

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**EĞRİ UZAY-ZAMANDA DIRAC-TİPİ İŞLEMCİLERİN SİMETRİLERİ
VE KILLING-YANO FORMLARI**

Ümit ERTEM

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2009

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Ümit ERTEM tarafından hazırlanan “Eğri Uzay-Zamanda Dirac-Tipi İşlemcilerin Simetrileri ve Killing-Yano Formları” adlı tez çalışması 17/09/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Satılmış ATAĞ

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Metin ÖNDER

Hacettepe Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

Üye: Prof. Dr. Bekir Sıtkı KANDEMİR

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Bayram TEKİN

Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Orhan ATAKOL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

EĞRİ UZAY-ZAMANDA DIRAC-TİPİ İŞLEMCİLERİN SİMETRİLERİ VE KILLING-YANO FORMLARI

Ümit ERTEM

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Manifoldlar üzerinde Clifford hesabı ve spinör hesabı çalışılmıştır. Killing ve konformal Killing vektör alanlarının genellemeleri olan Killing-Yano (KY) ve konformal Killing-Yano (CKY) formları incelenmiştir. Küresel simetrik uzay-zamanlar üzerinde KY formlarının açık ifadelerinin hesaplamaları yapılmıştır. Etkileşim terimi içeren ve içermeyen eğri uzay-zamandaki Dirac denkleminin birinci mertebeden simetrisi elde edilmiştir. Etkileşim teriminin olduğu durumda Dirac denkleminin simetrisinin kuvvet alanı ile Clifford sıradeğişen KY formlarından yazılabileceği bulunmuştur. Dirac denkleminin diferansiyel formlara bir genellemesi olarak Kähler denklemi ve birinci mertebeden simetrisi çalışılmıştır. Korunum yasaları ve KY formları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. KY formlarından inşa edilen temel kütleçekimsel korunumlu akımlar elde edilmiştir. Bazı özel durumlar için bazı temel geometrik bağıntılar bulunmuştur.

2009, 85 sayfa

Anahtar Kelimeler: Clifford Hesabı, Dirac İşlemcisi, Hodge-de Rham İşlemcisi, Simetrisi, Killing-Yano Formları.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SYMMETRIES OF DIRAC-LIKE OPERATORS AND KILLING-YANO FORMS ON CURVED SPACE-TIME

Ümit ERTEM

Ankara University
Graduate School of Natural Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Clifford calculus and spinor calculus on manifolds are studied. As generalizations of Killing and conformal Killing vector fields, Killing-Yano (KY) and conformal Killing-Yano (CKY) forms are considered. Calculations for explicit forms of KY forms on spherically symmetric space-times are done. First-order symmetries of Dirac equation with and without interaction terms on a curved background are established. It has been seen that in the existence of a interaction term, the symmetries of the Dirac equation are written from KY forms which Clifford commute with the force field. As a generalization of the Dirac equation to the differential forms, Kähler equation and its first-order symmetries are studied. Relations between conservation laws and KY forms are also considered. Basic gravitational conserved currents constructed from KY forms are established. Some basic geometric relations for some special cases are found.

2009, 85 pages

Key Words: Clifford Calculus, Dirac Operator, Hodge-de Rham Operator, Symmetries, Killing-Yano Forms.

TEŞEKKÜR

Eğri Uzay-Zamanda Dirac-Tipi İşlemcilerin Simetrileri ve Killing-Yano Formları konulu doktora tezi süresince çalıőmalarımızı birlikte yürüttüğümüz danışman hocam, sayın Prof. Dr. Abdullah VERÇİN 'e, sayın Prof. Dr. Metin ÖNDER 'e ve sayın Özgür AÇIK'a teşekkür ederim. Ayrıca doktora öğrenimim ve tez çalıőmam boyunca bana burs desteği sağlayan TÜBİTAK 'a da teşekkür ederim.

Ümit ERTEM

Ankara, Eylül 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. MANİFOLDLAR ÜZERİNDE CLIFFORD HESABI VE SPİNÖR HESABI.....	6
2.1 Manifoldlar Üzerinde Dış Cebir ve Bazı İşlemciler.....	6
2.2 Bağlantı ve Eğrilik.....	9
2.3 Manifoldlar Üzerinde Clifford Hesabı.....	12
2.3.1 Hodge-de Rham işlemcisi.....	13
2.3.2 Killing vektör alanlarına göre Lie türevinin türev özelliği.....	15
2.4 Manifoldlar Üzerinde Spinör Hesabı.....	16
2.5 Dirac ve Kähler Denklemleri.....	18
3. KILLING-YANO VE KONFORMAL KILLING-YANO FORMLARI.....	20
3.1 Killing Vektörleri ve Konformal Killing Vektörleri.....	20
3.2 Killing-Yano Formları.....	24
3.3 Konformal Killing-Yano Formları.....	25
3.3.1 CKY denkleminin Hodge değişmezliği.....	26
3.3.2 CKY denkleminin konformal kovaryantlığı.....	27
3.3.3 CKY denkleminin integrallenebilirlik koşulu.....	27
3.3.4 Ko-kapalı CKY formları ve KY formları arasındaki izomorfizm.....	29
4. EĞRİ UZAY-ZAMANDA DIRAC-TİPİ İŞLEMCİLERİN SİMETRİLERİ.....	30
4.1 Kütsüz Dirac Denkleminin Birinci Mertebe Simetrileri.....	30
4.2 Kütleli Dirac Denkleminin Birinci Mertebe Simetrileri.....	34
4.3 Kütleli Kähler Denkleminin Birinci Mertebe Simetrileri.....	36
4.4 Etkileşimli Dirac Denkleminin Simetrileri.....	38
4.4.1 Dinamik simetri koşulu.....	41
4.4.2 Yano vektörleri ve eğrilik karakteristikleri.....	44
4.5 Jeodezik Denkleminin İlk İntegralleri ve Hareket Sabitleri.....	47

5. TEMEL KÜTLEÇEKİMSSEL AKIMLAR VE KY FORMLARI	50
5.1 İki Temel Korunumlu Akım	52
5.1.1 J_1 'in ko-tamlığı	53
5.1.2 J_2 'nin ko-kapalılığı	54
5.2 Özel p-form Akımları	56
5.2.1 1-form akımları	56
5.2.2 Yano vektör alanlarının dualleri için akımlar	57
5.3 Bazı Özel Manifoldlar Üzerinde Korunumlu Akımlar	58
5.3.1 Sabit eğrilikli uzay-zamanlar	59
5.3.2 Einstein manifoldları	60
6. SONUÇ	62
KAYNAKLAR	64
EKLER	68
EK A. KÜRESEL SİMETRİK UZAY-ZAMANLARDA KY FORMLARI	69
EK B. SCHWARZSCHILD VE REISSNER-NORDSTRÖM UZAY-ZAMANLARI İÇİN KÜTLELİ DIRAC DENKLEMİNİN SİMETRİ CEBİRİ	79
EK C. BÜZÜLMÜŞ BIANCHI ÖZDEŞLİKLERİ	82
EK D. $\nabla_k \mathcal{R} = 0$ İÇİN ALTERNATİF BİR İSPAT	84
ÖZGEÇMİŞ	85

SİMGELER DİZİNİ

g	Metrik tensör
$\{X_a\}$	Vektör alanlarının bazı
$\{e^a\}$	1-formların bazı
\wedge	Dış çarpım
\vee	Clifford çarpımı
η	Homojen tensörler üzerinde otomorfizm
d	Dış türev işlemcisi
δ	Ko-türev işlemcisi
i_V	V vektörüne göre iç türev işlemcisi
$*$	Hodge yıldız işlemcisi
L_X	X vektörüne göre Lie türevi
∇_X	X vektörüne göre kovaryant türev
S_X	X vektörüne göre spinör kovaryant türevi
Δ	Laplace-Beltrami işlemcisi
ω^{ab}	Bağlantı 1-formları
T^a	Burulma 2-formları
R^{ab}	Eğrilik 2-formları
P^a	Ricci 1-formları
\mathfrak{R}	Eğrilik skaleri
G^a	Einstein $(n-1)$ -formları
C^{ab}	Konformal 2-formları

$\mathbf{R}(X, Y)$	Eğrilik işlemcisi
$\mathbf{S}(X, Y)$	Spinörler için eğrilik işlemcisi
D	Kovaryant dış türev
d	Hodge-de Rham işlemcisi
\mathcal{S}	Dirac işlemcisi
K	Killing vektör alanı
\mathcal{L}_K	K Killing vektörüne göre spinör Lie türevi
A	Potansiyel 1-formu
F	Kuvvet alanı
$\omega_{(p)}$	Killing-Yano p -formu
$I(\mathbf{R})$	Eğrilik endomorfizmi
π	Ölçek işlemcisi
L	Birinci mertebe lineer simetri işlemcisi
J	Korunumlu akım

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge A.1 Çeşitli küresel simetrik fiziksel uzay-zamanlar için KY formlarının sayısı.....	70
---	----

1. GİRİŞ

Simetri işlemcileri, diferansiyel denklemlerin incelenmesinde önemli rol oynayan ve denklemin bir çözümünü başka bir çözümüne götüren işlemcilerdir. Simetri işlemcileri kullanılarak, denklemin değişkenlere ayırma yöntemiyle çözülmesi, korunan fiziksel niceliklerin belirlenmesi, bilinen çözümler kullanılarak bilinmeyen tam çözümlerin bulunması ve diferansiyel denklemdeki işlemcilerin spektrumlarının elde edilmesi mümkün olabilir. Bir pseudo-Riemann manifold üzerinde tanımlanan bir diferansiyel denklemin simetri işlemcilerinin incelenmesi manifoldun izometrilere ile ilişkilidir.

Uzay-zaman metriğinin izometrilere yerel üreticileri Killing vektör alanlarıdır ve bu üreticiler korunum yasalarına yol açarlar. Killing vektör alanlarının akış değişmezleri korunumlu nicelikleri tanımlarlar. Ancak, 1970'lerin başından bu yana, verilen bir uzay-zamanın birçok ilginç özelliğinin metriğin gizli simetrisi ile ilgili olduğu anlaşılmıştır. Bu gizli simetrisi yüksek mertebeden tensörel nesnelere ilişkilidirler ve ek korunum yasaları sağlarlar (Walker and Penrose 1970, Hughston, Penrose, Sommers and Walker 1972, Penrose 1973). Bu gizli simetrisinin ve ilişkili korunumlu niceliklerin arkasındaki matematiksel yapının temel yapıtaşları: simetrik Killing tensörleri, Killing-Yano (KY) formları, konformal Killing tensörleri ve konformal Killing-Yano (CKY) formlarıdır. Bunları tanımlayan bağıntılar, Killing vektörleri ve konformal Killing vektörlerinin tanımlayıcı bağıntılarının doğal genelleştirilmeleridir. Bu yüksek mertebeden nesnelere, tamamen metriğin kendisi tarafından belirlenmelerine rağmen izometrisiyle ya da konformal dönüşümlerle doğrudan ilişkili değildirler. Birçok durumda bu ek korunumlu nicelikler, ele alınan problemin tam integre edilebilmesini sağlarlar. Walker and Penrose (1970) ve Penrose (1973)'de gösterildiği gibi ikinci mertebeden simetrik bir Killing tensörünün varlığı Kerr uzay-zamanındaki jeodezik denkleminin tam integre edilebilmesine yol açar (Carter 1968, Carter and McLenaghan 1979). KY ve CKY formlarını içeren diğer araştırma alanları ve diğer kaynaklar için Benn, Charlton and Kress (1997), Collinson and Howarth (2000), Frolov and Kubiznak (2007), Frolov and Kubiznak (2008) ve Kubiznak (2008)'e bakılabilir.

KY formları, null ve non-null shear-free kongrüansların birleşik bir betimlenmesinde de önemli bir rol oynarlar (Benn 1994) ve çoğunlukla astrofizik ve akışkanlar mekaniği literatüründe karşılaşılan kuvvetsiz (force-free) alanların (rotasyonel (curl) işlemcisinin konuma bağlı özdeğerlere sahip diverjanssız özvektörleri) araştırılmasında önemlidirler (Benn and Kress 1996, Benn, Charlton and Kress 1997, Kress 1997). Dik tümleyeni üzerinde konformal dönüşümler üreten bir teğet vektörü, kendi integral eğrileri için shear-free kongrüansın üreticisi olarak adlandırılır. Shear-free denklemi, konformal Killing denkleminin bir genelleştirilmesidir.

Bu yüksek mertebeden tensörel nesnelere ortaya çıktığı önemli bir alan da eğri uzay-zamanda etkileşimli ya da etkileşimsiz hareketi betimleyen Dirac-tipi denklemlerin simetri işlemcilerinin analizidir. CKY formları kütleli Dirac denkleminin simetrisinde rol alırken, KY formları eğri uzay-zamanda kütleli ve kütleli Dirac denkleminin birinci mertebeli simetrisinin oluşturulmasında kullanılır. Dört boyutlu Lorentz uzay-zamanı bu işlemlerin en çok uygulandığı durumdur. Bu bağlamdaki ilk çalışmalar Carter, McLenaghan ve Kamran tarafından yapılmıştır (Carter 1977, Carter and McLenaghan 1979, Kamran and McLenaghan 1984). Bu çalışmalarda elde edilen ve dört boyutta elektromanyetik etkileşimlerin yokluğundaki kütleli ve kütleli Dirac denklemleri için geçerli olan sonuçlar, Benn, Charlton ve Kress tarafından herhangi bir boyut ve imzaya genelleştirilmiştir (Benn and Charlton 1997, Benn and Kress 2004, Benn and Kress 2005).

Ek etkileşimlerin yokluğunda, uzay-zamanın bütün KY ve CKY formları herhangi bir fazladan kısıtlama olmaksızın simetri işlemcilerinin inşasında rol alırlar. Ancak, etkileşimlerin varlığı durumunda, formların simetri işlemcilerinin inşasında kullanılmasını kısıtlayan bazı ek koşullar ortaya çıkar. Dört boyutlu eğri uzay-zaman için bu kısıtlamalar ilk kez McLenaghan and Spindel (1979)'da ortaya konulmuştur. Bu çalışmada, elektromanyetik bir etkileşimin varlığında Dirac denklemleri ile sıra değişen en genel birinci mertebeli simetri işlemcilerinin aranması sonucu simetri işlemcilerinin, alanın kendisini de içeren bazı ek koşulları sağlayan KY formlarından inşa edilebileceği bulunmuştur.

