_v : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos v & -v & v \\ v & 1 - \frac{v^2}{2} & \frac{v^2}{2} \\ 0 & -\frac{v^2}{2} & 1 + \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde vermiştik.

Bir dönel yüzey $\alpha = \alpha(u)$ düzlemsel eğrisi tarafından üretilir ve dönel yüzeyin noktalarının kümesi $\{R_v(\alpha(u)); u \in I, v \in \mathbb{R}\}$ dir. Şimdi dönme eksenlerine göre bir dönel yüzeyin parametrizasyonunu verelim.

(1) **L timelike eksen ise:** $L = \langle E_3 \rangle$ olsun. $p = (x_0, y_0, z_0) \notin L$ ise $\{R_v(p); v \in \mathbb{R}\}$ kümesi $z = z_0$ düzleminde yarıçapı $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ olan bir çemberdir. $y = 0$ düzleminde

$\alpha(u) = (u, 0, z(u))$ eğrisi tarafından üretilen dönel yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, z(u)), \quad u \neq 0 \quad (4.1)$$

olur.

(2) L spacelike eksen ise: $L = \langle E_1 \rangle$ olsun. $p = (x_0, y_0, z_0) \notin L$ ise $\{R_v(p); v \in \mathbb{R}\}$ kümesi $x = x_0$ düzleminde denklemi $y^2 - z^2 = y_0^2 - z_0^2$ olan bir hiperbol belirtir. Bu dönel yüzeyler parametrik olarak iki şekilde belirtilir.

(2.a) $y = 0$ düzleminde $\alpha(u) = (u, 0, z(u))$ eğrisi tarafından üretilen dönel yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = (u, z(u) \sinh v, z(u) \cosh v), \quad u \neq 0 \quad (4.2)$$

olur.

(2.b) $z = 0$ düzleminde $\alpha(u) = (u, z(u), 0)$ eğrisi tarafından üretilen dönel yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = (u, z(u) \cosh v, z(u) \sinh v), \quad u \neq 0 \quad (4.3)$$

olur.

(3) L lightlike eksen ise: L doğrusunu $v_1 = (0, 1, 1)$ olarak alalım. $\langle e_1, v_1 \rangle$ düzleminde olmayan $p = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının $\{R_v(p); v \in \mathbb{R}\}$ yörüngesi

$$\beta(v) = (x - (y - z), xv + y - (y - z)\frac{v^2}{2}, xv + z - (y - z)\frac{v^2}{2})$$

eğrisidir. β eğrisi, $y - z = y_0 - z_0$ düzleminde bir parabol belirtir. Gerçekten

$$\beta(v) = (x, y, z) + v(-(y - z)e_1 + xv_1) - \frac{y - z}{2}v^2v_1$$

dir. $\langle (0, 1, 1), (0, 1, -1) \rangle$ düzleminde $\alpha(u) = (0, u + z(u), -u + z(u))$ eğrisi tarafından üretilen dönel yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = (-2uv, z(u) + u - uv^2, z(u) - u - uv^2), \quad u \neq 0 \quad (4.4)$$

olur.

$X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E_1^3$, M yüzeyinin bir parametrizasyonu olsun. Birinci ve ikinci temel formun katsayıları olan $\{E, F, G\}$ ve $\{e, f, g\}$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle, & F &= \langle X_u, X_v \rangle, & G &= \langle X_v, X_v \rangle \\ e &= -\langle N_u, X_u \rangle, & f &= -\langle N_u, X_v \rangle, & g &= -\langle N_v, X_v \rangle \end{aligned}$$

olmak üzere M nin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği

$$H = -\frac{\varepsilon eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \quad \text{ve} \quad K = -\varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

ile verilir. Burada

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{\varepsilon(EG - F^2)}}$$

dir.

$$W = EG - F^2 = \varepsilon \|X_u \times X_v\|^2 \begin{cases} \text{pozitif ise } M \text{ yüzeyi spacelike} \\ \text{negatif ise } M \text{ yüzeyi timelike} \end{cases}$$

olduğundan

$$H = -\frac{\varepsilon G \det(X_u, X_v, X_{uu}) - 2F \det(X_u, X_v, X_{uv}) + E \det(X_u, X_v, X_{vv})}{2(\varepsilon(EG - F^2))^{\frac{3}{2}}} := \frac{H_1}{2W^{\frac{3}{2}}} \quad (4.5)$$

ve

$$K = -\frac{\det(X_u, X_v, X_{uu}) \det(X_u, X_v, X_{vv}) - E \det(X_u, X_v, X_{uv})^2}{(EG - F^2)^2} := \frac{K_1}{W^2} \quad (4.6)$$

elde edilir.

Minkowski uzayında pseudohiperbolik yüzeyler ve pseudoküreler, Öklid uzayında kürelerle aynı özellikleri gösterirler. $p_0 \in E_1^3$ ve $r > 0$ ise p_0 merkezli $r > 0$ yarıçaplı pseudohiperbolik yüzey

$$H^{2,1}(r, p_0) = \{p \in E_1^3 : \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = -r^2\}$$

ve p_0 merkezli $r > 0$ yarıçaplı pseudoküre

$$S^{2,1}(r, p_0) = \{p \in E_1^3 : \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = r^2\}$$

şeklindedir. İki yüzey için de $N(p) = (p - p_0)/r$ dir ve $S = -\frac{1}{r}I$ olur. Bu taktirde $H = \varepsilon/r$ ve $K = -\varepsilon/r^2$ dir.

4.2 Ekseni Timelike Olan Dönel Yüzeyler

M dönel yüzeyini üreten α eğrisinin $y = 0$ düzleminde olduğu kabul edilsin ve α eğrisi $\alpha(u) = (u, 0, z(u))$, $u > 0$ alınsın. Bu taktirde M yüzeyinin parametrik denklemi (4.1) şeklindedir. $W = u^2(1 - z^2)$ olduğundan $z'^2 < 1$ ise M yüzeyi spacelike ve $z'^2 > 1$ ise M yüzeyi timelike olur. (4.5) ve (4.6) dan M yüzeyinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon z'}{u\sqrt{\varepsilon(1 - z'^2)}} + \frac{z''}{(\varepsilon(1 - z'^2))^{3/2}} \right), \quad K = -\frac{z'z''}{u(1 - z'^2)^2}$$

elde edilir. $aH + bK = c$ bağıntısına göre

$$\frac{a}{2} \left(\frac{\varepsilon z'}{u\sqrt{\varepsilon(1 - z'^2)}} + \frac{z''}{(\varepsilon(1 - z'^2))^{3/2}} \right) + b \frac{z'z''}{u(1 - z'^2)^2} = -c$$

bulunur. İfadenin her iki tarafı u ile çarpılarak integrali alınırsa

$$a \left(u \frac{\varepsilon z'}{\sqrt{\varepsilon(1 - z'^2)}} \right)' + b \left(\frac{1}{1 - z'^2} \right)' = -2cu$$

elde edilir. Bu taktirde $\lambda \in \mathbb{R}$ integral sabiti olmak üzere

$$\varepsilon \frac{auz'}{\sqrt{\varepsilon(1 - z'^2)}} + \frac{b}{1 - z'^2} = -cu^2 + \lambda \quad (4.7)$$

bulunur.

$$\phi = \frac{z'}{\sqrt{\varepsilon(1 - z'^2)}}$$

olsun. Bu taktirde

$$1 + \varepsilon\phi^2 = 1/(1 - z'^2)$$

elde edilir. (4.7) tekrar düzenlenirse

$$b\phi^2 + au\phi + \varepsilon(b + cu^2 - \lambda) = 0 \quad (4.8)$$

dır. (4.8), ϕ fonksiyonuna bağlı ikinci dereceden bir denklem olarak düşünülürse

$$\frac{z'}{\sqrt{\varepsilon(1 - z'^2)}} = \frac{-au \pm \sqrt{(a^2 - 4bc\varepsilon)u^2 + 4b\varepsilon(-b + \lambda)}}{2b}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümünü $\lambda = b$ ve $a^2 - 4bc\varepsilon = 0$ durumları için inceleyelim.

(1) $\lambda = b$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{z'}{\sqrt{\varepsilon(1-z'^2)}} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc\varepsilon}}{2b} u = Cu, \quad C = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc\varepsilon}}{2b}$$

dır. Bu diferensiyel denklem çözülürse

$$z(u) = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon + C^2 u^2}}{C} + \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu takdirde (4.1) den, yüzey $x^2 + y^2 - (z - \mu)^2 = -\frac{\varepsilon}{C^2}$ denklemini sağlar. $p_0 = (0, 0, \mu)$ noktası için $\varepsilon = 1$ ise M yüzeyi $H^{2,1}(1/|C|, p_0)$ pseudohiperbolik yüzeyi ve $\varepsilon = -1$ ise M yüzeyi $S^{2,1}(1/|C|, p_0)$ pseudoküresidir.

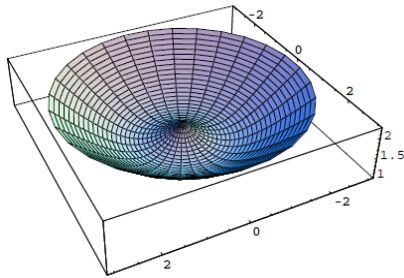
(2) $a^2 - 4bc\varepsilon = 0$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{z'}{\sqrt{\varepsilon(1-z'^2)}} = \frac{-au \pm C}{2b}, \quad C = 2\sqrt{b\varepsilon(-b + \lambda)}$$

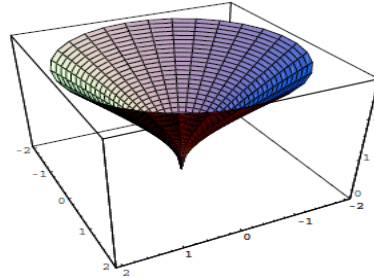
dır. Bu diferensiyel denklem çözülürse

$$z(u) = \pm \sqrt{\frac{4\varepsilon b^2}{a^2} + \left(\frac{C}{a} \pm u\right)^2} + \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

elde edilir.



Şekil 4.1.



Şekil 4.2

Şekil 4.1. $a = 2$, $b = \varepsilon$, $\mu = 0$ ve $\lambda = 2$ için ekseni timelike olan spacelike dönel yüzey

Şekil 4.2. $a = 2$, $b = \varepsilon$, $\mu = 0$ ve $\lambda = 0$ için ekseni timelike olan timelike dönel yüzey

4.3 Ekseni Spacelike Olan Dönel Yüzeyler

Ekseni spacelike olan dönel yüzey için farklı iki parametrizasyon bulunduğundan yüzeyi iki farklı durum için inceleyeceğiz.

(a) M yüzeyini üreten α eğrisinin $y = 0$ düzleminde bulunduğu kabul edilsin. α eğrisi $\alpha(u) = (u, 0, z(u))$ ise M yüzeyinin parametrik denklemi (4.2) şeklindedir. (4.5) ve (4.6) dan M yüzeyinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{z\sqrt{\varepsilon(1-z'^2)}} + \frac{z''}{(\varepsilon(1-z'^2))^{3/2}} \right), \quad K = -\frac{z''}{z(1-z'^2)^2}$$

bulunur. $aH + bK = c$ bağıntısına göre

$$\frac{a}{2} \left(\frac{\varepsilon}{z\sqrt{1-z'^2}} + \frac{z''}{(\varepsilon(1-z'^2))^{3/2}} \right) + b \frac{z''}{z(1-z'^2)^2} = -c$$

elde edilir. İfadenin her iki tarafı zz' ile çarpılarak integrali alınırsa

$$a \left(\frac{\varepsilon z}{\sqrt{\varepsilon(1-z'^2)}} \right)' + b \left(\frac{1}{1-z'^2} \right)' = -c(z^2)'$$

bulunur. Bu taktirde $\lambda \in \mathbb{R}$ integral sabiti olmak üzere

$$\varepsilon \frac{az}{\sqrt{\varepsilon(1-z'^2)}} + \frac{b}{1-z'^2} = -cz^2 + \lambda \quad (4.9)$$

elde edilir.

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(1-z'^2)}}$$

olsun. (4.9) tekrar düzenlenirse

$$b\phi^2 + az\phi + \varepsilon(cz^2 - \lambda) = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.10), ϕ fonksiyonuna bağlı ikinci dereceden bir denklem olarak düşünlürse

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(1-z'^2)}} = \frac{-az \pm \sqrt{(a^2 - 4bc\varepsilon)z^2 + 4b\varepsilon\lambda}}{2b}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümünü $\lambda = 0$ ve $a^2 - 4bc\varepsilon = 0$ durumları için inceleyelim.

(a.1) $\lambda = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(1-z'^2)}} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc\varepsilon}}{2b} z = Cz, \quad C = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc\varepsilon}}{2b}$$

dır. Bu diferensiyel denklem çözümlerse

$$z(u) = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{C^2} + (u \pm C\mu)^2}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu taktirde (4.2) den, yüzey $(x \pm C\mu)^2 + y^2 - z^2 = -\frac{\varepsilon}{C^2}$ denklemini sağlar. $p_0 = (\pm C\mu, 0, 0)$ noktası için $\varepsilon = 1$ ise M yüzeyi $H^{2,1}(1/|C|, p_0)$ pseudohiperbolik yüzeyi ve $\varepsilon = -1$ ise M yüzeyi $S^{2,1}(1/|C|, p_0)$ pseudoküresidir.

(a.2) $a^2 - 4bc\varepsilon = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{z'}{\sqrt{\varepsilon(1-z'^2)}} = \frac{-au \pm C}{2b}, \quad C = 2\sqrt{b\varepsilon\lambda}$$

dır. Bu diferensiyel denklem çözümlerse

$$z(u) = \pm \frac{C}{a} \pm \sqrt{\frac{4\varepsilon b^2}{a^2} \pm (u \pm \mu)^2}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

(b) M yüzeyini üreten α eğrisinin $z = 0$ düzleminde bulunduğu kabul edilsin. α eğrisi $\alpha(u) = (u, z(u), 0)$ ise M yüzeyinin parametrik denklemi (4.3) şeklindedir. Bu durumda $EG - F^2 = -z^2(1 + z'^2) < 0$ olduğundan M timelike bir yüzeydir. (4.5) ve (4.6) dan M yüzeyinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{z\sqrt{\varepsilon(1+z'^2)}} + \frac{z''}{(\varepsilon(1+z'^2))^{3/2}} \right), \quad K = -\frac{z''}{z(1+z'^2)^2}$$

bulunur. $aH + bK = c$ bağıntısına göre

$$\frac{a}{2} \left(\frac{-1}{z\sqrt{1+z'^2}} + \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} \right) - b \frac{z''}{z(1+z'^2)^2} = c$$

elde edilir. İfadenin her iki tarafı zz' ile çarpılarak integrali alınırsa

$$-a \left(\frac{z}{\sqrt{1+z'^2}} \right)' + b \left(\frac{1}{1+z'^2} \right)' = c(z^2)'$$

bulunur. Bu taktirde $\lambda \in \mathbb{R}$ integral sabiti olmak üzere

$$-\frac{az}{\sqrt{1+z'^2}} + \frac{b}{1+z'^2} = cz^2 + \lambda \quad (4.11)$$

elde edilir.

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}$$

olsun. (4.11) tekrar düzenlenirse

$$b\phi^2 - az\phi - cz^2 - \lambda = 0 \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12), ϕ fonksiyonuna bağlı ikinci dereceden bir denklem olarak düşünülürse

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{az \pm \sqrt{(a^2 + 4bc\varepsilon)z^2 + 4b\lambda}}{2b}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümlerini $\lambda = 0$ ve $a^2 - 4bc\varepsilon = 0$ durumları için inceleyelim.

(b.1) $\lambda = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4bc}}{2b} z = Cz, \quad C = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4bc}}{2b}$$

dır. Bu diferensiyel denklem çözümlürse

$$z(u) = \pm \sqrt{\frac{1}{C^2} - (u \pm C\mu)^2}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu taktirde (4.3) den, yüzey $(x \pm C\mu)^2 + y^2 - z^2 = \frac{1}{C^2}$ denklemini sağlar.

$p_0 = (\pm C\mu, 0, 0)$ noktası için M yüzeyi $S^{2,1}(1/|C|, p_0)$ pseudoküresidir.

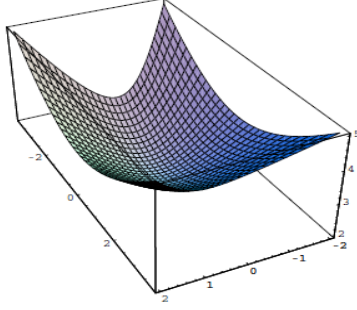
(b.2) $a^2 - 4bc = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{az \pm C}{2b}, \quad C = 2\sqrt{b\lambda}$$

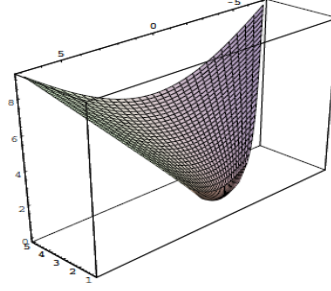
dır. Bu diferensiyel denklem çözümlürse

$$z(u) = -\frac{C}{a} \pm \sqrt{\frac{4b^2}{a^2} \pm (u \pm \mu)^2}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

elde edilir.



