

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

**CEBİRSEL YAPILAR VE ÖNERMELER
LOJİĞİ ARASINDAKİ BAĞLANTI**

SELÇUK TOPAL

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.05.01

Tezin Sunulduğu Tarih: 15.07.2009

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Tahsin Öner

Bornova-İZMİR

Selçuk TOPAL tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan “Cebirsel Yapılar ve Önermeler Lojği Arasındaki Bağlantı ” başlıklı çalışma E.Ü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilecek savunmaya değer bulunmuş ve 15.07.2009 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı: Yard. Doç. Dr. Tahsin Öner

Rapörtlör Üye: Prof. Dr. Mehmet Terziler

Üye: Yard. Doç. Dr. Adem Çelik

ÖZET**CEBİRSEL YAPILAR
VE
ÖNERMELER LOJİĞİ ARASINDAKİ BAĞLANTI**

TOPAL, Selçuk

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Temmuz 2009, 77 sayfa

Bu tez temel olarak cebirsel yapılar ile önermeler lojigi arasındaki bağlantı ile ilgilidir. Grupların, halkaların, cebirlerin, R-modüllerin ve kafeslerin temel tanımları verilmiş ve önermeler lojigi ile arasında bağlantı kurulmuştur. Özellikle kafes teorisi ve cebirler üzerinde durulmuştur. Bunun yanı sıra bazı sonlu teorilerin kardinalleri üzerinde çalışılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Önermesel Lojik, Kafes Teorisi, Cebirler, Boolean

ABSTRACT

**THE RELATIONSHIP BETWEEN PROPOSITIONAL LOGIC
AND
ALGEBRAIC STRUCTURES**

TOPAL, Selçuk

MSc. in Mathematics Department

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER

JULY 2009, 77 pages

This thesis is mainly concerned with the relationship between algebraic structures and propositional logic. Basic definitions of groups, rings, lattices, algebras and R-modules are presented and the relationship between them and propositional logic are established. Specially lattice theory and algebras are emphasized. In addition to, the cardinality of some finite theories are studied.

Keywords: Propositional Logic, Lattice theory, Algebras, Boolean

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince gerekli kaynakların sağlanmasında yardımcı olan ve görüşleriyle beni yönlendiren Hocam, Sayın **Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER**'e, değerli görüşlerinden ve engin bilgisinden faydalandığım Sayın Hocam **Prof. Dr. Mehmet TERZİLER**'e teşekkür ederim.

Her zaman desteklerini yanımda hissettiğim değerli **aileme**, sayın eşim **Leyla KALKAN**'a ve Bornova Belediyesi Genç Kaşifler Bilim Evi sorumlusu Sayın **Dr. Sevdâ DEMİR**'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET.....	v
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜRLER	ix
1.GİRİŞ	1
2. CEBİRSEL YAPILAR VE ÖZELLİKLERİ.....	2
2.1. Grup Tanımı	2
2.2. Halka Tanımı	3
2.3. Kafeslerin Tanımı.....	6
2.3.1. Dağılmalı ve Modüler Kafesler	13
2.4. Cebirlerin Tanımı ve Örnekler	22
2.4.1. Boolean Cebirleri ve Boolean Halkaları	23
2.5. R-Modüllerin Tanımı ve Örnekler	43
3. CEBİRSEL YAPILAR VE LOJİK ARASINDAKİ BAĞLANTI	46
3.1. Önermesel Lojiğin Temel Kavramları ve Notasyonu	46
3.2. Ön Hazırlık ve Yeni Sonuçlar	49
3.2.1.Kümeler	50
3.2.2. Gruplar	56
3.2.3. Halkalar	60
3.2.4. Kafesler	64
3.2.5. Cebirler	68
3.2.6. R-Modüller	71
4. SONUÇLAR	74
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ	78

TABLOLARIN LİSTESİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa No</u>
3.1 Önermesel Lojik Sembollerinin Tanımlaması	46
3.2 Gramersel kurallar	47
2.3 Doğruluk Değeri Atamaları.....	48

SİMGELER VE KISALTMALAR

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\wedge$	ve sembolü
$\vee$	veya sembolü
$\rightarrow$	ise sembolü
$\leftrightarrow$	ancak ve ancak sembolü
$\neg$	değil sembolü
A'	A'nın tümleyeni
$\models$	Gerçeklenebilirlik
$ $	Kardinal sembolü
$T(R)$	R'nin kesinleşmiş teorisi
$M(A)$	A'nın önermesel harflerle ilişkilendirilmiş modeli
$P(X)$	X kümesinin kuvvet kümesi
$\text{Sup}(A)$	A kümesinin en küçük üst sınırı
$\text{Inf}(A)$	A kümesinin en büyük alt sınırı
$A \times B$	A kümesi ile B kümesinin kartezyen çarpımı
RM	R-modül

1. GİRİŞ

Bu projede cebirsel yapılar ve önermesel lojik arasındaki bağlantı çalışılacaktır. 2. kısımda ise gruplar, halkalar, kafesler ve R-modüller olarak bilinen cebirsel yapıların temel tanımları tanıtılacaktır. Özellikle kafes teorisi ve cebirler üzerinde çalışılacak, bazı önemli özellikler ve sonuçlar ispatlanacaktır.

3. kısımda ise önermesel lojiğin temel kavramları üzerinde durulacaktır. Daha sonra Dr. Caceres tarafından ileri sürülen cebirsel yapılar ile önermesel lojik arasında ilişki sistemi kurulacaktır. Ayrıca bazı sonlu teorilerin kardinalleri üzerinde çalışmalar yapılacaktır.

Ayrıca daha ileri safhalarda bahsedilen cebirsel yapılar ile ilişkilendirilmiş modellerin, teorilerin tanımları verilip örnekler sunulacak ve yeni sonuçlar ispatlarıyla birlikte tanıtılacaktır. Verilen herhangi A halkası ile bu halka ile ilişkilendirilmiş modeller arasında bire bir eşleme yapılacak ve çeşitli sonuçlara varılacaktır. Ek olarak ilişkilendirilmiş önermesel teoriler ve Boolean cebirleri ile çalışılacaktır.

2. Cebirsel Yapılar ve Özellikleri

2.1 Grup Tanımı

Tanım 2.1.1 G boştan farklı bir küme ve $\cdot$, G üzerinde bir ikili işlem olsun.

$$(i) \quad (\forall a \in G) (\forall b \in G) \quad a.b \in G$$

$$(ii) \quad (\forall a \in G) (\forall b \in G) (\forall c \in G) \quad a.(b.c) = (a.b).c$$

$$(iii) \quad (\forall a \in G) (\exists e \in G) \quad a.e = e.a = a$$

$$(iv) \quad (\forall a \in G) (\exists b \in G) \quad a.b = b.a = e$$

koşulları sağlanıyorsa G ye bir *gruptur* denir. Ayrıca

$$(\forall a \in G) (\forall b \in G) \quad a.b = b.a \text{ şartı da sağlanıyorsa } G \text{ ye bir } \textit{değişmeli (abelian)}$$

grup denir (Ledermann,1964) .

Tanım 2.1.2 G bir çarpımsal grup ve H , G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman

$$(i) \quad a, b \in H \text{ için } a.b \in H$$

$$(ii) \quad a \in H \text{ için } a^{-1} \in H$$

ise H ye G nin *alt grubudur* denir.

Tanım 2.1.3 G bir çarpımsal grup ve N , G bir alt grubu olsun. Eğer her $a \in G$ ve $n \in N$ için $a.n.a^{-1} \in N$ ise N ye G nin bir *normal alt grubudur* denir.

2. 2 Halka Tanımı

Tanım 2.2.1 R boş olmayan bir küme ve $+$, $\cdot$ R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. Eğer

1. $(\forall a \in R) (\forall b \in R) \quad a + b \in R$
2. $(\forall a \in R) (\forall b \in R) \quad a + b = b + a$
3. $(\forall a \in R) (\forall b \in R) (\forall c \in R) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
4. $(\forall a \in R) (\exists 0 \in R) \quad a + 0 = a$
5. $(\forall a \in R) (\exists (-a) \in R) \quad a + (-a) = 0$
6. $(\forall a \in R) (\forall b \in R) \quad a.b \in R$
7. $(\forall a \in R) (\forall b \in R) (\forall c \in R) \quad a.(b.c) = (a.b).c$

$$8. (\forall a \in R) (\forall b \in R) (\forall c \in R) \quad a.(b + c) = a.b + a.c$$

$$9. (\forall a \in R) (\forall b \in R) (\forall c \in R) \quad (a + b).c = a.c + b.c$$

koşulları sağlanıyorsa R ye bir *halka* adı verilir.

Eğer

$(\forall a \in R) (\exists 1 \in R) \quad a.1 = 1.a = a$ ise R ye *birimli halka* denir. Ayrıca

$(\forall a \in R) (\forall b \in R) \quad a.b = b.a$ ise R ye *değişmeli halka* denir.

Örnek 2.2.2 $\vartheta = \{1, 2\}$ ve $R = P(\vartheta)$ olsun. $+$ ve $\cdot$ R üzerinde şöyle tanımlansın:

$A+B=A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B, \text{ fakat } x \text{ her ikisine birden ait değil}\}$

$A \cdot B = A \cap B \quad \{\cap : \text{kümeler üzerinde doğal kesişim işlemi}\}$

+	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	ϑ
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	ϑ
$\{1\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	ϑ	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	ϑ	$\{2\}$	$\{1\}$
ϑ	ϑ	$\{2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

Tablo (a)

.	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	ϑ
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{2\}$
ϑ	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	ϑ

Tablo (b)

Bu koşullar altında $(R, \Delta, \cap)$ halka değildir. Çünkü $\emptyset$, $+$ işlemine göre birim eleman olmasına rağmen toplamsal tersi yoktur (.

Örnek 2.2.3 $R = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a \in \mathbb{Q}, b, c \in \mathbb{Q}\}$ kümesi doğal toplama ve çarpma işlemi altında kapalı olmadığı için halka değildir (Grimaldi, 2003).

Tanım 2.2.4 R değişmeli bir halka ve I , R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer,

$$0 \in I$$

$$(\forall a \in R)(\forall b \in R)((a, b \in I) \rightarrow (a - b \in I))$$

$$(\forall a \in R)(\forall b \in R)((a \in I) \rightarrow (a, b \in I))$$

ise I ya R nin *ideali* denir.

2. 3 Kafeslerin Tanımı

Bir kafes cebirsel (grup, halka gibi) ve elemanların sıralanış biçimine göre yapısı iki farklı biçimde tanımlanır (Curry, 1976).

Tanım 2.3.1 L boştan farklı bir küme ve $\wedge, \vee$, sırasıyla L üzerinde meet ve join olarak adlandırılan ikili işlemler olsun. Aşağıdaki koşullar her $x, y, z \in L$ için gerçekleşirse L ye bir *kafestir* denir (Szász, 1963):

$$L_1: \quad (a) \quad x \vee y = y \vee x \\ (b) \quad x \wedge y = y \wedge x$$

$$L_2: \quad (a) \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \\ (b) \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$L_3: \quad (a) \quad x \vee x = x \\ (b) \quad x \wedge x = x$$

$$L_4: \quad (a) \quad x = x \vee (x \wedge y) \\ (b) \quad x = x \wedge (x \vee y)$$

Örnek 2.3.2 $L, \sqsubseteq$ doğal sayılar kümesi olsun. L üzerinde $\vee$ en küçük ortak çarpan ve $\wedge$ en büyük ortak bölen olarak verilsin. Bu durumda L bir kafestir.

Kafesin ikinci tanımını vermeden önce kısmi sıralı küme tanımını verelim.

Tanım 2.3.3 A boş olmayan bir küme ve $\leq$, A üzerinde bir ikili bağıntı olsun. Eğer

$$1. \quad (\forall a \in A) \quad a \leq a$$

$$2. \quad (\forall a \in A) (\forall b \in A) (a \leq b \ \& \ b \leq a \rightarrow a = b)$$

$$3. (\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(a \leq b \ \& \ b \leq c \rightarrow a \leq c)$$

şartları sağlınyorsa A ya *kısmi sıralı küme* veya kısaca bir *poset* denir. A kısmi sıralı bir küme olmak üzere $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \leq b \vee b \leq a)$ ise A ya *tam sıralı küme* veya bir *zincir* adı verilir

.

Kısmi sıralı kümelerle ilgili birkaç örnek verelim:

Örnek 2.3.4

(1) X boş olmayan bir küme ve $P(X)$, X in kuvvet kümesi olsun. A da X in keyfi bir alt kümesi olsun ($A \subseteq X$). $\subseteq$, $P(X)$ üzerinde kısmi sıralı bağıntıdır.

(2) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\leq$, $\mathbb{R}$ üzerinde doğal sıralama olsun. $\leq$ tam sıralamadır.

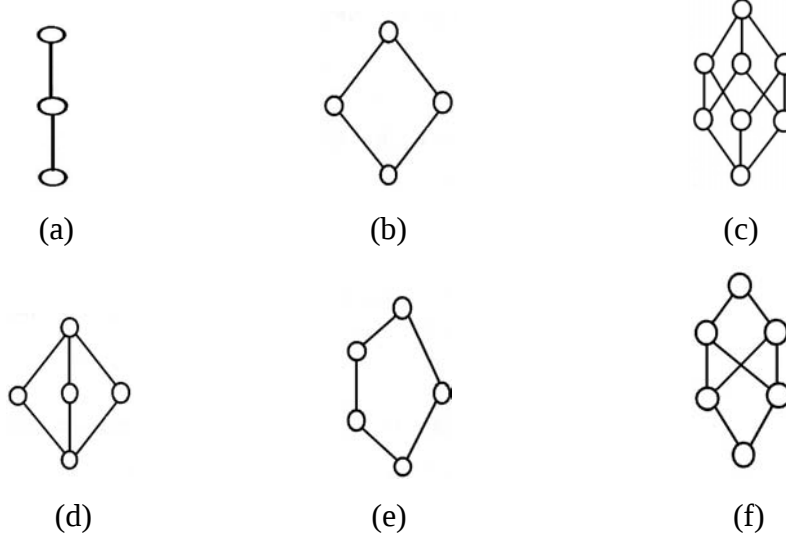
Tanım 2.3.5 P kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq P$ olsun. Eğer $(\forall a \in A) a \leq p$ ise bir $p \in P$ elemanına A nın *bir üst sınırıdır* denir. $(\exists b \in P)(\forall a \in A) a \leq b$ olduğunda $p \leq b$ oluyorsa $p \in P$ ye A nın *en küçük üst sınırı* ya da A nın *supremum* 'u ($\sup(A)$) denir.

P kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq P$ olsun. Eğer $(\forall a \in A) p \leq a$ ise bir $p \in P$ elemanına A nın *bir alt sınırıdır* denir. $(\exists b \in P)(\forall a \in A) b \leq a$ olduğunda $b \leq p$ oluyorsa $p \in P$ ye A nın *en büyük alt sınırı* ya da A nın *infimum* 'u ($\inf(A)$) denir (Hungerford, 1974).

Verilen $a \in P$ ve $b \in P$ için $a < b$ ve $(\exists c \in P)$ öyle ki $a \leq c \leq b$ ise $a = c$ veya $c = b$ olduğunda b , a yı örter ya da b , a tarafından örtülür denir ve $a < b$ şeklinde gösterilir.

Hasse diagramları sonlu kısmi sıralı kümelerde elemanlar arasındaki bağlantıyı göstermek için kullanılır. *Poset*in elemanları küçük çemberler ile gösterilir.(*o* gibi).

Eğer $a \prec b$ ise a çemberi b çemberinin aşağısında yer alır ve bir segment ile birbirine bağlanır. Hasse diagramlarına birkaç örnek aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.1 Hasse Diagramına Örnekler

Şimdi de kafesin ikinci tanımını verelim.

Tanım 2.3.6 L kısmi sıralı bir küme olsun. $(\forall a \in L)(\forall b \in L)$ için $Sup\{a,b\}$ ve $inf\{a,b\}$ L de ise L ye bir “*kafes*” denir (Burris et al., 1993).

