İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONANTİKOMUTATİF N=1/2 SÜPERSİMETRİK AYAR TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Lara Talar KELLEYANE-ÖZHARAR
(509022050)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11 Eylül 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Ekim 2008

Tez Danışmanı : **Prof.Dr. Ömer Faruk DAYI**

Diğer Jüri Üyeleri **Prof.Dr. Mahmut HORTAÇSU (İ.T.Ü.)**

Prof.Dr. Cihan SAÇLIOĞLU (S.Ü.)

Prof.Dr. O. Teoman TURGUT (B.Ü.)

Doç.Dr. Cemsinan DELİDUMAN (İ.T.Ü.)

EKİM 2008

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca verdiği üst düzey desteği hiçbir zaman esirgemeyen, annelik görevimin çalışma tempomu yavaşlatmasına rağmen anlayışlı davranarak devam etmem konusunda beni sürekli teşvik eden, çalışkanlığı ve azimli üslubunu kendime örnek aldığım Prof. Dr. Ömer Faruk DAYI'ya yürekten teşekkür ederim.

Tezi hazırlama süresince gereken çalışma ortamını sağlamak için bana elinden geldiğince yardım eden, kariyerime değer veren ve beni her aşamada cesaretlendiren sevgili eşim Alper ÖZHARAR'a minnettarım.

Çalışmalarım boyunca teorik bilgilerini benimle paylaşmaktan çekinmeyen ve üzerimde büyük emeği bulunan Doç. Dr. Kayhan ÜLKER'e ilgisi için teşekkür ederim.

Tezime yapmış olduğu değerli katkılardan ötürü Doç. Dr. Cemsinan DELİDUMAN'a da teşekkür etmek isterim.

Ekim 2008 Lara T. Kelleyane-Özharar

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\star-$çarpımı	:	Yıldız çarpımı
$\tilde{\star}$	:	C ve Θ deformasyonlu yıldız çarpımı
$\overset{C}{\star}$	:	$C-$deformasyonlu yıldız çarpımı
$\overset{\Theta}{\star}$	:	$\Theta-$deformasyonlu yıldız çarpımı
c^i	:	Lagrange çarpanı
$C^{\alpha\beta}$	:	Simetrik antikomutatiflik parametresi
δ_ξ	:	Süpersimetri dönüşümü
δ	:	Ayar dönüşümü
$D^\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$	:	Kovaryant türevler
$\epsilon_{\alpha\beta}$	:	Antisimetrik tansör
$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$	:	Tamamen antisimetrik tansör
ϕ	:	Ayar parametresi
g	:	Kuplaj sabiti
I	:	Eylem
Λ	:	Süperayar parametresi
$\mathcal{M}$	:	Süperdeterminant
N	:	Süpersimetri üreteçlerinin sayısı
$Q^\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$	:	Süpersimetri üreteçleri
σ^μ	:	Sigma matrisleri
S_z	:	Tüm ikinci bağlar
$\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$	:	Fermiyonik koordinatlar
$\Theta^{\mu\nu}$	:	Antisimetrik nonkomutatiflik parametresi
x_μ	:	Bozonik koordinatlar
ξ_α	:	Sabit Grassmann parametresi
$\mathcal{Z}$	:	Bölüşüm fonksiyonu

NONANTİKOMUTATİF N=1/2 SÜPERSİMETRİK AYAR TEORİSİ

ÖZET

D-brane'ler üzerinde açık sicimlerin bulunabildiği hiperyüzeylerdir. Bir D-brane'i, bir Ramond-Ramond (gravifoton) fonunda ele aldığımızda süperuzayın deforme olduğunu ve $N = 1$ süpersimetrisinin kırılıp $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrisine dönüştüğünü görürüz. Bir başka deyişle, Q süperyükleri süperuzayın bir süpersimetrisi olmaya devam ederken $\bar{Q}$ süperyükleri, koordinatlara bağlı olmaları nedeniyle süpersimetriyi kırarlar. Belli bir düşük enerji limitinde D-brane'in yaşam yüzeyi Yang-Mills alanlarıyla tanımlanabilir. Buna bağlı olarak, $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik ayar teorisinin daha iyi irdelenmesi açık sicim dinamiğinin daha iyi anlaşılması için faydalı olacaktır.

Bu tezde nonantikomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisinin S-dualite özellikleri, ana eylem formalizmi kullanılarak incelenecektir. Dualite kavramı, hesapları basitleştirdiğinden çok önemlidir. S-dualite dönüşümleri orijinal alanlarla bunların duallerinin yerdeğiştirilmesiyle elde edilir. Kuplaj sabiti g olan bir teorinin vakum ve durumlarını, kuplaj sabiti $\frac{1}{g}$ olan bir teorininkilere gönderir. Böylece, her zaman için pertürbatif hesaplama yönteminden faydalanılabilir. U(1) gibi basit teoriler için S-dualite özelliği ayar alanlarının yeniden ölçeklendirilmesi ile gösterilebilir. Ancak, nonkomutatif veya nonantikomutatif $U(1)$ teorileri gibi daha karmaşık teorilerin incelenmesi için ana eylem formalizmini kullanmak daha uygun olur. Tanım gereği bir ana eylem, hareket denklemleri kullanılarak dual alanlar yok edildiğinde orijinal eylemi, tersine orijinal alanlar yok edildiğinde de dual eylemi vermelidir. Biz burada orijinal ve dual teorinin bölüşüm fonksiyonlarının eşitliğini göstererek nonantikomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisinin S-dualite dönüşümleri altında değişmez olduğunu göstereceğiz.

Seiberg-Witten gönderimi, nonkomutatif alanları hesap yapması daha kolay olan komutatif alanlarla ilişkilendiren bir denklik bağıntısıdır. Bu tezde ayrıca, $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(N)$ ayar teorisi nonkomutatif uzayda ele alınarak, nonantikomutatif ve aynı zamanda nonkomutatif süperuzayda tanımlanmış alanlar yerine, komutatif alanlarla çalışılmasına olanak veren Seiberg-Witten gönderiminin genişletilmesi verilecektir. Bu genelleştirilmiş gönderim kullanılarak nonkomutatif ve nonantikomutatif $U(1)$ teorisi ve nonkomutatif ve nonantikomutatif $U(N)$ teorisi eylemleri komutatif alanlar cinsinden elde edilecektir.

NONANTICOMMUTATIVE N=1/2 SUPERSYMMETRIC GAUGE THEORY

SUMMARY

D-branes are hypersurfaces on which open strings can end. Considering a D-brane in a Ramond-Ramond (graviphoton) background one finds that the superspace is deformed and the N=1 supersymmetry is broken to $N = \frac{1}{2}$ supersymmetry. In other words, Q supercharges remain as a symmetry of the superspace , while the $\bar{Q}$ are broken due to their dependence on coordinates. In a certain low energy limit the string dynamics on the world volume of the D-brane is defined by the Yang-Mills fields. To get a better understanding of the open string dynamics, N=1/2 supersymmetric gauge theory needs to be further investigated.

In the present work we will investigate the S-duality properties of nonanticommutative N=1/2 supersymmetric U(1) gauge theory using the parent action formalism. The notion of duality is very important as it makes the calculations easier. S-duality transformations can be obtained by exchanging original fields with their duals. It maps the states and vacua of a theory with coupling constant g to those of a theory with a coupling constant 1/g. Thus one can always benefit from perturbative calculation method. For simple theories like U(1) gauge theory S-duality property can be shown by rescaling its gauge fields. However, to study more complicated theories, such as noncommutative or nonanticommutative U(1) gauge theories, it is more convenient to use parent action formalism. By definition a parent action should give the original theory if the dual fields are eliminated using the equations of motion and vice versa. By showing the equivalence of the partition functions of the original and the dual theories we will conclude that the nonanticommutative N=1/2 supersymmetric U(1) gauge theory is invariant under S-duality.

Seiberg-Witten map is an equivalence relation between noncommutative and commutative fields which makes the calculations easier. In this thesis $N = \frac{1}{2}$ supersymmetric $U(N)$ gauge theory in noncommutative space will be considered and a generalization of the Seiberg-Witten map to noncommutative and nonanticommutative superspace will also be given. Using this generalized map noncommutative and nonanticommutative $U(1)$ gauge theory and noncommutative and nonanticommutative $U(N)$ gauge theory actions will be expressed in terms of commutative fields.

1 GİRİŞ

Çok küçük uzaklık ölçeklerinde uzay-zaman koordinatlarının nonkomutatif alınmasının ultraviyole kesmeleri belirlemekte işe yarayabileceği 1930'larda Heisenberg tarafından öngörülen bir durumdu [1]. Ancak bunu formalize eden kişi 1947'de Snyder olmuştur [2]. Bununla birlikte nonkomutatiflik, sicim kuramlarında doğal olarak bulunduğunun ortaya çıkması ile güncel hale gelmiştir.

Sicim teorisi fonda bir alan (Neveu-Schwarz alanı) varlığında çözüldüğünde (kuantize edildiğinde) koordinatların nonkomutatifliği ortaya çıkmaktadır [3]. Ayrıca Seiberg ve Witten'ın nonkomutatif uzay-zamanda ele alınan bir kuantum alan teorisinin açık sicimlerin düşük enerji limiti olarak da ele alınabileceğini gösterdikleri çalışma [4] artan ilginin en önemli nedenlerinden biridir. Nonkomutatif alan teorilerinin dinamiğinden sicim teorisinin altında yatan geometrinin anlaşılması umulmaktadır.

Koordinatların nonkomutatifliği sicim teorisinden ortaya çıkan şekliyle şu şekilde ifade edilir:

$$[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu} \tag{1.1}$$

$\Theta^{\mu\nu}$ sabit, reel ve antisimetrik bir parametre olup büyük uzaklık ölçeklerinde değeri sıfıra gitmelidir. Koordinatlar arasındaki nonkomutatiflik ilişkisi başka teoriler ele alındığında başka türlü de alınabilir. Nonkomutatif bir teoride uzay-zamanın bilinen yapısı bozulur. Bu uzayda artık bir manifold tanımlanamaz ve bir "nokta"dan söz edilemez. Snyder, çok küçük uzaklık ölçeklerinde uzay-zamanın nonkomutatif yapısının tutarlı bir tanımı yapılabildiğinde kuantum alan teorisindeki ultraviyole ıraksaklıkların giderileceğini düşünüyordu. Ancak bunun doğru olmadığı, nonkomutatif koordinatların bazı ıraksaklıkları azaltmasına rağmen genelde ıraksaklıkları gidermede bir fayda sağlamadığı görüldü.

Ancak yakın zamanda Öklidyen bir ϕ^4 modelinin tüm mertebelerde renormalize edilebilir olduğu gösterilmiştir [5].

Uzay-zamanın nonkomutatifliğinin formülasyonunda kuantum mekaniğinden esinlenilmiştir. Kuantum faz uzayında, konum ve momentum değişkenlerinin (x_i, p_i)'nin yerini $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ özelliğini sağlayan hermitsel operatörlerin $(\hat{x}_i, \hat{p}_i)$'nin alması gibi nonkomutatif uzay-zamanda da uzay-zaman koordinatları x_i lerin yerini, $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}$ cebrini sağlayan operatörler alır.

Uzay-zamandaki fonksiyonların çarpımının deformasyonu olan nonkomutatif yıldız çarpımı yoluyla da uzay-zamanın non-komutatifliği tanımlanabilir. Groenewold [6], Moyal [7] ya da Weyl [8] çarpımı olarak da bilinen yıldız çarpımı aşağıdaki gibi temsil edilir:

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= f(x) \exp\Big(\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial_x}\theta^{ij}\overrightarrow{\partial_y}\Big) g(x) \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x) + \vartheta(\theta^2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Bu tanımlar yapılırken f ve g fonksiyonlarının uygun sınır koşullarını sağladığı (yüzey terimleri sıfıra gittiği) varsayılır. Komutasyon parantezlerinin yerini alan Moyal parantezleri ise şöyle tanımlanır:

$$[f, g]_\star = [f, g] + i\theta^{ij}(\partial_i f \partial_j g) + \vartheta(\theta^2) \tag{1.3}$$

$\star$-çarpımı nonkomutatif olmakla birlikte asosiyatiftir:

$$\int d^d x f(x) \star g(x) \star h(x) = \int d^d x f(x)(g(x) \star h(x)) = \int d^d x (f(x) \star g(x))h(x) \tag{1.4}$$

$\star$-çarpımının diğer önemli bir özelliği de şudur:

$$\int d^d x f(x) \star g(x) = \int d^d x g(x) \star f(x) = \int d^d x f(x) g(x) \tag{1.5}$$

$\star$-çarpımının bu özelliğinden ötürü herhangi bir nonkomutatif teori için, yüzey terimleri sıfır ise eylemdeki kareli terimlerin komutatif teorideki ile aynı olduğu görülebilir. Böylece propagatörler de komutatif teoridekinin aynısı olur. Bu durumda sadece etkileşme terimleri değişime uğrar.

Kullanacağımız diğer bir nosyon da süpersimetridir [9 - 14]. Süpersimetri fermiyonlar ve bozonlar arasında bir simetri demektir. Aşağıdaki ifade bu durumu özetlemektedir.

$$\begin{aligned} Q|bozon> &= |fermiyon> \\ Q|fermiyon> &= |bozon> \end{aligned} \tag{1.6}$$

Burada Q süpersimetri üretecidir. Yani süpersimetri, bozonik ve fermiyonik serbestlik derecelerini birbirine bağlar. Süpersimetri antikomutasyonları sıfır olan üreteçler yardımıyla empose edilir. Bu üreteçler Lorentz grubunun spinör temsilleri altında dönüşürler. $N = 1$ süpersimetrik teoriler standart modelin bir genelleştirilmesi olmaya en iyi adaylardır. Süpersimetri Standart Model'deki hiyerarşi problemini çözebilen önerilerden biri olduğundan, özellikle 1TeV mertebesinde oldukça önemlidir [15 - 18].

Süpersicimlerin D-brane'lerin varlığında ve gravifoton alanı fonunda kuantize edilmesi sonucunda ortaya nonantikomutatif süperuzay çıkmaktadır [19 - 22]. Nonantikomutatif süperuzay başka bağlamlarda da ele alınmıştır [23, 24]. Gravifoton alanınının sadece self-dual olan kısmının ele alınmasından dolayı bu kuantizasyon ancak Öklidyen uzayda mümkündür. Bu deformasyon $N = 1$ süpersimetrisinin yarısını kırarak $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrisi haline getirir [25 - 27].

D-brane'ler [28 - 30] süpersicim teorisinde üzerinde açık sicimlerin bulunabildiği hiperyüzeylerdir ve bir Q_d yükü ve T_d gerilimi ile karakterize edilirler. D-brane'ler esas olarak ayar teorilerinin sicim teorisinin içinde yer bulmasını sağlar. D-brane'lerin varlığı sicim teorisindeki çeşitli dualitelerin varlığı nedeniyle ve Ramond-Ramond alanlarına bağlanacak bir sicim tipi bulunmaması nedeniyle gereklidir.

Uygun bir limitte buradaki D-brane yaşam alanındaki açık sicim dinamiği Yang-Mills alanlarıyla tanımlanır. Fondaki alanların varlığında altta yatan $N = 1$ süpersimetrik ayar teorisi de deforme olarak $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik ayar teorisine dönüşür. Bu yüzden de Ramond - Ramond fonundaki açık sicim dinamiğinin anlaşılması $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik ayar teorisinin irdelenmesiyle olacaktır.

Nonantikomutatiflik $N = 1$ süperuzayı deforme edilerek de sağlanabilir [31 - 34]. Deforme olan süperuzayda koordinatlar şu özellikleri sağlar:

$$[y^m, y^n] = i\Theta^{mn} \qquad \text{ve} \qquad \{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}, \qquad \alpha = 1{,}2. \tag{1.7}$$

Burada y^m bozonik koordinatlara, θ^α fermiyonik koordinatlara, Θ antisimetrik ve $C^{\alpha\beta}$ simetrik sabit deformasyon parametresine karşılık gelmektedir ($C^{\mu\nu} = C^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma}\sigma_\alpha^{\mu\nu\gamma}$).

