

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(DOKTORA TEZİ)

KÜRESEL ÇEKİRDEKLERDE BETA BOZUNMASININ FERMİ
MATRİS ELEMANLARININ HESAPLANMASI

Abdullah Engin ÇALIK

Fizik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 404.04.01

Sunuş Tarihi: 27.07.2009

Tez Danışmanları: Doç.Dr. Murat GERÇEKLİOĞLU

Doç.Dr. Cevat SELAM

Bornova-İZMİR

III

Abdullah Engin ÇALIK tarafından **DOKTORA TEZİ** tezi olarak sunulan “**Küresel Çekirdeklerde Beta Bozunmasının Fermi Matris Elemanlarının Hesaplanması**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **27.07.2009** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Saim SELVİ

.....

Raportör Üye: Prof. Dr. M. Nurullah KUMRU

.....

Üye : Prof. Dr. Mustafa BAKAÇ

.....

Üye : Doç. Dr. Murat GERÇEKLİOĞLU

.....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Müslim M. SAÇ

.....

ÖZET

**KÜRESEL ÇEKİRDEKLERDE BETA BOZUNMASININ FERMİ
MATRİS ELEMANLARININ HESAPLANMASI**

ÇALIK, Abdullah Engin

Doktora Tezi, Fizik Bölümü

Tez Yöneticileri: Doç. Dr. Murat GERÇEKLİOĞLU

Doç. Dr. Cevat SELAM

Temmuz 2009, 212 sayfa

Bu çalışmada, Cabibbo Kobayashi Maskawa (CKM) karışım matrisinin üniterliği, çift-çift çekirdeklerin taban durumlarında izospin karışımları, izobar analog rezonans (IAR) durumların izospin yapısı ve Ft değerleri $0^+ \rightarrow 0^+$ süperizinli Fermi beta geçişleri üzerinde çalışılarak incelendi. CKM karışım matrisinin V_{ud} elemanının sayısal değeri standart prosedür izlenerek hesaplandı. Daha önceki çalışmalardan farklı bir metot kullanılarak, Coulomb kuvvetlerine bağlı izospin bozulması daha doğru bir şekilde elde edildi. İzospin bozulmasından dolayı kabuk modeli Pyatov metodu ile restore edildi ve geçiş matris elemanları Rastgele Faz Yaklaşımı (RPA) aracılığıyla bulundu.

Anahtar Sözcükler: Süperizinli beta geçişleri, beta geçiş matris elemanları, izospin bozulması, CKM matrisi, izospin karışımı.

VII

ABSTRACT

CALCULATION OF THE FERMI MATRIX ELEMENTS OF THE BETA DECAY IN SPHERICAL NUCLEI

ÇALIK, Abdullah Engin

PhD in Physics

Supervisors: Assoc.Prof. Dr. Murat GERÇEKLİOĞLU

Assoc.Prof. Dr. Cevat SELAM

July 2009, 212 pages

In this study, the unitarity of the Cabibbo Kobayashi Maskawa (CKM) mixing matrix, the isospin admixtures in the nuclear ground states of the even-even nuclei, the isospin structure of the isobar analog resonance (IAR) states and the Ft values have been investigated by studying on the $0^+ \rightarrow 0^+$ superallowed Fermi Beta decays. The numerical value of the V_{ud} element of the CKM mixing matrix has been calculated following the standart procedure. Using a different method from the those of the previous studies, the effect of the isospin breaking due to the Coulomb forces has been evaluated more accurately. Here, the shell model has been modified by Pyatov's restoration because of the isospin breaking and the transition matrix elements have been found by means of the Random Phase Approximation (RPA).

Keywords: Superallowed beta decays, beta decay matrix elements isospin breaking, CKM matrix, isospin mixing.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmam sırasında karşılaştığım zorluklardaengin bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan Hocam Sayın Doç. Dr. Murat GERÇEKLİOĞLU ve Hocam Sayın Doç. Dr. Cevat SELAM’a teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşlarım Araş.Gör. Hüseyin ŞİRİN, Araş.Gör. Hüseyin ERTİK ve Araş.Gör. Tarık KUNDURACI’ya teşekkür ederim

Bugünlere gelmemde çok büyük emekleri olan annem ve babama; hayatımızın diğer alanlarında olduğu gibi doktora öğrenimim sırasında da desteğini hiç esirgemeyen, sıkıntılı anlarımda hep yanımda olan sevgili eşim Sultan ÇALIK’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

X

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VII
TEŞEKKÜR.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XV
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	XIX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XXI
1.GİRİŞ.....	1
2. BAZI TEMEL KAVRAM, TEORİ VE YÖNTEMLER.....	6
2.1 İzospin (İzotopik Spin).....	6
2.2 İzobar Analog Durumlar (IAR).....	11
2.3 BCS Teorisi.....	14
2.4 Rastgele Faz Yaklaşımı (RPA).....	17
3. BETA BOZUNMASI.....	21
3.1 Fermi'nin Beta Bozunma Teorisi.....	21
3.2 Süperizimli Fermi Beta Geçişleri.....	29
3.3 İzospin Yasaklı Beta Geçişleri.....	33

İÇİNDEKİLER (devam)Sayfa

4. PYATOV YÖNTEMİ.....	37
4.1 Parçacık Bazında Pyatov Yöntemi ile Bozulan Simetrinin Restorasyonu.....	39
4.2 Parçacık Bazında Restore Edilen Hamiltoniyenin Özdeğer ve Özvektörlerinin Bulunması.....	54
4.3 Kuazi-parçacık Bazında Pyatov Yöntemi ile Bozulan Simetrinin Restorasyonu.....	65
4.4 Kuazi –Parçacık Bazında Restore Edilen Hamiltoniyenin Özdeğer ve Özvektörlerinin Bulunması.....	79
4.5 Matris Elemanlarının Hesaplanması.....	99
4.6 Fermi Toplam Kuralı.....	106
4.7 Ana Çekirdeğin Taban Durumunun İzospin Safsızlığı.....	111
4.8 IAR İzospin Yapısı.....	115
5. CKM MATRİSİNİN ÜNİTERLİĞİ.....	124
5.1 Standart Model.....	124
5.2 Zayıf Etkileşme.....	127
5.3 CKM Matrisi ve Üniterliği.....	131
5.4 Radyatif (Işınsal) Düzeltmeler.....	139
5.5 İzospin Simetrisindeki Kırılma Düzeltmesi.....	148
6. SONUÇLAR.....	152

XIII

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

6.1 CKM Matrisinin Üniterliği.....	152
6.2 Ana Çekirdeğin Taban Durumunun İzospin Safsızlığı ve IAR Durumlarının İzospin Özellikleri.....	168
EKLER.....	180
Ek.1 İkinci Kuantumlama.....	180
Ek.2 – T . Operatörünün Elde Edilmesi.....	187
Ek.3 A_{np} Bozon Operatörünün Elde Edilmesi.....	193
Ek.4 $[H_{sqp}+h-V_C, T^p]=0$ Olduğunun Doğrulanması.....	195
Ek.5 γ_p 'nın Bir Sabite Eşit Olduğunun Gösterilmesi.....	199
Ek.6 Hareket Denkleminin Elde Edilişi.....	201
KAYNAKLAR.....	203
ÖZGEÇMİŞ.....	212

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 İzomultiyet yapı.....	10
2.2 $A = 11$ ve $A = 21$ olan izobar çekirdeklerin spektrumlarının karşılaştırılması (Wong, 1998).....	12
2.3 $A = 16$ olan izobar çekirdekler. (Wong, 1998).....	13
3.1 ^{14}O 'nun süperizinli β^+ geçişi (Blin- Stoyale,1969).....	30
3.2 $^{34}\text{Cl} \rightarrow ^{34}\text{S}$ ve $^{34}\text{S} \rightarrow ^{34}\text{Cl}$ için izobar analog haller arasındaki süperizinli Fermi beta geçişi.....	32
3.3 İzospin yasaklı β^- ve β^+ geçişler (Blin-Stoyale,1969).....	34
4.1 Ana çekirdekten yapılan β^- ve β^+ geçişleri.....	99
4.2 (N, Z) Ana çekirdeğin taban seviyesine gelen katkıların şematik gösterimi.....	112

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.3 Geçişin yapıldığı $(N - 1, Z + 1)$ ürün çekirdeğindeki IAR durumlarına diğer çekirdeklerin taban durumlarından gelen katkılar.....	119
5.1 Beta bozunumunun Feynman diagramı.....	129
5.2 Üniterlik üçgeni (Yao, 2006).....	134
5.3 Beta bozunmasında, radyatif düzeltmelerin Feynman Diyagramları ile gösterilmesi (Hardy and Towner, 1975).....	141
6.1 Hesaplanan Ft değerlerinin Z ile değişimi.....	161
6.2 Hesaplanan Ft değerlerinin Z ile kuadratik değişimi.....	163
6.3 Wilkinson'nun deneysel ft değerlerin Z ile değişimi (Wilkinson, 2002-a).....	164
6.4 $\bar{\delta}_C$ (δ_C lerin ortalaması) düzeltmesi yapıldıktan sonraki ft 'lerin Z ile değişimi (Wilkinson, 2002-a).....	164

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Sekil

Sayfa

6.5 $\bar{\delta}_{cf}$ (fluktasyon değerlerinin ortalaması) düzeltilmesi yapıldıktan sonraki ft 'lerin Z ile değişimi (Wilkinson, 2002-a).....	165
6.6 Bu çalışmadaki sonuçlar ile (Towner and Hardy, 2008)'deki sonuçların karşılaştırılması.....	166
6.7 $b^2(\%)$ 'nin Z ile değişimi.....	172
6.8 $\alpha^2(\%)$ 'nin Z ile değişimi.....	172
6.9 $\beta^2(\%)$ 'nin Z ile değişimi.....	173
6.10 $\gamma^2(\%)$ 'nin Z ile değişimi.....	173

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
5.1 Standart Modelin temel parçacıkları.....	125
6.1 $ M_{LAR} ^2$ için elde edilen sonuçlar.....	156
6.2 $\delta_{C1}(\%)$ 'in değerinin literatürdeki hesaplar ile karşılaştırılması.....	157
6.3 Süperizinli Fermi beta geçişi yapan onbir çekirdeğin Ft değerleri.....	160
6.4 CKM matrisinin $(V_{ud}^2 + V_{us}^2 + V_{ub}^2)$ üniterliği.....	162
6.5 Süperizinli Fermi beta geçişleri için hesaplanan Ft değerleri.....	178

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
β	Beta Bozunması
δ_C	İzospin Simetrisindeki Kırılma Düzeltmesi
f_t	Deneysel f_t Değeri
F_t	Düzeltilmiş f_t Değeri
h	Rezidüel Etkileşme
M	Geçiş Matris Elemanı
T	İzospin (İzotopik spin) Kuantum Sayısı
V_{ud}	CKM Matrisinde Yukarı-Aşağı Kuark Karışımını İfade Eden Matris Elemanı

Kısaltmalar

BCS	Bardeen, Cooper, Schrieffer Teorisi
CKM	Cabibbo, Kobayashi, Maskawa Matrisi
IAR	İzobar Analog Durumlar
RPA	Rastgele Faz Yaklaşımı
SM	Standart Model

1. GİRİŞ

Beta (β) bozunmaları, alfa ve gama bozunmaları ile birlikte nükleer fizik çalışmalarının başlamasında ve sürdürülmesinde büyük rol oynamışlardır. Aynı zamanda beta bozunmaları çekirdek yapısının temel olarak anlaşılmasında da çok önemlidir. Beta bozunmaları ilk gözlenen radyoaktif olaylardan biri olmasına rağmen hâlâ güncelliğini korumaktadır. Gerek deneysel, gerekse teorik çalışmalar tüm hızıyla günümüzde de devam etmektedir.

Çekirdeklerdeki beta geçişleri teorik olarak incelendiğinde, bu geçişlere sebep olan etkin etkileşme kuvvetleri olarak nükleonlar arasındaki spin ve izospin etkileşme kuvvetleri alınır. Genellikle, bu etkin etkileşme kuvvetlerinin gücü, kuplaj sabiti denilen bir keyfi parametre aracılığıyla temsil edilir. Söz konusu parametreler beta geçişlerine ait olan teorik ve deneysel değerlerin birbirleri ile karşılaştırılması ile bulunur.

Çekirdek kuvvetlerinin etkisi nükleonların proton veya nötron olup olmamasına bağlı olmadığı için nükleer kuvvetler yükten bağımsızdır (Krane, 2001). Nötron ve proton tek bir parçacığın (nükleon) iki değişik görüntüsü gibi düşünülüp, izospin (izotopik spin) kuantum sayısı ile gösterilmektedir. Buna göre çekirdek kuvvetleri izotopik invarianttır. Fakat bazı çekirdeklerde izospin simetrisi bozulur, izospin karışımları meydana gelir. İzospin simetrisinin bozulması protonlar arasındaki karşılıklı elektromanyetik etkileşmenin sonucu ortaya çıkar. Daha doğrusu buna Coulomb potansiyelinin çekirdek boyunca değişmesi neden olur (Bohr and Mottelson, 1969). Özellikle izospin yasaklı beta

geçişlerini açıklamak için uygun çekirdeklerin taban durumlarının izospin karışımlarının hesaplanması gerekir. Çünkü bu tür geçişlerin varlığına bu karışımlar sebep olur.

Çekirdekteki izospin karışımlarının bilinmesi, parçacık fiziğinin temelini oluşturan standart model (SM) içindeki kuark karışımlarının elde edilmesinde; taban durumlarının izospin karışımlarının bilinmesi de beta geçişlerinde elde edilen zayıf etkileşme sabitinin bulunmasında, izobar analog durumların (IAR) seviyelerinin enerjilerinin ve enerji genişliğinin bulunmasında, izomultipler seviyelerin enerjilerinin elde edilmesinde çok önemli rol oynamaktadırlar (Pyatov et al., 1979).

Çekirdeklerin taban durumlarındaki izospin karışımları bir çok farklı modelde hesaplanmıştır. Çekirdeklerin hidrodinamik modeline veya çekirdek kabuk modeline dayanarak hesaplamalar yapılmıştır. Kabuk modeline göre yapılan çalışmalarda nükleonlar arasındaki kuvvet ortalama potansiyele bağlı seçilmiştir. Aksi takdirde sistemin başlangıçta izotopik invaryant olan Hamilton operatörünün çekirdek kuvvetleri ile ilgili kısmının izotopik invaryantlıktan çıktığı görülmüştür. Bu sebepten çekirdek taban durumlarında istenmeyen izospin kirliliği meydana gelmiştir. Dolayısıyla izotopik invaryansın bozulmasını önlemek için serbest bir parametre ilave edilmiştir (Pyatov et al., 1979).

Benzer şekilde IAR (İzobar Analog Rezonans) için de bir çok çalışma yapılmıştır (Pyatov et al., 1979; Ikeda et al., 1963). Teorik olarak elde edilen değerler deneysel değerlerin çok altında kalmış ve bir IAR elde edilememiştir. Teorik sonuçlar ile deneysel sonuçların uyum içinde olması için serbest bir parametre ilave edilmiştir (Ikeda et al., 1963).

Ortaya konulacak bu çalışmanın önemi; Pyatov yöntemi kullanılarak, bozulmuş izospin simetrisini restore edecek etkin etkileşmenin formunu ve güç parametresini ortalama alan potansiyeli ile ilişkili olarak belirlemektir. Ayrıca, bu yöntemle söz konusu etkileşme parametresi, keyfiyete yer bırakmayacak şekilde, teorik olarak hesaplanabilecektir. Bu yöntem ile daha önce yapılan çalışmalar, yöntemin güvenilirliğini ortaya koymuştur. Yöntemin detayları (Pyatov and Salamov, 1977)'da verilmiştir. Parçacık bazındaki ilk uygulaması da (Pyatov et al., 1979)'da yapılmıştır. Dönme invaryansı üzerine olan uygulaması (Kuliev et al., 2002)'de; çift etkileşme de gözönüne alınarak yapılan hesapların ayrıntıları ve $^{112-124}\text{Sb}$ ve $^{100-124}\text{Sn}$ izotopları üzerine olan hesaplamalar (Babacan et al., 2004)'de; $A = 208$ olan çekirdeklerin incelenmesi (Küçükbursa et al., 2004)'de; ^{208}Bi çekirdeğinde 1^+ durumlarının Gamow-Teller geçişlerinin incelenmesi (Babacan et al., 2005)'de; orta ve ağır kütleli çekirdekler üzerine hesaplamalar (Salamov et al., 2006)'da; $N = Z$ olan ve $A = 50 - 100$ arasında değişen çekirdeklerin taban durumlarındaki izospin karışımları (Babacan et al., 2007)'de; nötron bakımından zengin Te ve Sn izotopları için beta geçiş özellikleri de (Salamov et al., 2007)'de incelenmiştir. Ayrıca yöntem, nükleer yapı fiziğinde diğer simetrilere de uygulanmıştır (Cwiok et al., 1984; Nojarov and Faessler, 1988; Faessler and Nojarov, 1990; Civitarese and Licciardo, 1990; Sakamoto and Kishimoto, 1990; Cwiok et al., 1990; Civitarese et al., 1999; Magierski and Wyss, 2000; Kuliev et al., 2004; Shoji and Shimizu, 2008).

Bu çalışmada, Woods-Saxon ortalama alanına dayanan kabuk (shell) modeli kullanılacaktır. Bu modelin verdiği tek parçacık enerjileri

ve dalga fonksiyonları beta geçişlerinin özelliklerini incelerken temel olacaktır. Daha sonra parçacık ve kuaziparçacık temsiliinde kolektif uyarılmaların fiziksel özellikleri Rastgele Faz Yöntemi (RPA) ve Kuaziparçacık Rastgele Faz Yöntemi (QRPA) ile analiz edilecektir. Ayrıca bu yöntem çerçevesi içinde çekirdek hamiltoniyeninin bozuk simetrisi Pyatov yöntemi ile restore edilecektir. Nümerik hesaplamalar yapılırken Fortran programlama dili kullanılacaktır.

Bu çalışmada, kabuk (shell) modeli potansiyelinin izovektör kısmı tarafından oluşturulan izospin kırılması ayrıştırılmış ve etkisi Pyatov restorasyon metodu ile yok edilmiştir (Pyatov and Salamov, 1977). Bunun bir uygulaması olarak parçacık fiziğindeki en önemli problemlerden bir tanesi olan CKM matrisinin üniterliği araştırılmıştır. Bu matrisin üniterliğini test etmek için varolan birkaç yoldan bir tanesi de süperizinli $J^\pi 0^+ \rightarrow 0^+$ Fermi beta geçişleridir. Süperizinli Fermi beta geçişi yapan oniki çekirdek incelenmiş, bunların geçiş matris elemanları sözü edilen yöntem dahilinde restore edilerek bulunmuştur. Ayrıca bu çekirdeklerin taban durumu izospin safsızlıkları ve IAR izospin yapıları hem çift etkileşmeli hem de çift etkileşmesiz olarak incelenmiştir.

Bu çalışmanın 2. bölümünde izospin, izobarik analog durumlar, RPA, BCS gibi bazı temel kavram, teori ve yöntemler kısaca anlatılmıştır. 3. bölümde Fermi'nin beta bozulma teorisi ve yukarıda adı geçen süperizinli ve izospin yasaklı beta geçişlerinin genel özellikleri incelenmiştir. 4. bölümde Pyatov yöntemi ile yapılan restorasyonun hem parçacık hem de kuaziparçacık bazında nasıl yapıldığı ayrıntılı bir biçimde çıkarılmış, özdeğerlerin, özfonksiyonların ve matris elemanlarının nasıl elde edildikleri de detaylı bir biçimde incelenmiştir.

Ayrıca bu bölümde izospin karışımlarının ve IAR izospin yapısının nasıl bulundukları da ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. 5. Bölümde CKM matrisinin üniterliğinin nasıl bulunduğu, burada süperizinli beta geçişlerinin neden ve nasıl kullanıldıkları ve düzeltme terimleri anlatılmıştır. Son bölüm olan 6. bölümde ise elde ettiğimiz sonuçlar literatürdeki diğer sonuçlarla birlikte verilmiştir.

2. BAZI TEMEL KAVRAM, TEORİ VE YÖNTEMLER

Bu bölümde sırasıyla izospin ve izobarik analog rezonans kavramları ile Rastgele Faz Yaklaşımı (RPA) ve Barden Cooper Schrieffer (BCS) Teorisi'nin genel özellikleri kısaca anlatılacaktır.

2.1 İzospin (İzotopik Spin)

Çekirdeği meydana getiren nükleonlar arasındaki çekim kuvvetleri yüke bağlı değildir. Yani nötron-nötron, proton-proton ve nötron-proton arasındaki kuvvetler birbirlerine eşittir. Nükleer kuvvetlerin yükten bağımsız olduğunu ifade etmek için yeni bir katsayıya (yeni bir kuantum sayısına) ihtiyaç vardır. O halde, nötrona ve protona, nükleon adı verilen aynı bir taneciğin farklı iki durumu gibi bakılabilir.

Matematik olarak nükleon, iki farklı durumda bulunabilen ve $\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve

$\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ baz vektörleriyle temsil edilen 2-boyutlu bir uzayda temsil

edilebilir. Nükleonun spin yukarı ve spin aşağı olmasını temsil edecek yani nötronla proton arasındaki farkı anlamak için taneciğin yükü **izotopik spin** veya **izospin** adı verilen bir vektöre benzetilmiştir (Ring and Schuck, 1980). Protonla nötron arasındaki yük farkı, tıpkı bir spin vektörünün bir alan içindeki uzay kuantumlanmasına benzer şekilde, izospin vektörünün (bizim hayal edip düşündüğümüz) izospin uzayında kuantumlanması şeklinde kendini gösterir.

T veya I izospin kuantum sayısını ifade eder. A nükleona sahip bir çekirdeğin toplam izotopik spini,

$$T = \sum_i^A t^i \quad (2.1)$$

şeklindedir. Bileşenleri $T(T_1, T_2, T_3)$ veya $T(T_x, T_y, T_z)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $T_3 = T_z = T_0$ şeklinde de ifade edilebilir. Bu aynı J (toplam açısal momentum) sayısına benzemektedir. Ayırt edici olan T_0 bileşenidir (Soloviev, 1976);

$$T_0 = -1/2 \quad (\text{proton için}),$$

$$T_0 = 1/2 \quad (\text{nötron için}).$$

Bazı kaynaklarda $T_0 = -1/2$ nötron için, $T_0 = 1/2$ proton için alınmaktadır.

Çekirdeğin toplam yükünü proton belirler. Çekirdekte Z tane proton olduğuna göre çekirdek yükü Ze kadardır. Aynı zamanda çekirdek yükünün çekirdekteki tüm nükleonların yükleri toplamı olduğu da düşünülebilir. Yani;

$$Ze = \sum_{i=1}^A q_i = \sum_{i=1}^A -e(t_0^i - \frac{1}{2})$$

$$Ze = \sum_{i=1}^A -et_0^i + e \sum_{i=1}^A \frac{1}{2}$$

$$Ze = \sum_{i=1}^A q_i = e(-T_0 + \frac{1}{2}A) \quad (2.2)$$

şeklindedir. Buradan hareket ederek,

$$\begin{aligned} Z &= -T_0 + \frac{1}{2}A, \\ T_0 &= \frac{1}{2}A - Z = \frac{1}{2}(N + Z) - Z, \\ T_0 &= \frac{1}{2}(N - Z) \end{aligned} \quad (2.3)$$

olarak elde edilir.

Ayrıca, $q = -e(T_0 - \frac{1}{2})$ olduğundan hareketle,

Proton için $T_0 = -\frac{1}{2}$ olduğundan $q = -e(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = e$,

Nötron için $T_0 = \frac{1}{2}$ olduğundan $q = -e(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0$

olduğu rahatlıkla gösterilebilir.

Toplam T 'yi bulmak için, herbir nükleonun T 'sinin vektörel olarak toplanması gerekir. Bunu yapmak çok zordur. Nükleonların hepsi izotopik uzayda paralel ise;

$$T = \frac{1}{2}A \quad (2.4)$$

olur. T kendi bileşeninden daha küçük değerler alamayacağına göre, T 'nin en küçük değeri,

$$T_{\min} = \frac{1}{2}(N - Z) \quad (2.5)$$

olur. T 'nin alabileceği değer aralığı,

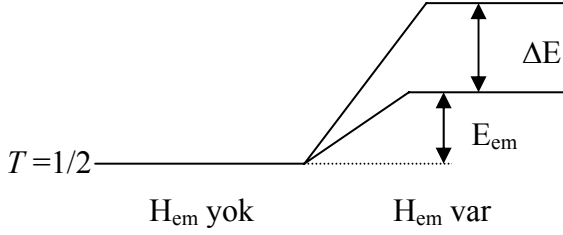
$$\frac{(N - Z)}{2} \leq T \leq \frac{A}{2} \quad (2.6)$$

olur (Ring and Schuck, 1980). Bu denkleme göre $A = \text{çift}$ ise $T = \text{tamsayı}$, $A = \text{tek}$ ise $T = \text{yarım tamsayı}$ olur.

T , izotopik uzayda herhangi bir yöne yönebilir. Yani, izotopik uzayda bir dönme invaryansı vardır. Sistem herhangi bir dönmeye karşı değişmezdir. Yani $[\hat{H}_n, \hat{T}] = 0$ dır. ($\hat{H}_n$, güçlü etkileşme)

T değeri için $2T + 1$ tane hal vardır. Yani $2T + 1$ tane dejenerasyon vardır.

Nükleonlar arasında yalnız güçlü etkileşme olsa, nötron ve protonun aynı kütleye sahip olması gerekirdi. Ancak, gerçek durumda çekirdekte nükleonlar arası güçlü etkileşme harici, nükleonlar arası elektromanyetik etkileşme de vardır. Bu elektromanyetik etkileşme izospin uzayının izotropisini bozar, simetri bozulur; $[\hat{H}_n + \hat{H}_{em}, \hat{T}] \neq 0$. Bu durum gerçek duruma karşılık gelir. Hatırlanırsa, adi uzayda manyetik alan izotropiyi bozarken, izotopik uzayda elektromanyetik etkileşme izotropiyi bozmaktadır.



Şekil 2.1 İzomultiyet yapı.

Şekil 2.1’den görüldüğü gibi $T = \frac{1}{2}$ halinde $(2T + 1)$ katlı dejenerasyon olur. Elektromanyetik etkileşme varsa bu dejenerasyon ortadan kalkar (gerçek durum budur). Her bir alt durum, T_0 ’ın tek bir değeri ile karakterize edilir ve farklı izobarlarda görülür. Elektromanyetik etkileşme yeterince küçükse $\frac{Ze^2}{\hbar c} \ll 1$ ise reel nükleer haller T ile gösterilecek şekilde olur. Yani dejenere hale doğru gidilir. Ağır çekirdeklerde bu koşul (elektromanyetik etkileşmenin küçük olması) sağlanmamasına rağmen, T bu hallere atanabilir. Bu hallere izobarik analog haller denir.

2.2 İzobar Analog Durumlar (Isobar Analogue Resonance-IAR)

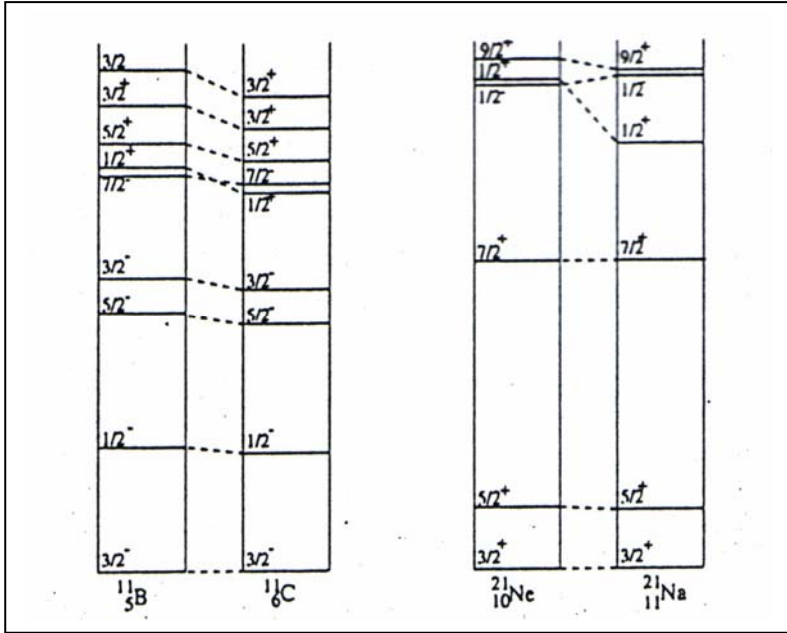
İzospinin önemi izobar çekirdekler incelendiğinde açıkça görülmektedir. İzobar çekirdekler aynı A 'ya , farklı Z ve N 'ye sahip olan çekirdeklerdir. Kütle numaraları; $A=11$, $A=16$ ve $A=21$ olan çekirdeklerin spektrumları Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'deki gibidir.

Bu çekirdekler birbirlerinin ayna çekirdeğidir. $A=11$ ve $A=21$ olan çekirdekler incelendiğinde spektrumların ne kadar birbirine benzediği daha rahat görülür. $A=16$ olan izobar çekirdeklere bakılırsa; ^{16}N 'nin nötron sayısı $N=9$ ve proton sayısı $Z=7$ 'dir. Taban izospini $T=1$ ve $T_0=-1$ 'dir. Eğer ^{16}N 'nin taban durum dalga fonksiyonuna T_+ izospin yükseltme operatörü uygulanırsa

$$(T, T_0) = (1, -1) \rightarrow (T, T_0) = (1, 0)$$

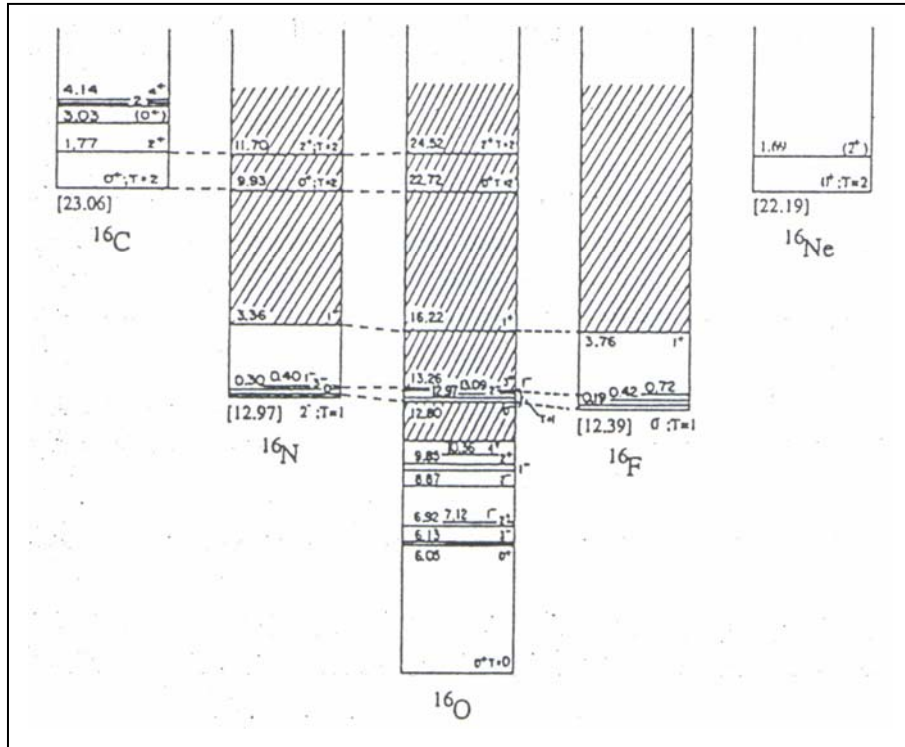
durumu elde edilir.

Bu durum ^{16}O 'nun ($N=Z=8$) bir durumudur. ^{16}O 'nun taban durumunun izospini $T=0$ olduğuna göre, T_+ operatörünün ^{16}N 'nin taban durumuna uygulanması ile ^{16}O 'nun uyarılmış bir durumu elde edilmiştir. İzospin arttırma operatörü nötronu protona dönüştürmekten başka bir değişiklik yapmaz. Bundan başka, nükleer kuvvetlerin yükten bağımsız olmasından dolayı bu durum nükleer hamiltoniyenin bir öz durumudur ve ^{16}O 'nun bir durumuna karşılık gelir.



Şekil 2.2 $A = 11$ ve $A = 21$ olan izobar çekirdeklerin spektrumlarının karşılaştırılması (Wong, 1998).

Bu durum ^{16}N 'nin taban durumu ile benzer özellikler gösterir ve T_0 hariç dalga fonksiyonları özdeşdir. Bu iki durum izospin yükseltme ve alçaltma operatörleri ile birbirine dönüşebilir. Bu gibi durumlara birbirlerinin izobar analog durumları denir (Wong, 1998).



Şekil 2.3 $A = 16$ olan izobar çekirdekler. Kesikli çizgiler izobar analog durumları göstermektedir (Wong, 1998).

2.3 BCS (Bardeen, Cooper, Schrieffer) Teorisi

Bardeen, Cooper ve Schrieffer'in 1957'de süperiletkenliğin açıklanması için geliştirmiş oldukları BCS teorisi Bohr, Mottelson ve Pines (1958), Belyaev (1959) ve Migdal (1959) tarafından çekirdek fiziğine uygulanmıştır (Nilsson and Ragnarsson, 1993). Kabuk modelinde herhangi bir nükleonun, diğer nükleonların oluşturdukları ortalama alanda hareket ettikleri kabul edilmektedir. Nükleonlar arası çift etkileşme etkisi hesaba katılmamıştır. BCS teorisinde çift etkileşme de gözönüne alınmıştır. Bu durumda Hamiltoniyen;

$$H_0 = H_{av} + H_{pair} \quad (2.7)$$

şeklinde. Ortalama alan potansiyeli Woods-Saxon veya Nilsson potansiyelidir (Soloviev, 1976).

Toplam hamiltoniyen nötron ve proton sistemleri için iki kısma ayrılabilir;

$$H_0 = H_0(n) + H_0(p) . \quad (2.8)$$

Çift etkileşme etkisi nötron ve proton için iki parametre ile belirlenir. G_N katsayısı nötron sistemi için, G_Z katsayısı proton sistemi için kullanılır. Bunlara göre Hamiltoniyen;

$$\begin{aligned}
H_0(n) &= \sum_{s\sigma} (E_0(s) - \lambda_n) a_{s\sigma}^+ a_{s\sigma} - G_N \sum_{s,s'} a_{s+}^+ a_{s-}^+ a_{s'-} a_{s'+} \\
H_0(p) &= \sum_{r\sigma} (E_0(r) - \lambda_p) a_{r\sigma}^+ a_{r\sigma} - G_Z \sum_{r,r'} a_{r'+}^+ a_{r-}^+ a_{r'-} a_{r'+}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

şeklinde olur (Soloviev, 1976). $E_0(s)$ ve $E_0(r)$ tek parçacık enerjileridir. Burada parçacık sayısı korunmamaktadır. Bu olumsuzluğu gidermek için parçacık sayısının ortalaması alınır;

$$N = \sum_{s\sigma} \langle a_{s\sigma}^+ a_{s\sigma} \rangle \quad \text{ve} \quad Z = \sum_{r\sigma} \langle a_{r\sigma}^+ a_{r\sigma} \rangle.$$

Buradaki Lagrange çarpanları parçacık sayısının en azından ortalama olarak korunmasını sağlar. Lagrange çarpanları λ_n ve λ_p kimyasal potansiyel olarak adlandırılır (Soloviev, 1976).

Yukarıda verilen Hamiltoniyenler içinde verilen $a_{s\sigma}^+$ ve $a_{s\sigma}$ sırasıyla parçacık yaratma ve yoketme operatörleridir. Bunlar arasındaki antikomutasyon bağıntıları;

$$\begin{aligned}
\{a_{s\sigma}^+, a_{s\sigma}\} &= \delta_{ss'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad , \quad \{a_{s\sigma}, a_{s'\sigma'}\} = 0 \quad , \\
\{a_{s\sigma}^+, a_{s'\sigma'}^+\} &= 0
\end{aligned}$$

şeklindedir (Soloviev, 1976).

Parçacık tasvirinden kuaziparçacık tasvirine geçiş Bogolyubov dönüşümleri ile küresel çekirdeklerde şu şekilde olur (Nilsson and Ragnarsson, 1993);

$$\begin{aligned} a_{jm}^+ &= U_j \alpha_{jm}^+ + (-1)^{j-m} V_j \alpha_{j-m} \\ a_{jm} &= U_j \alpha_{jm} + (-1)^{j-m} V_j \alpha_{j-m}^+ \end{aligned} \quad (2.10)$$

Bu dönüşümler altında küresel çekirdeklerde nötron sisteminin hamiltoniyeni ve taban durum dalga fonksiyonu (Soloviev, 1976);

$$\begin{aligned} H_0(n) &= \sum_{j,m} (E_0(j) - \lambda_n) a_{jm}^+ a_{jm} - \\ &\quad \frac{G_N}{4} \sum_{j,j'} \sum_{m,m'} (-1)^{j-m} (-1)^{-j'+m'} a_{jm}^+ a_{j-m}^+ a_{j'-m'} a_{j'm'} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\psi_0 = \prod_{j,m>0} \left(U_j + (-1)^{j-m} V_j a_{jm}^+ a_{j-m}^+ \right) \psi_{00} \quad (2.12)$$

olur. Gap parametresi (Soloviev, 1976);

$$\Delta n = G_N \sum_j \left(j + \frac{1}{2} U_j V_j \right) \quad (2.13)$$

şeklindedir. Ayrıca U_j , V_j ve $\varepsilon(j)$ m'ye bağlı değildir.

$$\begin{aligned} V_j^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E(j) - \lambda_n}{\varepsilon(j)} \right) \quad , \quad U_j^2 = 1 - V_j^2 \\ \varepsilon(j) &= \sqrt{\Delta n^2 + (E(j) - \lambda_n)^2} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradaki $\varepsilon(j)$ kuaziparçacık enerjileridir. Böylece, bağımsız kuaziparçacıklar teorisi temel denklemleri (Soloviev, 1976);

$$\frac{G_N}{2} \sum_j \frac{j + \frac{1}{2}}{\sqrt{\Delta n^2 + (E(j) - \lambda_n)^2}} = 1 \quad (2.14)$$

$$N = \sum_j \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{E(j) - \lambda_n}{\sqrt{\Delta n^2 + (E(j) - \lambda_n)^2}} \right) \quad (2.15)$$

şeklindedir.

2.4 Rastgele Faz Yaklaşımı (Random Phase Approximation-RPA)

İkinci kuantumlanma (Ek.1’de genel özellikleri anlatılmıştır) ilk defa Bogolyubov tarafından önerilmiştir. Metod genellikle çeşitli çok-parçacık problemlerinin çözümünde kullanılır. Bu metodun iki temel değişik şekli vardır. Bunlardan bir tanesi Tamm-Dancoff (TD) metodu diğeri de Rastgele Faz Yaklaşımı (RPA) metodudur. TD metodunun ilk defa Tamm tarafından kuantum alan teorisinden formulasyonu yapılmıştır. Daha sonra Dancoff tarafından geliştirilmiştir. Metodun matematik bazı da Fock tarafından geliştirilmiştir. TD metodu kuaziparçacık etkileşmelerini uyarılmış durumlar için hesaba katar, fakat etkileşmeler taban duruma bir katkıda bulunmazlar. Burada bahsedilen çift-çift çekirdeklerin taban durumu kuaziparçacık vakumudur. TD’deki

bu eksiklik RPA tarafından giderilmiştir. RPA'da kuaziparçacık etkileşmeleri bütün durumlarda olmaktadır (Soloviev, 1976).

RPA'da kullanılan kuaziparçacık çift etkileşme operatörleri (Soloviev, 1976);

$$\begin{aligned} A(q, q') &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} \sigma \alpha_{q'\sigma} \alpha_{q-\sigma}, \\ A^+(q, q') &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} \sigma \alpha_{q-\sigma}^+ \alpha_{q'\sigma}^+ \end{aligned} \quad (2.16)$$

şeklindedir. Bunlar arasındaki komutasyon bağıntıları (Soloviev, 1976);

$$\begin{aligned} [A(q, q'), A^+(q_2, q'_2)] &= \delta_{qq_2} \delta_{q'q'_2} + \delta_{qq'_2} \delta_{q'q_2} + \\ &\quad \sum_{\substack{q'', q''' \\ \sigma'', \sigma'''}} l(q, q'; q_2, q'_2; q'', q''') \alpha_{q''\sigma''}^+ \alpha_{q'''\sigma'''} \quad (2.17) \\ [A^+(q, q'), A^+(q_2, q'_2)] &= [A(q, q'), A(q_2, q'_2)] = 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradaki l Kronecker δ fonksiyonunun bir ifadesidir.

Kuaziparçacık etkileşmeleri çift-çift çekirdeklerin taban durumlarına tesir ederler. Taban durumu dalga fonksiyonu, kuaziparçacık vakumu dalga fonksiyonuna eşit değildir, kuaziparçacık sayısından farklı (fakat her zaman çift sayıda) küçük bileşenlere sahiptir. Öyle durumlar kabul edilir ki taban durumda kuaziparçacık sayısının ortalaması küçük olur. Yani matematiksel olarak;

$$\langle \alpha_{q\sigma}^+ \alpha_{q'\sigma'} \rangle = 0$$

olur. Bu temel kabul olur. Bu kullanılırsa yukarıda tanımlanan birinci komutasyon bağıntısının en sağındaki terim ihmal edilir ve $A(q, q')$ operatörleri bozon komutasyon bağıntılarını tanımlar. Bu metoda kuazibozon yaklaşımı denir (Soloviev, 1976). Bu durumda yukarıdaki komutasyon ifadesi;

$$[A(q, q'), A^+(q_2, q'_2)] = \delta_{qq_2} \delta_{q'q'_2} + \delta_{qq'_2} \delta_{q'q_2} \quad (2.18)$$

olur. Yeni operatörler, yani fononlar şu şekilde tanımlanır (Soloviev, 1976);

$$Q_i = \frac{1}{2} \sum_{q, q'} (\psi_{qq'}^i A(q, q') - \phi_{qq'}^i A^+(qq')) \quad (2.19)$$

$$Q_i^+ = \frac{1}{2} \sum_{q, q'} (\psi_{qq'}^i A^+(q, q') - \phi_{qq'}^i A(qq')).$$

Buradaki $i=1,2,3,\dots$ bir fonon durumuna karşılık gelir. $\psi_{qq'}^i$ ve $\phi_{qq'}^i$ kare matristir.

Çift-çift çekirdeğin taban durumu bir fonon vakumu olarak tanımlanır;

$$Q_i \psi = 0. \quad (2.20)$$

Bu bütün i durumları için geçerlidir. Uyarılmış durumlarda bir fonon durumu $Q_i^+ \psi$, iki fonon durumu $Q_i^+ Q_i^+ \psi$...vb. şeklinde ifade edilir (Soloviev, 1976).

Fonon operatörleri Bose tipi komutasyon bağıntılarına uyarlar (Soloviev, 1976);

$$[Q_i, Q_{i'}^+] = \delta_{ii'} \quad , \quad [Q_i^+, Q_{i'}^+] = [Q_i, Q_{i'}] = 0 .$$

Çift-çift bir sistemin taban durumunun dalga fonksiyonu da şu formdadır (Soloviev, 1976);

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left(\frac{1}{4} \sum_{\substack{q_1, q_1' \\ q_2, q_2'}} (\psi^{-1})_{q_1, q_1'}^i \varphi_{q_2, q_2'} A^+(q_1, q_1') A^+(q_2, q_2') \right) \psi_0 . \quad (2.21)$$

Buradaki $\frac{1}{\sqrt{N}}$ normalizasyon faktörüdür.