Lemma 2.3.7 Tanım 2.3.1 ile Tanım 2.3.6 denktir.

İspat: a ve b Tanım 2.3.1 de verilen boştan farklı L kümesinin keyfi elemanları olsun ve $\leq$, şu şekilde tanımlansın: $a \leq b \leftrightarrow a = a \wedge b$ ve $b = a \vee b$.

L nin Tanım 2.3.6 da ki gibi bir poset olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak L yansıyandır. $\forall a \in L$ için $a = a \wedge a$ (L_3). Böylece $a \leq a$. Şimdi L nin ters simetrik olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $(\forall a \in L)(\forall b \in L)$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ olsun. $\leq$ nin tanımından $a = a \wedge b$ ve $b = b \wedge a = a \wedge b$ dir (L_1). Böylece $a = b$ dir. Daha sonra L nin geçişli olduğunu ispatlamalıyız. $(\forall a \in L)(\forall b \in L)(\forall c \in L)$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ olsun. Sonra $a = a \wedge b$ ve $b = b \wedge c$ dir. L_2 den elimizde $a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$ vardır. Böylece $a = a \wedge c$ dir. Bu da $a \leq c$ olduğu anlamına gelir ve L geçişkendir. Son olarak da L nin bir poset olduğu anlaşılır.

Şimdi ise $\sup\{a, b\}$ ve $\inf\{a, b\}$ nin L de olduğunu gösterelim. $L_4(b)$ ve L_1 den $(\forall a \in L)(\forall b \in L)$ için $a = a \wedge (a \vee b)$ ve $b = b \wedge (a \vee b)$ olduğunu biliyoruz. O zaman $a \leq (a \vee b)$ ve $b \leq (a \vee b)$ dir. Bu yüzden $(a \vee b)$ L deki a ve b nin bir üst sınırıdır. Buradan $(a \vee b) = \sup\{a, b\}$ olduğunu gösterebiliriz.

Kabul edelim ki $(\exists c \in L)$ öyle ki $a \leq c$ ve $b \leq c$ dir. L_4 ve L_1 den $a \vee c = (a \wedge c) \vee c = c$ ve $b \vee c = (b \wedge c) \vee c = c$ dir. $(a \vee c) \vee (b \vee c) = c$ dir. Diğer taraftan $(a \vee c) \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ dir (L_1 ve L_3). Daha sonra $(a \vee b) \vee c = c$ dir. (L_4) kuralının yardımı ile $(a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge [(a \vee b) \vee c] = a \vee b$ ulaşırız. Böylece $a \vee b \leq c$ diyebiliriz ve $a \vee b = \sup\{a, b\}$ olduğunu gördük.

Şimdi ise $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ olduğunu ispatlayacağız. L_1 ve L_4 ten $(\forall a \in L)(\forall b \in L)$ için $a = a \vee (a \wedge b)$ ve $b = b \vee (a \wedge b)$ olduğunu biliyoruz. Buradan $a \wedge b$ nin a ve b nin bir alt sınırı olduğunu gördük. Şimdi de

$a \wedge b = \inf\{a, b\}$ olduğunu gösterelim. $(\exists c \in L)$ için $c \leq a$ ve $c \leq b$ olduğunu kabul edelim. Buradan $c = a \wedge b$ ve $c = b \wedge c$ dir. Fakat L_2 den:

$c = a \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ dir. Böylece $c = (a \wedge b) \wedge c$ olduğunda $c \leq (a \wedge b)$ olduğunu söyleyebiliriz. Öyleyse $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ dir.

Son olarak $a \vee b = \sup\{a, b\}$ ve $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ nin L de olduğunu, Tanım 2.3.1 in Tanım 2.3.6 yı ima ettiğini gösterdik.

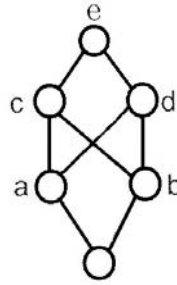
Şimdi de Tanım 2.3.6 nın Tanım 2.3.1 i ima ettiğini göstericez. İlk olarak kabul edelim ki L Tanım 2.3.6 daki şekilde ifade edilen boştan farklı bir küme olsun. a, b, c L nin keyfi elemanları olsun. $\wedge$ ve $\vee$ $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ ve $a \vee b = \sup\{a, b\}$ şeklinde tanımlansın. L nin Tanım 2.3.1 deki tanıma uygun olduğunu göstermek istiyoruz. L_1 doğrudur, $a \vee b = \sup\{a, b\} = \sup\{a, b\} = \sup\{b, a\} = b \vee a$ ve $a \wedge b = \inf\{a, b\} = \inf\{b, a\} = b \wedge a$ dir. L_2 için $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ göstermeliyiz ki buda $\sup\{a, \sup\{b, c\}\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\}$ dir. $d = \sup\{b, c\}$, $e = \sup\{a, b\}$, $f = \sup\{e, c\}$ olsun. Supremum tanımından $b \leq d$, $c \leq d$, $a \leq e$, $b \leq e$, $e \leq f$, $c \leq f$ dir. Geçişkenlikten $a \leq f$ ve $b \leq f$ dir. O zaman f , $\{a, b\}$ nin bir üst sınırıdır. $c \leq f$ ve $b \leq f$ den $d \leq f$ yi elde ederiz. Böylece f , $\{a, d\}$ nin bir üst sınırıdır ve $\sup\{a, d\} \leq f$ dir. Bu nedenle $\sup\{a, \sup\{b, c\}\} \leq \sup\{\sup\{a, b\}, c\}$ dir. Benzer yolla gösterebiliriz ki $\sup\{\sup\{a, b\}, c\} \leq \sup\{a, \sup\{b, c\}\}$ dir. Buradan ters simetrik özelliğinden $\sup\{a, \sup\{b, c\}\} \leq \sup\{\sup\{a, b\}, c\}$ dir. Böylece artık $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ olduğunu söyleyebiliriz. $L_3(a)$ için $a \vee a = \sup\{a, a\}$ olduğunu biliyoruz. L bir poset olduğu için $a \leq a$ ise a , a için bir üst sınırdır ve $\sup\{a, a\} \leq a$ dir. Ters simetrik özelliğinden $a \vee a = \sup\{a, a\} = a$ dir.

$L_3(b)$ nin ispatı benzerdir.

L_4 için $a = a \vee (a \wedge b)$ ve $a = a \wedge (a \vee b)$ yi göstermeliyiz. Tanımdan $a \vee (a \wedge b) = \sup\{a, \inf\{a, b\}\} = a$ ve $\inf\{a, b\} \leq a$ dır.

Diğer taraftan $a \wedge (a \vee b) = \inf\{a, \sup\{a, b\}\} = a$ ve $a \leq \sup\{a, b\}$ dir. Böylece Tanım 2.3.6 nın Tanım 2.3.1 i ima ettiğini gördük. Bu iki tanımın birbirine denk olduğunu gördük.

Bu tanımlar neticesinde Şekil 2-1 deki (a) dan (e) ye kadar olan örneklerin birer kafes olduğunu söyleriz. Fakat (f) bir kafes değildir. Çünkü c,d,e; a ve b için birer üst sınırlardır fakat onların hiçbiri en küçük üst sınır değildir. $\sup\{a, b\}$ bu şekle ait değildir.



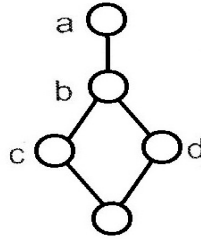
Şekil 2.2 Kafes olmayan bir örnek

Şimdide bir kafesin alt yapısı olan alt kafesi tanımlayalım.

Tanım 2.3.8 L kafesinin boştan farklı alt kümesi olan L' ye L 'nin bir alt kafesidir denir eğer $(\forall a \in L')(\forall b \in L')$ için $a \vee b \in L'$ ve $a \wedge b \in L'$ şartı sağlanıyorsa ($\vee$ ve $\wedge$; L üzerindeki işlem).

Örneğin Şekil 2.3 L nin $L' = \{a, c, d, e\}$ alt kümesi bir posettir, fakat L nin alt kafesi değildir çünkü $c \vee d = b$ ve $b \notin L'$ dir.

Diğer taraftan $L' = \{b, c, d, e\}$ alınırsa L' , L nin alt kafesidir.



Şekil 2.3 Alt kafese bir örnek

2.3.1 Dağılmalı ve Modüler Kafesler

Tanım 2.3.9 L boştan farklı bir kafes ve a, b, c L nin keyfi elemanları olsun. $(\forall a \in L)(\forall b \in L)(\forall c \in L)$ için aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa L ye “Dağılmalı kafes” denir:

$$D_1 : a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$D_2 : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Teorem 2.3.10 Bir L kafesi D_1 özelliğini sağlar $\leftrightarrow L$, D_2 yi sağlar.

İspat: $(\rightarrow)$: L , D_1 i sağlasın. O zaman D_2 yi de sağlar gösterelim.

x, y, z L nin keyfi elemanları olsun.

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \quad L_4(a)$$

$$= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \quad L_2$$

$$= x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) \quad L_1$$

$$= x \vee (z \wedge (x \wedge y)) \quad D_1$$

$$= x \vee ((x \wedge y) \wedge z) \quad L_1$$

$$= (x \wedge (x \vee y)) \vee ((x \vee y) \wedge z) \quad L_4(b)$$

$$= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \quad L_1$$

$$= (x \vee y) \wedge (x \wedge z) \quad D_1$$

Benzer şekilde ispatın diğer yönünü gösterelim.

$(\leftarrow) : L, D_2$ yi sağlasın. O zaman D_1 i de sağlar gösterelim.

x, y, z L nin keyfi elemanları olsun.

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge (y \vee z)) \wedge (y \vee z) \quad L_4(b)$$

$$= x \wedge ((x \vee z) \wedge (y \vee z)) \quad L_2$$

$$= x \wedge ((z \vee x) \wedge (z \vee y)) \quad L_1$$

$$= x \wedge ((z \vee (x \wedge y))) \quad D_2$$

$$= x \wedge ((x \wedge y) \vee z) \quad L_1$$

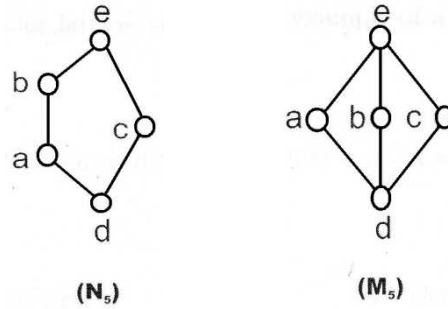
$$= (x \vee (x \wedge y)) \wedge ((x \wedge y) \vee z) \quad L_4 (a)$$

$$= ((x \wedge y) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee z) \quad L_1$$

$$= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad D_2$$

Bir kafesin dağılmalı olduğunu Tanım 2.3.9 un özelliklerinden herhangi biri ile ispatlamamız yeterlidir.

Örneğin (a),(b),(c) (Şekil 2,1 deki) dağılmalı kafeslerdir, (d),(e), M_5 ve N_5 dağılmalı olmayan kafeslerdir.



Şekil 2.4 Dağılmalı olmayan kafeslere örnek

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge e \text{ ve } (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = d \vee d = d$$

$a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ M_5 dağılmalı değildir. Benzer şekilde N_5 te gösterilebilir.

Tanım 2.3.11 L bir kafes olmak üzere $(\forall x \in L)(\forall y \in L)(\forall z \in L)$ için aşağıdaki kural sağlanıyorsa L ye *modüler kafes* denir ve bu kurala “*Modüler Kuralı*” denir (Grätzer,1978).

$$M : (x \leq y) \rightarrow ((x \vee (y \wedge z)) = y \wedge (x \vee z)).$$

Teorem 2.3.12 Her dağılımlı kafes modüler kafestir.

İspat: L bir dağılımlı kafes ve x, y, z L nin keyfi elemanları olsun.

$x \leq y$ ise o zaman $y = x \vee y$ dir $\leq$ nin tanımından. D_2 den:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = y \wedge (x \vee z) \quad (\text{hipotezden})$$

Böylece L modüler kuralını sağlar.

Şekil 2-4 te N_5 modüler olmayan kafestir çünkü $a \leq b$ olduğunda $b = a \vee b$ fakat;

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee d = a \quad \text{ve} \quad b \wedge (a \vee c) = b \wedge e = b \quad \text{böylece} \\ a \vee (b \wedge c) \neq b \wedge (a \vee c) \text{ olur.}$$

Teorem 2.3.13 (Dedekind) L bir modüler olmayan kafestir $\leftrightarrow L$ alt kafes olarak N_5 in bir kopyasını (nüshasını) içerir (Dedekind, 1900).

İspat: L , N_5 in bir nüshasını alt kafes olarak içeren boş olmayan bir kafes olsun. O zaman bir önceki örnekten L bir modüler olmayan kafestir.

Şimdi ise L yi modüler olmayan kafes olarak kabul edelim. Göstermeliyiz ki L , N_5 in bir nüshasını alt kafes olarak barındırır.

L modüler değil olduğunda $a, b, c \in L$ ve $a \leq b$ fakat $a \vee (b \wedge c) < b \wedge (a \vee c)$.

$a_1 = a \vee (b \wedge c)$ ve $b_1 = b \wedge (a \vee c)$ olsun.

O zaman $c \wedge b_1 = c \wedge [b \wedge (a \vee c)]$

$$= c \wedge [(a \vee c) \wedge b] \quad L_1(b)$$

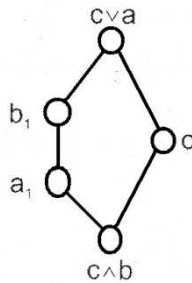
$$= c \wedge [(c \vee a) \wedge b] \quad L_1(a)$$

$$= [c \wedge (c \vee a)] \wedge b \quad L_2(b)$$

$$= c \wedge b \quad L_4(b)$$

a_1 ve b_1 in tanımından $c \wedge b \leq a_1 \leq b_1$ dir. Ayrıca $c \wedge b = c \wedge (c \wedge b) \leq c \wedge a_1 \leq c \wedge b_1$ dir, fakat $c \wedge b_1 = c \wedge b$ böylece $c \wedge b = c \wedge a_1 = c \wedge b_1$ olur. Benzer şekilde $c \vee a_1 = c \vee a$ ve böylece $c \vee a_1 = c \vee b_1 = c \vee a$ dir.

Daha sonraki diagramı N_5 in kopyasını L nin alt kafesi olarak düşünebiliriz.



Şekil 2.5 N_5 in kopyası

Teorem 2.3.14(Birkhoff) L kafesi dağılmalı değildir $\leftrightarrow L$, N_5 veya M_5 in bir kopyasını alt kafes olarak barındırır (Birkhoff,1948).

İspat 2.3.14 : L boş olmayan bir kafes olsun ve N_5 veya M_5 in bir nüshasını alt kafes olarak içersin. L dağılmalı değil diye sonuçlandırırız. Ters yön için L dağılmalı olmayan kafes olsun ve N_5 in kopyasını alt kafes olarak barındırmassın. Teorem 2.3.13 den L modular kuralı sağlar. Göstermemiz gereken L nin M_5 in bir kopyasını alt kafes olarak barındırdığıdır. L nin dağılmalı olmaması nedeniyle L de a, b, c elemanları için $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) < a \wedge (b \vee c)$ dir.

$$\text{Şimdi} \quad d = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

$$e = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

$$a_1 = (a \wedge e) \vee d$$

$$b_1 = (b \wedge e) \vee d$$

$$c_1 = (c \wedge e) \vee d$$

tanımlı olsun. İşlemlerin tanımları gereği $d \leq a_1, b_1, c_1 \leq e$ eşitsizliği vardır. Buradan modüler yasası L ye uygulandığı zaman:

$$a \wedge e = a \wedge ((a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c))$$

$$= a \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \quad (L_4)$$

$$= a \wedge (b \vee c)$$

dir ve şu durum oluşur:

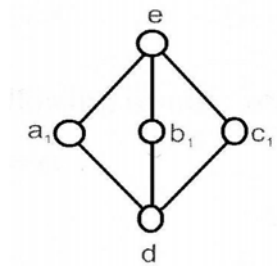
$$a \wedge d = \underline{a} \wedge ((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c))$$

$$= ((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge (b \wedge c))) \quad (M, (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a)$$

$$= (a \wedge b) \vee ((a \wedge b) \wedge c) \vee (a \wedge c) \quad (L_1, L_2)$$

$$= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad (L_4)$$

altı çizili olan terimlere modüler kuralı uygulanmıştır. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) < a \wedge (b \vee c)$ ve $a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ den $d < e$ olduğunu elde ederiz.