Seiberg- Witten gönderimi komutatif ve nonkomutatif ayar alanları arasında şu şekilde tanımlanmış bir denklik bağıntısıdır [4].

$$\hat{A}(A) + \hat{\delta}_{\hat{\phi}}\hat{A}(A) = \hat{A}(A + \delta_\phi A) \tag{1.8}$$

Burada A normal ayar alanı, ϕ normal ayar parametresi, $\hat{A}$ nonkomutatif ayar alanı ve $\hat{\phi}$ nonkomutatif ayar parametresidir. Bu gönderim aşağıdaki diyagramla da anlaşılabilir.

$$\begin{array}{ccc} A_\mu & \xrightarrow{\theta} & \hat{A}_\mu \\ \phi \downarrow & & \downarrow \hat{\phi} \\ \delta_\phi A_\mu & \xrightarrow{\theta} & \hat{\delta}_{\hat{\phi}}\hat{A}_\mu \end{array} \tag{1.9}$$

Süpersimetrik olan ve olmayan teorilerde Seiberg-Witten haritalaması olmadan $U(N)$ dışındaki ayar grupları formüle edilemez. Yani herhangi bir ayar grubu ele alınmak isteniyorsa mutlaka Seiberg-Witten gönderiminin tanımlanması gerekir. Ancak yakın zamana kadar nonantikomutatif süperuzayda tanımlanan teoriler için Seiberg-Witten gönderimi bulunamıyordu.

Sadece nonantikomutatiflik söz konusu olduğunda önümüzde iki seçenek çıkar. Bunlardan biri süpersimetri dönüşümlerini aynı bırakan ama ayar dönüşümlerini deforme eden bir çözümdür. Diğerinde ise [25]'deki gibi ayar dönüşümleri aynı kalır ancak süpersimetri dönüşümleri değişir. Diğer taraftan sadece nonkomutatif süperuzay sözkonusu olduğunda Seiberg-Witten gönderimi hem süpersimetri dönüşümlerinde hem de ayar dönüşümlerinde deformasyona neden olur [35 - 38].

Seiberg-Witten gönderimi iki teori arasındaki ayar dönüşümlerinin eşdeğerliği ile ilgili bir durumdur. Dolayısıyla ayar invaryant bir nonkomutatif teoride Seiberg-Witten gönderimi yapıldıktan sonra elde edilecek eylemin de ayar invaryant olup olmayacağı önceden kestirilemez. Ancak burada bazı terimlerin uygun seçilmesiyle genelleştirilmiş Seiberg-Witten gönderimi uygulandıktan sonra da eylemin ayar invaryant kaldığı gösterilecektir [39].

Kuantum alan teorisinde bir teorinin iki farklı formulasyonunun birbirine eşdeğer olmasına dualite denir. Bunu bir örnek üzerinde görmek aydınlatıcı olabilir. Bunun için elektrik-manyetik dualiteye kısaca değinelim [40]. Boşluktaki Maxwell denklemlerine bakıldığında elektrik alan E ile manyetik alan B arasındaki simetri hemen farkedilebilir.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = 0, \qquad \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B} = 0, \qquad \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.10}$$

$(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}) \rightarrow (-\overrightarrow{B}, \overrightarrow{E})$ dönüşümü yapıldığında Maxwell denklemleri invaryant kalır. Yani bu dönüşüm bir dualite dönüşümüdür.

Dualite kavramı hesaplarda kolaylık sağlaması nedeniyle çok önemlidir. Bir teoride zor olan bazı hesaplamaların o teorinin dualinde kolayca yapılabilmektedir. Örneğin bir teoride S-dualitesi [41, 42], yani zayıf-kuvvetli etkileşme dualitesi varsa hesaplar zayıf etkileşme rejiminde yapılıp dualite dönüşümleri alınarak kuvvetli etkileşme rejimine geçilebilir. Bu şekilde hesapların perturbatif olarak yapılabilmesi büyük bir kolaylıktır.

Burada Seiberg-Witten gönderimi altındaki eşdeğerlik ile S-dualite altındaki dönüşümleri altında eşdeğerlik arasında şöyle bir fark olduğunu belirtmekte fayda vardır: S-dualite dönüşmü sonrasında orijinal teori ile dual teorinin serbestlik dereceleri aynı kalır. Yani dualite dünüşümleri altında teorinin serbestlik derecesi korunur. Ancak Seiberg-Witten gönderiminde böyle bir eşdeğerlik söz konusu değildir.

Bu tezin amacı nonantikomutatif ayar teorilerini çeşitli açılardan incelemektir. İkinci bölümde bozonik uzay koordinatlarının komutatif, θ Grassmann koordinatlarının antikomutatif olduğu süperuzayda $N = 1$ süpersimetrik teorisi irdelenerek $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik ayar teorisi için bir hazırlık yapılacaktır.

Üçüncü bölümde θ koordinatlarının antikomutasyonu sıfırdan farklı alma yoluyla standart $N = 1$ süperuzay deforme edilecek ve bu deformasyon sonucu ortaya çıkan $N = \frac{1}{2}$ teorisi incelenecektir.

Dördüncü bölümde nonantikomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisinin S-dualini oluşturmak üzere bir ana eylem önerilecektir [43]. Bu ana eyleme ait bölüşüm fonksiyonunu kullanarak, ana eylemin ürettiği teorilerin bölüşüm fonksiyonlarının denkliği gösterilecektir. Dolayısıyla $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisinin dualite invaryanslığını gösterilmiş olacaktır. Daha sonra $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisi ele alınacak, uzay-zaman koordinatları nonkomutatif hale getirilerek eyleminin ayar ve süpersimetri dönüşümleri altındaki davranışına bakılacaktır.

Beşinci bölümde Seiberg-Witten haritalamasının hem nonkomutatif hem de nonantikomutatif olan uzaya genelleştirilmesi anlatılacaktır.

2 N=1 SÜPERSİMETRİK AYAR TEORİSİ

Süpersimetri fermiyonlarla bozonları ilişkilendiren bir simetridir ve deneysel olarak kanıtlanamamış olmakla beraber standart modelin genelleştirilmiş modellerinde kullanılan çok önemli bir özelliktir. Bunun nedeni süpersimetrinin parçacık fiziğindeki uzay-zaman simetrilerinin tek olası genişletilmesi olmasıdır. Bir süpersimetrik teoride her bozonun bir fermiyonik eşi, her fermiyonun da bir bozonik eşi vardır. Kütleleri aynı olan bu çiftler birbirlerinin süpereşi olarak adlandırılır.

Bozonik ve fermiyonik alanları tek bir cebir altında birleştirmek için Lie süpercebri kullanılmaktadır. N süpersimetri üreteçlerinin sayısı olmak üzere, Poincaré cebrinin en basit genişletilmesi olan $N = 1$ süpersimetri cebri, Q ve $\bar{Q}$ süpersimetri üreteçleri cinsinden aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Burada $\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}$ler açık ifadeleri Ek 1'de bulunan sigma matrisleridir. ξ_α ve $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$ antikomutatif sabit parametreleri yardımıyla $\delta_\xi = \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}$ tanımlanarak alanların süpersimetri dönüşümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

λ ve $\bar{\lambda}$ spinörleri A bir vektör alanı olmak üzere A'nın dönüştüğü alanlar olarak tanımlanarak başlanır.

$$\delta_\xi A_\mu = i\xi\sigma_\mu\bar{\lambda} + i\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu\lambda \tag{2.2}$$

Bundan sonrası süpersimetri cebri yardımıyla bulunur.

$$\begin{aligned} \delta_\xi\lambda &= \sigma^{\mu\nu}\xi F_{\mu\nu} + i\xi D; \quad \sigma^{\mu\nu} = [\sigma^\mu, \sigma^\nu] \\ \delta_\xi D &= \bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\lambda - \xi\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Burada $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ve D ise bir tansör alanıdır. Oluşturulan bu alanlara skaler multiplet denir. Bir multipletin içindeki alanların hepsi aynı kütleye ve aynı kuplaj sabitine sahiptir.

δ altında değişmez (invaryant) olan tek bir eylem vardır.

$$I_{\text{Susy}} = \frac{1}{g^2} \int d^4x \; tr \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - i\lambda \not{\partial} \bar{\lambda} + \frac{1}{2} D^2 \right] \tag{2.4}$$

Aynı teori, daha kullanışlı olan süperalan ve süperuzay formülasyonu kullanılarak da oluşturulabilir. Süperalan, $(x, \theta, \bar{\theta})$ koordinatlarıyla parametrize edilen süperuzayda bir fonksiyon olarak tanımlanır. Burada θ_α ve $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ antikomutatif Weyl spinörleridir.

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} \; = \; \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} \; = \; \{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\} \; = \; 0 \tag{2.5}$$

Genel olarak çift boyutlu uzay-zamanda Dirac spinörlerinin temsilleri indirgenebilir formdadır. d=2n boyutlu uzayda Dirac spinörleri 2^n bileşenden oluşurken indirgenmiş temsilleri olan spinörler 2^{n-1} bileşenden oluşur. Bu indirgenmiş temsillere Weyl spinörleri denir. Örneğin 4 boyutta Weyl spinörlerinin 2 bileşeni vardır.

Süperuzayın üreteçleri olan Q_α ve $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ süperuzayda diferansiyel işlemciler olarak yazılabilirler.

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tanım olarak D_α ve $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ kovaryant türevleri Q ve $\bar{Q}$ operatörlerinin ürettiğine ters yönde bir hareket üretirler.

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \end{aligned} \tag{2.7}$$

Kovaryant türevler arasındaki antikomutasyon ilişkileri aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \\ \{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Diğer taraftan kovaryant türevler ve süperyükler arasındaki antikomutasyon ilişkileri ise şöyledir:

$$\{D_\alpha, Q_\beta,\} \;=\; \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \;=\; \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} \;=\; \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \;=\; 0 \tag{2.9}$$

Yukarıdaki tanımlar yapıldıktan sonra artık süperalanlar ve süperuzay oluşturulabilir. Süperalanlar θ ve $\bar{\theta}$ cinsinden bir seri açılım olarak düşünülmelidir.

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = A(x) + \theta\lambda(x) + \bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + ... + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \tag{2.10}$$

θ ve $\bar{\theta}$'ın diğer tüm kuvvetleri sıfır verir. Süperalanın süpersimetri altındaki dönüşümü

$$\delta_\xi \Phi = (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\Phi \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır. İki süperalanın herhangi bir lineer kombinasyonu da bir süperalandır. Benzer şekilde iki süperalanın çarpımı da bir süperalandır. Ancak elde edilen süperalanlar çeşitli kovaryant koşullar kullanılarak indirgenirlerse daha kullanışlı olurlar. Örneğin $\bar{D}\Phi = 0$ koşulunu sağlayan süperalanlara kiral (ya da skalar) süperalan denir. Vektör süperalanları da $V = V^+$ koşulunu sağlarlar.

Kiral ve vektör süperalan koşullarının $y_\mu = x_\mu + i\theta\sigma_\mu\bar{\theta}$ değişken dönüşümü yapılarak çözülmesi daha kolay olduğundan genellikle y değişkeni kullanılmaktadır. O zaman kovaryant türev ve süperyükler de y değişkenine bağlı olarak şöyle yazılırlar.

Kovaryant türev

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad ; \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \tag{2.12}$$

Benzer olarak süperyükler

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \quad ; \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\mu} \tag{2.13}$$

Şimdi $N = 1$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisine bakalım. Bu teorideki vektör multipleti süperuzayda bir vektör süperalanı cinsinden Wess-Zumino ayarında şöyle yazılabilir. Wess-Zumino ayarı vektör multipletindeki bazı bileşenleri sıfır alarak ayar dönüşümünü olduğu gibi bırakır. Bu sayede, oluşturulan bu vektör süperalanına Yang-Mills potansiyelinin bir genelleştirilmesi gözüyle bakılabilir.

$$V(y,\theta,\bar{\theta}) = -(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})A_{\mu}(y) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(y) + \frac{1}{2}\theta^{2}\bar{\theta}^{2}D(y) \tag{2.14}$$

Vektör süperalanı V oluşturulduktan sonra kovaryant türevler kullanılarak başka süperalanlar oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} W_{\alpha} &= \frac{1}{2}\bar{D}^{2}D_{\alpha}V \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= \frac{1}{2}D^{2}\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$W_{\alpha}(y) = -i\lambda_{\alpha}(y) + \theta_{\alpha}D(y) - i\sigma_{\alpha}^{\mu\nu\beta}\theta_{\beta}F_{\mu\nu}(y) + \theta\theta\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(y) \tag{2.16}$$

Son olarak, bileşen alanlar cinsinden yazılmış olan (2.4) eylemi süperalanlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$I = \frac{1}{4g^{2}}\int d^{4}x\, tr\left(\int d^{2}\theta W^{2} + \int d^{2}\bar{\theta}\bar{W}^{2}\right). \tag{2.17}$$

3 $N = \frac{1}{2}$ SÜPERSİMETRİK AYAR TEORİSİ

Nonkomutatif koordinatların sicim teorisindeki realizasyonu uzun zamandan beri bilinmektedir. Sicim teorisinde sabit bir gravifoton fonu varlığında nonantikomutatif süperuzayın realize olduğu ise yakın zamanda farkedilmiştir [21, 25]. Standard $N = 1$ süperuzayın deformasyonu konusunda yapılan diğer bazı çalışmalar [24, 26]'dur. Süperuzayın deformasyonu hangi koordinatların nonantikomutatif olarak seçilmesine bağlı olarak çeşitli şekillerde yapılabilir. Sözü geçen çalışmalar arasında [25]'te seçilen deformasyon bu tezdekiyle aynıdır. θ koordinatları nonantikomutatif alındıktan sonra teorinin tutarlılığı açısından uzay-zaman koordinatları x lerin nonkomutatif olması gerekmiştir.

Uzay-zaman koordinatlarını komutatif yapmak için, $N = 1$ teorisinde olduğu gibi $y^\mu = x^\mu + i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ şeklinde bir değişken dönüşümü yapılır. O zaman y^μ, θ_α, $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ arasındaki tüm (anti)komutasyon ilişkileri

$$
\begin{aligned}
\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} &= C^{\alpha\beta} \\
\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \theta^\beta\} = [\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, y^\mu] &= [y^\mu, \theta^\alpha] = [y^\mu, y^\nu] = 0
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

olur. y^μ'nün yukarıdaki şekilde seçilmesiyle x^μ ve θ^α arasındaki komutasyon ilişkileri aşağıdaki gibi olur.

$$
\begin{aligned}
[\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, x^\mu] &= 0 \\
[x^\mu, \theta^\alpha] &= iC^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\
[x^\mu, x^\nu] &= \bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Burada $C^{\mu\nu} \equiv C^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma}\sigma^{\mu\nu\gamma}_{\alpha}$ olarak tanımlanmıştır. $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}$ ve $\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0$ olarak seçilince $\bar{\theta}$ artık θ'nın kompleks eşleniği olmaktan çıkar. Bu da ancak Öklidyen uzayda mümkündür.

Bu deformasyon süpersimetrinin yarısını kırmaktadır. Bu yüzden teoriye $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik ayar teorisi adı verilmiştir. Süpersimetrinin tamamının değil de yarısının kırılabileceği bu deformasyonu ilk keşfeden Seiberg olmuştur [25]. Ayrıca Seiberg bu çalışmasında gravifoton fonundaki sicim teorisi ele alındığında da aynı deformasyonun elde edildiğini göstermiştir.