3. BETA BOZUNMASI

Bu bölümde sırasıyla beta bozunmalarının genel özellikleri, Fermi'nin beta bozunma teorisi, beta geçişlerinin seçim kuralları, Fermi ve Gammow-Teller tipi beta geçişlerinin ne oldukları, süperizinli beta geçişleri ve isospin yasaklı beta geçişleri anlatılacaktır.

3.1 Fermi'nin Beta Bozunma Teorisi

Bilinen temel beta bozunmaları en basit haliyle şu şekilde verilebilir;

$$\beta^- \text{ bozunması: } {}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + \beta^- + \bar{\nu}_e + Q_{\beta^-}$$

$$\beta^+ \text{ bozunması: } {}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + \beta^+ + \nu_e + Q_{\beta^+}$$

$$\text{Elektron yakalaması: } e^- + {}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y$$

$$\beta^- \text{ bozunmasında açığa çıkan enerji: } Q_{\beta^-} = ({}^A_ZM - {}^A_{Z+1}M)c^2$$

$$\beta^+ \text{ bozunmasında açığa çıkan enerji: } Q_{\beta^+} = ({}^A_ZM - {}^A_{Z-1}M - 2m_e)c^2$$

$$\text{Elektron yakalamasında açığa çıkan enerji: } Q_K = ({}^A_ZM - {}^A_{Z-1}M)c^2 - E_K$$

(Buradaki E_K , K tabakasındaki bir elektronun bağlanma enerjisi).

Beta bozunmasında alfa bozunmalardan farklı olarak önceden çekirdek içinde bulunmayan tanecikler (elektron ve nötrino) yayınlanmaktadır. Bu sebeple beta bozunması yarı klasik kavramlarla açıklanamaz (Tanyel, 1994).

Fermi, gama yayınlanmasında elektromanyetik alanın oynadığı role benzer bir elektron-nötrino alanını kabul etmek suretiyle, kuantum

teorisine dayanan beta bozunma teorisini öne sürmüştür. Bu teoride, elektronların elektromanyetik alanda etkileşmesine benzer şekilde, beta ve nötrinoların çekirdekdeki nükleonlarla bir çiftlenme etkileşmesi yaptığı öne sürülür. Elektromanyetik etkileşmedeki k çiftlenme sabitine benzer, bir G_F yavaş etkileşme çiftlenme sabiti ileri sürülür. Fermi teorisinde, elektron ve nötrino, çekirdekte bir nötronun proton haline dönüşümü sırasında meydana gelir. Bu olay, bir çekirdekte gama yayınlanmasına benzetilebilir. Gama fotonu da önceden çekirdekte olmadığı halde geçiş sırasında meydana gelmektedir (Tanyel, 1994).

Beta geçişlerinde, beta geçiş ihtimali zamana bağlı pertürbasyon teorisi ile bulunur. Uyarılmış bir i seviyesinden beta yayınlayarak s seviyesine geçişi incelenirse, Ferminin altın kuralına göre geçiş olasılığı (Krane, 2001);

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi_s^* H_\beta \psi_i d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE} \quad (3.1)$$

şeklindedir. Burada H_β geçişe sebep olan hamiltoniyen operatörüdür.

ψ_s son seviye, ψ_i ilk seviye dalga fonksiyonu, $\frac{dn}{dE}$ birim enerji başına düşen hallerin sayısıdır. Geçiş matris elemanı,

$$H_{is} = M_\beta = \int \psi_s^* H_\beta \psi_i dx dy dz \quad (3.2)$$

olmak üzere;

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |M_\beta|^2 \frac{dn}{dE} \quad (3.3)$$

olarak elde edilir.

Fermi'ye göre nötron, proton ve β^- bozunmasında elektromanyetik alan yerine elektron-nötrino alanı etkisiyle beta yayınlanmaktadır. Bu etkileşme çok zayıftır ve kısa zamanda oluşur. Bunun için beta bozunmasından zayıf etkileşme sorumludur.

Momentumu P_β ile $P_\beta + dP_\beta$ arasında olan ve yayınlanan betaların birim zamandaki geçiş olasılığı veya geçiş hızı;

$$\lambda = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} |\langle s | H_\beta | i \rangle|^2 P_\beta^2 (E_{\max} - E_\beta)^2 dP_\beta \quad (3.4)$$

şeklindedir (Krane, 2001).

Beta parçacıkları yayınlandıktan sonra çekirdeğin potansiyelinden dolayı oluşan Coulomb etkileşmesi ile karşılaşır. Çekirdeğin yükü Ze olduğuna göre, Ze yüklü çekirdek, çekirdekten yayınlanan β^+ 'ları hızlandırır fakat β^- 'leri yavaşlatır. Öyleyse yukarıda verilen birim zamanda yayınlanan parçacık sayısının bu etkileşmeleri de hesaba katması gerekir. Bunun için bağıntının Coulomb düzeltme terimi $[F(Z, E_\beta)]$ ile çarpılması gerekir. Bu fonksiyona Fermi fonksiyonu veya Coulomb düzeltmesi denir. Bu F 'nin işareti β^- ve β^+ 'ya göre değişir. Bu durumda;

$$\lambda = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \left| \langle s | H_\beta | i \rangle \right|^2 F(Z, E_\beta) P_\beta^2 (E_{\max} - E_\beta)^2 dP_\beta \quad (3.5)$$

olur.

$$F(Z, E_\beta) = \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \quad \text{ve} \quad \eta = \mp \frac{Ze^2}{\hbar v}$$

olur. (3.5) denklemindeki integral çözülürse; momentumun ve enerjinin

boyutsuz olması için $P = \frac{P}{mc^2}$, $E = \frac{E}{mc^2}$ alınarak;

$$\int_0^{P_{\max}/mc} F(Z, E_\beta) \frac{P_\beta}{(mc)^2} \left(\frac{E_{\max}}{mc^2} - \frac{E_\beta}{mc^2} \right)^2 \frac{dP_\beta}{mc} = f(Z, E_\beta), \quad (3.6)$$

$$\int_0^{P_{\max}/mc} F(Z, E_\beta) P_\beta^2 (E_{\max} - E_\beta)^2 dP = m^5 c^7 f \quad (3.7)$$

elde edilir. Elde edilen bu sonuç (3.5)'te yerine yazılırsa;

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \left| M_\beta \right|^2 m^5 c^7 f \quad (3.8)$$

olur. Buradan ;

$$f T_{1/2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m^5 c^4} \frac{1}{\left| M_\beta \right|^2} \quad (3.9)$$

ve

$$fT_{1/2} = \frac{sabit}{|M_{\beta}|^2} \quad (3.10)$$

olur. Buna “ ft ” fonksiyonu denir.

Elektronlar ve yüklü parçacıklar elektrostatik etkileşme yaptıklarından ve elektrostatik alanda etkileşme sabiti k ile gösterildiğinden, çekirdek içerisinde beta bozunması zayıf etkileşme gösterdiği için beta bozunmasında k sabiti yerine “ G_F ” zayıf etkileşme sabiti kullanılır. Öyleyse;

$$M_{\beta} = G_F \int \psi_s^* H_{\beta} \psi_i dv \quad (3.11)$$

ve

$$\lambda = \frac{G_F}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} |M_{\beta}|^2 F(Z, E_{\beta}) P_{\beta}^2 (E_{\max} - E_{\beta})^2 dP_{\beta} \quad (3.12)$$

olur.

Beta geçişlerinde seçim kuralları;

(3.10) denkleminde, $ft = \frac{sabit}{|M_{\beta}|^2}$ olarak elde edilmişti. Görüldüğü

gibi ft fonksiyonu matris elemanının karesi ile ters orantılıdır. $|M_{\beta}|^2$ ne

kadar büyük olursa, ft de o kadar küçük olur. Yani beta geçiş olasılığı o kadar mümkün olur. Buna **izinli geçiş** denir. $|M_\beta|^2$ ne kadar küçük olursa, ft 'de o kadar büyük olur. Bu durumda geçiş de o kadar imkansızdır. Buna da **yasaklı geçiş** denir. O halde beta geçişleri matris elemanının karesine bağlı olmaktadır (Tanyel, 1994).

Beta geçişleri için ft değerleri 10^3 ile 10^{20} s arasında değişir. Bu nedenle sık sık “log ft ” değeri kullanılır. En küçük log ft (3-4) değerine sahip bozunmalara süperizinli bozunmalar denir (Krane, 2001).

M_β 'nin büyüklüğü, elektron-nötrino çiftinin çekirdekten alıp götürdüğü L_β (yörüngesel açısal momentum) değerine bağlıdır. L_β 'nin 1 birim artması ile $|M_\beta|^2$ değerinin yaklaşık 10^{-2} - 10^{-4} kadar küçülür, geçiş ihtimali azalır (Tanyel, 1994).

$L_\beta=0$ (süperizinli geçiş)

$L_\beta=1$ (birinci yasaklı geçiş)

$L_\beta=2$ (ikinci yasaklı geçiş) denir.

Beta geçişlerinde parite korunmamaktadır.

Beta bozunmasında açısal momentum korunmalıdır; $\vec{J}_a = \vec{J}_u + \vec{J}_\beta + \vec{S}_\beta$ olmalıdır. Burada eşitliğin sağındaki terim ana çekirdeğin açısal momentumunu, eşitliğin solundaki ilk terim ürün çekirdeğin açısal momentumunu, ikinci terim yayınlanan beta ve nötrino çiftinin toplam açısal momentumunu, üçüncü terim de yayınlanan beta ve nötrino çiftinin toplam spin açısal momentumu ifade etmektedir.

Eğer yayınlanan β 'nın ve nötrinin spinleri anti-paralel ise bu geçişe **Fermi geçişi** denir. O halde toplam spin $|\vec{S}_\beta| = |\vec{s}_\beta| + |\vec{s}_\nu| = 0$ olur. Eğer yayınlanan β 'nın ve nötrinin spinleri paralel ise bu geçişe de **Gamow-Teller geçişi** denir. Toplam spin $|\vec{S}_\beta| = |\vec{s}_\beta| + |\vec{s}_\nu| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ olur.

Daha önce genel haliyle verilen β bozunma hamiltoniyeni nükleer teoride, relativistik olarak Fermi ve Gamow-Teller terimlerinin toplanması şeklinde verilir (Soloviev, 1976);

$$H_\beta = \frac{G_V}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_i T_+^i (\gamma_\mu)_i (\bar{\psi}_e(r) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_\nu(r)) \right\} + \frac{G_A}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_i T_+^i (\gamma_\mu \gamma_5)_i (\bar{\psi}_e(r) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_\nu(r)) \right\} \quad (3.13)$$

Burada T_+^i , i. nötronu protona dönüştüren izospin vektör bileşeni, G_V ve G_A kuplaj sabitli vektör ve aksiyal vektör, γ_μ ve γ_5 Dirac operatörlerinin matris elemanları, ψ_e, ψ_ν sırasıyla elektron ve nötrinoya ait operatör dalga fonksiyonlarıdır. Son ve ilk seviyeler arasındaki β geçişlerini tanımlayan matris elemanı da şöyle ifade edilir (Soloviev, 1976);

$$M_\beta = \langle s | H_\beta | i \rangle = M_V + M_A . \quad (3.14)$$

Buradaki M_V Fermi, M_A Gamow-Teller matris elemanlarını temsil eder. Ayrıca ft fonksiyonu, Fermi ve Gamow-Teller matris elemanlarına bağlı olarak (Blin-Stoyle, 1969);

$$ft = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m^5 c^4} \frac{1}{G_V^2 |M_V|^2 + G_A^2 |M_A|^2} \quad (3.15)$$

şeklinde ifade edilir.

Seçim kurallarından biri de açısal momentumun korunmasının yanında izospin vektörünün de korunmasıdır. İzospin seçim kuralları oldukça önemlidir. Seçim kuralları; $\Delta T = 0, \pm 1$ ve $\Delta T_0 = \pm 1$ dir (Soloviev, 1976). İzinli Fermi geçişlerinin matris elemanın şekli;

$$\langle f | \sum_i t_x^i \pm t_y^i | i \rangle = \langle f | T_{\pm} | i \rangle \quad (3.16)$$

olur ve bunun karesi

$$\left| \langle f | \sum_i t_x^i \pm t_y^i | i \rangle \right|^2 \sim T(T+1) - T_z^i T_z^s \quad (3.17)$$

olur. Buradaki $T_{\pm}$ operatörü toplam izospini değiştirmez. Böylece Fermi geçişlerindeki seçim kuralı; $\Delta T = 0$ ve $\Delta T_0 = \pm 1$ olur (Soloviev, 1976).

3.2 Süperizinli Fermi Beta Geçişi

Süperizinli beta geçişleri aynı izospin multipletin bileşenleri olan durumlar arasında (birbirinin izobar analog durumları arasında) gerçekleşir. Geçiş $J^\pi = 0^+ \rightarrow 0^+$ durumları arasında meydana gelir. Geçiş sadece Fermi matris elemanı olan M_V 'ye bağlıdır. Gamow-Teller matris elemanı M_A 'ya bağlı değildir. Seçim kurallarına göre açısal momentumu $J_i = 0$ olan halden $J_f = 0$ olan hale Gamow-Teller geçişi yasak olduğu için $M_A = 0$ 'dır Geçiş sadece Fermi matris elemanına bağlı olduğu için bu matris elemanı nükleer dalga fonksiyonunun ayrıntılarına başvurulmadan doğru bir şekilde hesaplanabilir. Bu nedenle, (3.15) denklemi göz önüne alındığında, bir geçişin ft değerleri doğru bir şekilde verilirse G_V değerleri büyük bir güvenirlikle bulunabilir (Blin-Stoyle,1969).

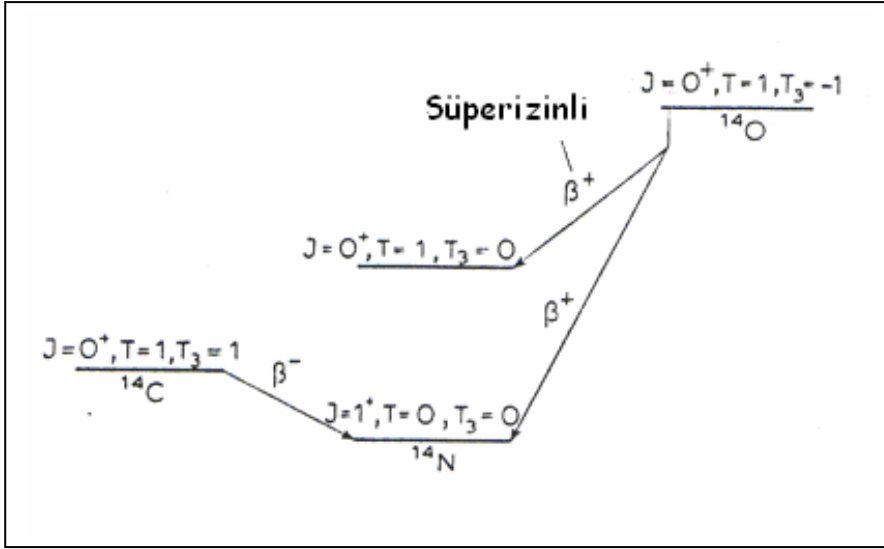
Zayıf etkileşme teorileri için G_V 'nin çok önemli olmasından dolayı bu geçişler için deneysel ve teorik çalışmalar birbirlerine bağlı bir şekilde yapılırlar (Blin-Stoyle,1969).

Şimdi bir $J^\pi = 0^+ \rightarrow 0^+$ olan, 0^+ ve $T=1$ izospinli ^{14}O 'nun taban durumundan, 0^+ ve $T=1$ izospinli ^{14}N 'nin birinci uyarılmış durumuna süperizinli β^+ geçişine bakılırsa;

İlk ve son durumlar şu şekilde ifade edilir;

$$|i\rangle = |^{14}O : J = 0^+, T = 1, T_0 = -1\rangle \quad (3.18)$$

$$|f\rangle = |^{14}N : J = 0^+, T = 1, T_0 = 0\rangle.$$



Şekil 3.1 ^{14}O 'nun süperizinli β^+ geçişi (Blin- Stoye,1969).

Fermi geçiş matris elemanı;

$$M_V = \langle ^{14}\text{N} : J = 0^+, T = 1, T_0 = 0 | T_+ | ^{14}\text{O} : J = 0^+, T = 1, T_0 = -1 \rangle \quad (3.19)$$

şeklinde olur. Dikkat edilecek olursa bu matris elemanındaki her iki durumda aynı izospin multipletin bileşenleridir. Bunların sadece T_0 değerleri farklıdır.

$$T_{\pm} |T, T_0\rangle = \sqrt{(T \mp T_0)(T \pm T_0 + 1)} |T, T_0 \pm 1\rangle \quad (3.20)$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
M_V &= \langle f | T_+ | i \rangle \\
&= \langle 10 | T_+ | 1-1 \rangle \\
&= \sqrt{(1 - (-1))(1 + (-1) + 1)} \langle 10 | 10 \rangle \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

bulunur. Bu sonuç, ilk ve son durumun izospin durumlarının saf olduğu zaman geçerlidir. ft ve G_V değerleri arasında aşağıdaki şekilde bir ilişki kurulabilir;

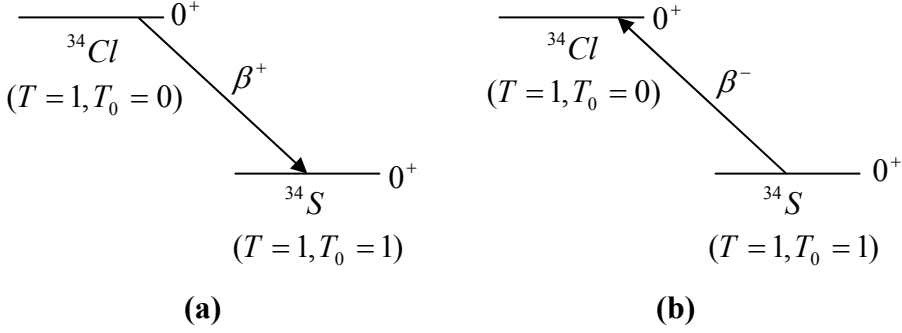
$$ft = (G_V^{-2} \pi^3 \ln 2) \hbar^7 m^{-5} c^{-4}. \tag{3.22}$$

$T = 1$ multipletlerinde $0^+ \rightarrow 0^+$ süperizinli geçişleri için hesaplanan ft değerlerinin özdeş olmaları gerektiği yukarıdaki formülden açıkça görülmektedir ve G_V buradan hesaplanabilir (Blin-Stoyle, 1969).

(3.21) denkleminde matris elemanının karesi 2 olarak hesaplanmıştır. Süperizinli Fermi beta geçişleri izobar analog haller arasında olduğu için matris elemanın değeri hangi çekirdeğin ana çekirdek olmasına bağlı değildir. İzobar analog haller arasındaki Fermi geçişleri için matris elemanının karesi (Bohr and Motellson, 1969);

$$M_V^2(T, T_0 \rightarrow TT_0 \pm 1) = (T \mp T_0)(T \pm T_0 + 1) \tag{3.23}$$

şeklindedir. Şekil 3.2’de gösterilen çekirdekler arasındaki geçiş matris elemanı her iki durum için de hesaplanırsa;



Şekil 3.2 $^{34}\text{Cl} \rightarrow ^{34}\text{S}$ ve $^{34}\text{S} \rightarrow ^{34}\text{Cl}$ için izobar analog haller arasındaki süperizinli Fermi beta geçişi.

Şekil 3.2-(a)'da $(T=1, T_0=0)$ ilk durumundan $(T=1, T_0=1)$ son durumuna, izobar analog haller arasındaki β^+ geçişi gösterilmiştir. Bu durum için (3.23) bağıntısından matris elemanının karesi hesaplanırsa;

$$M_V^2(1,0 \rightarrow 11) = (1-0)(1+0+1),$$

$$M_V^2(1,0 \rightarrow 11) = 2, \quad (3.24)$$

olarak elde edilir.

Şekil 3.2-(b)'de $(T=1, T_0=1)$ ilk durumundan $(T=1, T_0=0)$ son durumuna, izobar analog haller arasındaki β^- geçişi gösterilmiştir. Bu durum için de (3.23) bağıntısından matris elemanının karesi hesaplanırsa;

$$M_{\nu}^2(1,1 \rightarrow 10) = (1+1)(1-1+1) ,$$

$$M_{\nu}^2(1,1 \rightarrow 10) = 2 , \quad (3.25)$$

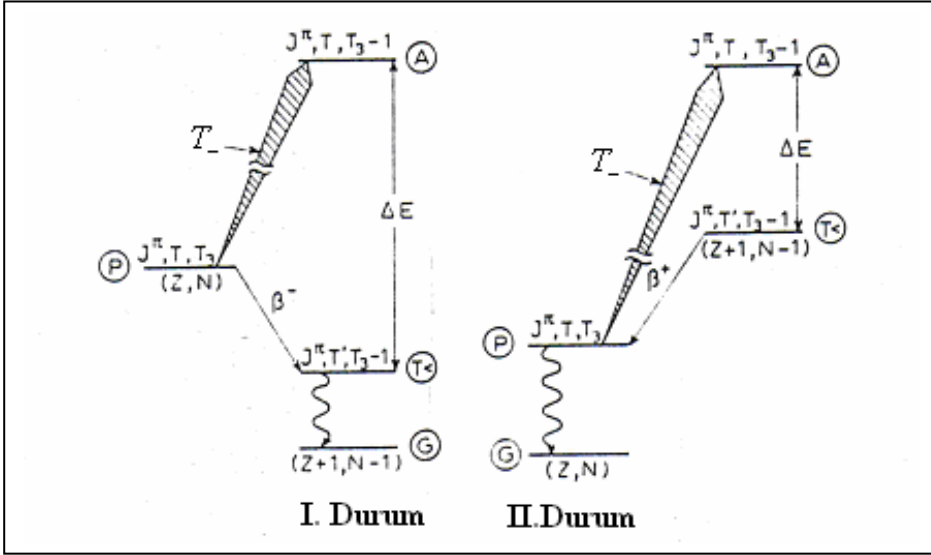
olur. (3.24) ve (3.25) bağıntılarından da görüldüğü gibi izobar analog haller arasında olan Fermi geçişleri için, $^{34}\text{Cl} \rightarrow ^{34}\text{S}$ geçişi ile $^{34}\text{S} \rightarrow ^{34}\text{Cl}$ geçişinin geçiş matris elemanları özdeştir.

3.3 İzospin Yasaklı Beta Geçişleri

Yukarıdaki bölümde incelenen süperizinli geçişler saf Fermi geçişleri olup aynı izospin multipletin iki bileşeni arasında olmaktadır. Bu bölümde ise iki farklı izospin multipletin bileşenleri arasında olan Fermi geçişi incelenmiştir. Yüke bağlı etkilerin olmadığı bir durum alınırsa geçiş matris elemanının sıfır olması gerekir. Eğer matris elemanı sıfır değil ise izospin saf değildir, diğer hallerden katkı var demektir (Blin-Stoyle,1969). Bunun için Şekil 3.3'e bakılırsa; I. durum β^- ve, II. durum β^+ geçişini göstermektedir.

İlk durumdaki çekirdek P ile gösterilmiştir ve şu şekilde temsil edilir;

$$|i\rangle = |P : J^{\pi} , T , T_0 \rangle . \quad (3.26)$$



Şekil 3.3 İzospin yasaklı β^- ve β^+ geçişler (Blin-Stoyle, 1969).

Geçişin olduğu durum $T_<$ ile gösterilmiştir ve

$$|f\rangle = |T_< : J^\pi, T', T_0 - 1\rangle \quad (3.27)$$

şeklinde temsil edilir. A durumu P 'nin analog durumudur ve

$$|A : J^\pi, T, T_0 - 1\rangle = T_- |P : J^\pi, T, T_0\rangle \quad (3.28)$$

olur.

Fermi geçiş matris elemanı $M_V = \langle f | T_- | i \rangle$ olduğuna ve

$$T_{\pm}|T, T_0\rangle = \sqrt{(T \mp T_0)(T \pm T_0 + 1)}|T, T_0 \pm 1\rangle$$

olduğuna göre;

$$\begin{aligned} M_V &= \langle T', T_0 - 1 | T_- | T, T_0 \rangle \\ &= \sqrt{(T + T_0)(T - T_0 + 1)} \langle T', T_0 - 1 | T, T_0 \pm 1 \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

olur. Yani izospine göre incelendiğinde geçişin olmaması gerekmektedir. Ancak, deneysel olarak incelendiğinde bu haller arasında beta geçişleri tespit edilmiştir. Dolayısıyla ilk ve son durumların izospinleri temiz değildir. A analog durumundan T_- durumuna katkı vardır. Bu durumda (3.27) denklemi;

$$|f\rangle = |T_- : J^\pi, T', T_0 - 1\rangle + \alpha |A : J^\pi, T, T_0 - 1\rangle \quad (3.30)$$

halini alır. Fermi geçiş matris elemanı;

$$\begin{aligned} M_V &= (\langle T', T_0 - 1 | + \alpha \langle T, T_0 - 1 |) T_- | T, T_0 \rangle \\ &= \langle T', T_0 - 1 | T_- | T, T_0 \rangle + \alpha \langle T, T_0 - 1 | T_- | T, T_0 \rangle \\ &= 0 + \alpha \sqrt{(T + T_0)(T - T_0 + 1)} \langle T, T_0 - 1 | T, T_0 - 1 \rangle \\ &= \alpha \sqrt{(T + T_0)(T - T_0 + 1)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

olur. Görüldüğü gibi, bu durumda geçiş vardır. İzospine göre incelendiğinde, ilk ve son hal dalga fonksiyonlarına temiz olarak

bakıldığında geçiş yokmuş gibi görünen fakat gerçekte geçişlerin olduğu bu geçişlere izospin yasaklı geçişler denir.

Yukarıdaki örnekten de grldğu gibi, izospin yasaklı geçişler izobar analog durumlar arasında olmamaktadır. Geçişin olduğu ilk ve son durumun T değerleri birbirlerinden farklıdır. Bunlar farklı izospin multipletlere ait hallerdir. Fakat geçişin olduğu son hale, ilk halin izobar analog durumundan izospin katkısı gelmektedir. Bu katkı sayesinde geçiş meydana gelmektedir. Benzer şekilde II. durum da incelenebilir (Blin-Stoyle,1969).

4. PYATOV YÖNTEMİ

Çok parçacıklı sistemlerin kuantum teorisi ile ilgilenirken en sık karşılaşılan problemlerden bir tanesi sistemi temsil eden Hamiltoniyenin, bazı simetrileri ihlal etmesidir. Bozulan bu simetriler belirli fiziksel büyüklüklerin korunumu ile ilgilidir. Kapalı bir sistem için;

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{P}] &= 0 & , & & [\hat{H}, \hat{J}] &= 0 & , \\ [\hat{H}, \hat{T}] &= 0 & , & & [\hat{H}, \hat{N}] &= 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Burada P çizgisel momentum, J açısal momentum, T izotopik spin ve N parçacık sayısıdır.

Eğer,

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{P}] &\neq 0 & , & & [\hat{H}, \hat{J}] &\neq 0 & , \\ [\hat{H}, \hat{T}] &\neq 0 & , & & [\hat{H}, \hat{N}] &\neq 0 \end{aligned}$$

şeklinde olursa simetride bozulma var demektir. Bu simetrilerin bozulması nükleer modelden kaynaklanmaktadır. Yani, kullanılan model dahilinde, restore edilebilmesi gerekmektedir (Ring and Schuck, 1980).

Bilindiği gibi tek parçacık shell model potansiyeli şu şekildedir;

$$U(r) = -U_0 f_0(r) + U_1 f_1(r) t_z + V_c(r). \quad (4.1)$$

(4.1) denkleminde, $f_0(r)$ and $f_1(r)$ izoskaler ve izovektör potansiyellerinin radyal fonksiyonlarıdır, U_0 and U_1 parametredir ve $V_c(r)$ de Coulomb potansiyelidir.

Denklem (4.1) ile verilen potansiyelin izospin simetrisini, izovektör ve Coulomb terimlerinin bozduğu açıktır. Burada, elektromanyetik etkileşmeler izospin simetrisini bozdukları için, Coulomb kuvvetlerinin izospin bozulmasına neden olması doğaldır. Diğer taraftan, nükleonlar arası güçlü etkileşmeleri temsil eden izoskaler ve izovektör kısımlar yükten bağımsız olmalıdırlar. İzovektör kısmın simetriyi bozan etkisi bir metot kullanılarak düzeltilmelidir. Burada kullanılan metot, Pyatov'un restorasyon yöntemidir. Pyatov metoduna göre, kullanılan model hamiltoniyenin bozulan simetrisi, hamiltoniyene bir rezidüel kuvvet eklenerek restore edilir. Bu rezidüel etkileşme olan $\hat{h}$ şu duruma karşılık gelir;

$$\left[\hat{H} - V_c(r) + \hat{h}, \hat{T} \right] = 0. \quad (4.2)$$

Pyatov $\hat{h}$ 'nin şu formda olacağını göstermiştir;

$$\hat{h} = \frac{1}{2\gamma} \left[\hat{H} - V_c(r), \hat{T} \right]^+ \left[\hat{H} - V_c(r), \hat{T} \right]. \quad (4.3)$$

Metodun detayları ve ilk uygulaması sırasıyla (Pyatov and Salamov, 1977) ve (Pyatov et al., 1979)'da verilmiştir. Son uygulamaları olan izotopik invaryans (Babacan et al., 2004; Küçükburşa, et al., 2004; Babacan et al., 2005; Babacan et al., 2007)'de ve dönme invaryansı (Kuliev et al., 2002)'de verilmiştir.

Bu bölümde parçacık bazında ve kuazi-parçacık bazında Pyatov Yöntemi kullanılarak izotopik spin simetrisinin nasıl restore edileceği ve yukarıdaki (4.3) denkleminin nasıl çıkarılacağı gösterilecektir. Daha sonra restore edilen hamiltoniyenin özdeğer ve özvektörleri bulunacak, geçiş matris elemanları elde edilecektir. Matris elemanlarının doğruluğunu gösteren Fermi toplam kuralı anlatılacak ve taban durumunun izospin safsızlığı ve IAR izospin yapısı incelenecektir.

4.1 Parçacık Bazında Pyatov Yöntemi ile Bozulan Simetrinin Restorasyonu

β^- geçişine neden olan T_- operatörü parçacık tasvirinde (Bu operatörün elde edilişi Ek.2’de verilmiştir)

$$T_- = \sum_{\substack{m_n, m_p \\ j_n, j_p}} \langle j_p m_p | t_- | j_n m_n \rangle \left| a_{j_p m_p}^+ a_{j_n m_n} \right\rangle \quad (4.4)$$

şeklinde yazılır. Wigner-Eckart teoremi kullanılırsa;

$$T_- = \sum_{\substack{m_n, m_p \\ j_n, j_p}} \frac{\langle j_n m_n 00 | j_p m_p \rangle \langle j_n || j_p \rangle}{\sqrt{2j_p + 1}} a_{j_p m_p}^+ a_{j_n m_n} \quad (4.5)$$

olur. Burada $\langle j_n m_n 00 | j_p m_p \rangle = \delta_{m_n m_p} \delta_{j_n j_p}$ şeklindedir ve $j_n = j_p = j$ olursa

$$T_- = \sum_j \frac{\langle j, p \| j, n \rangle}{\sqrt{2j+1}} \sum_m a_{jm}^+(p) a_{jm}(n) \quad (4.6)$$

şeklinde olur. Bozon operatörleri (Pyatov et al., 1979);

$$\begin{aligned} A_j(p, n) &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_m a_{jm}^+(p) a_{jm}(n) \\ A_j^+(p, n) &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_m a_{jm}^+(n) a_{jm}(p) \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklindedir. Bunlara göre (4.6) denklemi yeniden yazılırsa;

$$T_- = \sum_j \langle j, p \| j, n \rangle A_j(p, n) \quad (4.8)$$

ve $T_+ = (T_-)^+$ olduğuna göre,

$$T_+ = \sum_j \langle j, p \| j, n \rangle A_j^+(p, n) \quad (4.9)$$

olur.

(4.7) denklemi ile verilen bozon operatörlerinin komutasyonları (Pyatov et al., 1979);

$$[A_j^+(p, n), A_{j'}(p, n)] = \delta_{jj'} (N_j(n) - N_j(p)) \quad (4.10)$$

şeklindedir. Burada $N_j(n)$ nötron parçacık sayısı, $N_j(p)$ proton parçacık sayısıdır. Ayrıca tek parçacık hamiltoniyeni;

$$H_{sp} = \sum_{j,m} \varepsilon_j(p) a_{jm}^+(p) a_{jm}(p) + \sum_{j,m} \varepsilon_j(n) a_{jm}^+(n) a_{jm}(n) \quad (4.11)$$

şeklindedir.

Şimdi $[H_{sp}, T_+] = ?$ komutasyonuna bakılırsa;

$$\begin{aligned} [H_{sp}, T_+] &= \left[\left(\sum_{j,m} \varepsilon_j(p) a_{jm}^+(p) a_{jm}(p) + \sum_{j,m} \varepsilon_j(n) a_{jm}^+(n) a_{jm}(n) \right), \right. \\ &\quad \left. \sum_j \langle j', p \| j', n \rangle A_{j'}^+(p, n) \right] \\ &= \sum_{j,j',m} \varepsilon_j(p) [a_{jm}^+(p) a_{jm}(p), A_{j'}^+(p, n)] \langle j', p \| j', n \rangle + \\ &\quad \sum_{j,j',m} \varepsilon_j(n) [a_{jm}^+(n) a_{jm}(n), A_{j'}^+(p, n)] \langle j', p \| j', n \rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

olur. $A_{j'}^+(p, n)$ (4.7) denkleminde alınıp yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{j,j', \\ m,m'}} \frac{\varepsilon_j(p) \langle j', p \| j', n \rangle}{\sqrt{2j'+1}} [a_{jm}^+(p) a_{jm}(p), a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p)] + \\ &\quad \sum_{\substack{j,j', \\ m,m'}} \frac{\varepsilon_j(n) \langle j', p \| j', n \rangle}{\sqrt{2j'+1}} [a_{jm}^+(n) a_{jm}(n), a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p)] \end{aligned} \quad (4.13)$$

olur. (4.13) denklemi ikiye ayrılıp çözülebilir.

$$[H_{sp}, T_+]^p = \sum_{\substack{j, j', \\ m, m'}} \frac{\varepsilon_j(p) \langle j', p \| j', n \rangle}{\sqrt{2j' + 1}} [a_{jm}^+(p) a_{jm}(p), a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p)] \quad (4.14)$$

protona bağlı kısım,

$$[H_{sp}, T_+]^n = \sum_{\substack{j, j', \\ m, m'}} \frac{\varepsilon_j(n) \langle j', p \| j', n \rangle}{\sqrt{2j' + 1}} [a_{jm}^+(n) a_{jm}(n), a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p)] \quad (4.15)$$

nötrona bağlı kısım.

Önce protona bağlı olan (4.14) denklemi çözülürse;

Bu kısımdaki komutasyon,

$\begin{aligned} \{a_\alpha^+, a_\beta^+\} &= 0 \\ \{a_\alpha, a_\beta\} &= 0 \\ \{a_\alpha, a_\beta^+\} &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$

$$\begin{aligned} [a_{jm}^+(p) a_{jm}(p), a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p)] &= a_{jm}^+(p) a_{jm}(p) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) \\ &\quad - a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) a_{jm}^+(p) a_{jm}(p) \end{aligned}$$

$$= a_{jm}^+(p) a_{jm}(p) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) - a_{j'm'}^+(n) (\delta_{jj'} \delta_{mm'} - a_{jm}^+(p) a_{j'm'}(p)) a_{jm}(p)$$

$$\begin{aligned} &= a_{jm}^+(p) a_{jm}(p) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) - a_{j'm'}^+(n) a_{jm}(p) \delta_{jj'} \delta_{mm'} \\ &\quad + a_{j'm'}^+(n) a_{jm}^+(p) a_{j'm'}(p) a_{jm}(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_{jm}^+(p) a_{jm}(p) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) - a_{j'm'}^+(n) a_{jm}(p) \delta_{jj'} \delta_{mm'} \\ &\quad - a_{jm}^+(p) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) a_{jm}(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{jm}^+(p)a_{jm}(p)a_{j'm'}^+(n)a_{j'm'}(p) - a_{j'm'}^+(n)a_{jm}(p)\delta_{jj'}\delta_{mm'} \\
&\quad + a_{jm}^+(p)a_{j'm'}^+(n)a_{jm}(p)a_{j'm'}(p) \\
&= a_{jm}^+(p)a_{jm}(p)a_{j'm'}^+(n)a_{j'm'}(p) - a_{j'm'}^+(n)a_{jm}(p)\delta_{jj'}\delta_{mm'} \\
&\quad - a_{jm}^+(p)a_{jm}(p)a_{j'm'}^+(n)a_{j'm'}(p) \\
&= -a_{j'm'}^+(n)a_{jm}(p)\delta_{jj'}\delta_{mm'} \tag{4.16}
\end{aligned}$$

olur. Bu sonuç (4.13) denkleminin birinci kısmında yerine yazılırsa;

$$[H_{sp}, T_+]^p = - \sum_{\substack{j, j', \\ m, m'}} \frac{\varepsilon_j(p) \langle j', p \| j', n \rangle}{\sqrt{2j'+1}} a_{j'm'}^+(n) a_{jm}(p) \delta_{jj'} \delta_{mm'} \tag{4.17}$$

olur. $m = m'$ ve $j = j'$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
[H_{sp}, T_+]^p &= - \sum_j \varepsilon_j(p) \langle j, p \| j, n \rangle \frac{1}{\sqrt{2j+1}} a_{jm}^+(n) a_{jm}(p) \\
[H_{sp}, T_+]^p &= - \sum_j \varepsilon_j(p) \langle j, p \| j, n \rangle A_j^+(p, n) \tag{4.18}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi de (4.13) denkleminin ikinci kısmı olan (4.15) denklemi çözülürse, buradaki komutasyon;

$$\begin{aligned}
& \left[a_{jm}^+(n) a_{jm}(n), a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) \right] = \\
& \quad a_{jm}^+(n) a_{jm}(n) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) - a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) a_{jm}^+(n) a_{jm}(n) \\
& = a_{jm}^+(n) a_{jm}(n) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) + a_{j'm'}^+(n) a_{jm}^+(n) a_{j'm'}(p) a_{jm}(n) \\
& = a_{jm}^+(n) a_{jm}(n) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) - a_{jm}^+(n) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) a_{jm}(n) \\
& = a_{jm}^+(n) a_{jm}(n) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) + a_{jm}^+(n) a_{j'm'}^+(n) a_{jm}(n) a_{j'm'}(p) \\
& = a_{jm}^+(n) a_{jm}(n) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) + a_{jm}^+(n) (\delta_{jj'} \delta_{mm'} - a_{jm}(n) a_{j'm'}^+(n)) a_{j'm'}(p) \\
& = a_{jm}^+(n) a_{jm}(n) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) + a_{jm}^+(n) a_{j'm'}(p) \delta_{jj'} \delta_{mm'} \\
& \quad - a_{jm}^+(n) a_{jm}(n) a_{j'm'}^+(n) a_{j'm'}(p) \\
& = a_{jm}^+(n) a_{j'm'}(p) \delta_{jj'} \delta_{mm'} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

olur. Bu sonuç (4.13) denkleminin ikinci kısmında yerine yazılırsa;

$$\left[H_{sp}, T_+ \right]^n = \sum_{\substack{j, j', \\ m, m'}} \frac{\varepsilon_j(n) \langle j', p \| j', n \rangle}{\sqrt{2j' + 1}} a_{jm}^+(n) a_{j'm'}(p) \delta_{jj'} \delta_{mm'} \tag{4.20}$$

olur. $m = m'$ ve $j = j'$ alınır,

$$[H_{sp}, T_+]^n = \sum_j \varepsilon_j(n) \langle j, p \| j, n \rangle \frac{1}{\sqrt{2j+1}} a_{jm}^+(n) a_{jm}(p)$$

$$[H_{sp}, T_+]^n = \sum_j \varepsilon_j(n) \langle j, p \| j, n \rangle A_j^+(p, n) \quad (4.21)$$

olur. (4.18) ve (4.21) denklemleri (4.13)'de yerlerine yazılırsa;

$$[H_{sp}, T_+] = \sum_j (\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) \langle j, p \| j, n \rangle A_j^+(p, n) \quad (4.22)$$

olur.

$$[H_{sp}, T_+]^+ = [T_+, H_{sp}^+] = [T_-, H_{sp}] = -[H_{sp}, T_-]$$

olduğuna göre;

$$[H_{sp}, T_-] = -[H_{sp}, T_+]^+$$

olur. Öyleyse;

$$[H_{sp}, T_-] = -\sum_j (\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) \langle j, p \| j, n \rangle A_j(p, n) \quad (4.23)$$

olur.

Coulomb potansiyeli şu şekilde tanımlanır;

$$V_C = \sum_{k=1}^A v_c(k) \left(\frac{1}{2} - t_z(k) \right) \quad (4.24)$$

Ayrıca;

$$T_- = \sum_{i=1}^A t_-^i \quad \text{ve} \quad T_+ = \sum_{i=1}^A t_+^i$$

$$[L_z, L_-] = -L_- \quad ; \quad [L_z, L_+] = L_+$$

$$[t_z, t_-] = -t_- \quad ; \quad [t_z, t_+] = t_+$$

olduğuna göre;

$$[V_C, T_+] = \sum_{k,i} v_c(k) \left[\left(\frac{1}{2} - t_z(k) \right), t_+(i) \right]$$

$$[V_C, T_+] = \sum_{k,i} v_c(k) \left(\left[\frac{1}{2}, t_+(i) \right] - [t_z(k), t_+(i)] \right)$$

$$[V_C, T_+] = - \sum_{k,i} v_c(k) [t_z(k), t_+(i)]$$

$$[V_C, T_+] = -\sum_{k,i}^A v_c(k) t_+(i) \quad (4.25)$$

olur. (4.9) denkleminde T_+ alınıp yerine yazılırsa;

$$[V_C, T_+] = -\sum_j \langle j, p | v_c | j, n \rangle A_j^+(p, n) \quad (4.26)$$

olur. Benzer şekilde;

$$[V_C, T_-] = \sum_{k,i}^A v_c(k) \left[\left(\frac{1}{2} - t_z(k) \right), t_-(i) \right]$$

$$[V_C, T_-] = -\sum_{k,i}^A v_c(k) [t_z(k), t_-(i)]$$

$$[V_C, T_-] = \sum_{k,i}^A v_c(k) t_-(i) \quad (4.27)$$

olur. (4.8) denkleminde T_- alınıp yerine yazılırsa;

$$[V_C, T_-] = \sum_j \langle j, p | v_c | j, n \rangle A_j(p, n) \quad (4.28)$$

olur.