Şekil 4.3



Şekil 4.4

Şekil 4.3. $a = 2$, $b = \varepsilon$, $\mu = 0$ ve $\lambda = 1$ için ekseni spacelike olan spacelike döneel yüzey

Şekil 4.4. $a = 2$, $b = \varepsilon$, $\mu = 0$ ve $\lambda = 1$ için ekseni spacelike olan timelike döneel yüzey

4.4 Ekseni Lightlike Olan Döneel Yüzeyler

M yüzeyini üreten α eğrisinin $\langle(0, 1, 1), (0, 1, -1)\rangle$ düzleminde bulunduğu kabul edilsin. α eğrisi $\alpha(u) = (0, u + z(u), -u + z(u))$ ise M yüzeyinin parametrik denklemi (4.4) şeklindedir. (4.5) ve (4.6) dan M yüzeyinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2u\sqrt{\varepsilon z'}} - \frac{\varepsilon z''}{4(\varepsilon z')^{3/2}} \right), \quad K = \frac{z''}{8uz'^2}$$

bulunur. $aH + bK = c$ bağıntısına göre

$$\frac{a}{2} \left(\frac{1}{2u\sqrt{\varepsilon z'}} - \frac{\varepsilon z''}{4(\varepsilon z')^{3/2}} \right) + b \frac{z''}{8uz'^2} = c$$

elde edilir. İfadenin her iki tarafı u ile çarpılarak integrali alınırsa

$$\frac{a}{4} \left(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon z'}} \right)' - \frac{b}{8} \left(\frac{1}{z'} \right)' = cu$$

bulunur. Bu taktirde $\lambda \in \mathbb{R}$ integral sabiti olmak üzere

$$\frac{a}{4} \left(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon z'}} \right) - \frac{b}{8z'} = \frac{c}{2}u^2 + \lambda \quad (4.13)$$

elde edilir.

$$\phi = \sqrt{\varepsilon z'}$$

olsun. (4.13) tekrar düzenlenirse

$$(4\varepsilon u^2 + 8\varepsilon\lambda)\phi^2 - 2a\varepsilon\phi u + b = 0 \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.14), ϕ fonksiyonuna bağlı ikinci dereceden bir denklem olarak düşünülürse

$$\sqrt{\varepsilon z'} = \frac{a\varepsilon u \pm \sqrt{(a^2 - 4bc\varepsilon)u^2 - 8b\varepsilon\lambda}}{4\varepsilon(cu^2 + 2\lambda)}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümünü $\lambda = 0$ ve $a^2 - 4bc\varepsilon = 0$ durumları için inceleyelim.

(1) $\lambda = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\sqrt{\varepsilon z'} = \frac{a \pm \varepsilon\sqrt{a^2 - 4bc\varepsilon}}{4c} \frac{1}{u} = \frac{C}{u}, \quad C = \frac{a \pm \varepsilon\sqrt{a^2 - 4bc\varepsilon}}{4c}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklem çözümlerse

$$z(u) = -\frac{\varepsilon C^2}{u} + \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

bulunur. Bu taktirde (4.4) den, yüzey $x^2 + y^2 - (z - \mu)^2 = -4\varepsilon C^2$ denklemini sağlar. $p_0 = (0, 0, \mu)$ noktası için $\varepsilon = 1$ ise M yüzeyi $H^{2,1}(2|C|, p_0)$ pseudohiperbolik yüzeyi ve $\varepsilon = -1$ ise M yüzeyi $S^{2,1}(2|C|, p_0)$ pseudoküresidir.

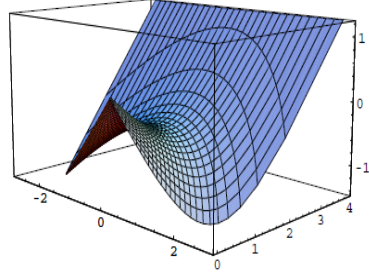
(2) $a^2 - 4bc\varepsilon = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\sqrt{\varepsilon z'} = \frac{a\varepsilon u \pm C}{4\varepsilon(cu^2 + 2\lambda)}, \quad C = \sqrt{-8b\varepsilon\lambda}$$

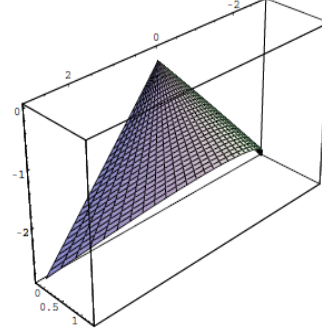
elde edilir. $8b\varepsilon\lambda > 0$ ve $a^2 - 4bc\varepsilon = 0$ olduğundan $c\lambda \leq 0$ dır. Yukarıdaki diferensiyel denklem çözümlerse $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$z(u) = \frac{1}{64} \left(\frac{\pm 4aC\lambda \pm \varepsilon(cC^2 - 2a^2\lambda)u}{c\lambda(2\lambda + cu^2)} + \varepsilon \frac{cC^2 + 2a^2\lambda}{\sqrt{-2c^3\lambda^3}} \arctan h \left(\sqrt{-\frac{c}{2\lambda}} u \right) \right) + \mu$$

elde edilir.



Şekil 4.5



Şekil 4.6

Şekil 4.5. $a = 2$, $b = -\varepsilon$, $\lambda = 1$ ve $\mu = 0$ için eksenli lightlike olan spacelike döneel yüzey

Şekil 4.6. $a = 2$, $b = -\varepsilon$, $\lambda = 1$ ve $\mu = 0$ için eksenli lightlike olan timelike döneel yüzey

Teorem 4.1. M , E_1^3 de bir non-dejenere döneel yüzey olsun. $a^2 - 4bc\varepsilon = 0$ olmak üzere M yüzeyinin lineer Weingarten yüzeyi olduğunu kabul edelim. Dönme ekseninin causal karakterine bağlı olarak M yüzeyinin parametrik denklemi aşağıdaki gibidir:

(1) Dönme eksenli timelike ise

$$z(u) = \pm \sqrt{\frac{4\varepsilon b^2}{a^2} + \left(\frac{C}{a} \pm u\right)^2} + \mu, \quad C = 2\sqrt{b\varepsilon(-b + \lambda)}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

olmak üzere M yüzeyinin parametrik denklemi

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, z(u))$$

şeklindedir.

(2) Dönme eksenli spacelike ise iki durum vardır:

(2.a)

$$z(u) = \pm \frac{C}{a} \pm \sqrt{\frac{4\varepsilon b^2}{a^2} \pm (u \pm \mu)^2}, \quad C = 2\sqrt{b\varepsilon\lambda}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

olmak üzere M yüzeyinin parametrik denklemi

$$X(u, v) = (u, z(u) \sinh v, z(u) \cosh v)$$

şeklindedir.

(2.b)

$$z(u) = -\frac{C}{a} \pm \sqrt{\frac{4b^2}{a^2} \pm (u \pm \mu)^2}, \quad C = 2\sqrt{b\lambda}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

olmak üzere M yüzeyinin parametrik denklemi

$$X(u, v) = (u, z(u) \cosh v, z(u) \sinh v)$$

şeklindedir.

(3) Dönme eksenini lightlike ise

$$z(u) = \frac{1}{64} \left(\frac{\pm 4aC\lambda \pm \varepsilon(cC^2 - 2a^2\lambda)u}{c\lambda(2\lambda + cu^2)} + \varepsilon \frac{cC^2 + 2a^2\lambda}{\sqrt{-2c^3\lambda^3}} \arctan h \left(\sqrt{-\frac{c}{2\lambda}} u \right) \right) + \mu, \quad \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

olmak üzere M yüzeyinin parametrik denklemi

$$X(u, v) = (-2uv, z(u) + u - uv^2, z(u) - u - uv^2)$$

şeklindedir.

5 E_1^3 DE ÇEMBERLERİN FOLİASYONU İLE ELDE EDİLEN LİNEER WEİNGARTEN YÜZEYLERİ

Bu bölümde E_1^3 de çember parçalarının foliasyonu ile elde edilen ve $a^2 + b^2 \neq 0$ olmak üzere a, b, c sabitleri için $aH + bK = c$ koşulunu sağlayan spacelike lineer Weingarten yüzeyler incelenmiştir. Bu yüzeylerin dönel yüzey veya $H = 0$ sabit ortalama eğrilikli yüzey veya $K = 0$ sabit Gauss eğrilikli yüzey olduğu gösterilmiştir. İlk olarak çalışmamızda kullandığımız temel tanımları ve kavramları verelim.

E_1^3 de bir spacelike M yüzeyini alalım. M yüzeyinin düzlemsel bir bölgede tanımlı $X = X(u, v)$ lokal parametrizasyonunu ele alalım. Bu parametrizasyon kullanılarak (2.6) ve (2.7) den M nin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği sırasıyla

$$H = -\frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \quad K = -\frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

şeklindedir. Spacelike bir yüzey için

$$W = EG - F^2 = \|X_u \times X_v\|^2$$

fonksiyonu pozitiftir. $[\cdot, \cdot]$ ile E^3 deki determinant fonksiyonu gösterilirse

$$H = -\frac{G[X_u, X_v, X_{uu}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + E[X_u, X_v, X_{vv}]}{2W^{3/2}} \quad (5.1)$$

$$K = -\frac{[X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2}{W^2} \quad (5.2)$$

olur. M yüzeyi lineer Weingarten yüzeyi ise $aH + bK = c$ koşulunu sağlar. Bu eşitlikte (5.1) ve (5.2) kullanılırsa

$$a \frac{G[X_u, X_v, X_{uu}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + E[X_u, X_v, X_{vv}]}{2W^{3/2}} + b \frac{[X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2}{W^2} = c \quad (5.3)$$

elde edilir.

$c = 0$ ise, (5.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & a \frac{G[X_u, X_v, X_{uu}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + E[X_u, X_v, X_{vv}]}{2W^{3/2}} \\ & = -b \frac{[X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2}{W^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

bulunur. (5.4) eşitliğinde payda eşitlenerek her iki tarafın kareleri alınırsa

$$\begin{aligned} & a^2 (G[X_u, X_v, X_{uu}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + E[X_u, X_v, X_{vv}])^2 W \\ & - 4b^2 ([X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2)^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

elde edilir.

$c \neq 0$ ise (5.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & a^2 (G[X_u, X_v, X_{uu}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + E[X_u, X_v, X_{vv}])^2 W \\ & - 4(cW^2 - b([X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2))^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

elde edilir.

Tanım 5.1. E_1^3 de bir cyclic yüzey düzgün bir parametrelili çemberlerin ailesinin belirlediği bir yüzeydir.

Öyleyse cyclic yüzey, çemberlerin foliasyonu ile elde edilen bir yüzeydir. Yani cyclic yüzeyin bir parametrelili düzlemlerin ailesi ile arakesiti çemberdir. Cyclic yüzey spacelike ise foliasyonun her bir çemberi bir spacelike eğridir. Fakat çemberlerin bulunduğu düzlemler herhangi bir causal karaktere sahip olabilir. Dolayısıyla bu düzlemlerin spacelike, timelike veya lightlike oluşuna göre cyclic yüzeyleri incelemek gerekir.

Foliasyon düzlemlerinin paralel olduğunu varsayarak aşağıda verilen teoremi ispatladık.

Teorem 5.1. M yüzeyi E_1^3 de bir spacelike cyclic yüzey ve foliasyon düzlemleri paralel olsun. Eğer M yüzeyi lineer Weingarten yüzeyi ise M aşağıdaki yüzeylerden birisidir:

1. M bir dönele yüzeydir.
2. M , $H = 0$ şartını sağlayan yüzey örneklerinden birisidir.
3. M , $K = 0$ şartını sağlayan yüzey örneklerinden birisidir.

İspat Birbirine paralel düzlemlerde bulunan çemberlerin foliasyonu ile elde edilen bir $M \subset E_1^3$ spacelike yüzeyini düşünelim. Foliasyon düzlemlerinin spacelike, timelike ve lightlike olmasına bağlı olarak üç durum bulunmaktadır. Her bir durumda $aH + bK = c$ bağıntısına göre ispatı $c = 0$ ve $c \neq 0$ durumları için inceleyeceğiz.

I. Düzlemler spacelike ise:

E_1^3 in bir katı hareketinden sonra düzlemlerin $x_3 = 0$ düzlemine paralel olduğunu kabul edebiliriz. Burada çemberler yatay Öklid çemberleridir. f, g ve $r > 0$, I aralığı üzerinde u değişkenine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere M cyclic yüzeyinin parametrik denklemi

$$X(u, v) = (f(u), g(u), u) + r(u)(\cos v, \sin v, 0) \quad (5.7)$$

ile verilir. M nin bir dönel yüzey olması için gerek ve yeter koşul f ve g fonksiyonlarının sabit olmasıdır.

$c = 0$ durumu:

(5.5) eşitliğinde genelliği bozmadan $4b^2 = 1$ kabul edelim. Yüzeyin $X(u, v)$ parametrik denklemi kullanılarak (5.5) hesaplanırsa A_j ve B_j , I üzerinde u değişkenine bağlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\sum_{j=0}^4 A_j(u) \cos(v) + B_j(u) \sin(v) = 0 \quad (5.8)$$

elde edilir. Kabul edelim ki M dönel yüzey olmasın. Öyleyse en az bir aralıkta f' veya g' fonksiyonları sıfırdan farklı olduğundan ispatı f ve g fonksiyonlarına göre inceleyeceğiz.

(1) f veya g fonksiyonlarından birisinin sabit fonksiyon olduğunu düşünelim. Kabul edelim ki en az bir aralıkta $f' = 0$ ve $g' \neq 0$ olsun. Bu durumda (5.8) eşitliğinden A_4 katsayısı

$$A_4 = \frac{1}{8} a^2 r^6 g'^2 (r g'' - 2r' g')^2$$

elde edilir. $g' \neq 0$ olduğundan yukarıdaki eşitlikten $r g'' - 2r' g' = 0$ sonucuna varılır.

Bu diferensiyel denklem g' için çözümlerse

$$g' = \lambda r^2, \quad \lambda \neq 0$$

bulunur. Eşitlik A_2 ve B_1 katsayılarında kullanılırsa

$$A = -1 + \lambda^2 r^4 + r'^2 - r r''$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2} \lambda^2 r^8 (4r'^2 - a^2 r^2 A^2), \\ B_1 &= 2\lambda r^7 r' (a^2 r A^2 - 2r'') \end{aligned}$$

elde edilir. İlk olarak $B_1 = 0$ denkleminde $r' = 0$ olduğunu düşünelim. Bu durumda $A_2 = 0$ eşitliğinin sağlanması için $A = -1 + \lambda^2 r^4 = 0$ olmalıdır. Bu taktirde birinci temel formun katsayılarından $E = 0$ olur. $E = 0$ ise $W < 0$ dır. Fakat yüzeyimiz bir spacelike yüzey olduğundan $W > 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $r' \neq 0$ dır. Bu durumda $A_2 = 0$ denkleminde

$$4r'^2 - a^2 r^2 A^2 = 0 \quad (5.9)$$

ve $B_1 = 0$ denkleminde ise

$$a^2 r A^2 - 2r'' = 0 \quad (5.10)$$

bulunur. (5.10) eşitliği r ile çarpılarak, (5.9) eşitliği ile taraf tarafa toplanırsa $2r'^2 - r r'' = 0$ diferensiyel denklemi elde edilir. Buna göre

$$r(u) = \frac{c_2}{u + c_1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dir. Bu eşitlik $A_2 = 0$ denkleminde kullanılırsa

$$-4(u + c_1)^6 + a^2((u + c_1)^4 + c_2^2 - \lambda^2 c_2^4)^2 = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte katsayılar sıfır olacağından u^8 in katsayısı $a^2 = 0$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. Öyleyse f sabit bir fonksiyon değildir. $g' = 0$ ve $f' \neq 0$ ise ispatı benzer biçimde yapabiliriz.