Süperuzayda fonksiyonlar y, θ ve $\bar{\theta}$ cinsinden ifade edildiğinde, θ'ya göre türevlerin sabit y ve $\bar{\theta}$'da alındığı aşağıdaki yıldız çarpımı kullanılabilir.

$$f(\theta) \star g(\theta) = f(\theta)\exp\bigg(- \frac{C^{\alpha\beta}}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} \bigg) g(\theta) \tag{3.3}$$

θ ve $\bar{\theta}$ türevleri sabit y de alındığından kovaryant türevler için (2.12) ifadesi kullanılabilir. Dolayısıyla kovaryant türevlerin sağladığı antikomutasyon ilişkileri $N = 1$ teorisindeki gibidir (2.8).

Süperyükler de komutatif teoridekinin aynısı alınabilir (2.13). Süperyüklerin antikomutasyon bağıntıları, bir tanesi hariç $N = 1$ teorisindeki ile aynıdır (2.1), (2.9). $C = 0$ teorisindekinden farklı olan, $\bar{Q}$ lar arasındaki antikomutasyon bağıntısıdır:

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = -4C^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^\nu_{\beta\dot{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \tag{3.4}$$

Örnek olarak ayar alanlarına karşılık gelen V vektör süperalanını ele alalım. $N = 1$ teorisinde V nin ayar dönüşümü şu şekilde verilir.

$$e^V \to e^{V'} = e^{-i\bar{\Lambda}} e^V e^{i\Lambda}, \quad \Lambda : \text{süperayar parametresi} \tag{3.5}$$

Sonsuz küçük ayar dönüşümü ise

$$\delta e^V = -i\bar{\Lambda} e^V + i e^V \Lambda \tag{3.6}$$

şeklindedir. Nonantikomutatif teoride de aynı dönüşümler kullanılabilir ancak çarpma işleminin yerini yıldız çarpımı almalıdır. Aynı şekilde aşağıdaki dönüşümler de yıldız çarpımı cinsinden düşünülmelidir.

$N = 1$ teorisi için uygun bir seçim olan Wess-Zumino ayarı, $N = \frac{1}{2}$ teorisi için genelleştirilirse vektör süperalanı

$$V(y, \theta, \bar{\theta}) \;\; = \;\; -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha(\lambda_\alpha(y) + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}C^{\beta\gamma}\sigma^\mu_{\gamma\dot{\gamma}}\{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\})$$

$$+\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - i\partial_\mu A^\mu] \tag{3.7}$$

olur. Burada normal teoriden farklı olan kısım $\bar{\theta}\bar{\theta}\theta$ terimidir. Bu seçimin nedeni bileşen alanların normal ayar teorisindeki gibi dönüşmelerini sağlamak içindir.

Lagrange yoğunluğu aşağıdaki ifade ile verilir; bu hesabın aşamaları [25]'de anlatılmaktadır.

$$\begin{aligned} L &= \int d^2\theta \mathrm{tr} WW + \int d^2\bar{\theta}\mathrm{tr}\bar{W}\bar{W} \\ &= \int d^2\theta \mathrm{tr} WW(C=0) - iC^{\mu\nu}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \frac{|C|^2}{4}\mathrm{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 + \\ &\quad + \int d^2\bar{\theta}\mathrm{tr}\bar{W}\bar{W}(C=0) - iC^{\mu\nu}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \frac{|C|^2}{4}\mathrm{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 + \\ &\quad + \text{tam türev terimleri} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Burada $F_{\mu\nu}$ alan kuvveti aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{i}{2}[A_\mu, A_\alpha] \tag{3.9}$$

W ve $\bar{W}$ ise (2.15) deki gibidir.

Alanların $Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ altında dönüşümleri ise şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= i\epsilon D + \sigma^{\mu\nu}\epsilon(F_{\mu\nu} + \frac{i}{2}C_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda}) \\ \delta A_\mu &= -i\bar{\lambda}\bar{\sigma}_\mu\epsilon \\ \delta F_{\mu\nu} &= i\epsilon(\sigma_\nu D_\mu - \sigma_\mu D_\nu)\bar{\lambda} \\ \delta D &= -\epsilon\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda} \\ \delta\bar{\lambda} &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Bu dönüşüm $N=1$ simetrisinin arta kalan kısımdır. Sonuç olarak deformasyonun tek etkisi $\delta\lambda$'ya ek bir terim gelmesi olmuştur.

4 NONANTİKOMUTATİF $N = \frac{1}{2}$ SÜPERSİMETRİK $U(1)$ AYAR TEORİSİNİN DUALİTE İNVARYANSLIĞI

S-dualitesi kuvvetli etkileşme alanları ile zayıf etkileşme alanları arasında bir gönderimdir. Bir teori S-dualitesi, yani zayıf-kuvvetli etkileşme dualitesi altında invaryant ise hesaplar zayıf etkileşme rejiminde yapılıp dualite dönüşümleri alınarak kuvvetli etkileşme rejimine geçilebilir. Bu şekilde hesapların perturbatif olarak yapılabilmesi büyük bir kolaylıktır.

Bu bölümde nonantikomutatif N=1/2 süpersimetrik alan teorisini S-dualite açısından inceleyeceğiz. Dual teoriyi tanımlamak için ana eylem formalizmini kullanacağız [44, 45]. Tanım olarak ana eylemin, hareket denklemleri kullanılarak dual alanlar yok edildiğinde orijinal teoriyi, orijinal alanlar yok edildiğinde ise dual teoriyi vermesi gerekir.

Nonkomutatif $U(1)$ ayar teorisi için ana eylem [46]'te verilmiştir. Nonkomutatif $U(1)$ ayar teorisinin S-dualite invaryanslığı Hamilton formalizmi kullanılarak [47]'da gösterilmiştir. Nonkomutatif süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisi için ana eylem ise [37]'de oluşturulmuştur. Süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisinin ana eylemi için [48]'te kullanılan yaklaşıma benzer bir yaklaşımla nonantikomutatif N=1/2 süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisi için de bir ana eylem oluşturmak istiyoruz. Bileşen alanlardan oluşan aşağıdaki eylemi ele alalım.

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{1}{g^2}\int d^4x\Big\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\lambda\partial\!\!\!/\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\bar{\partial\!\!\!/}\psi + \frac{1}{4}D_1^2 + \frac{1}{4}D_2^2 - \\ &\quad -\frac{i}{4}C^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \bar{\psi}\bar{\psi})\Big\} + \int d^4x\Big\{\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}\partial_\lambda A_{D\kappa} + \frac{1}{2}\lambda\partial\!\!\!/\bar{\lambda}_D + \\ &\quad +\frac{1}{2}\lambda_D\partial\!\!\!/\bar{\lambda} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\partial\!\!\!/}\lambda_D - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_D\bar{\partial\!\!\!/}\psi + \frac{i}{2}D_D(D_1 - D_2)\Big\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Burada $F_{\mu\nu}$ herhangi bir ayar alanından bağımsız olan bir alandır. Dual alanlara göre hareket denklemleri $\frac{\delta I_p}{\delta \Phi_D} = 0$ kullanılarak şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\partial_\nu F_{\lambda\kappa} &= 0, & (4.2)\\ \frac{1}{2}\partial\!\!\!/\bar{\lambda} - \frac{1}{2}\partial\!\!\!/\bar{\psi} = 0 &\Rightarrow \partial\!\!\!/\bar{\psi} = \partial\!\!\!/\bar{\lambda}, \\ \frac{1}{2}\bar{\partial\!\!\!/}\psi - \frac{1}{2}\bar{\partial\!\!\!/}\lambda = 0 &\Rightarrow \bar{\partial\!\!\!/}\psi = \bar{\partial\!\!\!/}\lambda, \\ \frac{i}{2}(D_1 - D_2) = 0 &\Rightarrow D_1 = D_2 = D. & (4.3) \end{aligned}$$

A_μ alanları cinsinden (4.2) denkleminin çözümü olan $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ve (4.3)'de verilen diğer hareket denklemleri (4.1)'de kullanılırsa nonantikomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisi eylemi aşağıdaki gibi olur.

$$I = \frac{1}{g^2}\int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - i\lambda\partial\!\!\!/\bar{\lambda} + \frac{1}{2}D^2 - \frac{i}{2}C^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\bar{\lambda}\bar{\lambda}\Big\}. \quad (4.4)$$

$C^{\mu\nu}$lü terimin dışında kalan kısım $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisi için [37]'de önerilen eylemle aynıdır. Dual eylemi elde edebilmek için önce normal alanlara göre hareket denklemleri $\frac{\delta I_p}{\delta \Phi} = 0$ türetilirse

$$\begin{aligned} &-\frac{i}{2g^2}\partial\!\!\!/\bar{\lambda} - \frac{1}{2}\partial\!\!\!/\bar{\lambda}_D = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = -ig^2\bar{\lambda}_D \\ &-\frac{1}{2g^2}\bar{\psi} + \frac{i}{2}\bar{\lambda}_D = 0 \Rightarrow \bar{\psi} = ig^2\bar{\lambda}_D \\ &-\frac{1}{2g^2}F^{\mu\nu} - \frac{i}{2g^2}C^{\mu\nu}(ig^2\lambda_D)^2 + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\partial_\lambda A_{D\kappa} = 0 \Rightarrow F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^2\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{D\lambda\kappa} + \\ &\qquad\qquad + ig^4C^{\mu\nu}\bar{\lambda}_D^2 \\ &-\frac{i}{g^2}C^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\bar{\lambda} - \frac{i}{2g^2}\bar{\partial\!\!\!/}\lambda + \frac{1}{2}\bar{\partial\!\!\!/}\lambda_D = 0 \Rightarrow \bar{\partial\!\!\!/}\lambda = -ig^2\bar{\partial\!\!\!/}\lambda_D + \frac{i}{2}g^4\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}C_{\mu\nu}F_{D\lambda\kappa}\bar{\lambda}_D \\ &-\frac{i}{g^2}\bar{\partial\!\!\!/}\psi - \frac{i}{g^2}C^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\bar{\psi} - \bar{\partial\!\!\!/}\lambda_D = 0 \Rightarrow \bar{\partial\!\!\!/}\psi = ig^2\bar{\partial\!\!\!/}\lambda_D - \frac{i}{2}g^4\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}C_{\mu\nu}F_{D\lambda\kappa}\bar{\lambda}_D \\ &\frac{1}{2}D_1 + \frac{i}{2}D_D = 0 \Rightarrow D_1 = -ig^2D_D \\ &\frac{1}{2}D_1 - \frac{i}{2}D_D = 0 \Rightarrow D_2 = ig^2D_D \qquad (4.5) \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemleri üretmek için şu özellikler kullanılmıştır:

$$\begin{aligned}
\lambda\sigma^n\bar{\psi} &= -\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\lambda \\
\lambda\sigma^n\partial\bar{\lambda} &= \lambda\partial\sigma^n\bar{\lambda} \\
\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\partial_\lambda A_{D\kappa} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{D\lambda\kappa}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Burada $F_{D\mu\nu} = \partial_\mu A_{D\nu} - \partial_\nu A_{D\mu}$ dür. (4.5) denklemleri normal alanlar için çözülerek (4.1) eyleminde kullanılırsa dual nonkomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisinin eylemi

$$\begin{aligned}
I_D &= g^2\int d^4x\Big\{-\frac{1}{4}F_D^{\mu\nu}F_{D\mu\nu} - \frac{i}{2}\bar{\lambda}_D\bar{\partial\!\!\!/}\lambda_D - \frac{i}{2}\lambda_D\partial\!\!\!/\bar{\lambda}_D + \frac{1}{2}D_D^2 + \\
&\quad +\frac{i}{4}g^2\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}C_{\lambda\kappa}F_{D\mu\nu}\bar{\lambda}_D\bar{\lambda}_D\Big\}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak bulunur. (4.4) ve (4.7) karşılaştırıldığında iki eylemin de aynı formda olduğu ve dualite dönüşümünün

$$\begin{aligned}
g &\rightarrow \frac{1}{g} \\
C^{\mu\nu} &\rightarrow -\frac{1}{2}g^2\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}C_{\lambda\kappa}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

olduğu gözlemlenebilir.

4.1 Hamilton Formülasyonu

(4.4) ve (4.7) eylemlerinin bölüşüm fonksiyonlarını kıyaslayacağımız için (4.1) eyleminin, yani ana eylemin bölüşüm fonksiyonunu oluşturmak istiyoruz. Çünkü (4.1) eylemine ait bölüşüm fonksiyonunun, (4.4) ve (4.7) eylemlerinin bölüşüm fonksiyonlarını üretmesi beklenmektedir. İntegrasyonları basitleştireceğinden Hamilton formülasyonunu kullanmak daha uygun olacaktır. Bu formülasyon için alanlara karşılık gelen kanonik momentumları tanımlamak gerekmektedir. ($F_{\mu\nu}$, λ_α, $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$, ψ_α, $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$, D_1, D_2) alanlarına ($P^{\mu\nu}$, Π_1^α, $\bar{\Pi}_{1\dot{\alpha}}$, $\Pi_2^\alpha, \bar{\Pi}_{2\dot{\alpha}}$, P_1, P_2) momentumları, ($A_{D\mu}$, $\lambda_{D\alpha}$, $\bar{\lambda}_D^{\dot{\alpha}}$, D_D) alanlarına ise (P_D^μ, Π_D^α, $\bar{\Pi}_{D\dot{\alpha}}$, P_D) momentumları karşılık gelsin.

(4.1) eyleminden çıkan tüm kanonik momentumlar birincil bağlara yol açarlar. Bu eylemden elde edilen bağlar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\phi_1^{0i} \equiv P^{0i} &\approx 0 \quad , \quad \phi_2^{ij} \equiv P^{ij} \approx 0 \, , \\
\bar{\chi}_{1\dot{\alpha}} \equiv \bar{\Pi}_{1\dot{\alpha}} - \frac{i}{2g^2}\lambda^\alpha \sigma^0_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\lambda_D^\alpha \sigma^0_{\alpha\dot{\alpha}} &\approx 0 \quad , \quad \chi_1^\alpha \equiv \Pi_1^\alpha \approx 0 \, , \\
\chi_2^\alpha \equiv \Pi_2^\alpha - \frac{i}{2g^2}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{0\dot{\alpha}\alpha} - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_{D\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{0\dot{\alpha}\alpha} &\approx 0 \quad , \quad \chi_{2\dot{\alpha}} \equiv \bar{\Pi}_{2\dot{\alpha}} \approx 0 \, , \\
\Phi_1 \equiv \mathrm{P}_1 &\approx 0 \quad , \quad \Phi_2 \equiv \mathrm{P}_2 \approx 0 \, , \\
\phi^i_{D_2} \equiv P^i_D - \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk} &\approx 0 \quad , \quad \phi_{D_1} \equiv P^0_D \approx 0 \, , \\
\chi_{D\dot{\alpha}} \equiv \bar{\Pi}_{D\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\lambda^\alpha \sigma^0_{\alpha\dot{\alpha}} &\approx 0 \quad , \quad \chi_D^\alpha \equiv \Pi_D^\alpha - \frac{1}{2}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{0\dot{\alpha}\alpha} \approx 0 \, , \\
\Phi_D \equiv \mathrm{P_D} &\approx 0 \quad . \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Burada "$\approx$" zayıf eşitliği belirtmek için kullanılır [49] ve anlamı 'tüm Poisson parantezleri hesaplandıktan sonra "$\approx$" yerine "$=$" koy' demektir. Φ_i ve P_{Φ_i} tüm alanlar ve onların momentumları olmak üzere, I_p'nin yol açtığı kanonik Hamilton yoğunluğu

$$\mathcal{H}_{pc} = \dot{\Phi} P_\Phi - \mathcal{L} \qquad (4.10)$$

ile verilir ve aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{pc} \;=\; & \frac{1}{g^2}\Big[\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\lambda \not{\nabla} \bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\psi} \bar{\not{\nabla}} \psi - \frac{1}{4}(D_1^2 + D_2^2) + \frac{i}{4}C^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \bar{\psi}\bar{\psi})\Big] - \\
& -\epsilon^{ijk}F_{0i}\partial_j A_{D\kappa} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ij}\partial_\kappa A_{D0} - \frac{1}{2}\lambda \not{\nabla} \bar{\lambda}_D - \frac{1}{2}\lambda_D \not{\nabla} \bar{\lambda} + \frac{1}{2}\bar{\psi} \bar{\not{\nabla}} \lambda_D + \\
& + \frac{1}{2}\bar{\lambda}_D \bar{\not{\nabla}} \psi - \frac{i}{2}D_D(D_1 - D_2) \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Genişletilmiş Hamilton yoğunluğu ise $(\{\Theta^i\})$ birincil bağlar olmak üzere

$$\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_{pc} + c^i\Theta_i \tag{4.12}$$

ile verilir. Bağların zaman içerisinde sabit olmaları koşulundan $\{\mathcal{H}_E, \Theta_i\} = \dot{\Theta}_i = 0$ ikincil bağlar bulunur.