Killing vektörleri ile korunum yasaları arasındaki bilinen ilişkiden yola çıkılarak KY formlarından üretilen korunan nicelikler inşa edilebilir. n -boyutlu bir uzay-zamanın asimptotik uzay-zamanının simetrilerine karşılık gelen Killing vektörleri kullanılarak ADM korunumlu yükü, uzaysal sonsuzluktaki $(n-2)$ -küreler üzerinden alınan bir integral şeklinde yazılabilir (Arnowitt, Deser and Misner 1960). KY formları kullanılarak da bu yüklerin genelleştirilmeleri olan ve bir KY p -formu için uzaysal sonsuzluktaki $(n-p-2)$ -küreler üzerinden alınan integrallerle ifade edilen Y-ADM yükleri tanımlanabilir (Kastor and Traschen 2004, Cebeci, Sarıoğlu and Tekin 2006).

Bu tez çalışmasında özgün hesaplar olarak, en genel boyut ve imza için eğri uzay-zamanda elektromanyetik etkileşimli Dirac denkleminin simetri işlemcilerinin KY formlarından inşa edilebileceği görülmüş ve bu KY formlarının sağlaması gereken ek koşul elde edilmiştir. Ayrıca küresel simetrik bazı özel uzay-zamanlar için KY formlarının açık ifadeleri hesaplanmıştır. Bu açık hesaplar, KY formlarının cebirsel yapılarının incelenmesinde yararlı olabilir (Gibbons, Rietdijk and von Holten 1993, Cariglia 2004). Bunun yanı sıra, KY formları ile korunan nicelikler arasındaki ilişki incelenmiş ve daha önce literatürde bulunan korunan niceliklerden daha temel olan korunumlu akımlara ulaşılmıştır. Bu temel korunumlu akımlar kullanılarak da bazı geometrik bağıntılar bulunmuştur.

Tezin içeriği kısaca şu şekilde özetlenebilir. İkinci bölümde manifoldlar üzerinde Clifford hesabı ve spinör hesabı tanıtılmıştır. Öncelikle manifoldlar üzerinde tanımlanan dış cebir ve diferansiyel formlar üzerinde tanımlanan bazı işlemciler tartışılmış ve bağlantı ve eğrilik kavramlarıyla ilgili temel eşitlikler özetlenmiştir. Daha sonra manifoldlar üzerinde Clifford cebiri yapısı tanımlanmış ve Clifford hesabı sunularak bazı işlemciler tanıtılmıştır. Clifford cebirlerinin minimal sol ideallerinin elemanları olarak spinörler tanıtılmış ve manifoldlar üzerinde spinör hesabı anlatılmıştır. Ayrıca Dirac ve Kähler denklemleri ve fiziksel anlamları tartışılmıştır.

Üçüncü bölümde KY ve CKY formları incelenmiştir. Öncelikle manifoldun simetrilerini temsil eden Killing vektörleri ve konformal Killing vektörleri tanıtılmış ve bunların tanımlayıcı denklemlerine ve bazı önemli eşitliklere değinilmiştir. Daha sonra

Killing ve konformal Killing vektörlerinin yüksek mertebeye genelleştirilmeleri olarak KY ve CKY formlarının özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde eğri uzay-zamanda Dirac-tipi işlemcilerin simetrisi üzerinde durulmuştur. Kütleli Dirac denkleminin birinci mertebeli simetrisinin CKY formlarından inşa edilebileceği gösterilmiştir. Daha sonra kütleli Dirac denklemi durumunda birinci mertebeli simetri işlemcilerinin KY formlarından inşa edilmesi gerektiği bulunmuştur. Kütleli Kähler denklemi durumunda ise birinci mertebeli simetrisinin genelleştirilmiş KY formlarından inşa edilebileceği, ancak bu formların eğriliğe bağlı ek bir koşulu sağlamaları gerektiği gösterilmiştir. Etkileşimli Dirac denklemi durumunda ise birinci mertebeli simetri işlemcilerinin, kuvvet alanına bağlı ek bir koşulu sağlayan KY formları tarafından oluşturulabileceği bulunmuştur. Bunun sonrasında Yano vektörleri tanımlanmış ve manifoldun eğrilik karakteristiklerinin Yano vektörlerine göre büzülmeleri tartışılmıştır. Son olarak da etkileşimli Dirac denklemi durumunda KY formları için ortaya çıkan koşulun, jeodezik denkleminin ilk integralleri ve hareket sabitleri ile ilişkisi incelenmiştir. Bu ek simetri koşulunun elektromanyetik alanda hareket eden bir klasik parçacığın yörüngesi boyunca hareket sabitlerinin inşasında da kullanılabileceği gösterilmiştir.

Beşinci bölümde temel kütleçekimsel akımlarla KY formları arasındaki ilişki tartışılmıştır. Daha önce literatürde verilen ve KY formları ile manifoldun eğrilik karakteristiklerinden inşa edilen korunumlu akımın daha temel iki korunumlu akım cinsinden yazılabileceği ispatlanmıştır. Özel KY p -form durumları için bu temel akımların özel halleri incelenmiştir. Ayrıca bazı özel manifoldlar üzerinde temel korunumlu akımların aldığı durumlar incelenmiş ve bazı geometrik bağıntılara ulaşılmıştır.

Altıncı bölümde ise tez çalışmasından elde edilen temel sonuçlar özetlenmiş ve bu sonuçların daha sonraki araştırmalara genişletilmeleri tartışılmıştır.

Ayrıca Ek A'da küresel simetrik bazı özel uzay-zamanlardaki KY formlarının açık ifadelerinin hesaplanması verilmiştir. Schwarzschild, Reissner-Nordström, Robertson-

Walker, de Sitter ve Minkowski uzay-zamanları için KY 1-formları, KY 2-formları ve KY 3-formlarının açık ifadeleri sunulmuş ve her özel durumdaki sayıları bir tablo halinde özetlenmiştir. Ek B'de ise kütleli Dirac denkleminin birinci mertebeli simetri işlemcileri Schwarzschild ve Reissner-Nordström uzay-zamanları için açıkça hesaplanmış ve bu durumdaki simetri cebiri tartışılmıştır. Ek C'de ise temel korunumlu akımların ko-kapalılığının ve ko-tamlılığının ispatlanmasında kullanılan büzülmüş Bianchi özdeşlikleri açıkça türetilmiştir. Ek D'de ise temel korunumlu akımların özel hallerinde ortaya çıkan ve bir manifoldun eğrilik skalerinin herhangi bir Killing vektörüne göre kovaryant türevinin sıfır olduğunu söyleyen bağıntı için alternatif bir ispat sunulmuştur.

2. MANİFOLDLAR ÜZERİNDE CLIFFORD HESABI VE SPİNÖR HESABI

Bu bölümde, tezin içeriğinde bir bütünlük oluşturabilmek amacıyla, sonraki bölümlerde kullanılacak olan matematiksel kavramlar ve yapılar tanıtılmaktadır. Öncelikle manifoldlar üzerinde diferansiyel form kavramı ve dış cebir ile ilgili temel kavramlar verilmiş ve daha sonra da bağlantı ve eğrilik ifadeleri ile ilgili temel eşitlikler özetlenmiştir. Manifoldlar üzerinde tanımlanan Clifford çarpımı tanıtılarak diferansiyel formlar uzayının oluşturduğu Clifford cebiri yapısına değinilmiş ve Clifford cebirlerinin minimal sol ideallerinin elemanları olarak spinörler tanıtılmıştır (Benn and Tucker 1987).

2.1 Manifoldlar Üzerinde Dış Cebir ve Bazı İşlemciler

Boyutu n olan bir M manifoldu üzerinde vektör alanlarının bir bazı $\{X_a\}$ ile gösterilsin. Bu durumda 1-formların bazı $\{e^a\}$ şu şekilde tanımlanır;

$$e^a(X_b) = \delta_b^a.$$

Burada δ_a^b , Kronecker delta ifadesidir. M manifoldu üzerindeki p -formların vektör uzayı $\Gamma\Lambda^p M$ ile gösterilmek üzere birleşmeli dış çarpım işlemi

$$\begin{aligned} \wedge : \Gamma\Lambda^p M \times \Gamma\Lambda^q M &\longrightarrow \Gamma\Lambda^{p+q} M \\ \alpha, \beta &\longrightarrow \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

biçiminde tanımlandığında, $\Gamma\Lambda M = \bigoplus_{p=0}^n \Gamma\Lambda^p M$ bir dış cebir yapısı kazanır. Buradaki dış çarpım $\alpha \otimes \beta$ tensör çarpımının antisimetrik kısmı olarak tanımlanır ve bu çarpımın bir p -form α ve q -form β için

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \quad (2.1)$$

özellği vardır.

X bir vektör alanı olmak üzere, X 'e göre iç türev işlemcisi i_X ile gösterilir ve formun derecesini bir azaltan bir işlemcidir;

$$i_X : \Gamma\Lambda^p M \longrightarrow \Gamma\Lambda^{p-1} M.$$

İç türev, η otomorfizmine göre bir anti-türevdir;

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X \alpha \wedge \beta + \alpha^n \wedge i_X \beta .$$

Burada η otomorfizmi bir p -form α için aşağıdaki gibi tanımlıdır;

$$\alpha^n = (-1)^p \alpha . \quad (2.2)$$

İç türev işlemcisi için $i_X i_Y = -i_Y i_X$ ve dolayısıyla $i_X^2 = 0$ eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca α p -formu için e^a 1-formu ve i_{X_a} iç türevinden kurulan $\pi = e^a \wedge i_{X_a}$ ölçek işlemcisinin etkisi şu şekilde yazılabilir;

$$e^a \wedge i_{X_a} \alpha = p \alpha . \quad (2.3)$$

Formun derecesini bir arttıran dış türev işlemcisi d ile gösterilir;

$$d : \Gamma \Lambda^p M \longrightarrow \Gamma \Lambda^{p+1} M$$

ve benzer şekilde anti-türev ve nilpotent olma özellikleri vardır;

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d\alpha \wedge \beta + \alpha^n \wedge d\beta \\ d^2 &= 0 . \end{aligned} \quad (2.4)$$

(2.4) eşitliği Poincaré lemma olarak bilinir.

Dış cebirin elemanlarının antisimetriklik özelliği nedeniyle bir p -form, 1-form bazındaki p tane elemanın tüm farklı kombinasyonları tarafından belirlenir. Dolayısıyla

n boyutta p -formların uzayı $\Gamma \Lambda^p M$ 'nin boyutu $\binom{n}{p}$ ile verilir. Bu da, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

eşitliği nedeniyle, p -formların uzayı $\Gamma \Lambda^p M$ ile $(n-p)$ -formların uzayı $\Gamma \Lambda^{n-p} M$ 'nin boyutlarının aynı olduğu anlamına gelir. Bunun bir sonucu olarak, Hodge $*$ işlemcisi yardımıyla bu uzaylar arasında bir dualite tanımlanabilir;

$$* : \Gamma \Lambda^p M \longrightarrow \Gamma \Lambda^{n-p} M .$$

Hodge $*$ işlemcisi ise p -formlar uzayı üzerindeki metrik kullanılarak tanımlanır. M manifoldu üzerindeki metrik g , p -formlar uzayı üzerine bir g_p metriği indükler. g_p ikilineer olarak tanımlandığından ayrıştırılabilir p -formlar üzerindeki etkisinin bilinmesi yeterlidir. $A = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^p$ ve $B = \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \dots \wedge \beta^p$ şeklinde p -formlar olmak üzere p -formlar üzerindeki metrik aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$g_p(A, B) = \det \{g(\alpha^i, \beta^j)\}.$$

Buna göre Hodge * işlemini ise α ve β p -formları için şu şekilde tanımlanır;

$$\beta \wedge * \alpha = g_p(\beta, \alpha) z. \quad (2.5)$$

Burada $z = *1$ hacim formudur. Ayrıca * işlemini için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir;

$$\alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha \quad (2.6)$$

$$*(\alpha \wedge x) = i_{\tilde{x}} * \alpha. \quad (2.7)$$

Burada x 1-form ve \tilde{x} , x 'in metrik dualidir ve her Y vektör alanı için $i_Y x = g(\tilde{x}, Y)$ biçiminde tanımlıdır.

Dış türev ve * işlemcileri kullanılarak, formun derecesini bir azaltan ko-türev işlemcisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$\begin{aligned} \delta : \Gamma \Lambda^p M &\longrightarrow \Gamma \Lambda^{p-1} M \\ \delta &= *^{-1} d * \eta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ayrıca Laplace-Beltrami işlemcisi de dış türev ve ko-türev cinsinden yazılabilir;

$$\Delta = -(d\delta + \delta d). \quad (2.9)$$

Formlar üzerinde, bir X vektör alanına göre Lie türevi ifadesi de dış türev ve iç türev işlemcileri kullanılarak tanımlanabilir;

$$L_X = di_X + i_X d. \quad (2.10)$$

Lie türevinin sağladığı bazı eşitlikler aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} [L_X, d] &= 0 \\ [L_X, i_Y] &= i_{[X, Y]} \\ [L_X, L_Y] &= L_{[X, Y]}. \end{aligned}$$

Burada $[,]$ ifadesi bilinen sıradeğişim işlemini göstermektedir.

2.2 Bağlantı ve Eğrilik

n boyutlu bir M manifoldu üzerinde tanımlı fonksiyonların kümesi $F(M)$ ile ve vektör alanlarının kümesi de ΓTM ile gösterilsin. M üzerindeki $\nabla : \Gamma TM \times \Gamma TM \rightarrow \Gamma TM$ lineer bağlantısı, her $f, g \in F(M)$ ve $X, Y, Z \in \Gamma TM$ için aşağıdaki özellikleri sağlar;

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$\nabla_X(fY + gZ) = X(f)Y + f\nabla_X Y + X(g)Z + g\nabla_X Z .$$

∇_X ifadesine, X vektör alanına göre kovaryant türev adı verilir. Ayrıca $\nabla_X f = X(f)$ şeklindedir.

