

T.C

MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜZİKOLOJİ BÖLÜMÜ
GENEL MÜZİKOLOJİ PROGRAMI

**MATEMATİKSEL MÜZİK TEORİSİNE
PYTHAGORAS VE ARCHYTAS'IN KATKILARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: İlhami KAYA

DANIŞMAN: Prof. Gülper REFİĞ

Yrd. Doç. Dr. Alper GÖNEN

MAYIS 2009

İlhami KAYA tarafından hazırlanan Matematiksel Müzik Teorisine Pisagor ve Arkıtas'ın Katkıları adlı bu çalışma jürimizce Yüksek Lisans Tezi olarak Kabul Edilmiştir.

Kabul (Sınav) Tarihi : 15 / 06 / 2009

Jüri Üyesi : Prof.Gülper REFİĞ (Danışman)



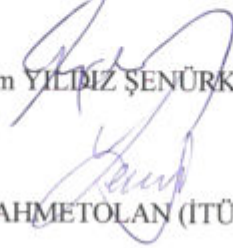
Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr.Alper GÖNEN (II.Danışman)



Jüri Üyesi : Prof.Dr.Metin ARIK (Boğaziçi Üniv.)



Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr.Kıvılcım YILDIZ ŞENÜRKMEZ



Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr.Semra AHMETOLAN (İTÜ)



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
ÖRNEKLER LİSTESİ.....	ix
RESİMLER LİSTESİ	ix
TABLolar LİSTESİ.....	x
TEMEL KAVRAMLAR LİSTESİ	x
1. BÖLÜM.....	1
GİRİŞ	1
1.1 Matematik ve Müzik İlişkisi	3
1.2 Müzik ve Geometri İlişkisi	9
PYTHAGORAS ve MÜZİK TEORİSİ.....	11
2.1 Pythagoras'ın Matematiksel Müzik Teorisi.....	13
2.1.1 Sayılar ve Tetraktys	14
2.1.2 Oranlar ve Monokord.....	17
2.1.3 Aralıkların Özellikleri	26
2.2 Pythagoras Dizisi	29
2.3 Beşliler Çemberi	34
2.4 Pythagoras Koması	35
2.5 Pythagoras'ın Kromatik Dizisi.....	38
2.5.1 Akortsuzluk.....	41
3. BÖLÜM	46
PHİLOLAUS ve ARCHYTAS'IN MÜZİK TEORİSİ	46
3.1 Philolaus'un Matematiksel Müzik Teorisi.....	46
3.2 Archytas'ın Matematiksel Müzik Teorisi	53
3.2 Archytas Bölünüşleri ve Archytas Ağacı.....	60
SONUÇ	69
EKLER.....	71
Ek 1 Philolaus Göre Aralıkların Toplanması ve Çıkarılmasına Dair Bazı Hesaplar	71

Ek 2 Archytas Bölünüş Tablosu.....	73
KAYNAKÇA.....	74
ÖZGEÇMİŞ	78

ÖNSÖZ

Bilimsel çalışmaların temeli, sayısal veriler ve gözlemlere dayanır. Müziğin sayılarla ve bilimsel olarak gözleme dayalı anlatımı, ilk olarak Antik devirde yaşayan düşünürler tarafından gerçekleştirilmiştir. Başlangıcı M.Ö. 6. yüzyıla dayanan bu çalışmalar, müziğin matematiksel gelişiminin yanı sıra kendi gelişimini de sağlamıştır.

Bu çalışmada, Antik Yunanda M.Ö. 600-400 yılları ile sınırlı olup, günümüz batı müziğinin temellerini oluşturan çalışmaları araştırılmıştır. Bu kapsamda sadece üç düşünür, Pythagoras, Philolaus ve Archytas ele alınmış ve bu düşünürlerin matematik ve müzik üzerine yaptıkları çalışmalar irdelenmiştir.

Pythagoras ve ikinci kuşak Pythagorascı olan diğer iki düşünürün çalışmaları birbirini tamamlayıcı nitelikte olup, çalışmalarının müziğe uygulanışları farklılıklar gösterir. Bu düşünürlerin çalışmaları sonucunda, kurulan müzik dizileri ve elde edilen ses aralıklarının içerdiği aritmetik hesaplar yapılmış, çalışmalarının müziğe uygulanışını incelenmiştir.

Bu çalışmanın her aşamasında, tüm bilgi birikimi ile yön veren Müzikoloji Bölüm Başkanı Prof. Sayın Gülper REFİĞ'e, yüksek lisans tezim süresince karşılaştığım her engelde çözüm gösteren, Yrd. Doç. Dr. Sayın Alper GÖNEN'e, öğrenci olarak bana çalışma azmini veren, pedagojik yaklaşımı ve dünya görüşü olarak örnek aldığım Sayın Halit REFİĞ'e, dil konusundaki uyarıları ve makale tarama konusunda titizliği ile ufkumu açan Öğretim Elemanı Sayın Melih DUYGULU'ya teşekkür ederim.

ÖZET

Müziğin matematiksel nazariyesi, antik devirde Pythagoras tarafından kurulmuştur. Bu çalışmada Pythagorascı yaklaşımla müzik ve matematik ilişkisi açıklanmış, aritmetiğin bazı temel işlemleri betimlenmiştir.

Birinci bölümde yedi özgür yol ile matematiğin müzikteki rolü üzerine açıklamalar yer almaktadır.

İkinci bölümde Pythagoras'un bir telin boyunu kısaltarak bulduğu ve müzikal aralıkları tanımlamakta kullandığı oranlara yer verilir. Oranı 2:3 ile belirlenen tam beşlilerden oluşan pisagor aralıklarının yanı sıra on iki tane beşli aralığın yaklaşık yedi oktava eşit olması ve aralarındaki farka ait "Pythagoras Komma" sına dair hesaplamalar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, iki Pythagorascı filozof Philolaus ile Archytas'ın bilime katkıları irdelenmiştir. Philolaus aritmetiğin toplama özelliğini, yeni müzikal aralıklar elde etmek için kullanmış ve aralıkları seslerin birbirine olan uzaklıklarına göre isimlendirmiştir. Birbirine eklenen aralıklar ile aralıklara ait oranların çarpımı arasındaki ilişkiyi kurmuştur.

Archytas, sekizli, beşli dördü ve $n:(n+1)$ şeklinde yazılabilen diğer aralıkların iki eşit parçaya ayrılamayacağını ve rasyonel sayılarla gösterilmesinin mümkün olmadığını göstermiştir. Müzikal aralıklara ait aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaları tanımlamıştır.

Bu tezde, bilimsel yöntemlerin önemine değinilmiş, aritmetik ile müziğin antik dönemdeki etkileşimi araştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Müzikal Dizi, Aralık, Oran, Pythagoras, Philolaus, Archytas,

SUMMARY

The theory of musical mathematics is established by Pythagoras in ancient times. In this study the relationship between mathematics and music in Pythagorean sense is explained and a few of basic operations of pythagorean arithmetics are described.

The first chapter consists the explanation of seven liberal arts and the role of mathematics in music.

The first chapter contains the discoveries of Pythagoras by dividing a string length for getting ratios, which describes musical intervals. The calculations of the pythagorean intervals determined by the ratio of a perfect fifth, i.e. 2:3 and the twelve intervals of a fifth, which are roughly equal to seven octaves with a discrepancy being the "Pythagorean comma" are given.

In the second Chapter the contributions of two pythagorean philosophers Philolaus and Archytas are investigated. Philolaus used the additive properties of the arithmetics to construct new musical intervals and named the musical intervals with corresponding distance. He gives the relation between the sum of intervals and product of ratios.

Archytas showed that intervals like the octave, fifth, fourth and whole tone, or any other intervals which have ratios in the form of $n:(n+1)$, cannot in fact be divided with rational numbers into two equal intervals. He determined also the arithmetic mean, the harmonic mean and the geometric mean for musical intervals. In this thesis, the importance of scientific methods are mentioned. And influence between arithmetics and music in ancient times is investigated.

KEY WORDS: Musical scale, Interval, Ratio, Pythagoras, Philolaus, Archytas,

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1 Noktalar ve Sayılar	14
Şekil 2.2 Noktalarla Gösterilen Üçgensel Sayılar.....	15
Şekil 2.3 Üçgen Sayılar.....	15
Şekil 2.4 Tetraktys	15
Şekil 2.5 Üçgen Sayılardan Elde Edilen Kare Sayılar	16
Şekil 2.6 Kare Sayılar	16
Şekil 2.7 Doğal Tam Beşliler Çemberi	36
Şekil 3.8 Aritmetik Ortalama	55
Şekil 3.9 Harmonik Ortalama	57
Şekil 3.10 Archytas Ağacı	62

ÖRNEKLER LİSTESİ

Örnek 2.1 Tel Uzunluğu ve Portede Sesin Yeri.....	19
Örnek 2.2 Tel Uzunluğu ve Portede Sesin Yeri.....	20
Örnek 2.3 Porte Üzerinde Sesin Yeri.....	21
Örnek 2.4 Portede Üzerinde Sesin Yeri	22
Örnek 2.5 Portede Üzerinde Sesin Yeri.....	23
Örnek 2.6 Tel Boyu Oranları	24
Örnek 2.7 Portede Üzerinde Sesin Yeri.....	26
Örnek 2.8 Portede Üzerinde Sesin Yeri.....	27
Örnek 2.9 Portede Üzerinde Sesin Yeri.....	28
Örnek 2.10 Portede Üzerinde Sesin Yeri.....	28
Örnek 2.11 Portede Üzerinde Sesin Yeri.....	29
Örnek 2.12 Portede Pythagoras Dizisi	34
Örnek 2.13 Portede Beşliler Çemberi	35
Örnek 2.14 Portede Kromatik Dizi	40
Örnek 3.15 Porte Üzerinde Philolaus Diatonik Dizi.....	52
Örnek 3.16 Portede Üzerinde Archytas Diatonik Dizisi.....	67
Örnek 3.17 Portede Üzerinde Archytas Kromatik Dizisi.....	68
Örnek 3.18 Portede Üzerinde Archytas Anarmonik Dizisi.....	68

RESİMLER LİSTESİ

Resim 2.1 Ses Deneyi ^I	17
Resim 2.2 Ses Deneyleri ^{II}	19
Resim 2.3 Monokord ^{III}	20

^I j. Fauvel- R. Flood- R. Wilson (2003), **Music And Matematics**, 5

^{II} www.midicode.com/tunings/greek.shtml

^{III} www.practicalphysics.org/go/Experiment_130.html

Resim 2.4 Monokord'un İki Eşit Parçaya Bölünüşü ^{IV}	21
Resim 2.5 Monokord'un Üç Eşit Parçaya Bölünüşü ^V	22
Resim 2.6 Monokordun Dört Eşit Parçaya Bölünüşü ^{VI}	23
Resim 2.7 Tetraktys Oranı ^{VII}	26
Resim 2.8 Beşliler Çemberinde Atılan Adımlar ^{VIII}	37
Resim 2.9 Spiral ^{IX}	43
Resim 2.10 Wolf Spirali	45

TABLolar LİSTESİ

Tablo 1.1 Quadrivium.....	8
Tablo 2.2 Ses Oranları	31
Tablo 2.3 Ses Oranları	32
Tablo 2.5 Tel Boyu Katsayılar İle Pythagoras Dizisi	33
Tablo 2.4 Ses Oranları	33
Tablo 2.6 Pythagoras Kromatik Dizisi.....	36
Tablo 2.7.a Pythagoras Kromatik Dizi Oranları	38
Tablo 2.8 Pythagoras Kromatik Dizi Oranları	39
Tablo 2.9 Kromatik Dizi Tel Boyları.....	40
Tablo 2.10 Anarmonik Farklar	41
Tablo 2.11 Anarmoniklerin Hesabı.....	41
Tablo 2.12 Anarmonik Eşitliği.....	42
Tablo 2.13 Anarmonik Değer	42
Tablo 3.14 Aralıkların Aritmetik ve Harmonik Ortalaması.....	58

TEMEL KAVRAMLAR LİSTESİ

Oktav.....	T8
Doğal.....	T5
Doğal Tam Dörtlü	T4
Tam Ses.....	T
Majör.....	M

^{IV} www.fsb.hr/matematika/download/ZS_matematicsandmusic.pdf

^V www.fsb.hr/matematika/download/ZS_matematicsandmusic.pdf

^{VI} www.fsb.hr/matematika/download/ZS_matematicsandmusic.pdf

^{VII} Guerino Mazzola, **Elemente Der Musikinformatik**, 5

^{VIII} j. Fauvel- R. Flood- R. Wilson (2003), **Music And Matematics**, 5

^{IX} James Jeans, **Science And Music**, 174

Minör.....	m
Tel Boyu.....	L
Aritmetik Ortalama	A
Harmonik Ortalama.....	H
Geometrik Ortalama.....	G
Sayma Sayıları	{1,2,3, ...}
Başlangıç Sesi	C0
Başlangıç Sesinin Bir Oktav İnce Sesi.....	C1
Başlangıç Sesinin İki Oktav İnce Sesi	C2
Başlangıç Sesinin Üç Oktav İnce Sesi	C3
Başlangıç Sesinin Dört Oktav İnce Sesi	C4
Başlangıç Sesinin Beş Oktav İnce Sesi.....	C5
Başlangıç Sesinin Altı Oktav İnce Sesi.....	C6
Başlangıç Sesinin Yedi Oktav İnce Sesi	C7

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Günümüzde var olan bilim dallarının çalışma kaynağı doğanın kendisidir. İnsanlar, bir yandan doğayı taklit ederek hayatlarını kolaylaştırmaya, bir yandan da doğanın gizemini anlamaya çalışmışlardır. Doğayı anlama çabası, insanların gerek yaşam gereksinimlerinden, gerekse öğrenme isteklerinden kaynaklanmış ve bilimsel çalışmaların hız kazanmasına neden olmuştur.

Yaşadığımız evren gözlemlenildiğinde, gezegenlerin hareketleri, dünyanın güneş etrafındaki turu ya da buna bağlı mevsim değişiklikleri gibi birçok doğa olayına sahip olduğu görülür.¹ Doğa olayları, hem kendi içinde ve hem de çevresindeki sistemler ile belli bir uyum içerisindedir. Belirli zaman aralıkları ile tekrarlanan doğa olayları sonucu doğal denge gerçekleşir.

Evrenin ve müziğin uyumunda ritim önemli bir yapı taşıdır.² Ritim, sürekliliği olan düzgün ve tekrarlanabilir bir sabitlikle hareket eden bir yapıdır. İnsan bedeni de gerek yapısı gerek işleyişi ile kendi ritmine sahiptir. İnsanlar doğdukları andan itibaren ritmi, nabız atışlarında hisseder. Kişinin müzikle karşılaşması bebeklikteki hecelemeleridir. Çocukların konuşma öncesi çıkardıkları ritmik sesler ve vücutları ile sallanmaları bedensel gelişimlerini de önemli ölçüde etkiler.

Müzikte ritim, zaman aralıklarının uyumlu ve düzenli olarak dağılmasını sağlar. Müzikte uyumun gerçekleşmesinde etkin rol üstlenen ritim, doğada düzensiz olarak yer alan ses kümelerinin de birbirine bağlanması ve anlamlı bir bütün oluşturmasını sağlar.

¹ Evin İlyasoğlu, **Zaman İçinde Müzik**, 1

² Otto Karolyi, **Müziğe Giriş**, Çev. Mehmet Nemutlu, 27

Ses ve müzik üzerine yapılan araştırmalar temel bilimlerle birlikte gelişme göstermiştir. Doğadaki düzenliliği ve ses düzenini açıklama çabası, müzik ile matematiğin birlikte gelişmesine ve birbirlerini desteklemesini sağlamıştır.

Batı müziği analiz yöntemlerinde, ritim sayılarla birlikte yer alır. Eserin temposu, tartımı ve seslerin uzunluklarını kesin olarak belirtmenin tek yolu sayıları kullanmaktır. Müzik anlatımındaki ifadeler, sayılar ve aritmetik yöntemlerden oluşur.

Müzik ve matematiğin kaynağı ortaktır. Her iki bilim dalı da doğanın bir parçası olduğundan birbirlerini etkilemişlerdir.

*[...Doğanın müzik kompozisyonları için ilham kaynağı oluşu gibi yine doğa, fizik vasıtasıyla birçok matematik kompozisyonları için ilham kaynağı olmuştur...]*³

Müziğin sayılarla ifade edilmesi müziği hem anlaşılır kılar, hem de anlatımının bilimsel olmasını sağlar. Melodi ve armoni sayılar aracılığı ile bilimsel bir dille anlatılabilir. Müziğin temel yapıları, matematiksel yöntemler yardımı ile sistemli ve düzenli bir biçim kazanır. Bu nedenle, günümüzde müzik eserlerinin analizleri sayılarla ifade edilebilmektedir.

Gözlem ve deneyler sonucu evrenin birçok düzenli geometrik şekillerle yapılandığı görülür. Şekillerdeki farklılıklar, her canlı tarafından farklı algılanır. Örneğin kuşlar, kuluçkaya yattıkları yumurtaların eksilmesini, yumurtaların oluşturduğu geometrik dizilimin değişmesinden dolayı fark ederler.⁴

Geometrik şekiller, sayı sistemlerinin ve sayısal işlemlerin oluşmasına yol açmıştır.⁵ Çeşitli uygarlıklar, farklı sayı yazımı ve sayı sistemlerini geometrik yapılardan esinlenerek oluşturmuştur. Sayılar, dil ve kültürü etkileyen önemli

³ Cahit Arf, **Bilim Ve Teknik**, 80

⁴ John H. Conway, Richard K. Guy, **The Book Of Numbers**, 22

⁵ Annemarie Schimmel, **Sayıların Gizemi**, Çev. Mustafa Küpüşoğlu, 13

unsurlar arasında yer alır.⁶ Elde edilen farklı sayma ve sayı sistemleri, her uygarlığın kendi işaretini de beraberinde taşır.⁷

Evrenin yapısında sayılar, önemli bir yapıya sahiptir. Geometrik şekiller aracılığı ile oluşturulan sayılar, şekillerin iyi tanımlanmasına bağlıdır. Galileo'ya göre:

*[...Evren her an gözlemlerimize açıktır; ama kendi dili ve bu dilin yazıldığı harfler öğrenilmeden kavranıp anlaşılabilir. Evren, matematik diliyle yazılmıştır; harfleri üçgenler, daireler ve diğer geometrik biçimlerdir. Bunlar olmadan tek sözcüğü bile anlaşılabilir; bunlarsız ancak karanlık bir labirente dolanılır...]*⁸

Evrendeki geometrik dizilimin uyumu ve düzeni, doğanın işleyişinin bir parçasıdır. Doğa, kendindeki her bir parçada uyum ile düzeni, dolayısıyla da matematiği içinde barındırmaktadır.