(2) f ve g fonksiyonlarının sabit olmadığını kabul edelim. Bu taktirde $f', g' \neq 0$ dır. (5.8) eşitliğinden B_4 katsayısı

$$(-4f'g'r' + r f' f'' + r f' g'')(-2f'^2 r' + 2g'^2 r' + r f' f'' - r f' g'') = 0.$$

elde edilir. Burada iki durum vardır:

(2.a) $-4f'g'r' + rf'f'' + rf'g'' = 0$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse

$$f'' = \frac{4f'g'r' - rf'g''}{rg'} \quad (5.11)$$

dır. Bu eşitlik $A_4 = 0$ denkleminde kullanılırsa

$$a^2r^6(f'^2 + g'^2)^2(-2g'r' + rg'')^2 = 0$$

elde edilir. Burada $f'^2 + g'^2 \neq 0$ olduğundan $-2g'r' + rg'' = 0$ olmalıdır. Buna göre

$$g'' = \frac{2g'r'}{r} \quad (5.12)$$

dır. Bu denklemden $g' = \lambda r^2$, $\lambda > 0$ elde edilir. $g' = \lambda r^2$ eşitliği (5.11) denkleminde kullanılırsa $f' = \mu r^2$, $\mu > 0$ bulunur. f' ve g' fonksiyonları B_2 ve B_1 katsayılarında kullanılırsa $A = -1 + (\lambda^2 + \mu^2)r^4 + r'^2 - r''$ olmak üzere,

$$B_2 = \lambda\mu r^8(a^2r^2A^2 - 4r'^2),$$

$$B_1 = 2\lambda r^7r'(a^2rA^2 - 2r'')$$

olur. $B_1 = 0$ denkleminde $r' = 0$ olduğunu düşünelim. Bu durumda $B_2 = 0$ eşitliğinin sağlanması için $A = -1 + (\lambda^2 + \mu^2)r^4 = 0$ olmalıdır. Bu taktirde birinci temel formun katsayılarından $E = 0$ olur. $E = 0$ ise $W < 0$ olur. Fakat yüzeyimiz bir spacelike yüzey olduğundan $W > 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $r' \neq 0$ dır. Bu durumda $B_2 = 0$ denkleminde

$$a^2r^2A^2 - 4r'^2 = 0 \quad (5.13)$$

ve $B_1 = 0$ denkleminde ise

$$a^2rA^2 - 2r'' = 0 \quad (5.14)$$

olmalıdır. (5.14) eşitliği r ile çarpılarak (5.13) eşitliği ile taraf tarafa toplanırsa $2r'^2 - rr'' = 0$ diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü

$$r(u) = \frac{c_2}{u + c_1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dir. Bu eşitlik $B_2 = 0$ denkleminde kullanılırsa

$$a^2(u + c_2)^8 - 4(u + c_2)^6 + 2a^2c_2^4(1 - c_2^2(\lambda^2 + \mu^2))(u + c_2)^4 + a^2c_2^4(1 - c_2^2(\lambda^2 + \mu^2))^2 = 0$$

elde edilir. Bu denkleminde katsayılar sıfır olduğundan u^8 in katsayısı olan $a^2 = 0$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir.

(2.b) $-2f'^2r' + 2g'^2r' + rf'f'' - rf'g'' = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu eşitlikten f'' çekilerek A_4 de yerine yazılırsa

$$A_4 = -\frac{a^2r^6(f'^2 + g'^2)^2}{8f'^2}(rg'' - 2g'r')^2$$

bulunur. $f'^2 + g'^2 \neq 0$ olduğundan $rg'' - 2g'r' = 0$ dır. Buna göre g'' fonksiyonu (5.12) eşitliğinde verilen g'' ile aynıdır. Bundan sonra ispatın devamı aynı şekilde yapılabilir.

$c \neq 0$ durumu:

(5.6) eşitliğinden A_8 ve B_8 katsayıları

$$\begin{aligned} A_8 &= -\frac{1}{32}c^2r^8(f'^8 - 28f'^6g'^2 + 70f'^2g'^6 + g'^8), \\ B_8 &= \frac{1}{4}c^2r^8f'g'(-f'^6 - 7f'^4g'^2 - 7f'^2g'^4 + g'^6) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$ düzlemsel eğrisi sabit olmadığından

$$f'(u) = \phi'(u) \cos(\phi(u)), \quad g'(u) = \phi'(u) \sin(\phi(u)), \quad \phi'^2 = f'^2 + g'^2 \quad (5.15)$$

olmak üzere eğriyi $(f(u), g(u)) = (x(\phi(u)), y(\phi(u)))$ yay uzunluklu olacak biçimde parametrelendirebiliriz. (5.15) eşitlikleri kullanılarak A_8 and B_8 katsayıları tekrar hesaplanırsa

$$\begin{aligned} A_8 &= -\frac{1}{32}c^2r^8\phi'^8 \cos(8\phi(u)), \\ B_8 &= -\frac{1}{32}c^2r^8\phi'^8 \sin(8\phi(u)) \end{aligned}$$

olur. $c \neq 0$ ve $r > 0$ olduğundan en az bir aralıkta $\phi' = 0$ dır. Bu durumda $f'^2 + g'^2 = 0$ olur. Yani α eğrisi sabit bir egridir. Bu ise kabulumüz ile çelişir.

II. Düzlemler timelike ise:

M yüzeyi, paralel timelike düzlemlerde bulunan çember foliasyonları ile elde edilen bir spacelike lineer Weingarten yüzeyi olsun. E_1^3 de yapılan bir hareketten sonra bu düzlemlerin $x_1 = 0$ düzlemine paralel olduğunu düşünebiliriz. Bu durumda f, g düzgün fonksiyonlar ve $r > 0$ olmak üzere yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = (u, f(u), g(u)) + r(u)(0, \sinh v, \cosh v) \quad (5.16)$$

şeklindedir. Yukarıdaki denklemden görüldüğü üzere M yüzeyi dikey hiperbollerin bir parametrelili ailesi kullanılarak elde edilmiştir. Spacelike durumda olduğu gibi f ve g fonksiyonlarının sabit olduğunu ispatlayarak, M nin bir dönel yüzey olduğunu göstereceğiz.

$c = 0$ durumu:

Spacelike düzlemler için yapılan ispatta olduğu gibi çelişkiye düşerek ispatı tamamlayacağız. Kabul edelim ki f, g fonksiyonları sabit olmasın. (5.16) kullanılarak (5.5) hesaplanırsa

$$\sum_{j=0}^4 A_j(u) \cos(jv) + B_j(u) \sin(jv) = 0 \quad (5.17)$$

elde edilir.

(1) f veya g fonksiyonlarından birisinin sabit fonksiyon olduğunu düşünelim. Kabul edelim ki en az bir aralıkta $f' = 0$ ve $g' \neq 0$ olsun. Bu durumda (5.17) eşitliğinden A_4 katsayısı

$$A_4 = \frac{1}{8} a^2 r^6 g'^2 (r g'' - 2r' g')^2$$

dır. Yukarıdaki eşitlikten $g' \neq 0$ olduğundan $r g'' - 2r' g' = 0$ sonucuna varılır. Bu diferensiyel denklem g' için çözümlürse

$$g' = \mu r^2, \quad \mu \neq 0$$

elde edilir. Bu eşitlik A_2 katsayısında kullanılırsa

$$A = -1 + \mu^2 r^4 - r'^2 + r r''$$

olmak üzere

$$A_2 = -\frac{1}{2}\mu^2 r^8 (4r'^2 + a^2 r^2 A^2)$$

elde edilir. $A_2 = 0$ eşitliğinin sağlanması için

$$r' = 0, \quad A = -1 + \mu^2 r^4 = 0$$

olmalıdır. Bu durumda birinci temel formun katsayılarından $E = 0$ olur. Yüzey space-like olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla f sabit bir fonksiyon değildir. $g' = 0$ ve $f' \neq 0$ ise ispat benzerdir.

(2) f ve g fonksiyonlarının sabit olmadığını kabul edelim. Öyleyse $f', g' \neq 0$ dir. (5.17) eşitliğinden B_4 katsayısı

$$(-4f'g'r' + rg'f'' + rf'g'')(-2f'^2r' - 2g'^2r' + rf'f'' + f'g'') = 0$$

dir.

(2.a) $-4f'g'r' + rf'f'' + rf'g'' = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$f'' = \frac{4f'g'r' - rf'g''}{rg'} \quad (5.18)$$

elde edilir. Bu eşitlik $A_4 = 0$ denkleminde kullanılırsa

$$A_4 = \frac{a^2 r^6 (f'^2 - g'^2)^2 (-2g'r' + rg'')^2}{8g'^2}$$

olur.

(2.a.1) $f'^2 - g'^2 = 0$ ise $g' = \pm f'$ dir. $g' = f'$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse $g = f + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$ dir. g fonksiyonu A_4 ve B_4 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} A_4 &= -a^2 r^6 f'^2 (-2f'r' + rf''), \\ B_4 &= a^2 r^6 f'^2 (-2f'r' + rf'')^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemlerde $f' \neq 0$ olduğundan $2f'r' = rf''$ dir. Bu denklemden λ pozitif sabiti için $f' = \lambda r^2$ elde edilir. Buna göre

$$A = 1 - r'^2 + rr''$$

olmak üzere A_2 katsayısı hesaplanırsa

$$A_2 = \lambda^2 r^8 (4r'^2 + a^2 r^2 A^2)$$

elde edilir. $A_2 = 0$ eşitliğinin sağlanması için

$$r' = 0, \quad A = 1 - r'^2 + rr'' = 0$$

olmalıdır. Fakat $r' = 0$ ise $A = 1$ olur. Bu takdirde $A_2 \neq 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. $g' = -f'$ ise ispat benzerdir.

(2.a.2) $rg'' = 2g'r'$ ise $g' = \mu r^2$, $\mu > 0$ dır. (5.18) kullanırsa $f' = \lambda r^2$, $\lambda > 0$ elde edilir. $A = -1 + (-\lambda^2 + \mu^2)r^4 + r'^2 - rr''$ olmak üzere A_2 katsayısını hesaplırsak

$$A_2 = -\frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2)r^8(a^2 r^2 A^2 + 4r'^2)$$

dır. $A_2 = 0$ eşitliğinin sağlanması için

$$r' = 0, \quad (\lambda^2 - \mu^2)r^4 = -1$$

olmalıdır. Bu eşitliklerle birlikte birinci temel formun katsayılarından $E = 0$ olmasıyla bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla f ve g sabit fonksiyonlardır.

(2.b) $-2f'^2 r' - 2g'^2 r' + r f' f'' + f' g'' = 0$ ise bu eşitlikten f'' elde edilerek A_4 denkleminde kullanılırsa

$$A_4 = \frac{a^2 r^6 (f'^2 - g'^2)^2 (-2g'r' + r g'')^2}{8g'^2}$$

bulunur. Buna göre

(2.b.1) $f'^2 - g'^2 = 0$ ise $g' = \pm f'$ dır. Bu durumda ispat (2.a.1) ile aynıdır.

(2.b.2) $rg'' = 2g'r'$ ise $g' = \lambda r^2$, $\lambda > 0$ dır. Bu durumda ise ispat (2.a.2) ile aynıdır.

$c \neq 0$ durumu:

(5.17) denkleminde A_8 ve B_8 katsayıları

$$\begin{aligned} A_8 &= -\frac{1}{32}c^2r^8(f'^8 + 28f'^6g'^2 + 70f'^2g'^6 + g'^8), \\ B_8 &= \frac{1}{4}c^2r^8f'g'(f + 7f'^4g'^2 + 7f'^2g'^4 + g'^6) \end{aligned}$$

olur. $\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$ düzlemsel eğrisi sabit olmadığından

$$f'(u) = \phi'(u) \cosh(\phi(u)), \quad g'(u) = \phi'(u) \sinh(\phi(u)), \quad \phi'^2 = f'^2 - g'^2$$

olmak üzere eğriyi $(f(u), g(u)) = (x(\phi(u)), y(\phi(u)))$ yay uzunluklu olacak biçimde parametrelendirelim. f' ve g' fonksiyonlarının bu değerleri için A_8 and B_8 katsayıları tekrar hesaplanırsa

$$\begin{aligned} A_8 &= -\frac{1}{32}c^2r^8\phi'^8 \cosh(8\phi(u)), \\ B_8 &= \frac{1}{32}c^2r^8\phi'^8 \sinh(8\phi(u)) \end{aligned}$$

elde edilir. $c \neq 0$ ve $r > 0$ olduğundan en az bir aralıkta $\phi' = 0$ dır. Buna göre $f'^2 - g'^2 = 0$ olur. Yani α eğrisi sabit bir eğridir. Bu ise kabulumüz ile çelişir.

III. Düzlemler lightlike ise:

E_1^3 de yapılan bir hareketten sonra $r > 0$, f ve g fonksiyonları düzgün fonksiyonlar olmak üzere M yüzeyinin parametrik denklemini

$$X(u, v) = (f(u), g(u) + u, g(u) - u) + (v, r(u)\frac{v^2}{2}, r(u)\frac{v^2}{2}) \quad (5.19)$$

ile verebiliriz. Bu durumda, f fonksiyonu sabit ise M bir döneel yüzeydir.

$c = 0$ durumu

$4b^2 = 1$ alınarak, (5.5) eşitliği (5.19) parametrik denklemi kullanılarak hesaplanırsa

$$\sum_{j=0}^6 A_j(u)v^j = 0 \quad (5.20)$$

bulunur. (5.5) eşitliğindeki bütün $A_j(u)$ katsayıları sıfır olmalıdır. $A_6 = 0$ eşitliğini hesaplırsak

$$A_6 = -2a^2(2r^2 - r')(-4rr' + r'')^2$$

elde edilir. Burada iki durum vardır:

(1) $2r^2 - r' = 0$ ise

$$r(u) = \frac{1}{-2u - \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Buna göre

$$A_3 = \frac{16a^2 f'(-4f' + (2u + \lambda)f'')^2}{(2u + \lambda)^5}$$

olarak hesaplanır. $A_3 = 0$ ise iki durum sözkonusudur.

(1.a) $f' = 0$ ise f sabit bir fonksiyon ve M dönel bir yüzeydir.

(1.b) $-4f' + (2u + \lambda)f'' = 0$ ise

$$f'' = \frac{4f'}{(2u + \lambda)}$$

elde edilir. Bu taktirde $A_2 = -256f'^2$ bulunur. $A_2 = 0$ eşitliğinden $f' = 0$ olur.

Dolayısıyla M dönel yüzeydir.

(2) $-4rr' + r'' = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $A_4 = 0$ denkleminde

$$2(2r^2 + 2a^2a'^2 - r')r'^2 + 4a^2ra'r'a'' + a^2r^2a''^2 = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliği biraz daha sadeleştirsek

$$a^2(rf'' + 2r'f')^2 + 2r'^2(2r^2 - r') = 0$$

olur. $-4rr' + r'' = 0$ eşitliğinin birinci integralini alırsak $k \neq 0$ sabiti için $2r^2 - r' = k$

elde edilir. Buna $A_4 = 0$ eşitliğinden

$$a^2(rf'' + 2r'f')^2 + 2r'^2k = 0$$

bulunur.

(2.a) Yukarıdaki eşitlikte $k > 0$ ise r sabit bir fonksiyon ve $f'' = 0$ olur. Buna göre

$f(u) = \lambda u + \mu$ olduğundan

$$A_2 = -16a^2r^2(\lambda^2r + 4rg' + g'')^2 = 0$$

elde edilir. $\lambda^2 r + 4rg' + g'' = 0$ denkleminde

$$g(u) = -\lambda^2 u/4 - e^{-4ruc_1}/(4r) + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

bulunur. Bu taktirde (5.20) eşitliğini tekrar hesaplırsak $-256c_1 r^4 e^{-8ru} = 0$ elde edilir. Bu sonuç ise bir çelişkidir.

(2.b) $k = -\lambda < 0$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse $A_4 = 0$ denkleminde

$$r f'' + 2r' f' = \pm \sqrt{2\lambda/a^2} r' \quad (5.21)$$

bulunur. (5.21) eşitliğinden

$$f'' = \frac{\sqrt{2kr'} - 2af'r'}{ar} \quad (5.22)$$

elde edilir. $A_3 = 0$ denkleminde $r' = 2r^2 - k$, $r'' = 4r(2r^2 - k)$ ve (5.22) eşitlikleri kullanılırsa

$$b'' = \frac{2\sqrt{2}k^{3/2}r + 4\sqrt{2kr}^3 - 2akrf' - 4ar^3f' + \sqrt{2ka^2}rf'^2 + 4\sqrt{2a^2}\sqrt{kr}g'}{\sqrt{2ka^2}} \quad (5.23)$$

bulunur. $A_2 = 0$ denkleminde $r' = 2r^2 - k$, $r'' = 4r(2r^2 - k)$, (5.22) ve (5.23) kullanılırsa

$$b' = \frac{r^2(4k^2 + 8kr^2 + a^2ka'^2 - 2a^2r^2a'^2)}{2a^2k(k - 2r^2)} \quad (5.24)$$

elde edilir. $A_1 = 0$ denkleminde $r' = 2r^2 - k$, $r'' = 4r(2r^2 - k)$, (5.22), (5.23) ve (5.24) kullanılırsa

$$A_1 = \frac{64\sqrt{2kr}^3(k + 2r^2)^3}{a^3(k - 2r^2)}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten $(k + 2r^2)^3 = 0$ olur. Dolayısıyla $2r^2 = \lambda$ ve r sabit bir sayıdır. $r' = 2r^2 + \lambda$ olduğundan $\lambda = 0$ elde edilir. Bu ise varsayımla çelişir.

$c \neq 0$ durumu

(5.6) eşitliği, (5.19) kullanılarak tekrar hesaplanırsa

$$\sum_{j=0}^6 B_j(u)v^j = 0 \quad (5.25)$$

elde edilir. $B_6 = 0$ denkleminde

$$-64c^2(-2r^2 + r')^4 = 0$$

hesaplanır. Dolayısıyla $-2r^2 + r' = 0$ demektir. Bu eşitlikten

$$r(u) = \frac{1}{-2u - \mu}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

elde edilir. $r(u)$ değeri B_3 katsayısında yerine yazılırsa

$$B_3 = \frac{1024c^2 f'^4}{(2u + \mu)^5}$$

bulunur. Öyleyse $f' = 0$ olduğundan M yüzeyi dönele yüzeydir.