Bir X_b baz vektörünün diğer bir X_a baz vektörüne göre kovaryant türevi şu şekilde yazılır;

$$\nabla_{X_a} X_b = \omega^c_b(X_a)X_c . \quad (2.11)$$

Buradaki ω^a_b 'ler bağlantı 1-formları olarak adlandırılır. Bir 1-form bazı e^c 'nin bir X_a baz vektörüne göre kovaryant türevi ise aşağıdaki gibidir;

$$\nabla_{X_a} e^c = -\omega^c_b(X_a)e^b . \quad (2.12)$$

Kovaryant türev kullanılarak burulma işlemcisi $\mathbf{T}(X, Y)$ ve eğrilik işlemcisi $\mathbf{R}(X, Y)$, her $X, Y, U \in \Gamma TM$ için;

$$\mathbf{T}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

$$\mathbf{R}(X, Y)U = \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_{[X, Y]} U .$$

bağıntıları ile tanımlanabilir. 1-form bazı e^a ve bağlantı 1-formları ω^a_b cinsinden burulma 2-formları T^a ve eğrilik 2-formları R^a_b yazılabilir;

$$T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b \quad (2.13)$$

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b . \quad (2.14)$$

Bu ifadelerle sırasıyla birinci ve ikinci yapı denklemleri adı verilir. Ricci 1-formları P_a ve eğrilik skaleri \mathfrak{R} ise şu şekilde tanımlanır;

$$P_a = i_{X_b} R^b_a \quad , \quad \mathfrak{R} = i_{X^a} P_a . \quad (2.15)$$

Bağlantı 1-formları ile burulma 2-formları ve eğrilik 2-formlarını birbirine bağlayan bazı eşitlikler yazılabilir;

$$R^a_b \wedge e^b = dT^a + \omega^a_b \wedge T^b$$

$$dR^a_b + \omega^a_c \wedge R^c_b - R^a_c \wedge \omega^c_b = 0.$$

Bu eşitliklere sırasıyla birinci ve ikinci Bianchi özdeşlikleri adı verilir. Bu ifadeler aşağıdaki şekilde tanımlanan kovaryant dış türev işlemcisi yardımıyla daha kısa olarak yazılabilirler. Kovaryant dış türev işlemcisi D 'nin bir $(p+q)$ indisli form $S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ üzerindeki etkisi şu şekildedir;

$$\begin{aligned} DS^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &= dS^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \omega^{i_1}_{i_s} \wedge S^{i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \dots + \omega^{i_p}_{i_s} \wedge S^{i_1 \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_q} \\ &\quad - \omega^{j_s}_{j_1} \wedge S^{i_1 \dots i_p}_{j_2 \dots j_q} - \dots - \omega^{j_s}_{j_q} \wedge S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{s-1}} \end{aligned}$$

Buna göre Bianchi özdeşlikleri daha kısa olarak;

$$R^a_b \wedge e^b = DT^a \quad (2.16)$$

$$DR^a_b = 0 \quad (2.17)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca ikinci Bianchi özdeşliğine bir ve iki kez iç türev işlemcisinin uygulanmasıyla aşağıdaki büzölmüş Bianchi özdeşlikleri elde edilebilir;

$$P_b \wedge e^b = i_{X_a} DT^a \quad (2.18)$$

$$2 \wp_{p,q,r} i_{X_q} R_{pr} = \left(i_{X_p} i_{X_q} i_{X_r} DT_a \right) e^a + \wp_{p,q,r} i_{X_p} i_{X_q} DT_r \quad (2.19)$$

$$i_{X_q} P_p - i_{X_p} P_q = i_{X_p} i_{X_q} i_{X_a} DT^a \quad (2.20)$$

$$2 \left(i_{X_a} i_{X_q} R_{pr} - i_{X_p} i_{X_r} R_{aq} \right) = \wp_{p,q,r,a} i_{X_p} i_{X_q} i_{X_r} DT_a. \quad (2.21)$$

Burada $\wp_{p,q,r}$ ifadesi p, q ve r indisleri üzerinden devirsel toplamı göstermektedir. Birinci Bianchi özdeşlikleri için de benzer şekilde elde edilen bağıntılar Ek C'de gösterilmiştir.

Eğrilik 2-formları kullanılarak aşağıdaki şekilde Einstein $(n-1)$ -formları G_c tanımlanabilir;

$$G^c = R_{ab} \wedge *e^{abc}. \quad (2.22)$$

Burada $e^{abc} = e^a \wedge e^b \wedge e^c$ kısaltması kullanılmıştır. Ricci 1-formları ve eğrilik skalerinin (2.15)'deki tanımları kullanılarak bu ifade aşağıdaki biçimde de yazılabilir;

$$*^{-1}G_c = \Re e_c - 2P_c - 2i_{X_c}i_{X_b}DT^b. \quad (2.23)$$

Einstein $(n-1)$ -formlarının kovaryant dış türevi ise şu şekildedir;

$$DG^c = R_{ab} \wedge T^p \wedge *e^{abc}_p.$$

Benzer şekilde eğrilik karakteristikleri kullanılarak ikiden büyük boyutlar için konformal 2-form C_{ab} aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$C_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{n-2}(P_a \wedge e_b - P_b \wedge e_a) + \frac{1}{(n-2)(n-1)}\Re e_a \wedge e_b. \quad (2.24)$$

Bu tanımdan, doğrudan hesaplamayla görülebileceği gibi üç boyutta $C_{ab} = 0$ 'dır. Konformal 2-formu sıfır olan manifoldlar, konformal olarak düz manifoldlardır. Eğrilik 2-formlarının sağladığı eşitliklere benzer şekilde konformal 2-formlar da aşağıdaki eşitlikleri sağlar (burulmanın sıfır olduğu durumlar için);

$$C_{ab} \wedge e^b = 0$$

$$i_{X_a}i_{X_b}C_{pq} = i_{X_p}i_{X_q}C_{ab}$$

$$i_{X^a}C_{ab} = 0.$$

g metrik tensör olmak üzere ∇ bağlantısı için

$$\nabla g = 0 \quad (2.25)$$

eşitliği sağlanıyorsa, ∇ bağlantısına metrik uyumludur denir. Metrik uyumlu bağlantı için bağlantı 1-formları antisimetriklik koşulunu sağlar;

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba} \quad (2.26)$$

ve bağlantı 1-formları, 1-form bazı ve burulma 2-formları cinsinden yazılabilir;

$$2\omega_{ab} = e^d i_{X_a}i_{X_b}(de_d - T_d) + i_{X_b}(de_a - T_a) - i_{X_a}(de_b - T_b). \quad (2.27)$$

Ayrıca her X vektör alanı için Hodge $*$ işlemcisi ile ilgili aşağıdaki eşitlikler geçerlidir;

$$\nabla_X *1 = 0$$

$$\nabla_X * = *\nabla_X.$$

Metrik uyumlu ve burulması sıfır olan bir bağlantı tek olarak tanımlanabilir. Bu özelliklere sahip bağlantıya pseudo-Riemann bağlantı adı verilir. Pseudo-Riemann bir

bağlantı için dış türev ve ko-türev işlemcileri, bağlantı cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$e^a \wedge \nabla_{X_a} = d \quad (2.28)$$

$$i_{X^a} \nabla_{X_a} = -\delta. \quad (2.29)$$

Bundan sonraki hesaplamalarda aksi belirtilmedikçe pseudo-Riemann manifoldlar göz önüne alınacaktır.

2.3 Manifoldlar Üzerinde Clifford Hesabı

$\Gamma \Lambda^p M$, p -formların vektör uzayı olmak üzere $\Gamma \Lambda M = \bigoplus_{p=0}^n \Gamma \Lambda^p M$ üzerinde aşağıdaki

Clifford çarpımı işlemi tanımlanırsa $\Gamma \Lambda M$ bir Clifford cebiri yapısı kazanır;

$$e^a \vee e^b + e^b \vee e^a = 2g^{ab}. \quad (2.30)$$

Bu cebirin elemanlarına Clifford formları denir ve değişik dereceden formların toplamı olarak yazılabilirler. n boyutlu bir manifold için Clifford cebirinin boyutu 2^n 'dir. ϕ herhangi bir p -form olmak üzere, 1-form bazı ile ϕ 'nin Clifford çarpımı aşağıdaki gibi dış çarpım ve iç türev cinsinden yazılabilir;

$$e^a \vee \phi = e^a \wedge \phi + i_{X^a} \phi$$

$$\phi \vee e^a = e^a \wedge \phi^n - i_{X^a} \phi^n.$$

Bu ifadeler dış çarpım ve iç türev işlemlerinin Clifford çarpımı cinsinden yazılışlarını bulmak için kullanılabilir;

$$e^a \wedge \phi = \frac{1}{2} (e^a \vee \phi + \phi^n \vee e^a)$$

$$i_{X^a} \phi = \frac{1}{2} (e^a \vee \phi - \phi^n \vee e^a).$$

Bundan sonra Clifford çarpımı \vee işareti ile değil terimlerin yan yana yazılmasıyla gösterilecektir. Kovaryant türevin 1-form bazına etkisi ise (2.12)'den yararlanarak aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\nabla_X e^a = [\sigma_X, e^a] \quad (2.31)$$

burada

$$\sigma_X \equiv \frac{1}{4} \omega_{bc}(X) e^{bc} = \frac{1}{4} \nabla_X e^a \wedge e_a$$

şeklindedir ve $[\cdot, \cdot]$ sıradeğişimi işlemi, Clifford çarpımlarının sıradeğişimini göstermektedir. Dolayısıyla $\Phi = \Phi_I e^I$ herhangi bir homojen olmayan form olmak üzere (I ifadesi çoklu indisi göstermektedir) kovaryant türevin Φ üzerindeki etkisi;

$$\nabla_X \Phi = (\nabla_X \Phi_I) e^I + [\sigma_X, \Phi] \quad (2.32)$$

biçimindedir. Eğrilik işlemcisinin Φ üzerindeki etkisi ise aşağıdaki gibidir;

$$\mathbf{R}(X, Y) \Phi = [\mathfrak{R}_{XY}, \Phi]. \quad (2.33)$$

Buradaki \mathfrak{R}_{XY} ifadesi ise

$$\mathfrak{R}_{XY} = \nabla_X \sigma_Y - \nabla_Y \sigma_X - [\sigma_X, \sigma_Y] - \sigma_{[X, Y]}$$

şeklinde tanımlıdır. σ_X 'in tanımı kullanılarak bu ifade eğrilik 2-formları cinsinden yazılabilir;

$$\mathfrak{R}_{XY} = -\frac{1}{4} (i_X i_Y R_{bc}) e^{bc} = \frac{1}{2} e^a(X) e^b(Y) R_{ab}. \quad (2.34)$$

Burada ikinci eşitliği yazmak için burulmanın sıfır olduğu durumdaki (2.21) bağıntısı kullanılmıştır. Ayrıca burulmanın sıfır olduğu durumda aşağıdaki bağıntılar geçerlidir;

$$R^a_b e^b = P^a$$

$$P_a e^a = \mathfrak{R}$$

$$R_{ab} e^{ba} = \mathfrak{R}.$$

2.3.1 Hodge-de Rham işlemcisi

1-form bazı ve kovaryant türev kullanılarak Clifford formları üzerinde Hodge-de Rham işlemcisi tanımlanabilir (Benn and Tucker 1987);

$$d = e^a \nabla_{X_a}. \quad (2.35)$$

Bu ifade, Clifford çarpımının dış çarpım ve iç türev cinsinden yazılımı ile (2.28) ve (2.29) bağıntıları kullanılarak

$$d = d - \delta \quad (2.36)$$

şeklinde de yazılabilir. d ve δ işlemcilerinin aksine d işlemcisi diferansiyel formlar üzerinde homojen bir işlemci değildir: d işlemcisi formun derecesini bir arttırırken, δ

işlemcisi bir azaltır. Hodge-de Rham işlemcisinin karesi ise $d^2 = \delta^2 = 0$ özelliğinden dolayı homojendir ve (2.9) eşitliğindeki Laplace-Beltrami işlemcisine karşılık gelir;

$$d^2 = -(d\delta + \delta d) = \Delta. \quad (2.37)$$

Hodge-de Rham işlemcisinin karesi, kovaryant türev, eğrilik 2-formları ve eğrilik skaleri cinsinden yazılabilir. Bu ise Hodge-de Rham işlemcisinin herhangi bir ϕ homojen olmayan formu üzerine iki kez etkisi hesaplanarak görülebilir;

$$\begin{aligned} d^2\phi &= e^a \nabla_{X_a} (e^b \nabla_{X_b} \phi) \\ &= e^a (\nabla_{X_a} e^b) \nabla_{X_b} \phi + e^a e^b \nabla_{X_a} \nabla_{X_b} \phi \\ &= de^a (\nabla_{X_b} \phi) + \frac{1}{2} (e^a e^b + e^b e^a) \nabla_{X_a} \nabla_{X_b} \phi + \frac{1}{2} (e^a e^b - e^b e^a) \nabla_{X_a} \nabla_{X_b} \phi \end{aligned}$$

Son eşitlikteki ikinci terimde (2.30) ifadesi kullanılır ve üçüncü terimde uygun indis değişikliği yapılırsa;

$$\begin{aligned} d^2\phi &= de^a (\nabla_{X_a} \phi) + \nabla_{X_a} \nabla_{X^a} \phi + \frac{1}{2} e^{ab} [\nabla_{X_a}, \nabla_{X_b}] \phi \\ &= de^a (\nabla_{X_a} \phi) + \nabla_{X_a} \nabla_{X^a} \phi + \frac{1}{2} e^{ab} (\mathbf{R}(X_a, X_b) + \nabla_{[X_a, X_b]}) \phi \end{aligned}$$

elde edilir. Burada son eşitlikte eğrilik işlemcisinin tanımı kullanılmıştır. Son eşitlikteki son terim daha açık olarak

$$\frac{1}{2} e^{ab} \nabla_{[X_a, X_b]} \phi = \frac{1}{2} e^{ab} i_{X_a} i_{X_b} de^c \nabla_{X_c} \phi = -de^c \nabla_{X_c} \phi$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[X_a, X_b]$ ifadesi bileşenleri cinsinden yazılmış ve (2.3) özelliği kullanılmıştır. Ayrıca eğrilik işlemcisinin bir homojen olmayan form üzerindeki etkisi (2.33) ve (2.34) kullanılarak

$$\frac{1}{2} e^{ab} \mathbf{R}(X_a, X_b) \phi = -\frac{1}{4} (\mathfrak{R} \phi + e^{ab} \phi R_{ab})$$

bulunur. Böylece (2.36) ve (2.29) yardımıyla

$$d^2\phi = (\nabla_{X^a} + i_{X^b} \nabla_{X_b} e^a) \nabla_{X_a} \phi - \frac{1}{4} (\mathfrak{R} \phi + e^{ab} \phi R_{ab}) \quad (2.38)$$

elde edilir. Bu ifade

$$\nabla^2(X_a, X^a) = \nabla_{X_a} \nabla_{X^a} - \nabla_{\nabla_{X_a} X^a} = (\nabla_{X^a} + i_{X^b} \nabla_{X_b} e^a) \nabla_{X_a} \quad (2.39)$$

tanımı yapılarak aşağıdaki gibi de yazılabilir;

$$d^2 \phi = \nabla^2(X_a, X^a) \phi - \frac{1}{4} (\mathfrak{R} \phi + e^{ab} \phi R_{ab}). \quad (2.40)$$