$$\{\mathcal{H}_E, \Theta_i\} = \{\mathcal{H}_{pc}, \Theta_i\} + c^i\{\Theta_i, \Theta_j\} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &\equiv \{\mathcal{H}_{pc}, \mathrm{P}_1\} = -\frac{1}{2\mathrm{g}^2}\mathrm{D}_1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{D}_\mathrm{D} \approx 0 \ , \\
\Delta_2 &\equiv \{\mathcal{H}_{pc}, \mathrm{P}_2\} = -\frac{1}{2\mathrm{g}^2}\mathrm{D}_2 + \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{D}_\mathrm{D} \approx 0 \ , \\
\Delta_D &\equiv \{\mathcal{H}_{pc}, \mathrm{P}_\mathrm{D}\} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{D}_1 - \mathrm{D}_2) \approx 0 \ , \\
\varphi_1^{0i} &\equiv \{\mathcal{H}_{pc}, P_{0i}\} = F^{0i} - g^2\epsilon^{ijk}\partial_j A_{Dk} + \frac{ig^2}{2}C^{0i}(\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \bar{\psi}\bar{\psi}) \approx 0 \ , \\
\varphi_D &\equiv \{\mathcal{H}_{pc}, P_D^0\} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_k F_{ij} \approx 0 \ .
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Teorinin S-dualite değişmezliğine sahip olup olmadığına karar verebilmemiz için yol integraline bakmamız gerekir. Yol integralinde kullanılacak olan bu bağların birinci sınıf mı ikinci sınıf mı olduklarını belirleyelim. Birinci sınıf bağlar, kendileriyle ve diğer tüm bağlarla komutasyonları sıfır olan bağlardır. ϕ_{D1} birinci sınıf bir bağdır. Aynı zamanda

$$\phi_{D_3} \equiv \partial_i\phi_{D_2}^i + \varphi_D = \partial_i P_D^i \approx 0 \tag{4.15}$$

lineer kombinasyonu da birinci sınıf bir bağdır. Bununla beraber $\phi_{D_2}^i$'nin rotasyonunu almaktan gelen iki lineer bağımsız bağ daha vardır.

$$\phi_{D_4}^n \equiv K_i^n\phi_{D_2}^i = \mathcal{K}^{ni}\epsilon_{ijk}\partial^j\phi_{D_2}^k \approx 0 \tag{4.16}$$

Burada $n = 1, 2$ ve $\mathcal{K}_i^n$'ler bu tezde açık ifadeleri bize gerekli olmayan sabitlerdir. φ_1^{0i}'i de aynı şekilde ayırırsak hesaplarımız kolaylaşır.

$$\varphi_2 \equiv \partial_i \varphi_1^{0i} = -\partial_i F^{0i} - \frac{i}{2}\partial_i C^{0i}(\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \bar{\psi}\bar{\psi}) \approx 0, \tag{4.17}$$

$$\varphi_3^n \equiv L_i^n \varphi_1^{0i} = \mathcal{L}^{ni}\epsilon_{ijk}\partial^j \varphi_1^{0k} \approx 0. \tag{4.18}$$

Burada $\mathcal{L}^{nj}$'ler yine açık ifadeleri bize gerekli olmayan sabitlerdir.

Bu bağların gerekli olanları kullanılarak hem normal hem de dual Hamilton fonksiyonunu bulabilmemiz gerekir.

4.2 Bölüşüm Fonksiyonlarının Eşitliği

Faz uzayındaki bölüşüm fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir [50, 51].

$$\mathcal{Z} = \int \prod_i \mathcal{D}\Phi_i \, \mathcal{D}P_{\Phi_i} \, \mathcal{M} \, e^{i\int d^3x(\dot{\Phi}_i P_{\Phi_i} - \mathcal{H}_p)} \tag{4.19}$$

$$\mathcal{M} = N\det(\partial_i^2)\delta(\partial{\cdot}\mathbf{P_D})\delta(\partial{\cdot}\mathbf{A_D})\delta(\mathbf{P_{D0}})\delta(\mathbf{A_{D0}})\mathrm{sdet}\,\mathbf{M}\prod_{\mathbf{z}}\delta(\mathbf{S_z}), \tag{4.20}$$

S_z tüm ikinci sınıf bağları göstermektedir: $S_z \equiv (\phi_1,\ \phi_2,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \phi_{D_4},\ \Phi_D,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \varphi_D,\ \Delta_D,\ \chi_1,\ \bar{\chi}_1,\ \chi_2,\ \bar{\chi}_2,\ \chi_D,\ \bar{\chi}_D)$.

Birinci sınıf bağlar ϕ_{D_1} ve ϕ_{D_3} için ayar koşulları

$$\begin{aligned} A_{D_0} &= 0\ , \\ \partial_i A_{D_i} &= 0, \end{aligned} \tag{4.21}$$

N ise normalizasyon sabitidir. İkinci sınıf bağların genelleştirilmiş Poisson parantezleri matrisi $M = \{S_z, S_{z'}\}$ şu şekildedir.

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Burada BB = Bozonik bağlar, FB= Fermiyonik bağları temsil etmek üzere A = { BB, BB}, B = { BB, FB}, C = { FB, BB} = $-B^T$, D = {FB, FB} antikomutasyonlarından oluşmaktadır. M nin süperdeterminantı

$$\text{sdet}M = (\det D)^{-1} \det(A - BD^{-1}C). \tag{4.23}$$

ile verilir. Süperdeterminanta bozonik kısımdan gelen katkı [47]'da hesaplanmıştır:

$$\det A = \det\left(\epsilon_{ijk}\partial^i K_1^j K_2^k\right) \det\left(\epsilon_{ijk}\partial^i L_1^j L_2^k\right). \tag{4.24}$$

K_i^n ve L_i^n operatörleri (4.16) ve (4.18)'te tanımlanmıştır. A zaten bilindiğine göre B, ve D'yi açıkça hesaplamak yeterlidir. B ve D aşağıdaki gibidir:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{g^2}C^{0i}\partial_i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} & 0 & -\frac{i}{g^2}C^{0i}\partial_i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{g^2}C^{0i}L_i^n\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} & 0 & -\frac{i}{g^2}C^{0i}L_i^n\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

$$C = -B^{\mathrm{T}} \tag{4.26}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{i}{2g^2}\sigma^0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sigma^0 \\ -\frac{i}{2g^2}\sigma^0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sigma^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2g^2}\sigma^0 & 0 & -\frac{1}{2}\sigma^0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2g^2}\sigma^0 & 0 & -\frac{1}{2}\sigma^0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^0 & 0 & -\frac{1}{2}\sigma^0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma^0 & 0 & -\frac{1}{2}\sigma^0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & ig^2\sigma^0 & 0 & ig^2\sigma^0 & 0 & \sigma^0 \\ ig^2\sigma^0 & 0 & ig^2\sigma^0 & 0 & \sigma^0 & 0 \\ 0 & ig^2\sigma^0 & 0 & ig^2\sigma^0 & 0 & -\sigma^0 \\ ig^2\sigma^0 & 0 & ig^2\sigma^0 & 0 & -\sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 & 0 & -\sigma^0 & 0 & ig^2\sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 & -\sigma^0 & 0 & ig^2\sigma^0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Bu matrislerin kombinasyonundan oluşan aşağıdaki ifadeler hesaplanırsa

$$\det(BD^{-1}C) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det M = \frac{\det A}{\det D} \tag{4.29}$$

fermiyonik bağların katkısı

$$\det D = -\left(\frac{1}{4\det g^2}\right)^2. \tag{4.30}$$

olarak bulunur.

(4.19) denkleminde fermiyonik alanlara karşılık gelen tüm momentum integralleri ilgili delta fonksiyonları sayesinde kolayca alınabilir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z} \;=\; & \int \mathcal{D}F^{\mu\nu}\,\mathcal{D}\lambda\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\lambda}\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}D_1\,\mathcal{D}P_1\,\mathcal{D}D_2\,\mathcal{D}P_2\,\mathcal{D}A_{D\mu}\,\mathcal{D}\lambda_D\,\mathcal{D}\bar{\lambda}_D\,\mathcal{D}P_{D\mu} \\
& \mathcal{D}D_D\,\mathcal{D}P_D\,\tilde{\mathcal{M}}\exp\Big\{ i\int d^3x \Big[P_1\dot{D}_1 + P_2\dot{D}_2 + P_D^0\dot{A}_{D0} + P_D^i\dot{A}_{Di} + P_D\dot{D} - \\
& -\frac{1}{4g^2}F^{0i}F_{0i} - \frac{1}{4g^2}F^{ij}F_{ij} - \frac{i}{2g^2}\lambda\partial\!\!\!/\bar{\lambda}\frac{i}{2g^2}\bar{\psi}\bar{\partial\!\!\!/}\psi + \frac{1}{4g^2}(D_1^2 + D_2^2) - \\
& -\frac{i}{2g^2}C^{0i}F_{0i}(\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \bar{\psi}\bar{\psi}) - \frac{i}{4g^2}C^{ij}F_{ij}(\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \bar{\psi}\bar{\psi}) + \epsilon^{ijk}F_{0i}\partial_j A_{Dk} - \\
& -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ij}\partial_k A_{D0} + \frac{1}{2}\lambda\partial\!\!\!/\bar{\lambda}_D + \frac{1}{2}\lambda_D\partial\!\!\!/\bar{\lambda} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\partial\!\!\!/}\lambda_D - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_D\bar{\partial\!\!\!/}\psi + \\
& +\frac{i}{2}D_D(D_1 - D_2)\Big]\Big\}. \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

"D" indisi taşımayan alanlar üzerinden integral almak istiyoruz: P_1, P_2 gider ve D_1 ve D_2 üzerinden integrasyonla da bir $\det g^2$ ve $\delta(D_D)$ faktörü elde ederiz.

ψ ve λ üzerinden integrasyondan ise $(\det\partial\!\!\!/ / \det g^2)^2\delta(i\bar{\psi}+g^2\bar{\lambda}_D)\delta(i\bar{\lambda}-g^2\bar{\lambda}_D)$ gelir. Dolayısıyla $\bar{\psi}$ and $\bar{\lambda}$ integrasyonundan sonra da $\bar{\psi}$nin yerine $ig^2\bar{\lambda}_D$, $\bar{\lambda}$ yerine ise $-ig^2\bar{\lambda}_D$ koyulur.

$F^{\mu\nu}$ üzerinden integrasyon F^{0i} yerine $g^2\epsilon^{ijk}\partial_j A_{Dk} + \frac{i}{2}g^4C^{0i}\bar{\lambda}_D\bar{\lambda}_D$, F^{ij} yerine $\epsilon^{ijk}P_{Dk}$ koyulmasıyla ve (4.24) determinantının gitmesiyle sonuçlanır.

A_D^0, P_D^0 üzerinden integral alır ve normalizasyon sabitini de değiştirirsek bölüşüm fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z} \;=\; & \int \mathcal{D}A_{Di}\,\mathcal{D}\bar{\lambda}_D\,\mathcal{D}P_{Di}\,\mathcal{D}D_D\,\mathcal{D}P_D\,(\det g^2)\det\partial_i^2(\det\partial\!\!\!/)^2\,\delta(D_D)\delta(P_D) \\
& \delta(\partial\cdot\mathbf{P_D})\delta(\partial\cdot\mathbf{A_D})\exp\Big\{ i\int d^3x \Big[P_D^i\dot{A}_{Di} + P_D\dot{D}_D - \frac{1}{2g^2}P_{Di}P_D^i - \\
& -iC_D^{0i}P_{Di}\bar{\lambda}_D\bar{\lambda}_D - \frac{g^2}{4}F_D^{ij}F_{Dij} - \frac{i}{2}g^2C_D^{ij}F_{Dij}\bar{\lambda}_D\bar{\lambda}_D - ig^2\lambda_D\partial\!\!\!/\bar{\lambda}_D + \\
& +\frac{g^2}{2}D_D^2\Big]\Big\}. \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

olur. Şimdi de (4.31) denkleminde, "D" indisi taşıyan alanlar üzerinden integral alalım: P_D integrali trivialdir. D_D üzerinden integralden

$(\det g^2)\delta(D_1+D_2)\delta(D_1-D_2)$ katkısı gelir. λ_D and $\bar{\lambda}_D$ fermiyonik değişkenleri üzerinden integral ise $\delta(-\partial\!\!\!/\bar{\psi}+\bar{\partial\!\!\!/}\psi)\delta(\bar{\partial\!\!\!/}\lambda-\bar{\partial\!\!\!/}\psi)$ verir.

$\varphi_D = 0$ bağının varlığı nedeniyle

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \tag{4.33}$$

alırız. Aynı zamanda [47]'deki şekilde bir değişken dönüşümü de yapmak istiyoruz.

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}F_{ij}\delta(\epsilon^{klm}\partial_k F_{lm})\delta(K^i_n(P_{Di}+\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}))\rightarrow \\ &\qquad \det(\partial^2)\mathcal{D}A_i\delta(\partial_j A^j)\delta\left(K^i_n(P_{Di}+\epsilon_{ijk}\partial^j A^k)\right). \end{aligned} \tag{4.34}$$

A_{Di} ve P_{Di} alanlarını delta fonksiyonlarını kullanarak A_i, F_{0i} alanları cinsinden ifade edersek $\delta(K^n_i\phi^i_D)\ \delta(L^n_i\phi^{0i}_1)\ \delta(\partial\cdot\mathbf{P_D})\ \delta(\partial\cdot\mathbf{A_D})$ integrasyon ölçeğine yapacağı katkı aşağıdaki gibi olur.

$$\left[(\det g^2)^2\det(\partial^2)\det\left(\epsilon_{ijk}\partial^i K^j_1 K^k_2\right)\det\left(\epsilon_{ijk}\partial^i L^j_1 L^k_2\right)\right]^{-1}.$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \int &\mathcal{D}A_i\ \mathcal{D}F_{0i}\mathcal{D}\lambda\ \mathcal{D}\bar{\lambda}\ \mathcal{D}\psi\ \mathcal{D}\bar{\psi}\ \mathcal{D}D_1\ \mathcal{D}\mathrm{P}_1\ \mathcal{D}\mathrm{D}_2\ \mathcal{D}\mathrm{P}_2\ (\det \mathrm{g}^2)\det(\partial_\mathrm{i}^2) \\ &\delta(\partial\cdot\mathbf{A})\delta(\mathbf{D_1}+\mathbf{D_2})\delta(\mathbf{D_1}-\mathbf{D_2})\ \delta(-\partial\!\!\!/\bar{\psi}+\partial\!\!\!/\bar{\lambda})\ \delta(\bar{\partial\!\!\!/}\lambda-\bar{\partial\!\!\!/}\psi) \\ &\delta\Big(\partial_i F^{0i}+\frac{i}{2}\partial_i C^{0i}(\bar{\lambda}\bar{\lambda}+\bar{\psi}\bar{\psi})\Big)\exp\Big\{i\int d^3x\Big[\frac{1}{g^2}\Big(F^{0i}+\frac{i}{4}C^{0i}(\bar{\lambda}\bar{\lambda}+\bar{\psi}\bar{\psi})\Big)\dot{A}_i+ \\ &+\dot{D}_1\mathrm{P}_1+\dot{\mathrm{D}}_2\mathrm{P}_2-\frac{1}{2\mathrm{g}^2}\mathrm{F}^{0\mathrm{i}}\mathrm{F}_{0\mathrm{i}}-\frac{1}{4\mathrm{g}^2}(\partial_\mathrm{i}\mathrm{A}_\mathrm{j}-\partial_\mathrm{j}\mathrm{A}_\mathrm{i})^2-\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{g}^2}\lambda\partial\!\!\!/\bar{\lambda}-\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{g}^2}\bar{\psi}\bar{\partial\!\!\!/}\psi+ \\ &+\frac{1}{4g^2}(D_1^2+D_2^2)+\frac{1}{4g^2}D_1(D_1-D_2)-\frac{i}{2g^2}C^{0i}F_{0i}(\bar{\lambda}\bar{\lambda}+\bar{\psi}\bar{\psi})- \\ &-\frac{i}{4g^2}C^{ij}(\partial_i A_j-\partial_j A_i)(\bar{\lambda}\bar{\lambda}+\bar{\psi}\bar{\psi})\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{4.35}$$