Şekil 2.6: M_5 in nüshası

Şimdi, Şekil 2-6 daki diagramın L de içerildiğini göstermeliyiz. Bu da $a_1 \wedge b_1 = a_1 \wedge c_1 = b_1 \wedge c_1 = d$ ve $a_1 \vee a_2 = a_1 \vee c_1 = b_1 \vee c_1 = e$ gösteririz.

Modüler kuralındaki elemanların altı çizilidir.

Bir önceki hesaplamalardan elimizde $a \wedge e = a \wedge (b \vee c)$ vardır. Ayrıca $b \vee d = b \vee (a \wedge c)$ L_4 ve L_1 in uygulanışından ortaya çıkar. Bizim göstermek istediğimiz $a_1 \wedge b_1 = d$ dir.

$$a_1 \wedge b_1 = ((a \wedge e) \vee \underline{d}) \wedge ((\underline{b \wedge e}) \vee \underline{d})$$

$$= d \vee ((a \wedge e) \wedge ((\underline{b \wedge e}) \vee \underline{d})) \quad (M, d \leq ((b \wedge e) \vee d) \text{ ve } L_1)$$

$$= d \vee ((a \wedge e) \wedge ((b \vee d) \wedge e)) \quad (M, d < e)$$

$$= d \vee ((a \wedge e) \wedge (b \vee d)) \quad (L_1 \text{ ve } L_3)$$

$$= d \vee (a \wedge (\underline{b \vee c}) \wedge (\underline{b \vee (a \wedge c)})) \quad (\text{bir önceki nottan})$$

$$= d \vee (a \wedge (b \vee ((b \vee c) \wedge (a \wedge c)))) \quad (M \text{ den})$$

$$= d \vee (a \wedge (b \vee (a \wedge c))) \quad (a \wedge c \leq b \vee c)$$

$$= d \vee (\underline{a} \wedge ((\underline{a \wedge c}) \vee b)) \quad (L_1)$$

$$= d \vee ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \quad (M \text{ ve } L_1)$$

$$= d \quad ((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq d)$$

Böylece $a_1 \wedge b_1 = d$ olduğunu görmüş olduk. Benzer argumanlarla $a_1 \wedge c_1 = b_1 \wedge c_1 = d$ olduğu ispatlanabilir.

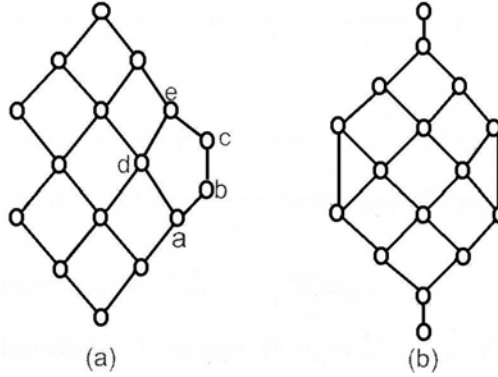
L_4 ün uygulanaşı ile $a \vee d = a \vee (b \wedge c)$ ve $b \wedge e = b \wedge (a \vee c)$ sonuçlarına ulaşırız.

Şimdi, $a_1 \wedge b_1 = e$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
a_1 \vee b_1 &= ((a \wedge e) \vee d) \vee ((b \wedge e) \vee d) \\
&= (a \wedge e) \vee d \vee (b \wedge e) && (L_1 \text{ ve } L_3) \\
&= \underline{d} \vee (\underline{e} \wedge a) \vee (e \wedge b) && (L_1) \\
&= (\underline{e} \wedge (d \vee a)) \vee (\underline{e} \wedge b) && (M, d < e) \\
&= ((d \vee a) \vee (e \wedge b)) \wedge e && (M, e \wedge b < e) \\
&= ((a \vee (\underline{b} \wedge c)) \vee (\underline{b} \wedge (a \vee c))) \wedge e && (\text{önceki notlardan}) \\
&= (a \vee (b \wedge ((b \wedge c) \vee (a \vee c)))) \wedge e && (M) \\
&= (\underline{a} \vee (b \wedge (\underline{a} \vee c))) \wedge e && (b \wedge c \leq a \vee c) \\
&= ((a \vee c) \wedge (a \vee b)) \wedge e && (M, a \leq a \wedge c) \\
&= e && (e < (a \vee c) \wedge (a \vee b))
\end{aligned}$$

$a_1 \vee b_1 = d$ olduğunu ispatladık. Benzer yollarla $a_1 \vee c_1 = b_1 \vee c_1 = e$ olduğunu ispatlayabiliriz. Böylece Şekil 2,6 nin M_5 in bir kopyasının L de içerildiğini göstermiş olduk. Buradan L kafesi dağılmalı değildir.

Eğer bir L kafesi dağılmalı ise M_5 veya N_5 in bir nüshasını alt kafes olarak içermez. Örneğin Şekil 2,7 de şekil (a) da içerilen kafes dağılmalı değildir ve alt kafes olarak N_5 in bir nüshasını içerir. Şekil (b) ise bir dağılmalı kafestir.



Şekil 2.7 Birkhoff teoreminin uygulanmasına bir örnek

2.4 Cebirlerin tanımı ve Örnekleri

Tanım 2.4.1 Bir cebir $(A; \{f_1, \dots, f_k\})$ çiftidir ve A boş olmayan küme ve $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere

$$f_i : \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-kez}} \rightarrow A$$

f , n mertebeli operatördür.

Örnek 2.4.2 (i) $(Z; \{+, -, 0\})$, $+$ tamsayılarda toplama, $-a$, a nın tersi ve 0 birim eleman olmak üzere bir cebirdir. Bu fonksiyonlar aşağıdaki gibi ifade edilebilirler;

$$\begin{array}{ll} f_1 : (Z, Z) \rightarrow Z & \text{ve} & f_2 : Z \rightarrow Z \\ (a, b) \mapsto a + b & & a \mapsto -a \end{array}$$

$+$ ikili ve $-$ birli işlemlerdir.

(ii) IR reel sayılar kümesi olmak üzere, $(IR; \{\wedge, \vee\})$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ ve $a \vee b = \max\{a, b\}$ şeklinde ikili işlemler olmak üzere cebirdir.

2.4.1 Boolean Cebirleri ve Boolean Halkaları

Tanım 2.4.3. Bir B Boolean Cebiri $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ dir öyle ki $\vee, \wedge$ join, meet şeklinde adlandırılan ikili işlemlerden ve tümleyen olarak bilinen $(')$ birli işlemlerden oluşur. B nin en küçük ve en büyük elemanı olarak 0 ve 1 i tanımlarız (Givant et al., 2000).

$$\forall x \in B \text{ için}$$

$$B_1 : (B, \vee, \wedge) \text{ dağılmalı kafes}$$

$$B_2 : x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1$$

$$B_3 : x \wedge x' = 0, \quad x \vee x' = 1$$

Şartları sağlanırsa B ye Boolean cebiri denir $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ (Goodstein, 1963).

Örnek 2.4.4

(i) $(\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$ öyle ki $+$ (veya) $\cdot$ (ve) operatörleri ve $'$ değil operatörüdür. Bu operatörler için doğruluk tabloları şu şekildedir:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

(a)

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

(b)

'	0
0	1
1	0

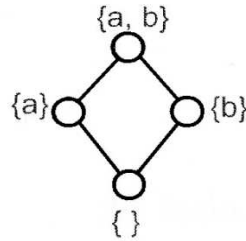
(c)

Tablolar kullanılarak $(\{0,1\}, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ in bir Boolean Cebiri olduğu kolaylıkla görülür. Bu yapı iki elemanlı bir zincirdir. 0 en küçük ve 1 en büyük elemandır. (Şekil 2-8 (a))

(ii) $A = \{a, b\}$ ve $P(A)$, A nın kuvvet kümesi olsun. $\vee$ birleşim ve $\wedge$ yi kesişim olarak, 0, boş küme ve 1 i A kümesi olarak tanımlayalım. Bu koşullar altında bu yapı Boolean Cebiri dir ve Hasse diagramına uyar. (Şekil 2-8 (b))



(a)



(b)

Şekil 2.8 Boolean Cebirlerine Örnekler

Verilen boştan farklı bir A kümesi, A nın kuvvet kümesi $P(A)$ ve bir önceki örnekte tanımlı operatörler bir Boolean cebiridir.

Şimdi Boolean cebirinin bazı yararlı özelliklerini verelim.

x ve y B Boolean cebirinin keyfi elemanları olsun. Öyleyse B aşağıdaki özellikleri sağlar;

B_4 . Eğer $x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ ise $x' = y$ dir.

B_5 . $(x')' = x$

B_6 . $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ ve $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ (De Morgan Kuralları)

Şimdi bu özellikleri ispatlayalım.

İspat : x ve y B de keyfi elemanlar olsun.

B_4 'ün ispatı:

$x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ olsun. Boolean Cebiri göz önünde tutularak;

$$x' = x' \vee 0$$

$$= x' \vee (x \wedge y) \quad (\text{hipotezden})$$

$$= (x' \vee x) \wedge (x' \vee y) \quad (D_2)$$

$$= 1 \wedge (x' \vee y) \quad (B_3)$$

$$= x' \vee y \quad (1, B \text{ nin en büyük elemanı})$$

o zaman $x' \leq y$ dir. Ters simetrik ile $x' = y$ dir.

B_5 nin ispatı:

$$x' \vee (x')' = 1$$

$$(x' \vee (x')') \wedge x = 1 \wedge x = x \quad (1 \text{ en büyük eleman})$$

$$(x' \wedge x) \vee ((x')' \wedge x) = x \quad (\text{dağılmalılık})$$

$$(x')' \wedge x = x \quad (B_2 \text{ ve } B_3)$$

Buradan $x \leq (x')'$ dir.

Diğer taraftan,

$$x' \vee x = 1$$

$$(x' \vee x) \wedge (x')' = 1 \wedge (x')'$$

$$(x' \wedge (x')') \vee (x \wedge (x')') = (x')' = (x')' \quad (\text{dağılmalılık})$$

$$x \wedge (x')' = x \quad (B_2 \text{ ve } B_3)$$

Buradan $(x')' \leq x$ dir ve ters simetrik özelliğinden $(x')' = x$ dir.

B_6 nın ispatı:

$(x \wedge y) \wedge (x' \wedge y') = 0$ ve $(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = 1$ olduğunu göstermeliyiz.

Dağılmalılığı ve 0 ın B de en küçük eleman oluşunu kullanarak:

$$(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = (x \wedge x' \wedge y') \vee (y \wedge x' \wedge y') = (0 \wedge y') \vee (0 \wedge x') = 0$$

Benzer şekilde, $(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = 1$ olduğunu ve bu şekilde $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ yi de gösterebiliriz.

Şimdi Boolean halkalarına göz atacağız.

Tanım 2.4.5 Eğer bir $R = (R, +, \cdot, -, 0, 1)$ halkası için $(\forall x \in R) x^2 = x$ sağlanırsa R ye bir *Boolean halka* adı verilir. Halka özellikleri kullanılarak Boolean halkaları için aşağıdaki özellikler gösterilebilir:

Lemma 2.4.6 Eğer R bir Boolean halkası ise $(\forall x \in R)(\forall y \in R)$ için $x + x = 0$ ve $x \cdot y = y \cdot x$ koşullarını sağlar.

İspat: x ve y , R de keyfi elemanlar olsun. $x^2 = x$ gözönünde bulundurarak $\forall x \in R$ için:

$$(x + x)^2 = x + x$$

$$x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x \quad (\text{dağılmalılık})$$

$$x + x = 0$$

$x^2 = x$ ve $x, -x$ gibi toplama göre tersine sahiptir.

Şimdi de $x \cdot y = y \cdot x$ bakalım.

$$(x + y)^2 = x + y$$

$$x^2 + x \cdot y + y \cdot x + y^2 = x + y \quad (\text{dağılmalılık})$$

$$x + x \cdot y + y \cdot x + y = x + y \quad (x^2 = x)$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Teorem 2.4.7 (a) (Stone): $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ Boolean Cebir olsun.

$B^{\otimes} = \langle B, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ şeklinde cebir olarak tanımlayalım (Burris, 1993):

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$$

$$a \cdot b = a \wedge b$$

$$-a = a'$$

ise $B^{\otimes}$ bir Boolean halkasıdır.

(b) $R = (R, +, -, 0, 1)$ Boolean halkası olsun. $R^{\otimes} = \langle R, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ cebirini şöyle tanımlayalım:

$$a \vee b = a + b + a \cdot b$$

$$a \wedge b = a \cdot b$$

$$a' = 1 + a$$

ise $R^{\otimes}$ Boolean cebiridir.

Taslak ispat:

(a) B bir Boolean Cebiri olsun ve B deki tüm a, b, c için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$1. a + 0 = 0$$

$$2. a + b = b + a$$

$$3. a + a = 0$$

$$4. a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$5. a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$6. a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$7. a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$8. a \cdot a = a$$

1 in ispatı:

$$a + 0 = (a \wedge 0') \vee (a' \wedge 0)$$

$$= (a \wedge 1) \vee (a' \wedge 0)$$

$$= a \vee 0 \quad (0 \text{ ve } 1 \text{ en küçük ve en büyük elemanları})$$

$$= a$$

2 nin ispatı:

$a, b \in B$ ve B bir Boolean Cebiri olsun.

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$$

$$= (b' \wedge a) \vee (b \wedge a') \quad (\text{değişmelilik özelliği})$$

$$= (b \wedge a') \vee (b' \wedge a) \quad (\text{değişmelilik özelliği})$$

$$= b + a$$

4 ün ispatı:

$$a + (b + c) = (a \wedge ((b \wedge c') \vee (b' \wedge c)))' \vee (a' \wedge ((b \wedge c') \vee (b' \wedge c)))$$

$$= (a \wedge ((b' \vee c) \wedge (b \vee c'))) \vee (a' \wedge ((b \wedge c') \vee (b' \wedge c))) \quad (\text{De Morgan})$$

$$= (a \wedge ((b' \wedge c') \vee (b \wedge c))) \vee ((a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c)) \quad (\text{Dağılmalılık})$$

$$= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c)$$

meet ve join işlemleri değişmelidir. Buradan $(\forall a \in B)(\forall b \in B)(\forall c \in B)$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ dir.

7 nin ispatı:

$$a \cdot b + a \cdot c = ((a \wedge b) \wedge (a \wedge c)') \vee ((a \wedge b)' \wedge (a \wedge c))$$

$$= ((a \wedge b) \wedge (a' \vee c')) \vee ((a' \vee b') \wedge (a \wedge c)) \quad (\text{De Morgan})$$

$$= (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge a \wedge c) \vee (b' \wedge a \wedge c) \quad (\text{Dağılmalılık})$$

$$= (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c)$$

$$= a \wedge ((b \wedge c') \vee (b' \wedge c)) \quad (\text{Dağılmalılık})$$

$$= a \cdot (b + c)$$

8 in ispatı:

x , B nin keyfi elemanı olsun. O zaman $x \cdot x = x \wedge x$ dir. Fakat $x \wedge x = x$ B Boolean Cebiri olduğunda olur. Böylece $x \cdot x = x$ dir $\forall x \in B$ için. (1) den (7) ye kadar tüm özellikleri sağlayan $B^\otimes$ bir halkadır. Bununla birlikte (8) özelliğininide sağladığı için $B^\otimes$ bir Boolean Halkasıdır.

$$a + a = (a \wedge a') \vee (a' \wedge a) = 0 \vee 0 = 0 \quad \text{her } b \in B^\otimes \quad \text{için.} \quad \text{Ayrıca}$$

$$a \cdot b = a \wedge b = b \wedge a = b \cdot a \quad \text{her } a \text{ ve } b \in B^\otimes .$$

Şimdi de (b) yi göstereceğiz. Kabul edelim ki R bir Boolean Halkası olsun. Her $a, b, c \in R$ için aşağıdakileri ispatlayacağız:

$$(1) \quad a \vee b = b \vee a$$

$$(2). \quad a \wedge b = b \wedge a$$

$$(3). \quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$(4). \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

$$(5). \quad a \vee a = a$$

$$(6). \quad a \wedge a = a$$

$$(7). \quad a \vee (a \wedge b) = a$$

$$(8). \quad a \wedge (a \vee b) = a$$

$$(9). a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Lemma 2.4.6 dan $\forall x, y \in R$ için $x + x = 0$ ve $x \cdot y = y \cdot x$ dir.