2.3.2 Killing vektör alanlarına göre Lie türevinin türev özelliği

Clifford çarpımı işleminin metriği içermesi nedeniyle, bir V vektör alanına göre Lie türevi L_V , V bir Killing vektörü (yani $L_V g = 0$, bkz. Bölüm 3) olmadığı müddetçe Clifford çarpımları üzerinde bir türev işlemi olamaz. Bir Killing vektörü K 'ya göre bir Clifford formu ϕ 'nin Lie türevi, kovaryant türev ve Clifford sıradeğişimi cinsinden yazılabilir. Bir V vektör alanına göre Lie türevi L_V ve kovaryant türev ∇_V olmak üzere;

$$A_V = L_V - \nabla_V$$

tanımı yapılsın. A_V işlemi dış cebir üzerinde bir türev olduğundan herhangi bir ϕ homojen olmayan formu için

$$A_V \phi = A_V e^a \wedge i_{X_a} \phi$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki dış çarpım ve iç türev ifadeleri Clifford çarpımı cinsinden yazılırsa;

$$\begin{aligned} A_V \phi &= \frac{1}{4} (A_V e^a e_a \phi - A_V e^a \phi^\eta e_a + \phi e^a A_V e^a - e_a \phi^\eta A_V e^a) \\ &= \frac{1}{4} [A_V e^a \wedge e_a, \phi] + \frac{1}{2} i_{X_a} A_V e^a \phi - \frac{1}{4} (A_V e^a \phi^\eta e_a + e_a \phi^\eta A_V e^a) \end{aligned} \quad (2.41)$$

elde edilir. A_V işlemcisinin bazlar üzerindeki etkisi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$A_V X_a = m_a^b X_b, \quad A_V e^b = -m_a^b e^a.$$

Ayrıca A_V 'nin tanımından ve burulma sıfır özelliğinden $A_V X_a = -\nabla_{X_a} V$ yazılabilir ve dolayısıyla $A_V e^a \wedge e_a = d\tilde{V}$ bulunur. Burada \tilde{V} , V 'nin metrik duali olan 1-formdur. (2.41) ifadesindeki ikinci terim

$$\frac{1}{2}i_{X_a}A_V e^a \phi = -\frac{1}{2}m_a^a \phi$$

şeklinde ve üçüncü terim

$$-\frac{1}{4}(A_V e^a \phi^n e_a + e_a \phi^n A_V e^a) = \frac{1}{8}(m_{ba} + m_{ab})(e^b \phi^n e^a + e^a \phi^n e^b)$$

şeklinde yazılabilir. Bunun yanı sıra $g(A_V X_a, X_b) = m_{ab}$ olduğundan ve ∇ metrik uyumlu olduğundan $m_{ab} + m_{ba} = -(L_V g)(X_a, X_b)$ biçiminde yazılabilir. Bütün bu ifadeler (2.41)'de yerine yazılırsa;

$$A_V \phi = \frac{1}{4}[d\tilde{V}, \phi] + \frac{1}{4}(L_V g)(X_a, X^a)\phi - \frac{1}{8}(L_V g)(X_a, X_b)(e^b \phi^n e^a + e^a \phi^n e^b) \quad (2.42)$$

bulunur. Eğer V bir Killing vektörü K ise bu ifade aşağıdaki şekle dönüşür;

$$L_K \phi = \nabla_K \phi + \frac{1}{4}[d\tilde{K}, \phi]. \quad (2.43)$$

Kovaryant türev ve Clifford sıradegişimi işlemleri Clifford formları üzerinde türev özelliğine sahip olduğundan (2.43) ifadesi, bir Killing vektörüne göre Lie türevinin Clifford formları üzerinde türev özelliğine sahip bir işlemci olduğunu gösterir.

2.4 Manifoldlar Üzerinde Spinör Hesabı

\mathcal{A} bir cebir ve bir alt kümesi $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ olmak üzere, \mathcal{L} 'nin elemanlarının soldan \mathcal{A} 'nın elemanları ile çarpımı yine \mathcal{L} 'nin bir elemanı oluyorsa yani $\mathcal{A}\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ ise \mathcal{L} 'ye \mathcal{A} 'nın bir sol ideali denir. Eğer \mathcal{L} , başka sol ideallerin birleşimi olarak yazılamıyorsa o zaman minimal sol ideal olarak adlandırılır. Clifford cebirleri üzerinde de ilkel idempotentler (yani karesi kendine eşit ve başka idempotentler cinsinden yazılamayan izdüşüm işlemcileri) tanımlanarak minimal sol idealler inşa edilebilir. Clifford cebirinin bir minimal sol idealinin elemanlarına spinörler adı verilir. Özel olarak dört boyutta uygun izdüşüm işlemcileri kullanılarak dört tane minimal sol ideal tanımlanabilir. Dolayısıyla her bir minimal sol idealdeki spinörler dört bileşenlidir. Spinörler için bir baz $\{b_i\}$ olsun ve spinörler üzerindeki kovaryant türev S_X ile gösterilsin. Bu durumda, spinör bazı üzerine kovaryant türevin etkisi şöyle tanımlanır;

$$S_X b_i = \sigma_X b_i \quad (2.44)$$

burada σ_X , (2.31)'deki gibidir. Spinör bazı üzerindeki kovaryant türev tanımı (2.31)'de form bazı için tanımlanan kovaryant türevin bir minimal sol ideal üzerine izdüşümü alınarak yani sadece soldan etki göz önüne alınarak elde edilmiştir. $\psi = \psi^i b_i$ bir spinör olmak üzere kovaryant türevin ψ üzerindeki etkisi ise aşağıdaki gibidir;

$$S_X \psi = (\nabla_X \psi^i) b_i + \sigma_X \psi. \quad (2.45)$$

Spinörler için eğrilik işlemcisi;

$$\mathbf{S}(X, Y) = [S_X, S_Y] - S_{[X, Y]}$$

şeklinde tanımlanır ve bir ψ spinörü üzerindeki etkisi aşağıdaki gibidir;

$$\mathbf{S}(X, Y) \psi = \mathfrak{R}_{XY} \psi. \quad (2.46)$$

Burada \mathfrak{R}_{XY} 'nin (2.34)'deki ifadesi kullanılarak eğrilik işlemcisinin etkisi ise

$$\mathbf{S}(X, Y) \psi = -\frac{1}{4} i_X i_Y R_{ab} e^{ab} \psi = \frac{1}{2} e^a(X) e^b(Y) R_{ab} \psi. \quad (2.47)$$

olarak bulunur. Spinör kovaryant türevi kullanılarak spinörler üzerinde Hodge-de Rham işlemcisine benzer olarak Dirac işlemcisi ise aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathcal{S} = e^a S_{X_a}. \quad (2.48)$$

(2.35) ve (2.48)'deki gibi yazılabilen ve birinci mertebeden türev içeren işlemcilere genel olarak Dirac-tipi işlemciler adı verilir.

Dirac işlemcisinin karesi Hodge-de Rham işlemcisinininkine benzer şekilde hesaplanabilir. Ancak tek fark eğrilik işlemcisinin bir spinör üzerine etkisinin bu kez (2.47) ile tanımlanmasıdır. Böylece (2.38)'i elde ederken yapılan işlemler bu kez spinörler için tekrarlanırsa;

$$\mathcal{S}^2 \psi = (S_{X^a} + i_{X^b} \nabla_{X_b} e^a) S_{X_a} \psi - \frac{1}{4} \mathfrak{R} \psi \quad (2.49)$$

ifadesine ulaşılır. Benzer şekilde

$$S^2(X_a, X^a) = S_{X_a} S_{X^a} - S_{\nabla_{X_a} X^a} = (S_{X^a} + i_{X^b} \nabla_{X_b} e^a) S_{X_a} \quad (2.50)$$

tanımı yapılarak

$$\mathcal{S}^2 \psi = S^2(X_a, X^a) \psi - \frac{1}{4} \mathfrak{R} \psi \quad (2.51)$$

bulunur.

Spinörler üzerindeki Lie türevi tanımı da kovaryant türevdekine benzer şekilde minimal sol ideal üzerine izdüşüm alınarak bulunur. Buna göre (2.43)'deki ifade göz önüne alınarak spinörler üzerinde bir Killing vektörü K 'ya göre Lie türevi \mathcal{L}_K aşağıdaki gibi yazılır;

$$\mathcal{L}_K \psi = S_K \psi + \frac{1}{4} d\tilde{K} \psi . \quad (2.52)$$

(2.47)'de tanımlanan eğrilik işlemcisi kullanılarak spinör Lie türevi ile spinör kovaryant türevi arasındaki sıradışı ilişim bağıntısı ise aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$[\mathcal{L}_K, S_V] - S_{[K,V]} = \mathbf{S}(K, V) - \frac{1}{4} \nabla_V d\tilde{K} .$$

Bu ifade kullanılarak da spinör Lie türevlerinin kendi aralarındaki sıradışı ilişim bağıntısı

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] - \mathcal{L}_{[X,Y]} = -\frac{1}{4} L_X g(X_a, X_b) L_Y g(X^b, X_c) e^{ac}$$

şeklinde bulunabilir. Burada X ve Y 'den herhangi birisi konformal Killing vektörü ise (yani c bir fonksiyon olmak üzere $L_X g = cg$ biçiminde ise) sağ taraf sıfır olacağından, bu durumda

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$$

elde edilir. Bu da Killing vektör alanlarına göre spinör Lie türevlerinin cebir yapısını gösterir.

2.5 Dirac ve Kähler Denklemleri

Dirac, 1928 yılında 1/2 spinli görelî parçacıkların hareketlerini betimlemek amacıyla, bileşenleri ikinci mertebe Klein-Gordon denklemini sağlayan ancak kendisi birinci mertebeden olan bir denklem formüle etti. Spinörler üzerinde tanımlı olan bu denklem (2.48)'deki Dirac işlemcisi ve ψ spinörü cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$S\psi + iA\psi = m\psi . \quad (2.53)$$

Burada m kütleyi ve A ise Maxwell alanı $F = dA$ ile olan elektromanyetik etkileşmeyi göstermektedir. Bu denkleme alternatif olarak Kähler 1962 yılında bir homojen olmayan form ϕ için aşağıdaki denklemi önerdi;

$$d\phi + iA\phi = m\phi . \quad (2.54)$$

(2.37) kullanılarak ϕ homojen olmayan formunun p -form bileşenleri olan $S_p(\phi)$ 'lerin, elektromanyetik alanın yokluğunda aşağıdaki Klein-Gordon denklemini sağladıkları görülebilir;

$$\Delta S_p(\phi) = m^2 S_p(\phi).$$

Yani (2.54) denklemini Klein-Gordon denkleminin kareköküdür. Ancak, dört boyutlu bir uzay-zaman için diferansiyel formlar 16 bileşene sahipken, spinörlerin 4 bileşeni vardır. Dolayısıyla (2.54) denkleminin herhangi bir çözümü Dirac denkleminin çözümüne göre daha fazla bileşen içerecektir.

Minkowski uzay-zamanında, Clifford cebirinin herhangi bir elemanını minimal sol idealler üzerine izdüştürmek için dört tane birbirine dik ilkel idempotent kümesi kullanılabilir. Düz Minkowski uzay-zamanı için $e^a = dx^a$ olacak şekilde $\{x^a\}$ eylemsiz koordinatları seçilerek bir ortonormal baz tanımlanabilir. Bu paralel 1-form bazından oluşturulan ilkel idempotent $\{P_i\}$ 'ler de paralel olurlar; $\nabla_X P_i = 0$, $\forall X \in \Gamma TM$. Eğer $\varphi_i = \phi P_i$ şeklinde tanımlanırsa, φ_i bir minimal sol idealin elemanı olur. Dolayısıyla (2.54) denklemini sağdan P_i ile çarpılırsa;

$$d\varphi_i + iA\varphi_i = m\varphi_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.55)$$

elde edilir. Bu da Kähler denkleminin minimal sol idealler üzerindeki izdüşümlerinin çözümleri ile Minkowski uzay-zamanındaki Dirac denkleminin çözümlerinin özdeş olduğunu gösterir. Ancak genel bir eğri uzay-zaman için bu durum geçerli değildir. Kähler denkleminin bir genel çözümü, Dirac denkleminin bir çözümüne göre daha fazla serbestlik derecesine sahiptir. Bu da Kähler denkleminin, hareketleri Dirac denklemiyle betimlenen parçacıkların (örneğin elektron ve pozitron) doğasına ilişkin farklı bir bakış açısı sunabileceğini gösterir. Elektronun ve pozitronun iç serbestlik dereceleri, homojen olmayan statik bir manyetik alan altında (Stern-Gerlach deneyi) gözlenebilir. Buna benzer olarak güçlü bir homojen olmayan gravitasyon alanının daha fazla serbestlik derecesinin varlığını ortaya çıkarabileceği öne sürülebilir. Böyle bir deneyin yapılmamış olması bir yana bu durumda elektronun iki iç durumunun var olması göz önüne alınarak düzenlenmiş olan elementlerin periyodik tablosunun da yeniden anlamlandırılması gerekecektir.