$V_{np} \equiv \langle j, p | v_c | j, n \rangle$ tanımlaması yapılırsa;

$$\begin{aligned} [V_C, T_+] &= -\sum_j V_{np} A_j^+(p, n) \\ [V_C, T_-] &= \sum_j V_{np} A_j(p, n) \end{aligned} \quad (4.29)$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi de $[H_{sp} - V_C, T_+] = ?$ komutasyonuna bakılırsa;

$$[H_{sp} - V_C, T_+] = [H_{sp}, T_+] - [V_C, T_+]$$

olur. (4.22) ve (4.29) denklemleri yerlerine yazılırsa;

$$[H_{sp} - V_C, T_+] = \sum_j (\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) \langle j, p | j, n \rangle A_j^+(p, n) + \sum_j V_{np} A_j^+(p, n)$$

$$[H_{sp} - V_C, T_+] = \left(\sum_j (\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) \langle j, p | j, n \rangle + V_{np} \right) A_j^+(p, n)$$

olur. Burada $\sum_j E_j(n, p) \equiv \left(\sum_j (\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) \langle j, p | j, n \rangle + V_{np} \right)$ tanımlaması

yapılırsa;

$$[H_{sp} - V_C, T_+] = \sum_j E_j(n, p) A_j^+(p, n) \quad (4.30)$$

olur. Benzer şekilde;

$$[H_{sp} - V_C, T_-] = [H_{sp}, T_-] - [V_C, T_-]$$

olur. (4.23) ve (4.29) denklemleri yerlerine yazılırsa;

$$[H_{sp} - V_C, T_-] = -\sum_j (\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) \langle j, p \| j, n \rangle A_j(p, n) - \sum_j V_{np} A_j(p, n)$$

$$[H_{sp} - V_C, T_-] = -\left(\sum_j (\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) \langle j, p \| j, n \rangle + V_{np} \right) A_j(p, n)$$

$$[H_{sp} - V_C, T_-] = -\sum_j E_j(n, p) A_j(p, n) \quad (4.31)$$

olur. (4.30) ve (4.31) denklemlerinden görüldüğü gibi $[H_{sp} - V_C, T_\mu] \neq 0$ ($\mu = \mp$) şeklindedir. Böylece toplam H_{sp} nin izotopik invaryantlığının bozulduğu gösterilmiştir. Bunu restore etmek için hamiltoniyene ek bir $\hat{h}$ teriminin eklenmesi gerekmektedir. Bu terim eklenince;

$$[H_{sp} + h - V_C, T_\mu] = 0 \quad (4.32)$$

olur (Ek.4'te bunun doğruluğu gösterilmiştir). Pyatov seçtikleri bu $\hat{h}$ 'nin şu şekilde olması gerektiğini öne sürmüştür;

$$h = \frac{1}{2\gamma} \sum_{\mu=\mp} [H_{sp} - V_C, T_\mu]^+ [H_{sp} - V_C, T_\mu] \quad (4.33)$$

$$h = \frac{1}{2\gamma} \left([H_{sp} - V_C, T_+]^+ [H_{sp} - V_C, T_+] + [H_{sp} - V_C, T_-]^+ [H_{sp} - V_C, T_-] \right)$$

olur. Bu arada (4.30) dekleminde

$$[H_{sp} - V_C, T_+] = \sum_j E_j(n, p) A_j^+(p, n)$$

olduğuna göre;

$$[H_{sp} - V_C, T_+]^+ = \sum_j E_j(n, p) A_j(p, n) \quad (4.34)$$

olur. Benzer şekilde (4.31) denkleminde;

$$[H_{sp} - V_C, T_-] = -\sum_j E_j(n, p) A_j(p, n)$$

olduğuna göre,

$$[H_{sp} - V_C, T_-]^+ = -\sum_j E_j(n, p) A_j^+(p, n) \quad (4.35)$$

olur. (4.30), (4.31), (4.34) ve (4.35) denklemleri (4.33) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$h = \frac{1}{2\gamma} \left(\sum_{j'} E_{j'}(n, p) A_{j'}(p, n) \sum_j E_j(n, p) A_j^+(p, n) + \right. \\ \left. \left(- \sum_{j'} E_{j'}(n, p) A_{j'}^+(p, n) \right) \left(- \sum_j E_j(n, p) A_j(p, n) \right) \right)$$

$$h = \frac{1}{2\gamma} \left(\sum_{j, j'} E_{j'}(n, p) E_j(n, p) A_{j'}(p, n) A_j^+(p, n) + \right. \\ \left. \sum_{j, j'} E_{j'}(n, p) E_j(n, p) A_{j'}^+(p, n) A_j(p, n) \right)$$

$$h = \frac{1}{2\gamma} \sum_{j, j'} E_{j'}(n, p) E_j(n, p) (A_{j'}(p, n) A_j^+(p, n) + A_{j'}^+(p, n) A_j(p, n)) \quad (4.36)$$

olur.

Şimdi de γ yı bulalım;

$(T_\mu)^+ = (T_{-\mu})$ ve $(T_+)^+ = (T_-)$ olduklarını da gözönünde bulunduralım.

$$[H_{sp} + h - V_C, T_\mu] = 0$$

olduğuna göre,

$$[H_{sp} - V_C, T_\mu] + [h, T_\mu] = 0,$$

$$[H_{sp} - V_C, T_\mu] = -[h, T_\mu] \quad (4.37)$$

olur. (4.33) denkleminde $\hat{h}$ (4.37)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
[H_{sp} - V_C, T_\mu] &= -\frac{1}{2\gamma} \sum_{\mu'} [[H_{sp} - V_C, T_{\mu'}]^+ [H_{sp} - V_C, T_{\mu'}], T_\mu] \delta_{\mu\mu'} \\
&= -\frac{1}{2\gamma} \sum_{\mu'} ([H_{sp} - V_C, T_{\mu'}]^+ [[H_{sp} - V_C, T_{\mu'}], T_\mu] + \\
&\quad [[H_{sp} - V_C, T_{\mu'}]^+, T_\mu] [H_{sp} - V_C, T_{\mu'}]) \delta_{\mu\mu'} \\
&= -\frac{1}{2\gamma} \sum_{\mu'} (-[H_{sp} - V_C, T_{-\mu'}] [[H_{sp} - V_C, T_{\mu'}], T_\mu] - \\
&\quad [[H_{sp} - V_C, T_{-\mu'}], T_\mu] [H_{sp} - V_C, T_{\mu'}]) \delta_{\mu\mu'} \\
&= \frac{1}{2\gamma} \sum_{\mu'} ([H_{sp} - V_C, T_{-\mu'}] [[H_{sp} - V_C, T_{\mu'}], T_\mu] + \\
&\quad [[H_{sp} - V_C, T_{-\mu'}], T_\mu] [H_{sp} - V_C, T_{\mu'}]) \delta_{\mu\mu'}
\end{aligned}$$

olur. Eğer $\mu' = -\mu'$ ve $C = \langle [[H_{sp} - V_C, T_{-\mu'}], T_\mu] \rangle = sbt$ ise;

$$\begin{aligned}
[H_{sp} - V_C, T_\mu] &= \frac{1}{2\gamma} \{ [H_{sp} - V_C, T_\mu] C \} \\
[H_{sp} - V_C, T_\mu] &= \frac{1}{2\gamma} ([H_{sp} - V_C, T_\mu] C + C [H_{sp} - V_C, T_\mu]) \\
2\gamma [H_{sp} - V_C, T_\mu] &= 2C [H_{sp} - V_C, T_\mu]
\end{aligned}$$

$$\gamma \equiv C = \langle \llbracket H_{sp} - V_C, T_{-\mu} \rrbracket T_{\mu} \rangle \quad (4.38)$$

olur (Ek.5'te verilmiştir).

$\mu = +$ için;

$$\gamma = \llbracket H_{sp} - V_C, T_{-} \rrbracket T_{+} \quad (4.39)$$

olur. (4.31) ve (4.9) denklemleri (4.39)'da yerlerine yazılırsa;

$$\gamma = \left[- \sum_j E_j(n, p) A_j(p, n), \sum_{j'} \langle j', p \| j', n \rangle A_{j'}^+(p, n) \right] \quad (4.40)$$

$$\gamma = - \sum_{j, j'} E_j(n, p) \langle j', p \| j', n \rangle [A_j(p, n), A_{j'}^+(p, n)]$$

olur. $[A_j, A_{j'}^+] = -[A_{j'}^+, A_j]$ olduğuna göre (4.10) denklemi (4.40)'da yerine yazılırsa;

$$\gamma = \sum_j E_j(n, p) \langle j, p \| j, n \rangle (N_j(n) - N_j(p)) \quad (4.41)$$

olur. Benzer şekilde,

$\mu = -$ için;

$$\gamma = \llbracket H_{sp} - V_C, T_{+} \rrbracket T_{-} \quad (4.42)$$

olur. (4.30) ve (4.8) denklemleri (4.42)'de yerlerine yazılırsa;

$$\gamma = \left[\sum_j E_j(n, p) A_j^+(p, n), \sum_{j'} \langle j', p \| j', n \rangle A_{j'}(p, n) \right]$$

$$\gamma = \sum_{j, j'} E_j(n, p) \langle j', p \| j', n \rangle [A_j^+(p, n), A_{j'}(p, n)] \quad (4.43)$$

olur. (4.10) denklemini (4.43)'te yerine yazılırsa;

$$\gamma = \sum_j E_j(n, p) \langle j, p \| j, n \rangle (N_j(n) - N_j(p)) \quad (4.44)$$

olur.

4.2 Parçacık Bazında Restore Edilen Hamiltoniye'nin Özdeğer ve Özvektörlerinin Bulunması

Tek parçacık hamiltoniye'ninin özfonksiyonu

$$Q_i^+ = \sum_j \psi_j(p, n) A_j(p, n) \quad (4.45)$$

şeklindedir. Bunun eşleniği de;

$$Q_i = \sum_j \psi_j(p, n) A_j^+(p, n) \quad (4.46)$$

şeklindedir. Hareket denklemi ise şu şekildedir (Ek.6’da ispatı verilmiştir);

$$[H, Q_i^+] = \omega_i Q_i^+ . \quad (4.47)$$

(4.45) denklemi ile tanımlanan özfonksiyonun ortonormalizasyon koşulunu sağlayıp sağlamadığına bakılırsa;

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_i^+] &= \sum_{j,j'} [\psi_j(p, n) A_j^+(p, n), \psi_{j'}(p, n) A_{j'}(p, n)] \\ [Q_i, Q_i^+] &= \sum_{j,j'} \psi_j(p, n) \psi_{j'}(p, n) [A_j^+(p, n), A_{j'}(p, n)] \end{aligned} \quad (4.48)$$

olur. (4.10) denklemi (4.48)’de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_i^+] &= \sum_{j,j'} \psi_j(p, n) \psi_{j'}(p, n) (N_j(n) - N_j(p)) \delta_{jj'} \\ [Q_i, Q_i^+] &= \sum_j (N_j(n) - N_j(p)) \psi_j^2(p, n) \text{ “birinci denklem”} \end{aligned} \quad (4.49)$$

olur. (4.45) denklemi (4.47)’de yerine yazılırsa;

$$Q_i^+ = \sum_j \psi A_j(p, n)$$

$$\sum_j [H, \psi_j(p, n) A_j(p, n)] = \omega_i \sum_j \psi_j(p, n) A_j(p, n) \quad (4.50)$$

olur. Soldan $A_j^+(p, n)$ ile komutasyonuna bakılırsa;

$$\sum_{j,j'} (\psi_j(p, n) [A_{j'}^+(p, n), [H, A_j(p, n)]]) = \omega_i \sum_{j,j'} \psi_j(p, n) [A_{j'}^+(p, n), A_j(p, n)]$$

olur. (4.10) denklemini yerine yazılırsa;

$$\sum_{j,j'} (\psi_j(p, n) [A_{j'}^+(p, n), [H, A_j(p, n)]]) = \omega_i \sum_{j,j'} \psi_j(p, n) (N_j(n) - N_j(p)) \delta_{jj'}$$

olur.

$$\rho_{jj'} \equiv [A_{j'}^+(p, n), [H, A_j(p, n)]] \quad (4.51)$$

olarak tanımlanırsa;

$$\sum_j (\rho_{jj'} \psi_j(p, n)) = \omega_i \psi_j(p, n) (N_j(n) - N_j(p)) \text{“ikinci denklem”} \quad (4.52)$$

olur.

(4.50) denklemi soldan $A_j(p, n)$ ile çarpılırsa;

$$\sum_{j,j'} (\psi_j(p, n) [A_{j'}^+(p, n), [H, A_j(p, n)]]) = \omega_i \sum_{j,j'} \psi_j(p, n) [A_{j'}^+(p, n), A_j(p, n)]$$

olur.

$$\eta_{jj'} \equiv [A_{j'}(p, n), [H, A_j(p, n)]] \quad (4.53)$$

olarak tanımlanırsa ve $[A_{j'}(p, n), A_j(p, n)] = 0$ olduğu gözönünde bulundurulursa;

$$\eta_{jj'} = 0 \quad (4.54)$$

olur.

Şimdi de yukarıda (4.51) denklemiyle tanımlanan $\rho_{jj'}$ çözülürse;

$H = H_{sp} + h$ ifadesi (4.51)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \rho_{jj'} &= [A_{j'}^+(p, n), [(H_{sp} + h), A_j(p, n)]] \\ \rho_{jj'} &= [A_{j'}^+(p, n), [H_{sp}, A_j(p, n)]] + [A_{j'}^+(p, n), [h, A_j(p, n)]] \end{aligned} \quad (4.55)$$

olur. Bu denklem iki kısma ayrılp çözülebilir;

$$\rho_{jj'}^{sp} \equiv [A_{j'}^+(p, n), [H_{sp}, A_j(p, n)]] \quad (4.56)$$

denklemini tek parçacık hamiltoniyenine bağlı kısım,

$$\rho_{jj'}^h \equiv [A_{j'}^+(p, n), [h, A_j(p, n)]] \quad (4.57)$$

denklemini restore etmek için eklenen $\hat{h}$ 'ye bağlı kısım olarak tanımlansın.

Ayrıca;

$$\begin{aligned} [H_{sp}, A_j^+(p, n)] &= (\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) A_j^+(p, n) \\ [H_{sp}, A_j(p, n)] &= -(\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) A_j(p, n) \end{aligned} \quad (4.58)$$

oldukları hatırlanırsa, (4.55) denkleminin birinci kısmı olan (4.56) denkleminde ifade edilen $\rho_{jj'}^{sp}$ yi çözelim.

(4.58) denklemini (4.56)'da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \rho_{jj'}^{sp} &= -[A_{j'}^+(p, n), (\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) A_j(p, n)] \\ \rho_{jj'}^{sp} &= -(\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) [A_{j'}^+(p, n), A_j(p, n)] \end{aligned} \quad (4.59)$$

olur. (4.10) denklemini de (4.59)'da yerine yazılırsa;

$$\rho_{jj'}^{sp} = (\varepsilon_j(p) - \varepsilon_j(n)) (N_j(n) - N_j(p)) \delta_{jj'} \quad (4.60)$$

olur. Şimdide (4.55) denkleminin ikinci kısmı olan (4.57) ile ifade edilen $\rho_{jj'}^h$ yi çözelim.

(4.36) denklemini (4.57)'de yerine yazılırsa;

$$\rho_{jj'}^h = \frac{1}{2\gamma} \sum_{j,j'} E_{j'}(n, p) E_j(n, p) \quad (4.61)$$

$$\left[A_{j'}^+(p, n), \left[(A_{j_1}(p, n) A_{j_2}^+(p, n) + A_{j_1}^+(p, n) A_{j_2}(p, n)), A_j(p, n) \right] \right]$$

olur.

(4.61) denkleminin sağındaki komutasyonun içteki olanı çözümlerse, yani;

$$\left[(A_{j_1} A_{j_2}^+ + A_{j_1}^+ A_{j_2}), A_j \right] = [A_{j_1} A_{j_2}^+, A_j] + [A_{j_1}^+ A_{j_2}, A_j]$$

$$\left[(A_{j_1} A_{j_2}^+ + A_{j_1}^+ A_{j_2}), A_j \right] = A_{j_1} [A_{j_2}^+, A_j] + [A_{j_1}, A_j] A_{j_2}^+ + A_{j_1}^+ [A_{j_2}, A_j] + [A_{j_1}^+, A_j] A_{j_2}$$

Eşitliğin sağı tarafındaki ikinci ve üçüncü komutasyon ifadesi sıfırdır. Birinci ve dördüncü komutasyonlarda da (4.10) denklemi yerine yazılırsa;

$$\left[(A_{j_1} A_{j_2}^+ + A_{j_1}^+ A_{j_2}), A_j \right] = A_{j_1} (N_j(n) - N_j(p)) \delta_{j_2j} + (N_j(n) - N_j(p)) \delta_{j_1j} A_{j_2} \quad (4.62)$$

olur. Bu ifade (4.61) denklemindeki komutasyonda yerine yazılırsa;

$$\left[A_{j'}^+, \left[(A_{j_1} A_{j_2}^+ + A_{j_1}^+ A_{j_2}), A_j \right] \right] = [A_{j'}^+, A_{j_1} (N_j(n) - N_j(p)) \delta_{j_2j} + (N_j(n) - N_j(p)) \delta_{j_1j} A_{j_2}]$$

$$= (N_j(n) - N_j(p)) \delta_{j_2j} [A_{j'}^+, A_{j_1}] + (N_j(n) - N_j(p)) \delta_{j_1j} [A_{j'}^+, A_{j_2}]$$

$$= (N_j(n) - N_j(p))\delta_{j_2j} (N_j(n) - N_j(p))\delta_{jj_1} + \\ (N_j(n) - N_j(p))\delta_{j_1j} (N_j(n) - N_j(p))\delta_{jj_2}$$

olur. j_1, j_2, j, j' üzerinden toplam alınırsa;

$$= 2(N_j(n) - N_j(p))^2 \quad (4.63)$$

olur.

Elde edilen (4.63) denklemi (4.61)'de yerine yazılırsa;

$$\rho_{jj'}^h = \frac{1}{2\gamma} \sum_{j,j'} E_{j'}(n, p) E_j(n, p) 2(N_j(n) - N_j(p))(N_{j'}(n) - N_{j'}(p)) \quad (4.64)$$

olur. (4.60) ve (4.64) denklemleri (4.55)'te yerlerine yazılırsa;

$$\rho_{jj'} = (\varepsilon_j(p) - \varepsilon_j(n))(N_j(n) - N_j(p))\delta_{jj'} + \\ \frac{1}{\gamma} \sum_{j,j'} E_{j'}(n, p) E_j(n, p) (N_j(n) - N_j(p))(N_{j'}(n) - N_{j'}(p)) \quad (4.65)$$

olur. (4.65) denklemi “ikinci denklem” olarak adlandırılan (4.52) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \sum_j \psi_j(p, n) \left((\varepsilon_j(p) - \varepsilon_j(n)) (N_j(n) - N_j(p)) \delta_{jj'} + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{\gamma} \sum_{j, j'} E_{j'} E_j (N_j(n) - N_j(p)) (N_{j'}(n) - N_{j'}(p)) \right) \\
& \quad = \omega_i \psi_{j'}(p, n) (N_{j'}(n) - N_{j'}(p))
\end{aligned}$$

olur. $j = j'$ den toplam alınırsa;

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon_{j'}(p) - \varepsilon_{j'}(n)) (N_{j'}(n) - N_{j'}(p)) \psi_{j'}(p, n) + \\
& \quad \frac{E_{j'}}{\gamma} (N_{j'}(n) - N_{j'}(p)) \sum_j E_j (N_j(n) - N_j(p)) \psi_j \\
& \quad = \omega_i \psi_{j'}(p, n) (N_{j'}(n) - N_{j'}(p))
\end{aligned}$$

olur. Burada $\varepsilon_{j'}(p, n) \equiv (\varepsilon_{j'}(p) - \varepsilon_{j'}(n))$ tanımlaması yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \frac{E_{j'}}{\gamma} (N_{j'}(n) - N_{j'}(p)) \sum_j E_j (N_j(n) - N_j(p)) \psi_j(p, n) \\
& \quad = (\omega_i - \varepsilon_{j'}(p, n)) \psi_{j'}(p, n) (N_{j'}(n) - N_{j'}(p))
\end{aligned}$$

$$\frac{E_{j'}(n, p)}{\gamma} \sum_j E_j(n, p) (N_j(n) - N_j(p)) \psi_j(p, n) = (\omega_i - \varepsilon_{j'}(p, n)) \psi_{j'}(p, n)$$

$$\psi_{j'}(p, n) = \frac{E_{j'}(n, p)}{\gamma(\omega_i - \varepsilon_{j'}(p, n))} \sum_j E_j(n, p) (N_j(n) - N_j(p)) \psi_j(p, n) \quad (4.66)$$

olur.

$$X \equiv \sum_j E_j(n, p) (N_j(n) - N_j(p)) \psi_j(p, n) \quad (4.67)$$

tanımlaması yapılırsa;

$$\psi_j(p, n) = \frac{1}{\gamma} \frac{E_j(n, p)}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))} X \quad (4.68)$$

olur. (4.68) denklemi, (4.67)'de yerine yazılırsa;

$$X = \frac{1}{\gamma} \sum_j \frac{E_j^2(n, p) (N_j(n) - N_j(p))}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))} X \quad (4.69)$$

elde edilir. Bu denklem “seküler denklem”dir. Bu denklemin katsayıları sıfıra eşitlenirse;

$$\gamma - \sum_j \frac{E_j^2(n, p) (N_j(n) - N_j(p))}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))} = 0 \quad (4.70)$$

olur. (4.41) denklemi (4.70)'de yerine yazılırsa;

$$\sum_j \left(E_j(n, p) \langle j, p \| j, n \rangle (N_j(n) - N_j(p)) - \frac{E_j^2(n, p) (N_j(n) - N_j(p))}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))} \right) = 0$$

$$\sum_j E_j(n, p) \langle j, p \| j, n \rangle (N_j(n) - N_j(p)) (\omega_i - \varepsilon_j(p, n)) -$$

$$E_j^2(n, p) (N_j(n) - N_j(p)) \left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))} \right) = 0$$

$$\sum_j E_j(n, p) (\omega_i \langle j, p \| j, n \rangle - \langle j, p \| j, n \rangle \varepsilon_j(p, n) - E_j(n, p))$$

$$(N_j(n) - N_j(p)) \left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))} \right) = 0 \quad (4.71)$$

olur.

Daha önce $\sum_j E_j(n, p) \equiv \left(\sum_j (\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) \langle j, p \| j, n \rangle + V_{np} \right)$ şeklinde

tanımlanmıştı. Bu yerine yazılırsa;

$$\sum_j E_j(n, p) (\omega_i \langle j, p \| j, n \rangle - \langle j, p \| j, n \rangle \varepsilon_j(p, n) -$$

$$((\varepsilon_j(n) - \varepsilon_j(p)) \langle j, p \| j, n \rangle + V_{np})) (N_j(n) - N_j(p)) \left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))} \right) = 0$$

$$\sum_j E_j(n, p) (\omega_i \langle j, p \| j, n \rangle - \langle j, p \| j, n \rangle \varepsilon_j(p, n) -$$

$$(-\varepsilon_j(p, n) \langle j, p \| j, n \rangle + V_{np})) (N_j(n) - N_j(p)) \left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))} \right) = 0$$

$$\sum_j \left(\frac{E_j(n, p) (\omega_i \langle j, p \| j, n \rangle - V_{np}) (N_j(n) - N_j(p))}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))} \right) = 0 \quad (4.72)$$

olarak elde edilir.

Normalizasyon koşuluna bakılacak olursa, (4.49) denklemden;

$$[Q_i, Q_i^+] = \sum_j (N_j(n) - N_j(p)) \mu_j^2(p, n)$$

olduğu bilinmektedir. $[Q_i, Q_i^+] = \delta_{ij}$ olması için;

$$\sum_j (N_j(n) - N_j(p)) \mu_j^2(p, n) = 1 \quad (4.73)$$

olmalı. (4.68) denklemi (4.73)'de yerine yazılırsa;

$$\sum_j (N_j(n) - N_j(p)) \frac{E_j^2(n, p)}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))^2} \frac{X^2}{\gamma^2} = 1 \quad (4.74)$$

olur.

$$Z(\omega_i) \equiv \frac{E_j^2(n, p)}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))^2} (N_j(n) - N_j(p)) \quad (4.75)$$

tanımlaması yapılırsa;

$$Z(\omega_i) \left(\frac{X}{\gamma} \right)^2 = 1 \quad (4.76)$$

olur. Bu denklemden hareketle;

$$\frac{X}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{Z(\omega_i)}} \quad (4.77)$$

olur. Bu denklem de (4.68)'de yerine yazılırsa;

$$\psi_j(p, n) = \frac{E_j(n, p)}{(\omega_i - \varepsilon_j(p, n))} \frac{1}{\sqrt{Z(\omega_i)}} \quad (4.78)$$

olarak elde edilir.

4.3 Kuazi-parçacık Bazında Pyatov Yöntemi ile Bozulan Simetrinin Restorasyonu

β^- geçişine neden olan T_- operatörü parçacık tasvirinde yazılırsa (Bu operatörün elde edilişi Ek.2'de verilmiştir);

$$T_- = \sum_{\substack{m_p, m_n \\ j_p, j_n}} \langle j_p m_p | t_- | j_n m_n \rangle a_{j_p m_p}^+ a_{j_n m_n} \quad (4.79)$$

şeklinde olur. Wigner-Eckart teoremi kullanılarak bu operatör şu şekilde yazılabilir;

$$T_- = \sum_{\substack{m_p, m_n \\ j_p, j_n}} \frac{\langle j_p \| j_n \rangle \langle j_n m_n 00 | j_p m_n \rangle}{\sqrt{2j_p + 1}} a_{j_p m_p}^+ a_{j_n m_n} . \quad (4.80)$$

Buradaki Clebsh-Gordon katsayısı $\langle j_n m_n 00 | j_p m_n \rangle = 1$ dir.

Wigner-Eckart Teoremi şu şekildedir (Wong , 1998);

$$\langle JM | T_{kq} | J'M' \rangle = (-1)^{2k} \frac{\langle J'M' kq | JM \rangle}{\sqrt{2J+1}} \langle J \| T_k \| J' \rangle .$$

Bogolyubov Dönüşümleri (Nilsson and Ragnarsson , 1993);

$$\begin{aligned} a_{jm}^+ &= U_j \alpha_{jm}^+ + (-1)^{j-m} V_j \alpha_{j-m} \\ a_{jm} &= U_j \alpha_{jm} + (-1)^{j-m} V_j \alpha_{j-m}^+ \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu dönüşümler uygulanarak (4.80) numaralı denklem şu şekilde yazılabilir;

$$\begin{aligned} T_- = \sum_{\substack{m_p, m_n \\ j_p, j_n}} \frac{\langle j_p \| j_n \rangle}{\sqrt{2j_p + 1}} & \left[U_{j_p} \alpha_{j_p m_p}^+ + (-1)^{j_p - m_p} V_{j_p} \alpha_{j_p - m_p} \right] \\ & \left[U_{j_n} \alpha_{j_n m_n} + (-1)^{j_n - m_n} V_{j_n} \alpha_{j_n - m_n}^+ \right] \end{aligned}$$

$$T_- = \sum_{\substack{m_p, m_n \\ j_p, j_n}} \frac{\langle j_p \| j_n \rangle}{\sqrt{2j_p + 1}} \left(U_{j_p} U_{j_n} \alpha_{j_p m_p}^+ \alpha_{j_n m_n} + (-1)^{j_n - m_n} U_{j_p} V_{j_n} \alpha_{j_p m_p}^+ \alpha_{j_n - m_n}^+ \right. \\ \left. + (-1)^{j_p - m_p} U_{j_n} V_{j_p} \alpha_{j_p - m_p} \alpha_{j_n m_n} + (-1)^{j_p - m_p + j_n - m_n} V_{j_p} V_{j_n} \alpha_{j_p - m_p} \alpha_{j_n - m_n}^+ \right) \quad (4.81)$$

(4.81) numaralı denklemde parantez içindeki 1. ve 4. terimler daha sonra işimize yaramayacağı için şimdiden çıkarılabilir. Buna kuazibozon yaklaşımı (Soloviev, 1976) denir. Burada çift-çift çekirdekler inceleneceği için bunlara gerek yoktur. Bu durumda;

$$T_- = \sum \langle j_p \| j_n \rangle \left(U_{j_p} V_{j_n} \sum_{m_p, m_n} \frac{(-1)^{j_n - m_n} \alpha_{j_p m_p}^+ \alpha_{j_n - m_n}^+}{\sqrt{2j_p + 1}} + \right. \\ \left. U_{j_n} V_{j_p} \sum_{m_p, m_n} \frac{(-1)^{j_p - m_p} \alpha_{j_p - m_p} \alpha_{j_n m_n}}{\sqrt{2j_p + 1}} \right)$$

$$T_- = \sum \langle j_p \| j_n \rangle \left(U_{j_p} V_{j_n} \frac{1}{\sqrt{2j_p + 1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_n - m_n} \alpha_{j_p m_p}^+ \alpha_{j_n - m_n}^+ \right. \\ \left. + U_{j_n} V_{j_p} \frac{1}{\sqrt{2j_p + 1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_p - m_p} \alpha_{j_p - m_p} \alpha_{j_n m_n} \right)$$

$$T_- = \sum \langle j_p \| j_n \rangle U_{j_p} V_{j_n} \frac{1}{\sqrt{2j_p + 1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_n - m_n} \alpha_{j_p m_p}^+ \alpha_{j_n - m_n}^+ \\ + \sum \langle j_p \| j_n \rangle U_{j_n} V_{j_p} \frac{1}{\sqrt{2j_p + 1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_p - m_p} \alpha_{j_p - m_p} \alpha_{j_n m_n} \quad (4.82)$$

olur. Bu denklemde şu şekilde kısaltmalar yapılabilir;

$$\begin{aligned}
 b_{np} &\equiv U_{j_p} V_{j_n} \langle j_p \| j_n \rangle = U_p V_n \langle j_p \| j_n \rangle \\
 \bar{b}_{np} &\equiv U_{j_n} V_{j_p} \langle j_p \| j_n \rangle = U_n V_p \langle j_p \| j_n \rangle \\
 A_{np}^+ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2j_p + 1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_n - m_n} \alpha_{j_p m_p}^+ \alpha_{j_n - m_n}^+ \\
 A_{np} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2j_p + 1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_p - m_p} \alpha_{j_p - m_p} \alpha_{j_n m_n}
 \end{aligned}$$

Yazılan bu A_{np}^+ ve A_{np} 'ye sırasıyla nötron-proton üretme ve yoketme bozon operatörleri (Soloviev, 1976) adı verilir (Ek.3'te bu operatörlerin elde edilişi verilmiştir). Bunlara göre (4.82) numaralı denklem;

$$T_- = \sum_{np} (b_{np} A_{np}^+ + \bar{b}_{np} A_{np}) \quad (4.83)$$

olarak yazılır.

Ayrıca bozon operatörlerinin komutasyonları (Soloviev, 1976);

$$[A_{n_1 p_1}, A_{n_2 p_2}^+] = \delta_{n_1 n_2} \delta_{p_1 p_2}, \quad [A_{n_1 p_1}, A_{n_2 p_2}] = 0, \quad [A_{n_1 p_1}^+, A_{n_2 p_2}^+] = 0$$

şeklindedir.

$T_- = (T_+)^+$ olduğuna göre β^+ geçişine neden olan T_+ izospin operatörü;

$$T_+ = \sum_{np} (b_{np} A_{np} + \bar{b}_{np} A_{np}^+) \quad (4.84)$$

olur.

Aşağıda verilen tanımlar (Ring and Schuck, 1980; Soloviev, 1976) hatırlanacak olursa;

$$\begin{aligned} T_+ &= \sum_{i=1}^A t_+^i, \quad T_- = \sum_{i=1}^A t_-^i, \quad T_z = \sum_{i=1}^A t_z^i, \\ T_+ &= T_x + iT_y, \quad T_- = T_x - iT_y, \\ T_- &= (T_+)^+, \quad T_+ = (T_-)^+, \quad (T^\rho)^+ = \rho T^\rho \end{aligned}$$

şeklindedir.

T_+ ve T_- hermitik değildirler. Bu nedenle şöyle yazılabilir;

$$T^\rho = \frac{1}{2}(T_+ + \rho T_-) = \begin{cases} T_x & \rho = 1 \\ iT_y & \rho = -1 \end{cases}. \quad (4.85)$$

(4.83) ve (4.84) denklemleri (4.85)'de yerlerine yazılırsa;

$$T^\rho = \frac{1}{2} \sum_{np} ((b_{np} A_{np} + \bar{b}_{np} A_{np}^+) + \rho (b_{np} A_{np}^+ + \bar{b}_{np} A_{np}))$$

$$T^\rho = \frac{1}{2} \sum_{np} ((\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) A_{np}^+ + \rho (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) A_{np})$$

$$T^\rho = \frac{1}{2} \sum_{np} (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) (A_{np}^+ + \rho A_{np})$$

$$B_{np}^\rho \equiv (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) \quad (4.86)$$

tanımlaması yapılırsa,

$$T^\rho = \frac{1}{2} \sum_{np} B_{np}^\rho (A_{np}^+ + \rho A_{np}) \quad (4.87)$$

olur.

Coulomb potansiyeli şu şekilde verilir (Pyatov et al., 1979);

$$V_C = \sum_{i=1}^A v_c(i) \left(\frac{1}{2} - t_z(i) \right).$$

Ayrıca $T_- = \sum_{i=1}^A t_-^i$ ve $[L_z, L_-] = -L_-$ olduğuna göre;

$$[V_C, T_-] = - \sum_{ij} v_c(i) [t_z(i), t_-(j)]$$

$$[V_C, T_-] = \sum_i v_c(i) t_-(i) \quad (4.88)$$

olur. (4.83) denklemi yerine yazılırsa;

$$[V_C, T_-] = \sum_{np} v_c \left(U_p V_n \langle j_p \| j_n \rangle A_{np}^+ + U_n V_p \langle j_p \| j_n \rangle A_{np} \right)$$

$$[V_C, T_-] = \sum_{np} \left(U_p V_n \langle j_p \| v_c \| j_n \rangle A_{np}^+ + U_n V_p \langle j_p \| v_c \| j_n \rangle A_{np} \right)$$

olur.

$$V_{np} \equiv U_p V_n \langle j_p \| v_c \| j_n \rangle$$

$$\bar{V}_{np} \equiv U_n V_p \langle j_p \| v_c \| j_n \rangle$$
(4.89)

şeklinde tanımlanırsa,

$$[V_C, T_-] = \sum_{np} \left(V_{np} A_{np}^+ + \bar{V}_{np} A_{np} \right)$$
(4.90)

olur. Aynı şekilde $T_+ = \sum_{i=1}^A t_+^i$ ve $[L_z, L_+] = L_+$ olduğuna göre;

$$[V_C, T_+] = - \sum_{ij} v_c(i) [t_z(i), t_+(j)] = - \sum_i v_c(i) t_+(i)$$
(4.91)

olur. (4.84) denklemi yerine yazılırsa;

$$[V_C, T_+] = -\sum_i v_c \left(U_p V_n \langle j_p \| j_n \rangle A_{np} + U_n V_p \langle j_p \| j_n \rangle A_{np}^+ \right)$$

$$[V_C, T_+] = -\sum_i \left(U_p V_n \langle j_p \| v_c \| j_n \rangle A_{np} + U_n V_p \langle j_p \| v_c \| j_n \rangle A_{np}^+ \right)$$

$$[V_C, T_+] = -\sum_{np} \left(V_{np} A_{np} + \bar{V}_{np} A_{np}^+ \right) \quad (4.92)$$

olur.

Şimdi de $[V_C, T^\rho] = ?$ bulalım. (4.85) denkleminde T^ρ yerine yazılırsa;

$$[V_C, T^\rho] = \frac{1}{2} [V_C, T_+ + \rho T_-]$$

$$[V_C, T^\rho] = \frac{1}{2} \{ [V_C, T_+] + \rho [V_C, T_-] \}$$

olur. (4.90) ve (4.92) denklemleri yerlerine yazılırsa;

$$[V_C, T^\rho] = \frac{1}{2} \left(-\sum (V_{np} A_{np} + \bar{V}_{np} A_{np}^+) + \rho \sum (V_{np} A_{np}^+ + \bar{V}_{np} A_{np}) \right)$$

$$[V_C, T^\rho] = \frac{1}{2} \sum_{np} \left(-V_{np} A_{np} - \bar{V}_{np} A_{np}^+ + \rho V_{np} A_{np}^+ + \rho \bar{V}_{np} A_{np} \right)$$

$$[V_C, T^\rho] = \frac{1}{2} \sum_{np} (\rho V_{np} - \bar{V}_{np}) (A_{np}^+ - \rho A_{np}) \quad (4.93)$$

olur.

Şimdi de $[H_{sqp}, T_-] = ?$ bulalım. Bunun için $[H_{sqp}, A_{np}^+] = \varepsilon_{np} A_{np}^+$ ve $[H_{sqp}, A_{np}] = -\varepsilon_{np} A_{np}$ (Soloviev, 1976) komutasyonları kullanılır.

Hamiltoniyen olarak $H_{sqp} = \sum_{j,\sigma} \varepsilon_{j\sigma} \alpha_{j\sigma}^+ \alpha_{j\sigma}$ alınır (Landau and Lifchitz, 1967) ve (4.83) dekleminde faydalanılarak;

$$\begin{aligned} [H_{sqp}, T_-] &= \sum_{np} [H_{sqp}, (b_{np} A_{np}^+ + \bar{b}_{np} A_{np})] \\ [H_{sqp}, T_-] &= \sum_{np} ([H_{sqp}, b_{np} A_{np}^+] + [H_{sqp}, \bar{b}_{np} A_{np}]) \\ [H_{sqp}, T_-] &= \sum_{np} (b_{np} [H_{sqp}, A_{np}^+] + \bar{b}_{np} [H_{sqp}, A_{np}]) \\ [H_{sqp}, T_-] &= \sum_{np} (b_{np} \varepsilon_{np} A_{np}^+ - \bar{b}_{np} \varepsilon_{np} A_{np}) \\ [H_{sqp}, T_-] &= \sum_{np} \varepsilon_{np} (b_{np} A_{np}^+ - \bar{b}_{np} A_{np}) \end{aligned} \quad (4.94)$$

olarak elde edilir.

$$[H_{sqp}, T_+] = -[H_{sqp}, T_-]^+ \text{ olduğuna göre;}$$

$$[H_{sqp}, T_+] = -\sum_{np} \varepsilon_{np} (b_{np} A_{np} - \bar{b}_{np} A_{np}^+) \quad (4.95)$$

olur.

Bunlar bulduktan sonra şimdi de $[H_{sqp}, T^\rho] = ?$ bulalım. Bunun için (4.85) denkleminde faydalanılırsa;

$$[H_{sqp}, T^\rho] = \frac{1}{2} [H_{sqp}, (T_+ + \rho T_-)]$$

$$[H_{sqp}, T^\rho] = \frac{1}{2} ([H_{sqp}, T_+] + \rho [H_{sqp}, T_-])$$

olur. (4.94) ve (4.95) denklemleri yerlerine konulursa;

$$[H_{sqp}, T^\rho] = \frac{1}{2} \sum_{np} (-\varepsilon_{np} (b_{np} A_{np} - \bar{b}_{np} A_{np}^+) + \rho \varepsilon_{np} (b_{np} A_{np}^+ - \bar{b}_{np} A_{np}))$$

$$[H_{sqp}, T^\rho] = \frac{1}{2} \sum_{np} \varepsilon_{np} (-b_{np} A_{np} + \bar{b}_{np} A_{np}^+ + \rho b_{np} A_{np}^+ - \rho \bar{b}_{np} A_{np})$$

$$[H_{sqp}, T^\rho] = \frac{1}{2} \sum_{np} \varepsilon_{np} ((\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) A_{np}^+ - \rho (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) A_{np})$$

$$[H_{sqp}, T^\rho] = \frac{1}{2} \sum_{np} \varepsilon_{np} ((\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) (A_{np}^+ - \rho A_{np})) \quad (4.96)$$

elde edilir.

Şimdi de $[H_{sqp} - V_C, T^\rho] = ?$ bulalım.

$$[H_{sqp} - V_C, T^\rho] = [H_{sqp}, T^\rho] - [V_C, T^\rho]$$

olur. (4.93) ve (4.96) burada yerlerine yazılırsa;

$$[H_{sqp} - V_C, T^\rho] = \frac{1}{2} \sum_{np} \varepsilon_{np} ((\bar{b}_{np} + \rho b_{np})(A_{np}^+ - \rho A_{np})) - \frac{1}{2} \sum_{np} (\rho V_{np} - \bar{V}_{np})(A_{np}^+ - \rho A_{np})$$

$$[H_{sqp} - V_C, T^\rho] = \frac{1}{2} \sum_{np} ((\varepsilon_{np} (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) - (\rho V_{np} - \bar{V}_{np}))(A_{np}^+ - \rho A_{np}))$$

olur. Burada ,

$$E_{np}^\rho(j) \equiv \frac{1}{2} (\varepsilon_{np} (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) - (\rho V_{np} - \bar{V}_{np})) \quad (4.97)$$

olarak tanımlanırsa;

$$[H_{sqp} - V_C, T^\rho] = \sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np}^+ - \rho A_{np}) \quad (4.98)$$

olur.

Görüldüğü gibi $[H_{sqp} - V_C, T^\rho] \neq 0$ olarak bulunur. Böylece toplam hamiltoniyenin izotopik invaryantlığının bozulduğu gösterilmiştir. Bunu restore etmek için hamiltoniyene ek bir h teriminin eklenmesi gerekir. Bu terim eklenince;

$$[H_{sqp} + h - V_C, T^\rho] = 0$$

olarak elde edilir (Ek.4'te bunun doğruluğu gösterilmiştir).

Pyatov seçtikleri h nin şu şekilde olması gerektiğini öne sürmüştür (Pyatov and Salamov, 1977);

$$h = \sum_{\rho=\pm} \frac{1}{4\gamma_\rho} [H_{sqp} - V_C, T^\rho]^+ [H_{sqp} - V_C, T^\rho] \quad (4.99)$$

$$(4.98) \quad \text{denkleminde} \quad [H_{sqp} - V_C, T^\rho] = \sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np}^+ - \rho A_{np})$$

olarak bulunmuştu.

$$[H_{sqp} - V_C, T^\rho]^+ = \left(\sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np}^+ - \rho A_{np}) \right)^+ \quad (4.100)$$

olur. (4.98) ve (4.100) denklemleri (4.99)'da yerlerine yazılırsa;

$$h = \sum \frac{1}{4\gamma_\rho} (E_{n_1 p_1}^\rho(j) E_{n_2 p_2}^\rho(j) (A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2})) \quad (4.101)$$

olur.

(4.99)'da verilen γ_ρ parametresi aşağıdaki şekildedir (Pyatov and Salamov, 1977) (Ek.5'te elde edilmiştir);

$$\gamma_\rho \equiv \langle 0 | \frac{\rho}{2} [H_{sqp} - V_C, T^\rho] T^\rho | 0 \rangle. \quad (4.102)$$

Komutasyon içindeki ifadeler (4.87) ve (4.98) denklemlerinden alınıp yerlerine yazılırsa;

$$\gamma_\rho = \frac{\rho}{2} \left[\sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np}^+ - \rho A_{np}), \frac{1}{2} \sum_{np} (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) (A_{np}^+ + \rho A_{np}) \right]$$

$$\gamma_\rho = \frac{\rho}{2} \sum_{np} E_{np}^\rho(j) \frac{1}{2} (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) [(A_{np}^+ - \rho A_{np}) (A_{np}^+ + \rho A_{np})]$$

$$\gamma_\rho = \frac{\rho}{4} \sum_{np} E_{np}^\rho(j) (\bar{b}_{np} + \rho b_{np})$$

$$([A_{np}^+, A_{np}^+] + \rho [A_{np}^+, A_{np}] - \rho [A_{np}, A_{np}^+] - \rho^2 [A_{np}, A_{np}])$$

olur. 1.ve 4. terimler komüttür. Buna göre düzenleme yapılırsa;

$$\gamma_{\rho} = \frac{\rho}{4} \sum_{np} E_{np}^{\rho}(j) (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) (-2\rho [A_{np}, A_{np}^{+}])$$

$[A_{np}, A_{np}^{+}] = 1$ olduğuna göre;

$$\gamma_{\rho} = -\frac{\rho^2}{2} \sum_{np} E_{np}^{\rho}(j) (\bar{b}_{np} + \rho b_{np})$$

$$\gamma_{\rho} = -\frac{1}{2} \sum_{np} E_{np}^{\rho}(j) (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) \quad (4.103)$$

olur. Burada;

$$b_{pn}^{\rho}(j) \equiv \frac{1}{2} (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) \quad (4.104)$$

olarak tanımlanırsa;

$$\chi_{\rho} = -\gamma_{\rho} = \sum_{np} b_{pn}^{\rho}(j) E_{np}^{\rho}(j) \quad (4.105)$$

olur. Görüldüğü gibi Pyatov-Salamov'un seçtikleri h teriminin içindeki χ_{ρ} parametresi, diğer modellerdekiler gibi deneyle belirlenmemekte, teoremin içinden kendisi bulunabilmektedir (Pyatov and Salamov, 1977) .