D_2, P_2, ψ ve $\bar{\psi}$ üzerinden integral alırsak

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} \;=\; & \int \mathcal{D}A_i\, \mathcal{D}F_{0i}\mathcal{D}\lambda\, \mathcal{D}\bar{\lambda}\, \mathcal{D}D_1\, \mathcal{D}\mathrm{P}_1\, (\det \mathrm{g}^2)(\det \partial_\mathrm{i}^2)(\det \bar{\partial\!\!\!/})^2\delta(\mathrm{P}_1)\delta(\mathrm{D}_1) \\ & \delta(\partial\cdot\mathbf{A})\delta\left(\partial_\mathbf{i}\mathbf{F^{0i}} + \mathbf{i}\partial_\mathbf{i}\mathbf{C^{0i}}\bar{\lambda}\bar{\lambda}\right)\exp\Bigg\{\mathbf{i}\int \mathbf{d^3x}\Bigg[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g^2}}\left(\mathbf{F^{0i}} + \mathbf{iC^{0i}}\bar{\lambda}\bar{\lambda}\right)\dot{\mathbf{A}}_\mathbf{i} + \\ & +\dot{D}_1\mathrm{P}_1 - \frac{1}{2\mathrm{g}^2}\mathrm{F}^{0\mathrm{i}}\mathrm{F}_{0\mathrm{i}} - \frac{1}{4\mathrm{g}^2}(\partial_\mathrm{i}\mathrm{A}_\mathrm{j} - \partial_\mathrm{j}\mathrm{A}_\mathrm{i})^2 - \frac{1}{\mathrm{g}^2}\lambda\bar{\partial\!\!\!/}\bar{\lambda} + \frac{1}{2\mathrm{g}^2}\mathrm{D}_1^2 \\ & -\frac{i}{g^2}C^{ij}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)\bar{\lambda}\bar{\lambda}\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Yeni bir değişken dönüşümü ile

$$\begin{aligned} g^2P^i &= F^{0i} + C^{0i}\bar{\lambda}\bar{\lambda}, \\ \mathcal{D}F^{0i} &= \det g^2\mathcal{D}P^i, \end{aligned} \tag{4.37}$$

(4.36) bölüşüm fonksiyonu şu hale gelir

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} = & \int\mathcal{D}A_i\mathcal{D}P^i\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}\bar{\lambda}\mathcal{D}D_1\mathcal{D}\mathrm{P}_1(\det \mathrm{g}^2)(\det \partial_\mathrm{i}^2)(\det \bar{\partial\!\!\!/})^2\delta(\mathrm{D}_1)\delta(\mathrm{P}_1)\delta(\partial\cdot\mathbf{P})\delta(\partial\cdot\mathbf{A}) \\ & \exp\Bigg\{i\int d^3x\Bigg[P^i\dot{A}_i + \dot{D}_1\mathrm{P}_1 - \frac{\mathrm{g}^2}{2}(\mathrm{P}_\mathrm{i})^2 - \mathrm{i}\mathrm{C}^{0\mathrm{i}}\mathrm{P}_\mathrm{i}\bar{\lambda}\bar{\lambda} - \frac{1}{4\mathrm{g}^2}(\partial_\mathrm{i}\mathrm{A}_\mathrm{j} - \partial_\mathrm{j}\mathrm{A}_\mathrm{i})^2 \\ & -\frac{i}{g^2}\lambda\bar{\partial\!\!\!/}\bar{\lambda} + \frac{1}{2g^2}D_1^2 - \frac{i}{2g^2}C^{ij}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)\bar{\lambda}\bar{\lambda}\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Eksponansiyelde orijinal teorinin 1. dereceden eylemini, (4.4) ifadesini görüyoruz.

(4.32) ve (4.38) ifadelerini kıyasladığımızda nonantikomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisinin ve dualinin bölüşüm fonksiyonlarının birbirine denk olduğunu görmüş oluruz.

$$Z_{NA} = Z_{NAD}.$$

Dolayısıyla nonantikomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisi zayıf-kuvvetli etkileşme dualitesi altında invaryanttır.

5 GENELLEŞTİRİLMİŞ SEIBERG - WITTEN GÖNDERİMİ

5.1 Nonkomutatif Uzayda $N = \frac{1}{2}$ Süpersimetrik $U(N)$ Ayar Teorisinin Süpersimetri ve Ayar İnvaryanslığı

İncelediğimiz nonantikomutatif teoriyi genelleştirmek için, fermiyonik koordinatlardaki deformasyona ek olarak bozonik koordinatları da nonkomutatif alabilir ve $\star$-çarpımını her ikisini de içerecek şekilde genişletebiliriz [52]. Deformasyonu tek bir adım yerine iki adımda da yapabiliriz. Sadece normal alanları içerdiğinden önce $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(N)$ ayar teorisini ele alıp nonkomutatifliği normal yoldan sağlayabiliriz (aynı eylem [52] çalışmasındaki süperalan yaklaşımından da elde edilebilir).

Bozonik ve fermiyonik koordinatlarının komutasyon ilişkilerini şu şekilde alalım.

$$\begin{aligned} \{\hat{\theta}_\alpha, \hat{\theta}_\beta\} &= C_{\alpha\beta}, \qquad [\hat{y}^\rho, \hat{y}^\sigma] = i\Theta^{\rho\sigma} \\ \{\hat{\theta}_\alpha, \hat{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}\} &= 0 \qquad \{\hat{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}, \hat{\bar{\theta}}_{\dot{\beta}}\} = 0 \\ [\hat{y}^\rho, \hat{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}] &= 0 \qquad [\hat{y}^\rho, \hat{\theta}_\alpha] = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Bu, yine ancak Öklidyen uzayda mümkündür. Antisimetrik $C^{\mu\nu} = C^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma}\sigma_\alpha^{\mu\nu\gamma}$ parametresi self-dual olma özelliğine sahiptir.

$$C^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}C_{\rho\lambda} \tag{5.2}$$

Bu iki deformasyonu içeren $\tilde{\star}$ - çarpımı [52]'de tanımlanmıştı.

$$f(y,\theta)\tilde{\star}g(y,\theta) = f(y,\theta)\exp\left(\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^\nu} - \frac{i}{2}C^{\alpha\beta}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\right)g(y,\theta)$$

$$\equiv \quad f(y,\theta) \overset{C}{\star} \overset{\Theta}{\star} g(y,\theta) \tag{5.3}$$

Burada $\partial/\partial\theta^\alpha$ türevleri sabit y_μ ve $\bar{\theta}$'da tanımlanmıştır. Biz $\tilde{\star}$ - çarpımı ile uğraşmak yerine değişik bir yol izleyeceğiz. Seiberg'in ele aldığı eylemde normal çarpım yerine $\star$ - çarpımı koyarak nonkomutatif uzaya geçmiş olacağız. Seiberg'in [25]'de kullandığı eylem aşağıdaki gibidir.

$$S = \frac{1}{g^2}\int d^4x\ tr\Big\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda \not{D}\bar{\lambda} + \frac{1}{2}D^2 - \frac{i}{2}C^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \frac{|C|^2}{8}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2\Big\} \tag{5.4}$$

Bu eylem ayar dönüşümleri altında invaryanttır ve $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrisine sahiptir. Burada C parametresi görünmesine rağmen komutatif bir teori söz konusudur. Nonkomutatif uzaya geçmek için koordinatların

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu} \tag{5.5}$$

sağladığını kabul etmek gerekir. Çarpım yerine yıldız çarpımı

$$f(x)\star g(x) = f(x)e^{\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial_\mu}\overrightarrow{\partial_\nu}}g(x) \tag{5.6}$$

koyup normal koordinatların Moyal parantezlerini sağladıklarını kabul edebiliriz.

$$[x^\mu, x^\nu]_\star \equiv x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^m = i\Theta^{\mu\nu} \tag{5.7}$$

Bu $\star$ - çarpımını (5.4)'deki çarpımların yerine koyarsak elde edeceğimiz eylem bileşenler cinsinden $\Theta-$ deforme edilmiş $U(N)$ eylemidir. Aşağıdaki ifadeler $\star$-çarpımının (1.4) ve (1.5) özellikleri kullanılarak yazılmıştır.

$$I = \frac{1}{g^2}\int d^4x\ tr\Big\{ -\frac{1}{4}\hat{F}^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} - i\hat{\lambda}\not{D}\star\hat{\bar{\lambda}} + \frac{1}{2}\hat{D}^2 - \frac{i}{2}C^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}} + \frac{|C|^2}{8}(\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}})^2\Big\}. \tag{5.8}$$

(5.8) eylemindeki bazı tanımlar aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + \frac{i}{2}[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star \\
\not{D} \star \hat{\bar{\lambda}} &\equiv \not{\partial}\hat{\bar{\lambda}} + \frac{i}{2}[\hat{\not{A}}, \hat{\bar{\lambda}}]_\star \\
C &\equiv C^{\mu\nu} = C^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\alpha}\sigma_{\alpha}^{\mu\nu\gamma}
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

[52]'deki $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik teorinin süperalan formülasyonda [25]'deki parametrizasyon kullanılsaydı da aynı nonkomutatif ayar teorisi elde edilebilirdi.

Bu eylemin süpersimetri ve ayar dönüşümleri altında invaryant olduğunu gösterelim.

Alanların ayar dönüşümleri aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
\delta\hat{A}_\mu &= \partial_\mu\hat{\phi} - i[\hat{\phi}, \hat{A}_\mu]_\star, \\
\delta\hat{\lambda}_\alpha &= -i[\hat{\phi}, \hat{\lambda}_\alpha]_\star, \\
\delta\hat{\bar{\lambda}}_{\dot{\alpha}} &= -i[\hat{\phi}, \hat{\bar{\lambda}}_{\dot{\alpha}}]_\star, \\
\delta\hat{D} &= -i[\hat{\phi}, \hat{D}]_\star,
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Burada $\hat{\phi}$ ayar parametresidir. Bu ayar dönüşümlerinden şunlar elde edilebilir.

$$
\begin{aligned}
\delta\hat{F}_{\mu\nu} &= -i[\hat{\phi}, \hat{F}_{\mu\nu}]_\star, \\
\delta(\not{D} \star \hat{\bar{\lambda}}) &= -i[\hat{\phi}, \not{D} \star \hat{\bar{\lambda}}]_\star \\
\delta(\hat{\bar{\lambda}} \star \hat{\bar{\lambda}}) &= -i[\hat{\phi}, \hat{\bar{\lambda}} \star \hat{\bar{\lambda}}]_\star.
\end{aligned}
$$

Eylemin dönüşümü $I + \delta I$ olarak yazıldığında

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \frac{1}{g^2}\int d^4x\, tr\Big\{-\frac{1}{2}\hat{F}\delta\hat{F} - i(\delta\hat{\lambda}\not{D}\star\hat{\bar{\lambda}} + \hat{\lambda}\delta(\not{D}\star\hat{\bar{\lambda}})) + \hat{D}\delta\hat{D} \\
&\quad +\frac{i}{2}C\delta\hat{F}(\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}}) + \frac{i}{2}C\hat{F}\delta(\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}}) + \\
&\quad +\frac{|C|^2}{2}\Big[(\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}})\delta(\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}}) + \delta(\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}})(\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}})\Big]\Big\} \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

olur. Dönüşümler yerine koyulursa

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \frac{1}{g^2}\int d^4x\, tr\Big\{\frac{i}{4}\hat{F}_{\mu\nu}[\hat{\phi},\hat{F}_{\mu\nu}]_\star - [\hat{\phi},\hat{\lambda}_\alpha]_\star(\not{D}\star\hat{\bar{\lambda}}) - i\hat{\lambda}[\hat{\phi},\not{D}\star\hat{\bar{\lambda}}]_\star - \\
&\quad -i\hat{D}[\hat{\phi},\hat{D}]_\star + \frac{1}{2}C^{\mu\nu}[\hat{\phi},\hat{F}_{\mu\nu}]_\star(\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}}) + \frac{1}{2}C^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu}[\hat{\phi},\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}}] - \\
&\quad -i\frac{|C|^2}{2}\Big\{(\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}})[\hat{\phi},\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}}]_\star + [\hat{\phi},\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}}]_\star(\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}})\Big\}\Big\} \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (5.12) komutatörlü terimler sıfır vereceğinden

$$
\delta I = 0 \qquad (5.13)
$$

elde edilir. Yani $\Theta-$ deforme edilmiş $U(N)$ eyleminin ayar invaryantlığı gösterilmiş olur.

Diğer taraftan bileşen alanların süpersimetri dönüşümleri şöyle tanımlanabilir.

$$
\begin{aligned}
\delta_S\hat{\lambda} &= i\xi\hat{D} + \sigma^{\mu\nu}\xi(\hat{F}_{\mu\nu} + \frac{i}{2}C_{\mu\nu}\hat{\bar{\lambda}}\star\hat{\bar{\lambda}}), \qquad (5.14)\\
\delta_S\hat{A}_\mu &= -i\hat{\bar{\lambda}}\bar{\sigma}_\mu\xi, \qquad (5.15)\\
\delta_S\hat{D} &= -\xi\sigma^\mu D_\mu\star\hat{\bar{\lambda}}, \qquad (5.16)\\
\delta_S\hat{\bar{\lambda}} &= 0 \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Burada ξ^α sabit bir Grassmann parametresidir. (5.8) eyleminin süpersimetri dönüşümleri altında invaryant olduğunu gösterebilmek için, σ ların çarpımının sağladığı aşağıdaki özelliğe hesaplarda ihtiyaç vardır.

$$\sigma^{\rho\lambda}\sigma^{\mu} = \frac{1}{2}(-\eta^{\mu\nu}\sigma^{\rho} + \eta^{\mu\rho}\sigma^{\lambda} + i\epsilon^{\mu\rho\lambda\kappa}\sigma_{\kappa}) \tag{5.18}$$

$C = 0$ kısmının süpersimetrik olduğu $\star$ - çarpımının asosiyatif olması nedeniyle Bianchi özdeşliği $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} D_{\mu} \star \hat{F}_{\nu\lambda} = 0$, kullanılarak gösterilebilir. (5.2) self-dualite koşulu kullanıldığında $C^{\mu\nu}$'lü terimin de sıfır verdiği görülür.

$$\begin{aligned}\int d^4x \ \xi \ \Big\{ & 2(\sigma_{\nu} C^{\mu\nu} D_{\mu} \star \hat{\bar{\lambda}})(\hat{\bar{\lambda}} \star \hat{\bar{\lambda}}) + \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \sigma_{\nu} C_{\rho\lambda} (\hat{\bar{\lambda}} \star \hat{\bar{\lambda}})(D_{\mu} \star \hat{\bar{\lambda}}) - \\ - \ & 4(\sigma_{\nu} C^{\mu\nu} D_{\mu} \star \hat{\bar{\lambda}})(\hat{\bar{\lambda}} \star \hat{\bar{\lambda}}) \Big\} = 0, \end{aligned} \tag{5.19}$$

Sonuç olarak (5.8) eyleminin süpersimetri altında da invaryant olduğu gösterilmiş olur.