3. KILLING-YANO VE KONFORMAL KILLING-YANO FORMLARI

Bu bölümde öncelikle bir manifoldun simetrilerini temsil eden Killing vektörleri ve konformal Killing vektörleri tanıtılmıştır (Benn and Tucker 1987, Thirring 1997). Daha sonra Killing ve konformal Killing vektörlerinin duallerinin yüksek mertebeli diferansiyel formlara genelleştirilmeleri olan ve manifoldun gizli simetrileri olarak adlandırılan Killing-Yano (KY) ve konformal Killing-Yano (CKY) formlarının özellikleri incelenmiştir. KY ve CKY formları daha sonra tartışılacak olan Dirac ve Kähler denklemlerinin simetri işlemcileri konusunda önemli bir rol oynayacaklardır.

3.1 Killing Vektörleri ve Konformal Killing Vektörleri

Killing vektörleri, bir pseudo-Riemann manifoldun yerel izometrilerini üreten vektör alanlarıdır. M ve N pseudo-Riemann manifoldlar olmak üzere, eğer $\varphi: M \rightarrow N$ düzgün bir diffeomorfizm ise ve M üzerindeki g_M ve N üzerindeki g_N metrik tensör alanları

$$g_M = \varphi^* g_N$$

şeklinde ilişkili ise φ 'ye bir düzgün izometridir denir. Burada $\varphi^*: \Gamma \Lambda N \rightarrow \Gamma \Lambda M$ ifadesi geri-çekme (pull-back) işlemini göstermektedir. $M = N$ özel durumunda φ 'ye M 'nin bir düzgün izometrisi denir. Eğer $\{\varphi_i\}$ 'ler M 'nin bu tür dönüşümlerinin bir kümesi ise, bu kümenin elemanları birleşim işlemi altında M 'nin izometri grubunu oluştururlar. Bu izometrileri üreten $\{K_i\}$ vektör alanlarına ise Killing vektörleri adı verilir.

L_X , X vektör alanına göre Lie türevini göstermek üzere, X ve Y vektör alanları için;

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}$$

olduğundan, M deki bir noktanın komşuluğunda Killing vektör alanları

$$[K_i, K_j] = c_{ij}^k K_k \quad (3.1)$$

şeklinde bir Lie cebiri oluştururlar. Burada $\{c_{ij}^k\}$ 'lar yapı sabitleridir. Yukarıda belirtilen izometri grubu M üzerindeki pseudo-Riemann yapının bir Killing simetrisini tanımlar; Killing vektörleri cebirindeki her bir K vektör alanı için, metrik tensör alanı

$$L_K g = 0 \quad (3.2)$$

eşitliğini sağlar. Genel olarak bir pseudo-Riemann manifold, izometrilere ve dolayısıyla Killing vektörlerine sahip olmayabilir. Dahası, M üzerindeki her bir metrik için Killing vektör alanlarının bir maksimum sayısı vardır. Bu sayı, M 'nin boyutu n olmak üzere $\frac{1}{2}n(n+1)$ 'dir.

Her $X \in \Gamma TM$ için daha önce tanımlanan $A_X = L_X - \nabla_X$ işlemcisi göz önüne alınsın. A_X , tensör alanları üzerinde bir türev işlemcisidir ve her f fonksiyonu için $A_X f = 0$ eşitliği sağlanır. Buna göre Y ve Z vektör alanları için aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$0 = A_X (g(Y, Z)) = (A_X g)(Y, Z) + g(A_X Y, Z) + g(Y, A_X Z).$$

∇ bağlantısı metrik uyumlu ($\nabla_X g = 0$) olduğundan $A_X g = L_X g$ yazılabilir. Dolayısıyla yukarıdaki ifade

$$g(A_X Y, Z) + g(Y, A_X Z) = -(L_X g)(Y, Z)$$

şekline dönüşür. Vektör alanları üzerinde Lie türevi $L_X Y = [X, Y]$ biçiminde yazılır. Dolayısıyla $A_X Y = [X, Y] - \nabla_X Y$ şeklindedir. Burulmanın sıfır olmasından da $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ yazılabileceğinden $A_X Y = -\nabla_Y X$ elde edilir. Buna göre yukarıdaki eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = (L_X g)(Y, Z).$$

Bu ifade, X 'in metrik duali olan \tilde{X} 1-formu cinsinden de yazılabilir;

$$i_Z \nabla_Y \tilde{X} + i_Y \nabla_Z \tilde{X} = (L_X g)(Y, Z). \quad (3.3)$$

Özel olarak K bir Killing vektörü ve \tilde{K} onun metrik duali olduğunda, bu denklem ($X = K$ için) Killing denklemi olarak adlandırılır ve aşağıdaki biçime dönüşür;

$$i_Z \nabla_Y \tilde{K} + i_Y \nabla_Z \tilde{K} = 0 \quad , \quad \forall X, Z \in \Gamma TM. \quad (3.4)$$

Dolayısıyla Killing vektörleri, Killing denklemini sağlayan \tilde{K} 1-formunun dualleri olarak da tanımlanabilirler. Killing denkleminin çözümlerine de Killing 1-formları adı verilir.

Killing 1-formlarının sağladığı denklem başka bir şekilde de ifade edilebilir. \tilde{Y} herhangi bir 1-form olmak üzere (2.28) kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$\begin{aligned} i_X d\tilde{Y} &= i_X (e^a \wedge \nabla_{X_a} \tilde{Y}) \\ &= (i_X e^a) \nabla_{X_a} \tilde{Y} - e^a \wedge i_X \nabla_{X_a} \tilde{Y} \\ &= 2\nabla_X \tilde{Y} - e^a \wedge (i_X \nabla_{X_a} + i_{X_a} \nabla_X) \tilde{Y}. \end{aligned}$$

Burada (3.3) denklemi kullanılarak

$$\nabla_X \tilde{Y} = \frac{1}{2} i_X d\tilde{Y} + \frac{1}{2} (L_Y g)(X, X_a) e^a \quad (3.5)$$

elde edilir. Dolayısıyla bir \tilde{K} Killing 1-formu için

$$\nabla_X \tilde{K} = \frac{1}{2} i_X d\tilde{K} \quad (3.6)$$

denklemi yazılabilir. Her iki tarafın i_X 'e göre iç türevi hesaplanırsa;

$$\delta \tilde{K} = 0 \quad (3.7)$$

eşitliği bulunur. Yani Killing 1-formları ko-kapalı olma özelliğine sahiptirler.

Killing 1-formlarının dış türevinin ko-türevlerinin sağladığı bir eşitliği bulmak amacıyla \tilde{Y} 1-formu ve V vektör alanı için aşağıdaki ifade göz önüne alınsın;

$$\nabla_V d\tilde{Y} = e^a \wedge \mathbf{R}(V, X_a) \tilde{Y} + d\nabla_V \tilde{Y} - e^a \wedge \nabla_{\nabla_{X_a} V} \tilde{Y}. \quad (3.8)$$

Bu ifade, eşitliğin sol tarafında $d = e^a \wedge \nabla_{X_a}$ eşitliği ve eğrilik işlemcisinin tanımı kullanılarak elde edilebilir. Ayrıca (3.5) ifadesinde X yerine $\nabla_{X_a} V$ alınır ve her iki taraf soldan e^a ile dış çarpılırsa;

$$e^a \wedge \nabla_{\nabla_{X_a} V} \tilde{Y} = \frac{1}{2} di_V d\tilde{Y} - \frac{1}{2} \nabla_V d\tilde{Y} + \frac{1}{2} (L_Y g)(\nabla_{X_a} V, X_b) e^{ab} \quad (3.9)$$

bulunur. Bu ifadede yeniden (3.5) eşitliği kullanılarak da

$$d\nabla_V \tilde{Y} = \frac{1}{2} di_V d\tilde{Y} + \frac{1}{2} \nabla_{X_b} (L_Y g)(V, X_a) e^{ba} + \frac{1}{2} (L_Y g)(\nabla_{X_b} V, X_a) e^{ba} \quad (3.10)$$

elde edilir. (3.9) ve (3.10) ifadeleri (3.8)'de yerine yazılır ve eğrilik işlemcisi, eğrilik 2-formları cinsinden yazılırsa aşağıdaki eşitliğe ulaşılır;

$$\nabla_V d\tilde{Y} = 2Y^a V^b R_{ab} + \nabla_{X_b} (L_Y g)(V, X_a) e^{ba}. \quad (3.11)$$

Burada Y^a ve V^b sırasıyla \tilde{Y} ve V 'nin bileşenleridir. (3.11)'in her iki tarafının iç türevi alınır ve ko-türev tanımı kullanılırsa;

$$\delta d\tilde{Y} = 2Y^a P_a - \nabla_{X_c} (L_Y g)(X^c, X_a) e^a + \nabla_{X_b} (L_Y g)(X^a, X_a) e^b \quad (3.12)$$

bulunur. Burada P_a Ricci 1-formlarıdır. Dolayısıyla Killing 1-formları için

$$\delta d\tilde{K} = 2K^a P_a \quad (3.13)$$

eşitliği geçerlidir. Burada K^a bir Killing 1-formunun bileşenleridir.

Killing vektörlerinin genelleştirilmeleri olarak konformal Killing vektörleri tanımlanabilir. λ bir fonksiyon olmak üzere

$$L_K g = 2\lambda g \quad (3.14)$$

eşitliğini sağlayan K vektör alanına bir konformal Killing vektörü adı verilir. (3.14) ifadesi (3.5) denkleminde kullanılır ve her iki tarafın i_X 'e göre iç türevi hesaplanırsa bir konformal Killing vektörünün duali olan \tilde{K} konformal Killing 1-formunun aşağıdaki eşitliği sağladığı görülür;

$$\delta \tilde{K} = -n\lambda. \quad (3.15)$$

Ayrıca (3.12) denkleminde de

$$\delta d\tilde{K} = 2K^a P_a + 2(n-1)d\lambda \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.5) denkleminde (3.14) ve (3.15) ifadeleri kullanılarak konformal Killing 1-formlarının sağladığı denklem ise aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\nabla_X \tilde{K} = \frac{1}{2} i_X d\tilde{K} - \frac{1}{n} \tilde{X} \wedge \delta \tilde{K}. \quad (3.17)$$

Killing-Yano ve konformal Killing-Yano formlarının gelecek iki kesimdeki tanımları, sırası ile (3.6) ve (3.17) bağıntıları genellenerek yapılacaktır.

3.2 Killing-Yano Formları

Vektör alanlarının sağladığı Killing denklemi, tamamen simetrik ve tamamen antisimetrik tensörlere de genelleştirilebilir. Genelleştirilmiş Killing denklemini sağlayan tamamen simetrik tensörlere Killing tensörleri denir (Dietz and Rüdiger 1982, Benn 2006).

Tamamen antisimetrik tensörlere olan genelleştirme ise Killing 1-formlarının sağladığı (3.6) denkleminin yüksek mertebeden formlar için yazılmasıyla olur. Killing denkleminin p -formlar için genelleştirilmesi olan

$$\nabla_x \omega = \frac{1}{p+1} i_x d\omega \quad (3.18)$$

denklemini sağlayan ω p -formuna ise bir Killing-Yano (KY) p -formu adı verilir. (3.18) denkleminin bir kez daha iç türevi alınarak görülebilir ki bir KY p -formu ko-kapalıdır:

$$\delta\omega = 0. \quad (3.19)$$

Bu da (3.7) koşulunun yüksek dereceli formlar için genelleştirilmesine karşılık gelir. Bir M manifoldu üzerindeki KY p -formlarının uzayı bir lineer uzay oluşturur (Simmelmann 2003, Stepanov 2003). Her fonksiyon bir KY 0-formudur, her KY 1-formu da bir Killing vektör alanının dualidir. n boyutta KY n -formları ise hacim formun bir sabit katı ile ortantılıdır. KY p -formlarının maksimum sayısı da bulunabilir; n , manifoldun boyutu olmak üzere KY p -formları en fazla

$$N(n, p) = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

sayıda olabilirler (Kastor, Ray and Traschen 2007, Açıık, Ertem, Önder, and Verçin 2008b).

Özel olarak KY formları kullanılarak jeodezik denkleminin kuadratik ilk integralleri, yani jeodezik boyunca sabit kalan fonksiyonlar oluşturulabilir (Simmelmann 2003). γ bir jeodezik ve $\dot{\gamma}$ jeodeziğin hız vektörü olsun. ω bir KY p -formu olmak üzere, ω 'nın hız vektörüne göre iç türevi olan $i_{\dot{\gamma}}\omega$ $(p-1)$ -formunun γ boyunca paralel olduğu gösterilebilir;

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{\gamma}} i_{\dot{\gamma}} \omega &= i_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \omega + i_{\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}} \omega \\
&= i_{\dot{\gamma}} \left(\frac{1}{p+1} i_{\dot{\gamma}} d\omega \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Burada, ilk satırda iç türev ve kovaryant türev arasında geçerli olan

$$[\nabla_X, i_Y] = i_{\nabla_X Y} \quad (3.20)$$

bağıntısı ve jeodezik tanımı olan $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ ifadesi kullanılmıştır. İkinci satırda ise (3.18)

KY denkleminde yararlanılmıştır. Dolayısıyla aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$K_{\omega}(X, Y) = g(i_X \omega, i_Y \omega)$$

ifadesi jeodezik hız vektörleri için

$$\nabla_{\dot{\gamma}} K_{\omega}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$$

eşitliğini sağlar ve jeodezik denklemi için bir kuadratik ilk integral tanımlar. Herhangi üç vektör alanı X, Y ve Z için ise (3.20)'den yararlanarak

$$\begin{aligned}
\nabla_Z K_{\omega}(X, Y) &= g(\nabla_Z i_X \omega, i_Y \omega) + g(i_X \omega, \nabla_Z i_Y \omega) \\
&= g(i_X \nabla_Z \omega + i_{\nabla_Z X} \omega, i_Y \omega) + g(i_X \omega, i_Y \nabla_Z \omega + i_{\nabla_Z Y} \omega)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre (3.4)'ün yüksek mertebeden formlara genelleştirilmesi kullanılarak

$$\nabla_Z K_{\omega}(X, Y) + \nabla_X K_{\omega}(Y, Z) + \nabla_Y K_{\omega}(Z, X) = 0 \quad (3.21)$$

eşitliği elde edilir.