4.4 Kuazi –Parçacık Bazında Restore Edilen Hamiltoniye'nin Özdeğer ve Özvektörlerinin Bulunması

$$Q_i^+ = \sum_{np} (\psi_{np}^i A_{np}^+ - \phi_{np}^i A_{np}) \quad (4.106)$$

Yukarıda yazılan (4.106) numaralı denklem H 'nin özfonksiyonu olarak alınır (Soloviev, 1976). Bu özfonksiyon için H_{sqp} 'nın özfonksiyonlarının süperpozisyonu alınır. A_{np}^+ ve A_{np} , H_{sqp} 'nin özfonksiyonlarıdır.

Hareket denklemi de şu şekilde tanımlanır (Ek.6'da ispatı verilmiştir) (Soloviev, 1976),

$$[H, Q_i^+] = \omega_i Q_i^+ \quad (4.107)$$

Önce (4.106) ile tanımlanan özfonksiyonun ortonormalizasyon koşulunu sağlayıp sağlamadığına bakılırsa;

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_j^+] &= \sum_{np} \sum_{n'p'} [\psi_{np}^i A_{np} - \phi_{np}^i A_{np}^+, \psi_{n'p'}^j A_{n'p'}^+ - \phi_{n'p'}^j A_{n'p'}] \\ [Q_i, Q_j^+] &= \sum_{np} \sum_{n'p'} ([\psi_{np}^i A_{np}, \psi_{n'p'}^j A_{n'p'}^+] - [\psi_{np}^i A_{np}, \phi_{n'p'}^j A_{n'p'}] - \\ &\quad [\phi_{np}^i A_{np}^+, \psi_{n'p'}^j A_{n'p'}^+] + [\phi_{np}^i A_{np}^+, \phi_{n'p'}^j A_{n'p'}]) \end{aligned}$$

$$[Q_i, Q_j^+] = \sum_{np} \sum_{n'p'} (\psi_{np}^i \psi_{n'p'}^i [A_{np}, A_{n'p'}^+] - \psi_{np}^i \phi_{n'p'}^i [A_{np}, A_{n'p'}] - \phi_{np}^i \psi_{n'p'}^i [A_{np}^+, A_{n'p'}^+] + \phi_{np}^i \phi_{n'p'}^i [A_{np}^+, A_{n'p'}])$$

olur. Burada ikinci ve üçüncü komütatörler sıfırdır.

$$[Q_i, Q_j^+] = \sum_{np} \sum_{n'p'} (\psi_{np}^i \psi_{n'p'}^i \delta_{nn'} \delta_{pp'} - \phi_{np}^i \phi_{n'p'}^i \delta_{nn'} \delta_{pp'})$$

$$[Q_i, Q_j^+] = \sum_{np} ((\psi_{np}^i)^2 - (\phi_{np}^i)^2) \delta_{ij} \quad \text{“1. Denklem”} \quad (4.108)$$

olur. Burada ortonormalizasyon şartı $[Q_i, Q_j^+] = \delta_{ij}$ olması için;

$$\sum_{np} ((\psi_{np}^i)^2 - (\phi_{np}^i)^2) = 1 \quad (4.109)$$

olmalıdır. Hareket denklemini veren (4.107)'de (4.106) yerine yazılırsa;

$$\sum_{np} [H, \psi_{np}^i A_{np}^+ - \phi_{np}^i A_{np}] = \omega_i \sum_{np} (\psi_{np}^i A_{np}^+ - \phi_{np}^i A_{np})$$

$$\sum_{np} (\psi_{np}^i [H, A_{np}^+] - \phi_{np}^i [H, A_{np}]) = \omega_i \sum_{np} (\psi_{np}^i A_{np}^+ - \phi_{np}^i A_{np}). \quad (4.110)$$

olur. Soldan $A_{n'p'}$ ile komutasyonuna bakılırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{np} \left(\psi_{np}^i [A_{n'p'}, [H, A_{np}^+]] - \varphi_{np}^i [A_{n'p'}, [H, A_{np}]] \right) \\
= \omega_i \sum_{np} \left(\psi_{np}^i [A_{n'p'}, A_{np}^+] - \varphi_{np}^i [A_{n'p'}, A_{np}] \right)
\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned}
\rho_{n'p'np} &\equiv [A_{n'p'}, [H, A_{np}^+]] \\
\eta_{n'p'np} &\equiv [A_{n'p'}, [H, A_{np}]]
\end{aligned} \tag{4.111}$$

olarak tanımlanırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{np} \left(\psi_{np}^i \rho_{n'p'np} - \varphi_{np}^i \eta_{n'p'np} \right) &= \omega_i \sum_{np} \psi_{np}^i \delta_{n'n} \delta_{p'p} \\
\sum_{np} \left(\rho_{n'p'np} \psi_{np}^i - \eta_{n'p'np} \varphi_{np}^i \right) &= \omega_i \psi_{n'p'}^i \quad \text{“2. Denklem”}
\end{aligned} \tag{4.112}$$

olarak elde edilir.

Şimdi de (4.110) denkleminin soldan $A_{n'p'}^+$ ile komutasyonuna bakılırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{np} \left(\psi_{np}^i [A_{n'p'}^+, [H, A_{np}^+]] - \varphi_{np}^i [A_{n'p'}^+, [H, A_{np}]] \right) \\
= \omega_i \sum_{np} \left(\psi_{np}^i [A_{n'p'}^+, A_{np}^+] - \varphi_{np}^i [A_{n'p'}^+, A_{np}] \right) \\
\sum_{np} \left(\psi_{np}^i [A_{n'p'}^+, [H, A_{np}^+]] - \varphi_{np}^i [A_{n'p'}^+, [H, A_{np}]] \right) = \omega_i \sum_{np} \varphi_{np}^i [A_{n'p'}^+, A_{np}]
\end{aligned}$$

$$\sum_{np} (\psi_{np}^i [A_{n'p'}^+, [H, A_{np}^+]] - \varphi_{np}^i [A_{n'p'}^+, [H, A_{np}]]]) = \omega_i \varphi_{n'p'}^i \quad (4.113)$$

olur. Daha önce;

$\eta_{n'p'np} = [A_{n'p'} [H, A_{np}]]$ olarak tanımlanmıştı. Bunun eşleniğine bakılırsa;

$$\begin{aligned} \eta_{n'p'np}^+ &= [A_{n'p'}^+ [H, A_{np}]]^+ \\ \eta_{n'p'np}^+ &= [[H, A_{np}]^+, A_{n'p'}^+] = [[A_{np}^+, H], A_{n'p'}^+] = -[A_{n'p'}^+, [A_{np}^+, H]] \\ &= -([A_{n'p'}^+, [H, A_{np}^+]]) \\ \eta_{n'p'np}^+ &= [A_{n'p'}^+, [H, A_{np}^+]] \end{aligned}$$

ve sonuç olarak;

$$(\eta_{n'p'np})^+ = \eta_{n'p'np}^+ = [A_{n'p'}^+, [H, A_{np}^+]] \quad (4.114)$$

olur.

Aynısı $\rho_{n'p'np}$ için de yapılırsa;

$$(\rho_{n'p'np})^+ = \rho_{n'p'np}^+ = [A_{n'p'}^+, [H, A_{np}]] \quad (4.115)$$

olur.

(4.114) ve (4.115) denklemleri, (4.113)'de yerlerine yazılırsa;

$$\sum_{np} (\psi_{np}^i \eta_{n'p'np} - \varphi_{np}^i \rho_{n'p'np}) = \omega_i \varphi_{n'p'}^i \quad \text{“3. Denklem”} \quad (4.116)$$

olur.

Şimdi sırasıyla $\rho_{n'p'np}$ ve $\eta_{n'p'np}$ 'yi bulalım. Önce $\rho_{n'p'np}$ 'yi bulalım;

Yukarıda (4.111) denkleminde $\rho_{n'p'np} = [A_{n'p'}, [H, A_{np}^+]]$ olarak tanımlanmıştı. $H = H_{sqp} + h$ olduğuna göre;

$$\rho_{n'p'np} = [A_{n'p'}, [H_{sqp} + h, A_{np}^+]] = [A_{n'p'}, [H_{sqp}, A_{np}^+]] + [A_{n'p'}, [h, A_{np}^+]] \quad (4.117)$$

olur. Burada,

$$\rho_{n'p'np}^{sqp} \equiv [A_{n'p'}, [H_{sqp}, A_{np}^+]]$$

ve

$$\rho_{n'p'np}^h \equiv [A_{n'p'}, [h, A_{np}^+]]$$

(4.118)

olarak tanımlansın. Şimdi sırasıyla bunları bulalım;

$$\rho_{n'p'np}^{sqp} = [A_{n'p'}, [H_{sqp}, A_{np}^+]]$$

$[H_{sqp}, A_{np}^+] = (\varepsilon_n + \varepsilon_p) A_{np}^+$ ve $[H_{sqp}, A_{np}] = -(\varepsilon_n + \varepsilon_p) A_{np}$ oldukları hatırlanırsa (Soloviev, 1976);

$$\begin{aligned}\rho_{n'p'np}^{sqp} &= (\varepsilon_n + \varepsilon_p) [A_{n'p'}, A_{np}^+] \\ \rho_{n'p'np}^{sqp} &= (\varepsilon_n + \varepsilon_p) \delta_{nn'} \delta_{pp'}\end{aligned}\quad (4.119)$$

olur.

(4.118) denkleminde $\rho_{n'p'np}^h = [A_{n'p'}, [h, A_{np}^+]]$ şeklinde tanımlanmıştı. Burada (4.101) denklemini yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\rho_{n'p'np}^h &= \sum_{\substack{n_1 p_1 \\ n_2 p_2 \\ \rho}} \frac{1}{4\gamma_\rho} E_{n_1 p_1}^\rho(j) E_{n_2 p_2}^\rho(j) \\ &\quad [A_{n'p'}, [(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}), A_{np}^+]]\end{aligned}\quad (4.120)$$

olur.

Burada dikkat edilecek olan nokta, eşitliğin solundaki ρ ile eşitliğin sağındaki toplam sembolünün altındaki ρ 'nun aynı olmamasıdır.

Önce eşitliğin sağındaki komutasyondan içteki olanı hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}& [(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}), A_{np}^+] \\ &= [(A_{n_1 p_1} A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_1 p_1} A_{n_2 p_2} - \rho A_{n_1 p_1}^+ A_{n_2 p_2}^+ + \rho^2 A_{n_1 p_1}^+ A_{n_2 p_2}), A_{np}^+]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}) , A_{np}^+ \right] = \\ & = [A_{n_1 p_1} A_{n_2 p_2}^+ , A_{np}^+] - \rho [A_{n_1 p_1} A_{n_2 p_2} , A_{np}^+] - \rho [A_{n_1 p_1}^+ A_{n_2 p_2}^+ , A_{np}^+] + [A_{n_1 p_1}^+ A_{n_2 p_2} , A_{np}^+] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}) , A_{np}^+ \right] \\ & = [A_{n_1 p_1} , A_{np}^+] A_{n_2 p_2}^+ + A_{n_1 p_1} [A_{n_2 p_2}^+ , A_{np}^+] - \rho A_{n_1 p_1} [A_{n_2 p_2} , A_{np}^+] \\ & \quad - \rho [A_{n_1 p_1} , A_{np}^+] A_{n_2 p_2} - \rho A_{n_1 p_1}^+ [A_{n_2 p_2}^+ , A_{np}^+] - \rho [A_{n_1 p_1}^+ , A_{np}^+] A_{n_2 p_2}^+ \\ & \quad + A_{n_1 p_1}^+ [A_{n_2 p_2} , A_{np}^+] + [A_{n_1 p_1}^+ , A_{np}^+] A_{n_2 p_2} \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağındaki 2., 5., 6. ve 8. komutatörler sıfırdır.

$$\begin{aligned} & \left[(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}) , A_{np}^+ \right] \\ & = \delta_{nn_1} \delta_{pp_1} A_{n_2 p_2}^+ - \rho (\delta_{nn_1} \delta_{pp_1} A_{n_2 p_2} + \delta_{nn_2} \delta_{pp_2} A_{n_1 p_1}) + \delta_{nn_2} \delta_{pp_2} A_{n_1 p_1}^+ \end{aligned} \quad (4.121)$$

olur. (4.121) denklemi, (4.120)'deki komutasyon bağıntısında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \left[A_{n'p'} , \left[(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}) , A_{np}^+ \right] \right] \\ & = \left[A_{n'p'} , \left(\delta_{nn_1} \delta_{pp_1} A_{n_2 p_2}^+ - \rho (\delta_{nn_1} \delta_{pp_1} A_{n_2 p_2} + \delta_{nn_2} \delta_{pp_2} A_{n_1 p_1}) + \delta_{nn_2} \delta_{pp_2} A_{n_1 p_1}^+ \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[A_{n'p'} , \left[(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}) , A_{np}^+ \right] \right] = \\ & = \delta_{nn_1} \delta_{pp_1} [A_{n'p'} , A_{n_2 p_2}^+] - \rho (\delta_{nn_1} \delta_{pp_1} [A_{n'p'} , A_{n_2 p_2}] + \\ & \quad + \delta_{nn_2} \delta_{pp_2} [A_{n'p'} , A_{n_1 p_1}]) + \delta_{nn_2} \delta_{pp_2} [A_{n'p'} , A_{n_1 p_1}^+] \end{aligned} \quad (4.122)$$

olur. Buradaki 2. ve 3. komutatörler sıfırdır.

$$\begin{aligned}
& \left[A_{n'p'}, \left[(A_{n_1p_1} - \rho A_{n_1p_1}^+) (A_{n_2p_2}^+ - \rho A_{n_2p_2}^-), A_{np}^+ \right] \right] \\
& = \delta_{nn_1} \delta_{pp_1} \delta_{n'n_2} \delta_{p'p_2} + \delta_{nn_2} \delta_{pp_2} \delta_{n'n_1} \delta_{p'p_1}
\end{aligned} \tag{4.123}$$

elde edilir. (4.123) denklemi, (4.120)'de yerine yazılırsa;

$$\rho_{n'p'np}^h = \sum_{\substack{n_1p_1 \\ n_2p_2 \\ \rho}} \frac{1}{4\gamma_\rho} E_{n_1p_1}^\rho(j) E_{n_2p_2}^\rho(j) (\delta_{nn_1} \delta_{pp_1} \delta_{n'n_2} \delta_{p'p_2} + \delta_{nn_2} \delta_{pp_2} \delta_{n'n_1} \delta_{p'p_1})$$

olur ve n_1, n_2, p_1, p_2 üzerinden toplam alınırsa;

$$\begin{aligned}
\rho_{n'p'np}^h &= \sum_{\rho} \frac{1}{4\gamma_\rho} (E_{np}^\rho E_{n'p'}^\rho + E_{n'p'}^\rho E_{np}^\rho) \\
\rho_{n'p'np}^h &= \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_\rho} (E_{np}^\rho E_{n'p'}^\rho)
\end{aligned} \tag{4.124}$$

olur. (4.119) ve (4.124), (4.117)'de yerine yazılırsa;

$$\rho_{n'p'np} = \varepsilon_{np} \delta_{nn'} \delta_{pp'} + \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_\rho} (E_{np}^\rho E_{n'p'}^\rho) \tag{4.125}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde şimdi de $\eta_{n'p'np}$ bulunursa;

(4.111) denkleminden $\eta_{n'p'np} = [A_{n'p'}, [H, A_{np}]]$ ve $H = H_{sqp} + h$ oldukları hatırlanırsa;

$$\eta_{n'p'np} = [A_{n'p'} [H_{sqp} + h, A_{np}]] = [A_{n'p'} [H_{sqp}, A_{np}]] + [A_{n'p'} [h, A_{np}]] \quad (4.126)$$

olur. Burada;

$$\eta_{n'p'np}^{sqp} \equiv [A_{n'p'} [H_{sqp}, A_{np}]] \quad (4.127)$$

ve

$$\eta_{n'p'np}^h \equiv [A_{n'p'} [h, A_{np}]]$$

olarak tanımlansın. Şimdi sırasıyla (4.127) denklemindeki ifadeleri bulalım;

$$\eta_{n'p'np}^{sqp} = [A_{n'p'} [H_{sqp}, A_{np}]] \text{ ve } [H_{sqp}, A_{np}] = -\varepsilon_{np} A_{np} \text{ olduğuna göre;}$$

$$\eta_{n'p'np}^{sqp} = -\varepsilon_{np} [A_{n'p'}, A_{np}] = 0 \quad (4.128)$$

olur.

Şimdi de $\eta_{n'p'np}^h = [A_{n'p'} [h, A_{np}]]$ 'yi hesaplayalım. h 'nin değeri (4.101)'den alınıp yerine yazılırsa;

$$\eta_{n'p'np}^h = \sum_{\substack{n_1 p_1 \\ n_2 p_2 \\ \rho}} \frac{1}{4\gamma_\rho} E_{n_1 p_1}^\rho(j) E_{n_2 p_2}^\rho(j) [A_{n'p'}, [(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}) , A_{np}]] \quad (4.129)$$

olur. Önce eşitliğin sağındaki komutasyondan içte olanı hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} & \left[(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}) , A_{np} \right] \\ &= \left[(A_{n_1 p_1} A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_1 p_1} A_{n_2 p_2} - \rho A_{n_1 p_1}^+ A_{n_2 p_2}^+ + \rho^2 A_{n_1 p_1}^+ A_{n_2 p_2}) , A_{np} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}) , A_{np} \right] \\ &= [A_{n_1 p_1} A_{n_2 p_2}^+ , A_{np}] - \rho [A_{n_1 p_1} A_{n_2 p_2} , A_{np}] - \rho [A_{n_1 p_1}^+ A_{n_2 p_2}^+ , A_{np}] + [A_{n_1 p_1}^+ A_{n_2 p_2} , A_{np}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}) , A_{np} \right] \\ &= [A_{n_1 p_1} , A_{np}] A_{n_2 p_2}^+ + A_{n_1 p_1} [A_{n_2 p_2}^+ , A_{np}] - \rho A_{n_1 p_1} [A_{n_2 p_2} , A_{np}] \\ &\quad - \rho [A_{n_1 p_1} , A_{np}] A_{n_2 p_2} - \rho A_{n_1 p_1}^+ [A_{n_2 p_2}^+ , A_{np}] - \rho [A_{n_1 p_1}^+ , A_{np}] A_{n_2 p_2}^+ \\ &\quad + A_{n_1 p_1}^+ [A_{n_2 p_2} , A_{np}] + [A_{n_1 p_1}^+ , A_{np}] A_{n_2 p_2} \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağındaki 1., 3., 4. ve 7. komütatörler sıfırdır.

$$\begin{aligned} \left[(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}) , A_{np} \right] &= -\delta_{nn_2} \delta_{pp_2} A_{n_1 p_1} + \rho \delta_{nn_2} \delta_{pp_2} A_{n_1 p_1}^+ \\ &\quad + \rho \delta_{nn_1} \delta_{pp_1} A_{n_2 p_2}^+ - \delta_{nn_1} \delta_{pp_1} A_{n_2 p_2} \end{aligned} \quad (4.130)$$

olur. (4.130) denklemi, (4.129)'daki komutasyon bağıntısında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \left[A_{n'p'} , \left[(A_{n_1 p_1} - \rho A_{n_1 p_1}^+) (A_{n_2 p_2}^+ - \rho A_{n_2 p_2}) , A_{np} \right] \right] = \\ &= \left[A_{n'p'} , \left(-\delta_{nn_2} \delta_{pp_2} A_{n_1 p_1} + \rho \delta_{nn_2} \delta_{pp_2} A_{n_1 p_1}^+ + \rho \delta_{nn_1} \delta_{pp_1} A_{n_2 p_2}^+ - \delta_{nn_1} \delta_{pp_1} A_{n_2 p_2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [A_{n'p'}, [(A_{n_1p_1} - \rho A_{n_1p_1}^+) (A_{n_2p_2}^+ - \rho A_{n_2p_2}) , A_{np}]] = \\
& = -\delta_{nn_2} \delta_{pp_2} [A_{n'p'}, A_{n_1p_1}] + \rho \delta_{nn_2} \delta_{pp_2} [A_{n'p'}, A_{n_1p_1}^+] + \rho \delta_{nn_1} \delta_{pp_1} [A_{n'p'}, A_{n_2p_2}^+] \\
& \quad - \delta_{nn_1} \delta_{pp_1} [A_{n'p'}, A_{n_2p_2}]
\end{aligned}$$

olur. Buradaki 1. ve 4. komütatörler sıfırdır.

$$\begin{aligned}
& [A_{n'p'}, [(A_{n_1p_1} - \rho A_{n_1p_1}^+) (A_{n_2p_2}^+ - \rho A_{n_2p_2}) , A_{np}^+]] \\
& = \rho (\delta_{nn_2} \delta_{pp_2} \delta_{n'n_1} \delta_{p'p_1} + \delta_{nn_1} \delta_{pp_1} \delta_{n'n_2} \delta_{p'p_2})
\end{aligned} \tag{4.131}$$

olur. (4.131) denklemi, (4.129)' da yerine yazılırsa;

$$\eta_{n'p'np}^h = \sum_{\substack{n_1p_1 \\ n_2p_2 \\ \rho}} \frac{1}{4\gamma_\rho} E_{n_1p_1}^\rho(j) E_{n_2p_2}^\rho(j) \rho (\delta_{nn_2} \delta_{pp_2} \delta_{n'n_1} \delta_{p'p_1} + \delta_{nn_1} \delta_{pp_1} \delta_{n'n_2} \delta_{p'p_2})$$

olur ve n_1, n_2, p_1, p_2 üzerinden toplam alınırsa;

$$\eta_{n'p'np}^h = \sum_{\rho} \frac{\rho}{4\gamma_\rho} (E_{np}^\rho E_{n'p'}^\rho + E_{n'p'}^\rho E_{np}^\rho)$$

$$\eta_{n'p'np}^h = \sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_\rho} (E_{np}^\rho E_{n'p'}^\rho) \tag{4.132}$$

olur. (4.128) ve (4.132) denklemleri, (4.126)'da yerine yazılırsa;

$$\eta_{n'p'np} = \sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_\rho} (E_{np}^\rho E_{n'p'}^\rho) \tag{4.133}$$

olarak bulunur.

Şimdi de (4.106) numaralı denklem ile tanımlanan H 'nin özfonksiyonu içinde olan ψ_{np}^i ve φ_{np}^i 'yi bulalım. Bunun için daha önce bulunan ve “2. Denklem” adı verilen (4.112) numaralı denklemde az önce elde edilen (4.125). ve (4.133). denklemler yerlerine yazılırsa;

$$\sum_{np} (\rho_{n'p'np} \psi_{np}^i - \eta_{n'p'np} \varphi_{np}^i) = \omega_i \psi_{n'p'}^i \quad \text{“2. Denklem”}$$

$$\sum_{np} \left(\psi_{np}^i \left(\varepsilon_{np} \delta_{nn'} \delta_{pp'} + \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} (E_{np}^{\rho} E_{n'p'}^{\rho}) \right) - \varphi_{np}^i \sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_{\rho}} (E_{np}^{\rho} E_{n'p'}^{\rho}) \right) = \omega_i \psi_{n'p'}^i$$

olur. $n = n'$ ve $p = p'$ üzerinden toplam alınırsa;

$$\varepsilon_{n'p'} \psi_{n'p'}^i + \sum_{np} \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} E_{n'p'}^{\rho} \psi_{np}^i - \rho \varphi_{np}^i \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} E_{n'p'}^{\rho} = \omega_i \psi_{n'p'}^i$$

$$\varepsilon_{n'p'} \psi_{n'p'}^i + \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} E_{n'p'}^{\rho} \sum_{np} E_{np}^{\rho} (\psi_{np}^i - \rho \varphi_{np}^i) = \omega_i \psi_{n'p'}^i$$

olur. Burada;

$$\Gamma_i^{\rho} \equiv \sum_{np} E_{np}^{\rho} (\psi_{np}^i - \rho \varphi_{np}^i) \quad (4.134)$$

olarak tanımlanırsa;

$$\sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} E_{n'p'}^{\rho} \Gamma_i^{\rho} = (\omega_i - \varepsilon_{n'p'}) \psi_{n'p'}^i$$

$$\psi_{n'p'}^i = \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} \frac{E_{n'p'}^{\rho}}{(\omega_i - \varepsilon_{n'p'})} \Gamma_i^{\rho} \quad (4.135)$$

olur. Fakat burada dikkat edilmesi gereken nokta; Γ_i^{ρ} 'nin içinde ρ olduğu ve bulunan (4.135) numaralı denklemde de ρ üzerinden toplam alındığıdır. Bu ρ ların karışmaması için toplam ρ' den alınırsa;

$$\psi_{n'p'}^i = \sum_{\rho'} \frac{1}{2\gamma_{\rho'}} \frac{E_{n'p'}^{\rho'}}{(\omega_i - \varepsilon_{n'p'})} \Gamma_i^{\rho'} \quad (4.136)$$

olur.

Şimdide “3. Denklem” olarak adlandırılan (4.116). denklemden φ_{np}^i ’yi bulalım. Bunun için (4.116). denklemde (4.125). ve (4.133). denklemler yerlerine yazılırsa;

$$\sum_{np} (\psi_{np}^i \eta_{n'p'np} - \varphi_{np}^i \rho_{n'p'np}) = \omega_i \varphi_{n'p'}^i \quad \text{“3. Denklem”}$$

$$\sum_{np} \left(\psi_{np}^i \left(\sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} E_{n'p'}^{\rho} \right) - \varphi_{np}^i \left(\varepsilon_{np} \delta_{nn'} \delta_{pp'} + \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} (E_{np}^{\rho} E_{n'p'}^{\rho}) \right) \right) = \omega_i \varphi_{n'p'}^i$$

olur. $n = n'$ ve $p = p'$ üzerinden toplam alınırsa;

$$-\varepsilon_{n'p'}\phi_{n'p'}^i + \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} E_{n'p'}^{\rho} \sum_{np} E_{np}^{\rho} (\rho \psi_{np}^i - \phi_{np}^i) = \omega_i \phi_{n'p'}^i$$

$$-\varepsilon_{n'p'}\phi_{n'p'}^i + \sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_{\rho}} E_{n'p'}^{\rho} \sum_{np} E_{np}^{\rho} (\psi_{np}^i - \rho \phi_{np}^i) = \omega_i \phi_{n'p'}^i$$

olur. (4.134)'te yapılan tanım kullanılırsa;

$$\sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_{\rho}} E_{n'p'}^{\rho} \Gamma_i^{\rho} = (\omega_i + \varepsilon_{n'p'}) \phi_{n'p'}^i$$

$$\phi_{n'p'}^i = \sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_{\rho}} \frac{E_{n'p'}^{\rho}}{(\omega_i + \varepsilon_{n'p'})} \Gamma_i^{\rho} \quad (4.137)$$

olur. Γ_i^{ρ} 'nin içindeki ρ ile toplamdaki ρ 'nun karışmaması için;

$$\phi_{n'p'}^i = \sum_{\rho'} \frac{\rho'}{2\gamma_{\rho'}} \frac{E_{n'p'}^{\rho'}}{(\omega_i + \varepsilon_{n'p'})} \Gamma_i^{\rho'} \quad (4.138)$$

olarak yazılabilir.

Elde edilen (4.136) denklemi ve (4.138) denklemi (4.134)'te yerine yazılırsa;

$$\Gamma_i^\rho = \sum_{np} E_{np}^\rho \left(\sum_{\rho'} \left(\frac{1}{2\gamma_{\rho'}} \frac{E_{np}^{\rho'}}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} \Gamma_i^{\rho'} - \frac{\rho\rho'}{2\gamma_{\rho'}} \frac{E_{np}^{\rho'}}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \Gamma_i^{\rho'} \right) \right) \quad (4.139)$$

olur. Eşitliğin sağındaki ifadeyi sola geçirilip sonuç sıfıra eşitlenirse;

$$\sum_{\rho'} \Gamma_i^{\rho'} \delta_{\rho\rho'} - \sum_{np} E_{np}^\rho \left(\sum_{\rho'} \frac{E_{np}^{\rho'}}{2\gamma_{\rho'}} \left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} - \frac{\rho\rho'}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \right) \Gamma_i^{\rho'} \right) = 0$$

$$\sum_{\rho'} \Gamma_i^{\rho'} \left(\delta_{\rho\rho'} - \sum_{np} \frac{E_{np}^\rho E_{np}^{\rho'}}{2\gamma_{\rho'}} \left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} - \frac{\rho\rho'}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \right) \right) = 0 \quad (4.140)$$

olur. Burada $\rho = \mp$ ve $\rho' = \mp$ değerlerini alır. Buna göre $\rho = +$ için $\rho' = +$ ve $-$ değerleri için (4.140). denklem şu şekilde yazılır;

$$\Gamma_i^+ \left(1 - \sum_{np} \frac{(E_{np}^+)^2}{2\gamma_+} \left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} - \frac{1}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \right) \right) -$$

$$\Gamma_i^- \sum_{np} \frac{E_{np}^+ E_{np}^-}{2\gamma_-} \left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} + \frac{1}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \right) = 0. \quad (4.141)$$

$\rho = -$ için $\rho' = -$ ve $+$ değerleri için (4.140). denklem şu şekilde yazılır;

$$\Gamma_i^- \left(1 - \sum_{np} \frac{(E_{np}^-)^2}{2\gamma_-} \left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} - \frac{1}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \right) \right) - \Gamma_i^+ \sum_{np} \frac{E_{np}^- E_{np}^+}{2\gamma_+} \left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} + \frac{1}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \right) = 0 \quad (4.142)$$

(4.141) ve (4.142) denklemleri düzenlenirse;

$$\Gamma_i^+ \left(1 - \sum_{np} \frac{(E_{np}^+)^2}{\gamma_+} \frac{\varepsilon_{np}}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)} \right) - \Gamma_i^- \sum_{np} \frac{E_{np}^+ E_{np}^-}{\gamma_-} \frac{\omega_i}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)} = 0 \quad (4.143)$$

$$- \Gamma_i^+ \sum_{np} \frac{E_{np}^- E_{np}^+}{\gamma_+} \frac{\omega_i}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)} + \Gamma_i^- \left(1 - \sum_{np} \frac{(E_{np}^-)^2}{\gamma_-} \frac{\varepsilon_{np}}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)} \right) = 0 \quad (4.144)$$

elde edilir. (4.143) ve (4.144) denklemlerinden de görüldüğü gibi iki tane sıfıra eşit, lineer denklem elde edilir. Bu denklem sisteminin bir çözümü olabilmesi için katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. Yani (4.143) ve (4.144) denklemleri;

$$\begin{aligned} xa_{11} - ya_{12} &= 0 \\ -xa_{21} + ya_{22} &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde lineer denklemlerdir. Bu sistemin çözümü için;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Öyleyse (4.143) ve (4.144) denklemleri için katsayılar determinanı;

$$\begin{vmatrix} 1 - \sum_{np} \frac{(E_{np}^+)^2}{\gamma_+} \frac{\varepsilon_{np}}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)} & - \sum_{np} \frac{E_{np}^+ E_{np}^-}{\gamma_-} \frac{\omega_i}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)} \\ - \sum_{np} \frac{E_{np}^- E_{np}^+}{\gamma_+} \frac{\omega_i}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)} & 1 - \sum_{np} \frac{(E_{np}^-)^2}{\gamma_-} \frac{\varepsilon_{np}}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.145)$$

olur. Buna “Sekular Denklem” adı verilir. Bu determinantın çözümünden (4.107) denklemi ile verilen hareket denklemindeki ω_i özdeğerleri elde edilir. Bu hesaplamalar bilgisayarda yapılacaktır.

Şimdi daha önce bulunan (4.136) denklemine geri dönülür ve bundan hareketle ψ_{np}^i çözümlenirse;

$$\psi_{np}^i = \sum_{\rho'} \frac{1}{2\gamma_{\rho'}} \frac{E_{np}^{\rho'}}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} \Gamma_i^{\rho'}$$

olur. Burada $\Gamma_i^{\rho'}$ bilinmemektedir.

$$\begin{aligned} \psi_{np}^i &= \frac{1}{2\gamma_+} \frac{E_{np}^+}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} \Gamma_i^+ + \frac{1}{2\gamma_-} \frac{E_{np}^-}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} \Gamma_i^- \\ \psi_{np}^i &= \Gamma_i^+ \left(\frac{1}{2\gamma_+} \frac{E_{np}^+}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} + \frac{1}{2\gamma_-} \frac{E_{np}^-}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} \frac{\Gamma_i^-}{\Gamma_i^+} \right) \end{aligned} \quad (4.146)$$

olur. Şimdi (4.143) denkleminden $\frac{\Gamma_i^-}{\Gamma_i^+}$ ifadesi elde edilirse;

$$\Gamma_i^+ \left(1 - \sum_{np} \frac{(E_{np}^+)^2}{\gamma_+} \frac{\varepsilon_{np}}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)} \right) = \Gamma_i^- \sum_{np} \frac{E_{np}^+ E_{np}^-}{\gamma_-} \frac{\omega_i}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)}$$

$$L(\omega_i) \equiv \frac{\Gamma_i^-}{\Gamma_i^+} = \frac{1 - \sum_{np} \frac{(E_{np}^+)^2}{\gamma_+} \frac{\varepsilon_{np}}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)}}{\sum_{np} \frac{E_{np}^+ E_{np}^-}{\gamma_-} \frac{\omega_i}{(\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2)}} \quad (4.147)$$

olur. (4.147) denklemi (4.146)'da yerine yazılırsa;

$$\psi_{np}^i = \Gamma_i^+ \left(\frac{1}{2\gamma_+} \frac{E_{np}^+}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} + \frac{1}{2\gamma_-} \frac{E_{np}^-}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} L(\omega_i) \right) \quad (4.148)$$

olarak elde edilir.

Aynı şekilde (4.138)'den φ_{np}^i çözümlürse;

$$\varphi_{np}^i = \sum_{\rho} \frac{\rho'}{2\gamma_{\rho'}} \frac{E_{np}^{\rho'}}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \Gamma_i^{\rho'}$$

$$\varphi_{np}^i = \frac{1}{2\gamma_+} \frac{E_{np}^+}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \Gamma_i^+ - \frac{1}{2\gamma_-} \frac{E_{np}^-}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \Gamma_i^-$$

$$\varphi_{np}^i = \Gamma_i^+ \left(\frac{1}{2\gamma_+} \frac{E_{np}^+}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} - \frac{1}{2\gamma_-} \frac{E_{np}^-}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \frac{\Gamma_i^-}{\Gamma_i^+} \right) \quad (4.149)$$

olur. (4.147) deki tanım (4.149)'da yerine yazılırsa;

$$\varphi_{np}^i = \Gamma_i^+ \left(\frac{1}{2\gamma_+} \frac{E_{np}^+}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} - \frac{1}{2\gamma_-} \frac{E_{np}^-}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} L(\omega_i) \right) \quad (4.150)$$

olur.

(4.148) ve (4.150) denklemleri artık tek bilinmeyenli birer denklem olmuştur. Önceden hem Γ_i^+ hem de Γ_i^- bilinmiyordu. Şimdi tek bilinmeyen Γ_i^+ 'dir. Γ_i^+ 'yi bulmak için daha önce “1. Denklem” olarak adlandırılan (4.109) denklemini kullanılır. Bu denklem;

$$\sum_{np} \left((\psi_{np}^i)^2 - (\varphi_{np}^i)^2 \right) = 1$$

şeklindeydi. Bu denklemde (4.148) ve (4.150) yerlerine yazılırsa;

$$\sum_{np} \left(\left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} \left(\frac{E_{np}^+}{2\gamma_+} + \frac{E_{np}^-}{2\gamma_-} L(\omega_i) \right) \right)^2 - \left(\frac{1}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \left(\frac{E_{np}^+}{2\gamma_+} - \frac{E_{np}^-}{2\gamma_-} L(\omega_i) \right) \right)^2 \right) (\Gamma_i^+)^2 = 1 \quad (4.151)$$

olur. (4.151)'de şöyle bir tanımlama yapılırsa;

$$Z(\omega_i) \equiv \sum_{np} \left(\left(\frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} \left(\frac{E_{np}^+}{2\gamma_+} + \frac{E_{np}^-}{2\gamma_-} L(\omega_i) \right) \right)^2 - \left(\frac{1}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \left(\frac{E_{np}^+}{2\gamma_+} - \frac{E_{np}^-}{2\gamma_-} L(\omega_i) \right) \right)^2 \right) \quad (4.152)$$

olur. Bu durumda (4.151) denklemi;

$$Z(\omega_i) (\Gamma_i^+)^2 = 1 \quad (4.153)$$

olur ve buradan;

$$\Gamma_i^+ = \frac{1}{\sqrt{Z(\omega_i)}} \quad (4.154)$$

olarak elde edilir.

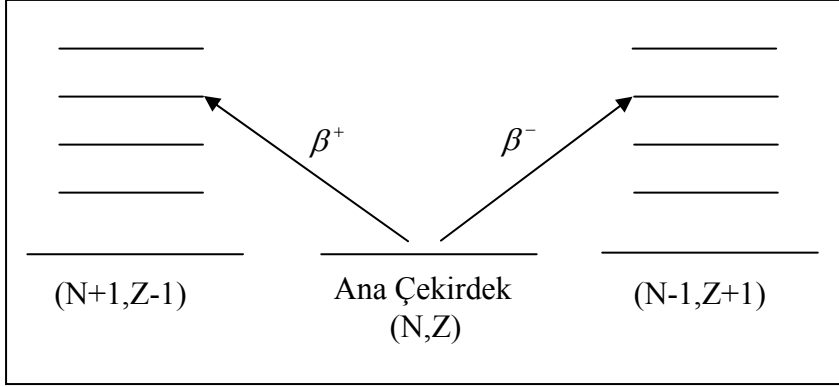
Bulunan bu (4.154) denklemi (4.148) ve (4.150)'de yerlerine yazılırsa;

$$\psi_{np}^i = \frac{1}{\sqrt{Z(\omega_i)}} \frac{1}{(\omega_i - \varepsilon_{np})} \left(\frac{E_{np}^+}{2\gamma_+} + \frac{E_{np}^-}{2\gamma_-} L(\omega_i) \right) \quad (4.155)$$

$$\phi_{np}^i = \frac{1}{\sqrt{Z(\omega_i)}} \frac{1}{(\omega_i + \varepsilon_{np})} \left(\frac{E_{np}^+}{2\gamma_+} - \frac{E_{np}^-}{2\gamma_-} L(\omega_i) \right) \quad (4.156)$$

olur.

4.5 Matris Elemanlarının Hesaplanması



Şekil 4.1 Ana çekirdekten yapılan β^- ve β^+ geçişleri.

Şekil 4.1'den görüldüğü gibi ana çekirdekten sağ tarafa olan β^- geçişleri $Q_i^+|0\rangle$ ile ana çekirdekten sol tarafa olan β^+ geçişleri $Q_i|0\rangle$ ile temsil edilir.

β^- geçişi şu şekilde ifade edilir;

$$T_-|0\rangle = M_{\beta^-}^i Q_i^+|0\rangle \quad (4.157)$$

Buradaki $M_{\beta^-}^i$, (N,Z) ana çekirdeğinin taban seviyesinden (N-1,Z+1) çekirdeğinin seviyelerindeki izobar 0^+ seviyelerine β^- Fermi geçiş matris elemanıdır. (4.157) denkleminin soldan $\langle 0|Q_i$ ile komutasyonuna bakılırsa;

$$\langle 0|Q_i T_-|0\rangle = M_{\beta^-}^i \langle 0|Q_i Q_i^+|0\rangle$$

olur.

$Q_i |0\rangle = 0$ olduğu için yukarıdaki ifadeye bunu içeren terimler eklenebilir. Sonuç değişmez;

$$\begin{aligned}\langle 0 | Q_i T_- - T_- Q_i | 0 \rangle &= M_{\beta^-}^i \langle 0 | Q_i Q_i^+ - Q_i^+ Q_i | 0 \rangle \\ \langle 0 | [Q_i, T_-] | 0 \rangle &= M_{\beta^-}^i \langle 0 | [Q_i, Q_i^+] | 0 \rangle\end{aligned}\quad (4.158)$$

olur. Parçacık bazında,

$$\begin{aligned}[Q_i, Q_i^+] &= \sum_{j,j'} \psi_j(p,n) \psi_{j'}(p,n) [A_j^+(p,n), A_{j'}(p,n)] \\ &= \sum_j (N_j(n) - N_j(p)) \psi_j^2(p,n) = 1\end{aligned}$$

olarak (4.49) denklemiyle elde edilmişti. Öyleyse; (4.158) denkleminde $[Q_i, Q_i^+] = 1$ olduğuna göre;

$$M_{\beta^-}^i = \langle 0 | [Q_i, T_-] | 0 \rangle \quad (4.159)$$

olur.

$$(4.45) \quad \text{denkleminde} \quad Q_i^+ = \sum_j \psi_j(p,n) A_j(p,n) \quad \text{ve} \quad (4.8)$$

denkleminde $T_- = \sum_j \langle j, p | j, n \rangle A_j(p,n)$ olduğuna göre bunlar (4.159)

denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
M_{\beta^-}^i &= \left[\sum_j \psi_j(p, n) A_j^+(p, n), \sum_{j'} \langle j, p \| j, n \rangle A_{j'}(p, n) \right] \\
&= \sum_{j, j'} \psi_j(p, n) \langle j, p \| j, n \rangle [A_j^+(p, n), A_{j'}(p, n)]
\end{aligned} \tag{4.160}$$

olur. Burada (4.10) denklemi yerine yazılırsa, parçacık bazında β^- geçiş matris elemanı

$$M_{\beta^-}^i = \sum_j \psi_j(p, n) \langle j, p \| j, n \rangle (N_j(n) - N_j(p)) \tag{4.161}$$

olarak bulunur.

Kuazi-parçacık bazında da $[Q_i, Q_i^+] = \delta_{ii'}$ ve $i = i'$ olduğuna göre $[Q_i, Q_i^+] = 1$ 'dir. Buna göre (4.158) denkleminde

$$\langle 0 | [Q_i, T_-] | 0 \rangle = M_{\beta^-}^i \tag{4.162}$$

olarak matris elemanı elde edilir. Bu parçacık bazında elde edilen (4.159) denklemiyle aynıdır.

Özfonksiyon (4.106) denkleminde şu şekilde ifade edilmişti;

$$Q_i^+ = \sum_{np} (\psi_{np}^i A_{np}^+ - \varphi_{np}^i A_{np}).$$

Buna göre;

$$\mathcal{Q}_i = (\mathcal{Q}_i^+)^+ = \sum_{np} (\psi_{np}^i A_{np} - \varphi_{np}^i A_{np}^+) \quad (4.163)$$

olur.