Sonuç 5.1. E_1^3 de $H = 0$ veya $K = 0$ olmak üzere dönele yüzey dışında, foliasyon düzlemleri paralel olan bir spacelike cyclic yüzey için

(1) $H = 0$ olsun. Foliasyon düzlemlerinin spacelike veya timelike olmasına bağlı olarak sırasıyla $\epsilon = 1$ veya $\epsilon = -1$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere (5.7) ve (5.16) eşitliklerinden

$$f' = \lambda r^2, \quad g' = \mu r^2, \quad 1 - (\epsilon\lambda^2 + \mu^2)r^4 - r'^2 + rr'' = 0$$

elde edilir.

Foliasyon düzlemleri lightlike ise $r = \tan(2u)$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f = \lambda(u + \frac{1}{2} \cot(2u)), \quad g = \frac{1}{32}(4(\mu - 3\lambda^2)u - 4\lambda^2 \cot(2u) - (\lambda^2 - 4\mu) \sin(4u))$$

elde edilir.

(2) $K = 0$ olsun. Foliasyon düzlemleri spacelike veya timelike ise $f'' = g'' = r'' = 0$ ve foliasyon düzlemleri lightlike ise $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f'' = g'' = 0$ ve $r = \lambda/u + \mu$ dır.

İspat E_1^3 de dönele yüzey dışında foliasyon düzlemleri paralel olan bir spacelike cyclic yüzey verilsin.

(1) $H = 0$ ve foliasyon düzlemleri spacelike veya timelike olsun. (5.7) ve (5.16) kullanılarak yüzeyin ortalama eğriliği hesaplanırsa $A_1 = 0$ eşitliğinden

$$2f'r' - rf'' = 0 \tag{5.26}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklem f' için çözümlürse $f' = \lambda r^2$, $\lambda > 0$ bulunur. $B_1 = 0$ eşitliğinden

$$2g'r' - rg'' = 0 \tag{5.27}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklem ise g' için çözümlürse $g' = \mu r^2$, $\mu > 0$ dir. $f' = \lambda r^2$ ve $g' = \mu r^2$ eşitlikleri $H = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$1 - (\epsilon\lambda^2 + \mu^2)r^4 - r'^2 + rr'' = 0$$

bulunur.

Foliasyon düzlemleri lightlike ise (5.19) kullanılarak ortalama eğrilik hesaplanırsa $A_2 = 0$ eşitliğinden

$$4rr' - r'' = 0$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemden

$$r = \frac{c_1 \tan(\sqrt{2c_1}u + \sqrt{2c_1}c_2)}{\sqrt{2}}$$

bulunur. $c_1 = 2$ ve $c_2 = 0$ olarak alınır

$$r = \tan(2u) \tag{5.28}$$

olur. Bulunan fonksiyon A_1 katsayısında kullanılırsa

$$8f' + \sin(4u)f'' = 0$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemden

$$f = c_2 - c_1 \left(u + \frac{1}{2} \cot(2u) \right)$$

hesaplanır. $c_1 = -\lambda$ ve $c_2 = 0$ alınır

$$f = \lambda \left(u + \frac{1}{2} \cot(2u) \right) \tag{5.29}$$

bulunur. (5.28) ve (5.29) de elde edilen r ve f fonksiyonları $H = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\lambda^2 \cot^3(2u) + 4g' \tan(2u) + g'' = 0$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemden

$$g = \frac{1}{32} (4(4\mu - 3\lambda^2)u - 4\lambda^2 \cot(2u) - (\lambda^2 - 4\mu) \sin(4u))$$

olarak hesaplanır.

(2) $K = 0$ ve foliasyon düzlemleri spacelike veya timelike olsun. (5.7) ve (5.16) kullanılarak Gauss eğriliği hesaplanırsa

$$\cos(v)f'' + \sin(v)g'' + r'' = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $f'' = g'' = r'' = 0$ dır.

Foliasyon düzlemleri lightlike ise (5.19) kullanılarak Gauss eğriliği hesaplanırsa $A_2 = 0$ eşitliğinden

$$-4r'^2 + 2rr'' = 0$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemden

$$r = \frac{\lambda}{u + \mu}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (5.30)$$

olarak hesaplanır. Bulunan r fonksiyonu $A_1 = 0$ eşitliğinde kullanılırsa

$$-4r^2 f'' = 0$$

elde edilir. $r \neq 0$ olduğundan

$$f'' = 0 \quad (5.31)$$

dır. (5.30) ve (5.31) eşitlikleri $K = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{4\lambda g''}{u + \mu} = 0$$

elde edilir. $\lambda \neq 0$ olduğundan

$$g'' = 0$$

dır.

Üçüncü bölümde E_1^3 Minkowski uzayında pseudohiperbolik yüzeylerin, Öklid uzayının küreleriyle aynı özellikleri gösteren spacelike yüzeyler olduğunu belirtmiştik. E_1^3 uzayının bir izometrisinden sonra, $x_0 \in E_1^3$ merkezli, $r > 0$ yarıçaplı bir pseudohiperbolik yüzeyin parametrik denklemi

$$H^{2,1}(r, x_0) = \{x \in E_1^3 : \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = -r^2\}$$

şeklindedir. $H^{2,1}(r, x_0)$ pseudohiperbolik yüzeyi

$$\{x_1^2 - x_3^2 = r^2, \quad x_2 = 0\}$$

hiperbolütünün x_3 eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen denklemi $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -r^2$ olan çift kanatlı eliptik hiperboloiddir. Bu yüzeyin ortalama eğriliği $H = 1/r$ ve Gauss eğriliği $K = 1/r^2$ dir. Buna göre $H^{2,1}(r, x_0)$, $aH + bK = c$ eşitliğine göre a, b, c sabitlerinin farklı seçimleri için bir lineer Weingarten yüzeyidir. Bu yüzey döneleli yüzey olmasına rağmen herhangi bir paralele olmayan düzlemlerin bir parametrelili ailesi ile $H^{2,1}(r, x_0)$ yüzeyinin arakesiti çemberlerdir. Öyleyse $H^{2,1}(r, x_0)$ ın foliasyon düzlemleri paralele değildir. Şimdi bu gerçeikle birlikte aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.2. M yüzeyi E_1^3 de bir spacelike cyclic yüzey olsun. Eğer M lineer Weingarten yüzeyi ise M bir pseudohiperbolik yüzeydir veya yüzeyin foliasyon düzlemleri paraleldir.

İspat M yüzeyi bir parametrelili çemberlerin ailesinin foliasyonu ile elde edilen bir spacelike lineer Weingarten yüzeyi olsun. $I \subset \mathbb{R}$ ve $u \in I$, M yi tanımlayan her bir foliasyon düzleminin parametresi olsun. $N(u)$, her bir u -düzlemine dik, düzgün birim vektör alanı olsun. u -düzlemlerinin paralele olmadığını kabul edelim. M yüzeyinin bir pseudohiperbolik yüzey olduğunu göstereceğiz. Öyleyse en az bir aralıkta $N'(u) \neq 0$ dir. Geneliliği bozmadan bu aralıkta çemberleri kapsayan düzlemlerin aynı causal karaktere sahip olduğunu kabul edelim. N vektör alanının bir integral eğrisi Γ olsun. Bu taktirde Γ bir doğru değildir. Γ eğrisinin Frenet çatısını $\{t, n, b\}$ olarak tanımlayalım. Foliasyon düzlemlerinin causal karakterinin spacelike, timelike ve lightlike olmasına bağlı olarak üç durum bulunmaktadır. Her bir durumda $aH + bK = c$ bağıntısına göre ispatı $c = 0$ ve $c \neq 0$ durumları için inceleyeceğiz.

I. Düzlemler spacelike ise:

Her bir u -düzleminin bir ortonormal tabanı $\{e_1(u), e_2(u)\}$ olsun. Foliasyonun u -çemberlerinin yarıçapı $r(u) > 0$ ve foliasyonun u -çemberlerinin merkezi $c = c(u)$ olmak üzere

M yüzeyini

$$X(u, v) = c(u) + r(u)(\cos(v)e_1(u) + \sin(v)e_2(u)) \quad (5.32)$$

olarak parametrelendirelim. Burada $c(u)$ ve $r(u)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu durumda $t = N$ vektörü Γ eğrisinin birim teğet vektörüdür. Γ eğrisinin eğriliği κ ve burulması σ olmak üzere Frenet formülleri ise

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= \kappa t + \sigma b \\ b' &= -\sigma n \end{aligned}$$

şeklindedir.

α , β ve γ , u üzerinde düzgün fonksiyonlar olmak üzere ve $c' = \alpha t + \beta n + \gamma b$ olsun. Koordinatların değişiminden sonra M yüzeyi parametrik olarak

$$X(u, v) = c(u) + r(u)(\cos(v) n(u) + \sin(v) b(u))$$

şeklinde yazılır. Burada t timelike birim vektör, n ve b spacelike birim vektörlerdir. t timelike birim vektör olduğundan Γ timelike bir eğridir. Γ bir doğru olmadığından $\kappa \neq 0$ dir. c' ve Frenet formülleri kullanılarak A_j ve B_j , u üzerinde düzgün fonksiyonlar olmak üzere $aH + bK = c$ eşitliğinden

$$\sum_{j=0}^8 A_j(u) \cos(jv) + B_j(u) \sin(jv) = 0$$

olarak elde edilir.

$aH + bK = c$ bağıntısında $c = 0$ durumu:

Genelliği bozmadan $4b^2 = 1$ olduğunu kabul edelim. B_8 katsayısını hesaplırsak

$$\beta\gamma (2a^2(3\beta^4 - 10\beta^2\gamma^2 + 3\gamma^4) + \kappa^2(1 + 12a^2r^2)(\gamma^2 - \beta^2) + r^2\kappa^4(1 + 6a^2r^2)) = 0 \quad (5.33)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte üç durum söz konusudur.

(1) I 'nin bir alt aralığında $\beta = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $A_8 = 0$ eşitliği

$$(\gamma^2 + r^2\kappa^2)^2 (4a^2\gamma^2 + (1 + 4a^2r^2)\kappa^2) = 0$$

olarak hesaplanır. $\gamma \neq 0$ ve $r\kappa \neq 0$ olduğundan yukarıdaki eşitlik bir çelişkidir.

(2) I 'nin bir alt aralığında $\gamma = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $A_8 = 0$ eşitliğinden

$$(\beta^2 - r^2\kappa^2)^2 ((1 + 4a^2r^2)\kappa^2 - 4a^2\beta^2) = 0$$

elde edilir.

(2.a) $\beta^2 = r^2\kappa^2$ ise bu durumda

$$A_6 = -\frac{9}{32}\kappa^6 r^{10}(\alpha - r')^2$$

olur. $A_6 = 0$ eşitliğinden $\alpha = r'$ dir. $\gamma = 0$, $\beta^2 = r^2\kappa^2$ ve $\alpha = r'$ alınarak W hesaplanırsa $W = 0$ elde edilir. $W > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

(2.b) $(1 + 4a^2r^2)\kappa^2 = 4a^2\beta^2$ ise $A_7 = 0$ denkleminde

$$\alpha^2(1 + 4a^2r^2) = 4a^2r^2r'^2$$

elde edilir. Bu taktirde

$$\beta = \pm\kappa\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2}, \quad \alpha = \frac{rr'}{\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2}}$$

eşitlikleri için

$$c' = \frac{rr'}{\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2}}t + \kappa\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2} n = \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2} t \right)'$$

olur. Yukarıdaki ifadeye göre

$$c = c_0 + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + r^2} t$$

olacak biçimde $c_0 \in E_1^3$ vardır. Öyleyse yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = c_0 + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + r(u)^2} t(u) + r(u)(\cos(v) n(u) + \sin(v) b(u)) \quad (5.34)$$

olur. Buna göre (5.34) den

$$\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = -\frac{1}{4a^2}$$

dir. Dolayısıyla yüzey bir pseudohiperbolik yüzeydir.

(3) I 'nın bir alt aralığında $\beta\gamma \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $B_8 = 0$ eşitliğinden

$$2a^2(3\beta^4 - 10\beta^2\gamma^2 + 3\gamma^4) + \kappa^2(1 + 12a^2r^2)(\gamma^2 - \beta^2) + r^2\kappa^4(1 + 6a^2r^2) = 0$$

elde edilir. Buradan β^2 'yi hesaplırsak

$$A = \sqrt{256a^2\gamma^4 + 16a^2\gamma^2\kappa^2 + 192a^2r^2\gamma^2\kappa^2 + \kappa^4}$$

olmak üzere

$$\beta^2 = \frac{1}{12a^2} (20a^2\gamma^2 + (1 + 12a^2r^2)\kappa^2 \pm A)$$

dır. Hesaplamalarımızı

$$\beta^2 = \frac{1}{12a^2} (20a^2\gamma^2 + (1 + 12a^2r^2)\kappa^2 + A)$$

olarak yapalım. ($-$ için hesaplamalar benzer olarak elde edilir). $\kappa \neq 0$ olduğu dikkate alınarak β^2 değeri A_8 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & 26624\gamma^6 + \kappa^6 + 1536a^2\gamma^4\kappa^2(1 + 2a^2r^2) + 72a^2\gamma^2\kappa^4 \\ &= -(1792a^2\kappa^4 + \kappa^4 + 64a^2\gamma^2\kappa^2(1 + 12a^2r^2))A. \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının karesi alınarak sadeleştirmeler yapılırsa

$$(\gamma^2 + \kappa^2r^2) ((16a^2\gamma^2 + \kappa^2)^2 + 256a^2r^2\gamma^2\kappa^2) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik ise bir çelişkidir.

$aH + bK = c$ bağıntısında $c \neq 0$ durumu:

Genelliği bozmadan $c = 1$ olduğunu kabul edelim. $b = 0$ veya $a = 0$ durumları sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli veya sıfırdan farklı sabit Gauss eğrilikli yüzeyler için yapılan çalışmalara karşılık geldiğinden bu durumlar incelenmeyecektir.

A_8 ve B_8 katsayıları hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
x_1 = & \beta^8 - (28\gamma^2 + \kappa^2(a^2 + 2b + 4r^2))\beta^6 \\
& + (70\gamma^4 + 15\gamma^2\kappa^2(2(a^2 + 2b + 4r^2) + \kappa^4(b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 + 6r^4)))\beta^4 \\
& + (-28\gamma^6 - 15\gamma^4\kappa^2(a^2 + 2b + 4r^2) - \kappa^6r^2(2b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 + 4r^4) \\
& - 6\gamma^2\kappa^4(b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 + 6r^4))\beta^2 \\
& + (\gamma^2 + r^2\kappa^2)^2(\gamma^4 + \gamma^2\kappa^2(a^2 + 2b + 2r^2) + \kappa^4(b^2 + (a^2 + 2b)r^2 + r^4)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 = & -4\beta^6 + (28\gamma^2 + 3\kappa^2(a^2 + 2b + 4r^2))\beta^4 \\
& - 2(14\gamma^4 + 5\gamma^2\kappa^2(a^2 + 2b + 4r^2) + \kappa^4(b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 + 6r^4))\beta^2 \\
& + (\gamma^2 + r^2\kappa^2)(4\gamma^4 + \gamma^2\kappa^2(3a^2 + 6b + 8r^2) + \kappa^4(2b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 + 4r^4))
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A_8 = \frac{1}{32}r^8x_1, \quad B_8 = \frac{1}{16}\beta\gamma r^8x_2$$

elde edilir. $B_8 = 0$ denkleminde üç durum söz konusudur:

(1) I nın bir alt aralığında $\gamma = 0$ olsun. Öyleyse $A_8 = 0$ eşitliğinden

$$(\beta^2 - r^2\kappa^2)^2 (\beta^4 - (a^2 + 2b + 2r^2)\beta^2\kappa^2 + (b^2 + (a^2 + 2b)r^2 + r^4)\kappa^4) = 0$$

elde edilir.