Daha sonra inceleneceği gibi KY formları, eğri uzay-zamanda Dirac denkleminin simetrilerinin inşa edilmesinde de önemli rol oynarlar (bkz. Bölüm 4). Bunun yanı sıra KY formlarından oluşturulan korunmuş akımlar kullanılarak korunumlu kütleçekimsel yükler de tanımlanabilir (bkz. Bölüm 5). KY formlarının açık ifadeleri, küresel simetrik bir metrik sınıfı için Ek A'da verilmiştir.

3.3 Konformal Killing-Yano Formları

Konformal Killing vektörlerinin sağladığı denklem de tamamen simetrik ve tamamen antisimetrik tensörlere genelleştirilebilir. Burada sadece tamamen antisimetrik genellemeler ele alınacaktır. Bir ω p -formu, (3.17) bağıntısı genellenerek elde edilen

$$\nabla_X \omega = \frac{1}{p+1} i_X d\omega - \frac{1}{n-p+1} \tilde{X} \wedge \delta\omega \quad (3.22)$$

denklemini sağlıyorsa ω 'ya bir konformal Killing-Yano (CKY) p -formu adı verilir. Burada \tilde{X} , X vektör alanının metrik duali olan 1-form ve n manifoldun boyutudur. (3.22)'den görülebileceği gibi ko-kapalı olan ($\delta\omega = 0$) bir CKY p -formu, bir KY p -formudur.

3.3.1 CKY denkleminin Hodge değişmezliği

CKY denklemi Hodge yıldız işlemcisi altında değişmezdir, yani ω bir CKY p -formu ise $*\omega$ da bir CKY $(n-p)$ -formudur. Bu özellik KY denklemi için geçerli değildir. Bunun doğruluğunu görebilmek için (3.22) denkleminin her iki tarafına $*$ işlemcisi uygulanmalıdır. Buna göre (3.22)'nin sağ tarafındaki ikinci ifade aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$*(\tilde{X} \wedge *^{-1} d * \omega^n) = -i_X d * \omega.$$

(3.22)'nin sağ tarafındaki ilk ifade ise

$$\begin{aligned} *(i_X d\omega) &= *(i_X **^{-1} d **^{-1} \omega) \\ &= **(\delta(*^{-1} \omega)^n \wedge \tilde{X}) \\ &= -\tilde{X} \wedge \delta * \omega \end{aligned}$$

biçimine dönüşür. Burada Hodge yıldız işlemcisinin sağladığı

$$**\alpha_{(p)} = (-1)^{p(n-p)} \frac{\det g}{|\det g|} \alpha_{(p)}$$

ifadesi kullanılmıştır. Ayrıca metrik uyumlu bağlantı için $\nabla_X * = *\nabla_X$ olduğundan (3.22)'nin $*$ uygulanmış hali aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\nabla_X * \omega = \frac{1}{n-p+1} i_X d * \omega - \frac{1}{p+1} \tilde{X} \wedge \delta * \omega.$$

Bu da $*\omega$ $(n-p)$ -formunun bir CKY $(n-p)$ -formu olduğunu gösterir.

3.3.2 CKY denkleminin konformal kovaryantlığı

(3.22) CKY denkleminin aynı zamanda konformal dönüşümler altında kovaryanttır; ω , g metriğine sahip bir manifold üzerinde bir CKY p -formu ise, $\hat{\omega}$ da \hat{g} metriğine sahip bir manifold üzerinde bir CKY p -formudur, öyle ki burada

$$\hat{g} = \exp(2\lambda)g$$

$$\hat{\omega} = \exp((p+1)\lambda)\omega$$

şeklindedir (Benn, Charlton and Kress 1997). Bunu görebilmek için konformal dönüşüm altında bağlantı, dış türev ve ko-türevin dönüşümleri göz önüne alınmalıdır. X herhangi bir vektör alanı ve u herhangi bir p -form olmak üzere \hat{g} metriğine göre yazılan bağlantı, dış türev ve ko-türevin g metriğine göre yazılan bağlantı, dış türev ve ko-türev cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir;

$$\hat{\nabla}_X u = \nabla_X u - pX(\lambda)u - d\lambda \wedge i_X u + \tilde{X} \wedge i_{d\tilde{\lambda}} u$$

$$\hat{d}u = du$$

$$\hat{\delta}u = \delta u - (n-2p)i_{d\tilde{\lambda}} u .$$

$\hat{\omega} = e^{(p+1)\lambda}\omega$ olarak alınır ve \hat{g} metriğine göre olan yukarıdaki ifadeler (3.22) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_X \hat{\omega} - \frac{1}{p+1} i_X \hat{d}\hat{\omega} + \frac{1}{n-p+1} \tilde{X} \wedge \hat{\delta}\hat{\omega} &= e^{(p+1)\lambda} \left(\nabla_X \omega - \frac{1}{p+1} i_X d\omega + \frac{1}{n-p+1} \tilde{X} \wedge \delta\omega \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca K bir konformal Killing vektörü olmak üzere, ω bir CKY p -formu iken

$$L_K \omega - (p+1)\lambda\omega$$

da bir CKY p -formudur.

3.3.3 CKY denkleminin integrallenebilirlik koşulu

CKY denkleminin integrallenebilirlik koşulu, eğrilik işlemcisine göre tanımlanan eğrilik endomorfizmi cinsinden yazılabilir (Benn and Charlton 1997). Eğrilik endomorfizmi

$$I(\mathbf{R}) = e^b \wedge i_{X^a} \mathbf{R}(X_a, X_b) \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlanır. (3.22) denklemi X_b vektör alanına göre yazılıp X_a 'ya göre bir kez daha kovaryant türevi alınırsa;

$$\nabla_{X_a} \nabla_{X_b} \omega = \frac{1}{p+1} \left(i_{X_b} \nabla_{X_a} d\omega + i_{\nabla_{X_a} X_b} d\omega \right) - \frac{1}{n-p+1} \left(\nabla_{X_a} e_b \wedge \delta\omega + e_b \wedge \nabla_{X_a} \delta\omega \right)$$

elde edilir. Bu ifadenin X_a 'ya göre iç türevi alınıp e^b ile dış çarpılırsa;

$$\begin{aligned} e^b \wedge i_{X_a} \nabla_{X_a} \nabla_{X_b} \omega &= \frac{1}{p+1} \left(p \delta d\omega + e^b \wedge i_{X_a} i_{\nabla_{X_a} X_b} d\omega \right) \\ &\quad - \frac{1}{n-p+1} \left(-e^b \wedge \delta e_b \wedge \delta\omega - e^b \wedge \nabla_{X_a} e_b \wedge i_{X_a} \delta\omega + d\delta\omega \right) \end{aligned}$$

bulunur. (3.22) denklemi X_a 'ya göre yazılıp X_b 'ye göre kovaryant türev alınır ve $e^b \wedge i_{X_a}$ işlemi uygulanırsa;

$$\begin{aligned} e^b \wedge i_{X_a} \nabla_{X_b} \nabla_{X_a} \omega &= \frac{1}{p+1} \left(e^b \wedge i_{X_a} i_{\nabla_{X_b} X_a} d\omega \right) \\ &\quad - \frac{1}{n-p+1} \left(e^b \wedge i_{X_a} \nabla_{X_b} e^a \wedge \delta\omega - de_a \wedge i_{X_a} \delta\omega + nd\delta\omega - (p-1)d\delta\omega \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan son iki ifadenin farkı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} e^b \wedge i_{X_a} \nabla_{X_a} \nabla_{X_b} \omega - e^b \wedge i_{X_a} \nabla_{X_b} \nabla_{X_a} \omega &= \frac{p}{p+1} \delta d\omega + \frac{n-p}{n-p+1} d\delta\omega + \frac{1}{p+1} \left(e^b \wedge i_{X_a} i_{[X_a, X_b]} d\omega \right) \\ &\quad + \frac{1}{n-p+1} \left(e^b \wedge i_{X_a} \nabla_{X_b} e_a \wedge \delta\omega - de_a \wedge i_{X_a} \delta\omega \right) \\ &\quad + e^b \wedge \delta e_b \wedge \delta\omega + e^b \wedge \nabla_{X_a} e_b \wedge i_{X_a} \delta\omega \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Sağ taraftaki son iki terim ω 'nın bir CKY p -formu olması kullanılarak

$$e^b \wedge i_{X_a} \nabla_{[X_a, X_b]} \omega = e^b \wedge i_{X_a} \left(\frac{1}{p+1} i_{[X_a, X_b]} d\omega - \frac{1}{n-p+1} \left(\nabla_{X_a} e_b - \nabla_{X_b} e_a \right) \wedge \delta\omega \right)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre CKY denkleminin integrallenebilirlik koşulu

$$\frac{p}{p+1} \delta d\omega + \frac{n-p}{n-p+1} d\delta\omega = e^b \wedge i_{X_a} \mathbf{R}(X_a, X_b) \omega \quad (3.24)$$

biçiminde bulunur.

3.3.4 Ko-kapalı CKY formları ve KY formları arasındaki izomorfizm

(3.22) denkleminde de açıkça görülebileceği gibi bir p -formun bir KY p -formu olabilmesi için gerek ve yeter şart ko-kapalı bir CKY p -formu olmasıdır. Ayrıca bir $(n-p)$ -formun bir KY $(n-p)$ -formu olabilmesi için gerek yeter şart ise kapalı bir CKY p -formunun Hodge duali olmasıdır. (3.22) denkleminde kapalı bir CKY p -formu $\rho_{(p)}$ 'nin Hodge dualinin sağladığı denklemin

$$\nabla_{X_a} * \rho_{(p)} = \frac{1}{n-p+1} i_{X_a} d * \rho_{(p)}$$

şeklinde olduğu görülebilir. Burada $i_X * \rho = *(\rho \wedge \tilde{X})$ özelliği kullanılmıştır. $\rho_{(p)}$ kapalı olduğundan lokal olarak bir α $(p-1)$ -formu cinsinden $\rho_{(p)} = d\alpha$ şeklinde yazılabilir. Burada α , $\rho_{(p)}$ 'ye karşılık gelen KY $(n-p)$ -formunun KY-potansiyeli olarak adlandırılır; $\omega_{(n-p)} = *d\alpha$. KY ve CKY denklemlerinin 0-form çözümleri birbiriyle çakışır ve her CKY n -formu bir diferansiyellenebilir fonksiyon f cinsinden $\rho_{(n)} = fz$ biçiminde yazılabilir. Sonuç olarak Hodge yıldız dönüşümü bütün KY p -formlarının vektör uzayı ile bütün kapalı CKY $(n-p)$ -formlarının vektör uzayı arasında bir vektör uzayı izomorfizmi sağlar.

4. EĞRİ UZAY-ZAMANDA DIRAC-TİPİ İŞLEMCİLERİN SİMETRİLERİ

Bir denklemin simetri işlemcisi, o denklemin herhangi bir çözümünü diğer bir çözüme götüren işlemcidir. Bir pseudo-Riemann manifoldda, manifoldun izometrilere simetri işlemcilerini üretirler, yani Killing vektörlerine göre Lie türevleri metrik ve bağlantıdan inşa edilmiş diferansiyel denklemler için simetri işlemcilerine karşılık gelirler. Eğer ele alınan denklemler konformal değişmezliğe de sahipse konformal Killing vektörleri de simetri işlemcilerini oluşturmada kullanılırlar. Bu bölümde, Killing ve konformal Killing vektörlerinin yüksek dereceli formlara genelleştirilmeleri olan KY ve CKY formlarının Dirac ve Kähler denklemlerinin simetrilerinin inşasında oynadıkları roller incelenmiştir.

4.1 Kütlesiz Dirac Denkleminin Birinci Mertebe Simetrileri

Kütlesiz ve etkileşimsiz Dirac denklemi (2.53) ifadesinde $A = m = 0$ alınarak aşağıdaki gibi yazılır;

$$S\psi = 0.$$

En fazla birinci mertebeden türev içeren bir L işlemcisinin kütlesiz Dirac denkleminin bir simetri işlemcisi olabilmesi için

$$SL = MS$$

olacak şekilde bir M işlemcisinin var olması yeterlidir. Ya da daha genel olarak bu şart derecelendirilmiş Clifford sıradeğişimi kullanılarak

$$[S, L] = MS \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki derecelendirilmiş Clifford sıradeğişimi ifadesi simetri analizindeki hesaplarda kolaylaştırıcı bir rol oynadığı için kullanılmaktadır. Bir p -form α ve bir homojen olmayan Clifford formu $\beta = \sum_q \beta_{(q)}$ için bu sıradeğişimi aşağıdaki

gibi tanımlanır;

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \sum_q (-1)^{pq} \beta_{(q)} \alpha.$$

α 'nın tek form olduğu özel durum için bu ifade $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta^n \alpha$ şekline dönüşür. (4.1)'deki L 'nin bir simetri işlemcisi olabilmesi için Dirac işlemcisi ile Clifford

sıradеğışiminin sağ tarafa eğit olması gerekir. Derecelendirilmiş Clifford sıradеğışimi durumunda bu şartın sağlanabilmesi için L 'nin tümüyle çift ya da tümüyle tek dereceli formlardan inşa edilmiş olması gerekir. L 'nin çift formlardan oluştuğu durumda derecelendirilmiş Clifford sıradеğışimi normal Clifford sıradеğışimi $[,]_-$ 'ye dönüşür ve her boyutta L bir simetri işlemcisidir. L 'nin tek formlardan oluştuğu durumda ise derecelendirilmiş sıradеğışimi bir anti-sıradеğışimine dönüşür ve L bir simetri işlemcisi olma şartını sağlamaz. Ancak, çift boyutlarda hacim form z tek formlarla anti-sıradеğıştiğinden Lz ifadesi bir simetri işlemcisi olur.