T_- operatörü de (4.83) denkleminde aşağıdaki gibi elde edilmiştir;

$$T_- = \sum_{n'p'} (b_{n'p'} A_{n'p'}^+ + \bar{b}_{n'p'} A_{n'p'}).$$

(4.163) ve (4.83) denklemleri (4.162)'de yerlerine yazılırsa;

$$M_{\beta^-}^i = \langle 0 | \left[\sum_{np} (\psi_{np}^i A_{np} - \varphi_{np}^i A_{np}^+) , \sum_{n'p'} (b_{n'p'} A_{n'p'}^+ + \bar{b}_{n'p'} A_{n'p'}) \right] | 0 \rangle$$

$$M_{\beta^-}^i = \sum_{np} \sum_{n'p'} (b_{n'p'} \psi_{np}^i [A_{np}, A_{n'p'}^+] + \bar{b}_{n'p'} \psi_{np}^i [A_{np}, A_{n'p'}] - b_{n'p'} \varphi_{np}^i [A_{np}^+, A_{n'p'}^+] - \bar{b}_{n'p'} \varphi_{np}^i [A_{np}^+, A_{n'p'}]) \langle 0 | 0 \rangle$$

$$M_{\beta^-}^i = \sum_{np} \sum_{n'p'} (b_{n'p'} \psi_{np}^i \delta_{nn'} \delta_{pp'} + \bar{b}_{n'p'} \varphi_{np}^i \delta_{nn'} \delta_{pp'})$$

$$M_{\beta^-}^i = \sum_{np} (b_{np} \psi_{np}^i + \bar{b}_{np} \varphi_{np}^i)$$

olur. Kuzai-parçacık bazında β^- geçiş matris elemanı aşağıdaki gibi elde edilmiş olur;

$$M_{\beta^-}^i = \langle 0 | [Q_i, T_-] | 0 \rangle = \sum_{np} (b_{np} \psi_{np}^i + \bar{b}_{np} \phi_{np}^i) . \quad (4.164)$$

$M_{\beta^+}^i$, (N,Z) ana çekirdeğinin taban seviyesinden (N+1,Z-1) çekirdeğindeki izobar 0^+ seviyelerine β^+ Fermi geçiş matris elemanıdır.

β^+ geçişi şu şekilde ifade edilir ;

$$T_+ | 0 \rangle = M_{\beta^+}^i Q_i^+ | 0 \rangle \quad (4.165)$$

Bu ifadenin soldan $\langle 0 | Q_i$ ile komutasyonuna bakılır ve yukarıda yapılan benzer işlemler tekrar edilirse;

$$\langle 0 | [Q_i, T_+] | 0 \rangle = M_{\beta^+}^i \langle 0 | [Q_i, Q_i^+] | 0 \rangle$$

$$M_{\beta^+}^i = \langle 0 | [Q_i, T_+] | 0 \rangle \quad (4.166)$$

olur. Yalnız burada dikkat edilecek olan nokta parçacık bazında

$$Q_i^+ = \sum_j \psi_j(p, n) A_j^+(p, n)$$

$$Q_i = \sum_j \psi_j(p, n) A_j(p, n)$$

olarak kabul edilmelidir.

$Q_i = \sum_j \psi_j(p, n) A_j(p, n)$ ve (4.9)'dan $T_+ = \sum_j \langle j, p \| j, n \rangle A_j^+(p, n)$ olduğuna

göre bunlar (4.166) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} M_{\beta^+}^i &= \left[\sum_j \psi_j(p, n) A_j(p, n), \sum_{j'} \langle j, p \| j, n \rangle A_{j'}^+(p, n) \right] \\ &= \sum_{j, j'} \psi_j(p, n) \langle j, p \| j, n \rangle [A_j(p, n), A_{j'}^+(p, n)] \end{aligned}$$

olur. Burada (4.10) denklemini yerine yazılırsa, parçacık bazında β^+ geçişine neden olan matris elemanı,

$$M_{\beta^+}^i = - \sum_j \psi_j(p, n) \langle j, p \| j, n \rangle (N_j(n) - N_j(p)) \quad (4.167)$$

olarak bulunur.

Kuazi-parçacık bazı için (4.163) ve (4.84) denklemleri (4.166)'da yerlerine yazılırsa;

$$M_{\beta^+}^i = \langle 0 | \left[\sum_{np} (\psi_{np}^i A_{np} - \varphi_{np}^i A_{np}^+) , \sum_{n'p'} (b_{n'p'} A_{n'p'} + \bar{b}_{n'p'} A_{n'p'}^+) \right] | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} M_{\beta^+}^i &= \sum_{np} \sum_{n'p'} (b_{n'p'} \psi_{np}^i [A_{np}, A_{n'p'}] + \bar{b}_{n'p'} \psi_{np}^i [A_{np}, A_{n'p'}^+] - b_{n'p'} \varphi_{np}^i [A_{np}^+, A_{n'p'}] \\ &\quad - \bar{b}_{n'p'} \varphi_{np}^i [A_{np}^+, A_{n'p'}^+]) \langle 0 | | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$M_{\beta^+}^i = \sum_{np} \sum_{n'p'} (\bar{b}_{n'p'} \psi_{np}^i \delta_{nn'} \delta_{pp'} + b_{n'p'} \phi_{np}^i \delta_{nn'} \delta_{pp'})$$

$$M_{\beta^+}^i = \sum_{np} (\bar{b}_{np} \psi_{np}^i + b_{np} \phi_{np}^i)$$

olur. Kuazi-parçacık bazında β^+ geçişine neden olan matris elemanı

$$M_{\beta^+}^i = \langle 0 | [Q_i, T_+] | 0 \rangle = \sum_{np} (\bar{b}_{np} \psi_{np}^i - b_{np} \phi_{np}^i) \quad (4.168)$$

olarak elde edilir. Özetlenecek olursa;

Parçacık bazında matris elemanları (4.161) ve (4.167) denklemlerinden;

$$M_{\beta^-}^i = \sum_j \psi_j(p, n) \langle j, p \| j, n \rangle (N_j(n) - N_j(p))$$

$$M_{\beta^+}^i = - \sum_j \psi_j(p, n) \langle j, p \| j, n \rangle (N_j(n) - N_j(p)),$$

Kuazi parçacık bazında matris elemanları (4.164) ve (4.168) denklemlerinden;

$$M_{\beta^-}^i = \sum_{np} (b_{np} \psi_{np}^i + \bar{b}_{np} \phi_{np}^i)$$

$$M_{\beta^+}^i = \sum_{np} (\bar{b}_{np} \psi_{np}^i - b_{np} \phi_{np}^i)$$

olarak elde edilir.

4.6 Fermi Toplam Kuralı

Açısal momentum için $[L_+, L_-] = 2L_z$ şeklindedir. Aynısı izospin vektörü için de geçerlidir; $[T_+, T_-] = 2T_z$ ve $T_z = \frac{N-Z}{2}$ olduğuna göre;

$$[T_+, T_-] = N - Z \quad (4.169)$$

olur. Parçacık bazında, (4.8) ve (4.9) denklemlerinden;

$$T_- = \sum_j \langle j, p \| j, n \rangle A_j(p, n)$$

$$T_+ = \sum_j \langle j, p \| j, n \rangle A_j^+(p, n)$$

oldukları hatırlanırsa;

$$[T_+, T_-] = \left[\sum_j \langle j, p \| j, n \rangle A_j^+(p, n), \sum_{j'} \langle j, p \| j, n \rangle A_{j'}(p, n) \right]$$

$$[T_+, T_-] = \sum_j \sum_{j'} \left| \langle j, p \| j, n \rangle \right|^2 [A_j^+(p, n), A_{j'}(p, n)]$$

$$[T_+, T_-] = \sum_j \left| \langle j, p \| j, n \rangle \right|^2 (N_j(n) - N_j(p)) = N - Z \quad (4.170)$$

olur. Aynı şekilde kuazi-parçacık bazında (4.83) ve (4.84) denklemlerinden;

$$T_- = \sum_{n'p'} (b_{n'p'} A_{n'p'}^+ + \bar{b}_{n'p'} A_{n'p'})$$

$$T_+ = \sum_{np} (b_{np} A_{np} + \bar{b}_{np} A_{np}^+)$$

oldukları hatırlanırsa bunlara göre;

$$[T_+, T_-] = \left[\sum_{np} (b_{np} A_{np} + \bar{b}_{np} A_{np}^+), \sum_{n'p'} (b_{n'p'} A_{n'p'}^+ + \bar{b}_{n'p'} A_{n'p'}) \right]$$

$$[T_+, T_-] = \sum_{np} \sum_{n'p'} (b_{np} b_{n'p'} [A_{np}, A_{n'p'}^+] + b_{np} \bar{b}_{n'p'} [A_{np}, A_{n'p'}] + b_{n'p'} \bar{b}_{np} [A_{np}^+, A_{n'p'}] + \bar{b}_{np} \bar{b}_{n'p'} [A_{np}^+, A_{n'p'}])$$

$$[T_+, T_-] = \sum_{np} \sum_{n'p'} (b_{np} b_{n'p'} \delta_{nn'} \delta_{pp'} - \bar{b}_{np} \bar{b}_{n'p'} \delta_{nn'} \delta_{pp'})$$

$$[T_+, T_-] = \sum_{np} (b_{np}^2 - \bar{b}_{np}^2) = N - Z \quad (4.171)$$

olur. Buradaki b_{np} ve $\bar{b}_{np}$ sqp matris elemanlarıdır. Bu yapılan hesapların bir kontrolüdür. Hesapla mutlaka parçacık bazında (4.170), kuazi-parçacık bazında (4.171) denklemi sağlanmalıdır.

$$[T_+, T_-] = T_+ T_- - T_- T_+$$

olduğuna göre;

$$T_+ T_- - T_- T_+ = N - Z$$

olur. Bunların ortalaması alınırsa;

$$\langle 0 | T_+ T_- - T_- T_+ | 0 \rangle = (N - Z) \langle 0 | 0 \rangle$$

olur. Burada $Q_i^+ | 0 \rangle = i$ olmak üzere, $\langle i | i \rangle = 1$ ve $| i \rangle \langle i | = 1$ şeklindedir.

Bunlardan $\langle i | i \rangle$ $T_- T_+$ arasına ve $| i \rangle \langle i |$ de $T_+ T_-$ arasına yazılırsa;

$$\sum_i \{ \langle 0 | T_+ | i \rangle \langle i | T_- | 0 \rangle - \langle 0 | T_- | i \rangle \langle i | T_+ | 0 \rangle \} = N - Z \quad (4.172)$$

olur. (4.172) denkleminin birinci terimi incelenecek olursa;

$$(\langle 0 | T_+ | i \rangle)^+ = \langle i | T_- | 0 \rangle$$

olur. Buna göre;

$$\langle 0 | T_+ | i \rangle \langle i | T_- | 0 \rangle = |\langle i | T_- | 0 \rangle|^2$$

yazılabilir. Ayrıca $Q_i^+|0\rangle = |i\rangle$ ve $\langle 0|Q_i = \langle i|$ olmak üzere;

$$\langle i|T_-|0\rangle = \langle 0|Q_iT_-|0\rangle$$

olur. $Q_i|0\rangle = 0$ olduğu için bu ifadeden T_-Q_i 'yi çıkarmak sonucu değiştirmez.

$$\langle i|T_-|0\rangle = \langle 0|Q_iT_- - T_-Q_i|0\rangle$$

$$\langle i|T_-|0\rangle = \langle 0|[Q_i, T_-]|0\rangle$$

(4.159) ve (4.162) denklemlerinden $\langle 0|[Q_i, T_-]|0\rangle = M_{\beta^-}^i$ olduğu hatırlanırsa,

$$\langle i|T_-|0\rangle = M_{\beta^-}^i \quad (4.173)$$

olur. Benzer şekilde (4.172)'nin ikinci terimi;

$$(\langle 0|T_-|i\rangle)^+ = \langle i|T_+|0\rangle$$

olur. Öyleyse;

$$\langle 0|T_-|i\rangle\langle i|T_+|0\rangle = |\langle i|T_+|0\rangle|^2 \quad (4.174)$$

yazılabilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
\langle i|T_+|0\rangle &= \langle 0|Q_i T_+|0\rangle, \\
\langle i|T_+|0\rangle &= \langle 0|Q_i T_+ - T_+ Q_i|0\rangle, \\
\langle i|T_+|0\rangle &= \langle 0|[Q_i, T_+]|0\rangle
\end{aligned}$$

olur. (4.166) denkleminde $M_{\beta^+}^i = \langle 0|[Q_i, T_+]|0\rangle$ olduğu hatırlanırsa;

$$\langle i|T_+|0\rangle = M_{\beta^+}^i \quad (4.175)$$

olur. (4.173)ve (4.175)'i (4.172)'de yerlerine yazarsak;

$$\sum_i \left\{ \left| M_{\beta^-}^i \right|^2 - \left| M_{\beta^+}^i \right|^2 \right\} = N - Z = 2T_0 \quad (4.176)$$

olur.

Bu hesapların sonunda yapılacak olan kontroldür. Matris elemanları doğru hesaplanmış iseler (4.176) denklemi sağlanmalıdır.

Özetleyecek olursak (4.170) ve (4.171) denklemlerinden hareketle,

Parçacık bazında;

$$\sum_i \left\{ \left| M_{\beta^-}^i \right|^2 - \left| M_{\beta^+}^i \right|^2 \right\} = \sum_j \left| \langle j, p \| j, n \rangle \right|^2 (N_j(n) - N_j(p)) = N - Z,$$

Kuazi-parçacık bazında;

$$\sum_i \left\{ \left| M_{\beta^-}^i \right|^2 - \left| M_{\beta^+}^i \right|^2 \right\} = \sum_{np} (b_{np}^2 - \bar{b}_{np}^2) = N - Z = 2T_0$$

olarak elde edilmelidir.

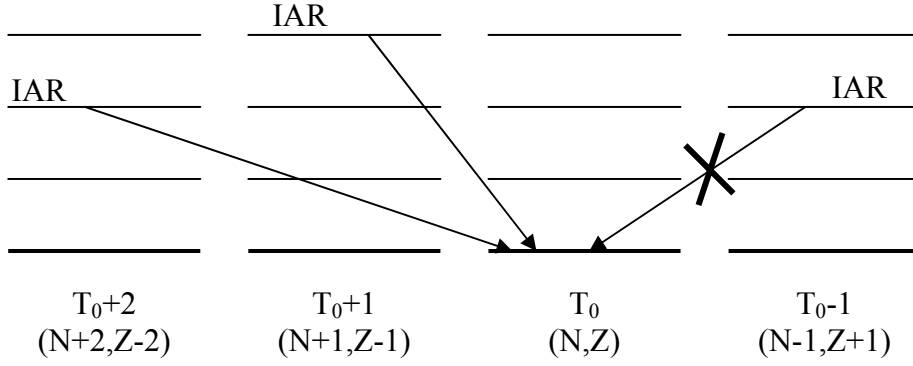
4.7 Ana Çekirdeğin Taban Durumunun İzospin Safsızlığı

Ana çekirdek üzerindeki izotopik spin saf değildir. Sağdaki ve soldaki çekirdeklerden bu çekirdeğe geçişler olabilir. Bu geçişler safsızlığı bozar. Fakat sağdan yani $(T_0 - 1)$ 'den (T_0) haline katkı olmaz. Geçişler $(T_0 + 1)$ 'den (T_0) 'a; $(T_0 + 2)$ 'den (T_0) 'a ...vs olur. Herbir geçişten katkı gelebilir.

Geçişin olmayacağı $(T_0 - 1)$ izotopik spinine sahip hal, $|T_0 - 1, T_0\rangle$ olarak ifade edilir. İlk terim toplam izotopik spini, ikinci terim ise bunun üçüncü bileşenini yani T_z bileşenini temsil eder. Burada T_0 , $T_0 - 1$ 'in T_z bileşenidir. Dolayısıyla böyle bir hal olamaz. Çünkü hiçbir zaman izdüşümü kendisinden daha büyük olan bir vektör yoktur. Yani T_z bileşeni toplam izotopik spinden daha büyük olamaz.

Ana çekirdek aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\begin{aligned} |0\rangle &= |N, Z\rangle = a|T_0, T_0\rangle + b|T_0 + 1, T_0\rangle + c|T_0 + 2, T_0\rangle + \dots \\ a^2 + b^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4.177)$$



Şekil 4.2 (N, Z) Ana çekirdeğin taban seviyesine gelen katkıların şematik gösterimi.

Burada eşitliğin sağındaki üçüncü terim ve sonrasında gelen katkı çok küçük olduğu için ihmal edilir. Ayrıca bu denklemdeki b katsayısı izospin safsızlığı olarak adlandırılır.

Taban haldeki komşu çekirdeklerin izospinlerinin karelerinin beklenen değeri şöyle hesaplanabilir;

$$\langle 0 | T^2 | 0 \rangle = (b \langle T_0 + 1, T_0 | + a \langle T_0, T_0 |) T^2 (a | T_0, T_0 \rangle + b | T_0 + 1, T_0 \rangle). \quad (4.178)$$

Açısal momentum için;

$$L^2 | LM_L \rangle = L(L+1) | LM_L \rangle$$

olduğuna göre;

$$T^2|TT_0\rangle = T(T+1)|TT_0\rangle$$

olur. Öyleyse;

$$\begin{aligned}\langle 0|T^2|0\rangle &= ba\langle T_0+1, T_0|T^2|T_0, T_0\rangle + b^2\langle T_0+1, T_0|T^2|T_0+1, T_0\rangle \\ &\quad + a^2\langle T_0, T_0|T^2|T_0, T_0\rangle + ab\langle T_0, T_0|T^2|T_0+1, T_0\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 0|T^2|0\rangle &= baT_0(T_0+1)\langle T_0+1, T_0|T_0, T_0\rangle \\ &\quad + b^2(T_0+1)(T_0+2)\langle T_0+1, T_0|T_0+1, T_0\rangle + a^2T_0(T_0+1)\langle T_0, T_0|T_0, T_0\rangle \\ &\quad + ab(T_0+1)(T_0+2)\langle T_0, T_0|T_0+1, T_0\rangle\end{aligned}$$

$$\langle 0|T^2|0\rangle = a^2T_0(T_0+1) + b^2(T_0+1)(T_0+2)$$

olur. (4.177)'den $a^2 = 1 - b^2$ olduğuna göre;

$$\langle 0|T^2|0\rangle = (1 - b^2)T_0(T_0+1) + b^2(T_0+1)(T_0+2)$$

$$\langle 0|T^2|0\rangle = T_0(T_0+1) + b^2(T_0+1)(T_0+2 - T_0)$$

$$\langle 0|T^2|0\rangle = T_0(T_0+1) + 2b^2(T_0+1) \quad (4.179)$$

olur. Diğer taraftan; $L^2 = L_-L_+ + L_z^2 + L_z$ olduğuna göre izotopik spin içinde benzer bağıntı $T^2 = T_-T_+ + T_0^2 + T_0$ olur. Buna göre;

$$\langle 0|T^2|0\rangle = \langle 0|T_-T_+ + T_0^2 + T_0|0\rangle$$

olur. $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$ olduğuna göre T_-T_+ arasına $\sum_i |i\rangle\langle i|$ yazılabilir..

$$\langle 0|T^2|0\rangle = \langle 0|T_-T_+|0\rangle + \langle 0|T_0^2|0\rangle + \langle 0|T_0|0\rangle$$

$$\langle 0|T^2|0\rangle = \langle 0|T_-|i\rangle\langle i|T_+|0\rangle + T_0^2\langle 0|0\rangle + T_0\langle 0|0\rangle$$

$$\langle 0|T^2|0\rangle = \langle 0|T_-|i\rangle\langle i|T_+|0\rangle + T_0(T_0 + 1)$$

olur. (4.174) ve (4.175)'ten;

$$\langle 0|T_-|i\rangle\langle i|T_+|0\rangle = \sum_i \left| M_{\beta^+}^i \right|^2 .$$

olduğu bilinmektedir. Bu yerine yazılırsa;

$$\langle 0|T^2|0\rangle = \sum_i \left| M_{\beta^+}^i \right|^2 + T_0(T_0 + 1) \quad (4.180)$$

olur. (4.179) ve (4.180) eşitlenirse;

$$T_0(T_0 + 1) + 2b^2(T_0 + 1) = \sum_i \left| M_{\beta^+}^i \right|^2 + T_0(T_0 + 1)$$

$$P(T_0 + 1) = b^2 = \frac{\sum_i |M_{\beta^+}^i|^2}{2(T_0 + 1)} \quad (4.181)$$

olur. (4.181) denklemi $(N + 1, Z - 1)$ çekirdeğinin izobarik seviyelerinden (N, Z) ana çekirdeğinin taban seviyesine gelen katkıyı ifade eder.

4.8 IAR İzospin Yapısı

T_- operatörü kullanılarak, $(N - 1, Z + 1)$ çekirdeğindeki bütün Fermi geçişlerinin tek bir hal üzerinde toplandığı hal olan kolektif analog hal durumu şöyle ifade edilir ;

$$|A\rangle = \left| \langle 0 | T_+ T_- | 0 \rangle \right|^{-1/2} T_- |0\rangle. \quad (4.182)$$

(4.182) denklemi iki parçaya ayrılıp çözülebilir. Önce $T_- |0\rangle$ çözümlenirse;

$$T_- |0\rangle = a T_- |T_0, T_0\rangle + b T_- |T_0 + 1, T_0\rangle \quad (4.183)$$

olur. Açısal momentum için tanımlanan

$$L_- |LM\rangle = \sqrt{(L + M)(L - M + 1)} |LM - 1\rangle$$

ifade kullanılırsa, (4.183) denkleminin birinci kısmı;

$$T_-|T_0, T_0\rangle = \sqrt{(T_0 + T_0)(T_0 - T_0 + 1)}|T_0, T_0 - 1\rangle$$

$$T_-|T_0, T_0\rangle = \sqrt{2T_0}|T_0, T_0 - 1\rangle \quad (4.184)$$

olur. (4.183) denkleminin ikinci kısmı;

$$T_-|T_0 + 1, T_0\rangle = \sqrt{(T_0 + 1 + T_0)(T_0 + 1 - T_0 + 1)}|T_0 + 1, T_0 - 1\rangle$$

$$T_-|T_0 + 1, T_0\rangle = \sqrt{2(2T_0 + 1)}|T_0 + 1, T_0 - 1\rangle \quad (4.185)$$

olur. (4.184) ve (4.185) denklemleri (4.183)'de yerlerine konulursa;

$$T_-|0\rangle = a\sqrt{2T_0}|T_0, T_0 - 1\rangle + b\sqrt{2(2T_0 + 1)}|T_0 + 1, T_0 - 1\rangle \quad (4.186)$$

olur.

(4.182)'nin diğer kısmı olan $|\langle 0|T_+T_-|0\rangle|^{-1/2}$ ifadesinin çözümüne bakılırsa; $L^2 = L_+L_- + L_-L_+ - L_z$ olduğuna göre $T^2 = T_+T_- + T_-T_+ - T_0$ olur. Buradan hareket edilirse;

$$T_+T_- = T^2 - T_0^2 + T_0 \quad (4.187)$$

olur. Bu ifade $|\langle 0|T_+T_-|0\rangle|^{-1/2}$ 'nin iç kısmında yerine yazılırsa;

$$\langle 0|T_+T_-|0\rangle = \left(b\langle T_0+1,T_0| + a\langle T_0,T_0|\right)T_+T_-\left(a|T_0,T_0\rangle + b|T_0+1,T_0\rangle\right)$$

$$\begin{aligned}\langle 0|T_+T_-|0\rangle &= a^2\langle T_0,T_0|T_+T_-|T_0,T_0\rangle + ab\langle T_0,T_0|T_+T_-|T_0+1,T_0\rangle \\ &\quad + ba\langle T_0+1,T_0|T_+T_-|T_0,T_0\rangle + b^2\langle T_0+1,T_0|T_+T_-|T_0+1,T_0\rangle\end{aligned}$$

$$\langle 0|T_+T_-|0\rangle = a^2\langle T_0,T_0|T_+T_-|T_0,T_0\rangle + b^2\langle T_0+1,T_0|T_+T_-|T_0+1,T_0\rangle$$

olur. Bu ifadede (4.187) denklemi yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\langle 0|T_+T_-|0\rangle &= a^2\langle T_0,T_0|T^2 - T_0^2 + T_0|T_0,T_0\rangle \\ &\quad + b^2\langle T_0+1,T_0|T^2 - T_0^2 + T_0|T_0+1,T_0\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 0|T_+T_-|0\rangle &= a^2\left(\langle T_0,T_0|T^2|T_0,T_0\rangle - T_0^2\langle T_0,T_0|T_0,T_0\rangle + T_0\langle T_0,T_0|T_0,T_0\rangle\right) \\ &\quad + b^2\left(\langle T_0+1,T_0|T^2|T_0+1,T_0\rangle - T_0^2\langle T_0+1,T_0|T_0+1,T_0\rangle\right. \\ &\quad \left.+ T_0\langle T_0+1,T_0|T_0+1,T_0\rangle\right)\end{aligned}$$

$$\langle 0|T_+T_-|0\rangle = a^2\left(T_0(T_0+1) - T_0^2 + T_0\right) + b^2\left((T_0+1)(T_0+2) - T_0^2 + T_0\right)$$

$$\langle 0|T_+T_-|0\rangle = 2T_0a^2 + 2b^2(2T_0+1) \quad (4.188)$$

elde edilir. (4.186) ve (4.188) denklemleri (4.182)'de yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}|A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2T_0a^2 + 2b^2(2T_0+1)}} \\ &\quad \left(a\sqrt{2T_0}|T_0,T_0-1\rangle + b\sqrt{2(2T_0+1)}|T_0+1,T_0-1\rangle\right)\end{aligned}$$

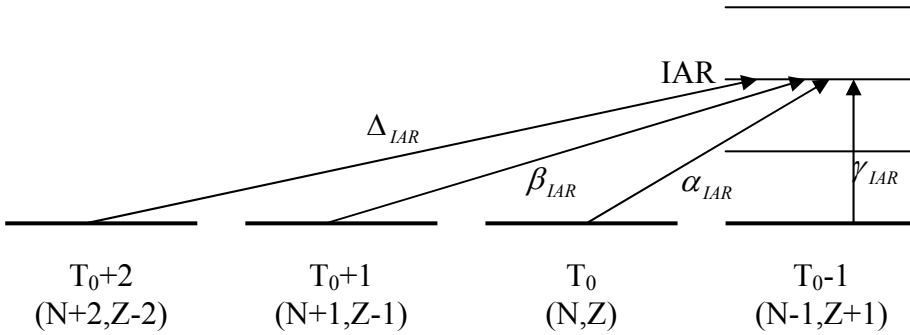
olur. Bu düzenlenir ve $a^2 = 1 - b^2$ olarak yazılırsa;

$$|A\rangle = \frac{a\sqrt{2T_0}|T_0, T_0 - 1\rangle + b\sqrt{2(2T_0 + 1)}|T_0 + 1, T_0 - 1\rangle}{\sqrt{2(T_0(1 - b^2) + b^2(2T_0 + 1))}}$$

$$|A\rangle = \frac{a\sqrt{T_0}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}}|T_0, T_0 - 1\rangle + \frac{b\sqrt{(2T_0 + 1)}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}}|T_0 + 1, T_0 - 1\rangle \quad (4.189)$$

olur.

Izobar analog hal durumu olan $Q_{IAR}^+|0\rangle$ durumuna katkı $T_0 - 1$, T_0 , $T_0 + 1$ ve $T_0 + 2$ durumlarından gelebilir (Şekil 4.3). $Q_{IAR}^+|0\rangle$ durumu;



Şekil 4.3 Geçişin yapıldığı $(N - 1, Z + 1)$ ürün çekirdeğindeki IAR durumlarına diğer çekirdeklerin taban durumlarından gelen katkılar.

$$\begin{aligned} Q_{LAR}^+ |0\rangle = & \gamma_{LAR} |T_0 - 1, T_0 - 1\rangle + \alpha_{LAR} |T_0, T_0 - 1\rangle \\ & + \beta_{LAR} |T_0 + 1, T_0 - 1\rangle + \Delta_{LAR} |T_0 + 2, T_0 - 1\rangle \end{aligned} \quad (4.190)$$

$$\gamma_{LAR}^2 + \alpha_{LAR}^2 + \beta_{LAR}^2 + \Delta_{LAR}^2 = 1 \quad (4.191)$$

şeklinde ifade edilir.

$|A\rangle$ durumu ile Q_{LAR} durumu arasındaki örtüşme aşağıdaki şekildedir;

$$\delta_{LAR} = \langle 0 | Q_{LAR} | A \rangle. \quad (4.192)$$

$(Q_{LAR}^+ |0\rangle)^+ = \langle 0 | Q_{LAR}$ olduğuna göre (4.189) ve (4.190) denklemleri (4.192)'de yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \delta_{LAR} = & (\gamma_{LAR} \langle T_0 - 1, T_0 - 1 | + \alpha_{LAR} \langle T_0, T_0 - 1 | \\ & + \beta_{LAR} \langle T_0 + 1, T_0 - 1 | + \Delta_{LAR} \langle T_0 + 2, T_0 - 1 |) \\ & \left(\frac{a\sqrt{T_0}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}} |T_0, T_0 - 1\rangle + \frac{b\sqrt{(2T_0 + 1)}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}} |T_0 + 1, T_0 - 1\rangle \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{LAR} = & \alpha_{LAR} \frac{a\sqrt{T_0}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}} \langle T_0 - 1, T_0 - 1 | T_0 - 1, T_0 - 1 \rangle \\ & + \beta_{LAR} \frac{b\sqrt{(2T_0 + 1)}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}} \langle T_0 + 1, T_0 - 1 | T_0 + 1, T_0 - 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\delta_{IAR} = \frac{\alpha_{IAR} a \sqrt{T_0} + \beta_{IAR} b \sqrt{(2T_0 + 1)}}{\sqrt{T_0 + b^2 (T_0 + 1)}} \quad (4.193)$$

olur.

(4.188) ifadesi (4.182)'de verilen $|A\rangle = \left| \langle 0 | T_+ T_- | 0 \rangle \right|^{-1/2} T_- |0\rangle$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{T_0 + b^2 (T_0 + 1)}} T_- |0\rangle \quad (4.194)$$

olur. (4.194), (4.192)'de yerine yazılırsa;

$$\delta_{IAR} = \frac{\langle 0 | Q_{IAR} T_- | 0 \rangle}{\sqrt{T_0 + b^2 (T_0 + 1)}} \quad (4.195)$$

olur. $Q_{IAR} |0\rangle = 0$ olduğuna göre bu ifade (4.195)'den çıkarılırsa sonuç değişmez;

$$\delta_{IAR} = \frac{\langle 0 | Q_{IAR} T_- - T_- Q_{IAR} | 0 \rangle}{\sqrt{T_0 + b^2 (T_0 + 1)}} \quad (4.196)$$

olur. (4.162)'den bilinen $\langle 0|[Q_i, T_-]|0\rangle = M_{LAR}^{\beta^-}$ ifadesi (4.196)'da yerine yazılırsa;

$$\delta_{LAR} = \frac{M_{LAR}^{\beta^-}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}} \quad (4.197)$$

olur. (4.193) ile (4.197) denklemleri karşılaştırılırsa;

$$\frac{\alpha_{LAR} a \sqrt{T_0} + \beta_{LAR} b \sqrt{(2T_0 + 1)}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}} = \frac{M_{LAR}^{\beta^-}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}}$$

$$M_{LAR}^{\beta^-} = \alpha_{LAR} a \sqrt{T_0} + \beta_{LAR} b \sqrt{(2T_0 + 1)} \quad (4.198)$$

olur. Böylece ana çekirdeğin taban seviyesinden $(N-1, Z+1)$ çekirdeğinin seviyeleri arasında bulunan izobar analog hale geçiş matris elemanı bulunmuş olur.

Tekrar (4.192) ve (4.197) deklemlerine bakılacak olursa;

$$\delta_{LAR} = \langle 0|Q_{LAR}|A\rangle = \frac{M_{LAR}^{\beta^-}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}}$$

olur. Bu ifade sağdan $\langle A|$ ile çarpılırsa;

$$\langle 0 | \mathcal{Q}_{LAR} | A \rangle \langle A | = \frac{M_{LAR}^{\beta^-}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}} \langle A | \quad (4.198)$$

olur. $|A\rangle\langle A|=1$ şeklindedir. Yukarıdaki ifadenin hermitik eşleniğini alınırsa;

$$\mathcal{Q}_{LAR}^+ | 0 \rangle = \frac{M_{LAR}^{\beta^-}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}} | A \rangle$$

olur. Burada $\mathcal{Q}_{LAR}^+ | 0 \rangle$ ve $| A \rangle$ sırasıyla (4.190) ve (4.189)'dan alınıp yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \gamma_{LAR} | T_0 - 1, T_0 - 1 \rangle + \alpha_{LAR} | T_0, T_0 - 1 \rangle + \beta_{LAR} | T_0 + 1, T_0 - 1 \rangle \\ & \quad + \Delta_{LAR} | T_0 + 2, T_0 - 1 \rangle = \\ & = \frac{M_{LAR}^{\beta^-}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}} \left(\frac{a\sqrt{T_0}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}} | T_0, T_0 - 1 \rangle \right. \\ & \quad \left. + \frac{b\sqrt{(2T_0 + 1)}}{\sqrt{T_0 + b^2(T_0 + 1)}} | T_0 + 1, T_0 - 1 \rangle \right) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} & \gamma_{LAR} | T_0 - 1, T_0 - 1 \rangle + \alpha_{LAR} | T_0, T_0 - 1 \rangle + \beta_{LAR} | T_0 + 1, T_0 - 1 \rangle \\ & \quad + \Delta_{LAR} | T_0 + 2, T_0 - 1 \rangle = \\ & = \left(\frac{a\sqrt{T_0} M_{LAR}^{\beta^-}}{T_0 + b^2(T_0 + 1)} | T_0, T_0 - 1 \rangle + \frac{b\sqrt{(2T_0 + 1)} M_{LAR}^{\beta^-}}{T_0 + b^2(T_0 + 1)} | T_0 + 1, T_0 - 1 \rangle \right) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin sağlanması ile;

$$\alpha_{LAR} = \frac{a\sqrt{T_0} M_{LAR}^{\beta^-}}{T_0 + b^2(T_0 + 1)}$$

$$\beta_{LAR} = \frac{b\sqrt{(2T_0 + 1)} M_{LAR}^{\beta^-}}{T_0 + b^2(T_0 + 1)} \quad (4.199)$$

$$\gamma_{LAR}^2 = 1 - (\alpha_{LAR}^2 + \beta_{LAR}^2)$$

ifadeleri elde edilir.

5. CKM MATRİSİNİN ÜNİTERLİĞİ

Çekirdekte, süperizinli $J^\pi 0^+ \rightarrow 0^+$ Fermi beta geçişleri, elektrozayıf standart modelin sonuçlarını ve öngörülerini test eden önemli bir araçtır. Süperizinli geçişler son yıllarda bir çok önemli çalışmaların konusunu oluşturmuştur (Blin-Stoyle, 1969; Towner and Hardy, 1973; Wilkinson, 1976; Hardy and Towner, 1975; Towner, Hardy and Harvey, 1977; Ormand and Brown, 1989; Barker, 1992; Barker, 1994; Wilkinson, 1993; Ormand and Brown, 1995; Sagawa, Van Giai and Suzuki, 1996; Navrátil, Barrett and Ormand, 1997; Wilkinson, 2002; Towner and Hardy, 2002). CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) matrisinin üniterliği, parçacık fiziğindeki en önemli problemlerden bir tanesidir. Parçacık ve nükleer fizikte bu matrisin üniterliğini test etmek için birkaç yol vardır. Nükleer fizik kısmında, serbest nötron geçişi, pion beta geçişi ve süperizinli Fermi beta geçişi bulunmaktadır. Süperizinli Fermi beta geçişiyle CKM matrisinin ilgili ve hesaplanacak elemanı V_{ud} 'dir.

Bu bölümde sırasıyla önce standart model, zayıf etkileşmeler ve W bozonları, CKM matrisi ve üniterliği, radyatif düzeltmeler ve izospin simetrisindeki kırılma düzeltmesi anlatılmıştır.

5.1 Standart Model

Standart Model (SM), gözlemlenen maddeyi oluşturan, şimdiye kadar bulunmuş temel parçacıkları ve bunların etkileşmesinde önemli

olan 3 temel kuvveti açıklayan kuramdır. Standart Modele göre temel parçacıklar kuarklar ve leptonlar olarak isimlendirilen iki aileye ayrılırlar. Bu ailelerin her biri altı parçacıktan oluşur ve birinci nesil en hafif üçüncü nesil en ağır olmak üzere üç nesle ayrılır. Parçacıklar arasında da etkileşmeyi sağlayan dört farklı kuvvet ve kuvvet taşıyıcıları vardır. Aşağıdaki tabloda bu üç nesil ve kuvvet taşıyıcıları görülmektedir.

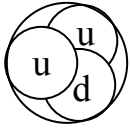
Tablo 5.1 Standart Modelin temel parçacıkları.

		Elektrik yükü		Elektrik yükü		Elektrik yükü	
Kuarklar	u up (yukarı)	$\frac{2}{3}$	c charm (çekici)	$\frac{2}{3}$	t top (üst)	$\frac{2}{3}$	g gluon
	d down (aşağı)	$-\frac{1}{3}$	s strange (acayip)	$-\frac{1}{3}$	b bottom (alt)	$-\frac{1}{3}$	γ foton
Leptonlar	ν_e elektron nötrino	-1	ν_μ muon nötrino	-1	ν_τ tau nötrino	-1	W bozon
	e elektron	0	μ muon	0	τ tau	0	Z bozon
I. Nesil		II. Nesil		III. Nesil			

Herbir parçacığa karşı gelen bir anti parçacık vardır. Anti parçacıklar gerçek parçacıklardır. Parçacık ve onun anti parçacığı arasındaki temel fark sadece yüklerinin ters işaretli olmasıdır.

Kuarklar tek başlarına gözlemlenemez. Kuarklar "hadron" olarak bilinen parçacıklar içerisinde hapsolmuşlardır. Protondaki ve elektrondaki gibi kuarklar elektrik yüküne sahiptir. Kuarkların elektrik

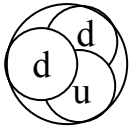
yükleri kesirlidir ($2/3$ veya $-1/3$, $-2/3$ ve $1/3$ anti kuarklar için). Kuarklar, parçacıkların yükü tamsayı olacak biçimde bir araya gelirler. Bu yüzden kuarkların her türlü kombinasyonu mümkün değildir. Hadronların iki şekli vardır, baryonlar ve mezonlar. Üç kuarkın bir araya gelmesi ile baryonlar, bir kuark ve bir anti kuarkın bir araya gelmesi ile mezonlar oluşur. Baryonlara iki örnek proton ve nötrondur.



Proton

Proton iki yukarı kuark ve bir aşağı kuarkın bir araya gelmesi ile oluşur. Şekilden görüldüğü gibi her bir kuarkın yükü toplanıp proton için yük $+1$ elde edilir.

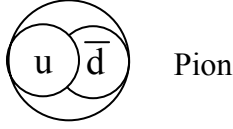
$$(u + u + d = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = +1)$$



Nötron

Nötron iki aşağı kuark ve bir yukarı kuarktan meydana gelir. Kuarkların yükleri toplanırsa 0 olan nötronun yüküne ulaşılır.

$$(d + d + u = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0)$$



Mezon için bir örnek piondur. Pion bir yukarı bir de aşağı anti kuarkın bir araya gelmesi ile oluşur. Mezonlar parçacık ve anti parçacık kombinasyonu olduğundan kararsız bir yapı gösterirler ve çok hızlı bozulurlar.

5.2 Zayıf Etkileşme

Doğada dört tür etkileşim veya dört çeşit kuvvet vardır: güçlü, elektromanyetik, zayıf, ve kütleçekimi. Bilinen tüm diğer kuvvetler bu dört temel kuvvetin çeşitli varyasyonlarıdır.

Zayıf etkileşim, ağır kuark ve leptonların daha hafif kuark ve leptonlara bozunmasından sorumludur. Bozunma sürecinde, ilgili temel parçacık kaybolmakta ve ortaya iki veya daha fazla sayıda farklı parçacık çıkmaktadır. Toplam kütle ve enerji korunur. Fakat bozunan parçacığın kütlelerinin bir kısmı, ortaya çıkan parçacıkların kinetik enerjisine dönüşür. Dolayısıyla, bozunma ürünlerinin kütlelerinin toplamı, başlangıçtaki kütleden daha az olmaktadır. Bir kuark veya lepton bozunduğunda, 'çeşni'si değişir ve bütün 'çeşni' değişimleri, zayıf etkileşim sayesinde veya nedeniyle gerçekleşmektedir. Etkileşim; elektrik yükü taşıyan ve birbirinin karşıtı olan W^+ , W^- parçacıkları ile, yüksüz Z^0 parçacığı tarafından taşınır. Bu üçüne 'vektör bozonlar' adı verilir.

W ve Z bozonları, zayıf etkileşmeye aracılık eden temel parçacıklardır.

W parçacığının adı, zayıf nükleer kuvvetten (weak nuclear force) gelir. Z parçacığı ise, yükünün sıfır (zero) olmasından dolayı bu şekilde isimlendirilmiştir.

W bozonunun iki türü $+1$ ve -1 elektrik yüklerine sahiptir. W^+ bozonu W^- bozonunun antiparçacığıdır. Z bozonu (veya Z^0) elektriksel olarak yüksüzdür ve kendisinin antiparçacığıdır. Her üç parçacığın da yarı ömürleri çok kısadır. Bu yüzden bu parçacıklar dedektörler ile direkt olarak gözlemlenemez, ancak bozonum ürünleri ölçülebilir.

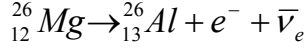
W ve Z parçacıkları bir protona göre yaklaşık 100 kat daha ağırdır. Bu bozonların kütleleri önemlidir; çünkü bunlar zayıf nükleer kuvvetin menzilini sınırlar. Elektromanyetik kuvvetin menzili sonsuzdur; çünkü bu kuvvetin bozonu (foton) kütesizdir.

Her üç türün de spini 1'dir.

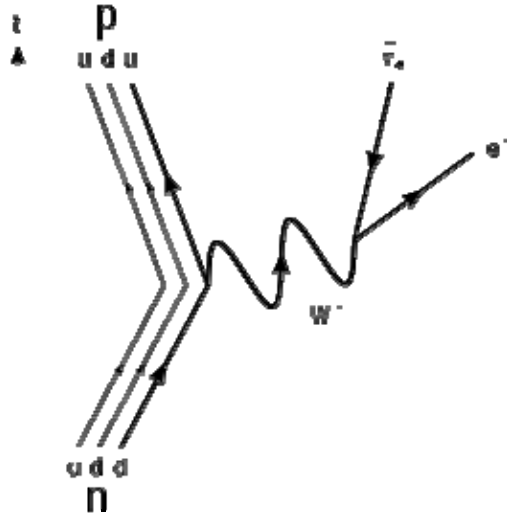
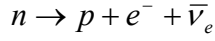
W^+ veya W^- bozonlarının salınımı, salınımı yapan parçacığın elektrik yükünü 1 birim artırır veya azaltır, ayrıca spini de 1 birim değiştirir. Aynı şekilde bir W bozonu parçacığın neslini de değiştirir; örneğin garip kuarkı, yukarı kuarka dönüştürür. Z bozonu, parçacığın elektrik yükünü veya başka herhangi bir yükünü (acayıplık gibi) değiştirmez, sadece spin ve momentumda etkilidir. Bu yüzden o salınımı yapan parçacığın neslini veya çeşnisini asla değiştirmez.

Fotonun elektromanyetik kuvvetin taşıyıcı parçacığı olması gibi W ve Z bozonları da zayıf nükleer kuvvete aracılık eden taşıyıcı parçacıklardır. W bozonunun radyoaktif bozonumdaki rolü önemlidir.

Örneğin süperizinli Fermi beta bozunması yapan çekirdeklerden bir tanesi Magnezyum-26 için beta bozunumu şöyledir:



Nötron, elektron ve nötrino yayımlayarak bir protona (beta parçacığı) dönüşür.