(1) in ispatı:

a ve b R nin keyfi elemanları olsunlar.

$$a + b = a + b + a \cdot b \quad (\text{tanımdan})$$

$$= b + a + b \cdot a \quad (R \text{ Boolean halkasının de\u0131işme özelli\u0131i})$$

$$= b \vee a \quad (\text{tanımdan})$$

(3) ün ispatı:

$$a \vee (b \vee c) = a + (b + c + b \cdot c) + a \cdot (b + c + b \cdot c) \quad (\text{tanımdan})$$

$$= a + b + c + b \cdot c + a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b \cdot c \quad (\text{dağılmalılık}) \text{ (i)}$$

diğer taraftan:

$$(a \vee b) \vee c = (a + b + a \cdot b) + c + (a + b + a \cdot b) \cdot c \quad (\text{tanımdan})$$

$$= a + b + a \cdot b + c + a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b \cdot c \quad (\text{dağılmalılık})$$

$$= a + b + c + b \cdot c + a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b \cdot c \quad (\text{de\u0131işmelilik})(ii)$$

(i) ve (ii) den $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ olduğu görülür. Benzer yöntemle

$(a \wedge b) \wedge c = (a \wedge) \wedge c$ eşitliği gösterilebilir.

(5) in ispatı:

$$a \vee a = a + a + a.a \quad (\text{tanımdan})$$

$$= 0 + a \quad (R \text{ Boolean Halkasında } a + a = 0 \text{ ve } a \cdot a = 0 \text{ dir})$$

$$= a \quad (R \text{ nin tanımından})$$

(6) $\forall x \in R$ için $x^2 = x$ özelliği kullanarak ispatlanabilir.

(7) ve (8) : absorption kuralları kullanarak gösterebiliriz:

$$a \vee (a \wedge b) = a + a \cdot b + a \cdot (a \cdot b) \quad (\text{tanımdan})$$

$$= a + a \cdot b + a \cdot b \quad (a^2 = a)$$

$$= a + 0 \quad (\forall a \in R \text{ için } a + a = 0)$$

$$= a$$

Benzer şekilde $a \wedge (a \vee b) = a$ yı gösterebiliriz.

Şimdi de (9) u ispatlayalım:

$$\begin{aligned}
 (a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= a \cdot b + a \cdot c + (a \cdot b) \cdot (a \cdot c) \quad (\text{tanımdan}) \\
 &= a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b \cdot c \quad (\text{değişmelilik ve } a^2 = a) \\
 &= a \cdot (b + c + b \cdot c) \quad (\text{R deki dağılmalılık}) \\
 &= a \wedge (b \vee c)
 \end{aligned}$$

(1) den (8) e kadar olan özellikleri sağlayan $R^\otimes$ ye kafes ve bununla birlikte (9) u da sağladığı için dağılmalı kafes denir (Stone, 1937).

Şimdi, $R^\otimes$ Boolean Cebiridir şayet aşağıdaki özellikleri de sağlarsa:

$$(10). \quad a \wedge 0 = 0 \text{ ve } a \vee 1 = 1$$

$$(11). \quad a \vee a' = 1 \text{ ve } a \wedge a' = 0$$

(11) in ispatı:

a , R nin keyfi elemanı olsun.

$$\begin{aligned}
 a \vee a' &= a + a' + a \cdot a' \quad (\text{tanımdan}) \\
 &= a + (1 + a) + a \cdot (1 + a) \quad (a' = 1 + a \text{ } R^\otimes \text{ de }) \\
 &= a + 1 + a + a \cdot 1 + a \cdot a \quad (\text{dağılmalılık})
 \end{aligned}$$

$$= a + a + 1 + a + a \quad (\text{değişmelilik } a \cdot a = 0 \text{ ve } a \cdot 1 = a)$$

$$= 1 \quad (a + a = 0)$$

$$= a \wedge a' = a \cdot a' \quad (\text{tanımdan})$$

$$= a \cdot (1 + a) \quad (a' = 1 + a)$$

$$= a \cdot 1 + a \cdot a \quad (\text{dağılmalılık})$$

$$= a + a \quad (a^2 = a)$$

$$= 0$$

(10) un ispatı benzerdir. Sonuç olarak $R^{\otimes}$ bir Boolean Cebiridir.

$B = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ Boolean Cebiri için ideal ve filtreyi tanımlayabiliriz (Bell et al., 1977).

Tanım 2.4.8 B Boolean Cebirinin bir I alt kümesi bir idealdir şayet:

$$(a) \ 0 \in I$$

$$(b) \ a \in I \text{ ve } b \in I \text{ ise } a \vee b \in I$$

$$(c) \ a \in I \text{ ve } b \leq a \text{ ise } b \in I$$

Tanım 2.4.9 B Boolean Cebirinin bir F alt kümesi filtredir eğer:

$$(a) 1 \in F$$

$$(b) a \in F \text{ ve } b \in F \text{ ise } a \wedge b \in F$$

$$(c) a \in F \text{ ve } b \geq a \text{ ise } b \in F$$

Şimdi verilen bir B Boolean Cebiri Teorem 2.4.7 den $B^\otimes = \langle B, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ bir Boolean Halkasıdır. $B^\otimes$ in idealini Tanım 2.2.4 ve Tanım 2.4.8 den tanımlayabiliriz.

Teorem 2.4.10 $B = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ bir Boolean Cebiri olsun. B nin alt kümesi olan bir I ideali vardır $\leftrightarrow I, B^\otimes$ in idealidir.

İspat: Kabul edelim ki B nin bir I ideali olsun. O zaman ideal tanımından aşağıdaki hipotezler elimizde vardır:

$$(1) 0 \in I$$

$$(2) a \in I \text{ ve } b \in I \text{ ise } a \vee b \in I$$

$$(3) a \in I \text{ ve } b \leq a \text{ ise } b \in I$$

Şimdi I nın $B^\otimes$ nin ideali olduğunu ispatlamalıyız.

1. $0 \in I$ hipotezden var.

2. a ve b I nin keyfi seçilmiş elemanları olsunlar. $+$ nın Stone teoremi (Teorem 2.4.7) tanımından, $a + b \in I$ olduğunu göstermek istiyoruz. $\wedge$ nın tanımından $a \wedge b' \leq a$ ve $a' \wedge b \leq b$ vardır. $a \wedge b' \in I$ ve $a' \wedge b \in I$ hipotezden vardır.

(3). Ayrıca $(a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \in I$ dır (2) hipotezinden. Böylece $a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \in I$ dır.

3. $a \in I$ ve $b \in B$ keyfi seçilmiş elemanlar olsunlar. $a, b \in I$ olduğunu ispatlamak istiyoruz. $\wedge$ nın tanımından $a \wedge b \leq a$ vardır. (3) hipotezinden $a \wedge b \in I$ dir. $a \cdot b = a \wedge b$ olduğunda $a \cdot b \in I$ olduğu görülür. Buradan, I , $B^\otimes$ in idealidir.

Diğer taraftan kabul edelim ki I , $B^\otimes$ in ideali olsun. O zaman:

$$1. 0 \in I$$

$$2. a \in I \text{ ve } b \in I \text{ ise } a + b \in I$$

$$3. a \in I \text{ ve } b \in I \text{ ise } a \cdot b \in I$$

I nin B nin ideali olduğunun doğruluğunu sağlayalım.

$$1. 0 \in I \text{ hipotezden}$$

2. a, b I nin keyfi seçilmiş elemanları olsun. Hipotezden $a + b \in I$ ve $a \cdot b \in I$ ise $a + b + a \cdot b \in I$ dır. $a \vee b = a + b + a \cdot b$ olduğunda $a \vee b \in I$ dır.

3. $a \in I$ ve $b \in B$ keyfi elemanlar ve $b \leq a$ olsun. O zaman $b = a \wedge b = a \cdot b$ operatörün tanımından. Böylece (3) den $a \cdot b \in I$ ise $b \in I$ dir. I, B nin idealidir.

Tanım 2.4.11 Eğer $X \subseteq B$ ve B bir Boolean Cebiri ise X' aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$X' = \{a' \in B : a \in X\}$$

Lemma 2.4.12 B bir Boolean Cebiri olsun.

(a) $I \subseteq B$ olsun. O zaman I, B nin idealidir $\leftrightarrow I', B$ nin filtresidir.

(b) $F \subseteq B$ olsun. O zaman F, B nin filtresidir $\leftrightarrow F', B$ nin idealidir.

(b) nin ispat $F \subseteq B$ olsun. a ve b, F nin keyfi seçilmiş elemanları olsun. Kabul edelim ki F, B nin filtresi olsun. Hipotezlerden:

(a) $1 \in F$

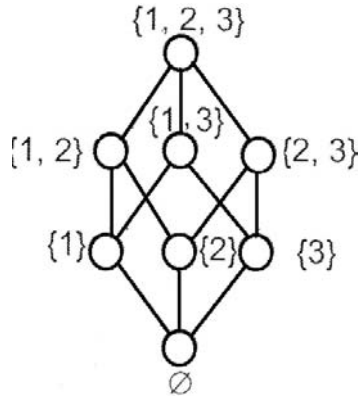
(b) $a \in F$ ve $b \in F$ ise $a \wedge b \in F$

(c) $a \in F$ ve $b \geq a$ ise $b \in F$

F' nin B nin ideali olduğunu gösterelim.

1. $1 \in F$ olduğunda $0 \in F'$ dir (Tanım 2.4.11 den)
2. $a \in F$ ve $b \in F$ ise $a' \in F'$ ve $b' \in F'$ dir. Ayrıca $a \wedge b \in F$ olduğunda $(a \wedge b)' \in F'$ dir. De Morgan kuralından $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ dir. Böylece $a' \vee b' \in F'$ dir.
3. $a \in F'$ ve $b \leq a$ olsun. $a \in F'$ ise $a' \in F$ dir. $b \leq a \leftrightarrow a' \leq b'$ den ve $a' \in F$ den $b' \in F$ dir. Buradan $(b')' = b \in F'$ dir. Böylece F' , B nin idealidir.

Örnek 2.4.13 $C = \{1,2,3\}$ ve A ve B, C nin keyfi alt kümeleri olsun. $A \vee B = A \cup B$ ve $A \wedge B = A \cap B$ şeklinde tanımlayalım. $P(C)$, C nin kuvvet kümesi olsun. $P(C)$ nin bir Boolean Cebiri olduğunu gösterebiliriz. $\emptyset, 0$ ile C de 1 ile temsil edilsin. Şekil 2-9 diagramı ile temsil edilir.



Şekil 2.9 $C = \{1,2,3\}$ kümesinin Boolean Cebiri

Bu şeklin bir dağılmalı kafes olduğunu göstermiştik. Sırasıyla her $X \in P(C)$ için $X \wedge \phi = \phi$ dir. $X \wedge \phi = X \cap \phi = \phi$ kesişim tanımıyla. Ayrıca her $X \in P(C)$ için $X \vee C = X \cup C = C$ dir kümelerin birleşimi tanımıyla. Kümenin tümleyeni tanımını uygulayınca her $X \in P(C)$ için $X \wedge X' = X \cap X' = \phi$ ve $X \vee X' = X \cup X' = C$ dir. Böylece $B = \{P(C), \cup, \cap, ', \phi, C\}$ bir Boolean Cebiridir.

Üstelik Teorem 2.4.7 kullanıldığında B bir Boolean Cebiri olduğunda $B^{\otimes}$ ı tanımlayabiliriz. $(P(C), +, \cdot, -, \phi, C)$ öyle ki her A ve B, C nin alt kümesi olmak üzere:

$$A + B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$$

$$A \cdot B = A \cap B$$

$$-A = A$$

ise $B^{\otimes}$ nin bir Boolean halkası olduğunu gösterebiliriz. Şimdi Boolean halkasının birkaç özelliğinin doğruluğunu sağlayalım.

İlk olarak; $(\forall A \subseteq C)$ için $A + \phi = A$ olduğunu ispatlayalım.

$$A + \phi = (A \cap \phi') \cup (A' \cap \phi) \quad (+ \text{ nın tanımından})$$

$$= (A \cap C) \cup \phi \quad (\text{kesişim tanımından})$$

$$= A \cup \phi = A$$

İkinci olarak: $(\forall A \subseteq C)(\forall B \subseteq C)$ için $A + B = B + A$ olduğunu ispatlayalım.

$$A + B = (A \cap B') \cup (A' \cap B) \quad (+ \text{ nın tanımından})$$

$$= (A' \cap B) \cup (A \cap B') \quad (\text{değişmelilik})$$

$$= (B \cap A') \cup (B' \cap A)$$

$$= B + A$$

Son olarak: $A + A = \emptyset$ olduğunu ispatlayalım.

$$A \cap A' = \emptyset \text{ olduğunda } A + A = (A \cap A') \cup (A' \cap A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \text{ dir.}$$

Şimdi $(\forall A \subseteq C)$ için $A \cdot C = A$ olduğunu gösterelim. Kesişim tanımından $A \cdot C = A \cap C = A$ elde ederiz.

$+$ ve $\cdot$ operatörlerinin tanımından bu operatörlerin birleşmeli ve dağılmalı olduğunu gösterebiliriz.

Örnek 2.4.14 C bir önceki örnekteki gibi tanımlı olsun. $P(C)$ bir halka olduğunda bu kümenin ideal ve filtresini tanımlayabiliriz. $P(C)$ nin ideali, $\{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{3\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$ ve $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$ dir. Tanım 2.4.11 ve Lemma 2.4.12 den $P(C)$ nin filtresi: $\{\{1,2,3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \{1\}\}, \{\{1,2,3\}, \{1,3\}\}, \{\{1,2,3\}, \{1,2\}\}, \{\{1,2,3\}, \{2,3\}\},$

$\{\{1,2,3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{3\}\}, \{\{1,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2\}, \{2\}\}$ filtre ve ideal tanımıyla bu kümelerin doğruluğu ispatlanabilir.

2.5 R-Modüllerin Tanımı ve Örnekler

Tanım 2.5.1 R bir halka olsun. Bir sol R -Modül A , $R \times A \rightarrow A$ fonksiyonu $(r, a) \rightarrow r \cdot a$

ile toplamsal abel gruptur öyle ki:

$(\forall r \in R)(\forall s \in R)(\forall a \in A)$ ve $(\forall b \in A)$ için:

$$(i) \quad r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$$

$$(ii) \quad (r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a$$

$$(iii) \quad r \cdot (s \cdot a) = (r \cdot s) \cdot a$$

Eğer R halkası birimli ise ve $1 \cdot a = a$, $(\forall a \in A)$ ise A ya birimli R -Modül denir (Herstein,1976).

Tanım 2.5.2 R bir halka olsun. Bir sağ R -Modül A $R \times A \rightarrow A$ fonksiyonu $(a, r) \rightarrow a \cdot r$

ile toplamsal abel gruptur öyle ki:

$(\forall r \in R)(\forall s \in R)(\forall a \in A)$ ve $(\forall b \in A)$ için:

$$(i) \quad (a + b) \cdot r = a \cdot r + b \cdot r$$

$$(ii) \quad a \cdot (r + s) = a \cdot r + a \cdot s$$

$$(iii) \quad (a \cdot s) \cdot r = a \cdot (s \cdot r)$$

Örnek 2.5.3 Her A abel grup $\square \times A \rightarrow A$, $r \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_{r \text{ tane}}$ ile bir $(r, a) \mapsto ra$

$\square$ – *Modüldür*.