1.1 Matematik ve Müzik İlişkisi

Matematik ve müzik, sosyal hayatta farklı rolleri üstlenen disiplinler olarak karşımıza çıkar. Oysa birbirleriyle yakından ilişkilidir. Öğrenmek ve bilgi anlamına gelen μάθημα (*máthēma*) kelimesinden türemiş olan matematik⁹, felsefe için gerekli olan bilgilerin toplamı anlamına gelir. Matematik, çoğunlukla sayılar ve bu sayılar ile ilgili hesapları kapsar.¹⁰

⁶ Bkz. (4), Conway- Guy, 1

⁷ Bkz. (5), Schimmel, 15

⁸ Theoni Pappas, **Yaşayan Matematik**, Çev. Yıldız Silier, 9

⁹ Yunanca; **μαθηματικά** olarak yazılan matematik kelimesi **mathēmatiká** diye okunur.

¹⁰ Kontrat Ziegler-Walther Sontheimer, **Der Kleine Pauly**, 1077

[...*Matematik sözcüğü, ilk kez, M.Ö. 550 civarında Pisagor okulu üyeleri tarafından kullanılmıştır. Yazılı literatüre girmesi, Platon'la (Eflatun) birlikte, M.Ö. 380 civarında olmuştur...*]¹¹

Yunan mitolojisinde, akıl, düşünce ve yaratıcılık gücü anlamına gelen *men* kökünden türemiş olan *mausa* sözcüğü, esin perisi anlamına gelmektedir. Latince de bu sözcüğün karşılığı *musa*'dır. Müzik ise musalara yani esin perilerine yakışır demektir.¹² Müzik, daha çok sosyal yaşamın bir parçasını oluşturur. Matematik, sayılar ve aritmetik işlemlere dayalı olduğundan duyguları içermez. Müzik ise her türde duyguları, coşkuyu ve yaşamı içinde barındırır.

Müzik bilimi, kendi içinde kesin kurallara ve ilkelere sahiptir. Matematik bu kuralları, mantık kuralları ile açıklar.¹³ Müzik yazımında kullanılan sayılar, aynı zamanda evrensel dilin de bir parçasıdır. Bu nedenle müzik yaşamın, matematik ise bu yaşamın doğruluğunun bir kanıtıdır.

[...*Tarih boyunca müzik, doğayı gözlemlemek için daima uygun bir ortam sunmuştur. Bir müzik eseri, tını ile tınının kendi bileşenleri arasındaki etkileşimden doğar. Armoni ise bu bileşenlerin bir araya gelmesinin sonucudur. Bir müzisyen, yarattığı veya yorumladığı müzik eserini akustik ortam içinde kurgular. Buna karşın bir matematikçi ise müzik eserinin kurgusunu matematik modellere dayandırır...*]¹⁴

Sayılar, müzikteki ritim, melodi, armoni ve ses perdelerini tanımlamakta etkin rol oynar. Müziğin temelini oluşturan bu temel unsurların sayılar aracılığı ile anlatımı, müzikal yapıya bilimsel özellik katar. Müziğin sayılara dayalı olması,

¹¹ Ali Ülger, **Matematik Dünyası**, 42

¹² Azra Erhat, **Mitoloji Sözlüğü**, 227

¹³ Cihan Orhan, **Matematik Dünyası**, 6

¹⁴ Alper Gönen, **Mathematical Aspects Of Harmony In Music**, X

müzikteki temel unsurlarının sayılarla yapılandırılmasına neden olmuştur. Bu nedenle müzikteki temel yapılar, günümüzdeki diğer bilim dallarının da ilgi alanı oluşturmaktadır.

[...Armoni dediğimiz şey müziğin içindeki dikey matematiği, kontrpuan ise yatay matematiği oluşturuyor. Sekvens, ezgiyi tersten yazım tekrarı gibi birçok armonik uygulamanın yanında notaların veya ezgilerin birbirleri arasındaki ilişki dahi doğal yapısında müziğin içindeki matematiği işaret eder...]¹⁵

Matematiğin önemli bir yapı taşı olan sayılar, bilimsel çalışmalarda önemli bir yer tutar. Sayılar, bilimsel savunuların ve düşüncelerin fikir aracı olarak kullanılır. Günümüzde de bilimsel kanıtların ortak yapı taşı, sayılardır. Birçok matematiksel kavram, simetri, sonsuzluk, düğümler vs., sanatı etkilemiştir.¹⁶

Besteci ve matematikçi Erich Neuwirth, matematiğin yarı bilim yarı sanat olduğu görüşündedir:

[...Hem müzik, hem matematik, yapıların birbiriyle benzerliğini, tekrarlamaları, değişkenlikleri ve yapılar arası ilişkileri konu edinir. Bunun dışında matematikte araştırma ve buluş, beste yapmaya çok benzer. Bir kanon söylüyorsanız bu matematiksel bir kaymadır örneğin. Benden iki ses sonra başlarsınız ve ezgiyi tekrarlıyorsunuz. Bu da geometrik karşılaştırmadır...]¹⁷

¹⁵ Volkan Aran, **Cumhuriyet Gazetesi**, 7

¹⁶ Theoni Pappas, **The Music Of Reason**, 40

¹⁷ Bkz. (15), Aran, 7

Mazzola ise sesleri geometri ve topolojinin esaslarını kullanarak inceler. Seslerin sayılarla yapılanışı, eseri oluşturan seslerin de sayılarla ve kurulan teorilerle anlatımına yardımcı olmuştur.

*[...Sesleri fiziksel açıdan incelemek, müziği anlamak için yeterli olmamaktadır. Bir müzik parçasının analizi, eserin müzikal yapısını incelemekle mümkündür. Müzikal yapı ise, sesin fiziksel tanımı ile değil, matematiksel tanımı ile açıklanmalıdır...]*¹⁸

Müzik ve matematik farklı yapılar sergilemelerine karşın, köklü ve birbirine yakın geçmişlere sahiptir. Antik yunan medeniyetinde müziğin, önemli bir yeri olduğu gerçektir. Bu dönemde müzik, tüm sosyal faaliyetlerde tiyatro, şiir ve olimpik gösterilerin ayrılmaz bir parçası iken günümüzde, özel bir meslek ya da eğlence aracı olarak kullanılır.¹⁹

Antik dönemde müzik, insanların sayıları dikkate alması ile başlamıştır.²⁰ Müziği anlama ve bilimsel olarak açıklama çabası da ilk olarak, antik dönemde Pythagoras tarafından gerçekleştirilmiştir.

Antik yunan toplumunda müzik ve matematiğin iç içe oluşu, bilimsel ve sanatsal tüm çalışmaların, birlikte gelişme göstermesini sağlamıştır. Seslere sayılar ve oranlar ile açıklama getirilmiş, müzik ve matematik, birlikte gelişerek hayatın vazgeçilmez bir parçası olmuştur.

*[...Her ikisi de önce somut bir düşünceyle ortaya çıkmış daha sonra soyut-somut arasında salınıp durmuştur...]*²¹

¹⁸ Guerino Mazzola, **Geometrie Der Tone**, 21

¹⁹ Hardy Grant, **The College Mathematics Journal**, 96

²⁰ Thomas Mathiesen, **The Journal Of Musicology**, 264

²¹ K. Korhan Nazlıben, **Matematik Dünyası**, 103

Antik devirde müzik, daima eğitimin merkezinde yer almıştır.²² Eğitim ve öğretim, “*seven liberal arts*”²³ yani hürlerin yedi sanatı olarak adlandırılan, yedi ayrı yol ve yönetime dayalı olarak yapılandırılmıştır. Bu yapı günümüzde, sosyal bilimlerin ve fen bilimlerinin temelini oluşturur.

Antik dönemde bilimi oluşturan bu yedi yol, “*trivium* ve *quadrivium*” olmak üzere iki farklı çalışma alanından oluşur. Trivium, mantık (*logic*), dilbilgisi (*grammar*) ve konuşma sanatı (*rhetoric*) olmak üzere üç yola (*via*) ayrılır. Quadrivium ise aritmetik (*arithmetic*), müzik (*music*), geometri (*geometry*) ve astronomi (*astronomy*) olmak üzere dört yola ayrılmıştır.

Sosyal bilimleri oluşturan trivium konuşma dili ile ilintilidir ve dilin gücünü vurgular. Mantık, düşünme yöntemlerini inceler. Dilbilgisi düşünce ve görüşlerin ifadesinde simgelerin bulunup birleştirilmesi yöntemidir. Konuşma sanatı ise farklı fikirler arasındaki iletişim yöntemi ve karşılıklı tartışmalarla zihnin kıvraklığını sağlar.

Quadrivium’dan ilk olarak Boethius söz etmiştir.²⁴ Quadrivium aynı zamanda Plato okulunun ayrılmaz yapı taşı oluşturmuştur. Pythagoras okulunun temelini oluşturan quadrivium, doğa ve toplumdaki değişmeyen öğeleri²⁵ inceler. Fen bilimlerini oluşturan quadrivium sayılarla ilgilenir ve doğanın sırlarını araştırır. Sayısal büyüklüklere dayalı olup kendi içinde ayrık ve sürekli olmak üzere iki sınıfa ayrılır.

²² Bkz. (19) Grant, 96

²³ Kemal Aytaç, **Avrupa Eğitim Tarihi**, 30

²⁴ Thomas Christensen, **The Cambridge History Of Western Music Theory**, 273

²⁵ Dirk J. Struik, Çev: Yıldız Silier, **Kısa Matematik Tarihi**, 68

Matematik			
Değişmez bilimler			
Ayrık Büyüklük		Sürekli Büyüklük	
Aritmetik	Müzik	Geometri	Astronomi
Mutlak	Göreceli	Sabit	Hareketli

Tablo 1.1 Quadrivium

Antik dönemde Müzik ve Aritmetik, ayrıık büyüklüklere sahip olan akılcı çalışmalar olarak nitelendirilmiştir. Aritmetik, sayılar teorisini temelini oluşturur. Müzik ise bu sayıların oranını gösterir. Astronomi ve Geometri, sürekli büyüklüklere sahiptir. Geometri, uzay teorisini oluşturan eğrileri kapsar. Astronomi ise bu eğrilerin uzaysal teorilere uygulamasıdır.²⁶

*[...Antik Yunan, felsefe, bilim ve sanat alanında çağın en ileri ürünlerini ortaya koymuş bir uygarlıktır. Bu uygarlığın yarattığı müzik sistemi diğer ilkçağ uygarlıkları sistemlerine kıyasla, kendi içinde tutarlı, somut, bilimsel araştırmaya dayanan ileri bir aşamayı temsil eder...]*²⁷

Antik Yunanda, bilim ve sanatın bir arada işleyişi, kendi bilimsel müzik nazariyesini oluşturmuştur. Bu müzik nazariyesini, diğer uygarlıkların müzik nazariyesinden ayıran en önemli etken ise matematiksel nazariye farkından²⁸ gelmektedir.

²⁶ Bkz. (19), Grant, 97

²⁷ Ahmet Say, **Müzik Tarihi**, 55

²⁸ Rauf Yekta, **Türk musikisi**, 19

Tüm uygarlıkların müzik bilimi müzikologlar tarafından, matematik nazariyesi göz önünde tutularak incelenmektedir. Böylelikle geçmiş uygarlıklar ile bugün arasındaki farklılıklar ve ortak yapılar, bilimsel olarak ilişkilendirilebilmektedir.

1.2 Müzik ve Geometri İlişkisi

Geometride ilk adım, nokta ile atılır. İkinci bir noktanın eklenip, bu iki noktanın birleştirilmesi ile bir doğru, üçüncü nokta ile üçgen ve dolayısıyla da düzlem elde edilir. Eklenen dördüncü nokta ise üç boyutlu çalışmalara yer açmıştır.²⁹ Matematiğin ilk unsuru olan nokta, doğru ve düzlem evrenin matematik dilidir.³⁰

Antik devirde, geometrik şekillerin uzaklıkları ile uzunluk hesaplamalarına dair formüller, müzikte tel boyu ve boru boyu olarak ifade edilmiştir. Geometrik şekiller resim ve mimaride, gözle görülebilecek şekilde kolay ve anlaşılır olarak gösterilebilir. Müzik ise bu yaklaşımı kulak ve duyum ile sağlar.

[...Görüldüğü gibi iki notayı bir arada duymak, iki frekansı ya da iki sayıyı ve bu iki sayı arasındaki oranı algulamaktan başka bir şey değildir.]³¹ Evrenin ve doğanın muhteşem geometrisi müzikte, armoni olarak görülür...]³²

İnsanlar, doğada ses titreşimlerini karmaşık ve düzensiz olarak duyar. Yeryüzünde mevcut bulunan tüm ses titreşimlerinin, belli bir kaynağı vardır. Doğada karmaşık ve düzensiz halde bulunan sesler, genellikle suyun akışından, hava akımından ve hayvanların kendi aralarındaki iletişimlerinden kaynaklanır.

²⁹ Jay Kappraff, **Connections**, 3

³⁰ Bkz. (13), Orhan, 21

³¹ Bkz.(13), Orhan, 6

³² Bkz. (21), Nazlıben, 104

Ses, belli bir kaynaktan hareket eden belirli bir enerjiye sahiptir. Ses, düzenli bir yapıya sahip olduğunda ise estetik bir yapı sergiler. Kulak yardımı ile çeşitli şekillerde duyulan bu ses titreşimleri, esinlemeler ve taklitler sonucu elde edilerek düzenli hale getirilmiştir. Müzik, bu düzensiz seslerin düzenli hale gelmesi ve sıralanışı ile oluşur. Doğada karmaşık ve düzensiz halde bulunan bu sesler, matematiksel yöntemlerin katkıları ile bir düzen içerisinde sınıflandırılmıştır.

[...Matematik düzensizlikteki düzenin bulunmasına, düşünceleri bir mantık zincirine göre düzenlemeye ve temel kuralları bulmaya yardım ediyordu...]³³

Matematik ve geometri, farklı sanat dallarının da birbirini etkilemesine neden olmuştur. Günümüzde müzik, matematiğin katkısı ve farklı teknolojilerin kullanılması ile gelişme göstermiştir. Müzik yazımındaki gelişmeler ve sesin bilgisayar ortamında üretilmesi sonucu müzik, görsel olarak da diğer sanat dalları ile etkileşimini güçlendirmiştir.

³³ Bkz. (25), Struik, 63

2. BÖLÜM

PYTHAGORAS ve MÜZİK TEORİSİ

Yaklaşık olarak M.Ö. 580 - 500 yılları arasında yaşadığı tahmin edilen ünlü yunanlı filozof ve bilgin Pythagoras, Sisam'da doğmuştur. Doğa felsefesinin kurucusu Thales'in yönlendirilmesi ile Mısır ve Babil'deki bilginlerle çalışmıştır.

Pythagoras, müzik ve matematik alanındaki en köklü çalışmaları yapan filozoflardandır. Hayatı boyunca yaptığı seyahatlerde Babillilerden, Mısırlılardan ve Çinlilerden öğrenmiş olduğu matematik yöntemlerini, tüm çalışmalarına uygulamış, yöntemlerin doğal ve akla uygun olmasına özen göstermiştir. Antik Yunan'a felsefeyi getiren³⁴ Pythagoras, hem bir matematikçi hem de bir müzisyendir.

Reel sayıları bilmeyen yunanlı matematikçiler, Antik devirde rasyonel aritmetik kullanmışlardır. Uzunlukları ve uzaklıkları ölçmede, rasyonel sayılar kullanılarak işlemler yapılmıştır. Bu nedenle belirli bir birimi ele alıp, bu birimle başka bir birimi oranlayarak, iki nokta arasındaki uzunlukları hesaplamışlardır. Geometri problemlerine çözüm arayışları sonucunda elde edilen bulgular, müzik ve matematiğin birlikte gelişme göstermesinde etken olmuştur.

Ses aralıklarının, tel uzunluklarına ve tel uzunluklarının birbirine oranına bağlı olduğunu bulan Pythagoras'ın müzikle uğraşısı, müzikteki matematiksel gizemin ve günümüz matematiksel gerçekliklerin başlangıcını oluşturur. Pythagoras, çalışmalarında sayma sayıları ve sayma sayılarının birbirine oranı olan kesirleri kullanmıştır.

³⁴ Derman Bayladı, **Pythagoras Bir Gizem Peygamberi**, 95

Pythagoras, çekiç ağırlıklarını ve tel boylarını veren büyüklükleri kendi aralarında oranlamış, müzikteki ses aralıklarını oranlarla ifade etmiştir. Farklı müzik dizileri ve farklı ayar yöntemlerinin kurgulanmasına olanak sağlamıştır.

Pythagoras'ın, M.Ö. 6. yüzyılda müzikal aralıklar ve dizilerin kurulumu üzerine yapmış olduğu çalışmalar, Rönesans dönemine dek etkisini sürdürmüştür. Çalışmalardan elde edilen sonuçlar günümüzde de geçerliliğini korumaktadır.

Pythagoras müzik teorisine dair bulgularını, hiçbir yazılı metne kaydetmemiştir.³⁵ Çalışmaları ile müzik teorisine önemli katkı sağlamıştır. Müzik teorisinin ilk kurucuları ve yazıya dökenler ise Philolaus, Archytas ve Platodur.

Pythagoras düşüncesinin temeli sayılara ve uyum'a dayanır. Yazılı olmayan anlatımlar, ardından gelen düşünürlerin aynı temel düşüncüyü esas alarak farklı yöntemler geliştirmelerine neden olmuştur. Sayılar aracılığı ile kurulan teoremler uyum'u akılcı olarak açıklamanın yolunu oluşturmuştur.

*[...Besteci daha önce hiç kimsenin duymadığı bir melodiye besteler, yazar daha önce kimsenin okumadığı bir roman yazar, matematikçi ise daha önce hiç kimsenin aklına gelmeyen ya da ispatlayamadığı bir teorem ispat eder. Birinin ürünü bestedir. Diğerinin ürünü bir romandır. Matematikçinin ürünü ise teoremlerdir...]*³⁶

Pythagoras'ın çalışmaları hakkında ilk yazılı anlatım, Philolaus tarafından gerçekleştirilmiştir. Philolaus'un yazdıkları, Pythagoras'ın müzik çalışmalarından elde ettiği anlatımları içerir.³⁷ Pythagoras'a ait bulguların açıklanması ve yazıya dökülmesi, Archytas döneminde gerçekleşir. Müzik alanında yapılan modern çalışmalar ve buluşlar ise çoğunlukla Plato akademisinde görülmektedir.