5.2 Seiberg-Witten Gönderimi

Seiberg-Witten gönderimi komutatif ve nonkomutatif ayar alanları arasında şu şekilde tanımlanmış bir denklik bağıntısıdır [4].

$$\hat{A}(A) + \hat{\delta}_{\hat{\phi}} \hat{A}(A) = \hat{A}(A + \delta_{\phi} A) \tag{5.20}$$

Burada A komutatif ayar alanı, ϕ komutatif ayar parametresi, $\hat{A}$ nonkomutatif ayar alanı ve $\hat{\phi}$ nonkomutatif ayar parametresidir. Seiberg ve Witten'a göre nonkomutatif $\hat{A}_{\mu}$ ayar alanının, nonkomutatiflik parametresi θ ve komutatif A_{μ} ayar alanı cinsinden bir perturbatif açılımı vardır ve bu iki alan arasındaki ilişki Seiberg-Witten gönderimi ile belirlenir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{A}_{\mu}}{\partial \theta^{\alpha\beta}} &= -\frac{1}{8}\{\hat{A}_{\alpha}, \partial_{\beta}\hat{A}_{\mu} + \hat{F}_{\beta\mu}\} + \frac{1}{8}\{\hat{A}_{\beta}, \partial_{\alpha}\hat{A}_{\mu} + \hat{F}_{\alpha\mu}\} \\ \hat{A}_{\mu}|_{\theta=0} &= A_{\mu} \end{aligned} \tag{5.21}$$

Özetle Seiberg-Witten gönderimi, nonkomutatif ayar teorilerini komutatif ayar teorileriyle ilişkilendiririrken nonkomutatif değişkenleri de komutatif değişkenler cinsinden ifade edebilmemize olanak sağlar.

Süpersimetrik olan ve olmayan teorilerde Seiberg-Witten gönderimi olmadan $U(N)$ dışındaki ayar grupları formüle edilemez. Yani herhangi bir ayar grubu ele alınmak isteniyorsa mutlaka Seiberg-Witten gönderiminin tanımlanması gerekir. Ancak yakın zamana kadar nonantikomutatif süperuzayda tanımlanan teoriler için Seiberg-Witten gönderimi bulunamıyordu. Bu konu zerinde yapılan bazı çalışmalar [53, 54]'dir.

Biz burada hem Seiberg-Witten gönderimini nonkomutatif ve nonantikomutatif koordinatlara sahip süperuzaya genelleştireceğiz hem de Seiberg-Witten gönderimi uygun bir biçimde yapıldığında sonuçta elde edilen eylemin ayar invaryant olacağını göstereceğiz.

5.3 Genelleştirilmiş Seiberg-Witten Gönderimi

Seiberg - Witten gönderiminin genelleştirilmesini $U(1)$ üzerinde uygulayarak gösterelim. [25]'deki parametrizasyonu kullanarak deforme olmamış vektör süperalanını

$$V = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D - i\partial_\mu A^\mu) \tag{5.22}$$

şeklinde tanımlarız. Burada $V^2 = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta A_\mu A^\mu$ ve $V^3 = 0$'dır. Uygun ayar parametreleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \Lambda &= \phi + \frac{i}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi \\ \bar{\Lambda} &= \phi - \frac{i}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2\phi. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Sonsuz küçük dönüşümleri elde etmek için $\Sigma = V + \frac{1}{2}V^2$ ifadesine ihtiyacımız vardır. Bileşen alanların sonsuz küçük ayar dönüşümlerini veren ifade şudur.

$$\delta_\Lambda \Sigma = -i(\bar{\Lambda} - \Lambda + \bar{\Lambda}\Sigma - \Sigma\Lambda). \tag{5.24}$$

Nonkomutatif ayar dönüşümleri ise çarpım işlemi yerine $\tilde{\star}$ konularak şöyle tanımlanabilir:

$$\delta_{\bar{\Lambda}} \hat{\Sigma}_\Lambda = -i(\hat{\bar{\Lambda}} - \hat{\Lambda} + \hat{\bar{\Lambda}}\tilde{\star}\hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}\tilde{\star}\hat{\Lambda}) \tag{5.25}$$

Seiberg - Witten gönderimini nonkomutatif ve nonantikomutatif süperuzaydaki ayar dönüşümlerine genelleştirmek için

$$\hat{\Sigma}(\Sigma) + \hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{\Sigma}(\Sigma) = \hat{\Sigma}(\Sigma + \delta_\Lambda \Sigma) \tag{5.26}$$

denklik bağıntısı tanımlanabilir. Bu ifade (1.8)'de ayar alanı A yerine vektör süperalanı Σ, ayar parametresi ϕ yerine de süperayar parametresi Λ koyularak elde edilmiştir.

$\theta_{\mu\nu}, C_{\alpha\beta}$ ve $C\theta$'de birinci mertebeden olan ifadeleri almak istediğimizden şöyle bir ifade kullanalım.

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma} &= \Sigma + \Sigma_{(C)} + \Sigma_{(\theta)} + \Sigma_{(C\theta)} \equiv \Sigma + \Sigma_{(1)}, && (5.27)\\
\hat{\Lambda} &= \Lambda + \Lambda_{(C)} + \Lambda_{(\theta)} + \Lambda_{(C\theta)} \equiv \Lambda + \Lambda_{(1)}, && (5.28)\\
\hat{\bar{\Lambda}} &= \bar{\Lambda} + \bar{\Lambda}_{(C)} + \bar{\Lambda}_{(\theta)} + \bar{\Lambda}_{(C\theta)} \equiv \bar{\Lambda} + \bar{\Lambda}_{(1)}. && (5.29)
\end{aligned}$$

Bu durumda (5.26) bize şunu verir.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{(1)}(\Sigma + \partial_\Lambda \Sigma) - \Sigma_{(1)}(\Sigma) + i\bar{\Lambda}_{(1)} - i\Lambda_1 &= i(\Sigma + \Sigma_{(1)})(\tilde{\star} - 1)(\Lambda + \Lambda_{(1)}) - \\
&\quad -i(\Lambda + \Lambda_{(1)})(\tilde{\star} - 1)(\Sigma + \Sigma_{(1)}) \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

Daha iyi anlayabilmek için bunu $\theta^{\rho\sigma} = 0$ alarak yani sadece non-antikomutatif uzay için ele alalım. Sadece $\not{C}$ kaldığında (5.30) şunu verir.

$$\Sigma_{(C)}(\Sigma + \partial_\Lambda \Sigma) - \Sigma_{(C)}(\Sigma) + i\bar{\Lambda}_{(C)} - i\Lambda_{(C)} = -C^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \Sigma \partial_\beta \Lambda - \partial_\alpha \bar{\Lambda} \partial_\beta \Sigma) \quad (5.31)$$

Burada $\partial/\partial\theta^\alpha \equiv \partial_\alpha$ temsil etmektedir. Bu denklem iki farklı yoldan çözülebilir. Birincisi süpersimetri dönüşümlerini aynı bırakan ancak ayar dönüşümlerini değiştiren açağıdaki seçimi yapmaktır.

$$\Sigma_{(C)} = 0, \quad \Lambda_{(C)} = 0, \quad \bar{\Lambda}_{(C)} = \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta_\alpha C^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta}\dot{\alpha}\partial_\mu \phi \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \quad (5.32)$$

İkincisi ise ayar dönüşümlerini aynı bırakan ancak süpersimetri dönüşümlerini değiştiren bir çözümdür. Bunun için vektör süperalanında aşağıdaki gibi bir deformasyon yapılır.

$$\Sigma_{(C)} = -\frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta_\alpha C^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta}\dot{\alpha} A_\mu \phi \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}, \quad \Lambda_{(C)} = 0, \quad \bar{\Lambda}_{(C)} = 0 \quad (5.33)$$

Bu ikinci çözüm Seiberg'in $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrisi ile sonuçlanan ayar teorisi çözümüyle aynıdır. Takip eden kısımlarda (5.33) çözümü kullanılacaktır.

Şimdi de (5.30)'de sadece $C = 0$ alarak sadece $\not{\theta}$'yı bırakalım. Bu durumda (5.30), bileşen alanlar $V_i \equiv (A, \lambda, \bar{\lambda}, D)$ ve ayar dönüşümü δ_ϕ cinsinden şu hale gelir

$$\begin{aligned}
A_{(\theta)\mu}(V_i + \delta_\phi V_i) - A_{(\theta)\mu}(V_i) &= -\partial_\mu \phi_{(\theta)} + \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \phi \partial_\sigma A_\mu && (5.34)\\
\lambda^\alpha_{(\theta)}(V_i + \delta_\phi V_i) - \lambda^\alpha_{(\theta)}(V_i) &= \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \phi \partial_\sigma \lambda^\alpha && (5.35)\\
\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{(\theta)}(V_i + \delta_\phi V_i) - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{(\theta)}(V_i) &= \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \phi \partial_\sigma \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} && (5.36)\\
D_{(\theta)}(V_i + \delta_\phi V_i) - D_{(\theta)}(V_i) &= \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \phi \partial_\sigma D && (5.37)
\end{aligned}$$

[37]'de elde edilmiş olan bu denklemlerin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
A_{(\theta)\mu} &= \theta^{\rho\sigma} A_\rho(\partial_\sigma A_\mu - \partial_\mu A_\sigma/2) && (5.38)\\
\lambda_{(\theta)\alpha} &= \theta^{\rho\sigma} A_\rho \partial_\sigma \lambda_\alpha && (5.39)\\
\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{(\theta)} &= \theta^{\rho\sigma} A_\rho \partial_\sigma \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} && (5.40)\\
D_{(\theta)} &= \theta^{\rho\sigma} A_\rho \partial_\sigma D && (5.41)
\end{aligned}
$$

Bizim ilgi alanımız nonkomutatif uzayda süpersimetrik ayar teorisi olduğundan $\star$-çarpımının tamamını yani $\tilde{\star}$'ı ve $\Sigma_{(C)}$ için Seiberg'in çözümü olan (5.33)'i kullanacağız. Bunun için (5.33)'i (5.30)'de yerine koyalım.

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{(C)}(\Sigma + \delta_\Lambda \Sigma) + \Sigma_{(C\theta)}(\Sigma + \delta_\Lambda \Sigma) - \Sigma_{(\theta)}(\Sigma) - \Sigma_{(C\theta)}(\Sigma)\\
&\quad + i\bar{\Lambda}_{(\theta)} + i\bar{\Lambda}_{(C\theta)} - i\Lambda_{(\theta)} - i\Lambda_{(C\theta)}\\
&-\tfrac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\Big[\theta\theta(\partial_\mu \phi_{(\theta)} A^\mu + \partial_\mu \phi A^\mu_{(\theta)} + \partial_\mu \phi_{(C\theta)} A^\mu + \partial_\mu \phi A^\mu_{(C\theta)})\\
&\quad + i\theta_\alpha C^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot{\alpha}}(\partial_\mu \phi_{(\theta)} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + \partial_\mu \phi \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{(\theta)})\Big]\\
&= \tfrac{i}{4}\theta^{\rho\sigma} C^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\rho \bar{\Lambda} \partial_\beta \partial_\sigma \Sigma - \partial_\alpha \partial_\rho \Sigma \partial_\beta \partial_\sigma \Lambda) \qquad (5.42)
\end{aligned}
$$

$\theta^{\rho\sigma}$ kısmı için (5.34)-(5.37)'yı kullanarak (5.38)-(5.41) çözümlerini kabul etmek istiyoruz. (5.42) düzenlendiği zaman sadece $C\theta$'lı terimlerin kaldığı görülebilir.

$$
\Sigma_{(C\theta)}(\Sigma + \delta_\Lambda \Sigma) - \Sigma_{(C\theta)}(\Sigma) + i\bar{\Lambda}_{(C\theta)} - i\Lambda_{(C\theta)} - \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta(\partial_\mu \phi_{(C\theta)} A^\mu + \partial_\mu \phi A^\mu_{(C\theta)}) = 0 \qquad (5.43)
$$

Bu da bileşen alanlar cinsinden şunu verir.

$$
A^\mu_{(C\theta)}(V_i + \delta_\phi V_i) - A^\mu_{(C\theta)}(V_i) + \partial^\mu \phi_{(C\theta)} = 0 \qquad (5.44)
$$

$$\lambda^{\alpha}_{(C\theta)}(V_i + \delta_\phi V_i) - \lambda^{\alpha}_{(C\theta)}(V_i) \;=\; 0 \tag{5.45}$$

$$\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{(C\theta)}(V_i + \delta_\phi V_i) - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{(C\theta)}(V_i) \;=\; 0 \tag{5.46}$$

$$D_{(C\theta)}(V_i + \delta_\phi V_i) - D_{(C\theta)}(V_i) \;=\; 0 \tag{5.47}$$

Bunların diğer çözümlerine bakmadan önce, sadece trivial çözümü vereceğiz.

$$A^{\mu}_{(C\theta)} = \lambda^{\alpha}_{(C\theta)} = \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{(C\theta)} = D_{(C\theta)} = \phi_{(C\theta)} = 0 \tag{5.48}$$

Bu trivial çözümü almak yerine $C\theta$ terimleri de eklenebilir. Ancak böyle yapıldığında alanların süpersimetri dönüşümlerinin de değiştiğini göreceğiz.

Bileşen alanlar C ve/veya θ terimi eklenerek deforme olduğunda komutatif alanların süpersimetri dönüşümleri de deforme olmak zorundadır [25, 35, 37]. Bu deforme olmuş süpersimetri dönüşümlerinin nasıl elde edilebileceğine bakalım. Bileşen alanların orijinal süpersimetri dönüşümlerini şöyle tanımlayalım.

$$\delta_S V_i = f_i(V_j, \xi) \tag{5.49}$$

Orijinal alanların yerine deforme olanları koyduğumuzda ise

$$\delta_S \hat{V}_i = f_i(\hat{V}_j, \xi) \tag{5.50}$$

Şimdi

$$\hat{V}_i(V) = V_i + V_{i(C)} + V_{i(\theta)} + V_{i(C\theta)} \tag{5.51}$$

gönderimini uygulayalım ve (5.50)'nin her iki tarafında da yerine koyalım. Bunun sonucunda başlangıçtaki bileşen alanların deforme olmuş süpersimetri dönüşümlerini şöyle okuyabiliriz.

$$\delta_S V_i = f_i(\hat{V}_j(V),\xi) - \delta_S V_{i(C)} - \delta_S V_{i(\theta)} - \delta_S V_{i(C\theta)} \tag{5.52}$$

Şimdi Seiberg-Witten gönderimini nonkomutatif uzayda $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik ayar teorisine uygulayalım. $U(1)$ çözümü için Seiberg'in C'ye bağlı kısmının çözümünü (5.33) alıyoruz dolayısıyla da (5.8) eyleminin $U(1)$ için çözümünü de alıyoruz. Sonra, $\theta^{\rho\sigma}$ ve $C\theta$'li terimler için (5.34)-(5.37) ve (5.48) çözümlerini kullanırsak (5.8) ifadesi $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisi eyleminin θ'da birinci mertebeden açılımını verir.

$$\begin{aligned} I &= \int d^4x \Big[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\partial\!\!\!/\bar{\lambda} - \frac{i}{2}C^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}^2 + \frac{1}{2}D^2 - \\ &\quad \theta^{\rho\sigma}\Big(-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\nu\sigma}F_{\mu\rho} + +\frac{1}{8}F_{\rho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}D^2F_{\rho\sigma} + \frac{i}{2}F_{\rho\sigma}\lambda\partial\!\!\!/\bar{\lambda} + \\ &\quad +i\lambda\sigma^\mu\partial_\sigma\bar{\lambda}F_{\mu\rho} + \frac{i}{2}C^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}\bar{\lambda}^2 - \frac{i}{4}C^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}^2\Big)\Big] \end{aligned} \tag{5.53}$$

(5.53) normal $U(1)$ ayar invaryansını sağlamakla beraber süpersimetri dönüşümleri değiştirilmelidir. Değiştirilmiş süpersimetri dönüşümleri (5.52)'ü ve (5.14)-(5.17) dönüşümlerini yardımıyla şöyle okunabilir:

$$\delta_S A_\mu = i\xi\sigma_\mu\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\xi\sigma_\rho\bar{\lambda}(\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}) + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\xi\sigma_\sigma A_\rho\partial_\mu\bar{\lambda} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned} \delta_S\lambda &= i\xi D - \xi\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \theta^{\rho\sigma}\xi\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} + \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\xi C_{\mu\nu}\bar{\lambda}^2 - \\ &\quad -i\xi\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\lambda\sigma_\sigma\bar{\lambda} \end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\delta_S\bar{\lambda} = -i\theta^{\rho\sigma}\xi\partial_\rho\bar{\lambda}\sigma_\sigma\bar{\lambda} \tag{5.56}$$

$$\delta_S D = -\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \theta^{\rho\sigma}\xi\sigma^\mu\partial_\rho\bar{\lambda}F_{\mu\sigma} + i\theta^{\rho\sigma}\xi\sigma_\sigma\partial_\rho D\bar{\lambda} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned} \delta_S F_{\mu\nu} &= i\xi(\sigma_\nu\partial_\mu\bar{\lambda} - \sigma_\mu\partial_\nu\bar{\lambda}) + i\xi\theta^{\rho\sigma}\sigma_\rho(\partial_\mu\bar{\lambda}F_{\nu\rho} - \partial_\nu\bar{\lambda}F_{\mu\sigma}) - \\ &\quad -i\xi\theta^{\rho\sigma}\sigma_\rho\bar{\lambda}\partial_\sigma F_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{5.58}$$

$U(1)$ ayar teorisi eyleminin θ açılımı (5.53), nonkomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik ayar teorisinin çeşitli yönlerini incelemek için kullanılabilir.