Şekil 5.1 Beta bozunumunun Feynman diagramı.

Peki bu bozunma acaba nasıl gerçekleşmektedir: Nötron temel parçacık değildir; bir yukarı kuark ve iki aşağı kuarkın birleşiminden oluşur

(udd). Gerçekte protonun (uud) formuna geçiş için aşağı kuarklardan (d) biri beta bozunumunda etkileşime girerek yukarı kuarka (u) dönüşür. En temel seviyede zayıf kuvvet tek kuarkın çeşnisini değiştirir. Aşağı kuarkın (d) yukarı kuarka (u) dönüşümü sırasında bir ara vektör (W^-) bozonu yayınlanır.

$$d \rightarrow u + W^-$$

Yayınlanan bu bozonun ömrü çok kısadır ve bu bozonda aşağıdaki şekilde bozunur;

$$W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e.$$

Böylece $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ bozunması gerçekleşmiş olur. Bu bozunmanın şematik gösterimi Şekil 5.1’de verilmiştir.

1950’lerde kuantum elektrodinamiğinin olağanüstü başarısını takip eden süreçte, deneyler zayıf nükleer kuvvete benzer bir teorinin formüle edilmesi gerektiğini göstermiştir. 1968’de Sheldon Glashow, Steven Weinberg ve Abdus Salam elektromanyetizma ve zayıf etkileşimin birleşik teorisini öne sürmüşlerdir. Glashow, Weinberg ve Salam bu çalışmaları ile 1979’da Nobel Fizik Ödülü’ne layık görülmüşlerdir. Onların elektrozayıf teorisi, beta bozunumunu açıklamak için W bozonuna ek olarak ayrıca, o zamana kadar henüz gözlemlenmemiş olan Z bozonunun da varolması gerektiğini öngörüyordu.

Fotonlar kütlesiz iken W ve Z bozonlarının kütle sahibi olması elektrozayıf teorisinin gelişimi yönündeki büyük engellerden biriydi. Bu parçacıklar $SU(2)$ ayar teorisi tarafından doğru bir şekilde tanımlandı, ancak gauge teorisindeki bozonlar kütlesiz olmalıydı. Bu noktada fotonlar kütlesizdir; çünkü, elektromanyetizma $U(1)$ gauge teorisi tarafından tanımlanır. W ve Z bozonlarına kütle kazandırılabilmesi için, $SU(2)$ simetrisinin kırılmasını sağlayacak bir mekanizma gereklidir. Açıklamalardan biri 1960'ların sonunda Peter Higgs tarafından öne sürülen, Standart Model'in öngördüğü temel parçacıklara kütle kazandırmak amacıyla tasarlanmış olan Higgs mekanizmasıdır. Bu açıklama ayrıca yeni bir parçacık Higgs bozonunun da varlığını öngörmektedir.

SM'in varlığını öngördüğü ama henüz keşfedilmemiş bir parçacık olan Higgs bozonu halen yüksek enerjili parçacık çarpışmalarının yapıldığı deneyler ile aranmaktadır. Higgs bozonu teorik olarak temel parçacıklar ile kütleli kuvvet taşıyıcılarının kütle kazanması için gerekli bir parçacıktır.

5.3 CKM Matrisi ve Üniterliği

Standart modelde karşılaşılan bir küçük zorluk, farklı ailelerde aynı yerde olan kuarkların birbirlerine karışmalarıdır. Mesela d , s ve b birbirine karışırlar. Bu karışım matematiksel olarak 3×3 bir üniter matrisle ifade edilir. 2 aileli durum için ilk defa Nicola Cabibbo (Cabibbo, 1963) tarafından yazılan bu matris, 3 aileli duruma Makoto Kobayashi ve Toshihide Maskawa (Kobayashi and Maskawa, 1973)

tarafından genelleştirdiği için onların isimlerinin baş harfleri ile anılır: “CKM matrisi”.

CKM kuark karışım matrisi, güçlü etkileşmeli kuark öz durumları ile zayıf etkileşmeli kuark öz durumları arasındaki dönüşümü temsil eder ve şu şekli alır;

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

CKM matrisi üç tane karışım açısı ve bir CP-bozucu faz tarafından parametrize edilir. Birçok olası parametrizasyon vardır. Bu parametrizasyonlardan standart olanı (Gilman, 2004);

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

şeklindedir. Burada $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ yi temsil eder. Ayrıca, δ , standart modelde çeşni değişim prosesindeki bütün CP-bozucu olaylardan sorumlu KM fazı olarak adlandırılır (Kobayashi and Maskawa, 1973). θ_{ij} açıları birinci bölgeden seçilebildiğinden, $s_{ij}, c_{ij} \geq 0$ olur.

Deneyssel olarak $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$ olduğu bilindiğinden bu sıralamayı Wolfenstein parametrizasyonunda kullanmak uygundur. s_{13} ,

s_{23} ve s_{12} şu şekilde tanımlanır (Wolfenstein, 1983; Buras et al., 1994; Charles et al., 2005);

$$s_{12} = \lambda = \frac{|V_{us}|}{\sqrt{|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2}} \quad , \quad s_{23} = A\lambda^2 = \lambda \left| \frac{V_{cb}}{V_{us}} \right| \quad (5.3)$$

$$s_{13}e^{i\delta} = V_{ub}^* = A\lambda^3(\bar{\rho} + i\bar{\eta}) = \frac{A\lambda^3(\bar{\rho} + i\bar{\eta})\sqrt{1 - A^2\lambda^4}}{\sqrt{1 - \lambda^4}[1 - A^2\lambda^4(\bar{\rho} + i\bar{\eta})]} \quad (5.3)$$

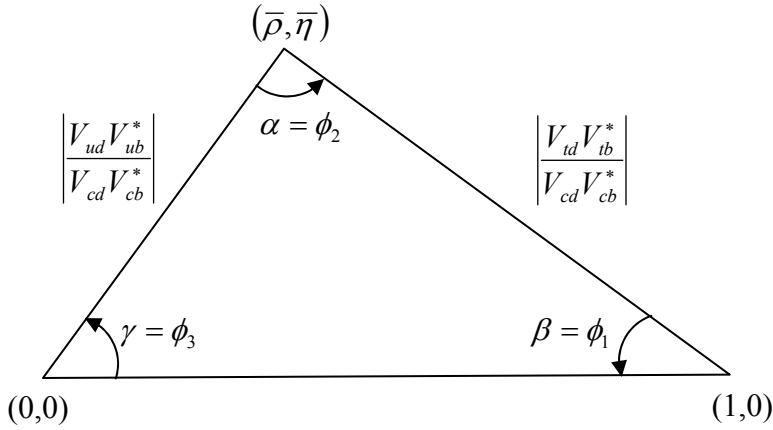
Bu terimler, $(\bar{\rho} + i\bar{\eta}) = -(V_{ud}V_{ub}^*)/(V_{cd}V_{cb}^*)$ ifadesinin faz kuralından bağımsız olmasını sağlarlar. Ayrıca, λ , A , $\bar{\rho}$ ve $\bar{\eta}$ terimleri cinsinden yazılan CKM matrisi λ 'nın bütün mertebeleri için üniter olmaktadır. $\bar{\rho}$ ve $\bar{\eta}$ tanımları literatürdeki bütün yaklaşım sonuçlarından tekrar elde edilebilirler. Yani $\bar{\rho} = \rho(1 - \lambda^2/2 + \dots)$ şeklindedir ve V_{CKM} , λ^4 mertebe terimlere kadar ya $\bar{\rho}$ ve $\bar{\eta}$ terimleri ile ya da çok kullanılan şekliyle;

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4) \quad (5.4)$$

şeklinde yazılabilir.

CKM matrisinin elemanları standart modelin temel parametreleridir ve dolayısıyla bunların tam çözülmesi önemlidir.

CKM matrisinin üniterliği $\sum_i V_{ij} V_{ik}^* = \delta_{jk}$ ve $\sum_j V_{ij} V_{kj}^* = \delta_{ik}$ şeklinde gösterilir. Bunlardan, değerleri sıfır olan altı kombinasyon üçgenler ile kompleks düzlemde temsil edilebilir ve her biri komşu satırlar veya sütunların skaler çarpımı ile elde edilenleri neredeyse dejeneredir.



Şekil 5.2 Üniterlik üçgeni (Yao, 2006).

En çok kullanılan üniterlik üçgeni,

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \quad (5.5)$$

ifadesinin her bir tarafının, en iyi bilinen $V_{cd}V_{cb}^*$ ’ye bölünmesiyle elde edilir (Şekil 5.2). Bu üçgenin köşeleri, (0,0), (1,0) ve (5.3) denkleminde tanımlanan $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ şeklindedir. Kuark fiziğinin önemli amaçlarından biri

CKM matris elemanlarına kısıtlama getirmektir. Birçok ölçüm $\bar{\rho}$, $\bar{\eta}$ düzleminde uygun bir biçimde gösterilebilir ve kıyaslanabilir.

CKM matrisinin üniterliğinin test edilmesi şuan ki standart modelin temel parçacıklarının da doğruluğunun test edilmesidir. Bu matrisin dokuz elemanı arasında birçok değişik ilişki vardır ve bunlar deneylerle test edilmektedir. Burada V_{ud} sadece birinci jenerasyondaki kuarklara bağlıdır ve büyük doğrulukla belirlenebilmektedir. Beta geçişlerinde aşağı ve yukarı kuark arasındaki geçiş incelendiği için yukarı-aşağı kuark geçişlerini temsil eden matris elemanı V_{ud} ’dir. Bu matrisin üniterliğini test etmek için en üst satırdaki elemanların karelerinin toplamını almak yeterlidir. Üniterlik koşulu (Cabibbo, 1963; Kobayashi and Maskawa, 1973);

$$V_{ud}^2 + V_{us}^2 + V_{ub}^2 = 1 \quad (5.6)$$

şeklindedir. Eğer sonuç bu şekildeyse matris üniterdir. Bu sonucun sağlanmasında bu üç terim içinden en büyük katkı V_{ud} ’den gelmektedir. Dolayısıyla V_{ud} ne kadar doğru hesaplanırsa, yukarıdaki matrisin de üniterlik şartını sağlayıp sağlamadığı o kadar doğru bir şekilde yapılabilir. V_{ud} ’nin değeri üç yolla bulunabilir: birincisi nükleer süperizinli Fermi beta geçişleri; ikincisi serbest nötron geçişi ve üçüncüsü de pion beta geçişidir. Önce kısaca sırasıyla serbest nötron ve pion beta geçişlerine bakılırsa;

a-) Serbest Nötron Geçişi : Serbest nötron geçişinin nükleer yapıya bağılı düzeltme terimleri olmadığı için süperizinli beta geçişine göre avantajları vardır. Fakat diğerk taraftan süperizinli beta geçişine göre deneysel sonuçlardan kaynaklanan üç kat daha büyük hata bandı vardır (Towner and Hardy, 2003). Örneğın süperizinli beta geçişine göre;

$$V_{ud} = 0.9740 \pm 0.0005$$

şeklinde hesaplanırken serbest nötron geçişine göre;

$$V_{ud} = 0.9745 \pm 0.0016$$

şeklinde hesaplanmaktadır (Towner and Hardy, 2003).

b-) Pion Beta Geçişi : $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ şeklindedir. Elektrik yüklü π^+ ve π^- ($u\bar{d}$) ve ($d\bar{u}$) çiftlerinden, yüksüz π^0 ise $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ birleşimi şeklinde kuark, karşıit-kuark çiftlerinden oluşur (Cottingham and Greenwood, 2001). Pion beta geçişi de aynı serbest nötron geçişinde olduğu gibi nükleer yapıya bağılı düzeltme terimlerinin olmaması nedeniyle avantajlıdır. Fakat pion beta geçişinin hata bandı serbest nötron geçişinden daha da büyüktür.

$$V_{ud} = 0.9670 \pm 0.0161$$

şeklindedir (Towner and Hardy, 2003).

c-) Süperizinli Beta Geçişi: Bölüm 3.2 de süperizinli beta geçişleri detaylı bir şekilde anlatılmıştı. (3.15) denklemini süperizinli beta geçişleri için ($G_A = 0$ olur) tekrar yazacak olursak;

$$ft = \frac{K}{G_V^2 |M_F|^2} \quad (5.7)$$

şeklindedir. Burada,

$$K / (\hbar c)^6 = 2\pi^3 \hbar \ln 2 / (m_e c^2)^5 = (8120.271 \pm 0.012) \times 10^{-10} \text{ GeV}^{-4} s ,$$

değerini alır. Bu denklem, düzeltme terimleri gözönüne alınarak ve yukarıdaki halinden farklı olarak (Towner and Hardy, 1998) aşağıdaki gibi ifade edilmiştir. Çekirdeğe bağlı düzeltmeler deneysel ft değerinden elde edilmelidir. Düzeltme terimlerinin eklenmesiyle modifiye edilen ft değerleri;

$$Ft \equiv ft(1 + \delta_R)(1 - \delta_C) = \frac{K}{2G_V^2 (1 + \Delta_R^V)} \quad (5.8)$$

şeklindedir. Burada, Ft düzeltilmiş ft , f istatistiksel oran fonksiyonu ve t de geçişin yarı ömrüdür. δ_C , δ_R ve Δ_R^V sırasıyla, izospin simetrisindeki kırılma düzeltmesi, radyatif düzeltme ve çekirdekten bağımsız radyatif düzeltmedir. Radyatif düzeltme iki kısma ayrılabilir;

$$\delta_R = \delta'_R + \delta_{NS} . \quad (5.9)$$

Buradaki birinci terim δ'_R , elektronun maksimum enerjisinin bir fonksiyonu olup nükleer yapıdan bağımsızdır. İkinci terim, δ_{NS} , nükleer

yapıya bağlıdır. Bu terimler kullanılarak (5.8) denkleminin sol tarafı şu şekilde yazılabilir;

$$Ft \equiv ft(1 + \delta'_R)(1 + \delta_{NS} - \delta_C). \quad (5.10)$$

(5.10) denkleminin birinci kısmı nükleer yapıdan bağımsız, ikinci kısmı ise nükleer yapıya bağlıdır.

Elektrozayıf teoride, Fermi ve vektör çiftlenim sabitleri arasında

$$G_V = G_F V_{ud} \quad (5.11)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Fermi çiftlenim sabiti, G_F , müon beta geçişinden elde edilir ve değeri;

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.16639 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

şeklinde dir. (5.8) ve (5.10) denklemlerinden V_{ud} matris elemanının karesi şu şekilde elde edilir;

$$V_{ud}^2 = \frac{K}{2G_F^2 Ft} = \frac{2984.38(6)}{Ft}. \quad (5.12)$$

5.4 Radyatif (Işınsal) Düzeltmeler

Radyatif düzeltmeler, bozunan nükleon ve yayınlanan pozitronun dış elektromanyetik alan ile etkileşmesinden kaynaklanmaktadır. Radyatif düzeltmeler, $Z\alpha$ cinsinden bir pertürbasyon serisi ile açıklanabilir. Bu serideki $Z^m\alpha^n$ 'lı terimlerde $m \leq n$ şeklindedir. En büyük düzeltmeler, istatistiksel oran fonksiyonu f ve izospin kırılmasının düzeltilmesi δ_C içindedir. Bunların dışında var olan düzeltmeler de δ_R ve Δ_R^V içindedir. Bu düzeltmelerin nedenini açıklamak ve hesaplarda nasıl bir öneme sahip olduklarını anlamak için Şekil 5.3'ü incelemek gerekir.

Elektromanyetik etkileşmelerin ihmal edildiği, beta bozunma süreci (proton, nötron, pozitron ve nötrino içeren) Şekil 5.3-(a)'da gösterilmiştir. Bunu takip eden diğer şekiller (b, c, d ve e) elektromanyetik etkileşmelerden dolayı meydana gelen modifikasyonları anlatırlar.

Şekil 5.3-(b) ve Şekil 5.3-(b') , pozitronun ürün çekirdeğin statik Coulomb alanı ile etkileşmesinin düzeltilmesini ifade eder. Bu etkiler sırasıyla $Z\alpha$, $Z^2\alpha^2$ mertebesinde. Hem bu iki mertebedeki etki hem de daha yüksek mertebeden $Z^m\alpha^n$ ile orantılı etkiler, uygun Coulomb alanında bir pozitron için Dirac denkleminin çözülmesiyle elde edilen pozitron dalga fonksiyonunun kullanımıyla hesaplanan f 'ye dahil edilmiştir.

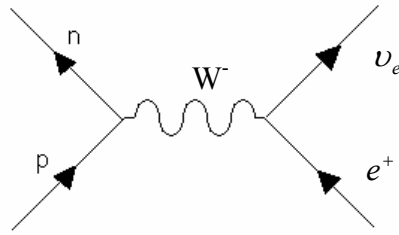
Şekil 5.3 (c) ve Şekil 5.3 (c'), statik Coulomb alanı ile bozunan nükleon arasındaki etkileşmeler için benzer düzeltmeleri gösterir. Bu

düzeltilmeler genellikle nükleer yapı hesaplarının bir parçası olarak alınır ve δ_C düzeltme terimini oluşturur. Gerçekten, Fermi etkileşmesinin doğasından dolayı, $Z^2\alpha^2$ mertebesindeki terimin δ_C 'nin en etkili terimi olması sonucu Şekil 5.3 (c)'nin katkısı sıfırdır.

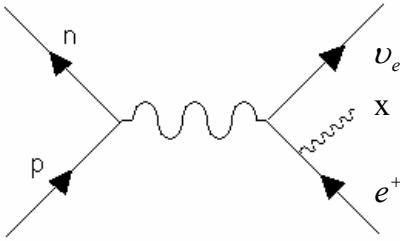
Şekil 5.3 (d)'de gösterilen, α mertebesinde olan düzeltme, radyatif düzeltmelerin en büyük bileşeni olan δ_R ve Δ_R^V düzeltmelerine katkı yapar. Burada gösterilen hem bir Z vektör bozonun hem de bir fotonun hadron ve pozitron arasındaki değiş-tokuşudur (Sirlin, 1974). Bu iki etkinin toplamının yapılabilmesi için, sadece müon ve nükleer beta bozunmasının radyatif düzeltmelerinin arasındaki farkın hesaplanmasına gerek vardır. Çünkü sonuç olarak bu iki bozunma, evrenselliğin bir testi olarak karşılaştırılacaktır. α mertebesindeki radyatif düzeltme;

$$R^\alpha = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\langle g(E, E_m) \rangle + 3 \ln \left(\frac{m_Z}{m_p} \right) + 3 \rho \left(\frac{m_Z}{m_A} \right) \right] \quad (5.13)$$

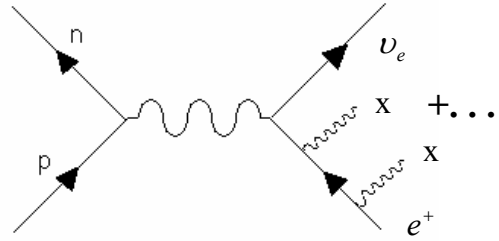
şeklindedir. Buradaki $\langle g(E, E_m) \rangle$ ifadesi, Sirlin tarafından gösterilen evrensel bir fonksiyondur (Sirlin, 1967; denklem 20b). Bu fonksiyon bütün elektronların enerjisi E üzerinden ortalamadır ve sadece E_m maksimum enerjiye bağlıdır. Burada m_Z , Z vektör bozonun kütlesidir.



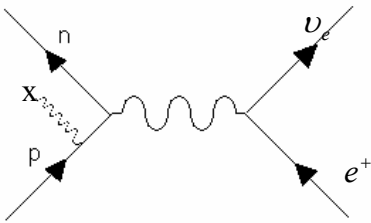
(a)



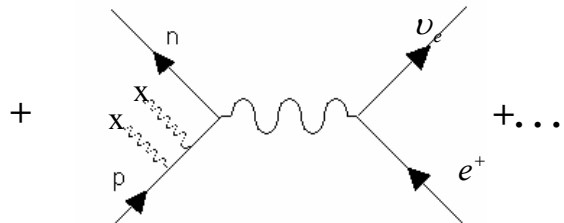
(b)



(b')

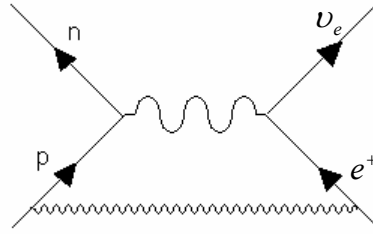


(c)

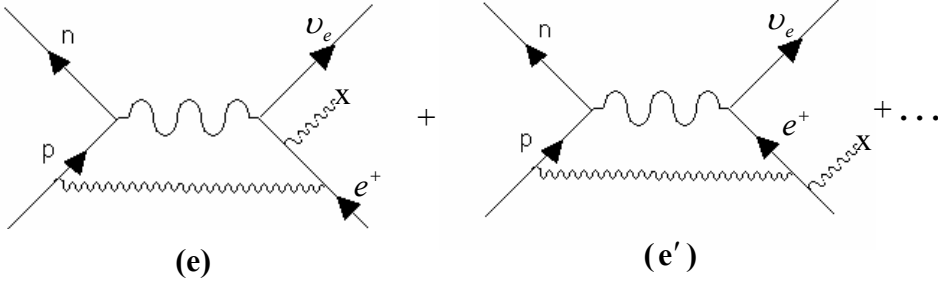


(c')

Şekil 5.3 Beta bozunmasında, radyatif düzeltmelerin Feynman Diyagramları ile gösterilmesi (Hardy and Towner, 1975).



(d)



(e)

(e')

Şekil 5.3 Beta bozunmasında, radyatif düzeltmelerin Feynman Diyagramları ile gösterilmesi (Hardy and Towner, 1975) (devamı).

Yukarıdaki denklemin üçüncü terimi aksiyal-vektör akımından elde edilir ve modele bağlıdır. ρ parametresi kuark modelin yapısına bağlıdır (dört kuarkın tamsayı yükleri için $\rho=1$ ve üç renkli dörtlüler için $\rho=1/3$). m_A değiş-tokuş aksiyal-vektör mezonunun kütlesidir.

α mertebesinde radyatif düzeltmelere katkı getirebilen birçok şekil çizilebilir. Bu düzeltmeler diğerlerine dahil edilmemişlerdir. Çünkü bunlar, ya müon bozunmasına özdeş düzeltmeler yaparlar (yani foton, ara vektor bozon ve pozitron arasında değiş-tokuş edilir), yada katkıları

ihmal edilir (yani ara vektör bozonu statik Coulomb alanı ile $Z\alpha(m_p/m_W)^2$ mertebesinde etkileşmeye neden olur).

Yüksek mertebeden düzeltmelere bakılacak olursa; $Z\alpha^2$ mertebesindeki en büyük katkı Şekil 5.3 (e)'de gösterilmiştir. Bu mertebedeki ve $Z^2\alpha^3$ mertebesinde benzer şekiller Jaus (Jaus, 1972) tarafından elde edilmiştir.

α , $Z\alpha^2$ ve $Z^2\alpha^3$ mertebesinden radyatif düzeltmeler;

$$\delta_R = \delta_R^\alpha + \delta_R^{Z\alpha^2} + \delta_R^{Z^2\alpha^3}, \quad (5.14)$$

$$\delta_R^\alpha = \frac{\alpha}{2\pi} \langle g(E, E_m) \rangle, \quad (5.15)$$

$$\delta_R^{Z\alpha^2} = Z\alpha^2 \ln\left(\frac{m_p}{m_e}\right) + \dots, \quad (5.16)$$

$$\delta_R^{Z^2\alpha^3} \approx \frac{Z^2\alpha^3}{\pi} \left(3 \ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \pi^2 \right) \ln\left(\frac{m_p}{m_e}\right), \quad (5.17)$$

$$\Delta_R^V = \frac{\alpha}{2\pi} \left[3 \ln\left(\frac{m_Z}{m_p}\right) + 3\rho\left(\frac{m_Z}{m_A}\right) \right], \quad (5.18)$$

şeklindedir (Hardy and Towner, 1975). α ertebesindeki düzeltmenin δ_R^α ve Δ_R^V 'ye ayrılması ile çekirdeğe bağımlı bütün terimler δ_R içinde gruplandırılabilir.

$Z\alpha^2$ ve $Z^2\alpha^3$ mertebesindeki en büyük düzeltmeler eklenmesine rağmen, fotonun hadron veya ara bozon ile etkileşmesini gösteren bu mertebedeki şekiller açık bir şekilde hesaplanamaz. Bu nedenle hesaplanan radyatif düzeltmelere $Z\alpha^2$ mertebesindeki düzeltmeler dahil edilmeyebilir.

Bir önceki bölümde (5.9) denklemiyle radyatif düzeltmenin

$$\delta_R = \delta'_R + \delta_{NS}$$

şeklinde ikiye ayrıldığı anlatılmıştı. Buradaki δ'_R düzeltmesi, sadece elektronun enerjisine ve ürün çekirdeğin yüküne bağlı bir fonksiyon olup, nükleer beta geçişine bağlı fakat nükleer yapıdan bağımsız radyatif düzeltme olarak adlandırılır. Δ_R^V düzeltmesi ise çekirdekten bağımsız düzeltme olarak adlandırılır. Marciano ve Sirlin bu düzeltmeleri biraz daha geliştirmişlerdir (Marciano and Sirlin, 1984; Marciano and Sirlin, 1986);

$$\delta'_R = \frac{\alpha}{2\pi} [\bar{g}(E_m) + \delta_2 + \delta_3], \quad (5.19)$$

büyük E_m için,

$$\delta'_R = \frac{\alpha}{2\pi} \left[3 \ln \left(\frac{m_p}{2E_m} \right) + \frac{81}{10} - \frac{4\pi^2}{3} + \delta_2 + \delta_3 \right], \quad (5.20)$$

şeklinde ifade etmişlerdir. Çekirdekten bağımsız düzeltme için;

$$\Delta_R^V = \frac{\alpha}{2\pi} \left[3 \ln \frac{m_W}{m_p} + \ln \frac{m_W}{m_A} + 2C - 4 \ln \frac{m_W}{m_Z} + A_g \right], \quad (5.21)$$

$$\Delta_R^V = \frac{\alpha}{2\pi} \left[4 \ln \frac{m_Z}{m_p} + \ln \frac{m_p}{m_A} + 2C + A_g \right], \quad (5.22)$$

şeklinde ifade etmişlerdir. Burada E_m , beta bozunması için maksimum elektron enerjisi, m_W , m_p ve m_Z sırasıyla W bozon, proton ve Z bozonun kütlesidir. δ_2 ve δ_3 ise sırasıyla $Z\alpha^2$ ve $Z^2\alpha^3$ mertebesindeki düzeltmeleri temsil eder.

C ise, düşük enerji bileşeni olarak adlandırılır ve Born yaklaşımı gibidir;

$$C \rightarrow C_{Born} = 3g_A(0.266)(\mu_p + \mu_n) = 0.885. \quad (5.23)$$

Burada $g_A=1.26$, aksiyal vektör çiftlenim sabiti; $(\mu_p + \mu_n)=0.88$, nükleon izoskaler manyetik momentidir.

A_g ise küçük bir pertürbatif düzeltmeye karşılık gelir ve şu değeri alır (Marciano and Sirlin, 1986);

$$A_g = -0.34. \quad (5.24)$$

Çekirdekten bağımsız düzeltme teriminin değeri ise (Marciano and Sirlin, 1986; Sirlin, 1994);

$$\Delta_R^V = 2.40(8)\% \quad (5.25)$$

olur.

Daha sonra Towner ve Hardy, radyatif düzeltmeler üzerinde bazı terimlerde ayırmalar yaparak δ'_R terimini şu şekilde ifade etmişlerdir (Towner and Hardy, 2008);

$$\delta'_R = \frac{\alpha}{2\pi} [\bar{g}(E_m) + \delta_2 + \delta_3 + \delta_{\alpha^2}]. \quad (5.26)$$

Bu yeni eklenen δ_{α^2} terimi ile çekirdekten bağımsız düzeltme teriminin yeni değerini de şu şekilde elde etmişlerdir (Towner and Hardy, 2008);

$$\Delta_R^V = 2.361(38)\%. \quad (5.27)$$

(5.9) denkleminde tekrar bakılacak olursa;

$$\delta_R = \delta'_R + \delta_{NS},$$

buradaki birinci terimin nükleer yapıdan bağımsız radyatif düzeltme olduğu ve (5.20) denklemindeki şekliyle ifade edildiği yukarıda anlatılmıştır. İkinci terim olan δ_{NS} terimi ise radyatif düzeltmelerin nükleer yapıya bağlı terimi olarak adlandırılır. Süperizinli geçişler için 0^+ durumları arasındaki saf vektör etkileşmelerden bahsedilmesine rağmen, aksiyal-vektör etkileşmeleri radyatif düzeltmelerde rol oynar. Bir aksiyal-vektör etkileşmesi bir nükleonun spinini çevirir ve bunu elektromanyetik etkileşmenin spini tekrar eski haline çevirmesi izler. C ile gösterilen bu aksiyal katkı, aynı nükleon veya ayrık iki nükleonda meydana gelen ister zayıf isterse elektromanyetik etkileşmelere bağlı iki kısma ayrılabilir (Towner and Hardy, 2002);

$$C = C_{Born} + C_{NS}, \quad (5.28)$$

$$\delta_{NS} = \frac{\alpha}{\pi} C_{NS}. \quad (5.29)$$

Buradaki C_{Born} terimi, Born grafiğinde gösterilen, aynı nükleonda meydana gelen aksiyal vektör ve elektromanyetik etkileşmeleri temsil eder. Bu terim evrenseldir, yani bütün nükleonlar için sabittir (denklem 5.23). Dolayısıyla, δ_{NS} terimi içinde yer almaz fakat denklem 5.22’de görüldüğü gibi çekirdekten bağımsız radyatif düzeltme, Δ_R^V içinde yer alır. C_{NS} terimi, farklı nükleonlarda meydana gelen aksiyal vektör ve elektromanyetik etkileşmeleri temsil eder. Bu terimin hesapları, nükleer yapının detaylarına bağlıdır.

5.5 δ_C , İzospin Simetrisindeki Kırılma Düzeltmesi

Süperizinli beta geçişleri için, ana ve ürün çekirdek aynı izotopik spinin bileşenleridir ve herhangi bir Coulomb veya yüke bağlı nükleer etkilerin bulunmadığı durumda bunların dalga fonksiyonları özdeşdir. Uygulamada, Coulomb kuvveti nükleer durumların izospin safsızlığını bozar ve nükleer matris elemanında değişiklik yapar. Bu değişiklikler aşağıdaki gibi bir düzeltme ile temsil edilir (Blin-Stoyle, 1969; Towner and Hardy, 1973);

$$M_F^2 = 2(1 - \delta_C). \quad (5.30)$$

δ_C , izospin simetrisindeki kırılma düzeltmesi olarak adlandırılır ve $Z^2\alpha^2$ mertebesinde dir. Bölüm 3.2’de (3.21) denkleminde saf süperizinli Fermi beta geçişleri için matris elemanının karesinin değerinin 2 olduğu gösterilmiştir. Buradaki δ_C , bu 2 değerinden olan farklanmanın bir düzeltmesidir.

Fermi matris elemanı, Bölüm 4’te gösterildiği gibi ikinci kuantumlanma formunda ilk durum ($|i\rangle$) ve son durum ($|f\rangle$) olan izobar analog haller arasında tekrar yazılacak olursa (Towner and Hardy, 2008);

$$M_F = \langle f | \tau_{\pm} | i \rangle \sum_{\alpha, \beta} \langle f | a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} | i \rangle \langle \alpha | \tau_{\pm} | \beta \rangle, \quad (5.31)$$

olur. Burada; a_α^+ , α kuantum durumunda bir nötron yaratma operatörü, a_β , β kuantum durumunda bir proton yok etme operatörüdür. Tek parçacık matris elemanı $\langle \alpha | \tau_\pm | \beta \rangle$, bir radyal integral olup (Towner and Hardy, 2008);

$$\langle \alpha | \tau_\pm | \beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta} \int_0^\infty R_\alpha^n(r) R_\beta^p(r) r^2 dr \equiv \delta_{\alpha,\beta} r_\alpha \quad (5.32)$$

şeklindedir. Eğer nötron ve proton radyal fonksiyonları $R_\alpha^n(r)$ ve $R_\beta^p(r)$ özdeş ise, radyal integral normalizasyon integraline indirgenir ve değeri $r_\alpha=1$ olur.

(5.28) denklemi $(A-1)$ parçacıklı bir sistem, $|\pi\rangle$, için (Towner and Hardy, 2008);

$$M_F = \sum_{\pi,\beta} \langle f | a_\alpha^+ | \pi \rangle \langle \pi | a_\alpha | i \rangle r_\alpha^\pi \quad (5.33)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer kesin bir izospin simetrisi varsa, yaratma ve yoketme operatörlerinin matris elemanları Hermitik olmalıdır; $\langle \pi | a_\alpha | i \rangle = \langle f | a_\alpha^+ | \pi \rangle^*$.

İzospin simetrisindeki kırılma M_F matris elemanının değerine iki şekilde giridirebilir; ya a_α ve a_α^+ 'nın matris elemanları Hermitik değildir, ya da radyal integrallerin değeri 1'e eşit değildir. Bu iki

durumunda etkisi küçüktür. İzospin simetrisindeki kırılma düzeltmesi şu şekilde yazılabilir (Towner and Hardy, 2008);

$$\delta_C = \delta_{C1} + \delta_{C2} . \quad (5.34)$$

Burada, δ_{C1} , Coulomb ve diğer yüke bağlı nükleer kuvvetlerin etkisini temsil eder ki bu da ana ve geçişin yapıldığı çekirdeğin 0^+ durumlarının dalga fonksiyonlarının karışımına sebep olur. δ_{C2} ise Coulomb etkileşmesinin diğer etkisini içerir yani, nötron ve protonun uyarılma enerjileri arasındaki farka karşılık gelir.

δ_{C1} 'de radyal integrallerin değeri 1'e eşittir fakat matris elemanları Hermitik değildir, δ_{C2} 'de ise matris elemanları Hermitiktir fakat radyal integrallerin değeri 1'den farklıdır.

Yüke bağlı düzeltmeleri temsil eden δ_{C1} 'e bu düzeltmeler üç şekilde girdirilebilir. Birincisi, proton orbitallerinin tek parçacık enerjileri nötronlara göre yukarı veya aşağı kaydırılır. İkincisi, valans protonları arasına iki parçacık Coulomb etkileşmesi girdirilir ve böylece yüke bağlı düzeltmenin gücü ayarlanır. Üçüncüsü, $T = 1$ olan bütün proton- nötron matris elemanlarının değerini nötron-nötron matris elemanlarına göre %2 arttıran bir yüke bağlı nükleer etkileşme tanımlanır.

Deneysel sonuçlar yukarıda anlatılanlardan farklı bir yol daha olduğunu göstermiştir. Eğer izospin kesin bir simetriye sahipse, ana çekirdekten 0^+ ($T=1$), ürün çekirdekteki ana çekirdeğin izobar analog haline geçiş olur, ürün çekirdekteki diğer 0^+ hallere geçişler yasaktır.

Fakat, izospin simetrisindeki kırılmasıyla diğer 0^+ hallere de geçişler olabilir. Bu durumda analog haller arasındaki Fermi geçiş matris elemanını karesi (Towner and Hardy, 2008);

$$M_F^2 = 2(1 - \delta_{Cl}) \quad (5.35)$$

değerini alır.

6. SONUÇLAR

6.1 CKM Matrisinin Üniterliği

Parçacık fiziğindeki en önemli problemlerden bir tanesi, daha önceki bölümde de belirtildiği gibi, CKM matrisinin üniterliğidir. Parçacık fiziğinde standart modelin ötesi çok ilgi çeken, sıcak bir konudur (Gilman, 2001). Süperizinli Fermi beta geçişleri, zayıf etkileşmelerin özelliklerinin çok iyi bir şekilde açıklanmasını sağlamaktadır. Özellikle Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) matrisinin, yukarı-aşağı (up-down) kuarklarla ilgili olan V_{ud} elemanının hesaplanmasını sağlayan en iyi yollardan bir tanesidir.

Beta geçişlerinde geçiş, izobar çekirdekler arasında olmaktadır. Yani bir nötron protona veya bir proton nötrona dönüşmektedir. Nötron ve protonun iç yapılarına bakıldığında protonun 2 yukarı-1 aşağı (uud) kuarktan, nötronun ise 2 aşağı-1 yukarı (ddu) kuarktan oluştuğu bilinmektedir. Dolayısıyla beta geçişleri incelendiğinde aslında bir yukarı kuarkın bir aşağı kuarka veya bir aşağı kuarkın bir yukarı kuarka dönüşmesi incelenmiş olur.

Bizim burada yaptığımız nükleer fiziğin parçacık fiziğine uygulanmasıdır. Amacımız, CKM matrisinin bir elemanı olan V_{ud} 'yi bulurken süperizinli beta geçişlerini kullanmak ve bu geçişlerde kırılan izotopik spin simetrisini de Pyatov Yöntemini (Pyatov and Salamov, 1977; Pyatov et al., 1979) kullanarak restore etmektir.

Günümüze kadar, $W^\pm$ ara bozonların neden olduğu radyatif terimler iyi bir şekilde anlaşılmıştır (Sirlin, 1978; Marciano and Sirlin, 1986). V_{ud} 'nin hesaplanmasındaki araştırmaların en önemli kısmı, modele bağlı olan geçiş matris elemanının hesaplanmasındaki izospin kırılmasının etkisi veya başka bir ifadeyle nükleer uyumsuzluktur.

Bu alanda, izospin kırılmasının düzeltilmesi konusunda birkaç aktif grup çalışmalarda bulunmaktadır. Towner-Hardy, Woods-Saxon dalga fonksiyonuna sahip kabuk modeli kullanarak izospin kırılması düzeltme teriminin değeri için bir çok hesaplama yapmıştır (Towner and Hardy, 1973; Hardy and Towner, 1975; Towner et al., 1977; Towner and Hardy, 2002). Ormand ve Brown, izospin kırılması için kabuk model ve Hartree-Fock hesaplamaları yapmıştır (Ormand and Brown, 1989; Ormand and Brown, 1995). Başka bir metot da Barker tarafından yapılan ve R-matris teorisine dayanan hesaplamalardır (Barker, 1992; Barker, 1994). Başka bir çalışma da, Hartree-Fock hesaplarına eklenerek yapılan ve yük simetrisi ile yük bağımsızlığı düzeltmelerini RPA ile hesaplayan Sagawa ve arkadaşlarının yaptığı çalışmadır (Sagawa et al., 1996). Bunları, geniş shell model hesapları kullanılarak $A=10$ olan çekirdek için Navrátil ve arkadaşlarının yaptığı çalışma izlemiştir (Navrátil et al., 1997). Son olarak, Wilkinson, deneysel dataya bakarak elde ettiği $Ft - Z$ grafiğinde, $Z \approx 0$ olacak şekilde ekstrapole ederek V_{ud} hesabı için gerekli saf zayıf etkileşmeyi elektromanyetik etkileşmeden ayırmaya çalışmıştır (Wilkinson, 1993; Wilkinson, 2002-a) ve Wilkinson, CKM matrisinin üniterliğini göstermek için farklı grupların datalarını kullanarak bir çok çalışma yapmıştır (Wilkinson, 2002-b; Wilkinson, 2003; Wilkinson, 2004; Wilkinson, 2005-a; Wilkinson, 2005-b).

Bir önceki bölümde, (5.12) denklemi ile V_{ud} 'nin aşağıdaki gibi olduğu gösterilmişti;

$$V_{ud}^2 = \frac{2984.38(6)}{Ft}. \quad (6.1)$$

Buradaki Ft 'nin düzeltilmiş ft değeri olarak adlandırıldığı ve aşağıdaki şekilde tanımlandığı da belirtilmişti (Towner and Hardy, 1998);

$$Ft \equiv ft(1 + \delta'_R)(1 + \delta_{NS} - \delta_C). \quad (6.2)$$

Amacımız, Pyatov Yöntemini kullanarak geçiş matris elemanı olan M_F 'yi hesaplamak ve $|M_F|^2 = 2(1 - \delta_C)$ bağıntısından hareketle “izospin simetrisinin kırılma düzeltilmesi” olan δ_C 'yi bulmaktır. Bulduğumuz bu sonucu önce (6.2) denkleminde yerine koyup Ft 'yi bulmak ve bulduğumuz bu sonucu da (6.1) denkleminde yerine yazarak V_{ud} 'yi elde etmektir. Daha sonra elde ettiğimiz sonucu (5.6) denkleminde yerine koyarak CKM matrisinin üniterliğini incelemektir.

Hesaplamalarda Woods-Saxon potansiyeli için Chepurnov parametizasyonu (Soloviev, 1976) kullanılmıştır. Radyal kuantum numarası n 'nin $\Delta n = 0,1,2,3$ durumları için bütün nötron-proton geçişlerini içeren hesaplamalar baz alınmıştır. Hesaplamalar bilinen oniki süperizinli beta geçişi için yapılmıştır.

Önceki bölümlerde bahsedildiği gibi, izovektör teriminin neden olduğu izospin simetrisinin kırılmasının etkisi yok edilmelidir. Şu ana

kadar daha önceki çalışmalarda bu konuya değinilmemiştir. İzospin simetrisinin kırılmasının etkisi olan δ_{C1} şu şekilde hesaplanır;

$$|M_F|^2 = 2(1 - \delta_{C1}). \quad (6.3)$$

Bu hesapta izovektör teriminin neden olduğu izospin kırılmasının etkisi mevcut değildir. Bu nedenle bu hesaplarda elde edilen sonuçlar güvenilir değerler olmayabilir. δ_{C1} için güvenilir sonuçlar elde etmek için, nükleer potansiyelin izovektör bileşeninin etkisinin arındırılması gerekmektedir.

Bahsedilen problemi çözmek için, bu çalışmada, Pyatov metodu kullanılmıştır. Matris elemanları, restore edilen hamiltoniyenler kullanılarak hesaplanmıştır. Böylece, denklem (6.3)'de verilen δ_{C1} , sadece Coulomb etkileşmelerini içerecek şekilde elde edilmiştir.

Tablo 6.1'de süperizinli beta geçişi yapan oniki çekirdek için Pyatov yöntemi kullanılarak elde edilen matris elemanları hem çift etkileşmeli hem de çift etkileşmesiz olarak verilmiştir. Matris elemanlarının karelerinin değerleri (3.21) denkleminde gösterildiği gibi 2 civarındadır. Tam 2'ye eşit olmaması doğaldır. Çünkü, sonucun tam 2 olması ilk ve son durumun izospin durumları saf olduğu zaman geçerlidir.

Tablo 6.2'de, bu çalışmada hesaplanan δ_{C1} değerleri ile daha önceki çalışmalarda hesaplanan sonuçlar karşılaştırma yapmak için verilmiştir. Tablo 6.2, (4.1) denklemindeki potansiyelin, izovektör teriminin etkisinin yok edilmesi ile ilgili bizim iddiamızı

doğrulamaktadır. Bu sonuca göre, elde edilen δ_{C1} değerleri, daha önceki çalışmalardakilerden nicelik ve nitelik olarak farklıdır.

Tablo 6.1 $|M_{LAR}|^2$ için elde edilen sonuçlar.