En genel birinci mertebе çizgisel işlemci olarak

$$L = \omega^a S_{X_a} + \Omega \quad (4.2)$$

göz önüne alınsın. Burada ω^a ve Ω , \mathbb{Z}_2 homojen yani her ikisi de çift ya da her ikisi de tek formların toplamı olan homojen olmayan formlardır. L işlemcisi birinci mertebeden olduğundan (4.1)'deki M işlemcisi de en fazla birinci mertebeden olabilir ve benzer şekilde

$$M = 2m^a S_{X_a} + m$$

biçiminde yazılabilir. Burada m , türev içermeyen terimleri göstermektedir. (4.2) kullanılarak (4.1)'deki derecelendirilmiş sıradеğışimi hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}, L] &= e^b \omega^a S_{X_b} S_{X_a} - (-1)^p \omega^a e^b S_{X_a} S_{X_b} + e^b (\nabla_{X_b} \omega^a) S_{X_a} - (-1)^p \omega^a (\nabla_{X_a} e^b) S_{X_b} \\ &\quad + e^b \Omega S_{X_b} - (-1)^p \Omega e^b S_{X_b} + e^b (\nabla_{X_b} \Omega) \\ &= -e^b \wedge \omega^a [S_{X_a}, S_{X_b}] + i_{X^b} \omega^a (S_{X_b} S_{X_a} + S_{X_a} S_{X_b}) + e^b (i_{X^a} \nabla_{X_b} \omega) S_{X_a} - e^b \omega^a S_{\nabla_{X_b} X_a} \\ &\quad + e^b \wedge \omega^a S_{\nabla_{X_a} X_b} - i_{X^b} \omega^a S_{\nabla_{X_a} X_b} + 2(i_{X^b} \Omega) S_{X_b} + e^b (\nabla_{X_b} \Omega) \\ &= i_{X^b} \omega^a (S^2(X_a, X_b) + S^2(X_b, X_a)) + (e^b (i_{X^a} \nabla_{X_b} \omega) + 2(i_{X^a} \Omega)) S_{X_a} \\ &\quad - (e^b \wedge \omega^a \mathcal{S}(X_a, X_b) - e^a \nabla_{X_a} \Omega) \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. Burada ω ifadesi daha sonra da görüleceği gibi $\omega^a = i_{X^a} \omega$ biçiminde tanımlıdır. Ayrıca $S^2(X_a, X_b) = S_{X_a} S_{X_b} - S_{\nabla_{X_a} X_b}$ tanımı kullanılmıştır. (4.1) eşitliğinin sağ tarafı hesaplandığında ise aşağıdaki ifade bulunur;

$$\begin{aligned}
MS &= 2m^a (\nabla_{X_a} e^b) S_{X_b} + 2m^a e^b S_{X_a} S_{X_b} + m e^b S_{X_b} \\
&= 2m^a e^b S^2(X_a, X_b) + m e^b S_{X_b}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.1) eşitliğinin geçerli olabilmesi için her iki taraftaki aynı dereceli türev terimleri birbirine eşit olmalıdır. (4.3) ve (4.4)'de bulunan ifadeler (4.1)'de yerine konular ve ikinci dereceden terimler birbirine eşitlenirse

$$i_{X^b} \omega^a (S^2(X_a, X_b) + S^2(X_b, X_a)) = 2m^a e^b S^2(X_a, X_b)$$

ve buradan

$$(i_{X^b} \omega^a + i_{X^a} \omega^b) S^2(X_a, X_b) = (m^a e^b + m^b e^a) S^2(X_a, X_b)$$

bulunur. Buradan da aşağıdaki şart elde edilir;

$$i_{X^b} \omega^a + i_{X^a} \omega^b = m^a e^b + m^b e^a. \tag{4.5}$$

Bulunan bu ifade sağdan e_a ile Clifford çarpılır ve (4.5)'de $a = b$ alınarak elde edilen $i_{X^a} \omega^a = m^a e_a$ eşitliği kullanılırsa

$$(n+2)m^b = (i_{X^a} \omega^b + i_{X^b} \omega^a) e_a + (i_{X^a} \omega^a) e^b \tag{4.6}$$

bulunur. Bu ifade soldan e_b ile Clifford çarpılarak

$$e_b m^b = -i_{X^a} \eta \omega^a \tag{4.7}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada η (2.2)'de tanımlanan otomorfizmdir. (4.5) ifadesi soldan e_a ile Clifford çarpılır ve (4.7) kullanılırsa

$$(n-2\pi)m^b = (\pi+1)\eta \omega^b - i_{X^b} (e_a \eta \omega^a) + (i_{X^a} \omega^a) e^b \tag{4.8}$$

elde edilir. Burada bir p -form $\phi_{(p)}$ için ölçek işlemcisi olarak adlandırılan π 'nin $\pi \phi_{(p)} = e^a i_{X_a} = e^a \wedge i_{X_a} \phi_{(p)} = p \phi_{(p)}$ şeklindeki tanımı kullanılmıştır. (4.6) ve (4.8)'in toplanmasıyla da

$$(n+1-\pi)m^b = e^b \wedge \eta (i_{X_a} \omega^a) \tag{4.9}$$

sonucuna ulaşılır. α herhangi bir form olmak üzere (4.9) denkleminde ω^a yerine $\hat{\omega}^a = \omega^a + \alpha e^a$ ve m^b yerine \hat{m}^b alınsın. Bu durumda

$$(n-\pi)\eta\alpha + i_{X_a} \omega^a = 0$$

eşitliğini sağlayan α 'lar için $\hat{m}^b = 0$ olur. Bu da yukarıdaki eşitliği sağlayan bir α seçilerek (4.5)'in sağ tarafını sıfır yapan $\hat{L} = L + \alpha S$ şeklinde yeni bir simetri işlemcisi tanımlanabileceği anlamına gelir. (4.5)'in sağ tarafı sıfır olduğunda ise ω^a

$$\omega^a = i_{X^a} \omega \quad (4.10)$$

şeklinde bir ω \mathbb{Z}_2 -homojen formu cinsinden yazılabilir.

(4.3) ve (4.4)'deki birinci mertebe türev içeren terimler eşitlendiğinde ise

$$\begin{aligned} e^a i_{X^b} \nabla_{X^a} \omega + 2i_{X^b} \Omega &= m e^b \\ \Rightarrow \nabla_{X^b} \omega &= e^b \wedge \eta m + i_{X^b} (e^a \nabla_{X^a} \omega - \eta m - 2\Omega) \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. Burada $s = -\eta m - 2\Omega + e^a \nabla_{X^a} \omega$ tanımı yapılır ve (4.11)'in soldan e_b ile dış çarpımı alınırsa $d\omega = \pi s$ ve dolayısıyla

$$i_{X^b} s = \frac{1}{p+1} i_{X^b} d\omega_{(p)} \quad (4.12)$$

bulunur. (4.11) ifadesinin i_{X^b} ile büzülmesinin alınmasıyla da $(n - \pi)\eta m = -\delta\omega$ eşitliği ve dolayısıyla da

$$(e_b \wedge \eta m)_{(p)} = -\frac{1}{n-p+1} e_b \wedge \delta\omega_{(p)} \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.12) ve (4.13)'de bulunan ifadeler (4.11)'de yerine yazılarak

$$\nabla_{X^b} \omega_{(p)} = \frac{1}{p+1} i_{X^b} d\omega_{(p)} - \frac{1}{n-p+1} e_b \wedge \delta\omega_{(p)}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise (3.22)'de tanımlanan CKY denklemdir. Yani kütlelessiz Dirac denkleminin simetri işlemcileri CKY formlarından inşa edilebilir. (4.1) şartı nedeniyle bir simetri işlemcisine Dirac işlemcisiyle orantılı olan bir terim eklenebilir. Bu durum göz önüne alınarak hesap yapıldığında (4.3)'deki türev içermeyen terimlerin sıfır olarak bulunacağı görülebilir (Benn and Charlton 1997).

4.2 Kütleli Dirac Denkleminin Birinci Mertebe Simetrisi

Kütleli ve etkileşimsiz Dirac denklemi;

$$S\psi = m\psi$$

göz önüne alındığında, en fazla birinci mertebeden türev içeren bir L işlemcisinin, kütleli Dirac denkleminin bir simetri işlemcisi olabilmesi için

$$[S, L] = 0 \quad (4.14)$$

şartı sağlanmalıdır. Dolayısıyla kütleli durumda simetri işlemcilerini bulmak için bir önceki kesimde bulunan (4.3) ve (4.4)'de $m^a = m = 0$ almak ve hesapları devam ettirmek yeterlidir. Ancak bu kesimde kütleli Dirac denkleminin simetri işlemcilerini bulmak için alternatif bir yöntem izlenecektir.

(4.14)'ün sol tarafı (4.3)'de hesaplanan ifadeye eşittir ve ikinci mertebe türev içeren terimlerin birbirine eşitlenmesiyle

$$i_{X_b} \omega^a + i_{X_a} \omega^b = 0$$

bulunur (bu ifade (4.5)'de $m^a = 0$ alınmasına eşdeğerdir). Buradan da

$$\omega^a = i_{X^a} \omega$$

sonucuna ulaşılır. Birinci mertebe türev terimlerinin gerektirdiği şartları bulmak için L işlemcisinin daha değişik bir şekilde yazımı kullanılabilir. Dirac işlemcisi ile ω homojen olmayan formunun derecelendirilmiş Clifford sıradeğişimi hesaplanırsa

$$[S, \omega] = 2\omega^a S_{X_a} + d\omega = L + \varphi$$

elde edilir. Burada $\varphi = d\omega - \Omega$ şeklindedir. Bu da L işlemcisinin

$$L = [S, \omega] - \varphi \quad (4.15)$$

biçiminde yazılabileceğini gösterir. Dirac işlemcisi için geçerli olan

$$[S, [S, \omega]] = [S^2, \omega]_-$$

eşitliği kullanılarak (4.15)'in (4.14)'de yerine konulmasıyla

$$[S^2, \omega]_- = [S, \varphi] \quad (4.16)$$

simetri şartı bulunur. Burada $[,]_-$ ifadesi normal sıradeğişimi göstermektedir. Dirac işlemcisinin karesi için (2.51)'de bulunan ifade kullanılır ve eğrilik skalerinin herhangi

bir formla komüte edeceği gerçeğinden yararlanılırsa (4.16)'nın sol tarafı $[\mathcal{S}^2, \omega]_- = [S^2(X_a, X^a), \omega]_-$ biçiminde bulunur. S^2 'nin (2.50)'deki tanımı kullanılıp (4.16)'daki sıradeğişimi ifadeleri açık olarak hesaplanırsa

$$[S^2(X_a, X^a), \omega]_- = 2\nabla_{X^a} \omega S_{X_a} + \nabla^2(X_a, X^a)\omega$$

$$[\mathcal{S}, \varphi] = 2i_{X^a} \varphi S_{X_a} + d\varphi$$

simetri şartları elde edilir. (4.16) eşitliği gereği, bu denklemlerdeki aynı dereceden türev içeren denklemlerin eşitlenmesiyle de

$$\nabla_{X_a} \omega = i_{X_a} \varphi \quad (4.17)$$

$$\nabla^2(X_a, X^a)\omega = d\varphi \quad (4.18)$$

koşulları bulunur. (4.17) denklemini soldan $e^a \wedge$ ile çarpılarak

$$d\omega = \pi\varphi \quad (4.19)$$

elde edilir. Bu ifade de (4.17)'de tekrar yerine konulursa

$$\nabla_{X_a} \omega_{(p)} = \frac{1}{p+1} i_{X_a} d\omega_{(p)}$$

KY denkleminde ulaşılır. Yani kütleli Dirac denkleminin simetri işlemcileri KY formlarından oluşturulmalıdır.

Türevsiz terimlerin simetri işlemcilerine getireceği katkıyı bulabilmek için (4.17) denkleminin bir kez daha kovaryant türevi alınarak

$$\nabla^2 \omega = -\delta\varphi$$

eşitliği elde edilir. Bu ise (4.18) ile karşılaştırıldığında $d\varphi = 0$ şartını verir. (4.19)'dan görüleceği gibi bu şart φ 'nin sıfırdan büyük dereceli bileşenleri için geçerlidir. Tüm bileşenler için de geçerli olabilmesi için φ 'nin sıfır form bileşenleri sabit olmalıdır. Bu da simetri işlemcilerine türevsiz terimlerden bir sabit kadar katkı geleceği anlamına gelir. Dolayısıyla kütleli Dirac denkleminin birinci mertebeye simetri işlemcileri KY formlarına karşılık gelmektedir (Benn and Kress 2004). Schwarzschild ve Reissner-Nordström uzay-zamanları için kütleli Dirac denkleminin simetri işlemcileri ve bu işlemcilerin sağladığı simetri cebiri Ek B'de incelenmiştir.

4.3 Kütleli Kähler Denkleminin Birinci Mertebe Simetrisi

(2.54)'de tanımlandığı gibi etkileşimsiz ve kütleli Kähler denklemi aşağıdaki gibi yazılır;

$$d\phi = m\phi.$$

Dirac denkleminin benzer şekilde kütleli Kähler denkleminin de birinci mertebe simetri işlemcilerini bulmak için öncelikle 'çift formlar' tanımlanmalıdır. Burada 'çift form' ifadesi iki tane Clifford formunun tensör çarpımını belirtmektedir. Aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$\Omega = \Omega_{IJ} e^I \otimes e^J$$

çift formu göz önüne alınsın. Burada I ve J çoklu indisleri göstermektedir. Ω çift formunun bir homojen olmayan form ϕ üzerindeki etkisi ise şu şekilde tanımlanır;

$$\Omega \bullet \phi = \Omega_{IJ} e^I \phi e^J.$$

Burada yan yana yazılan terimler arasında Clifford çarpımı vardır. Çift formlar üzerine etki eden dış türev ve iç türev işlemcileri, çift formun ilk bileşeni üzerinde etkide bulunurlar.