³⁵ Paul Strathern, **Pisagor Ve Teoremi**, Çev. Osman Çakmakçı, 32

³⁶ Ercan Kumcu, **Kadın Matematikçiler**, 13

³⁷ Carl Huffman, **Phronesis**, 6

Pythagoras'ın, müzik alanında yapmış olduğu çalışmalar, Philolaus ve Archytas'ın dışında da birçok matematikçi tarafından farklı olarak ele alınmıştır. Müzik teorisi, her dönemde yenilenmiş ve farklı bakış açıları ile gelişmeye devam etmiştir.

2.1 Pythagoras'ın Matematiksel Müzik Teorisi

Pythagoras, doğuşkanların³⁸ altında yatan matematiksel oranları keşfeden filozof olarak bilinmektedir.³⁹ Çalışmalarında sayma sayılarına yer vermiş ve ses aralıklarını sayma sayılarının birbirine oranı olan kesirli sayılarla ifade etmiştir. Kullandığı oranlama yöntemleri akla uygun olup, kurduğu matematiksel müzik teorisinde küçük sayma sayılarını kullanmıştır.

[...Pythagoros (pisagor) (M.Ö.585–519) ses perdesi ile tel uzunluğu arasındaki bağıntıyı bulmuştur. Daha sonraki araştırmacılar bir sesin niteliğini ve ses dizisindeki yerini, bu sese karşılık olan sayının niteliği ve sayılar dizisindeki yeri ile bir tutmuşlardır...]⁴⁰

Pythagoras, tüm çalışmalarında sade ifadeler kullanmıştır. Bu sade ifadeler sayılarda küçük sayılar ve bunların birbirine oranını içerir. Sayılara dayalı anlatımının sadece müzikte değil, bilimin her alanında da önem taşıdığı görüşü günümüze dek sürmüştür.

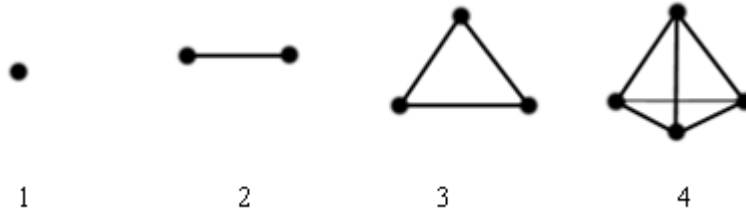
³⁸ Bir sesin uyumlu bileşenleri

³⁹ Bkz.(24), Christensen, 272

⁴⁰ Bkz. (27), Say, 50

2. 1. 1 Sayılar ve Tetraktys

Pythagoras, doğada gözlemlendiği geometrik şekilleri noktalarla göstermiştir. Tek nokta 1 rakamını simgeler.⁴¹ Pythagoras 2 rakamını, çizgi, 3'ü üçgen ve 4'ü piramit olarak şekillendirmiştir.⁴² Şekil 2.1 de noktalar ile elde edilen sayılar ve geometrik şekilleri verilmiştir.



Şekil 2.1 Noktalar ve Sayılar

*[...Tek nokta boyutların üreticisidir. İki nokta tek boyutlu bir çizgiyi tanımlar. Bir doğru üzerinde olmayan üç nokta iki boyutlu bir üçgenin alanını tanımlar. Aynı düzlemde olmayan dört nokta üç boyutlu bir kutunun hacmini belirler. Tüm boyutları tanımlayan sayıların toplamı 10'dur...]*⁴³

Pythagoras, geometriyi Mısırlılardan öğrenmiştir.⁴⁴ Sayıları, noktalardan oluşturduğu kümeler ile sınıflandırmıştır. İsmi geometrik şekillerin noktasal gösteriminden alan üçgen ve kare sayılar ile çalışmıştır. Üçgen sayılar, 1 nokta, 2 nokta, 3 nokta ve 4 noktanın üst üste kümelenmesi şekil 2.2 de gösterilmiştir. Şekil 2.3 de ise üçgen sayılar verilmiştir.

⁴¹ Egon Friedell, **Antik Yunan'ın Kültür Tarihi**, Çev. Necati Aça, 134

⁴² İbrahim Okur, **Çağlar Boyunc Matematik Ve İlahiyat**, 160

⁴³ Ercan Kumcu, **Matematik Dünyası**, 49

⁴⁴ Bkz. (42), Okur, 149

$$1 + 2 = 3 \quad 1 + 2 + 3 = 6$$

Şekil 2.2 Noktalarla Gösterilen Üçgensel Sayılar

$$1 + 3 + 6 = 10$$

Şekil 2.3 Üçgen Sayılar

İlk dört sayma sayısının toplamı olarak bilinen ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$) en büyük basit sayı *decad*⁴⁵ diye adlandırılır. Bu dört sayının toplamından oluşan on nokta ile şekil 2.4 deki *tekraktys*⁴⁶ şekli elde edilir.



Şekil 2.4 Tetraktys

Pythagoras düşüncesinin temeli düzen fikrine dayanmaktadır. Çalışmalarındaki düzen, matematiksel düzen ve müziksel düzen olmak üzere iki farklı biçimde yer alır. Müziksel düzeni, ilk dört sayma sayısının oluşturduğu tetraktys sağlamıştır.⁴⁷ Her üçgenin tabanına ait nokta sayısının birbirine oranı, kesirli sayıyı verir. Tetraktys'deki her satırın birbirine oranı, ileride anlatılacak olan müzik aralıklarını simgeleyen tel boyu oranları ile aynıdır.

⁴⁵ Bkz. (24), Christensen, 273

⁴⁶ Guerino Mazzola, *Elemente Der Musikinformatik*, 5

⁴⁷ Bkz. (5), Schimmel, 21

Pythagoras'ın kullandığı diğer sayı sistemi ise ardışık üçgen sayıların toplamı ile elde edilen kare sayılardır. Şekil 2.5 de üçgen sayılar ile elde edilen kare sayılar gösterilmiştir.

$$1 + 3 = 4$$

Şekil 2.5 Üçgen Sayılardan Elde Edilen Kare Sayılar

Üçgen ve kare sayıların tabanlarını oluşturan noktalar, sayma sayılarını vermektedir. Noktalar, simgesel olup geometrik şekilleri ifade etmemektedir.⁴⁸ Noktaların oluşturduğu kalıplar, tam sayıları simgelemektedir. Geometrik şekiller ise noktaların birleştirilmesi ile oluşturulur.

Pythagoras, sayıların önemine inanmıştır.⁴⁹ Geometri problemlerindeki alan hesapları veya bir sayının ikinci dereceden kuvvetini alma işlemlerinin bilinmediği bu dönemde, sadece noktaların farklı dizilimleri ile karşılaşılan problemleri çözmeği başarmıştır. Şekil 2.6 da kare sayılar gösterilmiştir.

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16$$

Şekil 2.6 Kare Sayılar

⁴⁸ Richard L. Crocker, *The Journal Of Aesthetics And Art Criticism*, 190

⁴⁹ Andre Barbera, *The American Journal Of Philology*, 400

Doğada yapılan geometrik şekillerden elde edilen sayılar, evrenin de sayılar ile yapılandığının göstergesidir. Pythagoras, sayılarla tüm evreni ifade edilebileceğini savunmuştur.⁵⁰

2.1.2 Oranlar ve Monokord

Pythagoras, bilimsel yönden astronomi ile armoninin kardeş olduğu görüşüne inanmakta,⁵¹ astronomi ile armoninin, evrendeki en temel gerçek ahenk olduğu ve en yüksek ahengin de müzikte olduğunu savunmaktaydı.⁵²

Pythagoras, demircilerin çalışırken çekiçlerden çıkan seslerin uyumundan etkilenmiştir. Demircilerin kullandığı çekiç ağırlıklarından esinlenerek müzikal ses aralıkları üzerine araştırmalara başlamıştır.⁵³ Farklı ağırlıktaki dört çekiç kullanarak çıkan seslerin uyumunu araştırmıştır.⁵⁴ Resim 2.1 de yapılan deneyin resmi gösterilmiştir.



Resim 2.1 Ses Deneyi

⁵⁰ Stanley Sadie, *The Grove Concise Encyclopedia Of Music*, 485

⁵¹ Bkz. (49), Barbera, 397

⁵² Bkz. (34), Bayladı, 92

⁵³ Uzay Bora, *U.Ü. Eğitim Fakültesi Dergisi*, 58

⁵⁴ Mark Lindley, Ronald Turner-Smith, *Mathematical Models Scales*, 223

Farklı ağırlıktaki çekiçlerin çıkardıkları seslerin ses ahenginde önemli olduğunu⁵⁵ ve çekiç ne kadar ağır ise çıkan sesin de o kadar pes olduğunu duyan Pythagoras, çekiçlerin ağırlık birimlerini birbiriyle oranlamıştır. Çekiçlerin ağırlık birimleri, tetraktys'ü oluşturan 1, 2, 3 ve 4 sayıları ile orantılı seçip, bu sayıları kendi aralarında oranlayıp 1:2, 2:3 ve 3:4 oranlarını elde etmiştir.

Tetraktys'deki sayma sayılarının en küçük ortak katının 12 olması nedeniyle ilk çekiç ağırlığını 12 birim, diğer ağırlıkları ise 8 ve 6 birim olarak seçmiştir. Bir demire ikişer ikişer vuran çekiçler, farklı müzik aralıklarını duyurur. Birlikte vurulan 12 birimlik çekiç ile 6 birimlik çekiç sekizli (oktav) aralığını, 12 birimlik çekiç ile 8 birimlik çekiç beşli aralığını ve 8 birimlik çekiç ile 6 birimlik çekiç dördü aralığını tınlatır. Kullanılan 12, 8 ve 6 sayıları sırasıyla, küp şeklindeki bir cismin ayırıt, köşe ve yan yüz sayıları ile benzerlik taşımaktadır.⁵⁶

Pythagoras, çekiçlerin çıkardığı farklı seslerden elde ettiği bulguları, işitme duyusuna anlamaya yardımcı olacak biçimde çalgı tellerine de uygulamıştır. İki duvar arasına çapraz olarak çaktığı kazığa, dört ayrı tel gererek tel uçlarına bağlanan farklı ağırlıkların gerilen tellerdeki etkisini incelemiştir.⁵⁷ Resim 2.2 de Pythagoras'çuların ses deneylerini konu edinen örnek resim verilmiştir.

⁵⁵ Bkz. (24), Christensen, 272

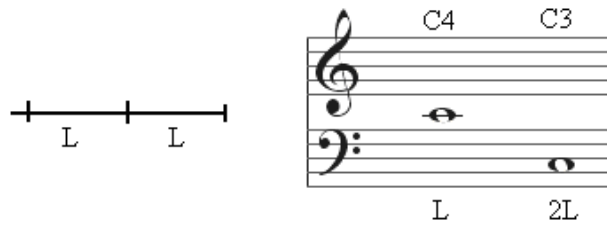
⁵⁶ Thomas Heath, **A History Of Greek Mathematics**, 85

⁵⁷ Bkz. (34), Bayladı, 93



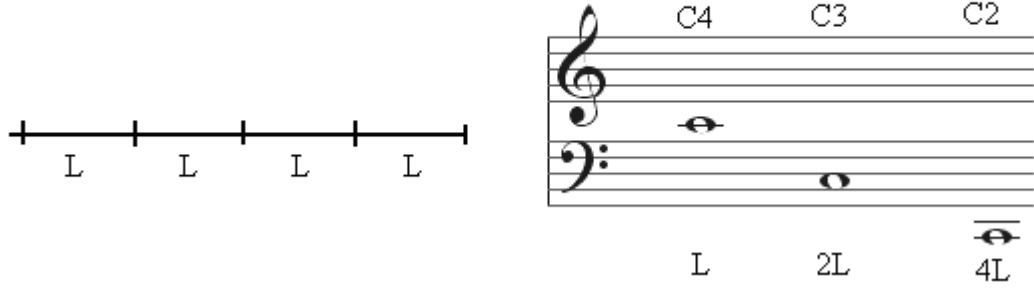
Resim 2.2 Ses Deneyleri

Pythagoras, çekiç ağırlıklarında olduğu gibi, 1, 2, 3 ve 4 katsayılarını tel boylarına da uygulamıştır. Deneylerinin uygulaması olarak boyu L olan bir tel ele alınır. Başlangıç sesi olan do ($C4$)'yu veren bu telin boyu iki katına çıkarıldığında, tel boyu $2xL$ olur ve bir oktav kalın do ($C3$)'u verir. Örnek 2.1 de do başlangıç sesi ve elde edilen kalın do sesi dizek üzerinde gösterilmiştir.



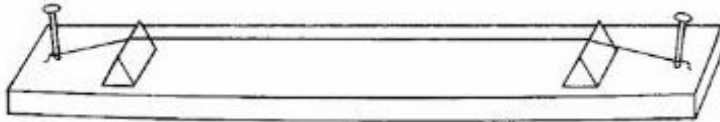
Örnek 2.1 Tel Uzunluğu ve Portede Sesin Yeri

Başlangıçtaki tel boyunun 4 katı, $4xL$ olup, ilk sesin iki oktav öncesindeki do ($C2$)'yu verir. Örnek 2.2 de tel uzunlukları ve pesleşen sesler gösterilmiştir.



Örnek 2.2 Tel Uzunluğu ve Portede Sesin Yeri

Tel uzunluklarının, doğal sayıların birbirine oranlarına bağlı olduğunu bulan Pythagoras,⁵⁸ iki telin birbirine olan oranı kullanarak farklı ses aralıkları aramış, *monokord* adı verilen ve resim 2.3 de gösterilen tek telli bir müzik aletini oluşturmuştur.



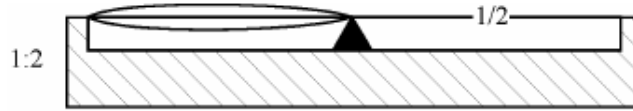
Resim 2.3 Monokord

Aletin tel boyunu değiştirerek farklı sesler elde etmiş, sesleri veren tel uzunluklarının birbirlerine göre oranlarını karşılaştırmış, böylelikle ses aralıklarının tel boylarına bağlı olduğunu ve tel boyu oranları ile sınıflandırılabilceğini saptamıştır.⁵⁹ Müzikal aralıkları, iki tam sayının birbirine oranı ile temsil edip, tel boyu oranlarını büyükten küçüğe sıralayarak, kendi adıyla anılan Pythagoras dizisini kurmuştur.

⁵⁸ Jerry P. King, **Matematik Sanatı**, Çev. Nermin Arık, 44

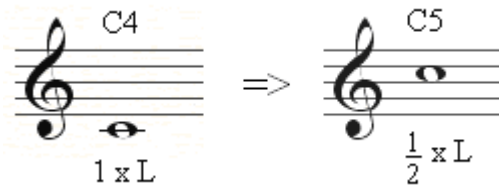
⁵⁹ James Jeans, **Science And Music**, 362

Tıpkı çekiç ağırlığının azalmasında olduğu gibi, tel boyunun kısalması ile çıkan sesler incelir. Boyu L olan bir tel, resim 2.4 de görüldüğü gibi, iki eşit parçaya bölündüğünde, telin her bir parçası ilk sesin incisini verir.



Resim 2.4 Monokord'un İki Eşit Parçaya Bölünüşü

Başlangıçta L boyuna sahip olan tel do (C4) sesini veriyor iken, tel boyu yarılandığında, $\frac{1}{2} \times L$ tel boyu ile ince do (C5) sesini verir. Örnek 2.3 de tel boyunun yarılanması ile elde edilen sesin portedeki yeri gösterilmiştir.



Örnek 2.3 Porte Üzerinde Sesin Yeri

Tel boyu üç eşit parçaya bölündüğünde mükemmel beşli olan doğal tam beşli elde edilir. Doğal tam beşliyi, telin üçte ikisi oluşturur. Resim 2.5 de monokordun üç eşit parçaya bölünüşü görülmektedir.



Resim 2.5 Monokord'un Üç Eşit Parçaya Bölünüşü

Tel üç eşit parçaya bölündüğünde, L başlangıç boyuna sahip tel do (C4) sesini vermekte iken, $\frac{1}{3} \times L$ boyuna ulaştığında ince sol (G5) sesini verir. Bu telin iki katı olan diğer parçası olan $\frac{2}{3} \times L$ tel boyu ise sol (G4) sesini verir. Örnek 2.4 de seslerin portede yeri ve bu seslere karşı gelen tel boyları gösterilmiştir.



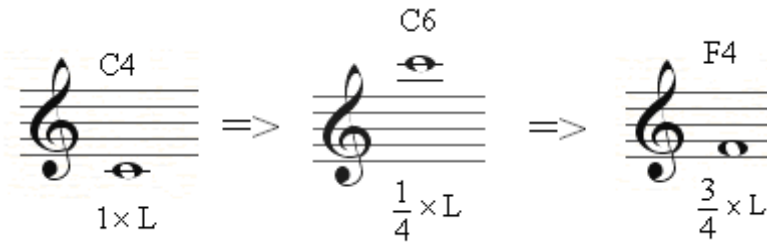
Örnek 2.4 Portede Üzerinde Sesin Yeri

Öte yandan, tel boyu dört eşit parçaya bölündüğünde, L başlangıç boyuna sahip ve do (C4) sesini veren telin bir parçası $\frac{1}{4} \times L$ boyuna sahip olur ve iki oktav ince do (C6) sesini verir. Bu çeyrek boya sahip tel, $\frac{1}{2} \times L$ uzunluğundaki telin iki eşit parçaya bölünmüş halidir. Resim 2.6 da monokordun dört eşit parçaya bölüşü gösterilmiştir.



Resim 2.6 Monokordun Dört Eşit Parçaya Bölünüşü

Dört eşit parçaya bölünen L boylu telin diğer kısmı $\frac{3}{4} \times L$ boyundaki tel boyuna sahiptir ve fa (F4) sesini verir. Elde edilen $\frac{3}{4} \times L$ boyundaki tel, $\frac{1}{4} \times L$ boyundaki telin üç katıdır. Örnek 2.5 de elde edilen seslerin portede yeri verilmiştir.