Geçişler	$ M_{LAR} ^2$	
	<i>Çift Etkileşmesiz</i>	<i>Çift Etkileşmeli</i>
$^{10}C \rightarrow ^{10}B$	1.97200	-
$^{14}O \rightarrow ^{14}N$	1.98800	-
$^{26}Al \rightarrow ^{26}Mg$	1.99664	1.9918
$^{34}Cl \rightarrow ^{34}S$	1.99966	1.9898
$^{38}K \rightarrow ^{38}Ar$	2.00300	1.9850
$^{42}Sc \rightarrow ^{42}Ca$	2.00284	1.9849
$^{46}V \rightarrow ^{46}Ti$	2.00438	1.9786
$^{50}Mn \rightarrow ^{50}Cr$	2.00898	1.9726
$^{54}Co \rightarrow ^{54}Fe$	2.00490	1.9578
$^{62}Ga \rightarrow ^{62}Zn$	1.98568	1.8886
$^{66}As \rightarrow ^{66}Ge$	1.99104	1.8576
$^{74}Rb \rightarrow ^{74}Kr$	1.98968	1.8550

Tablo 6.2'den görüldüğü gibi δ_{C1} negatif değerler de alabilmektedir. Buradaki süperizinli beta geçişleri açısız momentumları 0^+ ve izospinleri $T = 1$ olan izobar analog haller arasında olmaktadır.

Tablo 6.2 $\delta_{C1}(\%)$ 'in değerinin literatürdeki hesaplar ile karşılaştırılması.

Izobarlar	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
	$\delta_{C1}(\%)$	$\delta_{C1}(\%)$	$\delta_{C1}(\%)$	$\delta_{C1}(\%)$	$\delta_C(\%)$	$\delta_{C1}(\%)$
$^{10}C \rightarrow ^{10}B$	1.399	-	0.070	0.008	-0.01	0.010
$^{14}O \rightarrow ^{14}N$	0.578	0.01	0.050	0.038	0.22	0.050
$^{26}Al \rightarrow ^{26}Mg$	0.168	0.01	0.011	-0.002	0.27	0.040
$^{34}Cl \rightarrow ^{34}S$	0.017	0.06	0.049	0.002	0.34	0.105
$^{38}K \rightarrow ^{38}Ar$	-0.150	0.11	0.060	0.271	0.32	0.100
$^{42}Sc \rightarrow ^{42}Ca$	-0.142	0.11	0.012	0.314	0.43	0.060
$^{46}V \rightarrow ^{46}Ti$	-0.219	0.01	0.022	0.006	-	0.095
$^{50}Mn \rightarrow ^{50}Cr$	-0.449	0.004	0.009	0.002	-	0.055
$^{54}Co \rightarrow ^{54}Fe$	-0.245	0.005	0.015	0.011	0.46	0.040
$^{62}Ga \rightarrow ^{62}Zn$	0.716	-	-	-	1.56	0.330
$^{66}As \rightarrow ^{66}Ge$	0.448	-	-	-	0.78	0.250
$^{74}Rb \rightarrow ^{74}Kr$	0.516	-	-	-	0.70	0.130

^(a) (Çalık, Gerçeklioğlu and Salamov, 2009),

^(b) (Ormand and Brown, 1989),

^(c) (Barker, 1994), R-matris teorisi kullanılarak bulunan $\delta_{C1}(\%)$ değerleri,

^(d) (Barker, 1994), sadece saf Coulomb CD (charge-dependent, yüke bağlı) etkileşmesi kullanılarak bulunan $\delta_{C1}(\%)$ değerleri,

^(e) (Sagawa et al., 1996), $\delta_{C1}(\%)$ 'in tek başına değil, $\delta_C(\%) = \delta_{C1} + \delta_{C2}$ değerleri,

^(f) (Towner and Hardy, 2002).

Blin-Stoyle, δ_C düzeltilmesinin pozitif olması gerektiğini öne sürmüştür (Blin-Stoyle, 1969). Fakat Tablo 6.2’de bazı negatif değerler de elde edilmiştir (Çalık et al., 2009). Ancak, Blin-Stoyle 4. bölümde anlatılan ve (4.176) denklemiyle verilen toplam kuralını göz önüne almamıştır. Onun görüşü sadece kabuk ve Fermi gaz modeli ile sınırlıdır. Yani, kolektif etkileşmeleri düşünmemiştir. Bu çalışmada, $\hat{h}$ ile gösterilen ve (4.3) denklemiyle verilen restorasyon terimi, rezidüel kolektif kuvvetleri temsil etmektedir. Toplam kuralına göre iki tane sonuç çıkarabiliriz. Birincisi, Fermi beta geçişlerinin matris elemanları keyfi değerler alamaz yani, toplam kuralı matris elemanlarının değerini sınırlar. İkincisi, β^- ve β^+ geçişleri birbirlerinden bağımsız düşünülemez, toplam kuralı her ikisini de içerir;

$$\sum_i \left\{ \left| M_{\beta^-}^i \right|^2 - \left| M_{\beta^+}^i \right|^2 \right\} = 2T_0$$

$$\sum_i \left| M_{\beta^-}^i \right|^2 = 2T_0 + \sum_i \left| M_{\beta^+}^i \right|^2. \quad (6.4)$$

Toplam kuralına göre, süperizinli Fermi geçişlerinin matris elemanları $\sqrt{T_0}$ ’dan daha büyük değerlere sahip olabilir (Pyatov et al., 1979), bu da δ_{C1} ’in negatif değerler alabileceği anlamına gelir. Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse; biz $|M_F|^2 = 2(1 - \delta_{C1})$ ifadesinden δ_{C1} değerini hesaplıyoruz. Yani,

$$\delta_{C1} = \frac{2 - |M_F|^2}{2}$$

olmaktadır. Eğer bulduğumuz matris elemanının karesi 2'den büyükse δ_{C1} değerimiz negatif değer almaktadır. (6.4) denkleminde tekrar bakacak olursak, oradaki matris elemanlarının kareleri, olası bütün geçişlerin matris elemanlarının kareleri toplamıdır. Burada ana çekirdeğimiz için $T_0 = 1$ olduğuna göre eşitliğin sağ tarafı $2 + \sum_i |M_{\beta^+}^i|^2$ halini alır. Ana çekirdekten β^+ bozulması da olacağından, (6.4) denkleminin sağ tarafı 2'den büyük olur. Dolayısıyla olası β^- geçişleri içinden en izinli olanının matris elemanının karesi de 2'den büyük olabilir. Bu durumda δ_{C1} negatif değerler alabilir. Tablo 6.2'den görüldüğü gibi literatürdeki değerlerde de negatif sonuçlar vardır (Barker, 1994; Sagawa et al., 1996). (Sagawa et al., 1996)'da sadece toplam δ_C ($\delta_C = \delta_{C1} + \delta_{C2}$) değerleri verilmiştir. Bu da bize $^{10}C \rightarrow ^{10}B$ geçişindeki δ_{C1} değerinin negatif olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte, Pyatov (Pyatov et al., 1979) $^{50}Mn \rightarrow ^{50}Cr$ ve $^{54}Co \rightarrow ^{54}Fe$ geçişlerinde δ_{C1} 'i negatif olarak bulmuştur.

Deneysel ft değerleri, δ'_R , δ_{NS} , δ_{C1} , δ_{C2} ve Ft değerleri Tablo 6.3'te listelenmiştir. Ft değerleri denklem (5.10) kullanılarak hesaplanmıştır.

Tablo 6.3'deki onbir datanın ortalama $\overline{Ft}$ değeri Şekil 6.1'de de gösterildiği gibi,

Tablo 6.3 Süperizinli Fermi beta geçişi yapan onbir çekirdeğin Ft değerleri. ft , $\delta'_R(\%)$, $\delta_{NS}(\%)$, $\delta_{C2}(\%)$ ve $\Delta_R^V = (2.361 \mp 0.038)\%$ değerleri (Towner and Hardy, 2008)'den alınmıştır. Δ_R^V 'nin değeri, Ft 'yi ifade eden (5.10) denklemine eklenmiştir.

Ana Çekirdek	ft (s)	$\delta'_R(\%)$	$\delta_{NS}(\%)$	$\delta_{C1}(\%)$	$\delta_{C2}(\%)$	Ft (s)
^{10}C	3039.5(47)	1.679(4)	-0.345(35)	1.399	0.165(15)	3103.0(51)
^{14}O	3042.5(27)	1.543(8)	-0.245(50)	0.578	0.275(15)	3127.7(34)
^{26m}Al	3037.0(11)	1.478(20)	0.005(20)	0.168	0.280(15)	3140.7(19)
^{34}Cl	3050.0(11)	1.443(32)	-0.085(15)	0.017	0.550(45)	3146.4(24)
^{38m}K	3051.1(10)	1.440(39)	-0.100(15)	-0.150	0.550(55)	3152.3(27)
^{42}Sc	3046.4(14)	1.453(47)	0.035(20)	-0.142	0.645(55)	3148.8(30)
^{46}V	3049.6(16)	1.445(54)	-0.035(10)	-0.219	0.545(55)	3155.3(32)
^{50}Mn	3044.4(12)	1.445(62)	-0.040(10)	-0.449	0.610(50)	3155.0(30)
^{54}Co	3047.6(15)	1.443(71)	-0.035(10)	-0.245	0.720(60)	3148.4(35)
^{62}Ga	3075.5(14)	1.459(87)	-0.045(20)	0.716	1.20(20)	3131.4(72)
^{74}Rb	3084.3(80)	1.50(12)	-0.075(30)	0.516	1.50(25)	3137.5(132)
Ortalama Ft						3140.6(9)

$$\overline{Ft} = 3140.6(9) \text{ s,}$$

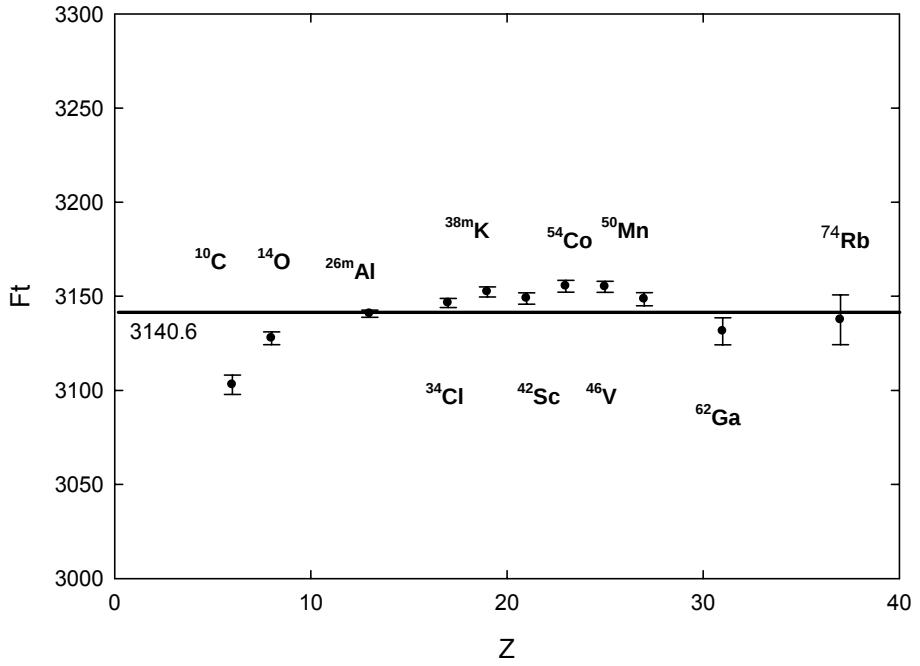
olarak elde edilir (Çalık et al., 2009). Bu sonucu (6.1) denkleminde yerine yazarsak,

$$V_{ud}^2 = 0.9502(8)$$

olur ve bunun da karakökü alınırsa

$$V_{ud} = 0.9748(4)$$

olarak elde edilir (Çalık et al., 2009).



Şekil 6.1 Hesaplanan Ft değerlerinin Z ile değişimi.

Tablo 6.4 CKM matrisinin $(V_{ud}^2 + V_{us}^2 + V_{ub}^2)$ üniterliği.

(V_{ud})	(V_{us})	(V_{ub})	Elde Edilen Üniterlik $(V_{ud}^2 + V_{us}^2 + V_{ub}^2)$
(Çalık et al., 2009)			
0.9748(4)	0.2196(23) (a)	0.0036(10) (a)	0.9985(13)
0.9748(4)	0.2234(18) (b)	0.00361(47) (b)	1.0001(11)
0.9748(4)	0.2259(18) (c)	0.00367(47) (c)	1.0013(11)
0.9748(4)	0,2257(21) (d)	0,00431(30) (d)	1.0012(12)

(a) (Towner and Hardy, 2003),

(b) (Wilkinson, 2005-a)

(c) (Hardy and Towner, 2005)

(d) (Yao, 2006)

CKM matrisinin $(V_{ud}^2 + V_{us}^2 + V_{ub}^2)$ üniterliği Tablo 6.4'te gösterilmiştir. Üniterlik için, V_{ub} ve V_{us} 'nin sayısal değerleri (Towner and Hardy, 2003), (Wilkinson, 2005-a), (Hardy and Towner, 2005), (Yao, 2006)'dan alınmıştır. Herhangi bir keyfiyet katmamak için, CKM matrisinin üniterliğinin hesaplanmasında V_{ub} ve V_{us} elemanları için farklı datalar kullanılmıştır.

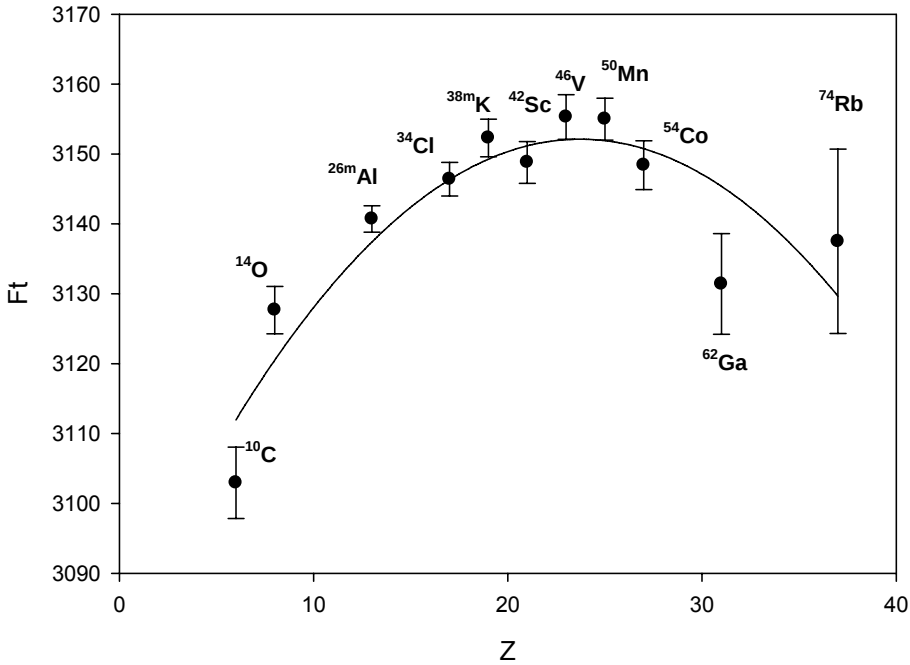
Tablo 6.4'ten elde edilen sonuçların ortalaması;

$$\overline{V_{ud}^2 + V_{us}^2 + V_{ub}^2} = 1.0003(12) \quad (6.5)$$

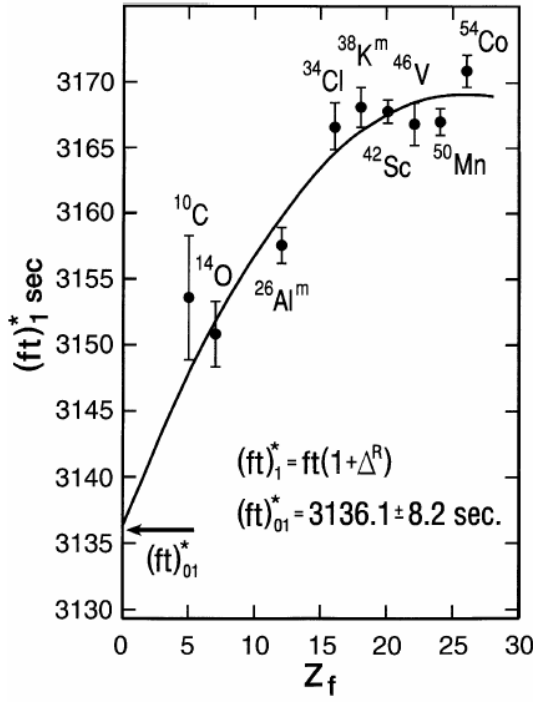
şeklindedir (Çalık et al., 2009). Bu sonuç (Towner and Hardy, 2008)'deki sonuçla neredeyse aynıdır.

Burada önemli olan bir nokta vardır; bu matris elemanları üzerinde parçacık fiziğinde kabul edilmiş ortak bir fikir yoktur. Farklı gruplar farklı dataları kullanmaktadır. Parçacık fiziğindeki bu datalar üzerindeki uyumsuzluk, üniterlik problemini doğrudan etkilemektedir. Denklem (5.6)'nın en büyük parçası V_{ud} 'dir, yani, üniterlik durumu daha çok V_{ud} 'nin hassaslığına bağlıdır.

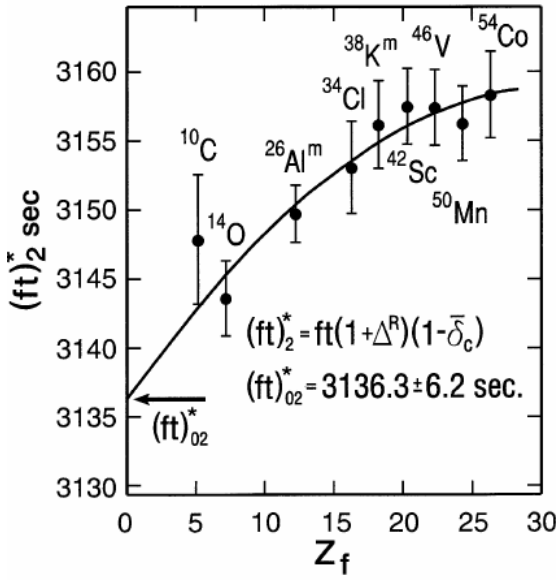
Tablo 6.3'den görüldüğü gibi, bu çalışmadaki sonuçlar (Ormand and Brown, 1989)'daki gibi CVC (Conserved Vector Current-Korunumlu Vektör Akımı) hipotezi ile 0.06% seviyesinde uyumluluk göstermektedir.



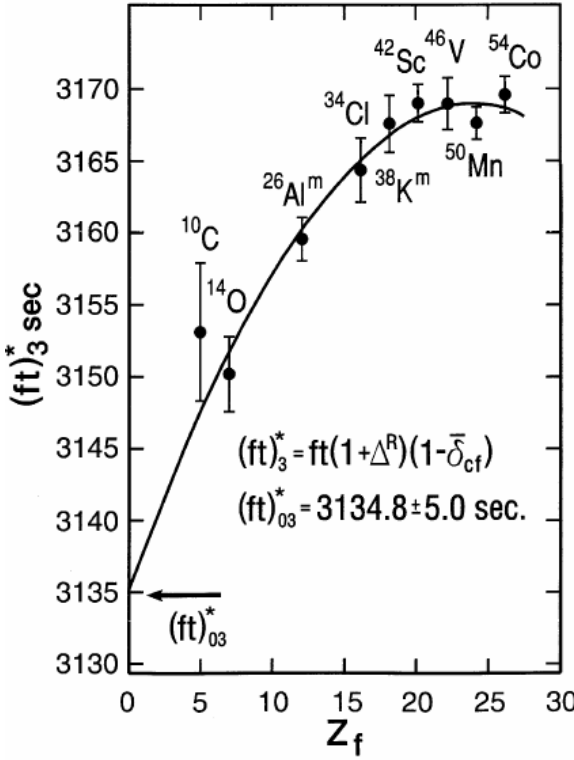
Şekil 6.2 Hesaplanan Ft değerlerinin Z ile kuadratik değişimi.



Şekil 6.3 Wilkinson'nun deneysel ft değerlerin Z ile değişimi (Wilkinson, 2002-a).



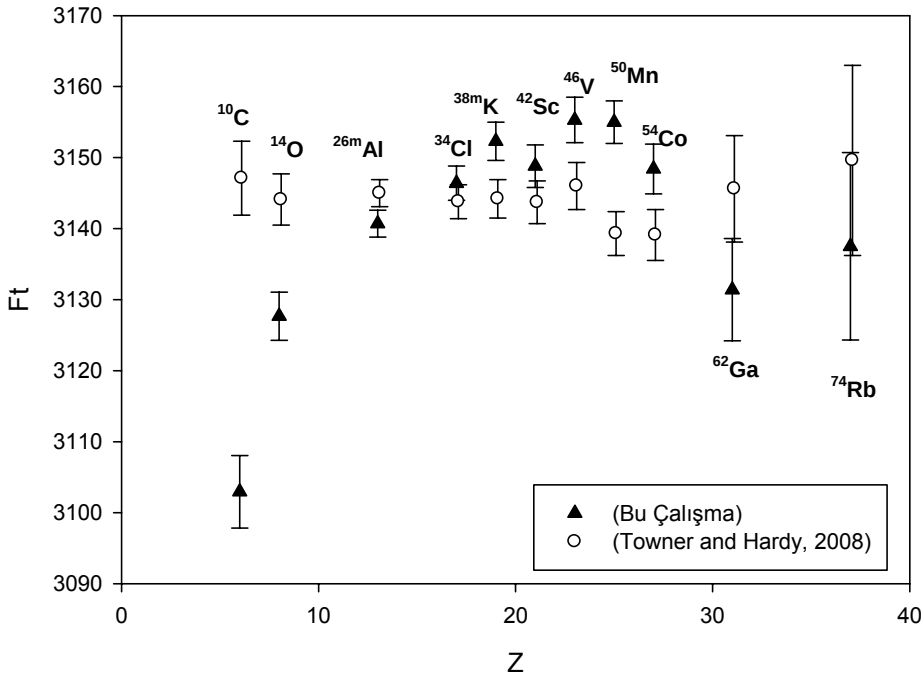
Şekil 6.4 $\bar{\Delta}_c$ (Δ_c lerin ortalaması) düzeltilmesi yapıldıktan sonraki ft 'lerin Z ile değişimi (Wilkinson, 2002-a).



Şekil 6.5 $\bar{\delta}_{cf}$ (fluktasyon değerlerinin ortalaması) düzeltilmesi yapıldıktan sonraki ft 'lerin Z ile değişimi (Wilkinson, 2002-a).

Bulduğumuz bu sonuçlar CVC hipotezi ile uyuşmakla birlikte, Tablo 6.3 ve Şekil 6.2, Ft değerlerinin Z 'ye göre değişiminin, Wilkinson'un öngördüğü gibi (Wilkinson, 1993; Wilkinson, 2002-a), kuadratik bir şekilde değiştiğini göstermektedir. Wilkinson deneysel ft sonuçlarının Z ile kuadratik olarak değiştiğini elde etmiştir (Şekil 6.3). Wilkinson nükleer uyumsuzluk düzeltmesini yaptıktan sonra da Ft 'nin kuadratik bir değişim izlediğini elde etmiştir, bu çok önemlidir. Fakat Wilkinson, Ft 'nin Z 'ye göre kuadratik bir şekilde davrandığını her çekirdek için elde ettiği δ_c değerlerini doğrudan kullanmayarak elde etmiştir (Wilkinson, 2002-a). Nükleer uyumsuzluk için ilk önce ortalama değer kullanmış (Şekil 6.4), ikinci olarak da fluktasyon değerlerini

kullanmıştır (Şekil 6.5). Sonuç olarak, Wilkinson nükleer uyumsuzluk düzeltilmesi için kendi hesapladığı değerleri doğrudan kullanmış olsaydı, Ft 'nin Z 'ye göre değişimini kuadratik olarak elde edemeyecekti. Bu çalışmada ise, herbir çekirdek için kendi nükleer uyumsuzluk düzeltilmesi değerleri doğrudan kullanılmıştır. Bu durum, burada kullanılan metodun güvenilirliğini arttırmaktadır.



Şekil 6.6 Bu çalışmadaki sonuçlar ile (Towner and Hardy, 2008)'deki sonuçların karşılaştırılması.

Şekil 6.6'da, (Towner and Hardy, 2008) ve bu çalışmada hesaplanan Ft değerleri karşılaştırma yapmak amacıyla birlikte verilmiştir. Yukarıda da bahsedildiği gibi δ_{C2} değerleri (Towner and Hardy, 2008)'den alınmıştır. Şekil 6.6, bizim δ_{C1} değerlerimizin Ft 'nin Z ile değişimini kuadratik hale getirdiğini göstermektedir. Sonuç olarak, buradaki önemli nokta δ_{C2} 'yi değil, δ_{C1} 'i doğru olarak hesaplamaktır. Çünkü, nükleer uyumsuzluğun hesaplanmasında, (Towner and Hardy, 2008) ile bu çalışma arasındaki tek fark δ_{C1} 'in sayısal değerleridir.

Burada ilginç olan başka bir nokta da, sadece (Towner and Hardy, 2008)'de değil, diğer bir çok çalışmada da (Ormand and Brown, 1989; Barker, 1994; Ormand and Brown, 1995; Sagawa et al., 1996) kuadratiklikten bahsedilmemesidir.

Sonuç olarak, nükleer uyumsuzluk düzeltmesi için farklı bir metot kullanılarak farklı sayısal değerler elde edilmiştir. Böylece, nükleer kabuk potansiyelin izovektör kısmının etkisinin izolasyonun Pyatov metodu ile yapılmasının ne kadar önemli olduğu nükleer uyumsuzluk düzeltmesi hesaplarında görülmüştür.

6.2 Ana Çekirdeğin Taban Durumunun İzospin Safsızlığı ve IAR Durumlarının İzospin Özellikleri

Bu bölümde, süperizinli Fermi beta geçişi yapan ^{10}C , ^{14}O , ^{26}Al , ^{34}Cl , ^{38}K , ^{42}Sc , ^{46}V , ^{50}Mn , ^{54}Co , ^{62}Ga , ^{66}As , ^{74}Rb oniki çekirdeğin, ana çekirdeklerinin taban durumlarının izospin karışımları, IAR durumlarının izospin yapısı ve bu süperizinli geçişlerin Ft değerleri çekirdekler arasındaki çift etkileşme (pairing) etkisi de gözönünde bulundurularak ve Fermi etkin etkileşme terimi özuyumlu bir biçimde eklenerek elde edilmiştir.

Süperizinli beta geçişlerinden yararlanarak CKM matrisinin V_{ud} matris elemanının bulunmasının önemi bir önceki bölümde anlatılmıştır. Bundan başka, süperizinli beta geçişleri yapan çekirdeklerde IAR durumlarının izospin özelliklerinin belirlenmesi ve ana çekirdek taban durumunda izospin karışımının incelenmesi de oldukça önemlidir.

İzospin karışımlarının etkileri, süperizinli Fermi beta geçişlerinde zayıf etkileşme sabiti G_V 'nin bulunmasında, izobar analog rezonans durumların enerjisinin ve enerji genişliğinin bulunmasında ve izomultipler seviyelerin enerjilerinin bulunmasında çok önemli rol oynamaktadır (Blin-Stoyle, 1973; Raman et al., 1975; Auerbach et al., 1972; Lane and Mekjian, 1973). İzospin karışımlarının doğru bir biçimde belirlenmesinin oldukça önemli olduğu açıktır. İzospin karışımına Coulomb potansiyeli neden olmaktadır. İzotopik invaryansın bozulması protonlar arasındaki karşılıklı elektromanyetik etkileşmenin sonucu ortaya çıkar. Daha doğrusu buna Coulomb potansiyelinin çekirdek boyunca değişmesi neden olur. Bu değişme çok küçük olduğu

için bütün çekirdeklerin düşük enerjili seviyelerinin izospin terimi iyi bir kuantum sayısıdır (Bohr and Mottelson, 1969).

Çekirdeklerin taban durumlarının izospin karışımları birçok farklı modelde hesaplanmıştır. Bunlardan bir tanesi $T = T_0 + 1$ izospinli kolektif izovektör monopol uyarılmış durumlarının enerjilerini bulmak için kullanılan hidrodinamik modeldir (Bohr, Damgaard and Mottelson, 1967). Bu modelde, izospin karışım oranları $N = Z$ olan çekirdekte, $Z^{8/3}$ ile orantılı bir şekilde artmaktadır. Kabuk model kullanılarak yapılan hesaplar (Towner and Hardy, 1973; Khadkikar and Warke, 1969; Sliv and Kharitomov, 1965) büyüklük bakımından Bohr and Mottelson'un öngördüğünden biraz daha büyük değerler almaktadır. İzospin karışımları üzerine teorik hesaplamalar Hartree-Fock ve RPA veya Tamm-Dankoff yaklaşımı yapılarak da yapılmıştır (Hamamoto and Sagawa, 1993; Colo et al., 1995).

İzobar analog durumların özellikleri üzerine yapılan çalışmalar (Zaretskii and Urin, 1967; Gaponov and Lyutostanskii, 1972; . Fajans, 1971; Birbrair and Sadovnikova, 1974; Sagawa et al., 1998)'de verilmiştir. (Zaretskii and Urin, 1967; Gaponov and Lyutostanskii, 1972; Fajans, 1971; Birbrair and Sadovnikova, 1974)'de IAR özellikleri, sonlu Fermi sistemi teorisi ile incelenmiştir. (Sagawa et al., 1998)'de ise IAR'nin genişliği ve izospin karışım oranları Feshbach izdüşüm metodu ile incelenmiştir.

Yukarıdaki bahsedilen çalışmalarda, rezidüel etkileşme kabuk model potansiyeline özuyumlu bir şekilde bağlı değildir. Ortalama potansiyelde izovektör teriminin olması, rezidüel etkileşmenin onunla bağlı seçilmesini zorunlu kılar. Aksi taktirde sistemin başlangıçta izotop

invariant olan Hamilton operatörünün çekirdek kuvvetleri ile ilgili kısmının izotopik invaryansı bozulur. Bu yüzden çekirdeklerin taban durumlarında istenmeyen izospin kirliliği meydana gelir.

Burada, başlangıçta ele alınan nükleer Hamiltoniyenin (elektromanyetik etkileşmeler olmadan) izotopik invaryansı restore edilecektir.

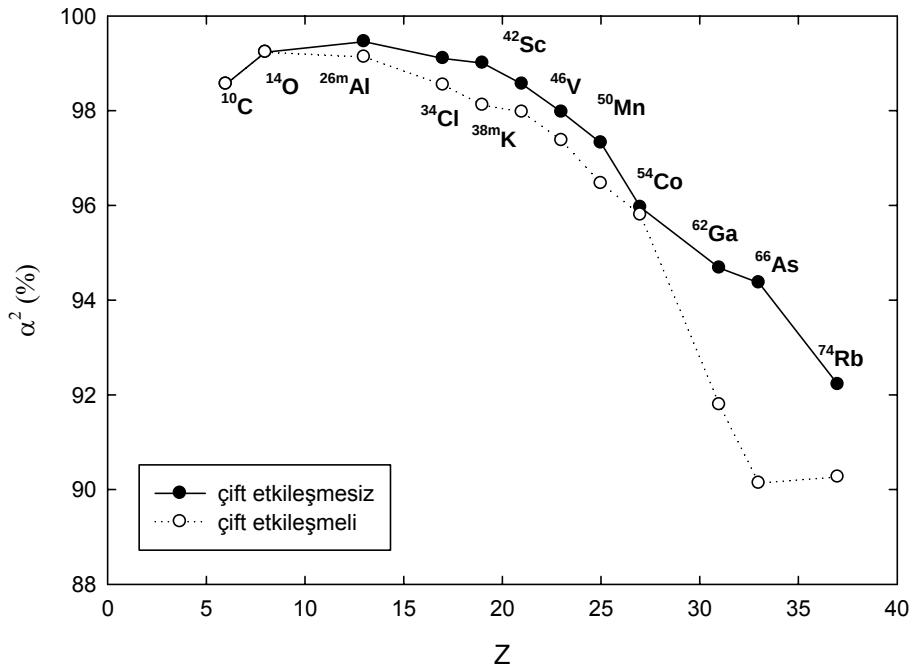
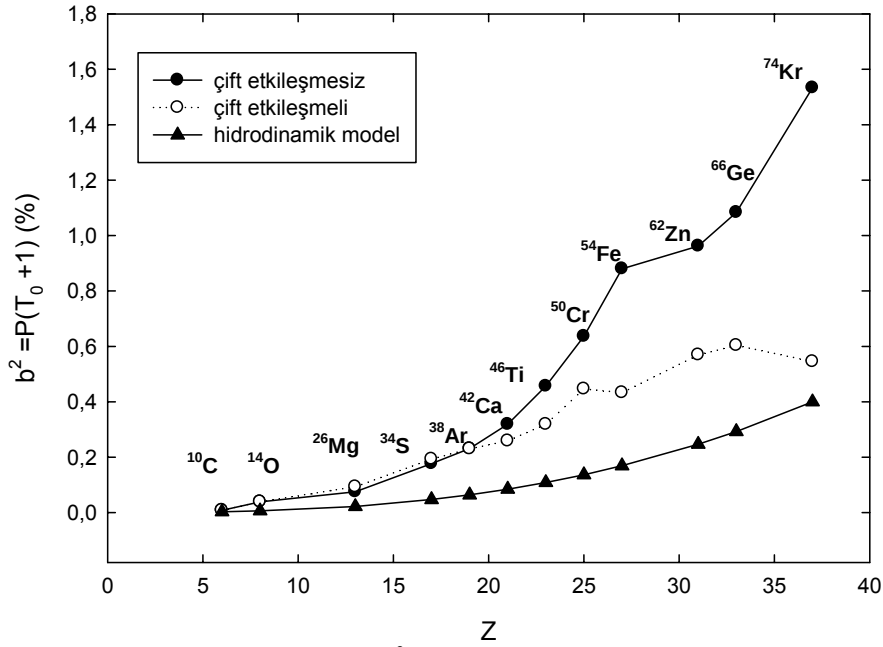
(Pyatov et al., 1979) ve (Babacan et al., 2004)'de Pyatov yöntemine (Pyatov and Salamov; 1977) dayanarak çekirdek hamiltoniyeninin izospin simetrisi restore edilmiş ve bu nedenle Fermi etkin etkileşme sabiti ortalama alan potansiyeli ile ilgili bir biçimde bulunmuştur. (Pyatov et al., 1979)'de çift etkileşme gözönüne alınmadan, çift-çift çekirdeklerin taban durumlarında Coulomb izospin karışımları hesaplanmıştır. (Babacan et al., 2004) ve (Kucukbursa, et al., 2004)'de ise Coulomb izospin karışımı ve IAR durumlarının izospin yapısı çift etkileşme gözönüne alınarak Pyatov yöntemi uygulanarak hesaplanmıştır. Bu çalışmada ise, çift etkileşme de gözönüne alınarak ve Pyatov yöntemi uygulanarak, süperizinli Fermi beta geçişi yapan çekirdeklerde ana çekirdeğin taban durumunun Coulomb izospin karışımları, IAR durumlarının izomultiplet yapısı ve süperizinli beta geçiş Ft değerleri incelenmiştir. Hesaplama sonuçları literatürdeki deneysel ve teorik değerler ile karşılaştırılmıştır.

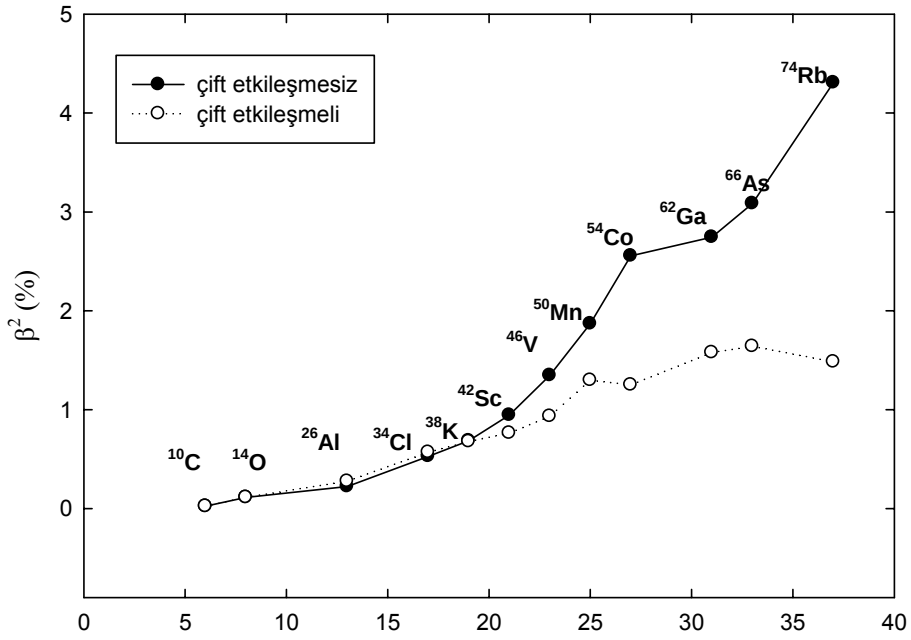
Yukarıda isimleri belirtilen süperizinli Fermi beta geçişi yapan çekirdeklerin taban durumlarındaki $T_0 + 1$ isospin karışımlarının sözü edilen yöntemle hesaplanan değerleri Şekil 6.7'de hidrodinamik model hesaplamaları ile karşılaştırılmıştır. Şekilde homojen eğri ile çift etkileşmesiz hesaplama sonuçları, noktalı eğri ile ise çift etkileşme göz

önüne alınarak yapılan hesaplama sonuçları gösterilmiştir. Şekildeki diğer eğri ise hidrodinamik model sonuçlarını göstermektedir. Şekilden de görüldüğü gibi her üç durumda da $b^2(\%)$ değeri Z arttıkça artmaktadır. A 'sı küçük olan çekirdeklerde çift etkileşmesiz değerler ile çift etkileşmeli değerler birbirine çok yakındır. A değeri arttıkça çift etkileşmesiz değerler ile çift etkileşmeli değerler arasındaki fark artmaktadır. İlk beş çekirdekte (C, O, Mg, S, Ar) her iki değer de neredeyse aynı iken Ca'dan sonraki değerlerde farklanma gözlemlenmektedir. Bu doğal bir sonuçtur. Burada etkili olan coulomb, izovektör ve çift etkileşme potansiyelleridir. İzovektör potansiyeli $(N-Z)/A$ ile orantılıdır. A değeri küçük olduğunda izovektor potansiyeli çift etkileşme potansiyelinden büyüktür. A değeri arttıkça izovektor potansiyeli azaldığı (burada bütün çekirdekler için $N-Z = \text{sabittir}$) için çift etkileşme potansiyeli daha etkili hale gelir.

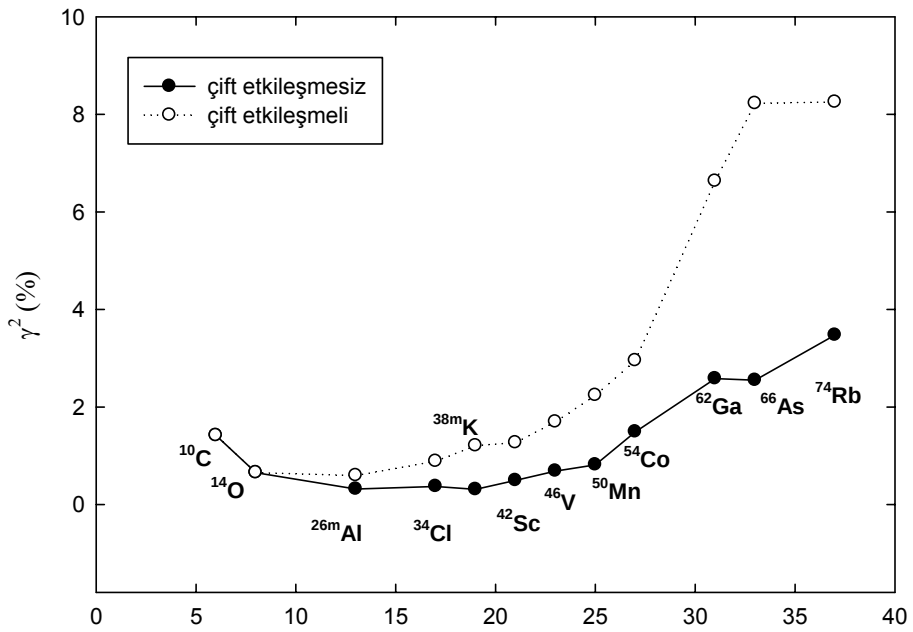
IAR'nın izospin bileşenleri T_0 , $T_0 + 1$ ve $T_0 - 1$ 'ı temsil eden $\alpha^2(\%)$, $\beta^2(\%)$, $\gamma^2(\%)$ nin hesaplanan değerleri sırasıyla Şekil 6.8, Şekil 6.9 ve Şekil 6.10'da verilmiştir. Bütün şekillerde düz çizgi çift etkileşmesiz hesapları, kesikli çizgi ise çift etkileşmeli hesapları temsil eder.

IAR durumuna T_0 izospin durumundan gelen katkıyı ifade eden $\alpha^2(\%)$ büyüklüğünün Z 'ye göre değişim grafiği Şekil 6.8'de verilmiştir. İncelenen çekirdeklerin IAR durumlarına en büyük katkı $\alpha^2(\%)$ 'den gelmektedir. Bütün çekirdekler için, $\alpha^2(\%)$ 'den 90-99 % oranında katkı gelmektedir. Hem çift etkileşmesiz hem de çift etkileşmeli





Şekil 6.9 β^2 (%)'nin Z ile değişimi.



Şekil 6.10 γ^2 (%)'nin Z ile değişimi.

hesaplarda Z arttıkça $\alpha^2(\%)$ 'nin değeri azalmaktadır. Bilindiği gibi Coulomb kuvvet Z^2 ile orantılıdır. Z arttıkça coulomb kuvvetinin değeri ve dolayısıyla etkisi arttığı için $\alpha^2(\%)$ nin azalması doğaldır. Şekilden de görüldüğü gibi, çift etkileşme göz önüne alındığında $\alpha^2(\%)$ değerleri çift etkileşmesiz değerlere göre bir miktar azalmaktadır. Bu sonuç, çift etkileşme göz önüne alındığında durum sayısının artması ve β^- geçiş gücünün bu durumlar arasında yeniden dağılımı sonucunda IAR değerinin azalması (bazı durumlarda ise bir birine yakın iki duruma bölünebilir) ile açıklanabilir.

Şekillerden de görüldüğü gibi Şekil 6.7 ve Şekil 6.9 birbirinin aynısıdır. Eşitlik (4.181)'den görülebileceği gibi, $b^2(\%)$ yani, taban durumunun izospin karışımına $T_0 + 1$ 'den katkı $\beta^2(\%)$ ile orantılı olduğu için bu sonuç doğaldır. Bizim sonuçlarımızda bu benzerliği doğrulamaktadır. Böylece, $b^2(\%)$ için geçerli olan fiziksel nicelikler $\beta^2(\%)$ için de geçerlidir. $\beta^2(\%)$ 'den gelen katkı 0.1-4.5 % arasında değişmektedir. $\beta^2(\%)$ değerleri $\alpha^2(\%)$ ve $\gamma^2(\%)$ değerlerine göre oldukça küçüktür.

IAR durumuna $T_0 - 1$ izospin durumundan gelen katkıyı ifade eden $\gamma^2(\%)$ büyüklüğünün Z 'ye göre değişim grafiği Şekil 6.10'da verilmiştir. $\gamma^2(\%)$ değerleri, $\alpha^2(\%)$ değerlerinden oldukça küçüktür. $\gamma^2(\%)$ 'den gelen katkı 0.3-8 % arasında değişmektedir. $\gamma^2(\%)$ değerleri Z arttıkça hem çift etkileşmesiz hemde çift etkileşmeli durumda artmaktadır. Çift etkileşmenin göz önüne alınmasıyla hesaplanmış

γ^2 (%) değerlerinin çift etkileşmesiz sonuçlara göre daha büyük olduğu şekilden açıkça görülmektedir.