(1.a) $\beta^2 = r^2\kappa^2$ olsun. Genelliği bozmadan $\beta = r\kappa$ olduğunu varsayalım. Buna göre $A_6 = -\frac{9}{8}b^2\kappa^6r^{10}(\alpha - r')^2$ olur. Dolayısıyla $\alpha = r'$ ve bu eşitliğe bağlı olarak $W = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

(1.b) $\beta^4 - (a^2 + 2b + 2r^2)\beta^2\kappa^2 + (b^2 + (a^2 + 2b)r^2 + r^4)\kappa^4 = 0$ olsun. Bu denklemi β^2 ye bağlı ikinci dereceden bir denklem olarak ele alırsak

$$\beta^2 = \frac{1}{2}\kappa^2 \left(a^2 + 2b + 2r^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4b} \right) \quad (5.35)$$

olur. (5.35) eşitliğinden $a^2 + 4b \geq 0$ olmak zorundadır. Eğer $a^2 + 4b = 0$ ise (5.35) eşitliğinde $b = -\frac{a^2}{4}$ yerine yazılırsa $\beta^2 = (a^2 + 4r^2)\kappa^2/4$ bulunur. Buna göre $B_5 = 0$ denkleminde

$$\frac{1}{128}a^4\kappa^5r^7\sigma\sqrt{a^2 + 4r^2}(\alpha\sqrt{a^2 + 4r^2} - 2rr')^2 = 0$$

elde edilir. Eğer $\sigma = 0$ ise $A_5 = 0$ denkleminde $\alpha\sqrt{a^2 + 4r^2} - 2rr' = 0$ bulunur. Sonuç olarak $\sigma = 0$ veya $\sigma \neq 0$ için $\alpha = \frac{2rr'}{\sqrt{a^2 + 4r^2}}$ dir. Buna göre

$$\alpha = \frac{2rr'}{\sqrt{a^2 + 4r^2}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2} \kappa$$

olduğundan Frenet formülleri kullanılarak

$$c' = \left(\frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2} t \right)'$$

elde edilir. Bu durumda

$$c = c_0 + \frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2} t$$

olacak biçimde $c_0 \in E_1^3$ vardır. Elde edilen eşitlikler M yüzeyinin parametrik denkleminde yerine yazılırsa

$$X(u, v) = c_0 + \frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2} t(u) + r(u)(\cos(v) n(u) + \sin(v) b(u))$$

olur. Sonuç olarak $\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = -a^2/4$ elde edilir. Dolayısıyla yüzey bir pseudohiperbolik yüzeydir.

Eğer $a^2 + 4b > 0$ ise $A_7 = 0$ denkleminde

$$A = 2b + a(a + \sqrt{a^2 + 4b}), \quad B = a^3 + 4ab + (a^2 + 2b)\sqrt{a^2 + 4b}$$

olmak üzere

$$A_7 = \frac{1}{64} aAB\kappa^5 r^9 (\alpha\kappa^2 - \kappa\beta' + \kappa'\beta) = 0$$

elde edilir. $a^2 + 4b > 0$ olduğundan A, B sayıları hiç bir zaman sıfır olamaz. Dolayısıyla $A_7 = 0$ eşitliğinden $\alpha\kappa^2 - \kappa\beta' + \kappa'\beta = 0$ sonucunu çıkarırız. Öyleyse

$$\alpha = \left(\frac{\beta}{\kappa} \right)'$$

elde edilir. c eğrisinin türevi

$$c' = \left(\frac{\beta}{\kappa} \right)' t + \beta n = \left(\frac{\beta}{\kappa} t \right)'$$

olduğundan

$$c = c_0 + \left(\frac{\beta}{\kappa} \right) t$$

bulunur. $X(u, v)$ parametrik denklemini yazarsak

$$X(u, v) = c_0 + \frac{\beta}{\kappa}t(u) + r(u)(\cos(v) n(u) + \sin(v) b(u))$$

olur. (5.35) kullanılarak

$$\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = -\frac{\beta^2}{\kappa^2} + r(u)^2 = -\left(\frac{a^2}{2} + b \pm \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + 4b}\right)$$

elde edilir. Buna göre M yüzeyi pseudohiperbolik yüzeydir.

(2) I nın bir alt aralığında $\beta = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} y_1 &= \gamma^4 + (a^2 + 2b + 2r^2)\kappa^2\gamma^2 + (b^2 + (a^2 + 2b)r^2 + r^4)\kappa^4 \\ z_1 &= 8\gamma^4 + (7(a^2 + 2b) + 16r^2)\kappa^2\gamma^2 + (6b^2 + 7(a^2 + 2b)r^2 + 8r^4)\kappa^4. \end{aligned}$$

olmak üzere

$$A_8 = -\frac{1}{32}r^8(\gamma^2 + \kappa^2r^2)y_1, \quad A_7 = -\frac{1}{16}\alpha\kappa r^9(\gamma^2 + \kappa^2r^2)z_1$$

olur. α nın sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim. $y_1 = 0$ denkleminde

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{2} \left(\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b + 2r^2) \right)$$

elde edilir. Bu değer $z_1 = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\sqrt{a^2 + 4b} \left(\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b) \right) = 0$$

bulunur. $a^2 + 4b = 0$ ise γ^2 negatif bir sayıya eşit olur. Dolayısıyla $a\sqrt{a^2 + 4b} = \pm(a^2 + 2b)$ elde edilir. Burada ifadenin her iki tarafının karesi alınıp sadeleştirmeler yapılırsa $b = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $\alpha = 0$ olmalıdır. $y_1 = 0$ denklemi

$$\gamma^4 + (a^2 + 2b + 2r^2)\kappa^2\gamma^2 + (b^2 + (a^2 + 2b)r^2 + r^4)\kappa^4 = 0$$

olduğundan

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} \left(\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b + 2r^2) \right) \kappa^2 \quad (5.36)$$

elde edilir. Burada parantezin içindeki ifadenin pozitif bir sayıya eşit olamayacağını yani $\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b + 2r^2) \leq 0$ olduğunu göstereceğiz. Bu fonksiyon r üzerinde a ya bağlı olarak azalan bir fonksiyondur. $r = 0$ kabul edelim. $\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b) \leq 0$ olduğunu göstereceğiz. Burada $a^2 + 4b \geq 0$ olduğundan $a^2 + 2b \geq 0$ olur. a nın işaretine bağlı olarak iki durum söz konusudur. $a > 0$ ise $-(a\sqrt{a^2 + 4b} + (a^2 + 2b)) \leq 0$ olduğu aşikardır.

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 4b} &\leq \sqrt{a^2 + 4b + \frac{b^2}{4a^2}} \\ &\leq \sqrt{\left(a + \frac{2b}{a}\right)^2} \\ &\leq \frac{\sqrt{(a^2 + 2b)^2}}{a} \\ a\sqrt{a^2 + 4b} &\leq a^2 + 2b \end{aligned}$$

olduğundan $\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b) \leq 0$ elde edilir. $a < 0$ için eşitsizliğin doğru olduğu benzer biçimde gösterilir. Dolayısıyla (5.36) eşitliğinde verilen $\gamma = 0$ olmalıdır. Bu durum ise (1) şıkında incelenmiştir.

(3) I nın bir alt aralığında $\beta\gamma = 0$ olsun. Burada yapılan hesaplamalar çok kompleks ve uzun olduğundan dolayı ispatı detaylara girmeden ana hatlarıyla vereceğiz. $x = \beta^2$ ve $y = \gamma^2$ olsun. $x_1 = 0$ denkleminde $a^2 + 2b$ elde edilerek $x_2 = 0$ da yerine yazılırsa

$$\left((x + y)^2 + 2(y - x)r^2\kappa^2 + r^4\kappa^4\right)^2 \left((x + y)^2 + 2(y - x)r^2\kappa^2 - b^2\kappa^4 + r^4\kappa^4\right) = 0 \quad (5.37)$$

elde edilir. Eğer (5.37) eşitliğindeki $(x + y)^2 + 2(y - x)r^2\kappa^2 + r^4\kappa^4 = 0$ ifadesi $r^2\kappa^2$ ye bağlı ikinci dereceden bir polinom fonksiyonu olarak alınırsa diskriminantının $\Delta = -16xy$ negatif bir sayı olduğu görülür. Dolayısıyla bu durum imkansızdır. Böylece

$$\left((x + y)^2 + 2(y - x)r^2\kappa^2 - b^2\kappa^4 + r^4\kappa^4\right) = 0 \quad (5.38)$$

olur. Yukarıdaki eşitlikten

$$y = -x - r^2\kappa^2 + \kappa\sqrt{4xr^2 + b^2\kappa^2} \quad (5.39)$$

dır. (5.39) kullanılarak $x_2 = 0$ denkleminde $\sqrt{4xr^2 + b^2\kappa^2}$ ifadesi elde edildikten sonra bu eşitlik $x_1 = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$$16x^2 - 8x(a^2 + 2b + 2r^2)\kappa^2 + (a^4 + 4a^2b)\kappa^4 = 0$$

veya

$$256x^4 - 512x^3r^2\kappa^2 - 128x^2(b^2 - 2r^4)\kappa^4 + 64b^2xr^2\kappa^6 + 3b^4\kappa^8 = 0$$

elde edilir. İki durumda da birbirine benzer işlemler yapılacağından sadece birinci eşitliği inceleyeceğiz. Eğer

$$16x^2 - 8x(a^2 + 2b + 2r^2)\kappa^2 + (a^4 + 4a^2b)\kappa^4 = 0$$

ise

$$Q = \sqrt{a^2r^2 + (b + r^2)^2}$$

olmak üzere

$$\beta^2 = \frac{\kappa^2}{4}(a^2 + 2b + 2r^2 \mp 2Q) \quad (5.40)$$

ve

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{4}(4\sqrt{b^2 + r^2(a^2 + 2b + 2r^2 \pm 2Q)} - (a^2 + 2b + 6r^2) \mp 2Q) \quad (5.41)$$

olarak hesaplanır. β^2 ve γ^2 için elde edilen bu değerleri $x_1 = 0$ denkleminde yerine yazarsak, $x_1 = 0$ denklemi sadece $r(u)$ ya bağlı

$$\mathcal{P}(r, \sqrt{b^2 + (a^2 + 2b)r^2 + r^4}) = 0$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyon olacaktır. Burada a, b sabit sayılar olduğundan r sabit bir fonksiyondur.

$$p = x - y, \quad q = (x - y)^2 - 4xy$$

değişikliğini yaparsak

$$x = (p + \sqrt{2p^2 - q})/2, \quad y = (-p + \sqrt{2p^2 - q})/2 \quad (5.42)$$

veya

$$x = (p - \sqrt{2p^2 - q})/2, \quad y = (-p - \sqrt{2p^2 - q})/2 \quad (5.43)$$

elde edilir. (5.42) ve (5.43) için yapılacak işlemler benzer olacağından işlemlerimizde (5.43)'ü kullanacağız. (5.43) kullanılarak (5.38) tekrar hesaplanırsa

$$2p^2 - q - 2pr^2\kappa^2 + (r^4 - b^2)\kappa^4 = 0 \Rightarrow q = 2p^2 - 2pr^2\kappa^2 + (r^4 - b^2)\kappa^4 \quad (5.44)$$

elde edilir. Şimdi (5.43) kullanılarak $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ denklemlerinden elde edilen q değerleri birbirine eşitlenirse

$$(p - r^2\kappa^2)(2p - (a^2 + 2(b + r^2))\kappa^2)(4p^2 - 2p(a^2 + 2b + 4r^4)\kappa^2 + (b^2 + 2a^2r^2 + 4br^2 + 4r^4)\kappa^4) = 0 \quad (5.45)$$

olur. (5.44) ve (5.45) kullanılarak p ve q için farklı değerler elde edilir. r sabit bir fonksiyon olduğundan (5.45) de $r = R = \text{sabit}$ alınırsa üç durum vardır.

(i) $p = R^2\kappa^2$ ve $x_2 = 0$ denkleminde elde edilen $q = R^2\kappa^4$ değeri için (5.43) tekrar hesaplanırsa $x = \beta^2 = 0$ olur. Bu durum ise bir çelişkidir.

(ii) $p = (a^2 + 2(b + R^2))\kappa^2/2$ denkleminde ve $x_2 = 0$ denkleminde elde edilen

$$q = \frac{\kappa^4}{2} ((a^4 + 2(b + R^2)^2 + 2a^2(2b + R^2)))$$

değeri için β ve γ hesaplanırsa

$$\beta = \frac{1}{2}\kappa\sqrt{\left(\left((a^2 + 2(b + R^2)) - 2\sqrt{(a^2R^2 + (b + R^2)^2)}\right)\right)}, \quad (5.46)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\kappa\sqrt{\left(-\left((a^2 + 2(b + R^2)) - 2\sqrt{(a^2r^2 + (b + R^2)^2)}\right)\right)}$$

elde edilir. (5.46) A_7 ve B_7 hesaplanırken kullanılırsa

$$A_7 = \frac{1}{32}a^2(a^2 + 2b)(a^2 + 4b)R^9\alpha\kappa^7 = 0,$$

$$B_7 = \frac{1}{8}(a^4 + 4a^2b + 2b^2)\beta\gamma\alpha\kappa^5 = 0$$

bulunur. $A_7 = 0$ eşitliğinde $a^2 + 2b = 0$ veya $a^2 + 4b = 0$ ise $B_7 = 0$ eşitliğinden $\beta \neq 0$ ve $\gamma \neq 0$ olduğundan $\alpha = 0$ elde edilir. (5.46) ve $\alpha = 0$ eşitlikleri A_5 ve B_5 de yerlerine yazılırsa

$$A_5 = \frac{1}{32}a^2(a^2 + 2b)(a^2 + 4b)R^9\gamma\kappa^6\sigma = 0,$$

$$B_5 = -\frac{1}{4}(a^4 + 4a^2b + 2b^2)\beta\gamma\sigma\kappa^5 = 0$$

olarak hesaplanır. $A_5 = 0$ eşitliğinde $(a^2 + 2b) = 0$ veya $(a^2 + 4b) = 0$ ise $B_5 = 0$ eşitliğinden $\beta \neq 0$ ve $\gamma \neq 0$ olduğundan $\sigma = 0$ elde edilir. Son olarak bu eşitliklerle birlikte birinci temel formun katsayılarından

$$E = -\kappa^2 \left(\sqrt{c^2 R^2 + (b + R^2)^2} + R^2 \cos^2 v \right) < 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

(iii) $4p^2 - 2p(a^2 + 2b + 4R^4)\kappa^2 + (b^2 + 2a^2 R^2 + 4bR^2 + 4R^4)\kappa^4 = 0$ denkleminde

$$p = \frac{\kappa^2}{4} \left((a^2 + 2b + 4R^2) \pm a^2 \sqrt{a^2 + 4b} \right)$$

elde edilir. Genelliği bozmadan işlemlerimizde

$$p = \frac{\kappa^2}{4} \left((a^2 + 2b + 4R^2) + a^2 \sqrt{a^2 + 4b} \right) \quad (5.47)$$

kullanacağız. (5.47) denklemini ve $x_2 = 0$ denkleminde elde edilen

$$q = \frac{\kappa^4}{4} \left(a^4 + 4a^2 b + 2b^2 + 2(a^2 + 2b)R^2 + 4R^4 \right) + a(a^2 + 2(b + R^2)) \sqrt{a^2 + 4b}$$

değeri için β ve γ hesaplanırsa

$$\mathcal{A} = a^2 + 2b + 4R^2 + a\sqrt{a^2 + 4b} + 2\sqrt{2}R\sqrt{a^2 + 2b + 2R^2 + a\sqrt{a^2 + 4b}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \beta &= \kappa \left(\frac{1}{8} \mathcal{A} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \gamma &= \kappa \left(-\frac{1}{8} \mathcal{A} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.48)$$

elde edilir. Bu fonksiyonlar için A_7 ve B_7 katsayıları hesaplanırsa

$$A_7 = \frac{1}{64} \sqrt{a^2 + 4b} \left(a^4 + 4a^2 b + 2b^2 - a(a^2 + 2b)\sqrt{a^2 + 4b} \right) R^9 \alpha \kappa^7 = 0,$$

$$B_7 = \frac{1}{128} a \sqrt{a^2 + 4b} \left(a^2 + 2b + a\sqrt{a^2 + 4b} \right) R^9 \beta \gamma \alpha \kappa^5$$

bulunur. $A_7 = 0$ eşitliğinde $a^2 + 4b = 0$ ise (5.48) eşitliğinden

$$\gamma = \kappa \sqrt{-\frac{1}{8} \left(a^2 + 2b + 4R^2 + 2\sqrt{2}R\sqrt{a^2 + 2b + 2R^2} \right)}$$

olur. γ ifadesinde her zaman $a^2 + 2b + 2R^2 \geq 0$ dır. $a^2 + 2b + 2R^2 = 0$ ise $\gamma = \kappa \sqrt{-\frac{2R^2}{8}}$ elde edilir. Karekökün içi hiçbir zaman negatif olamayacağından bu bir çelişkidir. $a^2 + 2b + 2R^2 > 0$ olduğunda ise karekökün içi yine negatif bir sayıya eşit olacağından $a^2 + 4b \neq 0$ olmak zorundadır.