Örnek 2.5 Portede Üzerinde Sesin Yeri

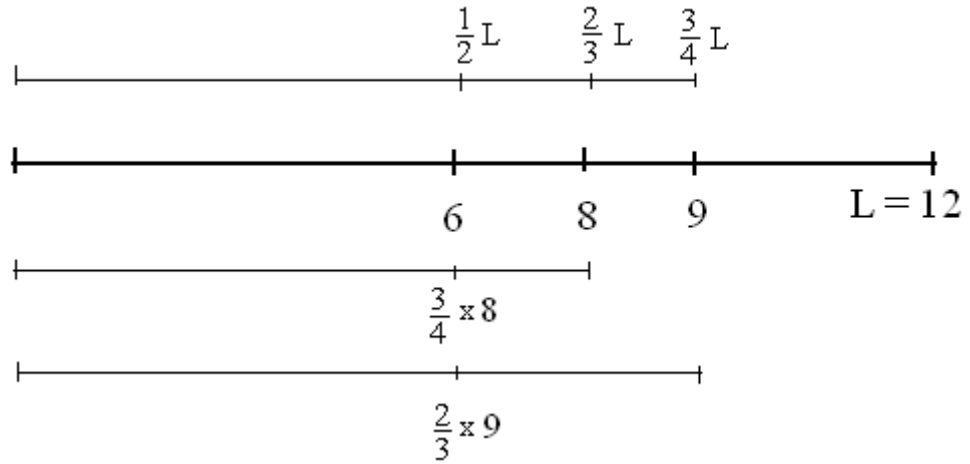
Pythagoras, farklı sesleri veren tel uzunluklarını birbirleriyle oranlayarak, müzikal aralıkları iki tam sayının oranı olarak ifade etmiştir. Aynı tel boyu uzunluğa sahip iki monokord kullanarak farklı tel boylarının çıkardığı seslerle aralıklar oluşturup, uyumlu aralıkların oranlarını saptamıştır.

Mükemmel dörtlü ve mükemmel beşliye ait tel boylarının katsayıları karşılaştırıldığında $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ olduğu görülür. Tel kısaldıkça ses tizleşmektedir. Ses aralıkları arasındaki uzaklık arttıkça, yani aralık büyüdükçe, tel boyları kısalmır.

Çekiç ağırlıklarında kullanılan büyüklükler tel boylarında da özelliklerini korur. Başlangıç tel boyu $L = 12$ birim do (C4) sesini vermekte ise telin yarısı olan $12 \times \frac{1}{2} = 6$ birim, ince do (C5) sesini verir.

Örnek 2.6 da boyu 12 birim olan tel boyunun $\frac{2}{3}$ sinin 8 birim olduğu görülür.

$\frac{2}{3} \times 12 = 8$ birim, do (C4) sesinin beşlisi olan sol (G4) sesini verir. Tel boyunun $\frac{3}{4}$ ü 9 birimdir. $\frac{3}{4} \times 12 = 9$ birim, do (C4) sesinin dördlüsü olan fa (F4) sesini verir.⁶⁰



Örnek 2.6 Tel Boyu Oranları

Tüm müzik sistemlerinin kuruluşu, sırasıyla 12, 9, 8 ve 6 sayıları ile temsil edilen, ünison, dördlü, beşli ve oktav olarak isimlendirilen aralıklara dayanır.⁶¹ Antik devirde müziğin temelini, monokord bölünüşlerinden elde edilen oktav, beşli ve dördlü ile ses perdeleri arasındaki uyum oluşturmuştur.⁶²

⁶⁰ Cecil Adkins, *Acta Musicologica*, 37

⁶¹ Gareth Loy, *The Mathematical Foundations Of Music*, 48

⁶² Andrew Barker, *Phronesis*, 114

Monokord bölünüşlerinden elde edilen oktav $\frac{1}{2} \times L$ tel boyu oranı, beşli $\frac{2}{3} \times L$ tel boyu oranı ve dördü $\frac{3}{4} \times L$ tel boyu oranı, bugüne dek aynı orana sahip olup hiçbir değişikliğe uğramamıştır.⁶³

Aralıkları oluşturan do, fa, sol ve ince do sesleri, Antik devirde Orpheus lirin⁶⁴ tel sırasıdır. Antik devirde bir arada bulunan bu dört sese, müzik dizilerinin temelini oluşturan *tetrakord*⁶⁵ ismi verilmiştir. Tetrakordların temelini oluşturan do, fa ve sol sesleri, dizideki birinci, dördüncü ve beşinci seslere karşı gelir. Günümüz armonisinde ise eksen, alt çeken ve çeken fonksiyonel bağıntısının temelini oluşturur.

Vincenzo Galileo'nun telin bir saniyedeki titreşim sayısını (frekans) ortaya atması ile Pythagoras'ın tel boyları ile bulduğu oranlara ait özellikler, fizik alanındaki karşılığını bulmuştur. Bir sesi üreten telin boyu ile sesin frekansı birbiri ile ters orantılıdır.⁶⁶ Tel ikiye bölündüğünde yarım tel boyu ilk telin iki katı titreşim yapar. Her sesin oktavı ise kendi frekansının iki katıdır. Frekans oranları ile yapılan işlemlerde, bir sesin bir oktav pesi, o sesin frekans katsayısının ikiye bölünmesi ile gösterilir. Tel boyu oranları ile işlem yapıldığında tel boyu katsayısı ikiyle çarpılır.

Pythagoras, M.Ö. 6. yüzyılın ortalarında akustikle ilgilenmiştir. İlk akustikçi olarak da dikkate alınabilir. Belirli bir sesi veren telin yarılanması ile ilk sesin bir oktav incesinin çıkacağını tasarlamıştır. Aynı teli başka oranlara bölerek, armonik seriye ait teoriyi oluşturmuştur. Armonik seri, akustikte büyük bir öneme sahiptir.⁶⁷

⁶³ Bkz. (28), Yekta, 32

⁶⁴ Archibald R. C, *American Mathematical Monthly*, 6

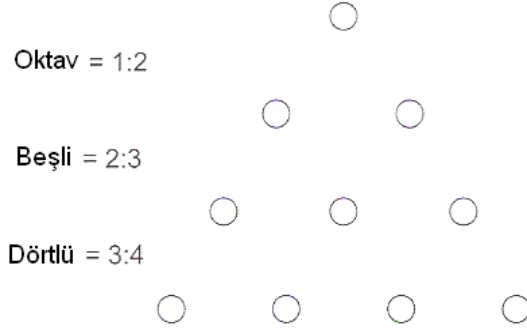
⁶⁵ Sadettin Arel, *Türk Musikisi Kimidir*, 128

⁶⁶ Ayhan Zeren, *Müzikte Ses Sistemleri*, 25

⁶⁷ Guy Warrack, *Müzik & Letter*, 21

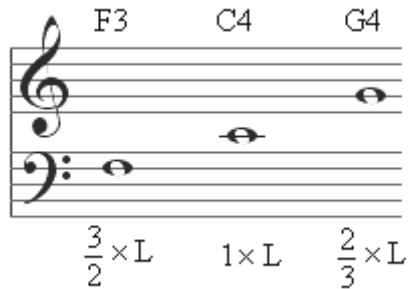
2.1.3 Aralıkların Özellikleri

Pythagoras, tetraktys'ün satırlarını oluşturan sayma sayılarında olduğu gibi, monokordun telini sırasıyla 1, 2, 3 ve 4 eşit parçaya bölmüştür. Monokord bölünüşlerinde elde edilen her oran, kendi içinde de bir uyuma sahiptir. Bölünüşlerden elde edilen sonuçlar, ötelemelerde sabit ses aralıklarının oranı olarak kullanılır. Resim 2.7 de görüldüğü gibi, başlangıç sesi olan do (C4) sesinin pes yöndeki beşlisi ile tiz yöndeki beşlisi, ilk ses do'ya göre, birbirlerinin yansımasıdır.



Resim 2.7 Tetraktys Oranı

Başlangıç sesi do, kalın fa (F3) ile sol sesi (G4) arasındaki simetri noktasını oluşturur. Nota yazımında ve tel boyu katsayılarındaki bu yansıma özelliği örnek 2.7 de gösterilmiştir.



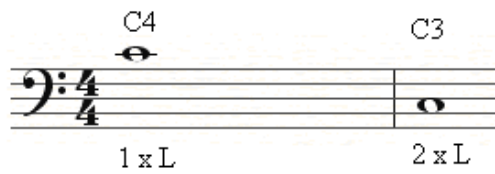
Örnek 2.7 Portede Üzerinde Sesin Yeri

Alt beşliyi⁶⁸ oluşturan olan fa (F3) sesi, bir oktav ötelendiğinde, başlangıç sesi olan do'nun (C4) dörtlüsü⁶⁹ olur.

Tetraktys'deki, ardışık iki satıra ait nokta sayısı küçükten büyüğe oranlandığında, sırasıyla oktav, beşli ve dörtlünün oranları elde edilir. Büyükten küçüğe sıraladığında ise bu oranlar, tel boyunun yansıması olan, frekans katsayı oranına karşılık gelir. Tetraktys, yansıma⁷⁰ yapısının yanı sıra, monokord'tan elde edilen oranları da gösterir.

Tel boyu 2, 3 ve 4'e bölünerek kısaltılmak yerine, sırasına göre 2, 3 ve dört katına çıkarılabilir. Bir oktav pes sesi elde etmek için, tel boyunu iki kat uzatılır yani L tel boyu iki ile çarpılır. Bir oktav ince ses ise, tel boyunun ikiye bölünmesi ile elde edilir.

Tel boyunu iki eşit parçaya bölmek yerine, iki katına çıkarıldığında, ses bir oktav kalınlaşır. Boyu 2 x L ulaşan tel kalın do (C3) sesini verir. Örnek 2.8 de elde edilen sesler portede gösterilmiştir.



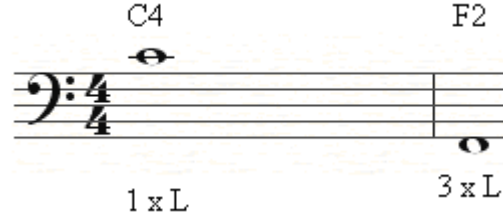
Örnek 2.8 Portede Üzerinde Sesin Yeri

Tel boyunu üç eşit parçaya bölmek yerine üç katına çıkarmakla, başlangıç sesinden bir oktav kalın olan beşliye ulaşılır. Boyu 3 x L olan bu tel, bir oktav kalın fa (F2) sesini verir. Örnek 2.9 da elde edilen sesler portede gösterilmiştir.

⁶⁸ Alt çeken

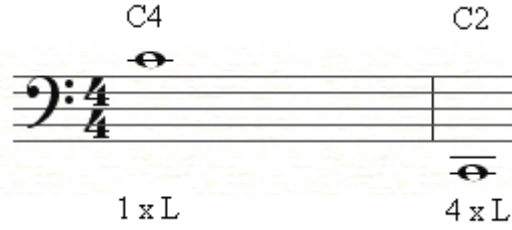
⁶⁹ William A. Sethares, **Tuning, Timbre, Spectrum, Scale**, 53

⁷⁰ Bkz. (46), Mazzola, 4



Örnek 2.9 Portede Üzerinde Sesin Yeri

Pythagoras tel boyunu dört eşit parçaya bölmek yerine dört katına çıkarırsa, başlangıç sesinden iki oktav kalın sesine ulaşır. Boyu $4 \times L$ olan bu tel iki oktav kalın do (C2) sesini verir. Örnek 2.10 da elde edilen sesler portede gösterilmiştir.



Örnek 2.10 Portede Üzerinde Sesin Yeri

Pythagoras, ilk elde ettiği aralık olan oktavı en uyumlu aralık kabul etmiştir. Oktavdan sonra en uyumlu aralığı beşli ve dörtlü aralık oluşturmaktadır. Bunun nedeni, oktav ses aralığının tam beşli ve tam dörtlünün kapsamasıdır.⁷¹ Örnek 2.11 de oktavın doğal tam beşli ile tam dörtlünün birleşiminden oluştuğu görülmektedir.

⁷¹ Bkz. (62), Barker, 116

beşli ötelemeyi simgeleyen sayılardır. Yöntemin yapı taşını doğal tam beşlinin tel boyu oranı $\left(\frac{2}{3}\right)$ oluşturur. Pythagoras dizisi $\left(\frac{2}{3}\right)$ çarpanlarının katları ile kurulur.

Eski yunan matematiği aritmetik ile geometriyi birleştirmektedir. Kuvvet alma işlemi bilinmediğinden, kare, küp gibi geometrik şekillerin özelliklerinden yararlanır.⁷⁴ Pisagorcuların, birbirine ekleyerek birleştirdikleri aralıkların tel boylarını hesaplarırken kullandıkları işlemler bilinmemektedir. Günümüz müzik teorisinde ise iki aralığın birleştirilmesi, aralıkları veren oranların çarpımı ile gösterilir. Toplanan aralıkları simgeleyen tel boyu katsayıları çarpılır. Birbirinden çıkarılan aralıkların tel boyu katsayıları ise birbirine bölünür.

Pythagoras dizisini kurmanın yollarından biri, bir başlangıç sesi seçerek beşli aralıklarla ileri veya geri gitmektir.⁷⁵ Örneğin bir telin başlangıçtaki uzunluğu, $\frac{2}{3}$ katsayısı ile beş kez ard arda çarpılıp ve bir kez $\frac{2}{3}$ katsayısına bölünerek Pythagoras dizisi elde edilir. Doğal tam beşlilerle ard arda atılan adımlar anlamına gelen bu işlemlerin sonucu elde edilen değerler,⁷⁶ bir oktavin içersine yerleşecek şekilde ötelenir.


Örneğin başlangıç sesi olarak seçilen do (C4), 1xL tel boyuna sahip olsun. Bu do'yu veren tel boyunun katsayısı 1 olup $\left(\frac{2}{3}\right)^0$ ile gösterilir. Tablo 2.1 de her beşli ilerleyiş ile tel boyunun $\frac{2}{3}$ oranında uzaması ve nota karşılıkları gösterilmiştir.

⁷⁴ Bkz. (48), Crocker, 195

⁷⁵ Bkz. (70), Sethares, 53

⁷⁶ M. Cihat Can, G. Ü. Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 143

C4	G4	D5	A5	E6	B6
$\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$



Tablo 2.2 Ses Oranları

Birinci beşli adımda L tel boyu $\frac{2}{3}$ katsayısı ile çarpılır. $\frac{2}{3} \times L$ tel boyu ile sol (G4) sesi elde edilir. Monokord bölünüşlerindeki birinci beşli adımda $\left(\frac{2}{3}\right)^1$ katsayısı elde edilir.

İkinci beşli adımda L tel boyu $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ katsayısı ile çarpılır. Birinci adım ile elde edilen $\frac{2}{3} \times L$ tel boyuna ait sol (G4) sesinden, bir beşli sonraki, bir oktav ince re (D5) sesine ulaşılır. $\frac{4}{9} \times L$ tel boyuna sahip re (D5) sesinin tel boyu $\frac{1}{2} \times L$ tel boyundan küçük olduğu için, bu oran iki ile çarpılarak bir oktav pes re (D4) elde edilir. Tel boyu katsayısı $\frac{4}{9} \times 2 = \frac{8}{9}$ olur.


Üçüncü beşli adımda L tel boyu $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ katsayısı ile çarpılır. La (A5) sesine ait $\frac{8}{27} \times L$ tel boyu ise iki ile çarpılarak bir oktav pes olan la sesi elde edilir. La (A4) sesinin tel boyu katsayısı $\frac{8}{27} \times 2 = \frac{16}{27}$ dir.

Dördüncü beşli adımda L tel boyu $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$ katsayısı ile çarpılır. Mi (E6) sesine ait $\frac{16}{81} \times L$ tel boyu ikinin ikinci kuvveti ile çarpılarak iki oktav pes olan mi sesi elde edilir. Mi (E4) sesinin tel boyu katsayısı $\frac{16}{81} \times 4 = \frac{64}{81}$ dir.

Yöntem 5 kere tekrarlandığında, beş adımda Pythagoras dizisi tamamlanmış olur. Beşinci beşli adımda L tel boyu $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$ katsayısı ile çarpılır. Si (B6) sesine ait $\frac{32}{243} \times L$ tel boyu ikinin ikinci kuvveti ile çarpılarak iki oktav pes olan si sesi elde edilir. Si (B4) sesinin tel boyu katsayısı $\frac{32}{243} \times 4 = \frac{128}{243}$ dir.

Tablo 2.2 de Pythagoras ses dizisinin, bir oktav içerisinde bulunan oranları ve elde edilen seslerin portede yeri verilmiştir.

C4	G4	D4	A4	E4	B4
$\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 2^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 2^2$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2^3}{3^2}$	$\frac{2^4}{3^3}$	$\frac{2^6}{3^4}$	$\frac{2^7}{3^5}$



Tablo 2.3 Ses Oranları

Dizinin tamamlanması için bir ses eksiktir. Altıncı adımda; do (C4)' den beşli geri gidilir. İlk tel boyu $\frac{2}{3}$, ne bölünür. Tel boyu $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = 1 : \frac{2}{3} = 1 \times \frac{3}{2}$ katsayısı ile çarpılır. $\frac{3}{2}$ katsayısı kalın fa (F3)' yı simgeler. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$ çarpanının yarısı olan $\frac{3}{4}$

çarpımı, diziye ait olan fa (F4) sesini simgeler. Fa sesi, monokord ile elde edilen orana eşittir. Tablo 2.3 de bu oran ve sesler verilmiştir.

F3	C4	G4
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$

Tablo 2.4 Ses Oranları

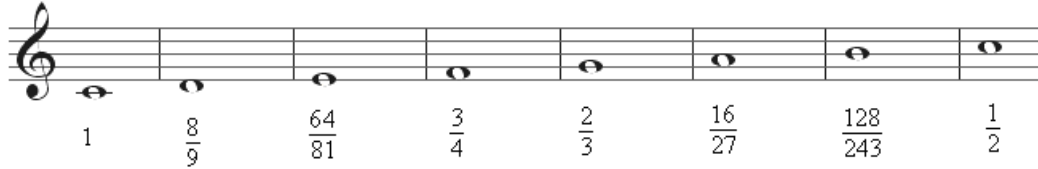
Sesler bir oktav içine yerleşecek biçimde düzenlenir. Sesleri simgeleyen katsayıların 1 ile $\frac{1}{2}$ arasında kalacak şekilde azalan sırada yazılması sonucu Pythagoras dizi kurulmuş olur. Tablo 2.4 de tel boyu oranları gösterilmiştir.

do	re	mi	fa	sol	la	si	do
C4	D4	E4	F4	G4	A4	B4	C5
$\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times 2^2$	$\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times 2^2$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{2^3}{3^2}$	$\frac{2^6}{3^4}$	$\frac{3}{2^2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2^4}{3^3}$	$\frac{2^7}{3^5}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Tablo 2.5 Tel Boyu Katsayılar İle Pythagoras Dizisi

Tam beşli adımlarla elde edilen bu tür dizilere, heptatonik diziler de denilmektedir. Batı müziğinde ilk müzik dizisi Pythagoras tarafından

oluşturulmuştur.⁷⁷ Örnek 2.12 de Pythagoras ses dizisinin bir oktav içerisinde tel boyu oranları ve portede bulunduğu yer gösterilmiştir.