Her $r \in \square, s \in \square, a \in A$ ve $b \in A$ için:

(i) $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$ olduğunu ispatlayalım.

$$r \cdot (a + b) = \underbrace{(a + b) + (a + b) + \dots + (a + b)}_{r \text{ tane}}$$

$$= \underbrace{a + a + \dots + a}_{r \text{ tane}} + \underbrace{b + b + \dots + b}_{r \text{ tane}} \quad A \text{ abel grup olduğundan}$$

$$= r \cdot a + r \cdot b$$

(ii) $(r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a$ olduğunu gösterelim:

$$(r + s) \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_{(r+s) \text{ tane}}$$

$$= \underbrace{a + \dots + a}_{r \text{ tane}} + \underbrace{a + \dots + a}_{s \text{ tane}}$$

$$= r \cdot a + s \cdot a$$

(iii) $r \cdot (s \cdot a) = (r \cdot s) \cdot a$ olduğunu gösterelim;

$$r \cdot (s \cdot a) = r \cdot \underbrace{(a + \dots + a)}_{s \dots \text{tane}} \quad s \cdot a \text{ nın tanımından}$$

$$= \underbrace{\underbrace{a + \dots + a}_{s \text{ tane}} + \dots + \underbrace{a + \dots + a}_{s \text{ tane}}}_{r \text{ tane}}$$

$$= (r \cdot s) \cdot a$$

Ayrıca Her Abel grup bir $\square - \text{Modül}$ dür. Ayrıca her $R - \text{Modül}$ bir abel gruptur ve her $\square - \text{Modül}$ bir abel gruptur.

Halkanın çarpım operatörü ile $r \cdot s$ olduğunda her R halkası $R - \text{Modül}$ dür. Ayrıca R halkasının bir sol ideali I ise I ve R/I , $R/I = a + I, a \in R$ olduğunda $R - \text{Modül}$ dür.

Tanım 2.5.4 A bir $R - \text{Modül}$ olsun ve $N \subseteq A$ olsun. N , A nın bir R -altmodülüdür eğer:

(i) (N, A) A nın alt grubu

(ii) $r \in R$ ve $n \in N$ için $r \cdot n \in N$

3.Lojik ve Cebirsel Yapılar Arasındaki Bağlantı

3.1 Önermesel Lojiğin Temel Kavramları ve Notasyonu

Lojik ve Cebirsel yapılar arasındaki ilişkileri çalışmak için bazı tanımlar ve özellikler vereceğiz. Bu kısımda kullandığımız dilin matematik diline nasıl çevirildiğini göstermekle başlayacağız. Semboller kümesi ve sembollerin sonlu dizisinde çalışmak için gramer kurallarını tanımlamamız gerekiyor (Andre et al., 1997).

Sembol	isim	Çeviri ya da kullanılış
(.)	Sol/sağ parantezler	Noktalama işaretleri
,	Değilleme sembolü	Değil
$\wedge$	Birleşme Sembolü	Ve
$\vee$	Ayrılma sembolü	Veya
$\rightarrow$	Koşul	eğer ... o zaman...
$\leftrightarrow$	Çifte koşul	eğer ve yalnız eğer
$s_1, s_2, \dots, s_1, \dots$	Önermesel semboller	Temsili atomik cümle

Tablo 3.1 Önermesel Lojik Sembollerinin tanımlaması

Kesinleşmiş sembollere lojikel olmayan parametreler denir. $' , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow$ sembolleri kesin bağlaçlardır. Bir ifade sembollerin sonlu dizisidir.

Cümle	Çeviri
(S_1')	S_1 in değili
$(S_1 \wedge S_2)$	S_1 ve S_2
$(S_1 \vee S_2)$	S_1 veya S_2
$(S_1 \rightarrow S_2)$	Eğer S_1 ise o zaman S_2
$(S_1 \leftrightarrow S_2)$	S_1 ancak ve ancak S_2

Tablo 3.2 Gramersel kurallar

Bu kurallardan sonra kullanılan lojikel sembolleri bir önceki formüllerden sıralayıp, birleştirebiliriz. Örneğin $\alpha = (S_1')$, $\beta = S_2$ ve $\gamma = (S_3 \wedge S_4)$ ise o zaman $\alpha \rightarrow \beta$ ile verilen ifade $(S_1' \rightarrow S_2)$ ve $\alpha \rightarrow \beta$ ile verilen ifade $((S_3 \wedge S_4) \leftrightarrow S_2)$ şeklinde yazabiliriz.

Her atomik ifadeyi ve Sembollerin sonlu dizisinin kurallarını bu bölümde saptayacağız ve buna bir önerme diyeceğiz. Bir kesinleşmiş teori bir önermeler kümesidir.

Tanım 3.1.1 Bir teorinin modeli doğru ya da yanlış atamalar altında verilen teorilerin tüm önermelerini doğru yapan önermesel harflerdir.

Diğer bir ifade ile bir teorinin modeli teorinin tüm önermelerini doğru yapan önermesel harflerin kümesinden $\{T, F\}$ kümesine bir fonksiyondur.

Verilen α ve β gibi iki önermenin kesinleşmiş bağlaçlarla bağlandığında oluşan doğruluk değer atamaları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

α	β	(α')	$(\alpha \wedge \beta)$	$(\alpha \vee \beta)$	$(\alpha \rightarrow \beta)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Tablo 3.3 Doğruluk değeri atamaları

S önermesel harflerin boştan farklı bir kümesi ve M, S nin bir modeli olsun. Bir $x \in S$ M de doğrudur ($M \models x$) ve denk olarak $(x, T) \in M$ göstereceğiz. Eğer $x \in S$ M de yanlış ise $M \not\models x$ denk olarak $(x, F) \in M$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.2 Verilen bir teorinin A ve B iki modeli denktir eğer aynı önermeleri sağlarsa. ($A = B$)

Tanım 3.1.3 T_1 ve T_2 teorileri aynı modellere sahip ise denktirler ($T_1 \equiv T_2$).

3.2 Ön Hazırlık ve Yeni Sonuçlar

Bu bölümde kümeler ve temel cebirsel yapılar (grup, halka, kafes, R-Modül) ve önermesel lojikle cebirler arasındaki bağlantıları tesis edeceğiz. Bazı özellikler ve örnekler ispatlanacaktır.

$S = \{S_a : a \in A\}$ boştan farklı A kümesi ile ilişkilendirilmiş önermesel harflerin kümesi olsun. M , S nin keyfi bir modeli olsun. $\phi(M) = \{x \in S : M \models x\}$ tanımlanır.

Önceki tanımdan:

$$M \models x \leftrightarrow (x, T) \in M \text{ ve } M \not\models x \leftrightarrow (x, F) \in M$$

A ve B , S nin keyfi modelleri olsun.

O zaman $A \cap B = \{(x, y) \in S \times \{T, F\} : (x, y) \in A \wedge (x, y) \in B\}$

Şimdi $\phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$ göstereceğiz.

$x \in \phi(A) \cap \phi(B)$ olsun. O zaman $x \in \phi(A)$ ve $x \in \phi(B)$ dir. ϕ nin tanımını kullanırsak $A \models x$ ve $B \models x$ olur. Böylece $(x, T) \in A$, $(x, T) \in B$ o zaman $(x, T) \in A \cap B$. Buradan $A \cap B \models x$ ve ϕ nin tanımıyla $x \in \phi(A \cap B)$ dir. x keyfi olduğunda $\phi(A) \cap \phi(B) \subseteq \phi(A \cap B)$ elde ederiz. Benzer şekilde $\phi(A \cap B) \subseteq \phi(A) \cap \phi(B)$ gösterebiliriz.

Bu sonuçtan yola çıkarak $\phi(A \cap B)$ yi yeniden tanımlayalım:

$$\phi(A \cap B) = \{x \in S : (A \models x) \wedge (B \models x)\}$$

ve

$$A \cap B \models x \Leftrightarrow (A \models x) \wedge (B \models x).$$

3.2.1 Kümeler

Şimdi verilen bir C kümesinin modelleri üzerindeki operatörlerle çalışacağız.

$S = \{S_a : a \in C\}$ boştan farklı C kümesi ile ilişkilendirilmiş önermesel harflerin kümesi olsun. En az bir $A \subseteq C$ için A ile ilişkilendirilmiş model tanımı şu şekildedir:

$$M(A) = \{(S_a, T) \in S \times \{T, F\} : a \in A\} \cup \{(S_a, F) \in S \times \{T, F\} : a \notin A\}$$

C nin keyfi boştan farklı alt kümesi için kümelerin birleşim tanımını uygulayarak A ve B için $A \cup B$ ile modeli ilişkilendiririz:

$$M(A \cup B) = \{(S_a, T) \in S \times \{T, F\} : a \in (A \cup B)\} \cup \{(S_a, F) \in S \times \{T, F\} : a \notin A \cup B\}.$$

Dikkat etmeliyiz ki $a \in (A \cup B)$ ise $a \in A$ veya $a \in B$ dir. Bu ise $M(A) \models S_a$ veya $M(B) \models S_a$ olduğunu gösterir. O zaman $(S_a, T) \in M(A)$ veya

$(S_a, T) \in M(B)$ dir. Diğer taraftan $a \notin (A \cup B)$ ise $a \notin A$ ve $a \notin B$ dir. Böylece $M(A) \models S_a$ ve $M(B) \models S_a$ dir. Buradan $(S_a, F) \in M(A)$ ve $(S_a, F) \in M(B)$ dir.

$M(A)$ ve $M(B)$ modellerin terimlerindeki $A \cup B$ ile ilişkilendirilmiş modeli tekrar yazabiliriz:

$$M(A \cup B) = \{(S_a, T) : (S_a, T) \in M(A) \vee ((S_a, T) \in M(B))\}$$

$\cup \{(S_a, F) : (S_a, F) \in M(A) \wedge ((S_a, F) \in M(B))\}$ kümenin kesişimi tanımını kullanarak $A \cap B$ ile ilişkilendirilmiş model:

$$M(A \cap B) = \{(S_a, T) \in S \times \{T, F\} : a \in (A \cap B)\} \cup \{(S_a, F) \in S \times \{T, F\} : a \notin (A \cap B)\}.$$

$a \in (A \cap B)$ ise $a \in A$ ve $a \in B$. $M(A) \models S_a$ ve $M(B) \models S_a$ dir. Böylece $(S_a, T) \in M(A)$ ve $(S_a, T) \in M(B)$. Eğer $a \notin (A \cap B)$ ise $a \notin A$ ve ya $a \notin B$ dir. Bu $(S_a, F) \in M(A)$ ve ya $(S_a, F) \in M(B)$ demektir.

Böylece, $M(A)$ ve $M(B)$ içerisindeki $M(A \cap B)$ ile ilişkilendirilmiş modeli tekrar yazabiliriz:

$$M(A \cap B) = \{(S_a, T) : (S_a, T) \in M(A) \wedge ((S_a, T) \in M(B))\}$$

$$\cup \{(S_a, F) : (S_a, F) \in M(A) \vee ((S_a, F) \in M(B))\}$$

Bir kümenin tümleyen tanımını kullanarak, $M(A')$ ile ilişkilendirilmiş model

$$M(A') = \{(S_a, T) \in S \times \{T, F\} : a \in A'\} \cup \{(S_a, F) \in S \times \{T, F\} : a \notin A\} \text{ dır.}$$

$M(A \cup B)$ ve $M(A \cap B)$ nin kullanımı gibi $M(A)$ yı kullanarak $M(A')$ modelini yeniden yazalım:

$$M(A') = \{(S_a, T) : (S_a, F) \in M(A)\} \cup \{(S_a, F) : (S_a, T) \in M(A)\}$$

Örnek 3.2.1 $H = \{1,2,3,4\}$ ve H nin $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$ alt kümeleri olsun. Bu alt kümelere karşılık gelen modeller: $M(A) = \{(S_1, T), (S_2, T), (S_3, F), (S_4, F)\}$ ve $M(B) = \{(S_1, T), (S_2, F), (S_3, T), (S_4, T)\}$.

$$A \cap B = \{1\} \text{ olduğundan } M(A \cap B) = \{(S_1, T), (S_2, F), (S_3, F), (S_4, F)\}.$$

$M(A)$ ve $M(B)$ deki terimlerin $M(A \cap B)$ tanımını takiben kümelerin kesişimlerini bulmaya ihtiyaç duymadan aynı sonuçları elde ederiz.

$$M(A \cap B) = \{(S_1, T), (S_2, F), (S_3, F), (S_4, F)\}.$$

Benzer şekilde $A \cup B = \{1,2,3\}$ olduğunda $M(A \cup B) = \{(S_1, T), (S_2, T), (S_3, T), (S_4, F)\}$ A ve B için ilişkilendirilmiş modellerdeki terimler içerisindeki $M(A \cup B)$ nin tanımından aynı sonuç elde edilir.

Şimdi, $A' = \{3,4\}$ olduğunda $M(A') = \{(S_1, F), (S_2, F), (S_3, T), (S_4, T)\}$ olduğunu A nın tümleyenini bulmadan $M(A)$ dan kolayca saptanabilir.

Bu örnekten bir C kümesinin boş olmayan A ve B alt kümeleri için $A \cap B$, $A \cup B$ ve A' ile ilişkilendirilmiş modeli bulmanın en kolay yolu $M(A)$ ve $M(B)$ modellerini kullanmaktır.

S nin A ve B keyfi alt kümeleri olsun. Kartezyen Çarpım tanımı $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ dir. $A \times B$ ile ilişkilendirilmiş model:

$$M(A \times B) = \{(S_{(a,b)}, T) : (a,b) \in A \times B, (S_{(a,b)}, F) : (a,b) \notin A \times B\}$$

Ayrıca $M(A) \times M(B)$ için $(S_i, x) \in S \times \{T, F\}$ olduğunda:

$$M(A) \times M(B) = \{((S_a, x), (S_b, y)) : (S_a, x) \in M(A), (S_b, y) \in M(B)\}$$

. Dikkate almalıyız ki $H = \{1,2,3,4\}$ kümesi ve $A = \{1,2\}$ ve $B = \{3,4\}$ alt kümeleri için $A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$ dir. $A \times B$ ile ilişkilendirilmiş model:

$$\begin{aligned} M(A \times B) = \{ & (S_{(1,3)}, T), (S_{(1,4)}, T), (S_{(2,3)}, T), (S_{(2,4)}, T), (S_{(1,1)}, T), \\ & (S_{(1,2)}, F), (S_{(2,1)}, F), (S_{(2,2)}, F), (S_{(3,1)}, F), (S_{(3,2)}, F), \\ & (S_{(3,3)}, F), (S_{(3,4)}, F), (S_{(4,1)}, F), (S_{(4,2)}, F), (S_{(4,3)}, F), \\ & (S_{(4,4)}, F) \} \end{aligned}$$

A ve B ile ilişkilendirilmiş modeller:

$$M(A) = \{(S_1, T), (S_2, T), (S_3, F), (S_4, F)\}$$

$$M(B) = \{(S_1, F), (S_2, F), (S_3, T), (S_4, T)\}$$

Daha sonra $M(A) \times M(B)$:

$$M(A) \times M(B) = \{((S_1, T), (S_1, F)), ((S_1, T), (S_2, F)), ((S_1, T), (S_3, T)), ((S_1, T), (S_4, T)), ((S_2, T), (S_1, F)), ((S_2, T), (S_2, F)), ((S_2, T), (S_3, T)), ((S_2, T), (S_4, T)), ((S_3, F), (S_1, F)), ((S_3, F), (S_2, F)), ((S_3, F), (S_3, T)), ((S_3, F), (S_4, T)), ((S_4, T), (S_1, F)), ((S_4, F), (S_2, F)), ((S_4, F), (S_3, T)), ((S_4, F), (S_4, T))\}$$

$M(A \times B)$ ve $M(A) \times M(B)$ kıyaslandığında aynı kardinaliteye sahip oldukları görülür yani 16 eleman. Şayet bu iki küme arasında bir bağıntı varsa bir sonraki aşama bunu tespit etmek olacaktır.