$a^4 + 4a^2b + 2b^2 = -a(a^2 + 2b)\sqrt{a^2 + 4b}$ ise her iki tarafın karesi alınarak sadeleştirmeler yapılırsa $4b^4 = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $\alpha = 0$ dır. (5.48) ve $\alpha = 0$, A_5 de yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{32\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + 4b} \left(a^4 + 4a^2b + 2b^2 - a(a^2 + 2b)\sqrt{a^2 + 4b} \right) R^9 \gamma \kappa^6 \sigma = 0$$

elde edilir. Bu taktirde $\gamma \neq 0$ olduğundan $\sigma = 0$ dır. Son olarak (5.48), $\alpha = 0$ ve $\sigma = 0$ ise

$$E = -\frac{\kappa^2}{2} \left(\sqrt{2}R\sqrt{a^2 + 2b + 2R^2 + a\sqrt{a^2 + 4b} + 2R^2 \cos^2 v} \right) < 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

II. Düzlemler timelike ise:

$-\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1$ olmak üzere her bir u -düzleminin bir ortonormal tabanı $\{e_1(u), e_2(u)\}$ olsun. $r(u) > 0$ foliasyonun u -çemberlerinin yarıçapı ve $c = c(u)$ foliasyonun u -çemberlerinin merkezi olmak üzere M yüzeyinin parametrik denklemi

$$X(u, v) = c(u) + r(u)(\cosh v e_1(u) + \sinh v e_2(u)) \quad (5.49)$$

şeklindedir. Burada $c(u)$ ve $r(u)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu durumda $t = N$ vektörü Γ eğrisi boyunca spacelike birim teğet vektör olduğundan Γ spacelike bir eğridir. Foliasyon düzlemlerinin paralel olmadığını kabul edeceğimizden $N' = t' \neq 0$ dır. Diğer taraftan $\langle t', t \rangle = 0$ dır. Burada t' nün causal karakterine bağlı olarak üç durum incelenecektir.

Birinci durum. t' spacelike ($\langle t', t' \rangle > 0$) olsun. Γ eğrisinin $\{t, n, b\}$ ($b = t \wedge n$) Frenet çatısını düşünelim. Burada t ve n spacelike vektörler, b ise timelike

vektördür. Γ eğrisinin eğriliği κ ve burulması σ olmak üzere Frenet formülleri ise

$$\begin{aligned}t' &= \kappa n \\n' &= -\kappa t + \sigma b \\b' &= \sigma n\end{aligned}$$

dir.

α , β ve γ , u üzerinde düzgün fonksiyonlar olmak üzere $c' = \alpha t + \beta n + \gamma b$ olsun. Koordinatların değişikliği ile (5.49) parametrik olarak

$$X(u, v) = c(u) + r(u) \sinh v n(u) + r(u) \cosh v b(u)$$

olarak yazılır. Γ bir doğru olmadığından $\kappa \neq 0$ dır. A_j ve B_j , u üzerinde düzgün fonksiyonlar olmak üzere c' ve Frenet denklemleri kullanıldığında $aH + bK = c$ eşitliğinden

$$\sum_{j=0}^8 A_j(u) \cosh(v) + B_j(u) \sinh(v) = 0$$

olarak elde edilir.

$aH + bK = c$ bağıntısında $c = 0$ durumu:

Genelliği bozmadan $4b^2 = 1$ olduğunu kabul edelim. B_8 katsayısını hesaplırsak

$$\kappa^2 \beta \gamma (2a^2(3\beta^4 + 10\beta^2\gamma^2 + 3\gamma^4) - \kappa^2(1 - 12a^2r^2)(\gamma^2 + \beta^2) + r^2\kappa^4(-1 + 6a^2r^2)) = 0 \quad (5.50)$$

elde edilir. (5.50) eşitliğinde üç durum vardır:

(1) I 'nin bir alt aralığında $\beta = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $A_8 = 0$ eşitliği

$$r^8 \kappa^2 (\gamma^2 - r^2 \kappa^2)^2 (-4a^2 \gamma^2 + (-1 + 4a^2 r^2) \kappa^2) = 0$$

olarak hesaplanır.

(1.a) $\gamma^2 = r^2 \kappa^2$ olsun. Bu taktirde $A_6 = 0$ eşitliğinden

$$-\frac{9}{32} \kappa^6 r^{10} (\alpha^2 + r'^2)^2 = 0$$

elde edilir. $\kappa \neq 0$ ve $r \neq 0$ olduğundan $\alpha^2 = -r'^2$ olması bir çelişkidir.

(1.b) $-4a^2\gamma^2 + (-1 + 4a^2r^2)\kappa^2 = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\gamma = \frac{\kappa\sqrt{4a^2r^2 - 1}}{2a} \quad (5.51)$$

elde edilir. (5.51) eşitliği $A_7 = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$A_7 = -\frac{r^{10}r'\kappa^7}{128a\sqrt{4a^2r^2 - 1}} = 0, \quad B_7 = -\frac{r^9\alpha\kappa^7}{256a^2}$$

bulunur. Bu eşitliklerden $\alpha = 0$ ve $r' = 0$ dır. Bu taktirde $B_5 = 0$ eşitliğinden

$$-\frac{r^9\kappa\sigma\sqrt{4a^2r^2 - 1}}{128a^3} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $4a^2r^2 - 1 = 0$ veya $\sigma = 0$ dır.

$4a^2r^2 - 1 = 0$ ise $r = \pm\frac{1}{2a}$ dır. Bu taktirde (5.51) den $\gamma = 0$ olur. $\sigma = 0$ ise $A_4 = 0$ eşitliğinden

$$\frac{r^8(-3 - 8a^2r^2 + 80a^4r^4)\kappa^8}{512a^4} = 0$$

elde edilir. $(-3 - 8a^2r^2 + 80a^4r^4) = 0$ ise $r = \pm\frac{1}{2a}$ dır. Bu taktirde yine (5.51) den $\gamma = 0$ olur. Dolayısıyla eğrinin merkezi $c(u) = c_0$ (*sabit*), $c_0 \in \mathbb{R}^3$ olduğundan

$$\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = -\frac{1}{4a^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla M yüzeyi bir pseudohiperbolik yüzeydir.

(2) I 'nın bir alt aralığında $\gamma = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $A_8 = 0$ eşitliğinden

$$r^8\kappa^2(\beta^2 - r^2\kappa^2)^2((-1 + 4a^2r^2)\kappa^2 - 4a^2\beta^2) = 0$$

elde edilir.

(2.a) $\beta^2 = r^2\kappa^2$ ise $A_6 = 0$ eşitliğinden

$$-\frac{9}{32}\kappa^6r^{10}(\alpha - r')^2 = 0$$

elde edilir. Bu taktirde $\alpha = r'$ dir. $\alpha = r'$ ise $W = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir.

(2.b) $4a^2\beta^2 = (-1 + 4a^2r^2)\kappa^2$ ise

$$\beta = \pm\frac{\kappa\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}{2a}$$

dır. Genelliği bozmadan

$$\beta = \frac{\kappa\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}{2a}$$

olduğunu kabul edelim. Bu eşitlik $A_7 = 0$ eşitliğinde kullanılırsa

$$-\frac{r^9\kappa^7\left(\alpha - \frac{2arr'}{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}\right)}{256a^2} = 0$$

elde edilir. Buradan $\alpha = \frac{2arr'}{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}$ olur.

$$\alpha = \frac{2arr'}{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}, \quad \beta = \frac{\kappa\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}{2a}$$

olduğundan

$$c' = \frac{2arr'}{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}t + \frac{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}{2a}\kappa n = \left(\frac{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}{2a}t\right)'$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının integralini alırsak

$$c = c_0 + \sqrt{-\frac{1}{4a^2} + r^2}t$$

elde edilir. Buna göre yüzey

$$X(u, v) = c_0 + \sqrt{-\frac{1}{4a^2} + r^2}t(u) + r(u) \sinh v n(u) + r(u) \cosh v b(u)$$

biçiminde parametrelendirilebilir. Buradan

$$\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = -\frac{1}{4a^2}$$

bulunur. Öyleyse M bir pseudohiperbolik yüzeydir.

(3) I 'nin bir alt aralığında $\beta\gamma \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $B_8 = 0$ katsayısından

$$(2a^2(3\beta^4 + 10\beta^2\gamma^2 + 3\gamma^4) - \kappa^2(1 - 12a^2r^2)(\gamma^2 + \beta^2) + r^2\kappa^4(-1 + 6a^2r^2)) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikten β^2 yi hesaplarırsak

$$A = \sqrt{256a^2\gamma^4 + 16a^2\gamma^2\kappa^2 - 192a^2r^2\gamma^2\kappa^2 + \kappa^4}$$

olmak üzere

$$\beta^2 = \frac{1}{12a^2} (-20a^2\gamma^2 - (1 - 12a^2r^2)\kappa^2 \pm A)$$

dır. Hesaplamalarımızı

$$\beta^2 = \frac{1}{12a^2} (-20a^2\gamma^2 - (1 + 12a^2r^2)\kappa^2 - A)$$

olarak yapalım. (+ için hesaplamalar benzer olarak elde edilir). $\kappa \neq 0$ olduğu dikkate alınarak β^2 değeri A_8 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & 26624\gamma^6 + \kappa^6 + 1536a^2\gamma^4\kappa^2(1 + 2a^2r^2) + 72a^2\gamma^2\kappa^4 \\ & = -(1792a^2\kappa^4 + \kappa^4 + 64a^2\gamma^2\kappa^2(1 + 12a^2r^2))A. \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının karesi alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$-1728a^4\gamma^2(\gamma^2 - \kappa^2r^2) ((16a^2\gamma^2 + \kappa^2)^2 - 256a^2r^2\gamma^2\kappa^2) = 0$$

bulunur. Burada iki durum vardır:

(3.a) $\gamma^2 = \kappa^2r^2$ ise bu durumda $\beta^2 = -\frac{(1 + 8a^2r^2)\kappa^2}{6a^2}$ dir. Bu eşitlikler A_8 de yerine yazılırsa

$$A_8 = -\frac{\kappa^8r^8(1 + 8a^2r^2)(1 + 32a^2r^2)^2}{13824a^4}$$

bulunur. Dolayısıyla $1 + 8a^2r^2 \neq 0$ ve $1 + 32a^2r^2 \neq 0$ olduğundan $\kappa = 0$ olması bir çelişkidir.

(3.b) $(16a^2\gamma^2 + \kappa^2)^2 - 256a^4r^2\gamma^2\kappa^2 = 0$ ise

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{16a^2}(2ar \pm \sqrt{4a^2r^2 - 1})^2 \quad (5.52)$$

elde edilir. γ^2 eşitliği β^2 de yerine yazılırsa

$$\beta^2 = \frac{\kappa^2(5 - 8a^2r^2 - 28ar\sqrt{4a^2r^2 - 1})}{48a^2} \quad (5.53)$$

dır. γ^2 ve β^2 eşitlikleri $A_8 = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(4a^2r^2 - 1)(1 - 56a^2r^2 + 256a^4r^4 + (128a^3r^3 - 12ar)\sqrt{4a^2r^2 - 1}) = 0 \quad (5.54)$$

elde edilir. (5.54) eşitliğinde ikinci çarpan sıfırsa

$$1 - 56a^2r^2 + 256a^4r^4 = -(128a^3r^3 - 12ar)\sqrt{4a^2r^2 - 1} \quad (5.55)$$

olur. (5.55) ifadesinde her iki tarafın karesi alındıktan sonra bir tarafa toplanırsa $b^6(b^2 + 8r^2) = 0$ elde edilir. $b \neq 0$ ve $b^2 + 8r^2 \neq 0$ olduğundan $4a^2r^2 - 1 = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $r^2 = 1/4a^2$ dir. Bu taktirde (5.52) ve (5.53) eşitliklerinden

$$\beta^2 = \kappa^2/16a^2, \quad \gamma^2 = \kappa^2/16a^2$$

olur. Bu eşitlikler ve türevleri A_7 de yerine yazılırsa

$$-\frac{\alpha\kappa^7}{262144a^{11}} = 0$$

bulunur. Bu taktirde $\alpha = 0$ dir. Bu eşitlikle birlikte

$$A_5 = \frac{\kappa^7\sigma}{262144a^{12}} = 0$$

olur. Bu taktirde $\sigma = 0$ dir. $\alpha = 0$ ve $\sigma = 0$ için

$$A_4 = -\frac{11\kappa^8}{1048576a^{12}} = 0$$

elde edilir. Öyleyse $\kappa = 0$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

$aH + bK = c$ bağıntısında $c \neq 0$ durumu:

Spacelike durumda olduğu gibi genelliği bozmadan $c = 1$ olduğunu kabul edelim. $b = 0$ veya $a = 0$ durumları sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli veya sıfırdan farklı sabit Gauss eğrilikli yüzeyler için yapılan çalışmalara karşılık geldiğinden bu durumlar incelenmeyecektir. A_8 ve B_8 katsayıları hesaplanırsa

$$\begin{aligned} x_1 = & -\beta^8 - (-28\gamma^2 + \kappa^2(-a^2 - 2b + 4r^2))\beta^6 \\ & + (-70\gamma^4 + 15\gamma^2\kappa^2(-a^2 - 2b + 4r^2) + \kappa^4(-b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 - 6r^4))\beta^4 \\ & + (-28\gamma^6 + 15\gamma^4\kappa^2(-a^2 - 2b + 4r^2) - \kappa^6r^2(2b^2 - 3(a^2 + 2b)r^2 + 4r^4) \\ & - 6\gamma^2\kappa^4(-b^2 + 3(a^2 + 2b)r^2 - 6r^4))\beta^2 \\ & - (\gamma^2 - r^2\kappa^2)^2(\gamma^4 + \gamma^2\kappa^2(a^2 + 2b - 2r^2) + \kappa^4(b^2 - (a^2 + 2b)r^2 + r^4)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= 4\beta^6 + (28\gamma^2 + 3\kappa^2(a^2 + 2b - 4r^2))\beta^4 \\
&+ 2(14\gamma^4 + 5\gamma^2\kappa^2(a^2 + 2b - 4r^2) + \kappa^4(b^2 - 3(a^2 + 2b)r^2 + 6r^4))\beta^2 \\
&+ (\gamma^2 - r^2\kappa^2)(4\gamma^4 + \gamma^2\kappa^2(3a^2 + 6b - 8r^2) + \kappa^4(2b^2 - 3(a^2 + 2b)r^2 + 4r^4))
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A_8 = \frac{1}{32}r^8x_1, \quad B_8 = \frac{1}{16}\beta\gamma r^8x_2$$

elde edilir. $B_8 = 0$ denkleminde üç durum söz konusudur:

(1) I 'nin bir alt aralığında $\gamma = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $A_8 = 0$ eşitliğinden

$$r^8\kappa^2(\beta^2 - r^2\kappa^2)^2((-1 + 4a^2r^2)\kappa^2 - 4a^2\beta^2) = 0$$

elde edilir.

(1.a) $\beta^2 = r^2\kappa^2$ ise bu durumda

$$A_6 = -\frac{9}{32}\kappa^6r^{10}(\alpha - r')^2 = 0$$

elde edilir. $\alpha = r'$ ise $W = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir.

(1.b) $(-1 + 4a^2r^2)\kappa^2 - 4a^2\beta^2 = 0$ olsun. Bu takdirde

$$\beta^2 = \frac{\kappa^2}{2}(\pm a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b - 2r^2))$$

dır. Hesaplamalarımızda genelliği bozmadan β^2 yi

$$\beta^2 = \frac{\kappa^2}{2}(a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b - 2r^2))$$

olarak alalım. $a^2 + 4b \geq 0$ olduğundan iki durum söz konusudur:

(i) $a^2 + 4b = 0$ ise

$$\beta^2 = \frac{\kappa^2}{2}(-(a^2 + 2b - 2r^2))$$

dır. β^2 değeri $A_5 = 0$ eşitliğinde kullanılırsa

$$\frac{1}{128}a^4\kappa^5r^7\sqrt{4r^2 - a^2}(\alpha\sqrt{4r^2 - a^2} - 2rr') = 0$$

elde edilir. $4r^2 - a^2 = 0$ ise $\beta = 0$ dır. Bu durum (2) şıkkında incelenecektir. Bu takdirde

$$\alpha = \frac{2rr'}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

dır. c' hız vektörü

$$c' = \frac{2rr'}{\sqrt{4r^2 - a^2}} t + \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} \kappa n = \left(\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} t \right)'$$

olur. Buradan

$$c = c_0 + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} t$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = -\frac{a^2}{4}$$

olur. Dolayısıyla M yüzeyi bir pseudohiperbolik yüzeydir.

(ii) $a^2 + 4b > 0$ ise β^2 değeri B_7 de yerine yazılırsa

$$\frac{a\sqrt{a^2 + 4b}(a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b))^2 r^9 \kappa^7 \left(\sqrt{-2b + a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 2r^2} \alpha - 2rr' \right)}{64\sqrt{a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b - 2r^2)}} = 0$$

elde edilir.

(ii.1) $a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b) = 0$ ise $a^2 + 2b = a\sqrt{a^2 + 4b}$ ifadesinde her iki tarafın karesi alınıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $b = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

(ii.2) $\sqrt{-2b + a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 2r^2} \alpha - 2rr' = 0$ ise

$$\alpha = \frac{2rr'}{\sqrt{-2b + a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 2r^2}}$$

dır. Bu taktirde c eğrisinin türevi

$$\begin{aligned} c' &= \frac{\sqrt{2}rr'}{\sqrt{-2b + a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 2r^2}} t + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \sqrt{a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b - 2r^2)} n \\ &= \left(\frac{\sqrt{a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b - 2r^2)}}{\sqrt{2}} t \right)' \end{aligned}$$

olmak üzere

$$c = c_0 + \frac{\sqrt{a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b - 2r^2)}}{\sqrt{2}} t$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = \frac{a\sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b)}{2}$$

olur. Sonuç olarak M yüzeyi bir pseudohiperbolik yüzeydir.