Örnek 2.12 Portede Pythagoras Dizisi

Pythagoras, yeni ses aralıklarını doğal tam beşlileri kullanarak bulmuştur. Bunun nedeni ise doğal tam beşli sesinin doğal tam dördü sesine göre daha baskın duyulmasıdır. Günümüzde oktavdan aralığından sonra en uyumlu aralık olarak kabul edilen doğal tam beşli aralığı çeken olarak nitelendirilir.

2.3 Beşliler Çemberi

Bir sayının, katlarını alma işlemi olan üslü sayılarla işlem yapmayı bilmeyen Yunanlılar, geometri problemlerinden yararlanmışlardır. Ancak alan hesapları yardımıyla bir sayının karesini ve hacim hesapları yardımıyla da bir sayının kübünü alabiliyorlardı.⁷⁸

Pythagoras, ilk iki asal sayı olan 2 ve 3 ü kullanarak, 2 nin herhangi bir katının 3 ün bir katı olarak nasıl yazılabileceği sorusuna yanıt aramıştır. Doğal tam beşli adımlarla yaptığı deneylerin sonucunda, beşli aralıklarla ilerleyerek yeniden başlangıç sesine ulaşmak için, atılacak beşli adım sayısını bulmak istemiştir. Oktavın

⁷⁷ Bkz. (61), Loy, 47

⁷⁸ Bkz.(48), Crocker, 195

herhangi bir katını beşliler cinsinden ifade etmek ve $\left(\frac{2}{3}\right)^n \approx \left(\frac{2}{3}\right)^m$ olacak şekilde eşitlik sağlayacak n ve m doğal sayılarını aramak için çalışmalarda bulunmuştur.

Pythagoras'ın beşli adımları ile oluşturduğu beşliler çemberine do sesi (C1) ile başlanır. Örnek 2.13 de on iki kez beşli adım porte üzerinde gösterilmiştir.

The diagram illustrates the Pythagorean circle of fifths on a piano keyboard. It shows a sequence of 12 notes, each a fifth above the previous one, starting from C1 and ending at B#7. The notes are labeled as follows: C1, G1, D2, A2, E3, B3, F#4, C#5, G#5, D#6, A#6, E#7, B#7. The intervals between consecutive notes are labeled '5T' (5th interval). The notes are grouped into seven octaves, labeled '1. oktav' through '7. oktav'. A dashed line labeled '8va' indicates the octave span from C1 to C8.

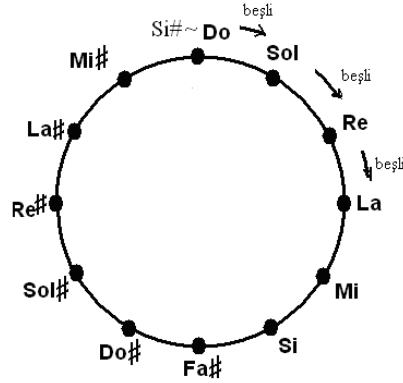
Örnek 2.13 Portede Beşliler Çemberi

On iki beşli adımdan sonra ve çember etrafındaki 7 turdan sonra, yedi oktav ilerideki si diyez (B#7) sesine ulaşılır.

2.4 Pythagoras Koması

Herhangi iki ses aynı ise, bu iki sesi belirleyen tel boylarının birbirine oranı 1 olur. Aynı olduğu varsayılan iki sese ait tel boylarının birbirine oranı birden farklı ise bulunan farka *koma* adı verilir.

Beşliler çemberinde on iki kere beşli ilerleyerek başlangıç sesinin 7 oktav incesine yakın bir ses elde edilir. Şekil 2.7 de görüldüğü üzere si diyez do'ya yakın oluşu ($B\#7 \approx C8$), $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^7$ denkliği ve beşliler çemberi gösterilmiştir.



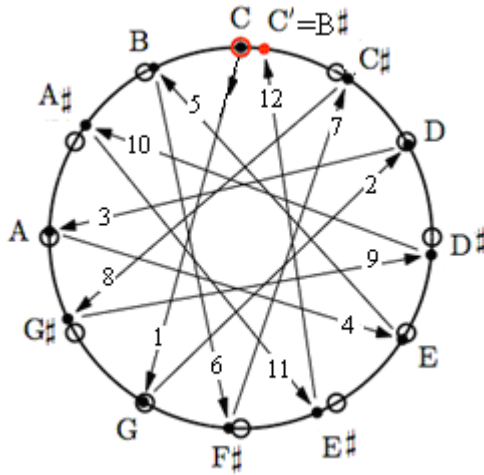
Şekil 2.7 Doğal Tam Beşliler Çemberi

Tablo 2.5 de elde edilen kromatik diziyi oluşturan sesler ve bu sesleri simgeleyen oranlar verilmiştir.

$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6$	$\left(\frac{2}{3}\right)^7$	$\left(\frac{2}{3}\right)^8$	$\left(\frac{2}{3}\right)^9$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$
$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{64}{729}$	$\frac{128}{2187}$	$\frac{256}{6561}$	$\frac{512}{19683}$	$\frac{1024}{59049}$	$\frac{2048}{177147}$	$\frac{4096}{531441}$
D2	A2	E3	B3	F#4	C#5	G#5	D#6	A#6	E#7	B#7 ? C8

Tablo 2.6 Pythagoras Kromatik Dizisi

On iki adım sonunda ulaşılan si diyez (B#7) sesi, başlangıç sesinden yedi oktav ileride ve anarmoniği⁷⁹ olduğu do sesinden (C8) daha tizdir. Resim 2.9 de gösterilen Si diyez (B#7) ilk sestem yedi oktav ileride bulunur ve $\frac{4096}{531441}$ oranı ile simgelenir. İlk oktava taşındığında, ilk oktavadaki si diyez (B#0), $\frac{4096}{531441} \times 2^7 = \frac{524288}{531441}$ katsayısına sahip olur. Başlangıçta 1 katsayısı ile belirlenen do (C1) sesinden daha pes olan si diyez ile aralarında $\frac{524288}{531441}$ değerinde bir fark vardır. Her iki sese ait anarmonik farka⁸⁰ *Pythagoras koması*⁸¹ adı verilir. Resim 2.9 da beşliler çemberi üzerinde Pythagoras kromatik dizisi gösterilmiştir.



Resim 2.8 Beşliler Çemberinde Atılan Adımlar

Pythagoras, basit ve anlaşılır hesaplama yolları ile farklı noktalardan başlayan sonsuz sayıda sıralamalar elde etmiştir. İkinci hiçbir kuvvetinin üçün

⁷⁹ Aynı sesi veren ve farklı perdeye sahip seslere anarmonik sesler denir. Perde yükseklikleri birbirlerin yakın olduğu için aynı ses olarak kabul görür

⁸⁰ Bkz. (67), Warrack, 22

⁸¹ Günümüz kaynaklarında hesaplar frekans oranları cinsinden yapılmakta ve P.koması

$\left(1 \div \frac{524288}{531441}\right) = \frac{531441}{524288}$ olarak geçmektedir.

kuvveti cinsinden yazılamayacağını göstermiştir. $(2)^{19} \approx (3)^7$ denklığı ise hiçbir çift sayının kuvvetinin tek sayının kuvveti cinsinden yazılamayacağını ifade eder.

2.5 Pythagoras'ın Kromatik Dizisi

Beşliler çemberinin kurulumunda elde edilen 12 farklı ses bir oktav içine yerleştirilip sıralandığında, 12 sesli bir dizi elde edilir. Tiz sesler kalınlaştırılırken katsayılar 2'nin katları ile çarpılır. Örneğin, beşinci oktavdaki do diyez (C#5) birinci oktava çekilirken dört kere 2 ile çarpılır. Tablo 2.6.a da gösterildiği gibi, birinci oktavdaki do diyez (C#1) dizide $\frac{128}{2187} \times 2^4 = \frac{2048}{2187}$ katsayısı ile yer alır.

Düzenlemeler yapıp, değerler 1 ile $\frac{1}{2}$ arasında kalacak şekilde azalan sırada yazılır. Tablo 2.6.a ve Tablo 2.6.b de Pythagoras kromatik dizisine ait oranlar verilmiştir.

1	$\frac{128 \times 2^4}{2187}$	$\frac{4 \times 2}{9}$	$\frac{512 \times 2^5}{19683}$	$\frac{16 \times 2^3}{81}$	$\frac{2048 \times 2^4}{177147}$	$\frac{64 \times 2^3}{729}$
1	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16384}{19683}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{131072}{177147}$	$\frac{512}{729}$
C1	C#1	D1	D#1	E1	E#1	F#1

Tablo 2.7.a Pythagoras Kromatik Dizi Oranları

$\frac{2}{3}$	$\frac{256 \times 2^4}{6561}$	$\frac{8 \times 2}{27}$	$\frac{1024 \times 2^5}{59049}$	$\frac{32 \times 2^3}{243}$	$\frac{4096 \times 2^7}{531441}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{32768}{59049}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{524288}{531441}$
G1	G#1	A1	A#1	B1	B#1 ? C2

Tablo 2.7.b Pythagoras Kromatik Dizi Oranları

Bu yöntemle oluşturulan dizideki bazı sesler büyük sayıların oranlarından oluşmuştur. On iki sestem oluşan kromatik dizi, küçük sayıların oranları ile temsil edilecek şekilde ikinci bir yöntemle de kurulabilir.

İkinci yöntemde, başlangıç sesinden altı kere ileri ve beş kere geri yönde beşli ilerleyerek yeni ses aralıkları oluşturulur. Tablo 2.7 de bu ikinci yöntemle kurgulanan Pythagoras Kromatik Dizi Oranları verilmiştir.

← C →											
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6$
D ^b 1	A ^b 1	E ^b 2	B ^b 2	F3	C4	G4	D5	A5	E6	B6	F [#] 7
$\frac{243}{32}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{64}{729}$

Tablo 2.8 Pythagoras Kromatik Dizi Oranları

Aralıklara ait katsayılar bir oktavın içinde yer alacak şekilde düzenlenir. Tiz sesleri kalınlaştırmak amacıyla katsayılar 2'nin katları ile çarpılır. Pes sesleri inceltmek için ise katsayılar 2'nin katlarına bölünür. Örneğin, tablo 2.8 de görüldüğü gibi, birinci oktavdaki re bemol (D^b1) dördüncü oktava çekilirken üç kere $\frac{1}{2}$ ile

çarpılır ve dizide do diyezlin anarmoniği olarak ($D^b 4$) $\frac{243}{32} \times \frac{1}{8} = \frac{243}{256}$ katsayısı ile yer alır.

Düzenlemeler yapıp, değerler 1 ile $\frac{1}{2}$ arasında kalacak şekilde azalan sırada yazılır. Tablo 2.8 de bu düzenlemeler verilmiştir.

C4	D ^b 4	D4	E ^b 4	E4	F4	F [#] 4	G4	A ^b 4	A4	B ^b 4	B4
1	$\frac{243}{32 \times 8}$	$\frac{4 \times 2}{9}$	$\frac{27}{8 \times 4}$	$\frac{16 \times 4}{81}$	$\frac{3}{2 \times 2}$	$\frac{64 \times 8}{729}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{16 \times 8}$	$\frac{8 \times 2}{27}$	$\frac{9}{4 \times 4}$	$\frac{32 \times 4}{243}$
1	$\frac{243}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{128}{243}$

Tablo2. 9 Kromatik Dizi Tel Boyları

Tablo 2.8 deki her oran, farklı bir aralığı simgeyen tel boyu katsayısını vermektedir. Dizinin ikinci, dördüncü, altıncı, dokuzuncu ve on birinci seslerinin anharmoniği yazıldığında, kromatik dizi, örnek 2.14 deki gibi gösterilir.

The musical notation shows a chromatic scale starting from G4. The notes are G4, A4, B4, C5, D5, E5, F5, G5, A5, B5, C6, D6. The ratios below the notes are: 1, $\frac{243}{256}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{27}{32}$, $\frac{64}{81}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{512}{729}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{81}{128}$, $\frac{16}{27}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{128}{243}$, $\frac{1}{2}$.

Örnek 2.14 Portede Kromatik Dizi

Bu yöntemle elde edilen sesler, ilk yöntemde on iki kez beşli adım ilerleyerek elde edilen kromatik dizinin sesleri ile anarmoniktir. Aynı sese karşı gelen ama farklı oran ile temsil edilen iki anarmonik ses arasındaki fark, Pythagoras komasını

oluşturur. Pythagoras, bu oranı $\frac{524288}{531441}$ olarak hesaplamıştır.⁸² Tablo 2.9 da anarmonik farklar gösterilmiştir.

2. ses için	4. ses için	6. ses için	9. ses için	11. ses için
$C^\# - D^b$	$D^\# - E^b$	$E^\# - F$	$G^b - A^\#$	$A^\# - B$
$\frac{2048}{2186} \div \frac{243}{256}$	$\frac{16384}{19683} \div \frac{27}{32}$	$\frac{131072}{177147} \div \frac{3}{4}$	$\frac{4096}{6561} \div \frac{81}{128}$	$\frac{32768}{59049} \div \frac{9}{16}$
$\frac{524288}{531441}$	$\frac{524288}{531441}$	$\frac{524288}{531441}$	$\frac{524288}{531441}$	$\frac{524288}{531441}$

Tablo 2.10 Anarmonik Farklar

2.5.1 Akortsuzluk

Başlangıç sesinden altı kere ileri yönde ve altı kere geri yönde beşli gidilerek yeni aralıklar oluşturulur. Tablo 2.10 da, uç noktalarda yer alan sol bemol (G^b0) ile fa diyez ($F\text{C}7$) iki farklı oran ile temsil edilen anarmonik seslerdir.

← C →												
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-6}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6$
G^b0	D^b1	A^b1	E^b2	B^b2	F3	C4	G4	D5	A5	E6	B6	F#7
$\frac{729}{64}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{64}{729}$

Tablo 2.11 Anarmoniklerin Hesabı

Düzenlemeler yapıp, değerler 1 ile $\frac{1}{2}$ arasında kalacak şekilde azalan sırada yazılışı tablo 2.11 de gösterilmiştir.

⁸² Bkz. (28), Yekta, 30

C4	D ^b 4	D4	E ^b 4	E4	F4	F#4 ≈ G ^b 4	G4	A ^b 4	A4	B ^b 4	B4
1	$\frac{243}{32 \times 8}$	$\frac{4 \times 2}{9}$	$\frac{27}{8 \times 4}$	$\frac{16 \times 4}{81}$	$\frac{3}{2 \times 2}$	$\frac{64 \times 8}{729} < \frac{729}{64 \times 16}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{16 \times 8}$	$\frac{8 \times 2}{27}$	$\frac{9}{4 \times 4}$	$\frac{32 \times 4}{243}$
1	$\frac{243}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{512}{729} < \frac{729}{1024}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{128}{243}$

Tablo 2.12 Anarmonik Eşitliği

Kurgusal yöntemde elde edilen ve piyano klavyesinin sınırları dışında kalan sol bemol (G^b0) ise dördüncü oktava çekilirken dört kere $\frac{1}{2}$ ile çarpılır ve

$\frac{729}{64} \times \frac{1}{16} = \frac{729}{1024}$ katsayısı ile (G^b4) olarak oktav içinde yerini alır. Tablo 2.12 de

görüldüğü gibi, sol bemolü simgeleyen oran fa diyezi simgeleyen orandan büyüktür.

F#4	≈	G ^b 4
$\frac{512}{729} = 0,702$	<	$\frac{729}{1024} = 0,711$

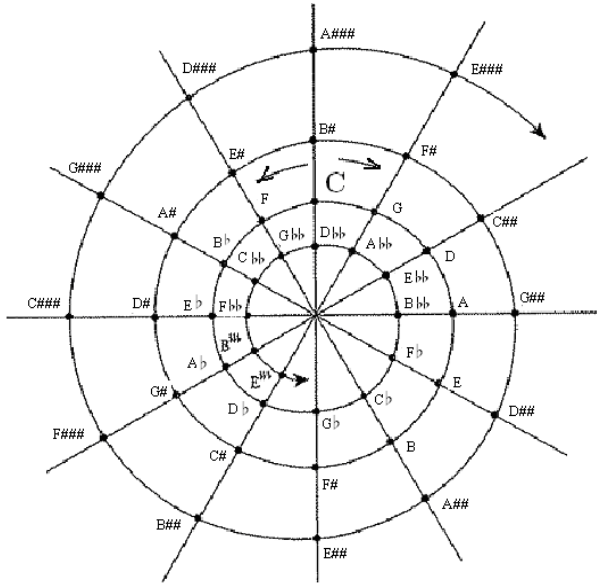
Tablo 2.13 Anarmonik Değer

Yedinci oktavadaki fa diyez ise (F#7) üç kere 2 ile çarpılır ve $\frac{64}{729} \times 8 = \frac{512}{729}$ katsayısı ile (F#4) olarak oktav içinde yerini alır. Bu iki oran arasındaki fark da Pythagoros komasını verir. Fakat her iki ses altı adımda elde edildiğinden bu iki ses kromatik dizide birbirine eşittir. Ayrıca tablo 2.11 deki anarmoniklerin hesabının yapıldığı beşliler çemberinde bu iki ses eşitliği görülmektedir.⁸³

⁸³ Bkz. (61), Loy, 54

$$\frac{729}{1024} : \frac{512}{729} = \frac{729}{1024} \times \frac{729}{512} = \frac{531441}{524288}$$

Pythagoras dizilerini farklı başlangıç sesleri ile farklı şekilde elde etmek mümkündür. Tam beşlilerin ardışık hareketi, resim 2.10 da görüldüğü gibi, her bir sesin yalnızca bir kere kullanıldığı, sonsuz bir nota dizisini oluşturur.