İlk olarak dönüşümü tanımlayacağız:

$$\Phi: M(A) \times M(B) \rightarrow M(A \times B) \\ ((S_a, x), (S_b, y)) \mapsto (S_{(a,b)}, z)$$

olduğunda $x, y, z \in \{T, F\}$ de ve z doğrudur $\leftrightarrow x$ ve y doğru.

Φ nin sürjektif bir dönüşüm olduğunu gösterelim.

Durum 1: $(S_{(a,b)}, T) \in M(A \times B)$ olsun. O zaman $(S_a, T) \in M(A)$ ve $(S_b, T) \in M(B)$ öyle ki $\Phi((S_a, T), (S_b, T)) = (S_{(a,b)}, T)$.

Durum 2: $(S_{(a,b)}, F) \in M(A \times B)$ olsun. O zaman $(S_a, F) \in M(A)$ veya $(S_b, F) \in M(B)$ öyle ki x veya y yanlış olduğunda $\Phi((S_a, x), (S_b, y)) = (S_{(a,b)}, F)$. Böylece Φ nin surjektif bir dönüşüm olduğunu göstermiş oluruz.

Şimdi, $\Phi((S_a, x), (S_b, y)) = \Phi((S_c, z), (S_d, w))$ olsun. O zaman $(S_{(a,b)}, u) = (S_{(c,d)}, v)$ dir $x, y, z, w, u, v \in \{T, F\}$ olduğunda. Böylece $a = c$ ve $b = d$ dir.

İki duruma sahibiz:

Durum 1: Kabul edelim ki $u = v = T$ olsun. O zaman x, y, z doğrudur. Böylece $(S_a, T) = (S_c, T)$ ve $(S_b, T) = (S_d, T)$ olur. O nedenle $((S_a, T), (S_b, T)) = ((S_c, T), (S_d, T))$ olduğunu sonuçlandırırız.

Durum 2: $u = v = F$ olsun. O zaman $x = F$ veya $y = F$ ve $z = F$ veya $w = F$ dir. $S_a = S_c$ ve $S_b = S_d$ olduğunda doğruluk değeri ataması aynı olur. Eğer $x = F$ ve $y = T$ ise $z = F$ ve $w = T$ dir. Böylece $(S_a, F) = (S_c, F)$ ve $(S_b, T) = (S_d, T)$ dir. O nedenle $((S_a, F), (S_b, T)) = ((S_c, F), (S_d, T))$ dir. Benzer yaklaşımla $x = F, y = F$ ve $x = T, y = F$ için elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki $x = F, y = T$ ve $z = T, w = F$ olsun. O zaman $a \notin A$ olduğunda $(S_a, F) \in M(A)$ ve $c \in A$ olduğunda $(S_c, T) \in M(A)$. Fakat $S_a = S_c$ ise $a = c$ fakat $a \notin A$ ve $c \in A$ dir. Böylece $x \neq z$ ve $y \neq w$ dir.

Son olarak, Φ 1-1 bir dönüşümdür. Biz yaptığımız ispatlarla aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk:

Teorem 3.2.2 Verilen bir S kümesi ve S nin boştan farklı iki alt kümesi A ve B olsun. $M(A) \times M(B)$ ve $M(A \times B)$ modelleri arasında bir bijeksiyon vardır öyle ki:

$$\begin{aligned}\Phi: M(A) \times M(B) &\rightarrow M(A \times B) \\ ((S_a, x), (S_b, y)) &\mapsto (S_{(a,b)}, z)\end{aligned}$$

' $x, y, z \in \{T, F\}$ olduğunda z doğrudur $\leftrightarrow x$ ve y doğrudur'' koşulları altında.

3.2.2 Gruplar

G bir grup ve $S = \{S_a : a \in G\}$, G ile ilişkilendirilmiş önermesel harflerin kümesi olsun. $\{\wedge, \vee, ', \rightarrow, \leftrightarrow\}$ tablo 3-1 deki gibi tanımlansın. Gramer kuralları ise tablo 3-2 deki gibi tanımlansın. G için ilişkilendirilmiş kesinleşmiş teoremin tanımı:

$$T(G) = \{S_e, S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b} : a, b \in G\}.$$

e , G nin birim elemanıdır. A , $T(G)$ nin keyfi bir modeli olsun. $A \models T(G)$ anlamına gelir. $\mu(A) = \{a \in G : A \models S_a\}$ olarak tanımlayalım. O zaman $\mu(A)$, G nin alt grubudur.

$A \models T(G)$ olduğunda $A \models S_e$ ve böylece $e \in \mu(A)$ dir. a ve $b \in \mu(A)$ nin keyfi elemanları olsun. O zaman $A \models S_a$ ve $A \models S_b$ dir. Böylece $A \models S_a \wedge S_b$ dir. Hipotezlerden $A \models S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}$ dir. O zaman $A \models S_{a-b}$ dir. O nedenle $a - b \in \mu(A)$ dir. $\mu(A)$, G nin alt grubudur.

B , G nin alt grubu olsun. $T(B) \models S_a$ olarak tanımlansın. $T(B) \models S_a \leftrightarrow a \in B$. O zaman $T(B) \models T(G)$ dir. B , G nin alt grubu olduğunda $e \in B$ dir ve $T(B) \models S_e$ olur.

Şimdi kabul edelim ki, $T(B) \models S_a$ ve $T(B) \models S_b$ olsun. O zaman B , G nin alt grubu ise $a \in B$ ve $b \in B$ olduğunda $a - b \in B$ dir. Elimizde $T(B) \models S_a \wedge S_b$ ve $T(B) \models S_{a-b}$ var. O zaman $T(B) \models S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}$ dir. Böylece $T(B) \models T(G)$ olur.

$T(G)$, A nın bir modeli ve $\mu(T(B)) = B$ ve B , G nin alt grubu olduğunda $T(\mu(A)) = A$ yı gösterelim.

$x \in \mu(T(B))$ keyfi olsun. O zaman $T(B) \models S_x$ dir. T nin tanımından $x \in B$ elde ederiz. O nedenle $\mu(T(B)) \subseteq B$ dir. Diğer taraftan x , B nin keyfi elemanı olsun. O zaman T nin tanımından $T(B) \models S_x$. Böylece μ nin tanımından $x \in \mu(T(B))$ dir. O nedenle $B \subseteq \mu(T(B))$ dir. Son olarak $\mu(T(B)) = B$ olduğunu sonuçlandırırız.

Şimdi, $T(\mu(A)) = A$ eşitliğinin sağladığını gösterelim. Bazı $x \in G$ için $T(\mu(A)) \models S_x$ olsun. O zaman T nin tanımından $x \in \mu(A)$ dir. Ayrıca μ nin tanımından $A \models S_x$ elde ederiz. $T(\mu(A)) \models S_x$ den $A \models S_x$ olduğu görülür. Diğer taraftan bazı $x \in G$ için $A \models S_x$ olsun. $\mu(A)$ nın tanımından $x \in \mu(A)$ ve T nin tanımından $T(\mu(A)) \models S_x$ dir. Böylece $T(\mu(A)) \models A$ dir.

Yaptığımız ispatlarla aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk:

Teorem 3.2.3 G bir grup ve $G, T(G)$ ile ilişkilendirilmiş önermesel teori :

$$T(G) = \{S_e, S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b} : a, b \in G\}$$

$T(G)$ kesinleşmiş teori modelleri ve G nin alt grubu arasında 1-1 bir eşleme vardır.

Şimdi, bu teoremi somutlaştıracak bir örnek vereceğiz.

Örnek 3.2.4 $G = (\mathbb{Z}_4, +)$ ve $+$ toplamsal 4 modül olsun. O zaman $T(G)$ ile verilen küme:

$$\begin{aligned} T(G) = \{ & S_0, S_0 \wedge S_0 \rightarrow S_0, S_0 \wedge S_1 \rightarrow S_3, S_0 \wedge S_2 \rightarrow S_2, S_0 \wedge S_3 \rightarrow S_1, \\ & S_1 \wedge S_0 \rightarrow S_1, S_1 \wedge S_1 \rightarrow S_0, S_1 \wedge S_2 \rightarrow S_3, S_1 \wedge S_3 \rightarrow S_2, S_2 \wedge S_0 \rightarrow S_2, \\ & S_2 \wedge S_1 \rightarrow S_1, S_2 \wedge S_2 \rightarrow S_0, S_2 \wedge S_3 \rightarrow S_3, S_3 \wedge S_0 \rightarrow S_3, S_3 \wedge S_1 \rightarrow S_2, \\ & S_3 \wedge S_2 \rightarrow S_1, S_3 \wedge S_3 \rightarrow S_0 \} \end{aligned}$$

G nin alt gruplarını kolayca gösterebilmek için $H = \{0\}, K = \{0, 2\}$ ve G alalım. O zaman $T(G)$ ile ilişkilendirilmiş modeller:

$$M(H) = \{(S_0, T), (S_1, F), (S_2, F), (S_3, F)\}$$

$$M(K) = \{(S_0, T), (S_1, F), (S_2, T), (S_3, F)\}$$

$$M(G) = \{(S_0, T), (S_1, T), (S_2, T), (S_3, T)\}$$

Önermesel harflerin $T(G)$ nin tüm önermelerini sağlamayacağını doğru ve yanlış diğer atamalar altında doğrulayabiliriz.

Örneğin, $M(T) = \{(S_0, T), (S_1, T), (S_2, F), (S_3, F)\}$, $T = \{0,1\}$ alt kümesine karşılık gelen atama olsun. T nin G nin bir alt grubu olmadığını kolayca gösterebiliriz ve $M(T)$ nin $T(G)$ için ilişkilendirilmiş bir model olmadığını da gösterebiliriz. Örneğin, $S_0 \wedge S_1 \rightarrow S_3$ önermesi yanlıştır.

Bu örnekten, görebiliriz ki 4 sıralı bir G grubu için $T(G)$, 17 önermeye sahiptir. $T(G)$ yapısının çözümü ve n inci dereceden alınan G grubunun, $S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}$ formunun önermelerinin sayısı n^2 dir. Böylece S_a önermesini ihtiva eder, $T(G)$ nin kardinalitesi elde edilir, n inci dereceden sonlu G grubunun kardinalitesi $n^2 + 1$ dir.

Şimdi, N G grubunun bir alt grubu olsun. Eğer $T(G)$ ye $S_1 \rightarrow S_{a+n-a}$ formunun önermelerini eklersek, a G nin keyfi elemanı ve $n \in N$ olduğunda aşağıdaki teoremi tesis edebiliriz:

$$A \models T(G_N) = \{S_e, S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}, S_n \rightarrow S_{a+n-a} : a, b \in G, n \in N\}$$

$A \models T(G_N)$ ve $\mu(A) = \{a \in G : A \models S_a\}$ olsun. O zaman $\mu(A)$, G nin normal alt grubudur.

Teorem 3.2.3 den, biliyoruz ki $\mu(A)$, G nin alt grubudur. $n \in \mu(A)$ ve $a \in G$ olsun. O zaman $A \models S_n$ dir. $S_n \rightarrow S_{a+n-a}$ olduğunda $A \models S_{a+n-a}$ dir. Böylece $a+n-a \in \mu(A)$ dır. Buradan $\mu(A)$ nın G nin bir normal alt grubu olduğunu sonlandırabiliriz.

Diğer taraftan B , G nin normal alt grubu olsun. $T(B) \models S_a \leftrightarrow a \in B$ şeklinde tanımlayalım. Gösterelim ki $T(B) \models T(G_N)$ dir. B , G nin bir alt grubudur ve $e \in B$ var. Ayrıca $a \in B$ ve $b \in B$ için $a - b \in B$ dir. O zaman modellerin tanımından $T(B) \models S_e$ ve $T(B) \models S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}$ dir. Şimdi $x \in B$ olsun. B , G nin normal alt grubu olmasından itibaren $a + x - a \in B$ elde ederiz $\forall a \in G$ için. O zaman $T(B) \models S_x$ ve $T(B) \models S_{a+x-a}$ dir. Böylece $T(B) \models S_x \rightarrow S_{a+x-a}$ dir. Buradan eğer B , G nin normal alt grubu ise o zaman $T(B) \models T(G_N)$ dir.

Benzer yaklaşımla Teorem 3.2.3 de A , $T(G)$ nin bir modeli olduğunda $T(\mu(A)) \models A$; B , G nin normal alt grubu olduğunda $\mu(T(B)) = B$ dir.

Böylece aşağıdaki sonucu ispatlamış olduk:

Teorem 3.2.5 G bir grup ve N , G nin normal alt grubu olsun. $T(G_N)$, G nin genişletilmiş önermesel teorisi olsun öyle ki $T(G)$ nin özellikleri ile eş tutulsun : $T(G_N) = T(G_N) \cup \{S_n \rightarrow S_{a+n-a} : a \in G, n \in N\}$. Kesinleşmiş $T(G_N)$ teorisi ile ilişkilendirilmiş modellerle G nin normal alt grupları arasında bire bir benzeşme vardır.

3.2.3 Halkalar

R bir değişmeli halka ve $S = \{S_a : a \in R\}$ R ile ilişkilendirilmiş önermesel harflerin kümesi olsun. Parantezlerin ve mantıksal bağlaçların

$\{\wedge, \vee, ', \rightarrow, \leftrightarrow\}$ mantıksal sembollerinin sabitlerinin kümesi önceki bölümdeki gibi olsun. Tablo 2-2 deki kurallar kullanılarak, R ile ilişkilendirilmiş kesinleşmiş teoremin tanımı:

$$T(R) = \{S_0, S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}, S_a \rightarrow S_{ab} : (\forall a \in R), (\forall b \in R)\} \text{ dır.}$$

$A \subseteq S$ ve $A \models S_a \leftrightarrow (S_a, T) \in A$ olsun. Eğer $A \models T(R)$ ise o zaman $I(A) = \{a \in R : A \models S_a\}$ R nin idealidir.

$A \models S_0$ olduğunda $0 \in I(A)$ dır. a ve $b, I(A)$ nin keyfi elemanları olsun. O zaman $A \models S_a$ ve $A \models S_b$ dir. Böylece $A \models S_a \wedge S_b$ dir. Hipotezlerden $A \models S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}$ ise o zaman $A \models S_{a-b}$ dir. Böylece $a - b \in I(A)$ dır. Şimdi kabul edelim ki $a \in I(A)$ ve $r \in R$ olsun. O zaman $A \models S_a$ dır. $A \models S_a \rightarrow S_{ar} (\forall r \in R)$ olduğunda $I(A)$ nin tanımından $A \models S_{ar}$ ve $ar \in I(A)$ dır. Böylece $I(A)$, R nin bir idealidir. Diğer taraftan I , R nin bir ideali ve $A(I) \models S_a \leftrightarrow a \in I$ şeklinde tanımlansın. O zaman $A(I) \models T(R)$ olduğunu gösterebiliriz.

İlk olarak, $0 \in R$ ve I bir ideal olduğunda $0 \in I$ ve $A(I) \models S_0$ dır. a ve b R nin keyfi elemanları olsun. $A(I) \models S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Kabul edelim ki $A(I) \models S_a \wedge S_b$ olsun, o zaman $A(I) \models S_a$ ve $A(I) \models S_b$ dir. Bu da $a \in I$ ve $b \in I$ olduğunu gösterir. Fakat I , R nin ideali olduğundan $a - b \in I$ dır. Böylece $A(I) \models S_{a-b}$ dir. Buradan $A(I) \models S_a \wedge S_b$ ve $A(I) \models S_{a-b}$ olduğunda $A(I) \models S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}$ yi sonlandırırız. Son olarak

$A(I) \models S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}$ yi göstermek istiyoruz. $a \in I$ ve $b \in R$ olsun. O zaman I, R nin ideali olduğunda $ab \in I$ dir. Böylece $A(I) \models S_a$ ve $A(I) \models S_{ab}$ dir. Buradan $A(I) \models S_a \rightarrow S_{ab}$ olduğunu sonuçlandırırız.