(2) I 'nın bir alt aralığında $\beta = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma^4 + \kappa^2 \gamma^2 (a^2 + 2b - 2r^2) + \kappa^4 (b^2 - (a^2 + 2b)r^2 + r^4), \\ y_1 &= 8\gamma^4 + 7((a^2 + 2b) - 16r^2)\kappa^2 \gamma^2 + \kappa^4 (6b^2 - 7(a^2 + 2b)r^2 + 8r^4) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$A_8 = -\frac{1}{32}(\gamma^2 - r^2 \kappa^2)^2 x_1, \quad B_7 = -\frac{1}{16} \alpha \kappa r^9 (\gamma^2 - \kappa^2 r^2) y_1$$

olarak elde edilir. Burada üç olasılık bulunmaktadır:

(2.a) $\gamma = \pm r \kappa$ olsun. Bu taktirde

$$A_6 = -\frac{9}{8} b^2 r^{10} \kappa^6 (\alpha^2 + r'^2) = 0$$

elde edilir. $\alpha^2 + r'^2 \neq 0$ olduğundan $\kappa = 0$ olması bir çelişkidir..

(2.b) $x_1 = \alpha = 0$ olsun. Bu taktirde $x_1 = 0$ denkleminde

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{2} (\pm a \sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b - 2r^2)) \quad (5.56)$$

elde edilir. Genelliği bozmadan

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{2} (a \sqrt{a^2 + 4b} - (a^2 + 2b - 2r^2))$$

olarak alalım. Bu taktirde

$$A_7 = -\frac{\sqrt{a^2 + 4b}(a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b})r^{10}\kappa^7 r'}{32\sqrt{-4b + 2a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 4r^2}} = 0$$

elde edilir. Burada dört durum incelenecektir:

(i) $a^2 + 4b = 0$ ise $B_5 = 0$ eşitliğinden

$$-\frac{1}{32} a^4 r^9 \sqrt{-a^2 + 4r^2} \kappa^5 \sigma r'^2 = 0$$

elde edilir.

(i.1) $\sqrt{-a^2 + 4r^2} = 0$ ise $\gamma = 0$ olur. Bu durum (1) şıkında incelenmiştir.

(i.2) $\sigma = 0$ ise $A_5 = 0$ eşitliğinden

$$a^2 r^8 \kappa^4 r' \mathcal{Q}(\kappa, r, r', \kappa', r'') = 0$$

elde edilir. Burada \mathcal{Q} fonksiyonu $\kappa, r, r', \kappa', r''$ ye bağlıdır. $r' = 0$ ise bu durum (iii) şıkında incelenecektir. $\mathcal{Q}(\kappa, r, r', \kappa', r'') = 0$ ise bu eşitlikten r'' elde edilerek $A_4 = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-(-a^8 - 4a^6 r^2) \kappa^4 + 32a^2 (a^4 - 8a^2 r^2 + 12r^4) \kappa^2 r'^2 - \frac{64(a^6 - 4r^2(a^4 + a^2 r^2 - 8r^4)) r'^4}{a^2 - 4r^2} = 0 \quad (5.57)$$

elde edilir. (5.57) eşitliğinden κ elde edilerek $A_5 = 0$ da yerine yazılırsa r ve r' e bağlı bir fonksiyon bulunur. Bu eşitlikten r' bulunarak A_3 ve A_2 de yerine yazılırsa r ye bağlı fonksiyonlar elde edilir. $A_3 = 0$ ve $A_2 = 0$ eşitlikleri aynı r için sağlanamayacağından çelişki elde edilir.

(ii) $a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b} = 0$ ise $a^2 + 2b = a\sqrt{a^2 + 4b}$ ifadesinde her iki tarafın karesi alınıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $b = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla

(iii) $a^2 + 4b = 0$ ve $r' = 0$ olsun. $A_4 = 0$ eşitliğinden

$$\frac{1}{512} a^4 r^8 \kappa^8 (-3a^4 + 8a^2 r^2 + 16r^4) = 0$$

elde edilir. Burada

$$-3a^4 + 8a^2 r^2 + 16r^4 = (4r^2 + 3a^2)(4r^2 - a^2) = 0$$

ise $4r^2 - a^2 = 0$ eşitliği γ da yerine yazılırsa $\gamma = 0$ elde edilir. Bu durum (1) şıkında incelenmiştir.

(iv) $a^2 + 4b > 0$ ve $r' = 0$ olsun. Bu taktirde $B_5 = 0$ eşitliğinden

$$a\kappa^7 \sigma r^9 (a^5 + 6a^3 b + 8ab^2 - (a^4 + 4a^2 b + 2b^2) \sqrt{a^2 + 4b}) \sqrt{-4b + 2a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 4r^2} = 0$$

elde edilir.

$$-4b + 2a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 4r^2 = 0$$

ise (5.56) den $\gamma = 0$ dir.

$$a^5 + 6a^3b + 8ab^2 = (a^4 + 4a^2b + 2b^2)\sqrt{a^2 + 4b} = 0$$

ise ifadenin her iki tarafının karesi alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $b^4(a^2 + 4b) = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $\sigma = 0$ olur. Bu takdirde $A_4 = 0$ ve $A_2 = 0$ eşitliklerinden $\kappa = 0$ elde edilir.

(2.c) $x_1 = y_1 = 0$ olsun. Bu takdirde

$$8x_1 - y_1 = (a^2 + 2b)\gamma^2 + \kappa^2(2b^2 - (a^2 + 2b)r^2) = 0 \quad (5.58)$$

dir. (5.58) eşitliğinden $a^2 + 2b \neq 0$ olmak üzere

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2((a^2 + 2b)r^2 - 2b^2)}{(a^2 + 2b)}$$

elde edilir. γ^2 eşitliği $x_1 = 0$ eşitliğinde kullanılırsa

$$x_1 = \frac{a^2b^2(a^2 + 4b)\kappa^4}{(a^2 + 2b)^2} = 0$$

olduğundan çelişki elde edilir.

(3) I nın bir alt aralığında $\beta\gamma \neq 0$ olsun. Burada yapılan hesaplamalar çok kompleks ve uzun olduğundan dolayı ispatı detaylara girmeden ana hatlarıyla vereceğiz. $x = \beta^2$ ve $y = \gamma^2$ olsun. $x_1 = 0$ denkleminde $a^2 + 2b$ elde edilerek $x_2 = 0$ da yerine yazılırsa

$$((x - y)^2 - 2(x + y)r^2\kappa^2 - b^2\kappa^4 + r^4\kappa^4) ((x - y)^2 + 2(x + y)r^2\kappa^2 + r^4\kappa^4) = 0 \quad (5.59)$$

elde edilir. (5.59) eşitliğinde

(3.a) $(x - y)^2 - 2(x + y)r^2\kappa^2 + (-b^2 + r^4)\kappa^4 = 0$ olsun. Bu eşitlikten $y = x + r^2\kappa^2 \pm \kappa\sqrt{4xr^2 + b^2\kappa^2}$ elde edilir. Genelliği bozmadan

$$y = x + r^2\kappa^2 + \kappa\sqrt{4xr^2 + b^2\kappa^2}$$

alalım. Bu eşitlik $x_2 = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$$a^2 + 2b = \frac{-2(2x + \kappa\sqrt{4xr^2 + b^2\kappa^2})}{\kappa^2} \quad (5.60)$$

elde edilir. (5.60) eşitliğinden $\kappa\sqrt{4xr^2 + b^2\kappa^2}$ değeri elde edilerek y denkleminde yerine yazılırsa

$$y = -x + \left(-\frac{a^2}{2} - b + r^2\right)\kappa^2 \quad (5.61)$$

bulunur. (5.61) eşitliği $(x-y)^2 - 2(x+y)r^2\kappa^2 + (-b^2 + r^4)\kappa^4 = 0$ eşitliğinde kullanılırsa

$$x = \frac{\kappa^2}{4}(-a^2 - 2b + 2r^2 - 2\sqrt{b^2 - (a^2 + 2b)r^2 + r^4})$$

elde edilir. Bu taktirde

$$\beta = \frac{\kappa}{2}\sqrt{-a^2 - 2b + 2r^2 - 2\sqrt{b^2 - (a^2 + 2b)r^2 + r^4}}$$

ve

$$\gamma = \frac{\kappa}{2}\sqrt{-a^2 - 2b + 2r^2 + 2\sqrt{b^2 - (a^2 + 2b)r^2 + r^4}}$$

dır. Bu durumda $A_7 = 0$ eşitliğinden α elde edilerek $B_7 = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$a^2b^4(a^2 + 4b)r^{10}r'\kappa = 0$$

elde edilir.

(i) $r = R = \text{sabit}$ ise $\alpha = 0$ dır. $\alpha = 0$ değeri için $A_5 = 0$ ve $B_5 = 0$ eşitlikleri

$$\begin{aligned} A_5 &= \frac{\kappa^4}{2}(a^4 + 4a^2b + 2b^2)R^9\beta\gamma^2\sigma = 0 \\ B_5 &= \frac{\kappa^6}{8}a^2(a^2 + 2b)(a^2 + 4b)R^9\gamma\sigma = 0 \end{aligned}$$

olur. $B_5 = 0$ eşitliğinde $(a^2 + 2b) = 0$ veya $(a^2 + 4b) = 0$ ise $A_5 = 0$ eşitliğinden $\sigma = 0$ elde edilir. Bu taktirde $A_4 = 0$ eşitliğinden elde edilen r değeri için $B_4 = 0$ eşitliğinden $\kappa = 0$ sonucuna varılır. Bu durum ise bir çelişkidir.

(ii) $a^2 + 4b = 0$ ise $A_7 = 0$ eşitliğinden $\alpha = 0$ dır. Bu taktirde $A_6 = 0$ eşitliğinden

$$\sigma = \frac{r^3r'\kappa^2}{a^2\beta\gamma}$$

elde edilir. $A_5 = 0$ eşitliğinden r'' elde edilerek $B_5 = 0$ eşitliğinde kullanılırsa

$$-\frac{r^4\kappa^3r'^2\sqrt{(a^2 - 4r^2)^2}}{\gamma^2} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $r = R = \text{sabit}$ dir. Bu taktirde

$$A_4 = \frac{a^4(3a^2 + 4R^2)R^8\kappa^6\gamma^2}{128}$$

eşitliği bir çelişkidir.

$(x - y)^2 + 2(x + y)r^2\kappa^2 + r^4\kappa^4 = 0$ ise ispat benzer biçimde yapılır.

İkinci Durum. t' timelike ($\langle t', t' \rangle < 0$) olsun. $t' = \kappa n$ olmak üzere Γ eğrisinin $\{t, n, b\}$ ($b = t \wedge n$) Frenet çatısı düşünelim. Burada n timelike vektör, b ise spacelike vektördür. Γ eğrisinin eğriliği κ ve burulması σ olmak üzere Frenet formülleri

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= \kappa t + \sigma b \\ b' &= \sigma n \end{aligned}$$

şeklindedir.

α, β ve γ, u üzerinde düzgün fonksiyonlar olmak üzere $c' = \alpha t + \beta n + \gamma b$ olsun. Koordinatların değışiklikliğı ile (5.49) parametrik olarak

$$X(u, v) = c(u) + r(u) \cosh v n(u) + r \sinh v b(u)$$

şeklinde yazılır. İspat birinci durumda yapılan işlemlere benzer olarak kolayca yapılabilir.

Üçüncü durum. t' lightlike ($\langle t', t' \rangle = 0$) olsun. Foliasyon düzlemleri paralel olmadığından $t' \neq 0$ dir. $t', u-$ düzleminde bulunan lightlike bir vektördür. $n = t'$ olmak üzere her bir $u-$ düzlemi için

$$\langle b, b \rangle = 0, \quad \langle b, n \rangle = 1$$

olacak biçimde t vektörüne dik olan bir tek b lightlike vektörü bulunsun. $\{t, n, b\}$ çatısına göre Frenet formülleri

$$\begin{aligned} t' &= n \\ n' &= \sigma n \\ b' &= -t - \sigma b \end{aligned}$$

şeklindedir. λ , u değişkenine bağlı diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere (5.49) dan

$$n = \lambda(u)(-e_1 + e_2), \quad b = \frac{1}{\lambda(u)}(e_1 + e_2)$$

dir. (5.49) da v parametresi yerine $-\frac{e^{-v}}{2\lambda(u)}$ yazılırsa $r, v \neq 0$ olmak üzere yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = c(u) + vr(u)n(u) - \frac{r(u)}{2v}b(u) \quad (5.62)$$

olur. (5.62) eşitliği, $c' = \alpha t + \beta n + \gamma b$ ve Frenet formülleri kullanılırsa $aH + bK = c$ eşitliğinden

$$\sum_{j=0}^{16} A_j(u) \frac{1}{v^j} = 0$$

olur.

$aH + bK = c$ bağıntısında $c = 0$ durumu:

Genelliği bozmadan $b = 1/2$ olsun. Buna göre

$$A_{16} = -\frac{1}{256}r^8(r^2 - \beta^2)^2(1 - 4a^2(r^2 - \beta^2))$$

elde edilir. Burada iki durum vardır:

(1) $r^2 = \beta^2$ yani $\beta = \pm r$ ise

$$A_{14} = -\frac{9}{64}r^{10}(\alpha - r')^2$$

olur. Bu taktirde $\alpha = r'$ dür. Bu eşitlik $A_{12} = 0$ denkleminde kullanılırsa

$$-\frac{1}{4}r^{10}\gamma^2 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\gamma = 0$ dır. $\beta = \pm r$, $\alpha = r'$ ve $\gamma = 0$ değerleri için $W = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

(2) $1 - 4a^2(r^2 - \beta^2) = 0$ ise

$$\beta = \frac{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}{2a} \kappa \quad (5.63)$$

dır. (5.63) eşitliği $A_{15} = 0$ eşitliğinde kullanılırsa

$$\frac{r^9 \left(\alpha - \frac{2arr'}{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}} \right)}{512a^2} = 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$\alpha = \frac{2arr'}{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}} \quad (5.64)$$

olur. (5.63) ve (5.64) eşitlikleri $A_{14} = 0$ eşitliğinde kullanılırsa

$$A_{14} = \frac{r^{10}r'^2}{32(-1 + 4a^2r^2)} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $r' = 0$ dır. Bu durumda

$$A_{12} = \frac{5}{64}r^{10}\gamma^{12} = 0$$

eşitliğinden $\gamma = 0$ elde edilir. (5.63), (5.64) ve $\gamma = 0$ eşitlikleri için

$$c' = \frac{2arr'}{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}} t + \frac{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}{2a} \kappa n = \left(\frac{\sqrt{-1 + 4a^2r^2}}{2a} t \right)'$$

olur. Yukarıdaki ifadeye göre

$$c = c_0 + \sqrt{-\frac{1}{4a^2} + r^2} t$$

olacak biçimde $c_0 \in E_1^3$ vardır. Bu taktirde yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = c_0 + \sqrt{-\frac{1}{4a^2} + r(u)^2} t(u) + vr(u)n(u) - \frac{r(u)}{2v}b(u)$$

olur. Buna göre

$$\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = -\frac{1}{4a^2}$$

dır. Dolayısıyla yüzey bir pseudohiperbolik yüzeydir.

$aH + bK = c$ bağıntısında $c \neq 0$ durumu:

$c = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_{16} &= -\frac{1}{64}r^8(r^2 - \beta^2)(b^2 - (r^2 - \beta^2))(a^2 + 2b - r^2 + \beta^2) = 0 \\ A_0 &= -16\gamma^8r^8 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

(1) $\beta^2 = r^2$ yani $\beta = \pm r$ ise

$$A_{14} = -\frac{9}{16}b^2r^{10}(\alpha - r')^2 = 0$$

eşitliğinden $\alpha = r'$ elde edilir. $A_0 = 0$ eşitliğinden $\gamma = 0$ dır. $\gamma = 0$, $\beta = \pm r$ ve $\alpha = r'$ değerleri için $W = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

(2) $(b^2 - (r^2 - \beta^2))(a^2 + 2b - r^2 + \beta^2) = 0$ ise

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{-a^2 - 2b + a\sqrt{a^2 + 4b} + 8r^2}{8}},$$

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{-a^2 - 2b - a\sqrt{a^2 + 4b} + 8r^2}{8}}$$

elde edilir. Genelliği bozmadan

$$\beta = \sqrt{\frac{-a^2 - 2b + a\sqrt{a^2 + 4b} + 8r^2}{8}} \quad (5.65)$$

olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $A_{15} = 0$ eşitliğinden

$$\frac{a\sqrt{a^2 + 4b} (a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b})^2 \left(2\sqrt{2}rr' - \sqrt{-2b + a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 8r^2}\alpha \right)}{2048\sqrt{-2b + a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 8r^2}} = 0$$

elde edilir. Burada üç durum vardır:

(2.a) $a^2 + 4b = 0$ olsun. $\gamma = 0$ ve $A_8 = 0$ eşitliğinden

$$(b + 4r^2)\alpha^2 - 4r^2r'^2 = 0 \quad (5.66)$$

veya

$$4\alpha^6 - 12\alpha^4r'^2 - 4r'^6 + br'^2 - 2b\alpha r'\alpha'r'' + \alpha^2(12r'^2 + br''^2) = 0 \quad (5.67)$$

elde edilir. (5.67) denklemini α için çözümlerse köklerin reel olmadığı görülür. Dolayısıyla $(b + 4r^2)\alpha^2 - 4r^2r'^2 = 0$ ise

$$\alpha = \frac{2rr'}{\sqrt{b + 4r^2}}$$

bulunur. $a^2 = -4b$ ise (5.65) den $\beta = \frac{\sqrt{4r^2 + b}}{2}$ dır Dolayısıyla

$$c' = \frac{2rr'}{\sqrt{4r^2 + b}}t + \frac{\sqrt{4r^2 + b}}{2}n = \left(\frac{\sqrt{4r^2 + b}}{2} t \right)'$$

olur. Yukarıdaki ifadeye göre

$$c = c_0 + \frac{\sqrt{4r^2 + b}}{2} t$$

olacak biçimde $c_0 \in E_1^3$ vardır. Öyleyse yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = c_0 + \frac{\sqrt{4r(u)^2 + b}}{2} t(u) + vr(u)n(u) - \frac{r(u)}{2v}b(u)$$

olur. Buna göre

$$\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = -\frac{b}{4}$$

dür. Dolayısıyla M yüzeyi bir pseudohiperbolik yüzeydir.