Nonkomutatif elektrodinamikte olduğu gibi bu teorinin de tek-ilmekte (one-loop) renormalizasyon özellikleri hesaplanabilir [55] ve hareket denklemleri çözülebilir [56]. Bundan başka [43]'de $N=\frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ teorisi için verilen ana eylem kullanılarak (5.53) eyleminin dualite özellikleri incelenebilir.

Seiberg-Witten gönderimini $U(1)$ için kullandığımız yaklaşımı $U(N)$ için uygulamak istiyoruz. Bunun için Seiberg-Witten gönderiminin sadece C'li kısmı için olan çözümünü alacağız. Bileşen alanların $\theta^{\rho\sigma}$'li kısmı için ise [36]'da verilen Seiberg-Witten gönderiminin genelleştirilmiş şeklini alıyoruz:

$$\begin{aligned}
A_{(\theta)\mu} &= \frac{\theta^{\rho\sigma}}{4}\{A_\rho, \partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}\}, \\
F_{(\theta)\mu\nu} &= \frac{\theta^{\rho\sigma}}{4}(2\{F_{\mu\rho}, F_{\nu\sigma}\} - \{A_\rho, (D_\sigma + \partial_\sigma)F_{\mu\nu}\}), \\
D_{(\theta)} &= \frac{\theta^{\rho\sigma}}{4}\{A_\rho, (D_\sigma + \partial_\sigma)D\}, \\
\lambda_{(\theta)\alpha} &= \frac{\theta^{\rho\sigma}}{4}\{A_\rho, (D_\sigma + \partial_\sigma)\lambda_\alpha\}, \\
\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{(\theta)} &= \frac{\theta^{\rho\sigma}}{4}\{A_\rho, (D_\sigma + \partial_\sigma)\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\}.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

$C\theta$'li terimler için (5.48)'deki trivial çözümü alırsak sonuçta elde edeceğimiz teori ayar invaryant olmaz. Bundan dolayı $C\theta$'li terim için lokal olmayan çözümü seçiyoruz.

$$\lambda^{\alpha}_{(C\theta)} = -\frac{\theta^{\rho\sigma}}{8}C^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\{[\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, A_\rho], (\partial_\sigma + D_\sigma)\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\}(\sigma^\kappa D_\kappa\bar{\lambda})^{-1}_{\alpha} \tag{5.60}$$

(5.59) ve (5.60) gönderimini (5.8) eylemine uyguladığımızda şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
I \;=\; \int d^4x\, tr\Big[&-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda} + \frac{1}{2}D^2 + \frac{\theta^{\rho\sigma}}{8}\Big(4F^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} - \\
&-F_{\sigma\rho}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + 2D^2F_{\rho\sigma} - 2\{F_{\rho\sigma}, \lambda\}\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda} - 4\lambda\sigma^\mu\{F_{\mu\rho}, D_\sigma\bar{\lambda}\}\Big) \\
&-\frac{i}{2}C^{\mu\nu}\Big(F_{\mu\nu}\bar{\lambda}^2 - \theta^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}\bar{\lambda}^2 - \frac{\theta^{\rho\sigma}}{4}\{F_{\sigma\rho}, F_{\mu\nu}\}\bar{\lambda}^2\Big)
\end{aligned}$$

$$+\frac{|C|^2}{8}\left(\bar{\lambda}^2\bar{\lambda}^2 - \frac{\theta^{\rho\sigma}}{4}\{F_{\sigma\rho}, \bar{\lambda}^4\}\right)\Bigg] \tag{5.61}$$

Ayar invaryansını sağlamak için eklediğimiz $C\theta$'lı terimlerin bedeli süpersimetri dönüşümlerinin (5.52)'deki gibi değişmesi oldu. λ'nın yeni süpersimetri dönüşümlerinin lokal olmayan bir kısmı olacaktır. Nonabelyen durum için süpersimetri dönüşümlerinin lokal kısımları bile çok karmaşık bir hal alır. (5.43)'in ayar invaryansını koruyan başka çözümlerine de bakmak açık bir problemdir.

SONUÇLAR

Bu tezde nonantikomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisi çeşitli açılardan incelenmiştir. İlk olarak bu teorinin S-dualite invaryanslığı çalışılmıştır. Nonantikomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisinin S-duali bir ana eylem oluşturularak türetilmiştir. Ana eyleme ait bölüşüm fonksiyonudan elde edilen orijinal ve dual teorinin bölüşüm fonksiyonlarının eşit olduğu gösterilmiş ve böylece nonantikomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik, abeliyen ayar teorisinin S-dualite invaryanslığı ispatlanmıştır.

S-dualite invaryanslığı sayesinde $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisinin yol açacağı bazı özellikler çalışılabilir, özellikle süpersimetri kırılımının gerçekçi bir modelini verip vermediğini anlamak için kullanılabilir. Bunun yapılabilmesi için tezdeki çalışmaların çeşitli açılardan geliştirilmesi gereklidir.

Tezde sunulan sonuçlar perturbasyonun en düşük mertebesindedir. Ana eyleme tek–ilmekten gelecek katkılar hesaplanarak buradan elde edilecek teorilere bakılmalıdır. Bunların yapılabilmesi için S-dualite invaryanslığının nonantikomutatiflik parametresi C ye göre daha yüksek mertebelerde korunup korunmadığı da bulunmalıdır. $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(1)$ ayar teorisine tek-ilmekten gelecek katkılar hesaplanıp [57 - 59] bu teorinin duali oluşturulabilir. Bu uygulama $U(N)$ durumuna genelleştirilebilir [60]. Süpersimetrik $U(N)$ ayar teorisinin S-dualite özellikleri incelenebilir ama bunun için yeni teknikler geliştirmek gereklidir.

Tezde daha sonra $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik $U(N)$ ayar teorisi nonkomutatif koordinatlarda çalışılmıştır. Bileşen alanlar ve yıldız çarpımı kullanılarak tanımlanan nonantikomutatif ve aynı zamanda nonkomutatif olan $N = \frac{1}{2}$

süpersimetrik $U(N)$ ayar teorisi tanımlanmıştır. İlgili eylemin ayar ve süpersimetri dönüşümleri altında invaryant olduğu gösterilmiştir. Bu teorinin nonantikomutatif ve aynı zamanda nonkomutatif uzayda tanımlanmış alanlar yerine, hesap yapması daha kolay olan komutatif alanlarla çalışılabilmesi için gerekli olan Seiberg-Witten gönderiminin genişletilmesi verilmiştir. Bu genelleştirilmiş gönderim kullanılarak nonkomutatif ve nonantikomutatif $U(1)$ teorisi ve nonkomutatif ve nonantikomutatif $U(N)$ teorisi eylemleri komutatif alanlar cinsinden elde edilmiştir. Nonabelyen durumda ayar invaryanslığını sağlamak için süpersimetri dönüşümleri
nonlokal olmuştur.

$U(1)$ ayar teorisi eyleminin, Θ açılımı (5.53), nonkomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik ayar teorisinin çeşitli yönlerini incelemek için kullanılabilir. Nonkomutatif elektrodinamikte olduğu gibi bu teorinin de tek-ilmekte (one-loop) renormalizasyon özellikleri hesaplanabilir [55] ve hareket denklemleri çözülebilir [56].

Bunların yanısıra nonkomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik ayar teorisinin S-dualite özelliklerine bakılmalıdır. Genelleştirilmiş Seiberg-Witten gönderimi ile ilgili olarak (5.43)'in ayar invaryanslığını koruyan başka çözümlere de bakılabilir. Tezde nonkomutatiflik parametresi Θ ya ve nonkomutatiflik parametresi C ye göre birinci mertebeden sonuçlar elde edilmiştir. S-dualitenin Θ ya göre daha yüksek mertebeden çalışılmasının çok ilginç sonuçlara yol açtığı görülmüştür [61]. Bu nedenle de nonkomutatif $N = \frac{1}{2}$ süpersimetrik ayar teorisinin S-dualite özelliklerinin Θ ya ve C ye göre daha yüksek mertebeden çalışılması yararlı olacaktır. Bunun çok kapsamlı bir problem olduğu açıktır.

KAYNAKLAR

[1] **Pauli, W.**, 1930. Letter of Heisenberg to Peierls , *Scientific Correspondence*, vol. II, 15, Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag 1985.

[2] **Snyder, H. S.**, 1947. Quantized space-time, *Phys. Rev.* **71**, 38.

[3] **Connes, A., Douglas, M., Schwarz, A.**, 1998. Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori, *JHEP* **02** 003.

[4] **Seiberg, N. and Witten, E.**, 1999. String theory and noncommutative geometry, *JHEP* **09** 032.

[5] **Grosse, H. and Wulkenhaar, R.**, 2005. Renormalisation of phi**4–theory on noncommutative R**4 in the matrix base, *Commun. Math. Phys.* **256**, 305.

[6] **Groenewold, H. J.**, 1946. On the Principles of elementary quantum mechanics, *Physica*, **12** (1946) pp. 405.

[7] **Moyal, J. E.**, 1949. Quantum mechanics as a statistical theory, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **45** 99.

[8] **Weyl, H.**, 1927. Quantenmechanik und Gruppentheorie *Z. Phys.* **46**, 1.

[9] **Wess, J. and Bagger, J.**, 1992. Supersymmetry and Supergravity, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[10] **Golfand, Yu. A. and Likhtman, E. P.**, 1971. Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance *JETP Lett.* **13** 323.

[11] **Fayet, P. and Ferrara, S.**, 1977. Supersymmetry, *Phys.Rep.* **32C** 1.

[12] **De Witt, B. S.**, 1984. Supermanifolds, *Cambridge University Press, Cambridge.*

[13] **Sohnius, M. F.**, 1985. Introducing supersymmetry, *Phys. Rep.* **128** 39.

[14] **Freund, P. G. O**, 1986. Introduction to supersymmetry, *Cambridge University Press, Cambridge.*

[15] **Dimopoulos, S., Raby, S. and Wilczek,F.**, 1981. Supersymmetry and the scale of unification, *Phys. Rev. D* **24**, 1681.

[16] **Witten, E.**, 1981. Dynamical Breaking Of Supersymmetry, *Nucl. Phys. B* **188**, 513.

[17] **Fayet, P.**, 1977. Spontaneously Broken Supersymmetric Theories Of Weak, Electromagnetic And Strong Interactions, *Phys. Lett. B* **69**, 489.

[18] **Fayet, P.**, 1975. Supergauge Invariant Extension Of The Higgs Mechanism And A Model For The Electron And Its Neutrino, *Nucl. Phys. B* **90**, 104.

[19] **Berkovits, N.**, 1996. A new description of the superstring, hep–th/9604123.

[20] **Berkovits, N.**, 2000. Super-Poincaré covariant quantization of the superstring, *JHEP* **0004** 018.

[21] **Ooguri, H. and Vafa, C.**, 2003. The C–Deformation of Gluino and Non-Planar Diagrams, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** 53.

[22] **Ooguri, H. and Vafa, C.**, 2004. Gravity induced C-deformation, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 405.

[23] **Moffat, J. W.**, 2001. Noncommutative and nonanticommutative quantum field theory, *Phys. Lett. B* 506 193.

[24] **Klemm, D., Penati, S. and Tamassia, L.**, 2003. Non(anti)commutative superspace, *Class. Quant. Grav.* **20**, 2905.

[25] **Seiberg, N.**, 2003 Noncommutative superspace, $N = 1/2$ supersymmetry, field theory and string theory, *JHEP* **06** 010.

[26] **de Boer, J., Grassi, P. A. and van Nieuwenhuizen, P.**, 2003. Noncommutative superspace from string theory, *Phys. Lett. B* **574** 98.

[27] **Grisaru, M. T.**, 2004. Nonanticommutative superspace and $N = 1/2$ WZ model, *Class.Quant.Grav.* **21** 1391.

[28] **Polchinski, J.**, 1995. Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4724.

[29] **Polchinski, J.**, 1996. Lectures on D-branes, hep–th/9611050.

[30] **Johnson, C. V.**, 2000. D-brane primer, hep–th/0007170

[31] **Casalbuoni, R.**, 1976. Relativity and supersymmetries, *Phys. Lett. B* **62**, 49.

[32] **Casalbuoni, R.**, 1976. On the quantization of systems with anticommuting variables, *Nuove Cim. A* **33** 389.

[33] **Schwarz, J. H. and van Nieuwenhuizen, P.**, 1982. Speculations concerning a fermionic substructure of space-time, *Lett. Nuovo Cim.* **34** 21.

[34] **Ferrara, S. and Lledo, M. A.**, 2000. Some aspects of deformations of supersymmetric field theories, *JHEP***0005** 008.

[35] **Paban, S., Sethi, S. and Stern, M.**, 2002. Noncommutativity and supersymmetry, *JHEP* 03 012.

[36] **Putz, V. and Wulkenhaar, R.**, 2003. Seiberg−Witten map for noncommutative super Yang-Mills theory, *Int.J.Mod.Phys. A* Vol **18** 3325.

[37] **Dayi, Ö. F., Ülker, K. and Yapışkan, B.**, 2003. Duals of noncommutative supersymmetric $U(1)$ gauge theory, *JHEP* **10** 010.

[38] **Saka, E. U. and Ülker, K.**, 2007. Dimensional reduction, Seiberg−Witten map and supersymmetry *Phys.Rev.* **D 75** 085009.

[39] **Dayı Ö. F. and Kelleyane, L. T.**, 2007. N=1/2 Supersymmetric gauge theory in noncommutative space, *Europhys. Lett.* **78**, 21004.

[40] **Dirac, P. A. M.**, 1931. Quantized Singularities in the Electromagnetic Field, *Proc. R. Soc.* **A133** 60.

[41] **Montonen, C. and Olive, D.**, 1977. Magnetic Monopoles as Gauge Particles? *Phys. Lett. B* **72**117.