$T(R)$ deki tüm önermeler $A(I)$ da doğrudur. Buradan $A(I) \models T(R)$ dir. Benzer şekilde $A, T(R)$ nin bir modeli ve I, R nin bir ideali olduğunda $A(I(A)) = A$ ve $I(A(I)) = I$ yi gösterebiliriz.

Teorem 3.2.7 R değişmeli halka ve $T(R)$, R nin önermesel teori ile ilişkilendirilmiş olsun. $T(R)$ kesinleşmiş teoremin modelleri ve R nin idealleri arasında bir 1-1 eşleşme vardır.

Örnek 3.2.7 $R = (\square_4, +, .)$ bir halka olsun. Aşağıdaki küme ile $T(R)$ nin doğruluğunu gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} T(R) = \{ & S_0, S_0 \wedge S_0 \rightarrow S_0, S_0 \wedge S_1 \rightarrow S_3, S_0 \wedge S_2 \rightarrow S_2, S_0 \wedge S_3 \rightarrow S_1, S_1 \wedge S_0 \rightarrow S_1, \\ & S_1 \wedge S_1 \rightarrow S_0, S_1 \wedge S_2 \rightarrow S_3, S_1 \wedge S_3 \rightarrow S_2, S_2 \wedge S_0 \rightarrow S_2, S_2 \wedge S_1 \rightarrow S_1, S_2 \wedge S_2 \rightarrow S_0, \\ & S_2 \wedge S_3 \rightarrow S_3, S_3 \wedge S_0 \rightarrow S_3, S_3 \wedge S_1 \rightarrow S_2, S_3 \wedge S_2 \rightarrow S_1, S_3 \wedge S_3 \rightarrow S_0, S_0 \rightarrow S_0, \\ & S_1 \rightarrow S_0, S_1 \rightarrow S_1, S_1 \rightarrow S_2, S_1 \rightarrow S_3, S_2 \rightarrow S_0, S_2 \rightarrow S_2, S_3 \rightarrow S_0, S_3 \rightarrow S_1, S_3 \rightarrow S_2, \\ & S_3 \rightarrow S_3 \} \end{aligned}$$

Bu halkayı inceleyerek, R nin ideallerini tayin edebiliriz:

$$M(I_1) = \{(S_0, T), (S_1, F), (S_2, F), (S_3, F)\}$$

$$M(I_2) = \{(S_0, T), (S_1, F), (S_2, T), (S_3, F)\}$$

$$M(I_3) = \{(S_0, T), (S_1, T), (S_2, T), (S_3, T)\}$$

$M(A) = \{(S_0, T), (S_1, T), (S_2, F), (S_3, F)\}$, $S_0 \wedge S_1 \rightarrow S_3$ ve $S_1 \rightarrow S_3$ yanlış olduğunda

$T(R)$ için bir model teşkil etmez. Bu ise $A = \{0,1\}$ in R nin bir idealidir.

Verilen G grubu ve onun kesinleşmiş teorisi ile ilişkilendirilmiş teorisi $T(G)$ ile n kardinalli R halkası için $T(R)$ nin mertebesini saptamak istiyoruz. İlk olarak $\{S_0, S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}\}$ formunun önermeleri için $n^2 + 1$ tane önerme vardır. Şimdi $S_a \rightarrow S_{ab}$ önermesinin (önergelerinin) sayısını saptamaya çalışalım.

$R = \square_n$ ve $x \in \square_n$ olsun. x ve n in en büyük ortak böleni d dir ve $(x, n) = d$ ile gösterelim. Hesaplarsak $A_{n/d} = \{0, 1, 2, \dots, \frac{n}{d} - 1\}$ kümesi olur. Eğer $d = 1$ ise o zaman $S_x \rightarrow S_{xb}$ formunun önergelerinin farkının n olduğu elimizde olacaktır. Kabul edelim ki $d \neq 1$ olsun, $0 \leq j < k < \frac{n}{d} - 1$ ve $(x, n) = d \neq 1$ için $xj \equiv xk \pmod{n}$ olmasının imkansız olduğu açıkça görülür.

Kabul edelim ki $xj \equiv xk \pmod{n}$ olsun. O zaman $n/(xj - xk)$ dir. $(x, n) = d$ olduğunda t_1 ve $t_2 \in \square_n$ de vardır ki, $x = t_1 d$ ve $n = t_2 d$. O zaman $t_2/t_1(j - k)$, fakat $(t_1, t_2) = 1$ durumunda $t_2/(j - k)$ olduğu görülür. Böylece $t_2 < j - k < \frac{n}{d} - 1$ fakat $t_2 = \frac{n}{d}$ olur. Böylece $\frac{n}{d} < j - k < \frac{n}{d} - 1$ olur ve bu da bir çelişkidir. Böylece $(x, n) = d \neq 1$ durumunda $xj \equiv xk \pmod{n}$ olmasının imkansız olduğunu

görmüş olduk. O zaman $xj = xk$ için $0 \leq j < k < \frac{n}{d} - 1$ dir. Böylece her bir $a \neq 0$ için $S_a \rightarrow S_{ab}$ formunun önermeler farkı $\frac{n}{d}$ dir.

Teorem 3.2.8 Verilen n elemanlı sonlu $\square_n$ halkası için $T(\square_n)$ nin kardinali:

$$|T(\square_n)| = n^2 + 2 + \sum_{a \in \square_n - \{0\}} \frac{n}{(a, n)} \text{ dir.}$$

Örnek 3.2.7 yi yeniden gözden geçirelim : $(1,4) = 1$ ve $(3,4) = 1$ dir. Eğer $a = 1$ veya $a = 3$ ise 4 farklı önermeye sahibiz. Eğer $a = 2$, $(2,4) = 2$ ise toplam 2 önermeye sahibiz. O zaman $n = 4$ olduğunda $T(\square_n)$ nin kardinalitesi 28 dir.

Şimdi, $R = \square_8$ olsun, o zaman her bir a için (ki bu $a \in \{1,3,5,7\}$), bu sayılar 8 ile aralarında asal olduğunda 32 tane önerme vardır. $a = 2$ ve $a = 6$ için, $(2,8) = 2$ ve $(6,8) = 2$ olduğunda toplam 8 önermemiz vardır. Son olarak $a = 4$ için $(4,8) = 4$ olduğunda 2 den fazla önermemiz vardır. $|T(\square_8)| = 10$ dir.

3.2.4 Kafesler

L bir kafes olsun. L önermesel dille şu şekilde ilişkilendirilir;
 $S = \{S_a : a \in L\}$ önermesel harflerin kümesidir ve mantıksal semboller

$\{\wedge, \vee, ', \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$ şeklindedir. L ile ilişkilendirilmiş kesinleşmiş teori:

$$T(L) = \{S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a \wedge b} \wedge S_{a \vee b} : (\forall a \in L)(\forall b \in L)\}$$

Fonksiyon tanımı:

$\mu : T(L)$ nin modelleri $\rightarrow L$ nin alt kafesleri ($\mu(A) = \{x \in L : A \vdash S_x\}$)

$$A \rightarrow \mu(A)$$

x ve y $\mu(A)$ nin keyfi elemanları olsun. O zaman $A \vdash S_{x \wedge y} \wedge S_{x \vee y}$ olduğunda $A \vdash S_x \wedge S_y$ ve $A \vdash S_y$ dir. Hiptezden $A \vdash S_{x \wedge y} \rightarrow S_{x \wedge y} \wedge S_{x \vee y}$ elimizde var o zaman $A \vdash S_{x \wedge y} \wedge S_{x \wedge y} \wedge S_{x \vee y}$ dir. Böylece $A \vdash S_{x \wedge y}$ ve $A \vdash S_{x \vee y}$ dir. $\mu(A)$ nin tanımının uygulanışından $x \wedge y \in \mu(A)$ ve $x \vee y \in \mu(A)$ dır. Böylece $\mu(A)$ L nin alt kafesidir.

Şimdi $\tau : L$ nin alt kafesleri $\rightarrow T(L)$ nin modelleri

$$S \rightarrow \tau(S)$$

$\tau(S) \vdash S_x \leftrightarrow x \in S$ olduğunda eğer S , L nin alt kafesi ise $\tau(S) \vdash T(S)$ dir.

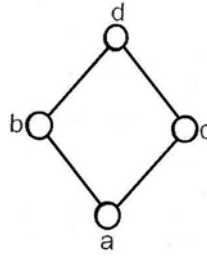
x ve y S alt kafesinin keyfi elemanları olsun. O zaman $x \wedge y \in S$ ve $x \vee y \in S$ dir. Böylece $\tau(S) \vdash S_x, \tau(S) \vdash S_y, \tau(S) \vdash S_{x \wedge y}$ ve $\tau(S) \vdash S_{x \vee y}$ dir.

Buradan $\tau(S) \vdash S_x \wedge S_y \rightarrow S_{x \wedge y} \wedge S_{x \vee y}$ dir. Son olarak L nin alt kafesi olan S için $\tau(S) \vdash T(L)$ olduğunu sonuçlandırırız.

Benzer yöntemlerle teorem 3.2.3 de S , L nin alt kafesi olduğunda $\mu(\tau(S)) = S$ dir ve A , $\tau(L)$ nin bir modeli olduğunda $\tau(\mu(A)) = A$ dir. Böylece aşağıdaki sonucu ispatlamış olduk:

Teorem 3.2.9 L bir kafes ve $\tau(L)$, L nin önermesel teoriyle ilişkilendirilmiş olsun. $T(L)$ kesinleşmiş teorisinin modelleri ve L nin alt kafesleri arasında bire bir eşleme vardır.

Örnek 3.2.10 L aşağıdaki şekil ile temsil edilen bir kafes olsun.



Şekil 3.1

$T(L)$ yukarıda temsil edilen şekilde verilmiş L kafesinin önermesel teorisiyle ilişkilendirilmiş ve her $a, b \in L$ için $a \vee b \in L$ ve $a \wedge b \in L$ dir. Burada $S_{a \vee b}$ önermesel harfin yazılışı yerine onun eşiti olan önermesel harf yazacağız. Eğer $a \wedge b = c$ ise o zaman $S_{a \wedge b}$ yerine S_c yazılacaktır. Bu ise $S_{a \wedge b} = S_c \leftrightarrow a \wedge b = c$ demektir. Ayrıca işlemlerin (teorideki) değişmeli olduğunu kabul edeceğiz. Son olarak şekil 3-1 de L kafesi ile ilişkilendirilmiş $T(L)$ teorisini şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
 T(L) = \{ & S_a \wedge S_a \rightarrow S_a \wedge S_a, S_b \wedge S_b \rightarrow S_b \wedge S_b, \\
 & S_c \wedge S_c \rightarrow S_c \wedge S_c, S_d \wedge S_d \rightarrow S_d \wedge S_d, \\
 & S_a \wedge S_b \rightarrow S_a \wedge S_b, S_a \wedge S_c \rightarrow S_a \wedge S_c, S_a \wedge S_d \rightarrow S_a \wedge S_d, \\
 & S_b \wedge S_c \rightarrow S_a \wedge S_d, S_b \wedge S_d \rightarrow S_b \wedge S_d, S_c \wedge S_d \rightarrow S_c \wedge S_d \}
 \end{aligned}$$

Bir kafesi incelerken her singletonun* bir alt kafes olduğunu görebiliriz. Ayrıca her zincir bir alt kafestir. L nin alt kefesleri için bazı örnekler aşağıdadır:
 $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, c, d\}$

Bu alt kefeslerle ilişkilendirilmiş modeller:

$$M(A) = \{(S_a, T), (S_b, F), (S_c, F), (S_d, F)\}$$

$$M(B) = \{(S_a, T), (S_b, T), (S_c, F), (S_d, F)\}$$

$$M(C) = \{(S_a, T), (S_b, F), (S_c, T), (S_d, T)\}$$

$D = \{a, b, c\}$ bir alt kafes değildir. Çünkü $b \vee c = d$ ve $d \notin D$ dir.

$S_a \wedge S_c \rightarrow S_a \wedge S_d$ yanlış olduğunda $M(D) = \{(S_a, T), (S_b, T), (S_d, F)\}$, $T(L)$ için bir model değildir.

n elemanlı bir kafes ile ilişkilendirilmiş teoremin kardinalitesini saptamak istiyoruz. Kafes teorisinden, kafes içindeki her bir elemanın diğer elemanlarla bağlı olması gerektiğini biliyoruz fakat değişimlilikten önermelerin bazıları tekrarlıdır ve bunlar teoride sayılmayacaklardır.

Örnek 2.3.10 dan 4 elemanlı bir kafes için teori 10 tane önermeye sahip olacaktır; a 4 elemanla, b 3 elemanla , c 2 elemanla ve d kendisiyle bağlıdır. O zaman $n = 4$ için $|T(L)| = 1+2+3+4=10$ dur. Bu da bize şu sonuç için yol gösterici olur:

Teorem 3.2.11 n elemanlı bir kafes için $T(L) = \frac{n.(n+1)}{2}$ dir.

İspat: Bu sonucu ispatlamak için L nin mertebesi üzerinden matematiksel tümevarımı kullanacağız. Bir tek a elemanlı bir L kafesi , $S_a \wedge S_a \rightarrow S_a \wedge S_a$ önermesi içeren kafestir ve $T(L)=1$ dir.

Kabul edelim ki k elemanlı bir kafes için doğru olsun:

$$|T(L)| = \frac{k.(k+1)}{2}$$

L , $k+1$ elemanlı bir kafes olsun. O zaman hipotezden ilk k eleman için $T(L)$ nin $\frac{k.(k+1)}{2}$ tane önermesi vardır. Bir eleman daha eklersek $k+1$ tane önerme olur. O zaman $k+1$ elemanlı L kafesi için $T(L)$ nin önermelerinin sayısı:

$$T(L) = \frac{k.(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1).(k+2)}{2}$$

Böylece matematiksel tümevarımla n elemanlı bir kafes için $T(L) = \{S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a \wedge b} : (\forall a \in L)(\forall b \in L)\}$ formunun tüm önermelerinin içeren $T(L)$ için $|T(L)| = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ olduğunu sonlandırırız (Sreekumar, 2005).

3.2.5 Cebirler

Bölüm 2 den bir cebirin formunu açıklamıştık.

$v = (A, F)$ bir cebir olsun. $S = \{S_{ab} : (a, b) \in A \times A\}$ semboller kümesi ve mantıksal bağlaçlar önceki bölümlerde kullandıklarımız olsun.

v ile ilişkilendirilmiş kesinleşmiş teori şöyle tanımlanır:

$$T(v) = \left\{ \begin{array}{l} S_{aa}, S_{ab} \rightarrow S_{ba}, S_{ab} \wedge S_{bc} \rightarrow S_{ac}, \bigwedge_{i=1}^n S_{a_i b_i} \rightarrow S_{f(a_1, \dots, a_n) f(b_1, \dots, b_n)} : \\ \text{her } a, b, c, a_i, b_i \in A \text{ ve } n \text{ ariteli } f \text{ fonksiyonu için} \end{array} \right\}$$

$\theta(A) = \{(a, b) \in A \times A : A \models S_{ab}\}$ şeklinde tanımlanır. Eğer $A \models T(v)$ ise o zaman $\theta(A)$ ya $v(A, F)$ nin kongüransı denir. $\theta(A)$ bir denklik bağıntısıdır ve A üzerindeki işlemleri korur.

İlk olarak $\theta(A)$ nin denklik bağıntısı olduğunu göstermeliyiz.

$\theta(A)$ yansıyan, simetrik, geçişkendir. Sadece geçişkenliği göstereceğiz.

$(a, b) \in \theta(A)$ olsun. $\theta(A)$ nin tanımından $A \models S_{ab}$ ve $A \models S_{bc}$ dir. Böylece $A \models S_{ab} \wedge S_{bc}$ dir. Hipotezden $A \models S_{ab} \wedge S_{bc} \rightarrow S_{ac}$ elimizde var. O zaman $A \models S_{ac}$ dir. $\theta(A)$ tanımından $(a, c) \in \theta(A)$ dir. Buradan $\theta(A)$ geçişken bağıntıdır.