Resim 2.9 Spiral

Do (C4) başlangıç sesinden sekiz kez beşli ileri ve üç kez beşli geri gidildiğinde, resim 2.11 deki yöntemle, 7 oktav fark ile aynı sese ulaşılır. Do (C4) dan başlayarak sekiz kere beşli ilerlendiğinde 4 oktav ilerideki sol diyeze (G# 8) ulaşılır.

$$C4 \rightarrow G4 \rightarrow D5 \rightarrow A \rightarrow E6 \rightarrow B \rightarrow F\#7 \rightarrow C\#8 \rightarrow G\#8$$

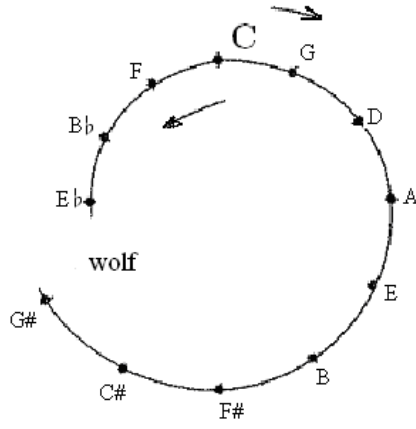
Sol diyez (G# 8) tel boyu katsayısı $\left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{265}{729}$ dır. Do (C4) dan başlayarak üç kere beşli geri gidilerek 2 oktav gerideki mi bemole (E^b2) ulaşılır.

$$E^{\flat 2} \leftarrow B^{\flat 2} \leftarrow F3 \leftarrow C4$$

Mi bemolün (E^b2) tel boyu katsayısı $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$ dir. Bir sesi 7 oktav ileri almak, katsayısını $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ile çarpmaktır. 7 oktav sonraki mi bemol (E^b9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{3^3}{2^{10}}$ katsayısı ile temsil edilir. Mi bemol (E^b9) ile sol diyez (G#8) in oluşturduğu aralık mükemmel beşliden küçüktür. İki farklı beşlinin arasındaki fark, beşlileri temsil eden katsayıların birbirine oranı olarak $\frac{3^3}{2^{10}} \div \frac{2^8}{3^8} = \frac{3^{11}}{2^{18}} = \frac{177147}{262144}$ şeklinde hesaplanır. Oysa do (C4) nün dokuz beşli sonrasında re diyez (D#7) ile sol diyez (G#8) mükemmel beşliyi oluşturur ve katsayılarının birbirine oranı $\frac{2}{3}$ dır. İki oran karşılaştırılırsa;

$$0,675762 = \frac{177147}{262144} > \frac{2}{3} = 0,66666 \text{ bulunur.}$$

Kurgusal olarak elde edilen beşli ile mükemmel beşli birlikte çalındığında kurt ulumasını hatırlatmasından dolayı kurt (*wolf*) adı verilen akortsuzluğa neden olur. Si sesi Fa# sesi ile beşli aralık oluştururken, si sesi G^b sesi ile kurt beşlisini oluşturur. Resim 2.11 de wolf spirali gösterilmiştir.



Resim 2.10 Wolf Spirali

Akortsuzluklar genel olarak, *wolf* dörtlüsü veya beşlisi olarak isimlendirilmiştir. Pythagoras'ın, doğal tam beşlilerle iteratif olarak oluşturduğu dizilerin yansımı niteliğinde drtllerle de birçok farklı Pythagoras dizisini oluşturmaya imkn sağlamıştır.⁸⁴

⁸⁴ Bkz. (61), Loy, 53

3. BÖLÜM

PHILOLAUS ve ARCHYTAS'IN MÜZİK TEORİSİ

Pythagoras akımı Antik dönemde etkisini uzun süre sürdürmüş, yapılan müzik çalışmaları, yeni teoremler ve farklı yaklaşımlar ile gelişme göstermeye devam etmiştir. Pythagoras geleneğini sürdüren önemli iki düşünür Philolaus ve Archytas, müzik teorisine farklı yorumlar getirerek bilime katkıda bulunmuşlardır.

İlk yazılı kaynağı oluşturmuş olan Philolaus aralıkların toplanması ve çıkarılmasına dair hesaplamalar yapmıştır. Philolaus ve öğrencisi Archytas, Pythagoras'ın çalışmalarını irdeleyerek, kendi görüş ve teoremlerini oluşturmuşlardır.

Antik devirde yaşayan Pythagoras, akılcı düşünmenin temelini atmıştır. Bu nedenle birçok matematikçi ve filozofu etkilemiştir. Pythagoras'ın müzik alanında yapmış olduğu köklü çalışmaları ve etkili anlatımları, Philolaus ve Archytas tarafından yenilenerek diğer kuşaklara aktarımı sağlanmıştır.

3.1 Philolaus'un Matematiksel Müzik Teorisi

Philolaus (MÖ 430 – 400), Sokrat ile aynı dönemde yaşamış olan Pythagoras'cı bir filozoftur. Pythagoras'dan bir yüzyıl sonra yaşamasına rağmen, Pythagoras'ın müzik teorisini tetraktysten çıkarmıştır.⁸⁵ Pythagoras'ın geliştirdiği müzik dizilerinin oranlarını ele alıp,⁸⁶ yeni düzenlemeler yapmış ve günümüzdeki kullanıldığı biçimde hesap yöntemleri geliştirmiştir.

⁸⁵ G. Assayag - H. G. Feichtinger – J. F. Rodrigues, **Mathematics And Music**, 5

⁸⁶ Charles H. Kahn, **Pythagoras And Pythagoreans**, 24

Philolaus, bilinen her şeyin bir sayı karşılığının olduğunu söylemiştir.⁸⁷ Sayısal değeri olmayan bir şeyi anlamının, mümkün olmadığını söyleyerek,⁸⁸ Pythagoras'ın felsefesini ve düşüncelerini ilk kez yazıya aktarmıştır. İlk yazılı kaynak Philolaus tarafından yazılan *natura* isimli kitaptır.

Astronomi alanında çalışmalar yapan Philolaus, geleneksel her Pythagoras'cı filozof gibi ilk olarak uyumu (*harmonia*)⁸⁹ açıklamakla işe başlar. İsimlendirmenin önemini vurgulayan Philolaus, her bir ses aralığını isimlendirmiştir. Oktav sözcüğü ile armonik olarak bir diziyi oluşturan beşli ile dördü aralıklarının bir arada olmalarını vurgular. *Diapason* oktav içerisindeki tüm notaların, *diapente* beş notanın, *diatessaron* dört notanın birlikteliğini ifade eder. Bir oktav (*diapason*) aralığının, bir dördü (*diatessaron*) ve bir beşli (*diapente*) aralıktan oluştuğunu söylemiştir.⁹⁰

Müzikal ses aralıkların uyumunu işitsel olarak anlamak, çok büyük bir dikkat gerektirir. Bu yüzden ses uyumunu anlamak için müziksel olarak, çok pratik yapılması gerekmektedir. Oysa sayılar arasındaki ilişkiye bakıldığında, matematiksel uyumu yakalamak daha kolaydır.⁹¹

Pythagoras'ın müzik alanındaki çalışmalarına farklı yorumlar getiren Philolaus, Pythagoras'ın çalışmalarını geliştirmiş, aralıkları kendi aralarında toplamış ya da farklarını almıştır.

Beşli aralığına (T5) dördü aralık (T4) eklendiğinde bir oktav (T8) elde edilir.

T5 + T4 = T8 (oktav) Tel boyu katsayıları çarpılarak $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ tel boyu

katsayısı elde edilir.

⁸⁷ Bkz. (86), Kahn, 27

⁸⁸ Bkz. (86), Kahn, 25

⁸⁹ Bkz. (37), Huffman, 24

⁹⁰ Gillian C. F. Snider, **In Defense Of Music's Eternal Nature: On The Pre-eminence Of Musica Theorica Over Musica Practica**, 12

⁹¹ Bkz. (62), Barker, 133

“Müzik terminolojisinde, aralıklar toplanır ya da çıkarılır. Oysa kulak frekansları algular. Dolayısı ile aralıkların toplanması olarak isimlendirdiğimiz ezgisel hareket, kulak tarafından frekansların çarpımı olarak algılanır. Aralıkların çıkarılması ise, bölme işlemi ile ifade edilir. Bu, işitmenin logaritmik olarak algılamasından kaynaklanır. Antik dönemde farklı tel boyları ile yapılan yeni müzikal aralık arayışı, logaritmanın o dönemde keşfedildiğini fakat yeterince ifade edilmediğini gösteriyor.”⁹²

Öte yandan, bir oktav aralığından tam beşli aralığının çıkarılması ile tam dörtlü, bir oktav aralığından tam dörtlünün çıkarılması ile tam beşli aralığı elde edilir. Kısacası

$$T8 - T5 = T4$$

$$T8 - T4 = T5$$

şeklinde yazılır. Oktav aralığından bir tam beşli aralığının çıkarılması, oktavı veren tel boyunun uzatılması anlamına gelir. Oktavın tel boyu, beşliyi veren tel boyu katsayısına bölünür, ya da beşliyi veren katsayının tersi kadar uzatılır. Aritmetik işlemlerle

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

şeklinde gösterilir. Bunun yansıması ise, bir oktav aralığından tam dörtlü aralığının çıkarılması sonucunda tam beşli elde edilmesidir.

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

⁹² Alper Gönen, **Seminer**

Bir tam sesi belirten *tonus*, beşli tam aralığı ile dörtlü tam aralığı arasındaki farka eşittir. Günümüzde bir ton ya da ikili majör aralığı olarak isimlendirilir.

Kısacası

$$T5 - T4 = 2M \text{ (Tam ses)}$$

gösterilir ve tel boyu uzunlukları için yapılan aritmetik işlemler aşağıdaki gibidir.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$$

Philolaus, iki tam sesin toplanması ile üçlü majör aralığını elde edmiş ve bu aralığı *ditonos* olarak adlandırmıştır.

$$2M + 2M = 3M$$

Büyük üçlü olarak isimlendirilen aralığın tel boyu katsayısı, tam sesi veren oranların karesine eşittir:

$$\frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{64}{81}$$

Oysa üçlü majör aralığı Pythagoras'ın beşliler çemberinde, dört defa üst üste atılmış beşli adımda ulaşılan sesin iki oktav geriye çekilmesi ile bulunur. Philolaus ikili majörün, dört defa birbirine eklenen beşli ile iki defa birbirine eklenmiş oktavın farkına eşit olduğunu bulmuştur.⁹³ Buna dair hesaplar aşağıda verilmiştir:

$$(4 \times T5) - (2 \times T8) = 3M$$

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) =$$

⁹³ Bkz. (85), Assayag - Feichtinger – Rodrigues, 5

$$= \frac{16}{81} : \frac{1}{4} = \frac{16}{81} \times 4 = \frac{64}{81}$$

Mükemmel dörtlü aralığı (*diatessaron*), iki tam ses ve artık oluşturan bir kalan sestem (*hemitonion*) oluşur. Kalan ses yarım sesi ifade eder. Bu aralığın eski adı, diyatonik yarım perde olarak adlandırılan *limma*'dır.⁹⁴ Pisagorcular ve Platon, dörtlü ile iki tam sesin toplamı arasındaki farkı *leimma* olarak isimlendirir:

$$T4 = 2M + 2M + \text{Kalan ses}$$

Beşli aralık ise üç adet tam ses ve bir kalandan oluşur:

$$T5 = 2M + 2M + 2M + \text{Kalan ses}$$

Yarım kromatik ton adı ile tanımlanan *apotom*'un tel boyu katsayısı

$\frac{2048}{2187}$ oranı ile gösterilir. Aynı aralığın anarmoniği, yarım kromatik ses ise $\frac{243}{256}$ tel boyu katsayısına sahiptir. İki yarım sesin toplamından oluşan bir tam sesin tel boyu oranı, bu iki farklı oranın çarpımına eşittir⁹⁵ :

$$\frac{2048}{2187} \times \frac{243}{256} = \frac{8}{9}$$

Philolaus ise yarım sesi fark ses olarak nitelendirip, geçiş anlamına gelen *diyez* (*diesis*) adını verir.⁹⁶ Kalan ses ya da yarım ses, ya dörtlü aralıktan iki tam ses çıkarılarak, ya da beşli aralıktan üç tam ses çıkarılarak elde edilir.⁹⁷ Aşağıda aralık ve tel boyu katsayılarının hesaplanması yer almaktadır.

⁹⁴ Bkz. (28), Yekta, 36

⁹⁵ Bkz. (28), Yekta, 36

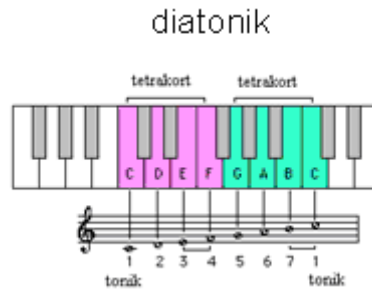
⁹⁶ Andrew Barker, **Greek Musical Writings II**, 38

⁹⁷ Bkz. (90), Snider, 14

$$\text{Yarım ses} = T4 - (2M + 2M) \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} \div \frac{64}{81} = \frac{3}{4} \times \frac{81}{64} = \frac{243}{256}$$

$$\text{Yarım ses} = T5 - (2M + 2M + 2M) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} \div \left(\frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \right) = \frac{2}{3} \div \frac{729}{512} = \frac{243}{256}$$

Philolaus, oktavin bir tam beşli ve tam dörtlüden oluşan yapısından yararlanarak beşli ile dörtlü farkından tam sesi bulmuştur. Öte yandan tetrakordu yani dört sesi, iki tam ses ve bir kalandan oluşturmuştur. Bir oktav aralığının iki ucuna yerleştirilen iki tetrakord ve aralarındaki tam sesle diatonik diziyi elde edilmiştir. Diatonik dizi, iki tonik arasındaki geçiş anlamına gelmektedir. Dizinin baştaki ve sondaki sesinden başlayarak yerleştirilen tetrakordlardan oluşur. İki tetrakord arasındaki fark $\frac{8}{9}$ oranına sahiptir. Resim 3.1 de diatonik dizi gösterilmiştir.



Resim 3.11 Diatonik

Philolaus, beşli ve dörtlü aralıklarının toplamından oluşan bir oktavin aynı zamanda beş adet tam ses ve iki kalan ile elde edilebileceğini göstermiştir.

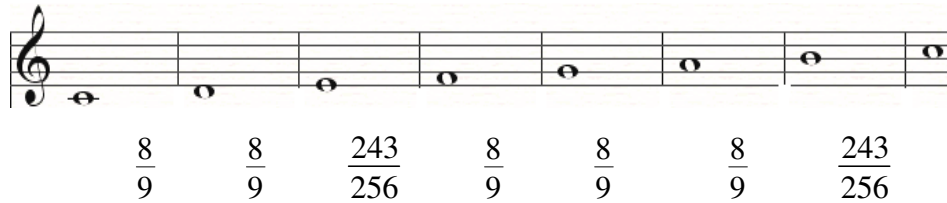
$$\left(\frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \right) + \left(\frac{243}{256} \times \frac{243}{256} \right) = \frac{32768}{59049} \times \frac{59049}{65536} = \frac{1}{2}$$

Philolaus, bir tam sesin iki adet kalan ses ile Pythagoras komasının toplamından oluştuğunu

$$\begin{aligned}\frac{8}{9} &= \frac{243}{256} \times \frac{243}{256} \times \frac{524288}{531441} \\ &= \frac{243}{256} \times \frac{243}{256} \times \frac{8 \times 256 \times 256}{9 \times 243 \times 243}\end{aligned}$$

şeklinde göstererek, Pythagoras müzik teorisine farklı işlemlerle ulaşmıştır.

Philolaus, bir beşlinin iki tam ses ve bir kalandan, bir dördlünün ise iki tam ve bir kalandan oluştuğunu tasarlamış ve bir majör dizinin ya da başka bir deyişle, bir oktavın iki tam bir yarım, üç tam bir yarımından oluştuğu ifade etmiştir. Günümüz majör ses aralıklarının yapısı ve hesapları, kurgusal olarak Philolaus tarafından yapılan hesaplar ile uyumludur. Örnek 3.1 de Philolaus tarafından kurgulanan diatonik dizi, porte üzerinde aralıkların oran farkı ile birlikte gösterilmiştir.



Örnek 3.15 Porte Üzerinde Philolaus Diatonik Dizi

Philolaus, ses aralıklarına uyguladığı toplama ve çıkarma yöntemleri ile diğer tüm ses aralıklarının da, başka aralıklar yardımı ile bulunabileceğini gösterir. Philolaus, aralıkların ses dizileri oluşturma yöntemlerinde önem taşıdığına işaret etmiştir. Günümüz armonisinde ses aralıkları, uyumun en önemli parçasını oluşturmaktadır.

3.2 Archytas'ın Matematiksel Müzik Teorisi

Archytas (MÖ 428-347), Platon ile aynı zamanda yaşamış son Pythagoras'cı olarak bilinir. Archytas, matematiksel müzik teorisini öğretmeni Philolaus'dan öğrenmiş ve Pythagoras'ın müzik çalışmalarını farklı biçimde ele almıştır. Pythagoras okulunun temelini oluşturan⁹⁸ geometri, aritmetik, astronomi ve müzik dördlüsünü kurup Quadrivium' un temelini hazırlamıştır. Bu temelde yatan çalışmalara ağırlık vererek, müzik çalışmalarında armoninin, astronomi ile bir bütünlük oluşturduğunu kabul etmiştir.⁹⁹

Pythagorascılar, tam sayıları ile gösterilemeyen sayılar olan irrasyonel sayıları keşfetmişlerdir.¹⁰⁰ Archytas ise Pythagorascıların bildiği fakat nedenini açıklamadığı bu gerçeği, yani iki doğal sayının oranı olarak yazılamayan irrasyonel sayıların varlığını kanıtlamıştır.

Archytas, akustik teorisini oluşturmuş, sesin havada titreşimler yarattığını söylemiştir. Sesin, kendisini oluşturan ve hareketini sağlayan hıza bağlı olduğunu savunmuş, ince seslerin kuvvetli ve hızlı, pes seslerin ise yavaş ve ağır olduğunu düşünmüştür.¹⁰¹ Günümüzde sesin titreştiği bilinmektedir. Archytas, sesin bir hızı olduğunu düşünmüş, bir saniyedeki titreşim sayısı olan frekansı matematiksel olarak ifade etmemiştir.

Archytas'ın diğer önemli çalışması ise müzikteki aralıkları matematiksel olarak kurgulamasıdır. Hesaplarında Pythagoras dizisinin aralıklarını veren sayısal değerlerini temel almıştır. Müzisyen kulağının hassas olduğunu ve sesleri ayırt ederken aralık oranlarını ayırt etmek olduğu anlamına geldiği görüşünü savunmuş ve ses aralıklarını oranlarla ifade etmenin önemini vurgulamıştır.

⁹⁸ Bkz. (56), Heath, 213

⁹⁹ Carl Huffman, *The Classical Quarterly*, 347

¹⁰⁰ Richard L. Crocker, *The Journal Of Aesthetics And Art Criticism*, 326

¹⁰¹ Bkz. (90), Snider, 15

Kendisinden önceki düşünürler, diatonik dizi üzerinde çalışmışlardır. Archytas tetrakordlar üzerinde çalışarak, üç değişik tetrakord ele almıştır. Bu tetrakordları ses aralıklarının cinslerine göre diatonik, kromatik ve anarmonik aralıklar oluşturması şeklinde sınıflandırmıştır.¹⁰² Archytas, müzikte tetrakordları esas alarak diziler oluşturmuştur.