(2.b) $a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b} = 0$ olsun. $a^2 + 2b = a\sqrt{a^2 + 4b}$ ifadesinde her iki tarafın karesi alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $b = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

(2.c) $2\sqrt{2}rr' - \sqrt{-2b + a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 8r^2}\alpha = 0$ ise

$$\alpha = \frac{2\sqrt{2}rr'}{\sqrt{-2b + a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 8r^2}} \quad (5.68)$$

elde edilir. (5.65) ve (5.68) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} c' &= \frac{2\sqrt{2}rr'}{\sqrt{-2b + a(-a + \sqrt{a^2 + 4b}) + 8r^2}}t + \frac{\sqrt{-a^2 - 2b + a\sqrt{a^2 + 4b} + 8r^2}}{2\sqrt{2}}n \\ &= \left(\frac{\sqrt{-a^2 - 2b + a\sqrt{a^2 + 4b} + 8r^2}}{2\sqrt{2}} t \right)' \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitliğe göre

$$c = c_0 + \frac{\sqrt{-a^2 - 2b + a\sqrt{a^2 + 4b} + 8r^2}}{2\sqrt{2}}t$$

olacak biçimde $c_0 \in E_1^3$ vardır. Öyleyse yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = c_0 + \frac{\sqrt{-a^2 - 2b + a\sqrt{a^2 + 4b} + 8r(u)^2}}{2\sqrt{2}} t(u) + vr(u)n(u) - \frac{r(u)}{2v}b(u)$$

olduğundan

$$\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = \frac{-2b + a(-a + \sqrt{a^2 + 4b})}{8}$$

bulunur. Dolayısıyla M yüzeyi bir pseudohiperbolik yüzeydir.

III. Düzlemler lightlike ise:

Foliasyonun her bir u -düzlemi lightlike olduğundan, düzlemlerde $\langle e_1(u), e_1(u) \rangle = 1$ ve $\langle e_2(u), e_2(u) \rangle = 0$ olacak biçimde $e_1(u)$ ve $e_2(u)$ vektörleri vardır. Buna göre $r(u) > 0$ olmak üzere M yüzeyi

$$X(u, v) = c(u) + ve_1(u) + r(u)v^2e_2(u)$$

biçiminde verilebilir. Γ integral eğrisinin birim teğet vektörü t ve birim normal vektörü n olmak üzere $e_1 = n$ ve $e_2 = t$ alalım. Her bir u -düzlemi için

$$\langle t, b \rangle = 1, \quad \det(t, n, b) = 1$$

olacak biçimde n vektörüne dik olan bir tek b lightlike vektörü vardır ve Γ 'nin bir Frenet çatısı $\{t, n, b\}$ olur. Foliasyonun her bir u -düzleminde $t(u)$ vektörü vardır. Burada belirtelim ki lightlike düzlemde bulunan bir lightlike vektör düzleme dik bir vektördür. Dolayısıyla çember parçalarını kapsayan her bir düzlemin paralel olması için gerek ve yeter koşul t vektörünün sabit olmasıdır.

Kabul edelim ki u -düzlemleri paralel olmasın. Bu taktirde en az bir aralıkta $\kappa \neq 0$ dır. Diğer taraftan Frenet formülleri

$$t' = \kappa n \tag{5.69}$$

$$n' = \sigma t - \kappa b$$

$$b' = -\sigma n$$

şeklindedir. c , r , t ve n aynı u değişkenine bağlı olduklarından yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = c(u) + vn(u) + v^2r(u)t(u) \tag{5.70}$$

şeklindedir. (5.70) eşitliği, $c' = \alpha t + \beta n + \gamma b$ ve Frenet formülleri kullanılırsa $aH + bK = c$ eşitliğinden

$$\sum_{j=0}^n A_j(u)v^j = 0$$

olarak elde edilir. Bu denklemde $c = 0$ ise $n = 11$ ve $c \neq 0$ ise $n = 12$ dir.

$aH + bK = c$ bağıntısında $c = 0$ durumu:

Genelliği bozmadan $b = 1/2$ olsun. Buna göre

$$A_{11} = 98a^2r^2\kappa^5(2r^2\gamma - r')^2$$

olur. Bu taktirde $r' = 2r^2\gamma$ dır. Bu eşitlik $A_8 = 0$ denkleminde kullanılırsa

$$A_8 = -64r^2\kappa^5(\sigma - 2r\beta)^2(-4a^2r\beta + r^2\kappa + 2a^2\sigma) = 0 \quad (5.71)$$

elde edilir. Burada iki durum vardır:

(1) $\sigma = 2r\beta$ ise $A_6 = -100r^4\alpha^2\kappa^6 = 0$ bulunur. $A_6 = 0$ denkleminde $\alpha = 0$ dır. $r' = 2r^2\gamma$, $\sigma = 2r\beta$ ve $\alpha = 0$ değerleri için $W = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

(2) $2a^2\sigma = 4a^2r\beta - r^2\kappa$ ise

$$\sigma = \frac{4a^2r\beta - r^2\kappa}{2a^2} \quad (5.72)$$

elde edilir. $r' = 2r^2\gamma$ ve (5.72) eşitliği ile birlikte $A_7 = 0$ denkleminde $2a^2\alpha = r^2\gamma$ dır.

$$\gamma = \frac{r'}{2r^2}, \quad \alpha = \frac{r'}{4a^2}$$

değerleri için

$$c' = \frac{r'}{4a^2}t + \beta n + \frac{r'}{2r^2}b = \left(\frac{r}{4a^2}t - \frac{1}{2r}b \right)'$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$X(u, v) = c_0 + \left(\frac{r(u)}{4a^2}t(u) - \frac{1}{2r(u)}b(u) \right) + vn(u) + r(u)v^2t(u)$$

olacak biçimde $c_0 \in E_1^3$ vardır. Bu taktirde

$$\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = -\frac{1}{4a^2}$$

elde edilir. Bu sonuç ise M nin bir pseudohiperbolik yüzey olduğunu gösterir.

$aH + bK = c$ bağıntısında $c \neq 0$ durumu:

$c = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$A_{12} = -64\kappa^4(r' - 2r^2\gamma)^4$$

olur. $r' = 2r^2\gamma$ değeri için

$$A_8 = (\sigma - 2r\beta)^2(\sigma^2 + 2r\sigma(-2\beta + (a^2 + 2b)r\kappa) + 4r^2(\beta^2 - (a^2 + 2b)r\beta\kappa + b^2r^2\kappa^2)) = 0$$

elde edilir. Burada iki durum vardır:

(1) $\sigma = 2r\beta$ ise $A_6 = -400b^2\alpha^2\kappa^6 = 0$ bulunur. Bu denklemden $\alpha = 0$ demektir. $r' = 2r^2\gamma$, $\sigma = 2r\beta$ ve $\alpha = 0$ değerleri için $W = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

(2) $\sigma^2 + 2r\sigma(-2\beta + (a^2 + 2b)r\kappa) + 4r^2(\beta^2 - (a^2 + 2b)r\beta\kappa + b^2r^2\kappa^2) = 0$ ise

$$\sigma = 2r\beta - a^2r^2\kappa - 2br^2\kappa \pm ar^2\kappa\sqrt{a^2 + 4b} \quad (5.73)$$

dır. Hesaplamalarımızı

$$\sigma = 2r\beta - a^2r^2\kappa - 2br^2\kappa + ar^2\kappa\sqrt{a^2 + 4b}$$

kabul ederek yapalım. ($-$ için hesaplamalar benzer olarak elde edilir). (5.73) eşitliğiyle

birlikte $A_7 = 0$ denkleminde

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{(-(-a^7 - 8a^5b - 19a^3b^2 - 12ab^3 + (a^6 + 6a^4b + 9a^2b^2 + 2b^3)\sqrt{a^2 + 4b})r')}{(a^5 + 6a^3b + 8ab^2 - (a^4 + 4a^2b + 2b^2)\sqrt{a^2 + 4b})} \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b})r' \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} c' &= \frac{1}{2} \left(a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b} \right) r't + \beta n + \frac{r'}{2r^2} b \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b} \right) rt - \frac{1}{2r} b \right)' \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$c = c_0 + \frac{1}{2} \left(a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b} \right) rt - \frac{1}{2r} b$$

olacak biçimde $c_0 \in E_1^3$ vardır. Bu takdirde

$$X(u, v) = c_0 + \frac{1}{2} \left(a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b} \right) r(u)t(u) + vn(u) + \left(r(u)v^2 - \frac{1}{2r(u)} \right) b(u)$$

ve

$$\langle X(u, v) - c_0, X(u, v) - c_0 \rangle = -\frac{1}{2} \left(a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b} \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak M yüzeyi bir pseudohiperbolik yüzeydir.

Sonuç 5.2. Dönel yüzeyler hariç $aH + bK = c$ bağıntısını sağlayan spacelike cyclic yüzeyler, maksimal yüzeylerin Riemann örnekleri (Lopez^[1] 1999) ve $K = 0$ şartını sağlayan yüzeylerin ailesidir (Lopez 2003).

KAYNAKLAR

- Aledo J. A., Galvez J. A. 2003. A weierstrass representation for maximal linear Weingarten spacelike surfaces in the Lorentz-Minkowski space, *Journal of Math. Analysis and Application*, 283 , 25–45.
- Araujo H., Leite M. L. 2009. How many maximal surfaces do correspond to one minimal surface?, *Mathematical Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 146, 165-175.
- Brunt B., 1994 Weingarten surfaces design and application of curves and surfaces, Fisher, R. (Ed.), *Mathematics of Surfaces V*, Oxford Univ. Press.
- Brunt B., Grant K. 1996. Potential applications of Weingarten surfaces in CAGD. I: Weingarten surfaces and surface shape investigation, *Comput. Aided Geom. Des.*, 13, 569-582.
- Chern S. S. 1945. Some new characterizations of the Euclidean sphere, *Duke Math. J.*, 12, 279-290.
- Chern S. S. 1955. On special Weingarten surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6, 783-786.
- Coddington E. A., Levinson N. 1955. *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill.
- Delaunay C. 1841. Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante, *J. Math. Pure Appl.*, 6, 309-320.
- Eisenhart L. 1909. *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Dover Phoenix Editions.
- Enneper A. 1866. Ueber die cyclischen Flächen, *Nach. Königl. Ges. d. Wissensch. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, 243-249.
- Enneper A. 1869. Die cyklischen Flächen, *Z. Math. Phys.*, 14, 393-421.
- Fernandez I., Lopez, F. J. 2007. Periodical maximal surfaces in Lorentz-Minkowski L^3 , *Math. Z.*, 256, 573-601.
- Fernandez I., Lopez, F. J., Souam R. 2005. The space of complete embedded maximal surfaces with isolated singularities in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space, *Math Ann.*, 332, 605-643.
- Galvez J. A., Martinez A., Milan F. 2003. Linear Weingarten surfaces in \mathbb{R}^3 , *Monatsh.*

- Math., 138, 133-144.
- Gray A. 1996. Differential Geometry and its Applications with mathematica, CRC Press, London.
- Görgülü A., Çöken C., 1994. The dupin indicatrix for parallel pseudo-Euclidean hyper-surfaces in pseudo-Euclidean space in semi-Euclidean space R_1^{n+1} . Journ. Inst. Math. and Comp. Sci. (Math Series), 7(3), 221-225.
- Hacısalıhoğlu H. H. 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu H. H. 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları.
- Hano. J. I., Nomizu K. 1984. Surfaces of revolution with constant mean curvature in Lorentz-Minkowski space, Tohoku, Math. J., 36, 427-437.
- Hartman P., Winter W. 1954. Umbilik noktalar ve W-surfaces, Amer J. Math., 76, 502-508.
- Hopf H. 1951. Ueber Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen, Math Nachr., 4, 232-249.
- Hopf H. 1983. Differential Geometry in Large. Lect Notes Math 1000. Berlin Heidelberg Newyork, Springer.
- Kim Y. W., Yang S. D. 2006. A family of maximal surfaces in Lorentz-Minkowski three-space, Proc. Amer. Math. Soc., 134, 3379-3390.
- Kobayashi O. 1983. Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3 , Tokyo J. Math., 6 , 297-303.
- Kühnel W. 2002. Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds, American Mathematical Society.
- Kühnel W., Steller M. 2005. On closed Weingarten surfaces, Monatsh. Math., 146, 113-126.
- Meusnier J. B. 1785. Mémoire sur la courbure des surfaces, Mém. des Savantsétrangers, 10, 504.
- Lopez F. J., Lopez, R., Souam R. 2000. Maximal surfaces of Riemann type in Lorentz-

- Minkowski space, Michigan Math. J., 47 469–497.
- Lopez^[1] R. 1999. Constant mean curvature hypersurfaces foliated by spheres, Diff. Geom. App., 11, 245-256.
- Lopez^[2] R. 1999. Constant mean curvature surfaces foliated by circles in Lorentz-Minkowski space, Geom. Dedicata., 76, 81-95.
- Lopez R. 2000. Timelike surfaces in Lorentz 3-space with constant mean curvature, Tohoku, Math. J., 52, 515-532.
- Lopez^[1] R. 2001. How to use mathematica to find cyclic surfaces of constant curvature in Lorentz-Minkowski space, Contemp. Math., 288, 371-375.
- Lopez^[2] R. 2001. Cyclic surfaces of constant Gauss curvature, Houston Jour. Math., 27(4), 799-805.
- Lopez R. 2003. Surfaces of constant Gauss curvature in Lorentz-Minkowski space, Rocky Mountain J. Math., 33, 971-993.
- Lopez^[1] R. 2008. On linear Weingarten surfaces, International J. Math, 19, 439-448.
- Lopez^[2] R. 2008. Rotational linear Weingarten surfaces of hyperbolic type, Israil Journal of Math., 167, 283-301.
- Lopez^[3] R. 2008. Special Weingarten surfaces foliated by circles, Monatshefte für Mathematik, 154, 289-302.
- Lopez^[4] R. 2008. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space, Mini-Course taught at the Instituto de Matematica e Estatistica (IME-USP), University of Sao Paulo, Brasil.
- Milnor T. K. 1983. Surfaces in Minkowski 3-space on which H and K are linearly related. Michigan Math J., 30, 309-315.
- Nitsche^[1] J. C. C. 1989. Cyclic surfaces of constant mean curvature, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II, 1, 1-5.
- Nitsche^[2] J. C. C. 1989. Lectures On Minimal Surfaces, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- O'Neill B. 1983. Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity, A. Press, London.

- Riemann B. 1868. Über die Flächen vom Kleinsten Inhalt bei Gegebener Begrenzung, Abh. Königl. Ges. d. Wissensch. Göttingen, Mathema. Kl, 13, pp. 329-333.
- Rosenberg H., Earp Sa R. 1994. The Geometry of properly embedded special surfaces in \mathbb{R}^3 ; surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a and b are positive, Duke Math J., 73, pp. 291-306.
- Russell F. A. 1912. Lectures on the differential geometry of curves and surfaces, Cambridge Uni. Press.
- Sabuncuoğlu, A. 2006. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları.
- Weinstein T. 1995. An Introduction to Lorentz Surfaces, Berlin.
- Weingarten J. 1861. Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 59, 382-393.
- Weingarten J. 1863. Ueber eine Flächen, derer Normalen eine gegebene Fläche-berühren, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 62, 61-63.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özgür KALKAN
Doğum Yeri : Afyonkarahisar
Doğum Tarihi : 08.08.1977
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi, 1996.
Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü, 2000.
Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2004.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2000-

Yayımları (SCI ve Diğer)

1. "Linear Weingarten surfaces foliated by circles in Minkowski space" başlıklı çalışma "Taiwanese Journal of Mathematics" adlı dergide yayına kabul edilmiştir.
2. Non-dejenerare surface of revolution in Minkowski space that satisfy the relation $aH + bK = c$ başlıklı çalışma yayına sunulmuştur.