Şimdi $\theta(A)$ nin A daki işlemleri koruduğunu göstereceğiz.

$f \in F$ keyfi bir fonksiyon ve $i=1,2,\dots,n$ için $(a_i, b_i) \in \theta(A)$ olsun. $\theta(A)$ nin tanımından ve $i=1,2,\dots,n$ için $A \vdash S_{a_i b_i}$ dir. O zaman $A \vdash \bigwedge_{i=1}^n S_{a_i b_i}$ dir ve hipotezden $A \vdash \bigwedge_{i=1}^n S_{a_i b_i} \rightarrow S_{f(a_1, a_2, \dots, a_n) f(b_1, b_2, \dots, b_n)}$ dir. Böylece $A \vdash S_{f(a_1, a_2, \dots, a_n) f(b_1, b_2, \dots, b_n)}$ ve $\theta(A)$ nin tanımından $(f(a_1, a_2, \dots, a_n), f(b_1, b_2, \dots, b_n)) \in \theta(A)$ dir. Buradan $(a_i, b_i) \in \theta(A) (\forall i)$ ise $(f(a_i), f(b_i)) \in \theta(A) (\forall i)$ dır. $\theta(A)$ nın f işlemini koruduğunu ve $v = (A, F)$ cebirinin bir kongüransı olduğunu sonlandırırız.

Diğer taraftan $\theta \subseteq A \times A$ olsun ve $A(\theta) \vdash S_{ab} \leftrightarrow (a, b) \in \theta$ şeklinde tanımlansın. $v = (A, F)$ cebirinin kongürans bağıntısı θ ise $A \vdash T(v)$ dir.

$a, b, c \in A$ da keyfi elemanlar olsun. θ bir kongürans bağıntı olsun. Yansıma özelliğinden $(a, a) \in \theta$ ve $A(\theta) \vdash S_{aa}$ dir. Kabul edelimki $A(\theta) \vdash S_{ab}$ olsun. O zaman $(a, b) \in \theta$ dır. Ayrıca simetri den $(b, a) \in \theta$ dir. Böylece $A(\theta) \vdash S_{ba}$ ve $A(\theta) \vdash S_{ab} \rightarrow S_{ba}$ dır. Şimdi $A(\theta) \vdash S_{ab}$ ve $A(\theta) \vdash S_{bc}$ olsun. O zaman $(a, b) \in \theta$ ve $(b, c) \in \theta$ dır. Geçişmelilikten $(a, c) \in \theta$ dır. Böylece $A(\theta) \vdash S_{ac}$ ve $A(\theta) \vdash S_{ab} \wedge S_{bc} \rightarrow S_{ac}$ dir.

$f \in F$ n ariteli fonksiyon olsun. $A \vdash \bigwedge_{i=1}^n S_{a_i b_i} \rightarrow S_{f(a_1, \dots, a_n) f(b_1, \dots, b_n)}$ olduğunu ispatlamalıyız.

$A \vdash \bigwedge_{i=1}^n S_{a_i b_i}$ olsun. O zaman $(a_i, b_i) \in \theta$ dır. $i=1, 2, \dots, n$ için $a_i, b_i \in A$ olduğunda θ bir kongürans olduğunda $(f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n)) \in \theta$ dır. O zaman $A(\theta) \vdash S_{f(a_1, \dots, a_n) f(b_1, \dots, b_n)}$ dır.

Buradan $A \models \bigwedge_{i=1}^n S_{a_i b_i} \rightarrow S_{f(a_1, \dots, a_n) f(b_1, \dots, b_n)}$ dir. Böylece $A(\theta) \models T(v)$ dir. A , $T(v)$ nun bir modeli olduğunda $A(\theta(A)) = A$ ve θ kongrüans bağıntı olduğunda $A(\theta(A)) = A$ olduğunu ispatlayabiliriz.

Buradan şu sonuçları ispatlamış olduk:

Teorem 3.2.12 $v(A, F)$ bir cebir olsun öyleki A boştan farklı bir küme, F , A da tanımlı fonksiyonların kümesi ve $T(v)$, A ile ilişkilendirilmiş önermesel teorem. A , $T(v)$ kesinleşmiş teoreminin modelleri ve $v(A, F)$ cebirinin kongrüansları arasında birebir uygunluğunu içerir. Örnek 3.2.13 $v = (B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ bir Boolean Cebiri olsun. Lojik sembollerinin kümesi $S = \{S_{ab} : (a, b) \in B \times B\}$ ve lojik bağlaçları bir önceki şekilde tanımlansın. a, b, c, d B boştan farklı kümesinin keyfi elemanları olsun. B ile ilişkilendirilmiş uygun önermesel teori şu şekildedir;

$$T(v) = \left\{ \begin{array}{l} S_{aa}, S_{ab} \rightarrow S_{ba}, S_{ab} \wedge S_{bc} \rightarrow S_{ac}, S_{ab} \rightarrow S_{a'b'} \\ S_{ab} \wedge S_{cd} \rightarrow S_{(a \wedge c)(b \wedge d)} \wedge S_{(a \vee c)(b \vee d)} \end{array} \right\}$$

B Boolean cebirini (örnek 2.4.4) şekil 2-8(a) ve önceki örnekteki gibi göz önünde bulundurursak $T(v)$ önermesel teoremi sağlanabilir. Önermesel harfler $S = \{S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}\}$ olacaktır. Bu Boolean cebiri bir kongrüans içinde sonuçlanacak olan doğruluk değer atamalarını analiz edelim.

S_{aa} , $T(v)$ da bir önerme olduğunda S_{00} ve S_{11} doğrudur. Kalan önermesel harfler için doğruluk değer atamalarının 4 tanesine sahibiz S_{01} ve S_{10} gibi.

S_{01} yanlış ve S_{10} doğru olsun. Simetri ile $S_{10} \rightarrow S_{01}$ önermesini sağlatabiliriz. Bu değerlendirmeden sonra tablo 3.3 kullanılarak bu önermenin yanlış olduğunu sonuçlandırabiliriz. Böylece bu atama $T(v)$ için bir model teşkil etmez. Benzer

şekilde eğer S_{01} doğru ve S_{10} yanlış ataması yaparsak $S_{01} \rightarrow S_{10}$ önermesi yanlış olacaktır. Böylece bu iki olasılık $T(v)$ de bir model olmak için uygun değildir.

Diğer taraftan, eğer tüm önermeler doğru olsaydı o zaman açıkça $T(v)$ için bir model olacaktı. $T(v)$ önermelerine kısa bir bakıştan sonra elimizde eğer S_{01} ve S_{10} ikisi birden yanlış ise bu sonuçtan $T(v)$ ile ilişkilendirilmiş bir model olduğu sonucu vardı.

O zaman B Boolean cebiri için ilişkilendirilmiş kongrüans:

$X = \{(0, 0), (1, 1)\}$ ve $Y = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ dir.

Uygun modeller ise:

$$M(x) = \{(S_{00}, T), (S_{01}, F), (S_{10}, F), (S_{11}, T), \}$$

$$M(y) = \{(S_{00}, T), (S_{01}, T), (S_{10}, T), (S_{11}, T), \}$$

3.2.6 R-Modüller

R bir Halka ve RM keyfi bir R -Modül olsun. $S = \{S_a : a \in RM\}$ semboller kümesi ve önermesel bağlaçlar tablo 3.1 deki gibi tanımlansın. RM ile ilişkilendirilmiş teori şöyle tanımlanır;

$$T(RM) = \{S_0, S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}, S_a \rightarrow S_{ra} : (\forall a \in RM)(\forall b \in RM)(\forall r \in RM)\}$$

$A \vdash T(RM)$ ve tanım:

$\mu : T(RM)$ nin modelleri $\rightarrow RM$ nin R alt modülleri

$$A \mapsto \mu(A) \quad \text{Öyleki} \quad \mu(A) = \{a \in RM : A \vdash S_a\}$$

$A \vdash T(RM)$ ise $\mu(A)$ nin RM nin bir R -alt modülü olduğunu gösterelim. $\mu(A)$ nin RM nin alt grubu olduğunun doğruluğunu gösterebiliriz. $r \in R$ ve $b \in \mu(A)$ keyfi elemanlar olsunlar. $b \in \mu(A)$ olduğunda $A \vdash S_b$ dir.

Hipotezden $A \vdash S_b \rightarrow S_{rb}$ dir. Böylece $A \vdash S_{rb}$ ve tanımdan $rb \in \mu(A)$ dir. Bu yüzden $(\forall r \in R)(\forall b \in \mu(A))(\forall rb \in \mu(A))$ dir. O zaman $\mu(A)$ nin RM nin bir R -alt modülü olduğu sonlandırılabilir.

Diğer taraftan tanım:

$$\tau : RM \text{ nin } R\text{-alt modülleri} \rightarrow T(RM) \text{ nin modelleri}$$

$$A \mapsto \tau(A)$$

olduğundan $\tau(A) \vdash S_x$ eğer ve yalnız eğer $x \in A$ dır A , RM nin bir R -alt modülü olduğunda.

A , RM nin keyfi R -alt modülü olsun. A altgrup olduğunda $0 \in A$ ve eğer $a \in A$ ve $b \in A$ ise $a - b \in A$ dır. Böylece T nin tanımından $\tau(A) \vdash S_0$,

$\tau(A) \vdash S_a \wedge S_b \rightarrow S_{a-b}$ olduğu görülür. Şimdi $r \in R$ ve $a \in A$ olsun. A , R -alt modül olduğunda $ra \in A$ dır. O zaman τ nin tanımından $\tau(A) \vdash S_a$ ve $\tau(A) \vdash S_{ra} : (\forall r \in R)$. O zaman $\tau(A) \vdash S_a \rightarrow S_{ra}$ dir. Böylece $\tau(A) \vdash T(RM)$ dir. Şimdi A , $\mu(RM)$ nin keyfi bir modeli olduğunda $\tau(\mu(A)) = A$ olduğunu göstereceğiz.

Ayrıca A , RM nin bir R -alt modülü olduğunda $\mu(T(A)) = A$ olduğunu göstereceğiz. İlk olarak, $S_a \in S$ keyfi bir önermesel harf öyleki $\tau(\mu(A)) \vdash S_a$ olsun. Ondan sonra τ nin tanımından $a \in \mu(A)$ dır. Ayrıca ζ nin tanımından $A \vdash S_a$ dır. Benzer olarak eğer $A \vdash S_a$ ise $\tau(\mu(A)) \vdash S_a$ olduğunu gösterebiliriz. Böylece $\tau(\mu(A)) \vdash S_a \leftrightarrow A \vdash S_a$ olduğunu sonlandırabiliriz, böylece $\tau(\mu(A)) = A$ dir.

A , RM nin R -modülü olsun ve $a \in A$ olsun. τ nin tanımından $\tau(A) = S_a$ ve μ nin tanımından $a \in \mu(\tau(A))$ dır. Böylece $A \subseteq \mu(\tau(A))$ dır.

Benzer olarak $\mu(\tau(A)) \subseteq A$ olduğunu ispatlayabiliriz. Böylece A , RM nin R -alt modülü olduğunda $\mu(\tau(A)) = A$ oluşunu sonlandırabiliriz.

Buradan biz aşağıdaki sonucu ispatlamış olduk:

Teorem 3.2.14 R bir halka olsun, RM bir R -modül ve $T(RM)$ teori ile ilişkilendirilmiş olsun. $T(RM)$ ve RM nin R -modüllerinin modelleri bire-bir uyuşma gösterir.

4.SONUÇLAR

- Bir C kümesinin A ve B gibi boş olmayan iki alt kümesinin kartezyen çarpımı verilsin. Biz bu kümelerle ilişkilendirilmiş modelleri tanımladık ve A ve B için modellerle ilişkilendirilmiş Kartezyen çarpımdan $A \times B$ nin modelleri arasında Φ gibi bir bijeksiyon olduğunu ispatladık.

- Dedekind Teoremi ve Birkhoff Teoremi gibi kafes yapılarının birkaç ilginç sonuçları ile çalışıldı ve ispat edildi. Ayrıca Boolean cebirleri için birkaç özellik sunulmuştur. Stone Teoremi için ispat çizimi yapılmış Boolean Cebiri ve Boolean Halkaları ile ilişkilendirilerek ispatı yapılmıştır.

- Verilen bir A cebir yapısı için $T(A)$ önermesel teoremlerini tanımladık öyleki A nın alt yapıları ile $T(A)$ nın modelleri arasında bire bir eşleme olduğunu gösterdik. Bu ilişkiler gruplar, halkalar, kafesler, cebirler ve R-modüller için çalışıldı.

- Farklı önermesel teorilerin kardinalitesi çalışıldı. Sonlu grupların, halkaların ve kafeslerin hesap yapmak için;

$$✓ \quad n \text{ mertebeden bir } G \text{ grubu için } |T(G)| = n^2 + 1$$

$$✓ \quad R = \square_n \text{ halkası için } |T(\square_n)| = n^2 + 2 + \sum \frac{n}{(a, n)}, a \in \square_{n-\{0\}}$$

$$✓ \quad \text{Kafes için } |T(L)| = \frac{n(n+1)}{2} \text{ dir.}$$

KAYNAKLAR

Andre, R.S., Smith, D. And Eggen, M., 1997, A Transition To Advanced Mathematics, Brooks and cole Publishing Company, Fourth Edition, New York.

Birkhoff, G., 1948, American Mathematical Society Colloquim Publications, Volume XXV, 259p.

Bell, J.L. and Machover, M., 1977, A Course in Mathematical Logic, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp.125-150.

Burris, S. and Sankappanavar, H.P., 1993, A Course in Universe Algebra, the millennium edition.

Caceres, L.F., 1998, Ultraproducts Of Sets and Ideal Theories of Commutative Rings, Ph. D. Thesis Universty Of Iowa.

Curry, H.B., 1976, Foundations of Mathematical Logic, Dover Publications, Inc., New York, pp.125-139.

Dedekind, R., 1897, Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre gröbten gemeinsamen Teiler.

Dedekind, R., 1900, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe.

Givant, S. and Halmos, P., 2000 Introduction to Boolean algebra, Springer, New York, pp.149-169.

KAYNAKLAR (DEVAM EDİYOR)

Goodstein, R. L., 1963, Boole Algebra, Pergamon Press.

Grätzer, G., 1978, General Lattice Theory, Academic Press, San Francisco, pp.1-15

Grimaldi, R.P., 2003, Discrete and Combinatorial Mathematics , Pearson Addison Wesley , New York, pp.47-53.

Hernandez, W. O., 2006, Master Thesis of Science in Mathematics, Universty Of Puerto Rico, 79p.

Herstein, H.I., 1976, Topics in Algebra, John Wiley and Sons Inc., 2nd Edition, New york.

Hungerford, T.W.,1974, Algebra, Springer-Verlag, New York.

Ledermann, W., 1964, Introduction to the Theory of Finite Groups, 5th ed., Edinburgh, London.

Sreekumar, D. P.A., 2005, Fundamental Approach to Discrete Mathematics, New Age International Limited, 279p.

Stone, M.H., 1937, Representations of distributive lattices and Brouwerian logics, Čas.Mat.Fys.,67(8):1-25.

Szász, G., 1963, Introduction to Lattice Theory, English Trans., Budapest, Hungarian.

ÖZGEÇMİŞ

04.02.1983 yılında Osmaniyede doğdu. Lise öğrenimini İskenderun Lisesinde tamamladı. 28.06.2007 tarihinde Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Teorik Ağırlıklı Matematik Bölümünde mezun oldu. Eylül-Aralık 2007 tarihleri arasında İzmir Hava Astsubay Meslek Yüksek Okulunda matematik dersleri verdi. 01.01.2008 tarihi itibari ile Bornova Belediyesi Genç Kaşifler Bilim Evinin Matematik Bölümünün kuruculuğunu yapmış ve matematik bölümünün eğitimlerinin sorumlusu olarak görevine devam etmektedir.