Bir aralığı ikiye ayırmak amacıyla ortalama bulma işlemini kullanmıştır. Geometride kullanılan ortalamaları müzik aralıklarına uyarlamış ve farklı ses aralıklarını elde etmiştir. Archytas'ın müzik alanında yaptığı en ünlü çalışmaların Plato'nun da önemini farkında olduğu, aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaları Archytas, sınıflandırıp müzik dizisinde kullanması, müzik alanında yaptığı en ünlü çalışmaların başında gelmektedir.¹⁰³

Birinci bölümde de belirtildiği gibi Pythagoras'ın, monokord üzerinde $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ve $\frac{3}{4}$ oranları elde etmiştir.¹⁰⁴ Oktavı, beşliyi ve dördlüyü veren bu oranları Archytas, ses dizilerinde değişmez oranlar olarak ele almıştır. Örneğin tetrakordların oranı daima $\frac{3}{4}$ oranını vermiştir.

Archytas teorisi, herhangi bir müzik aralığını ikiye ayıran notayı tanımlayan, üç değişik oranlama yönteminden söz eder. Birincisi oranlama yöntemi Aritmetik Ortalamadır. Aritmetik ortalama bilindiği gibi en basit ortalama olup geometri ile matematik problemlerinde, iki nokta arasındaki uzaklığın yarısını bulmaya yarar.

$$A(a, c) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{1} \right) + \left(\frac{c}{1} \right) \right] = b$$

¹⁰² Bkz. (56), Heath, 216

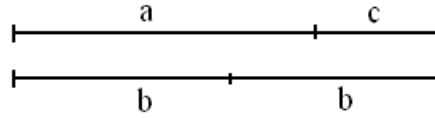
¹⁰³ Bkz. (96), Barker, 47

¹⁰⁴ Andre Barbera, **Journal Of Music Theory**, 192

$[a,c]$ aralığında yer alan b noktası ($a < b < c$), a ile c nin aritmetik ortalamasıdır. $A(a,c)$ ile gösterilen aritmetik ortalama, a nın b ye uzaklığının b nin c ye uzaklığına eşit olması anlamına gelir ve matematiksel olarak

$$a - b = b - c \Rightarrow a + c = 2b \Rightarrow \frac{a + c}{2} = b$$

gösterilir. Şekil 3.1 de aritmetik ortalama, uzaklık olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.8 Aritmetik Ortalama

Tel uzunluklarını, Pythagoras'ın çekiç ağırlıklarından elde ettiği 6, 9 ve 12 ağırlıkları gibi seçildiğinde, 12 ile 9 un farkı, 9 ile 6 nın farkına eşit olur. $12 - 9 = 9 - 6$ 6 ile 12'nin aritmetik ortalaması aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$12 - 9 = 9 - 6 \Rightarrow 12 + 6 = 2 \times 9 \Rightarrow \frac{12 + 6}{2} = 9$$

İkinci oranlama yöntemi Geometrik Ortalamadır. Geometrik Ortalama G , iki nokta arasındaki uzaklığın birbirine oranıdır. $[a,c]$ aralığında, ($a < g < c$) $a:g$ oranı $g:c$ oranına eşit olması ile gerçekleşir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\frac{a}{g} = \frac{g}{c} \Rightarrow g^2 = a \times c \Rightarrow g = \sqrt{a \times c}$$

Geometrik ortalamının müzikte karşılığı, iki oktavlık bir aralığın geometrik ortalaması bir oktav olarak bulunur. Tel uzunluklarının 3, 6 ve 12 olduğu durumda, 12:6 oranı 6:3 oranına eşittir.

Üçüncü oranlama yöntemi, Archytas'ın bulduğu harmonik ortalamadır. Harmonik ortalama h , aritmetik ortalamanın yansıması olarak yorumlanabilir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$H(a, c) = A^{-1} \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{c} \right) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \right]^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} = \frac{2ac}{a+c} = h$$

Matematiksel olarak

$$a < h < c \text{ için } \frac{h-a}{a} = \frac{c-h}{c} \text{ veya } \frac{h-a}{c-h} = \frac{a}{c} \text{ yazılabilir.}$$

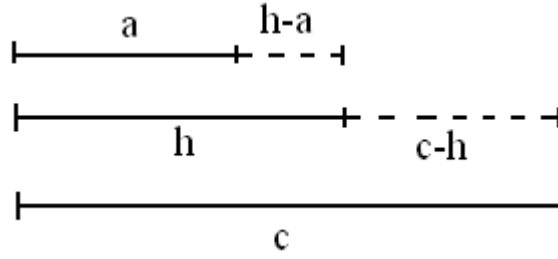
Düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \text{Ya da;} \quad \frac{a-h}{a} = \frac{h-c}{c} &\Rightarrow \frac{a}{a} - \frac{h}{a} = \frac{h}{c} - \frac{c}{c} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{h}{a} = \frac{h}{c} - 1 \Rightarrow 2 = \frac{h}{c} + \frac{h}{a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 = \frac{ah + hc}{ac} = \frac{h(a+c)}{ac} \\ &\Rightarrow h = \frac{2ac}{a+c} \end{aligned}$$

Sonucu aşağıdaki gibi yazılır.

$$H(a, c) = A^{-1} \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{c} \right) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \right]^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} = \frac{2ac}{a+c} = h$$

Şekil 3.2 de harmonik ortalama çizim olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.9 Harmonik Ortalama

Pythagoras'ın tetraktysten¹⁰⁵ belirlediği temel aralıklara ait oranların aritmetik ve harmonik ortalamalarının hesapları aşağıda yer almaktadır.

Oktav ($a=1$ ve $c = \frac{1}{2}$) için,

$$A\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \quad \text{ve} \quad H\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times 1 \times \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

Beşli aralık ($a=1$ ve $c = \frac{2}{3}$) için,

$$A\left(1, \frac{2}{3}\right) = \frac{1 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{6} \quad \text{ve} \quad H\left(1, \frac{2}{3}\right) = \frac{2 \times 1 \times \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{4}{5},$$

Dörtlü aralık ($a=1$ ve $c = \frac{3}{4}$) için,

$$A\left(1, \frac{3}{4}\right) = \frac{1 + \frac{3}{4}}{2} = \frac{7}{8} \quad \text{ve} \quad H\left(1, \frac{3}{4}\right) = \frac{2 \times 1 \times \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{6}{7} \quad \text{oranları elde edilir.}$$

¹⁰⁵ Bkz. (96) Barker, 48

Hesaplamalara devam edilmiş ses aralıklarına ait bazı aritmetik ve harmonik ortalamalar, tablo 3.1 de gösterilmiştir.

Aralık	a	c	<u>Harm. Ort.</u> $H(a,c)$	<u>Arit. Ort.</u> $A(a,c)$
Oktav	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
Beşli	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$
Dörtlü	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$
Majör üçlü	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$
Minör üçlü	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{11}{12}$
Minör üçlü	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{13}{14}$
Tam ses	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{15}{16}$
Tam ses	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{17}$	$\frac{17}{18}$

Tablo 3.14 Aralıkların Aritmetik ve Harmonik Ortalaması

Archytas, iki ardışık doğal sayının oranı ile gösterilen sayılar ile de çalışmış, Pythagoras'ın aralıkları simgeleme yöntemini geliştirmiştir. Aralıkların oranını $\frac{n}{n+1}$ şeklindeki yazılabilen “özel sayılar”¹⁰⁶ ile ifade etmek istemiştir.

¹⁰⁶ her n doğal sayısı için $\frac{n+1}{n}$ şeklinde gösterilebilen sayılar epimorik (superparticular) sayılar denir

Archytas, 8:9 oranı ile belirlenen tam sesi, ikiye ayırmanı yollarını aramış ve bir tam sesi iki eşit parçaya bölme problemini ortaya atmıştır. $\frac{n}{x} = \frac{x}{n+1}$ eşitliğini sağlayan x değerini araştırmıştır. Tam beşli ses aralığı ile tam dördü ses aralığının farkından oluşan tam sese ait 8:9 oranı, iki eşit parçaya bölünebilir mi yani öyle bir x ara değeri var mıdır ki, $\frac{8}{x} = \frac{x}{9}$ eşitliği gerçekleşsin, sorusuna cevap aramıştır.

Archytas, bir yandan iki ardışık sayıyı oranı ile ifade ettiği epimorik oranların ikiye bölünmesinin imkânsızlığını göstermiş, bir yandan da $n=1$ değeri için “kesir olarak gösterilemeyen”¹⁰⁷, yani irrasyonel sayıların varlığını da kanıtlamıştır. Aşağıda aritmetik işlemler ile izlenen yol gösterilmiştir:

$$\frac{n}{x} = \frac{x}{n+1} \text{ eşitliğinde } n=1 \text{ ise}$$

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1+1}$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \text{ olur. Bu da } \frac{n}{n+1} \text{ şeklinde gösterilen iki sayı arasında}$$

geometrik ortalama bulunamaz anlamına gelmektedir.

Aritmetik ortalama ile başlangıç sesinin uzaklıkları eşit olsa da elde edilen ses tüm oktavin yarı sesi değildir. Bu nedenle Archytas, geometride kullandığı bu ortalamaları, yeni ses aralıklarını verecek şekilde bir yöntem olarak kullanmıştır. Oktav sesinin veya diğer tüm aralıkların eşit olarak değil aritmetik ve harmonik olarak bölünebileceğini göstermiştir.

¹⁰⁷ Bkz. (98), Crocker, 327

3.2 Archytas Bölünüşleri ve Archytas Ağacı

Philolus, daha önce matematiksel müzik teorisi üzerine çalışan düşünürler gibi, sadece diatonik diziyi esas almamıştır. Tetrakordları içeren çalışmaları ile Philolus, Archytas'ı etkilenmiştir.

Pythagoras oranları ile başladığı bu teoriyi Archytas, matematiksel olarak farklı ele alıp yeni bir dizi oluşturmuştur. Pythagoras'ın monokord bölünüşlerinde, aritmetik ortalama ve harmonik ortalamayı, tüm ses aralıklarının bölünüşünde kullanmıştır.¹⁰⁸

Aritmetik ortalama ile harmonik ortalamanın çarpımı, geometrik ortalamanın karesini verir, $G^2 = A \times H$.

Archytas, aritmetik ortalama ile harmonik ortalamanın çarpımının geometrik ortalamanın karesi olma özelliğinden yararlanarak her ses aralığının aritmetik ve harmonik olarak bölünebileceğini göstermiştir. Bir ses aralığı ele alındığında, aralığın tel boyu oranı c ve başlangıç noktası olarak $a = 1$ ile gösterilirse, Archytas bölünüşü :

$$\frac{c}{\text{aritmetik ortalama}} = \frac{\text{harmonik ortalama}}{a} \text{ olarak yazılır.}$$

Bir oktav ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$ sonucu, oktavdan dörtlü çıkarıldığında elde edilen beşlinin aritmetik gösterilimidir. Böylelikle bir oktav ses aralığının, bir tam beşli ve tam dörtlüden

¹⁰⁸ Bkz. (60), Adkins, 37

oluşturduğunun matematiksel kanıtı verilmiş olur. Başlangıç aralığını oktav olarak (1 ve $\frac{1}{2}$ için) Pythagoras'un bulduğu oranları elde etmiştir.

$$\frac{\frac{1}{2}}{A(1, \frac{1}{2})} = \frac{H(1, \frac{1}{2})}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{1}$$

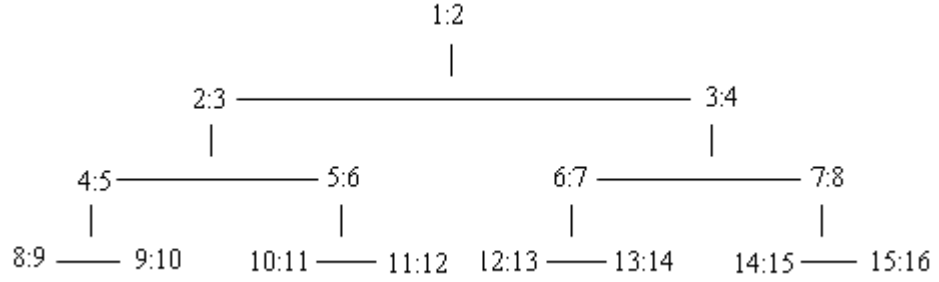
Beşli aralık aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{4}{5}$ sonucu, beşliden küçük üçlü çıkarıldığında elde edilen büyük üçlünün aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{2}{3}}{A(1, \frac{2}{3})} = \frac{H(1, \frac{2}{3})}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{4}{1}$$

Dörtlü aralık aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının $\frac{3}{4} \div \frac{7}{8} = \frac{6}{7}$ sonucu, dörtlüden büyük ikili aralığı çıkarıldığında elde edilen küçük üçlünün aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{3}{4}}{A(1, \frac{3}{4})} = \frac{H(1, \frac{3}{4})}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{6}{1}$$

Archytas Bölünüşü, bir müzikal aralığın aritmetik olarak iki eşit parçaya bölünemese de, aritmetik ve harmonik olarak bölünebilirliğini söyler. Elde edilen her yeni aralık oranı için Archytas Bölünüşüne ait hesaplamalar yapılır ve elde edilen değerler bir şema ile gösterilir. Bu şema şekil 3.3 de Archytas Ağacı adı olarak verilmiştir.



Şekil 3.10 Archytas Ağacı

Her bir oranda, büyük olan sayı, küçüğün bir fazlasıdır. Bu yapıda olan özel sayılara epimorik sayılar denir. Archytas ağacını oluşturan tüm oranlar $\frac{n}{n+1}$ yapısına sahiptir.

Archytas, Philolaus aralıklara getirdiği yorumlara ve öğrendiklerine dayanarak diğer ses aralıklarının da bölünebileceğine inanmıştır. Bu nedenle ilk olarak çalışmalarına tetrakordları bölerek başlamıştır. Böylelikle bir diziyi ve tetrakordu diatonik, kromatik ve en harmonik olarak, üç farklı büyüklükte ve oranda ifade edebilmiştir.

Ses uyumunu veren ortalamalar, Antik devirde aralıkların birbirlerine karşı alacakları sırayı verir. Oktavın mükemmel olduğu kabul eden ortalamalar, beşlinin oktava göre aralığının küçülmesinden ötürü uyumunu zayıf kabul eder.¹⁰⁹ Bu düşünce ile Archytas ses aralıklarını, anarmonik seslere kadar sürdürmüştür.

Üçlü majör aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının $\frac{4}{5} \div \frac{9}{10} = \frac{8}{9}$ sonucu, üçlü majörden, büyük ikili çıkarıldığında elde edilen diğer büyük ikilinin aritmetik gösterilimidir.

¹⁰⁹ Bkz. (28), Yekta, 33

$$\frac{\frac{4}{5}}{A(1, \frac{4}{5})} = \frac{H(1, \frac{4}{5})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{4}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{\frac{8}{9}}{1}$$

Üçlü minör aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının

$\frac{5}{6} \div \frac{11}{12} = \frac{10}{11}$ sonucu, minör üçlü aralığından minör ikili aralığının çıkarıldığında elde

edilen tam sesin aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{5}{6}}{A(1, \frac{5}{6})} = \frac{H(1, \frac{5}{6})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{5}{6}}{\frac{11}{12}} = \frac{\frac{10}{11}}{1}$$

Diğer elde edilen üçlü minör aralığı aritmetik ve harmonik olarak

bölündüğünde, oranının $\frac{6}{7} \div \frac{13}{14} = \frac{12}{13}$ sonucu, minör üçlü aralığından minör ikili

aralığının çıkarıldığında elde edilen tam sesin aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{6}{7}}{A(1, \frac{6}{7})} = \frac{H(1, \frac{6}{7})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{6}{7}}{\frac{13}{14}} = \frac{\frac{12}{13}}{1}$$

Tam ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının

$\frac{7}{8} \div \frac{15}{16} = \frac{14}{15}$ sonucu, tam ses aralığından minör ikili aralığının çıkarıldığında elde

edilen diğer minör sesin aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{7}{8}}{A(1, \frac{7}{8})} = \frac{H(1, \frac{7}{8})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{7}{8}}{\frac{15}{16}} = \frac{\frac{14}{15}}{1}$$

Diğer tam ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının

$\frac{8}{9} \div \frac{17}{18} = \frac{16}{17}$ sonucu, tam ses aralığından minör ikili aralığının çıkarıldığında elde

edilen diğer minör sesin aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{8}{9}}{A(1, \frac{8}{9})} = \frac{H(1, \frac{8}{9})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{8}{9}}{\frac{17}{18}} = \frac{16}{17}$$

Diğer tam ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının

$\frac{9}{10} \div \frac{19}{20} = \frac{18}{19}$ sonucu, tam ses aralığından minör ikili aralığının çıkarıldığında elde

edilen diğer minör sesin aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{9}{10}}{A(1, \frac{9}{10})} = \frac{H(1, \frac{9}{10})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{9}{10}}{\frac{19}{20}} = \frac{18}{19}$$

Diğer tam ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının

$\frac{10}{11} \div \frac{21}{22} = \frac{20}{21}$ sonucu, tam ses aralığından minör ikili aralığının çıkarıldığında elde

edilen diğer minör ikili sesin aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{10}{11}}{A(1, \frac{10}{11})} = \frac{H(1, \frac{10}{11})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{10}{11}}{\frac{21}{22}} = \frac{20}{21}$$

Minör ikili ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının

$\frac{11}{12} \div \frac{23}{24} = \frac{22}{23}$ sonucu, minör ikili ses aralığından çeyrek ses aralığının çıkarıldığında

elde edilen diğer çeyrek ses aralığının aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{11}{12}}{A(1, \frac{11}{12})} = \frac{H(1, \frac{11}{12})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{11}{12}}{\frac{23}{24}} = \frac{\frac{22}{23}}{1}$$

Diğer bir tam ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının $\frac{12}{13} \div \frac{25}{26} = \frac{24}{25}$ sonucu, ikili majör ses aralığından minör ikili ses aralığının çıkarıldığında elde edilen diğer minör ikili ses aralığının aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{12}{13}}{A(1, \frac{12}{13})} = \frac{H(1, \frac{12}{13})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{12}{13}}{\frac{25}{26}} = \frac{\frac{24}{25}}{1}$$

Minör ikili ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının $\frac{13}{14} \div \frac{27}{28} = \frac{26}{27}$ sonucu, minör ikili ses aralığından çeyrek ses aralığının çıkarıldığında elde edilen diğer çeyrek ses aralığının aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{13}{14}}{A(1, \frac{13}{14})} = \frac{H(1, \frac{13}{14})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{13}{14}}{\frac{27}{28}} = \frac{\frac{26}{27}}{1}$$

Minör ikili ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının $\frac{14}{15} \div \frac{29}{30} = \frac{28}{29}$ sonucu, minör ikili ses aralığından çeyrek ses aralığının çıkarıldığında elde edilen diğer çeyrek ses aralığının aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{14}{15}}{A(1, \frac{14}{15})} = \frac{H(1, \frac{14}{15})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{14}{15}}{\frac{29}{30}} = \frac{\frac{28}{29}}{1}$$