Şimdi de, yukarıda belirtilen süperizinli beta geçişleri için Tablo 6.1’de verilen matris elemanlarının doğrudan kullanılmasıyla ft değerlerinin, Bölüm 6.1’de anlatılandan farklı bir şekilde nasıl hesapladığını inceleyelim.

Deneysel ft ’nin zayıf vektör çiftlenim sabiti G_V ’ye şu şekilde bağlı olduğu (5.2) bölümünden bilinmektedir;

$$ft = \frac{K}{G_V^2 |M_F|^2} . \quad (6.6)$$

Burada,

$$K / (\hbar c)^6 = 2\pi^3 \hbar \ln 2 / (m_e c^2)^5 = (8120.271 \pm 0.012) \times 10^{-10} \text{ GeV}^{-4} s ,$$

$$G_V = G_F V_{ud} , \quad (6.7)$$

ve

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.16639 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

oldukları da tekrar hatırlanacak olursa;

$$ft = \frac{K}{G_F^2 V_{ud}^2 |M_F|^2} \quad (6.8)$$

olur. V_{ud} 'nin değeri de

$$V_{ud} = 0.97418$$

(Towner and Hardy, 2008)'den yukarıdaki gibi alınır ve diğer ifadeler de (6.8)'de yerlerine yazılırsa;

$$ft = \frac{6289.33}{|M_{LAR}|^2}. \quad (6.9)$$

olur.

Süperizinli Fermi beta geçişleri için hesaplanan ft değerleri Tablo 6.5'de verilmiştir. ft değerleri denklem (6.9) kullanılarak hesaplanmıştır. İkinci ve üçüncü sütunlar çift etkileşmeli ve çift etkileşmesiz olarak bizim yaptığımız hesapları göstermektedir. Diğer sütunlar, literatürdeki diğer hesaplamaları göstermektedir. Tablo 6.1, çift etkileşmeli nükleer matris elemanın değerinin çift etkileşmesiz sonuçlara göre daha küçük olduğunu göstermekteydi. Böylece, Tablo 6.5'de verilen çift etkileşmeli ft değerlerinin, çift etkileşmesiz değerlere göre daha büyük olduğu görülmektedir. Bu beklenen bir sonuçtur. Çünkü (6.9) denkleminde göre $|M_F|^2$ nin değeri azalırsa, ft 'nin artması doğaldır.

Atomik çekirdeklerin mikroskopik teorisinde, nükleer Hamiltoniyeinin bazı önemli simetrileri kullanılan model tarafından kırılır. Bu çalışmada, izotopik simetri yani, nükleer kuvvetlerin yük bağımsızlığı Coulomb kuvvetleri tarafından kırılmaktadır. Bununla

birlikte, nükleer kabuk model Hamiltoniyenindeki izovektör terimi de izotopik invaryanslığı kırar. Bu kırılma doğal değildir ve bunun dalga fonksiyonlarındaki ve matris elemanlarındaki etkisinin giderilmesi gerekmektedir. Bu nokta literatürdeki çalışmalarda vurgulanmamıştır. Sözü edilen düzeltme, Pyatov restorasyon metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu restorasyon metodu, kabuk model potansiyeline ve rezidüel etkileşmenin ayrılabilirliğinin kabul edilmesine dayanır. Restorasyondan sonra model keyfi parametrelere bağlı kalmaz.

Tablo 6.1'den görüldüğü gibi, rezidüel kuvvetlerin (kolektif etkilerin) hesaba alınmasıyla, Coulomb karışımından dolayı geçiş matris elemanının karesinin değeri 2'den büyük olur. Yani, δ_{C1} negatif değerler alabilir. Bununla birlikte, bu sonuçlar sadece çift etkileşmesiz hesaplamalarda görülür. Çift etkileşmenin etkisi göz önüne alınınca, δ_{C1} değerleri pozitif olacaktır.

Tablo 6.5'ten görüldüğü gibi, çift etkileşmesiz hesaplardaki ft değerlerinin daha önceki çalışmalarla aynı mertebede olmasına rağmen, çift etkileşmeli ft değerleri bunlardan daha büyük çıkmıştır. Sonuç olarak, çift etkileşmenin göz önüne alınması izobar analog haller arasındaki geçiş olasılığını azaltır.

Tablo 6.5 Süperizinli Fermi beta geçişleri için hesaplanan ft değerleri.

Geçişler	Bu çalışma		(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
	<i>Çift Etkileşmesiz</i>	<i>Çift Etkileşmeli</i>						
$^{10}\text{C} \rightarrow ^{10}\text{B}$	3189,28	-	3147.09	3146.75	3146.45	3154.4	3149.7	3125.8
$^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}$	3162,95	-	3144.12	3145.63	3143.07	3142.0	3146.4	3144.1
$^{26}\text{Al} \rightarrow ^{26}\text{Mg}$	3149,96	3157,61	3145.04	3146.65	3145.11	3146.0	3148.3	3155.5
$^{34}\text{Cl} \rightarrow ^{34}\text{S}$	3145,20	3160,79	3143.81	3145.42	3144.29	3153.5	3148.9	3163.4
$^{38}\text{K} \rightarrow ^{38}\text{Ar}$	3139,96	3168,43	3144.22	3145.93	3144.60	3153.0	3147.8	3161.9
$^{42}\text{Sc} \rightarrow ^{42}\text{Ca}$	3140,21	3168,59	3143.71	3149.41	3149.52	3150.8	3154.8	3158.6
$^{46}\text{V} \rightarrow ^{46}\text{Ti}$	3137,79	3178,68	3145.96	3148.49	3148.19	-	3153.5	3161.9
$^{50}\text{Mn} \rightarrow ^{50}\text{Cr}$	3130,61	3188,35	3139.31	3144.81	3146.65	-	3153.1	3157.7
$^{54}\text{Co} \rightarrow ^{54}\text{Fe}$	3136,98	3212,45	3139.10	3144.91	3145.83	3147.6	3152.5	3165.8
$^{62}\text{Ga} \rightarrow ^{62}\text{Zn}$	3167,34	3330,15	3145.55	3131.39	-	-	-	-
$^{66}\text{As} \rightarrow ^{66}\text{Ge}$	3158,82	3385,73	-	-	-	-	-	-
$^{74}\text{Rb} \rightarrow ^{74}\text{Kr}$	3160,98	3390,47	3149.65	3156.99	-	-	-	-

- (a) (Hardy and Towner, 2005),
- (b) (Towner and Hardy, 2008),
- (c) (Towner and Hardy, 2002),
- (d) (Sagava, Van Giai, and Suzuki, 1996),
- (e) (Ormand and Brown, 1995),
- (f) (Barker, 1994).

EKLER

Ek.1 İkinci Kuantumlama

Özdeş parçacıklar birbirlerinin benzeri olduklarından, kendilerine özgü özelliklerinden birisiyle birbirlerinden ayırtedilemezler. Klasik mekanikte herhangi bir halde özdeş parçacıkları sıralamak olasıdır ve parçacıklar yörüngelerine göre ayırtedilebilirler. Fakat kuantum mekaniğinde yörünge kavramı yoktur. Parçacıkları birbirlerinde ayırtetmek olanaksızlaşır. Kuantum mekaniğinde özdeş parçacıkları birbirlerinden ayırtetmek için sistemin dalga fonksiyonundan yararlanılır (Erbil H.H., 1990). N tane özdeş parçacıktan oluşan bir sistem,

$$\psi = \psi(r_1, \sigma_1, r_2, \sigma_2, \dots, r_N, \sigma_N) \quad (E1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $r_i (i = 1, 2, \dots, N)$ yervektörleri, $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, N)$ spinleri temsil eder. 1 ve 2 numaralı parçacıklar yerdeğiştirirse,

$$\psi' = \psi'(r_2, \sigma_2, r_1, \sigma_1, \dots, r_N, \sigma_N) \quad (E2)$$

olur. Yani;

$$\psi' = \hat{P} \psi$$

olur. Burada $\hat{P}$, 1 ve 2 numaralı parçacıkların yerlerini değiştiren operatördür. Bu operatörün üniter olduğu kabul edilir ve daha genel olarak parite operatörü olarak isimlendirilirse,

$$\hat{P}|\psi\rangle = p|\psi\rangle \mp |\psi\rangle \quad (E3)$$

olur. Eğer $p = +1$ ise böyle bir dalga fonksiyonuna çift pariteli veya simetrik fonksiyon adı verilir. Bu özelliklere uyan parçacıklar tamsayı spinlidir ve **bozon** (foton, α parçacığı,...) olarak adlandırılır. Eğer $p = -1$ ise böyle bir dalga fonksiyonuna tek pariteli veya anti-simetrik fonksiyon denir. Bu özelliklere uyan parçacıklar ise yarım-tamsayı spinlidir ve **fermiyon** (elektron, proton, nötron...) olarak isimlendirilir (Erbil H.H., 1990).

N tane parçacıktan oluşan bir sistemde herbir parçacığın dalga fonksiyonları ϕ ile temsil edilirse toplam dalga fonksiyonu,

$$\psi(1,2,\dots,N) = \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2)\dots\phi_\nu(N) \quad (E4)$$

olur. Burada $\alpha, \beta, \dots, \nu$ sırasıyla 1, 2, ..., N. parçacığın bulunduğu halleri temsil eder. (E4) denklemi aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$\psi(1,2,\dots,N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_p (-1)^p \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2)\dots\phi_\nu(N) \quad (E5)$$

ve

$$\psi(1,2,\dots,N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_\alpha(1) & \phi_\alpha(2) & \cdots & \phi_\alpha(N) \\ \phi_\beta(1) & \phi_\beta(2) & \cdots & \phi_\beta(N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_\nu(1) & \phi_\nu(2) & \cdots & \phi_\nu(N) \end{vmatrix}. \quad (E6)$$

(E6) denklemi “**Slater**” determinantı olarak isimlendirilir. Sistemde iki parçacığın yerdeğiştirmesi (E6) determinantındaki iki sütunun terdeğiştirmesine karşılık gelir. Bu ise determinantın işaret değiştirmesine neden olur (Erbil H.H., 1990). Bu determinantı daha basit görmek için iki parçacıklı bir sistem için yazılırsa;

$$\begin{aligned} \psi(1,2) &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \phi_\alpha(1) & \phi_\alpha(2) \\ \phi_\beta(1) & \phi_\beta(2) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_\alpha(1) \phi_\beta(2) - \phi_\alpha(2) \phi_\beta(1)) \end{aligned}$$

olur.

İkinci kuantumlama çok parçacıklı sistemler için oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Yukarıda tanımlanan Slater determinantında birçok gereksiz bilgi vardır. Kuantum mekaniğinde özdeş parçacıkların ayırtedilememesinden dolayı ikinci kuantumlanmada dalga fonksiyonu yerine parçacık sayısı kullanılır. Dolayısıyla önemli olan, herbir $\phi_i(k)$ ($i = \alpha, \beta, \dots, \nu$), ($k = 1, 2, \dots, N$) durumunda kaç tane parçacık bulunacağıdır. Buda parçacık sayısı “ n_i ” ile temsil edilir. (E5)’teki dalga fonksiyonu,

$$|\psi\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_A\rangle \quad (E7)$$

olur. Fermiyonlar için $n_i = 0,1$ ve bozonlar için $n_i = 0,1,2,\dots,\infty$ değerlerini alır. Dalga fonksiyonu yerine artık $|n\rangle$ **parçacık sayısı** kullanılabilir. Burada ihtiyaç olan n 'nin sayısını değiştirecek olan bir operatördür;

$$\hat{a}|n\rangle = |n-1\rangle. \quad (E8)$$

Bu durumlar normalize edilirse,

$$\langle n-1|n-1\rangle = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = 1$$

olur. Yani $\hat{a}^+\hat{a}$ 'nin özdeğeri 1'dir. Fakat $n = 0$ olunca,

$$\hat{a}|0\rangle = |-1\rangle$$

olur. Bu durum fiziksel olarak anlamlı olmaz. Dolayısıyla,

$$\hat{a}|0\rangle = |0\rangle$$

olur. Fakat bu durumda da

$$\langle 0|\hat{a}^+\hat{a}|0\rangle = 0$$

özdeğerine sahip olur. Bu da anlamlı olmaz. Öyleyse,

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle\end{aligned}\tag{E9}$$

olur. Yukarıda tanımlanan $\hat{a}$ operatörüne “**parçacık yoketme operatörü**” denir. Benzer şekilde $\hat{a}^+$ operatörüne de “**parçacık yaratma operatörü**” adı verilir. Bu operatörler arasındaki ilişkiler aşağıdaki şekildedir,

$$\begin{aligned}[\hat{a}, \hat{a}^+] &= 1 \\ [\hat{a}, \hat{a}] &= 0 \\ [\hat{a}^+, \hat{a}^+] &= 0\end{aligned}\tag{E10}$$

ve

$$\begin{aligned}\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^+\} &= \delta_{ij} \\ \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} &= 0 \quad . \\ \{\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^+\} &= 0\end{aligned}\tag{E11}$$

Bozonlar için;

Parçacık sayı operatörü;

$$\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}\tag{E12}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\hat{n}|n\rangle &= n|n\rangle \\ \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle\end{aligned}\tag{E13}$$

özellikleri vardır.

$n = 0$ olan duruma “**vakum**” durumu denir. $\hat{a}|0\rangle = 0$ şeklindedir.

Ayrıca,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle$$

şeklinde verilir. Yaratma ve yoketme operatörleri arasında da

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^+] = \delta_{ij} \quad , \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \quad , \quad [\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^+] = 0 \tag{E14}$$

bağıntıları geçerlidir. $\hat{n}_i = \hat{a}_i^+ \hat{a}_i$ olarak alınırsa, dalga fonksiyonu,

$$|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \prod_i \frac{(\hat{a}_i^+)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}}|0\rangle$$

olur. Ayrıca,

$$\hat{a}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots\rangle$$

$$\hat{a}_i^+ |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle$$

şeklinde ifade edilebilir.

Fermiyonlar için;

Parçacık sayı operatörü bozonlardaki gibi;

$$\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$$

şeklindedir. Diğer özellikler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \hat{n}|0\rangle &= 0 & , & & \hat{a}^+|0\rangle &= |1\rangle & , & & \hat{a}|0\rangle &= 0 \\ \hat{n}|1\rangle &= |1\rangle & , & & \hat{a}^+|1\rangle &= 0 & , & & \hat{a}|1\rangle &= |0\rangle \end{aligned} \quad (E15)$$

$$\hat{a}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sigma_i (1 - n_i) |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots\rangle ,$$

$$\hat{a}_i^+ |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sigma_i n_i |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle ,$$

$$\sigma_i = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} .$$

Ek.2 – $\hat{T}_-$ Operatörünün Elde Edilmesi

β_- geçişine neden olan $\hat{T}_-$ operatörü parçacık tasvirinde (4.4) ve (4.79) denklemlerinde aşağıdaki gibi ifade edilmişti.

$$\hat{T}_- = \sum_{\substack{m_n, m_p \\ j_n, j_p}} \langle j_p m_p | \hat{t}_- | j_n m_n \rangle \hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_n m_n}$$

Bu denklemin nasıl elde edildiğini inceleyelim:

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n \quad (\text{E16})$$

olan bir fonksiyon ve

$$\bar{f} = \int \psi^* \hat{f} \psi dq \quad (\text{E17})$$

gelişigüzel bir f büyüklüğünün ortalaması ele alınsın (Landau and Lifchitz, 1963). (E16) eşitliği (E17)'de yerine yazılırsa;

$$\bar{f} = \int \sum_n a_n^* \psi_n^* \hat{f} \sum_m a_m \psi_m dq$$

$$\bar{f} = \sum_n \sum_m a_n^* a_m \int \psi_n^* \hat{f} \psi_m dq$$

olur. Burada $f_{nm} \equiv \int \psi_n^* \hat{f} \psi_m dq$ tanımlaması yapılırsa,

$$\bar{f} = \sum_n \sum_m a_n^* a_m f_{nm} \quad (E18)$$

olarak elde edilir. Buradaki her bir f_{nm} değerine n durumundan m durumuna geçişe karşılık gelen matris elemanı denir.

Şimdi de,

$$\hat{F} = \sum_a \hat{f}_a \quad (E19)$$

gibi bir fiziksel operatör ele alınsın (Landau and Lifchitz, 1963). Ayrıca,

$$\psi_{N_1, N_2, \dots, N_N} = \left(\frac{N_1! N_2! \dots N_N!}{N!} \right)^{\frac{1}{2}} \sum \psi_{P_1}(\xi_1) \psi_{P_2}(\xi_2) \dots \psi_{P_N}(\xi_N)$$

olsun. $\psi = \sqrt{N_i} \psi_i$ olur. (E19)'da yazılan ifadenin büyüklüğünün ortalaması;

$$\bar{F} = \int \psi^* \hat{f} \psi d\xi$$

$$\bar{F} = \int \sqrt{N_i} \psi_i^* \hat{f} \sqrt{N_k} \psi_k d\xi$$

$$\bar{F} = \sqrt{N_i} \sqrt{N_k} \int \psi_i^*(\xi) \hat{f} \psi_k(\xi) d\xi$$

olur. $f_{ik} \equiv \int \psi_i^*(\xi) \hat{f} \psi_k(\xi) d\xi$ tanımlaması yapılırsa,

$$\bar{F} = f_{ik} \sqrt{N_i} \sqrt{N_k} \quad (\text{E20})$$

olur. Bu köşegen üzerinde olmayan matris elemanlarına karşılık gelir. Köşegen üzerindeki matris elemanları için;

$$\bar{F} = f_{ii} N_{ii}$$

olarak elde edilir.

İkinci kuantumlama yaratma ve yoketme operatörleri tekrar hatırlanacak olursa;

$$\hat{a}_i |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle,$$

$$\hat{a}_i^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

$$\hat{a}_i^+ \hat{a}_i |n\rangle = n |n\rangle.$$

Ayrıca,

$$a_i^+ a_i = N_i \quad \text{ve} \quad a_i a_i^+ = N_i + 1$$

şeklindedir. Bu operatörler kullanılırsa yukarıda elde edilen (E20) denklemi,

$$\bar{F} = f_{ik} a_i^+ a_k \quad (\text{E21})$$

ve (E19) denklemi,

$$\hat{F} = \sum_{i,k} f_{ik} a_i^+ a_k \quad (\text{E22})$$

olur. Bulunan bu sonuç kullanılarak aradığımız $\hat{T}_-$ operatörünü elde edelim; (E22) ifadesi

$$\hat{F} = \sum_{\substack{j_1, j_2 \\ m_1, m_2}} \langle j_1 m_1 | \hat{f} | j_2 m_2 \rangle \hat{a}_{j_1 m_1} \hat{a}_{j_2 m_2} \quad (\text{E23})$$

şeklinde yazılırsa ve burada alınan keyfi $\hat{f}$ yerine $\hat{t}_-$ yazılırsa

($\hat{T}_- = \sum_{i=1}^A \hat{t}_-(i)$ olduğuna göre $\hat{F}$ operatörü de $\hat{T}_-$ olur);

$$\hat{T}_- = \sum_{\substack{j_1, j_2 \\ m_1, m_2 \\ T_{z_1}, T_{z_2}}} \langle l_1 s_1 j_1 m_1, T T_{z_1} | \hat{t}_- | l_2 s_2 j_2 m_2, T T_{z_2} \rangle \hat{a}_{j_1 m_1} \hat{a}_{j_2 m_2} \quad (\text{E24})$$

olur. (E24)'teki T toplam izotopik spindir ve değeri $\frac{1}{2}$ 'dir. Buna göre,

$$\hat{T}_- = \sum_{\substack{j_1, j_2 \\ m_1, m_2 \\ T_{z_1}, T_{z_2}}} \left\langle l_1 s_1 j_1 m_1, \frac{1}{2} T_{z_1} \left| \hat{t}_- \right| l_2 s_2 j_2 m_2, \frac{1}{2} T_{z_2} \right\rangle \hat{a}_{j_1 m_1} \hat{a}_{j_2 m_2}$$

$$\hat{T}_- = \sum_{\substack{j_1, j_2 \\ m_1, m_2 \\ T_{z_1}, T_{z_2}}} \delta_{l_1 l_2} \delta_{s_1 s_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \left\langle \frac{1}{2} T_{z_1} \left| \hat{t}_- \right| \frac{1}{2} T_{z_2} \right\rangle \hat{a}_{j_1 m_1} \hat{a}_{j_2 m_2} \quad (E25)$$

olur. Burada $\hat{t}_- \left| \frac{1}{2} T_{z_2} \right\rangle$ ifadesi incelenirse,

$$\hat{t}_- \left| \frac{1}{2} T_{z_2} \right\rangle = (sabit) \left| \frac{1}{2} T_{z_2} - 1 \right\rangle$$

olur. Eğer $T_{z_2} = -\frac{1}{2}$ olursa, $T_{z_2} - 1 = -\frac{3}{2}$ olur. Bunun olması imkansızdır.

Çünkü T_z bileşeni ya $-\frac{1}{2}$ (proton) yada $+\frac{1}{2}$ (nötron) olmalıdır. Buna

göre $T_{z_2} = \frac{1}{2}$ olmalıdır. Yani,

$$\hat{t}_- \left| \frac{1}{2} T_{z_2} \right\rangle = (sabit) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} - 1 \right\rangle = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle$$

olur. Öyleyse,

$$T_{z_1} = |p\rangle = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle, \quad T_{z_2} = |n\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

olur. Yani (E24) denklemindeki $1 \rightarrow \text{proton}$ ve $2 \rightarrow \text{nötron}$ 'a karşılık gelir. Bu durumda (E24) denklemi,

$$\hat{T}_- = \sum_{\substack{m_n, m_p \\ j_n, j_p}} \langle j_p m_p | \hat{t}_- | j_n m_n \rangle \left| a_{j_p m_p}^+ a_{j_n m_n} \right\rangle \quad (\text{E26})$$

olur. Görüldüğü gibi (E26) denklemi bizim aradığımız (4.4) ve (4.79) denklemlerinin aynısıdır.

Ek.3 A_{np} Bozon Operatörünün Elde Edilmesi

Kuazi-parçacık bazında restorasyon yaparken (4.82) denklemiyle elde edilen $\hat{T}_-$ operatöründe bazı kısaltmalar yaparken aşağıda yazılan A_{np}^+ ve A_{np} 'ye sırasıyla nötron-proton üretme ve yoketme bozon operatörleri (Soloviev, 1976) adı verilir.

$$A_{np}^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2j_p + 1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_n - m_n} \alpha_{j_p, m_p}^+ \alpha_{j_n - m_n}^+ \quad (E27)$$

$$A_{np} \equiv \frac{1}{\sqrt{2j_p + 1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_p - m_p} \alpha_{j_p - m_p} \alpha_{j_n m_n} \quad (E28)$$

Buradaki amaç, (E27) denkleminde faydalanarak (E28) denklemini elde etmektir. $A_{np} = (A_{np}^+)^+$ olduğuna göre;

$$\begin{aligned} A_{np} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2j_p + 1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_n - m_n} \alpha_{j_p, m_p}^+ \alpha_{j_n - m_n}^+ \right)^+ \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2j_p + 1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_n - m_n} \alpha_{j_p, m_p} \alpha_{j_n - m_n} \end{aligned}$$

olur. Bu son denklemin önündeki negatiflik işareti operatörlerin antikomütatif olmasından dolayı gelir. $j_p = j_n$ ve $m_p = m_n$ olduğuna göre,

$$= -\frac{1}{\sqrt{2j_p+1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_p-m_p} \alpha_{j_p m_p} \alpha_{j_n-m_n}$$

olur. Bütün m_p ve m_n 'lerin üzerinden toplam alındığı için m_p yerine $-m_p$ ve m_n yerine de $-m_n$ yazılabilir;

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\sqrt{2j_p+1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_p+m_p} \alpha_{j_p-m_p} \alpha_{j_n m_n} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2j_p+1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_p+m_p+m_p-m_p} \alpha_{j_p-m_p} \alpha_{j_n m_n} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2j_p+1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_p-m_p+2m_p} \alpha_{j_p-m_p} \alpha_{j_n m_n} \end{aligned}$$

olur. $(-1)^{2m_p} = -1$ 'dir. Çünkü m_p yarımtamsayı olduğuna göre $2m_p$ tek tamsayı olur. Bu (-1) baştaki $(-)$ 'liği yok eder ve sonuç;

$$A_{np} = \frac{1}{\sqrt{2j_p+1}} \sum_{m_p, m_n} (-1)^{j_p-m_p} \alpha_{j_p-m_p} \alpha_{j_n m_n}$$

olarak elde edilir.

Ek.4 $[H_{sqp}+h-V_C, T^\rho]=0$ Olduğunun Doğrulanması

(4.98) denklemiyle $[H_{sqp} - V_C, T^\rho] \neq 0$ 'nin olduğu gösterilmiştir.

Hamiltoniyene ek bir h teriminin eklenmesiyle

$$[H_{sqp} + h - V_C, T^\rho] = 0 \quad (E29)$$

olmaktadır. Öyleyse,

$$[H_{sqp} - V_C, T^\rho] + [h, T^\rho] = 0 \quad (E30)$$

olur. (4.98) denkleminden

$$[H_{sqp} - V_C, T^\rho] = \sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np}^+ - \rho A_{np})$$

olduğuna göre bu denklem (E30)'da yerine yazılırsa, (E29) eşitliğinin doğru olması için,

$$[h, T^\rho] = - \sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np}^+ - \rho A_{np}) \quad (E31)$$

olmalıdır. Şimdi (E31) denkleminin bu şekilde olduğunu ispatlamaya çalışalım.

Pyatov seçtikleri h nin şu şekilde olması gerektiğini öne sürmüştür (Pyatov and Salamov, 1977);

$$h = \sum_{\rho=\pm} \frac{1}{4\gamma_\rho} [H_{sqp} - V_C, T^\rho]^+ [H_{sqp} - V_C, T^\rho].$$

Bu denklemde aşağıdaki gibi kısaltmalar yapılırsa,

$$\begin{aligned} D &\equiv [H_{sqp} - V_C, T^\rho] = \sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np}^+ - \rho A_{np}) \\ D^+ &\equiv [H_{sqp} - V_C, T^\rho]^+ = \sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np} - \rho A_{np}^+) \end{aligned} \quad (E32)$$

$$h = \sum_{\rho=\pm} \frac{1}{4\gamma_\rho} D^+ D \quad (E33)$$

olur.

$$\begin{aligned} [h, T^\rho] &= \sum_{\rho=\pm} \frac{1}{4\gamma_\rho} [D^+ D, T^\rho] \\ &= \sum_{\rho=\pm} \frac{1}{4\gamma_\rho} (D^+ [D, T^\rho] + [D^+, T^\rho] D) \end{aligned} \quad (E34)$$

olur. (4.87) denkleminde

$$T^\rho = \frac{1}{2} \sum_{np} B_{np}^\rho (A_{np}^+ + \rho A_{np})$$

olur. (4.87) ve (E32), (E34)'de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
[h, T^\rho] &= \sum_{\rho=\pm} \frac{1}{4\gamma_\rho} \left(\sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np} - \rho A_{np}^+) \right. \\
&\quad \left[\sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np}^+ - \rho A_{np}) \right] \frac{1}{2} \sum_{np} B_{np}^\rho (A_{np}^+ + \rho A_{np}) \Big) \\
&\quad + \left[\sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np} - \rho A_{np}^+) \right] \frac{1}{2} \sum_{np} B_{np}^\rho (A_{np}^+ + \rho A_{np}) \Big) \sum_{np} E_{np}^\rho(j) (A_{np}^+ - \rho A_{np}) \Big) \\
&= \sum_{\rho=\pm} \frac{1}{4\gamma_\rho} \left(\sum_{np} \frac{(E_{np}^\rho(j))^2}{2} B_{np}^\rho (A_{np} - \rho A_{np}^+) \left([A_{np}^+, A_{np}^+] + \rho [A_{np}^+, A_{np}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \rho [A_{np}, A_{np}^+] - \rho^2 [A_{np}, A_{np}] \right) \right. \\
&\quad + \sum_{np} \frac{(E_{np}^\rho(j))^2}{2} B_{np}^\rho \left([A_{np}, A_{np}^+] + \rho [A_{np}, A_{np}] \right. \\
&\quad \left. \left. - \rho [A_{np}^+, A_{np}^+] - \rho^2 [A_{np}^+, A_{np}] \right) (A_{np}^+ - \rho A_{np}) \right) \\
&= \sum_{\rho=\pm} \frac{1}{4\gamma_\rho} \left(\sum_{np} \frac{(E_{np}^\rho(j))^2}{2} B_{np}^\rho (A_{np} - \rho A_{np}^+) (-2\rho) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{np} \frac{(E_{np}^\rho(j))^2}{2} B_{np}^\rho 2(A_{np}^+ - \rho A_{np}) \right) \\
&= \sum_{\rho=\pm} \frac{1}{4\gamma_\rho} \left(- \sum_{np} (E_{np}^\rho(j))^2 B_{np}^\rho \rho (A_{np} - \rho A_{np}^+) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{np} (E_{np}^\rho(j))^2 B_{np}^\rho (A_{np}^+ - \rho A_{np}) \right) \\
&= \sum_{\rho=\pm} \frac{1}{4\gamma_\rho} \sum_{np} (E_{np}^\rho(j))^2 B_{np}^\rho (-\rho A_{np} + \rho^2 A_{np}^+ + A_{np}^+ - \rho A_{np})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\rho=\pm} \frac{1}{4\gamma_{\rho}} \sum_{np} \left(E_{np}^{\rho}(j)\right)^2 B_{np}^{\rho} \left(2(A_{np}^{+} - \rho A_{np})\right) \\
&= \sum_{\rho=\pm} \sum_{np} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} \left(E_{np}^{\rho}(j)\right)^2 B_{np}^{\rho} (A_{np}^{+} - \rho A_{np}) \tag{E35}
\end{aligned}$$

olur. (4.103) denkleminde

$$\gamma_{\rho} = -\frac{1}{2} \sum_{np} E_{np}^{\rho}(j) (\bar{b}_{np} + \rho b_{np}) = -\frac{1}{2} \sum_{np} E_{np}^{\rho}(j) B_{np}^{\rho}$$

olduğu gösterilmiştir. (4.103) denklemi (E35)'te yerine yazılırsa,

$$= \sum_{\rho=\pm} \sum_{np} \frac{1}{2(-\frac{1}{2} \sum_{np} E_{np}^{\rho}(j) B_{np}^{\rho})} \left(E_{np}^{\rho}(j)\right)^2 B_{np}^{\rho} (A_{np}^{+} - \rho A_{np})$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$[h, T^{\rho}] = -\sum_{np} E_{np}^{\rho}(j) (A_{np}^{+} - \rho A_{np})$$

olarak istenilen sonuca ulaşılmış olur.

Ek.5 γ_ρ 'nın Bir Sabite Eşit Olduğunun Gösterilmesi

(4.102) denklemi ile verilen

$$\gamma_\rho \equiv \langle 0 | \frac{\rho}{2} [[H_{sqp} - V_C, T^\rho] T^\rho] | 0 \rangle$$

ifadesinin bir sabite eşit olduğu gösterilecektir. Pyatov'un önerdiği h aşağıdaki gibi genel bir şekilde ifade edilebilir.

$$h = \frac{1}{2\gamma} [H, F]^+ [H, F] \quad (E36)$$

$$[H + h, F] = 0$$

$$[H, F] + [h, F] = 0$$

olur. (E36) yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$[H, F] + \frac{1}{2\gamma} [[H, F]^+ [H, F], F] = 0$$

$$[H, F] + \frac{1}{2\gamma} ([H, F]^+ [[H, F], F] + [[H, F]^+, F] [H, F]) = 0$$

$$[H, F]^+ = -[F, H] \text{ olduğuna göre,}$$

$$[H, F] + \frac{1}{2\gamma} (-[H, F][[H, F], F] + [-[H, F], F][[H, F]]) = 0$$

$$[H, F] - \frac{1}{2\gamma} \{[H, F], [[H, F], F]\} = 0 \quad (E37)$$

olur. Eğer,

$$\langle [[H, F], F] \rangle \equiv c \quad (E38)$$

gibi bir sabit olursa,

$$[H, F] = \frac{1}{2\gamma} \{[H, F], c\},$$

$$2\gamma[H, F] = [H, F]c + c[H, F],$$

$$2\gamma[H, F] = 2c[H, F],$$

$$\gamma \equiv c = \langle [[H, F], F] \rangle \quad (E39)$$

olarak elde edilir.

Ek.6 Hareket Denkleminin Elde Edilişi

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$$

$$HQ_n^+|\psi\rangle = HQ_n^+|\psi\rangle - Q_n^+H|\psi\rangle + Q_n^+H|\psi\rangle$$

yukarıdaki denklemde olduğu gibi $Q_n^+H|\psi\rangle$ 'yi ekleyip çıkarmak sonucu değiştirmez.

$$HQ_n^+|\psi\rangle = [H, Q_n^+]|\psi\rangle + Q_n^+H|\psi\rangle$$

Soldan $\langle\psi|Q_n$ ile çarpılırsa,

$$\langle\psi|Q_nHQ_n^+|\psi\rangle = \langle\psi|Q_n[H, Q_n^+]|\psi\rangle + \langle\psi|Q_nQ_n^+H|\psi\rangle$$

olur. $\langle\psi|Q_nHQ_n^+|\psi\rangle = \langle n|H|n\rangle$ ve $Q_nQ_n^+ = 1$ olduğuna göre,

$$\langle n|H|n\rangle = \langle\psi|Q_n[H, Q_n^+]|\psi\rangle + \langle\psi|H|\psi\rangle,$$

$$\langle n|H|n\rangle - \langle\psi|H|\psi\rangle = \langle\psi|Q_n[H, Q_n^+]|\psi\rangle$$

olur. Eşirliğin sol tarafı ω_n ile ifade edilirse,

$$\omega_n = \langle \psi | Q_n [H, Q_n^+] | \psi \rangle$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı $Q_n^+ | \psi \rangle$ ile çarpılırsa,

$$\omega_n Q_n^+ | \psi \rangle = Q_n^+ | \psi \rangle \langle \psi | Q_n [H, Q_n^+] | \psi \rangle,$$

$$\omega_n Q_n^+ | \psi \rangle = [H, Q_n^+] | \psi \rangle,$$

$$\omega_n Q_n^+ = [H, Q_n^+]$$

olarak elde edilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Auerbach, N., et al., 1972, *Rev. Mod. Phys.*, 44: 48.

Babacan, T., et al., 2004, The Effect of the Pairing Interaction on the Energies of Isobar Analogue Resonances in $^{112-124}\text{Sb}$ and Isospin Admixture in $^{100-124}\text{Sn}$ Isotopes, *JPG*, 30: 759.

Babacan, T., Salamov, D.I. and Kucukbursa, A., 2005, *Phys. Rev. C*, 71: 037303.

Babacan, T., Salamov, D.I. and Kucukbursa, A., 2007, *Nucl. Phys. A*, 788: 279.

Barker, F.C., 1992, *Nucl. Phys. A*, 537: 134.

Barker, F.C., 1994, *Nucl. Phys. A*, 579: 62.

Birbrair, B.L. and Sadovnikova, V.A., 1974, *Yad. Fiz.*, 20: 645.[1975, *Sov. J. Nucl. Phys.*, 20: 347.]

Blin-Stoyle, R.J., 1969, *Isospin in Nuclear Physics*, North-Holland, Amsterdam.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Blin-Stoyle, R.J., 1973, Fundamental Interactions and the Nucleus, Amsterdam.

Bohr, A., Damgaard, J. and Mottelson, B.R., 1967, Nuclear Structure, Amsterdam.

Bohr, A. and Mottelson, B. R., 1969, Nuclear Structure, Vol.1, Benjamin, New York.

Buras, A.J., et al., 1994, *Phys. Rev. D*, 50: 3433.

Cabibbo, N., 1963, *Phys. Rev. Lett.*, 10: 531.

Charles, J., et al., 2005, *Eur. Phys. J. C*, 41: 1.

Civitarese, O. and Licciardo, M.C., 1990, *Phys. Rev. C*, 41: 1778.

Civitarese O., et al., 1999, *Phys. Rev. C*, 59: 194.

Colo, G., et al., 1995, *Phys. Rev. C*, 52 : 1175.

Cottingham, W.N. and Greenwood, D.A., 2001, Çekirdek Fizikine Giriş, Literatür Yayıncılık.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Cwiok, S., Kvasil , J. and Choriev, B., 1984, *J. Phys. G*, 10: 903.

Cwiok, S., Kvasil, J. and Nzmitdinov, R.G., 1990, *Czech. J. Phys.*, 40: 864.

Çalık, A. E., Gerçeklioğlu, M. and Salamov, D. I., 2009, *Zeitschrift fuer Naturforschung A*, baskıda).

Erbil, H.H., 1990, Kuantum Fiziği II, Ege Üniversitesi Basımevi, İzmir.

Faessler, A. and Nojarov, R., 1990, *Phys. Rev. C*, 41: 1243.

Fajans, S.A., 1971, *Phys. Lett. B*, 37:155.

Gaponov, Yu.V. and Lyutostanskii, Yu.S., 1972, *Yad. Fiz.*, 16: 484.
[1973, *Sov. J. Nucl. Phys.*, 16: 270.]

Gilman, F.J., 2001, *Nucl. Instr. and Meth. A*, 462: 301.

Gilman, F.J., et al., 2004, *Phys.Lett. B*, 592: 793.

Hamamoto, I. and Sagawa, H., 1993, *Phys. Rev. C*, 48 : 960.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Hardy, J.C. and Towner, I.S., 1975, *Nucl. Phys. A*, 254: 221.

Hardy, J.C. and Towner, I.S., 2005, *Phys. Rev. C*, 71: 055501.

<http://tr.wikipedia.org>

Ikeda K., Fuji S. and Fujita J.I., 1963, The (n,p) Reactions and Beta Decays, *Phys. Letters*, 3: 6.

Jaus, W., 1972, *Phys. Lett. B*, 40: 616.

Khadkikar, S.B. and Warke, C.S., 1969, *Nucl. Phys. A*, 130: 577.

Kobayashi, M. and Maskawa, 1973, *T. Prog. Theor. Phys.*, 49: 652.

Krane, K., 2001, Nükleer Fizik I, Palme Yayıncılık.

Kuliev, A.A., Guliyev, E. and Gerçekhoglu, M., 2002, *J. Phys. G*, 28: 407.

Kuliev, A.A., et al., 2004, *J. Phys. G*, 30: 1253.

Küçükburşa, A., et al., 2004, *Pramana*, 63: 947-961.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Landau, L.D. and Lifshitz, E. M., 1963, Kuantum Mekaniği, Moskova.

Lane, A.M. and Mekjian, A.Z., 1973, *Adv. Nucl. Phys.*, 7: 97.

Magierski, P. and Wyss, R., 2000, *Phys. Lett. B*, 486: 54.

Marciano, W.J. and Sirlin, A., 1984, *Phys. Rev. D*, 29: 75.

Marciano, W.J. and Sirlin, A., 1986, *Phys. Rev. Lett.*, 56: 22.

Navrátil, P., Barrett, B.R., and Ormand, W.E., 1997, *Phys. Rev. C*, 56: 2542.

Nilsson and Ragnarsson, 1993, Shapes and Shells in Nuclear Structure, Cambridge.

Nojarov, R. and Faessler, A., 1988, *Nucl. Physics A*, 484: 1.

Ormand, W.E. and Brown, B.A., 1989, *Phys. Rev. Lett.*, 62: 866.

Ormand, W.E. and Brown, B.A., 1995, *Phys. Rev. C*, 52: 2455.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Pyatov, N.I. and Salamov, D.I., 1977, Conservation Laws and Collective Excitations in Nuclei, *Nucleonica*, 22: 127.

Pyatov, N.I., Salamov, D.I., Baznat, M.I., Kuliev, A.A. and Gabrakov, S.I., 1979, Self-Consistent Theory of Coulomb Isospin Mixing in Nuclei, *Sov. J. Nucl. Phys.*, 29: 1.

Raman, S., et al., 1975, *At. Data Nucl. Data Tables*, 16: 451.

Ring, P. and Schuck, P., 1980, The Nuclear Many-Body Problem, Springer-Verlag, NY.

Sagawa, H., Van Giai, N., and Suzuki, T., 1996, *Phys. Rev. C*, 53: 2163.

Sagawa, H., Bortignon, P.F. and Colo, G., 1998, *Phys. Lett. B*, 444: 1.

Sakamoto, H. and Kishimoto, T., 1990, *Phys. Lett. B*, 245: 321.

Salamov, D. I., et al., 2006, *Pramana*, 66 : 1105.

Salamov, D. I., Ünlü, S. and Çakmak, N., 2007, *Pramana*, 69: 369.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Shoji, T. and Shimizu, Y.R., 2008, [nucl-th: 0810.2848v1].

Sirlin, A., 1974, *Nucl. Phys. B*, 71: 29.

Sirlin, A., 1978, *Rev. Mod. Phys.*, 50: 573.

Sirlin, A., 1994, In Precision Tests of the Standart Electroweak Model, edited by P. Langacker ,Word Scientific, Singapore.

Sliv, L.A. and Kharitomov, Y., 1965, *Phys. Lett.* 16: 176.

Soloviev, V.G., 1976, Theory of Complex Nuclei, Pergamon Press.

Tanyel, B., 1994, Nükleer Fizik, Ege Üniversitesi Basımevi.

Wong, S., 1998, Introductory Nuclear Physics, John Wiley and Sons.

Towner, I.S. and Hardy, J.C., 1973, *Nucl. Phys. A*, 205: 33.

Towner, I.S., Hardy, J.C. and Harvey, M., 1977, *Nucl. Phys. A*, 284: 269.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Towner, I.S. and Hardy, J.C., 1998, In Proceedings of V International WEIN Symposium: Pyhsics Beyond the Standart Model, Santa Fe, NM.

Towner, I.S. and Hardy, J.C., 2002, *Phys. Rev. C*, 66: 035501.

Towner, I.S. and Hardy, J.C., 2003, *J. Phys.G*, 29:197.

Towner, I.S. and Hardy, J.C., 2008, *Phys. Rev. C*, 77: 025501.

Wilkinson, D.H., 1976, *Phys. Lett. B*, 65: 9.

Wilkinson , D.H., 1993, *Nucl. Instr. and Meth. A*, 335: 201.

Wilkinson, D.H., 2002-a, *Nucl. Instr. and Meth. A*, 488: 654.

Wilkinson, D.H., 2002-b, *Nucl. Instr. and Meth. A*, 495: 65.

Wilkinson, D.H., 2003, *J. Phys. G*, 29: 189.

Wilkinson, D.H., 2004, *Nucl. Instr. and Meth. A*, 526: 386.

Wilkinson, D.H., 2005-a, *Nucl. Instr. and Meth. A*, 543: 497.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Wilkinson, D.H., 2005-b, *Nucl. Instr. and Meth. A*, 555: 457.

Wolfenstein, L., 1983, *Phys.Rev. Lett.*, 51: 1945.

www. tubitak. gov. tr

Yao, W.M., et al., 2006, *J. Phys. G*, 33: 1.

Zaretskii, D.F and Urin, M.G., 1967, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 53: 324.
[1968, *Sov.Phys. JETP*, 26: 217.]

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Abdullah Engin ÇALIK
Doğum Yeri ve Yılı : İstanbul-01.08.1976
Uyruğu : T.C.
Baba Adı : Mustafa
Nüfusa Kayıtlı Olduğu Yer : Karaman-Ermenek
Medeni Hali : Evli

Eğitim-Öğretim

Lisans : Ege Üniversitesi Fizik Bölümü (1994-1998)
Yüksek Lisans: Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Ens.(1999-2002)
Doktora : Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2003-2009)

Çalıştığı Kurumlar

Araş. Gör. Dumlupınar Üniversitesi (1999-2003)
Araş. Gör. Ege Üniversitesi (2003-devam ediyor) (2547 sayılı kanunun 35. maddesine göre)