[42] **Sen, A.**, 1994. Dyon-monopole bound states, selfdual harmonic forms on the multi-monopole moduli space, and $SL(2, Z)$ invariance in string theory, *Phys. Lett. B* **329** 217.

[43] **Dayı, Ö. F., Kelleyane, L. T. and Ülker, K.**, 2005. Duality invariance of non-anticommutative N=1/2 supersymmetric $U(1)$ gauge theory, *JHEP* **10** 035.

[44] **Buscher, T. H.**, 1987. A symmetry of string background field equations, *Phys. Lett. B* **194** 59.

[45] **Buscher, T. H.**, 1988. Path-integral derivation of quantum duality in nonlinear sigma models, *Phys. Lett. B* **201** 466.

[46] **Ganor, O. J., Rajesh, G. and Sethi, S.**, 2000. Duality and noncommutative gauge theory, *Phys. Rev. D* **62** 125008.

[47] **Dayı, Ö. F. and Yapışkan, B.**, 2004. Equivalence of partition functions for noncommutative $U(1)$ gauge theory and its dual in phase space, *JHEP* **0411** 064.

[48] **Seiberg, N. and Witten, E.**, 1994. Electric–magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory, *Nucl. Phys. B* **426** 19.

[49] **Dirac, P. A. M.**, 1964. Lectures on quantum mechanics, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York.

[50] **Fradkin, E. S.**, 1973. Hamiltonian formalism in covariant gauge and the measure in quantum gravity in *New Developments in Relativistic Quantum Field Theory*, Proceedings of the 10th Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, Poland.

[51] **Senjanovic, P.**, 1976. Path integral quantization of field theories with second class constraints, *Annals of Physics* **100** 227.

[52] **Terashima, S. and Yee, J - T.**, 2003. Comments on noncommutative superspace, *JHEP* **12** 053.

[53] **Mikulovic, D.**, 2004. Seiberg-Witten map for superfields on $N = (1/2, 0)$ and $N = (1/2, 1/2)$ deformed superspace, *JHEP* **05** 077.

[54] **Sämann, C. and Wolf, M.**, 2004. Constraint and Super Yang-Mills Equations on the Deformed Superspace R(h)(4—16), *JHEP* **03** 048.

[55] **Wulkenhaar, R.**, 2002. Nonrenormalizability of θ-expanded non-commutative QED, *JHEP* **03** 024.

[56] **Berrino, G., Cacciatori, S. L., Celi, A., Martucci, L. and Vicini, A.**, 2003. Noncommutative electrodynamics, *Phys. Rev. D* **67** 065021.

[57] **Alishahiha, M., Ghodsi, A. and Sadooghi, N.**, 2004. One-loop perturbative corrections to non(anti)commutativity parameter of $N = 1/2$ supersymmetric $U(N)$ gauge theory, *Nucl. Phys. B* **691** 111.

[58] **Lunin, O. and Rey, S. J.**, 2003. Renormalizability of non(anti)commutative gauge theories with $N = 1/2$ supersymmetry, *JHEP* **0309** 045.

[59] **Jack, I., Jones, D. R. T. and Worthy, L. A.**, 2005. One-loop renormalisation of $N = 1/2$ supersymmetric gauge theory, *Phys. Lett. B* **611** 199.

[60] **Jack, I., Jones, D. R. T. and Worthy, L. A.**, 2005. One-loop renormalisation of general $N = 1/2$ supersymmetric gauge theory, *Phys. Rev. D* **72** 065002.

[61] **Rodrigues, D. C. and Wotzasek, C.**, 2006. Issues on 3D noncommutative electromagnetic duality *Phys. Rev. D* **74** 085027.

EK 1: BAZI KONVANSİYONLAR

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{12} = \quad 1 \quad &= -\epsilon_{21} \\
\epsilon_{12} &= \epsilon^{12} \\
\epsilon_{11} &= \epsilon_{22} = 0 \\
\xi Q &= \xi^{\alpha} Q_{\alpha} \\
\bar{Q}\bar{\xi} &= \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \\
\psi^{\alpha} &= \epsilon^{\alpha\beta} \psi_{\beta} \\
\psi_{\alpha} &= \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{\beta}
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

Sigma matrisleri

$$
\begin{aligned}
\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} &= \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\alpha\beta} \sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{m} \\
\bar{\sigma}^{0} &= \sigma^{0} \\
\bar{\sigma}^{1,2,3} &= -\sigma^{1,2,3}
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^{mn}{}_{\alpha}{}^{\beta} &= \frac{1}{4}(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{n} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{m} \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\beta}) \\
\bar{\sigma}^{mn\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &= \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^{m} - \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^{n}) \\
\sigma^{mn}{}_{\alpha}{}^{\alpha} &= 0
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Gamma matrisleri

$$
\begin{aligned}
\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

Ek 2: FERMİYONİK TÜREVLE İLGİLİ KONVANSİYONLAR

Tüm hesaplamalarda [9] notasyonu kullanılmıştır.

Tüm türevler soldan alınmıştır.

$$\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial\theta^\beta} = \delta^\alpha_\beta, \quad \frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\theta_\beta} = \delta^\beta_\alpha, \quad \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} \tag{B.1}$$

Kanonik momentum:

$$\Pi_\alpha = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\lambda^\alpha} \quad \Rightarrow \Pi^\alpha = \epsilon^{\beta\alpha}\Pi_\beta \quad (\theta^\alpha\Pi_\alpha = \theta_\alpha\Pi^\alpha) \tag{B.2}$$

Poisson parantezleri:

$$\{F_1, F_2\} = \Big(\frac{\partial F_1}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial\Pi_\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial\Pi_\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial\theta^\alpha}\Big) \tag{B.3}$$

$$\Rightarrow \quad \{\theta^\alpha, \Pi_\beta\} = -\delta^\alpha_\beta, \quad \{\theta_\alpha, \Pi^\beta\} = -\delta^\beta_\alpha \tag{B.4}$$

Genelleştirilmiş Poisson parantezleri:

$$\begin{aligned}\{F, G\} \;=\; & \Big(\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i}\Big) + (-1)^{\epsilon_F}\Big(\frac{\partial_L F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L G}{\partial\Pi_\alpha} + \frac{\partial_L F}{\partial\Pi_\alpha}\frac{\partial_L G}{\partial\theta^\alpha}\Big) + \\ & +(-1)^{\epsilon_F}\Big(\frac{\partial_L F}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}\frac{\partial_L G}{\partial\bar\Pi_{\dot\alpha}} + \frac{\partial_L F}{\partial\bar\Pi_{\dot\alpha}}\frac{\partial_L G}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}\Big)\end{aligned} \tag{B.5}$$

Bağlar:

$$\begin{gathered}\phi_1^{0i} = p^{0i}, \quad \phi_2^{ij} = p^{ij}, \quad \Phi_1 = P_1, \quad \Phi_2 = P_2, \\ \chi_1^\alpha = \pi_1^\alpha, \quad \bar\chi_{1\dot\alpha} = \bar\pi_{1\dot\alpha} - \tfrac{i}{2g^2}(\lambda\sigma^0)_{\dot\alpha} + \tfrac{1}{2}(\lambda_D\sigma^0)_{\dot\alpha}, \\ \chi_2^\alpha = \pi_2^\alpha - \tfrac{i}{2g^2}(\bar\psi\bar\sigma^0)^\alpha - \tfrac{1}{2}(\bar\lambda_D\bar\sigma^0)^\alpha, \quad \bar\chi_{2\dot\alpha} = \bar\pi_{2\dot\alpha} \\ \phi^0_{D_1} = p^0_D, \quad \phi^i_{D_2} = p^i_D - \tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}, \quad \Phi_D = P_D, \\ \chi^\alpha_D = \pi^\alpha_D - \tfrac{1}{2}\bar\psi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{0\dot\alpha\alpha}, \quad \bar\chi_{D_{\dot\alpha}} = \bar\pi_{D_{\dot\alpha}} + \tfrac{1}{2}(\lambda\sigma^0)_{\dot\alpha} \\ \varphi_1^{0i} = -\tfrac{1}{2g^2}F^{0i} - \tfrac{i}{2g^2}C^{0i}(\bar\lambda\bar\lambda + \bar\psi\bar\psi) + \epsilon^{ijk}\partial_j A_{Dk} \\ \Delta_1 = \tfrac{1}{2g^2}D_1 + \tfrac{i}{2}D_D, \quad \Delta_2 = \tfrac{1}{2g^2}D_2 - \tfrac{i}{2}D_D, \\ \varphi_D = \tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_k F_{ij}, \\ \Delta_D = \tfrac{i}{2}(D_1 - D_2)\end{gathered} \tag{B.6}$$

Bağların Poisson parantezleri:

$$\{\phi_1^{0i}, \varphi_1^{0j}\} = -\tfrac{1}{g^2}\eta^{ij}, \quad \{\phi_2^{ij}, \phi^k_{D_2}\} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}, \quad \{\phi_2^{ij}, \varphi_D\} = -\tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_k$$

$$
\begin{gathered}
\{\phi^0_{D_1}, all\} = 0, \quad \{\phi^i_{D_2}, \varphi^{0j}_1\} = \epsilon^{ijk}\partial_k \\
\{\Phi_1, \Delta_1\} = -\tfrac{1}{2g^2}, \quad \{\Phi_1, \Delta_D\} = -\tfrac{i}{2}, \quad \{\Phi_2, \Delta_2\} = -\tfrac{1}{2g^2}, \quad \{\Phi_2, \Delta_D\} = \tfrac{i}{2}, \\
\{\Phi_D, \Delta_1\} = -\tfrac{i}{2}, \quad \{\Phi_D, \Delta_2\} = \tfrac{i}{2} \\
\{\chi^\alpha_1, \bar{\chi}_{1\dot{\alpha}}\} = -\tfrac{i}{2g^2}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^0_{\beta\dot{\alpha}}, \quad \{\chi^\alpha_1, \bar{\chi}_D\dot{\alpha}\} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^0_{\beta\dot{\alpha}}, \\
\{\bar{\chi}_{1\dot{\alpha}}, \varphi^{0i}_1\} = -\tfrac{i}{g^2}C^{0i}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \quad \{\bar{\chi}_{1\dot{\alpha}}, \chi^\alpha_D\} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^0_{\beta\dot{\alpha}} \\
\{\chi^\alpha_2, \bar{\chi}_{2\dot{\alpha}}\} = -\tfrac{i}{2g^2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{0\dot{\beta}\alpha}, \quad \{\chi^\alpha_2, \bar{\chi}_{D\dot{\alpha}}\} = -\tfrac{1}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{0\dot{\beta}\alpha} \\
\{\bar{\chi}_{2\dot{\alpha}}, \chi^\alpha_D\} = -\tfrac{1}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{0\dot{\beta}\alpha}, \quad \{\bar{\chi}_{2\dot{\alpha}}, \varphi^{0i}_1\} = -\tfrac{i}{g^2}C^{0i}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}
\end{gathered}
\tag{B.7}
$$

EK 3: NONANTİKOMUTATİFLİĞİN SİCİM TEORİSİ'NDEN ÇIKIŞI

Bu bölümde nonkomutatif süperuzayın sicim teorisinden nasıl çıktığını kısaca göstereceğiz. Sicim teorisi gravifoton fonunda çözüldüğünde nonantikomutatif uzay ortaya çıkmaktadır.

II. tip ST'de Lagrange yoğunluğu aşağıdaki gibidir.

$$L_{II} = \frac{1}{2}\tilde{\partial}x^\mu \partial x_\mu + p_\alpha \tilde{\partial}\theta^\alpha + \bar{p}_{\dot{\alpha}}\tilde{\partial}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \tilde{p}_\alpha \partial\tilde{\theta}^\alpha + \tilde{\bar{p}}_{\dot{\alpha}}\partial\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} \quad \text{(C.1)}$$

" ~ " yaşam alanı kiralitesini göstermektedir. Ayrıca $\partial = \frac{\partial}{\partial_z}$, $\tilde{\partial} = \frac{\partial}{\partial_{\tilde{z}}}$ olup z ve $\tilde{z}$ komplex koordinatlara karşlık gelmektedir.

$$\begin{aligned}
y^\mu &= x^\mu + i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + i\tilde{\theta}^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} \\
\bar{d}_{\dot{\alpha}} &= \bar{p}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial x_\mu - \theta\theta\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial(\theta\theta) \\
q_\alpha &= -p_\alpha - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial x_\mu + \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\partial\theta_\alpha - \frac{3}{2}\partial(\theta_\alpha\bar{\theta}\bar{\theta}) \\
\tilde{\bar{d}}_{\dot{\alpha}} &= \tilde{\bar{p}}_{\dot{\alpha}} - i\tilde{\theta}^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\tilde{\partial}x_\mu - \tilde{\theta}\tilde{\theta}\tilde{\partial}\tilde{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\tilde{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}\tilde{\partial}(\tilde{\theta}\tilde{\theta}) \\
\tilde{q}_\alpha &= -\tilde{p}_\alpha - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}}\tilde{\partial}x_\mu + \frac{1}{2}\tilde{\bar{\theta}}\tilde{\bar{\theta}}\tilde{\partial}\tilde{\theta}_\alpha - \frac{3}{2}\tilde{\partial}(\tilde{\theta}_\alpha\tilde{\bar{\theta}}\tilde{\bar{\theta}})
\end{aligned} \quad \text{(C.2)}$$

Yukardaki değişken dönüşümlerini yaparsak Lagrange yoğunluğu şu hale gelir.

$$L_{II} = \frac{1}{2}\tilde{\partial}y^\mu \partial y_\mu - q_\alpha\tilde{\partial}\theta^\alpha + \bar{d}_{\dot{\alpha}}\tilde{\partial}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \tilde{q}_\alpha\partial\tilde{\theta}^\alpha + \tilde{\bar{d}}_{\dot{\alpha}}\partial\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} + \text{tam türev terimleri} \quad \text{(C.3)}$$

Sabit bir gravifoton alanı fon olarak eklemek için Lagrange yoğunluğuna aşağıdaki terimin eklenmesi gerekir.

$$F^{\alpha\beta}q_\alpha\tilde{q}_\beta \quad \text{(C.4)}$$

Burada $F^{\alpha\beta}$ self dual olarak alınmıştır. Trivial alanları ihmal edersek Lagrange yoğunluğu aşağıdaki gibidir.

$$L_{II} = -q_\alpha\tilde{\partial}\theta^\alpha - \tilde{q}_\alpha\partial\tilde{\theta}^\alpha + \alpha' F^{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta \quad \text{(C.5)}$$

q ve $\tilde{q}$'nun hareket denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}\theta^\alpha &= \alpha' F^{\alpha\beta}q_\alpha\tilde{q}_\beta \\
\partial\tilde{\theta}^\alpha &= -\alpha' F^{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta
\end{aligned} \quad \text{(C.6)}$$

efektif Lagrange yoğunluğu da aşağıdaki hali alır.

$$L_{\text{eff}} = \Big(\frac{1}{\alpha'^2 F}\Big)_{\alpha\beta} \partial\tilde{\theta}^{\alpha}\tilde{\partial}\theta^{\beta} \tag{C.7}$$

Buradan da koordinatların nonantikomutatifliği çıkar

$$\{\theta^{\alpha}, \theta^{\beta}\} = \alpha'^2 F^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta} \neq 0 \tag{C.8}$$

Dolayısıyla gravifoton fonunun daha önce belirtilen deformasyona denk geldiği görülmüş olur.

ÖZGEÇMİŞ

Lara T. Kelleyane-Özharar, 1975 yılında İstanbul'da doğdu. 1993 yılında Beyoğlu Anadolu Lisesi'nden mezun olduktan sonra İstanbul Teknik Üniversitesi Fizik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. Aynı bölümde 2002 yılında yüksek lisans ve 2008 yılında doktora eğitimini tamamladı. 2000-2007 yılları arasında İstanbul Teknik Üniversitesi Fizik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalıştı. Evli ve bir çocuk annesidir.