Minör ikili ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının $\frac{15}{16} \div \frac{31}{32} = \frac{30}{31}$ sonucu, minör ikili ses aralığından çeyrek ses aralığının çıkarıldığında elde edilen diğer çeyrek ses aralığının aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{15}{16}}{A(1, \frac{15}{16})} = \frac{H(1, \frac{15}{16})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{15}{16}}{\frac{31}{32}} = \frac{30}{1}$$

Minör ikili ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının $\frac{16}{17} \div \frac{33}{34} = \frac{32}{33}$ sonucu, minör ikili ses aralığından çeyrek ses aralığının çıkarıldığında elde edilen diğer çeyrek ses aralığının aritmetik gösterilimidir.

$$\frac{\frac{16}{17}}{A(1, \frac{16}{17})} = \frac{H(1, \frac{16}{17})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{16}{17}}{\frac{33}{34}} = \frac{32}{1}$$

Minör ikili ses aralığı aritmetik ve harmonik olarak bölündüğünde, oranının $\frac{17}{18} \div \frac{35}{36} = \frac{34}{35}$ sonucu, minör ikili ses aralığından çeyrek ses aralığının çıkarıldığında elde edilen diğer çeyrek ses aralığının aritmetik gösterilimidir. Archytas'ın ortalamalardan elde ettiği sesler, ek 2 de tablo olarak verilmiştir.

$$\frac{\frac{17}{18}}{A(1, \frac{17}{18})} = \frac{H(1, \frac{17}{18})}{1} \Rightarrow \frac{\frac{17}{18}}{\frac{35}{36}} = \frac{34}{1}$$

Archytas, ortalamalar ile elde ettiği bu oranları tetrakord oranına denk bir biçimde, Philolaus'dan öğrendiği aralıkları toplayarak üç çeşit tetrakord elde etmiştir. Diyatonic cins olarak tetrakordu, iki tam ses ve bir çeyrek sestem elde etmiştir. Aynı

cins tetrakordu bir tam ses oranı ile bağlayarak diyatonik bir dizi elde etmiştir. Örnek 3.2 de diyatonik dizi portede verilmiştir.

$$\frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{27}{28} = \frac{3}{4}$$

$\frac{3}{4}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{3}{4}$

$\frac{8}{9}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{27}{28}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{27}{28}$

Örnek 3.16 Portede Üzerinde Archytas Diatonik Dizisi

Archytas, Pythagoras oranlarına denk tel boyları ile kromatik cins olarak tetrakordu, üçlü minör ile çeyrek ses ve yarım sesin toplamı ile elde etmiştir. Üçlü minör aralığını, Pythagoras tel boyuna eşit olarak alan Archytas, diğer yarım sesi ise tam sestem yarım ses aralığını çıkararak bulmuştur. Örnek 3.3 de kromatik dizi portede verilmiştir.

$$\frac{8}{9} - \frac{27}{28} = \frac{8}{9} \times \frac{28}{27} = \frac{224}{243}$$

$$\frac{27}{32} \times \frac{224}{243} \times \frac{27}{28} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{8}{9} \qquad \frac{3}{4}$$

$$\frac{27}{32} \quad \frac{27}{28} \quad \frac{224}{243} \quad \frac{27}{32} \quad \frac{27}{28} \quad \frac{224}{243}$$

Örnek 3. 17 Portede Üzerinde Archytas Kromatik Dizisi

Son olarak Archytas anarmonik tetrakordu, üçlü majör aralığına, iki çeyrek ses ekleyerek elde etmiştir. Böylelikle, diyatonik, kromatik ve anarmonik olarak üç dizi elde etmiştir. Örnek 3.4 de anarmonik dizi portede verilmiştir.

$$\frac{4}{5} \times \frac{35}{36} \times \frac{27}{28} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{8}{9} \qquad \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{5} \quad \frac{35}{36} \quad \frac{27}{28} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{35}{36} \quad \frac{27}{28}$$

Örnek 3.18 Portede Üzerinde Archytas Anarmonik Dizisi

SONUÇ

Antik Yunan, Ege Denizinin iki yakasında yer alır. Bu bölgede yapılan felsefi ve bilimsel çalışmalar, batının biliminin ve kültürünün kaynağını oluşturur. Batı müziğinin temeli, Antik dönemde yaşayan düşünürlerin çalışmaları sonucu elde ettikleri bulguların bir ürünüdür.

Antik Yunanın, tüm dünya kültürüne ve bilimine köprü oluşturmuştur. Anadolu yakası ile Orta doğu, Yunanistan yakası ile Avrupa, bu bilim ve kültürden etkilenmiştir. Düşüncenin somutlaştırılması için yapılan felsefi çalışmalar, deney ve gözlemlerle desteklenmiştir.

Müzik, insanın kendini seslerle ifade etme yoludur. Seslerin insan üzerindeki etkisini anlatmak ve açıklık kazandırmak müzikteki seslerin uyumunu somutlaştırmakla mümkündür. Müzik yazımının henüz oluşmadığı Antik devirde bile, uyuma açıklık kazandırmak amacıyla müzik, sayılarla ilişkilendirilmiştir.

Matematiksel işlemlerle kurgusal olarak elde edilen ses aralıkları ve ses aralıklarının elde edilmiş yöntemleri, müzik aletlerinin gelişimine katkı sağlamıştır. İcra edilen sesin sınırları yeniden belirlenmiş, müzik aletlerinin gövde biçimi ve boyutları da değişime uğramıştır. Aynı yapıya sahip olan müzik aletleri, farklı boyutlarla ve akortlarla yeniden tasarlanmıştır.

Seslerin bir dizi içinde sıralanışı, uyumlu aralıkların çok sayıda telli ve nefesli çalgılarla icrası, birçok sesin de bir arada uyumlu çalınabilmesini mümkün kılmıştır. Çok seslilik uyumun bir sonucu olarak doğmuştur. Uyumlu ses aralıkları, armoni biliminde esas alınması ile birlikte, bir düzen içersinde ifadelendirilmiştir.

Oluşturulan teoriler ve yapılan değişiklikler, yeni ses dizilerinin oluşumunu sağlamış, farklı ses dizileri ile akortlar yaratılmasına neden olmuştur. Pythagoras ve Archytas'ın elde ettiği oranlar, hem doğuşkanların bulunmasında hem de diğer ses aralıklarının elde edilmesinde önemli bir rol oynamıştır.

Matematiksel teorilerin, müziğin geldiği noktada kuşkusuz büyük bir önemi vardır. Gelişen matematik bilimi müziği etkilediği gibi, müzik de matematiği

etkileyerek yeni matematiksel teorilerin gelişimini sağlamıştır. Ses aralıklarının toplanması yahut ta çıkarılması, işitmenin logaritmik algılayışını işaret etmiş, kısacası logaritmanın tanımlanmasında etken olmuştur.

Gelişen matematik teorileri, bilgisayar ve elektronik ortamda yeni seslerin ortaya çıkma olanağını arttırmıştır. Bu sayede çağdaş müzik ve yeni akımlar, müzikte kendilerine yeni yerler belirleme imkânı bulacaktır.

EKLER

Ek 1 Philolaus Göre Aralıkların Toplanması ve Çıkarılmasına Dair Bazı Hesaplar

Pythagoras ses dizilerini, aralıkların toplanması ve çıkarılması ile bulmak mümkündür. Üçlü majör aralığını, bir oktav içinde bulmanın diğer bir yöntemi ise daha önce bulunmuş olan altılı majör aralığından, dörtlü tam aralığının çıkarılması ile yani küçük tel boyunun uzatılması ile de bulunur.

$$6M - 4T = 3M$$

Tel boyu cinsinden bakıldığında bu oran $\frac{16}{27} : \frac{3}{4} = \frac{64}{81}$

Artık dörtlü olan eksik beşli aralığı, frekans cinsinden üçlü majör aralığı ile ikili majör aralığın toplanması ile yani büyük tel boyunun kısaltılması ile de elde edilir. Bu aynı zamanda, üç tam sesin yani üç adet ikili majörün toplamına eşittir.

$$3M + 2M = +4 = -5$$

$$2M + 2M + 2M = +4 = -5$$

Tel boyu oranı olarak $\frac{64}{81} \times \frac{8}{9} = \frac{512}{729}$

Tel boyu oranı olarak $\frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{512}{729}$

Altılı minör aralığı tel boyu cinsinden, iki adet üçlü majör aralığın toplanması ile yani büyük tel boyunun kısaltılması ile de elde edilir.

$$3M + 3M = 6m$$

$$\text{Tel boyu oranı olarak } \frac{64}{81} \times \frac{64}{81} = \frac{4096}{6561}$$

Doğal tam beşli çemberine göre, günümüzde minör ikili aralığı olan do © sesi, anarmonik ses olarak re ¨ sesine denktir. Bu oran, tam dörtlü çemberinin, 3M aralığının çıkarılması ile de elde edilir.

$$4T - 3M = 2m$$

$$\text{Tel boyu oranı olarak } \frac{3}{4} : \frac{64}{81} = \frac{3}{4} \times \frac{81}{64} = \frac{243}{256}$$

Üçlü minör aralığı, dörtlü tam sesinden ikili majör aralığının çıkarılması ile elde edilir.

$$4T - 2M = 3m$$

$$\text{Tel boyu oranı olarak } \frac{3}{4} : \frac{8}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{8} = \frac{27}{32}$$

Yedili minör aralığı iki adet tam dörtlünün toplanması ya da oktavdan ikili majör aralığının çıkarılması ile elde edilir.

$$T4 + T4 = 7m$$

$$O - 2M = 7m$$

$$\text{Tel boyu oranı olarak } \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{8}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{8} = \frac{9}{16}$$

Ek 2 Archytas Bölünüş Tablosu

T5	T4	3M	3m	Tam Ses	Yarm Ses	Çeyrek Ses
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{22}{23}$
				$\frac{8}{9}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{23}{24}$
				$\frac{9}{10}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{24}{25}$
				$\frac{10}{11}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{25}{26}$
				$\frac{12}{13}$	$\frac{16}{17}$	$\frac{26}{27}$
					$\frac{17}{18}$	$\frac{27}{28}$
					$\frac{18}{19}$	$\frac{28}{29}$
					$\frac{19}{20}$	$\frac{29}{30}$
					$\frac{20}{21}$	$\frac{30}{31}$
					$\frac{21}{22}$	$\frac{31}{32}$
						$\frac{32}{33}$
						$\frac{33}{34}$
						$\frac{34}{35}$
						$\frac{35}{36}$

KAYNAKÇA

- ADKİNS, Cecil (1967), The Technique Of The Monochord, **Acta Musicologica**, 39, 1/2, January- July, 34-43
- ARF, Cahit (1994), Matematiğin Şiir Yönü, **Bilim Ve Teknik**, Şubat, 79–80
- AYTAÇ, Kemal (1998), **Avrupa Eğitim Tarihi**, M. Ü. İlahiyat Fakültesi Vakfı Yayınları, İstanbul
- ARCHİBALD R. C. (1924), Mathematicians And Music, **The American Mathematical Monthly**, 31, 1, January: 1–25
- ARAN, Volkan (30 Temmuz 2006), Matematikten Doğan Müzik, **Cumhuriyet Gazetesi**.
- AREL, Sadeddin (1988), **Türk Musikisi Kimindir**, Kültür Ve Turizm Bakanlığı Yayınları, Ankara.
- ASSAYAG G. – FEİCHTINGER H. G. – RODRİGUES J. F. (2002), **Matematics And Music**, Springer-Verlag, Berlin
- BARBERA Andre (1984), The Consonant Eleventh And The Expansion Of The Musical Tetractys, **Journal Of Music Theory**, 28, 2, Autumn, 191-223
- BARBERA Andre (1981), Another Look At Plato And The Pythagoreans, **The American Journal Of Philology**, 102, 4, Winter, 395-410
- BARKER, Andrew (1989), **Greek Musical Writings II**, Cambrige University Press, New York
- BARKER Andrew (1994), Ptolemy’s Pythagoreans, Archytas And Plato Conception Of Mathematics, **Phronesis**, 39, 2, 113-135
- BORA, Uzey (2002), Bilim Ve Sanatın Kesiştiği Temel Bir Nokta: Matematik Ve Müzik İlişkisi, **U.Ü. Eğitim Fakültesi Dergisi**, XV, 1, 53-68
- CAN, M. Cihat (2001), Müzikte Tam Beşli Zincirleri ve Pythagoras Dizileri, **G. Ü. Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi**, 21, 2, 143-159
- CHRİSTENSEN, Thomas (2002), **The Cambridge Hiatory Of Western Music Theory**, Cambridge University Press, New York
- CROCKER, Richard L. (1963), Pythagorean Mathemastics And Music Part I, **The Journal Of Aesthetics And Art Criticism**, 22, 2, Winter, 189-198

- CROCKER, Richard L. (1964), Pythagorean Mathematics And Music Part II, **The Journal Of Aesthetics And Art Criticism**, 22, 3, Spring, 189-198
- CONWAY, John K.- GUY, Richard K. (1996), **The Book Of Numbers**, Springer-Verlag, New York
- ERHAT, Azra (1978), **Mitoloji Sözlüğü**, Remzi Kitapevi, İstanbul
- FAUVEL J. – FLOOD R. – WILSON R. (2003), **Music And Mathematics**, Oxford University Pres, New York.
- FRIEDEL, Egon (1994) **Antik Yunan'ın Kültür Tarihi**, Çev. Necati Aça, Dost Kitapevi, Ankara
- GÖNEN Alper (1998), **Matemathical Aspects Of Harmony İn Music**, Yayınlanmamış Doktora Tezi, İTÜ. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul
- GÖNEN Alper (2009), Seminer, **Pythagoras Ve Matematik**, İ.T.Ü. Matematik Günleri, Nisan, İstanbul
- GRANT, Hardy (1999), Mathematic And The Liberal Art, **The College Mathematics Journal**, 30, 2, Mart, 96-105
- HEATH, Thomas (1921), **The History Of Greek Mathematics**, The Clarendon Pres, New York
- HUFFMAN, Carl A. (1993), **Philolaus Of Croton**, Cambridge University Press, New York
- HUFFMAN, Carl A. (1988), The Role Of Number İn Philolaus Philosophy, **Phronesis**, 38, 1, 1-30
- HUFFMAN, Carl A. (1985), The Authenticity Of Archytas, **The Classical Quarterly**, 35, 2, New Series, 344-348
- İLYASOĞLU, Evin (1994), **Zaman İçinde Müzik**, Yapı Kredi Yayınları, İstanbul.
- JEANS, James (1968), **Science And Music**, Dover Publicantion, New York
- KAHN, Charles H. (2001), **Pythagoras And The Pythagoreans**, Hacket Publishing Company İnc. Indianapolis
- KAROLYÍ, Otto (1999), **Müziğe Giriş**, Çev. Mehmet Nemitlu, Pan Yayınları, İstanbul.
- KİNG, Jerry P. (1992), **Matematik Sanatı**, Çev. Nermin Arık, Nurol Matbaacılık, Ankara

- KUMCU, Ercan (2004), Matematik Bir İnancın da Temeli Olabildi, **Matematik Dünyası**, III, 47–49
- KUMCU, Ercan (2004), **Kadın Matematikçiler**, Remzi Kitapevi, İstanbul
- LOY, Gareth (2006), **The Mathematical Foundations Of Music**, Mitt Pres, London
- LİNDLEY Mark – SMİTH Ronald Turner (1993), **Mathematical Models Of Musical Scales**, Verlag Für Systematische Musikwissenschaft, Bonn.
- MAZZOLA, Guerino (2000), **Elemente Der Musikinformatik**, Birkhaeuser Verlag, Zurich.
- MATHİESEN, Thomas (1984), Harmonia And Ethos İn Ancient Greek Music, **The Journal Of Musicology**, 3, 3, Summer, 264-279
- NAZLIBEN, K. Korhan (2004), Matematik Ve Müzik, **Matematik Dünyası**, Bahar, 103–104
- OKUR, İbrahim (2003), **Çağlar Boyunca Matematik ve İlahiyat**, Okursoy Kitapları, Bursa
- ORHAN, Cihan (1995), Matematik Ve Sanat, **Matematik Dünyası**, V, 1, 21–23
- ORHAN, Cihan (1995), Matematik Ve Müzik, **Matematik Dünyası**, I, 6–7
- PAPPAS, Theoni (1995), **The Music Of Reason**, Wide World Publishing, United States Of America
- PAPPAS, Theoni (1993), **Yaşayan Matematik**, Çev. Yıldız Silier, Sarmal Yayınevi, İstanbul
- SAY, Ahmet (2000), **Müzik Tarihi**, Müzik Ansiklopedisi Yayınları, Ankara.
- SADİE, Stanley (1988), **The Grove Concise Encyclopedia Of Music**, W. W. Norton, New York
- SCHIMMEL, ANNEMARİE (2000), **Sayıların Gizemi**, Çev. Mustafa Küpüşoğlu, Kabalcı Yayınevi, İstanbul
- SETHARES, William A. (2005), **Tuning, Timbre, Spectrum, Scale**, Springer, London
- SİNİDER, Gillian C. F. (2005), **İN Defense Of Music’s Eternal Nature: On The Pre-eminence Of Musica Theorica Over Musica Practica**, Not Published Doctora Thesis
University Of Saskatchewan, A.B.D.
- STRATHERN, Paul (1997), **Pisagor Ve Teoremi**, Çev. Osman Çakmakçı, Gendaş Yayınları, İstanbul.

STRUIK Dirk J. (2000), **Kısa Matematik Tarihi**, Çev. Yıldız Silier, Mavi Ada Yayınları, İstanbul.

ÜLGER, Ali (2003), Mısır Ve Mezopotamya Matematiği, **Matematik Dünyası**, Kış, 42-45

YEKTA, Rauf (1986), **Türk Müsikisi**, Pan Yayıncılık, İstanbul

WARRACK, Guy (1945), Music And Mathematics, **Music & Letter**, 26, 1, January, 21-27

ZEREN, Ayhan (1978), **Müzikte Ses Sistemleri**, Offset Fotomat Basımevi, Ankara.

ZIEGLER, K. – SONTHEIMER, W. (1979), **Der Kleine Paoly Band 3**, DTV, Münih

ÖZGEÇMİŞ

İlhami KAYA

1979 yılında Ankara ili Polatlı ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Polatlı'da tamamladı. 1997 yılında başladığı Süleyman Demirel Üniversitesi Senirkent M.Y.O. İnşaat Bölümünden 2000 yılında mezun oldu. 2003 yılında Kocaeli Üniversitesi G.S.F. den 2007 yılında Doğaçlama adlı bitirme tezi ile mezun oldu. 2007 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Müzikoloji yüksek lisans eğitimine başladı.