Buna göre Clifford formları üzerinde en genel birinci mertebe lineer işlemci aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$L = 2\Omega^a \bullet \nabla_{X_a} + \dots \quad (4.20)$$

Burada Ω^a çift formunun her iki bileşeni de çift ya da her iki bileşeni de tek dereceli formlardır. Ayrıca \dots ifadesi de türevsiz terimleri göstermektedir. (4.20)'deki gibi yazılan L işlemcisinin kütleli Kähler denkleminin bir simetri işlemcisi olabilmesi için

$$[d, L] = 0$$

şartı sağlanmalıdır. Eşitliğin sol tarafındaki sıradışı değişimi hesaplanırsa Dirac denklemi durumundakine benzer şekilde

$$[d, L] = 2i_{X_b} \Omega^a \left(\nabla^2(X_a, X_b) + \nabla^2(X_b, X_a) \right) + \dots$$

bulunur. İkinci mertebe türev terimlerinin eşitlenmesinden de

$$\Omega^a = i_{X_a} \Omega$$

elde edilir. (4.20) işlemcisi (4.15)'deki duruma benzer şekilde

$$L = [d, \Omega] - \Phi$$

biçiminde yazılabilir. Burada Φ bir çift formdur. Son ifadenin simetri şartında yerine konulmasıyla da

$$[d^2, \Omega]_- = [d, \Phi]$$

koşulu bulunur. Hodge-de Rham işlemcisinin karesi (2.40)'daki gibi

$$d^2 = \nabla^2(X_a, X^a) - \frac{1}{4}(\mathfrak{R} + R \bullet)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $R = R_{ab} \otimes e^{ab}$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu ifade kullanılarak simetri koşulundaki sıradışı ifadeleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

$$[d^2, \Omega]_- = 2\nabla_{X_a} \Omega \nabla_{X^a} + \nabla^2(X_a, X^a) \Omega - \frac{1}{4}[R, \Omega]$$

$$[d, \Phi] = 2i_{X^a} \Phi \nabla_{X_a} + D\Phi.$$

Buradaki $D = e^a \nabla_{X_a} = D - D^*$ ifadesi d gibi tanımlanmasına rağmen çift formlar üzerine etki etmektedir. Burada D işlemcisi dış türev gibi D^* ise ko-türev gibi tanımlanmakta olup çift formlar üzerine etki ederler. Bu ifadeler simetri koşulunda yerine konulup, eşit dereceden türev içeren terimlerin birbirine eşitlenmesiyle de

$$\nabla_{X_a} \Omega = i_{X_a} \Phi \quad (4.21)$$

$$\nabla^2(X_a, X^a) \Omega - \frac{1}{4}[R, \Omega] = D\Phi \quad (4.22)$$

denklemleri elde edilir. (4.21) denklemi soldan $e^a \wedge$ ile çarpılarak

$$D\Omega = \Pi \Phi \quad (4.23)$$

elde edilir. Buradaki Π ise (4.19)'daki π 'nin çift formun ilk bileşeni üzerine etki etmiş halidir. (4.23) ifadesi Φ 'nin sıfır form bileşenini tam olarak belirlemez;

$$\Phi = \Pi^{-1} D\Omega + 1 \otimes T.$$

Burada T herhangi bir formdur. Bu ifadenin (4.21)'de yerine konulması KY denkleminde farklı olan bir genelleştirilmiş KY denklemine yol açar;

$$\nabla_{X_a} \Omega_{(p)} = \frac{1}{p+1} i_{X_a} D\Omega_{(p)}. \quad (4.24)$$

Buna ek olarak (4.21) denkleminin bir kez daha kovaryant türevinin alınmasıyla

$$\nabla^2(X_a, X^a) \Omega = -D^* \Phi$$

eşitliğine ulaşılır. Bunun (4.22) ile karşılaştırılmasıyla da

$$-\frac{1}{4}[R, \Omega_{(p)}] = \frac{1}{p+1} D^2 \Omega_{(p)} + e^a \otimes \nabla_{x_a} T \quad (4.25)$$

koşulu elde edilir (Benn and Kress 2005).

Buna göre, Kähler ve Dirac denklemi durumları arasında benzerlikler olmasına rağmen önemli farklılıklar da vardır. Kähler denklemi durumunda simetri işlemcileri KY denkleminin bir genelleştirmesi olan (4.24)'ün çözümlerinden inşa edilmelidir. Ayrıca Dirac denklemi durumunda KY denkleminin çözümleri simetri işlemcilerini inşa etmek için yeterliken Kähler denklemi durumunda (4.24)'ün çözümleri aynı zamanda (4.25) şartını da sağlamalıdır.

4.4 Etkileşimli Dirac Denkleminin Simetrileri

Eğri uzay-zamanda m kütleli, birim yüklü ve $1/2$ spinli bir parçacığın bir A potansiyeli etkisindeki hareketi aşağıdaki şekilde yazılan etkileşimli Dirac denklemi ile betimlenir;

$$(\mathcal{S} + iA)\psi = m\psi .$$

Burada A potansiyeli herhangi bir homojen olmayan form olarak düşünülebilirse de daha sonraki hesaplarda 1-form olarak ele alınacaktır. Bu durumda etkileşimli Dirac denklemi $F = dA$ şeklinde yazılan Maxwell alanı altındaki parçacığın hareketini betimler. Fakat A elektromanyetik kökenli olmayan terimler de içerebilir, bu durumda F kuvvet alanı olarak adlandırılır. Daha önce (4.2)'de ele alınan en genel birinci mertebe lineer işlemci L 'nin etkileşimli denklemin bir simetri işlemcisi olabilmesi için

$$[\mathcal{S}, L] + i[A, L] = 0 \quad (4.26)$$

koşulu sağlanmalıdır.

(4.3)'de hesaplanan sıradışı ifadesi kullanılarak (4.26)'da ikinci mertebe türev katsayılarından (4.10)'da bulunan

$$\omega^a = i_{x^a} \omega$$

eşitliği elde edilir. L işlemcisi (4.15)'deki gibi alınıp sıradışı ifadeleri hesaplanırsa aşağıdaki eşitlikler bulunur;

$$\left[S^2(X_a, X^a), \omega \right]_- = 2\nabla_{X^a} \omega S_{X_a} + \nabla^2(X_a, X^a) \omega$$

$$[S, \varphi] = 2i_{X^a} \varphi S_{X_a} + d\varphi$$

$$[A, L] = 2[A, i_{X^a} \omega] S_{X_a} - 2(i_{X^a} \omega)^\eta \nabla_{X_a} A + [A, \Omega].$$

Daha önce tanımlandığı gibi burada $\varphi = d\omega - \Omega$ olarak alınmıştır. Bu ifadeler (4.26)'da yerine konulup eşit mertebeden türev içeren terimler birbirine eşitlendiğinde ise aşağıdaki koşullara ulaşılır;

$$\nabla_{X^a} \omega = i_{X^a} \varphi - i[A, i_{X^a} \omega] \quad (4.27)$$

$$\nabla^2(X_a, X^a) \omega = d\varphi + 2i(i_{X^a} \omega)^\eta \nabla_{X_a} A - i[A, \Omega]. \quad (4.28)$$

Bu noktadan itibaren A 'nın 1-form olduğu durum göz önüne alınıp buna göre işlem yapılacaktır. Buna göre bir 1-formun herhangi bir homojen olmayan form α ile Clifford sıradeğişimi için yazılabilen

$$[A, \alpha] = 2i_A \alpha \quad (4.29)$$

eşitliği yukarıdaki denklemlerde kullanılabilir. Burada \tilde{A} , A 'nın metrik dualidir, yani her X için $A(X) = g(\tilde{A}, X)$ sağlanır.

Öncelikle (4.27) koşulu göz önüne alınsın. (4.29) ifadesi (4.27)'de yerine konularak bu koşul aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\nabla_{X^a} \omega = i_{X^a} (\varphi + 2i_{\tilde{A}} \omega). \quad (4.30)$$

Bu ifadenin her iki tarafına i_{X_a} işlemcisi uygulanırsa $\delta\omega = 0$ sonucu elde edilir. Yani ω ko-kapalı olmalıdır. Diğer yandan (4.30)'da her iki taraf $e_a \wedge$ ile çarpılarak

$$d\omega = \pi(\varphi + 2i_{\tilde{A}} \omega) \quad (4.31)$$

bulunur. Bu denklemin $(p+1)$ -form bileşenleri için ve $p = 0, 1, \dots, n-2$ durumunda geçerli olmak üzere aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$\varphi_{(p+1)} = \frac{1}{p+1} d\omega_{(p)} - 2i_{\tilde{A}} \omega_{(p+2)}. \quad (4.32)$$

$p = n-1$ durumunda ise bu ifade $\varphi_{(n)} = \frac{1}{n} d\omega_{(n-1)}$ şeklindedir. (4.31) ve (4.32)

kullanılarak (4.30) koşulu aşağıdaki biçime dönüştürülür;

$$\nabla_{X_a} \omega_{(p)} = \frac{1}{p+1} i_{X_a} d\omega_{(p)}.$$

Bu da daha önce tanımlanmış olan KY denklemdir.

Ayrıca (4.32) eşitliği ve ω 'nın ko-kapalı olması kullanılarak ve $\varphi = d\omega - \Omega$ ifadesi göz önüne alınarak $p = 0, 1, \dots, n-2$ için aşağıdaki eşitliklere ulaşılır;

$$\Omega_{(p+1)} = \frac{p}{p+1} d\omega_{(p)} + 2i_{\tilde{A}} \omega_{(p+2)} \quad (4.33)$$

$$\Omega_{(n)} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) d\omega_{(n-1)}. \quad (4.34)$$

Bu ifadelerden görülebileceği gibi $p = 0, 1, \dots, n-1$ durumları için

$$i_{\tilde{A}} \Omega_{(p+1)} = p \nabla_{\tilde{A}} \omega_{(p)} \quad (4.35)$$

eşitliği yazılabilir. Bu da simetri işlemcisindeki türevsiz terimin 0-form bileşeni dışındaki bileşenlerinin KY formları ve potansiyel cinsinden yazılabileceğini göstermektedir.

Şimdi de simetri koşullarından ikincisi olan (4.28) göz önüne alınsın. (4.30) denkleminin bir kez daha kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla^2(X_a, X^a)\omega = -\delta(\varphi + 2i_{\tilde{A}}\omega) \quad (4.36)$$

denklemini elde edilir. Bu ifade ile (4.28)'in sağ tarafları eşitlenerek de

$$i_{\tilde{A}}\Omega - \frac{1}{2}d\Omega = \delta i_{\tilde{A}}\omega + (i_{X^a}\omega)^\eta \nabla_{X_a} A \quad (4.37)$$

eşitliği bulunur. Bu ise Ω 'nın 0-form bileşenlerinin elde edilmesinde ve daha yüksek dereceli bileşenleri arasındaki olası ilişkilerin bulunmasında kullanılabilir. Bunun için öncelikle ko-türev ve iç türev işlemcileri arasında geçerli olan

$$[\delta, i_X]_+ = -i_{X^a} i_{\nabla_{X_a} X}$$

bağıntısı KY formları üzerinde uygulanırsa,

$$\delta i_{\tilde{A}}\omega = -i_{X^a} i_{\nabla_{X_a} \tilde{A}}\omega \quad (4.38)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca herhangi bir κ_a 1-formu için sağdan Clifford çarpımı tanımı kullanılarak elde edilen

$$(i_{X^a}\omega)^{\eta} \kappa_a = \kappa_a \wedge i_{X^a}\omega - i_{\tilde{\kappa}_a} i_{X^a}\omega \quad (4.39)$$

ifadesi göz önüne alınır ve $\kappa_a = \nabla_{X^a} A$ yazılıp (4.39) ile (4.38) eşitlikleri (4.37)'de kullanılırsa

$$i_{\tilde{A}}\Omega - \frac{i}{2}d\Omega = (\nabla_{X^a} A) \wedge i_{X^a}\omega \quad (4.40)$$

bulunur. Bu ifadenin 1-form bileşeni ise aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned} d\Omega_{(0)} &= -2i(i_{\tilde{A}}\Omega_{(2)} - i_{X^a}\omega_{(1)}\nabla_{X^a}A) \\ &= -2i(\nabla_{\tilde{A}}\omega_{(1)} - \nabla_{\tilde{\omega}_{(1)}}A). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Burada ikinci eşitliğin elde edilmesinde (4.35) ifadesi kullanılmıştır.

4.4.1 Dinamik simetri koşulu

Bu kesimde (4.37) denkleminin, simetri işlemcilerinde hangi KY formlarının yer alacağına belirlenmesinde rol oynayan önemli bir cebirsel koşul içerdiği görülecektir. Bunun için öncelikle $\Omega = d\omega - \varphi$ eşitliğinin dış türevi ve \tilde{A} 'ya göre iç türevi hesaplanırsa

$$d\Omega = -d\varphi = 2idi_{\tilde{A}}\omega$$

$$i_{\tilde{A}}\Omega = i_{\tilde{A}}d\omega - i_{\tilde{A}}\varphi = \pi i_{\tilde{A}}\varphi$$

bulunur. Burada (4.31) ifadesi kullanılmıştır. Bu eşitlikler (4.37)'de yerine yazılırsa

$$\pi(i_{\tilde{A}}\varphi) = -di_{\tilde{A}}\omega + (i_{X^a}\omega)^{\eta} \nabla_{X^a} A \quad (4.42)$$

elde edilir. Bu eşitliğin elde edilmesinde Hodge-de Rham işlemcisi ile iç türev işlemcisi arasında geçerli olan

$$[d, i_X]_+ = \nabla_X + e^a i_{\nabla_{X^a} X} \quad (4.43)$$

bağıntısı kullanılmıştır. $[\cdot]_+$ ifadesi Clifford anti-sıradеğişiminü göstermektedir. (4.39)

ile (4.43) eşitlikleri (4.38) denkleminde kullanılırsa

$$\pi(i_{\tilde{A}}\varphi) - i_{\tilde{A}}d\omega + \nabla_{\tilde{A}}\omega = -\frac{1}{2}[dA, \omega]_- \quad (4.44)$$

sonucuna ulaşılır. Bu ifadenin elde edilmesinde de aşağıdaki bağıntı kullanılmıştır;

$$\left(\kappa_a \wedge i_{X^a} - e^a \wedge i_{\tilde{\kappa}_a}\right)\omega = -\frac{1}{2}[dA, \omega]_-. \quad (4.45)$$

KY denklemi ve (4.32) ifadesi kullanılarak (4.44)'ün sol tarafının sıfır olacağı gösterilebilir. Dolayısıyla $[dA, \omega]_- = 0$ eşitliğine ulaşılır. Diğer yandan, (4.45) denkleminde de görüldüğü gibi, herhangi dereceden bir formun bir 2-formla Clifford sıradeğişimi formun bileşenlerinin derecelerini değiştirmeyeceğinden, ω 'nın her p -form bileşeni kuvvet alanı $F = dA$ ile Clifford sıradeğişmelidir;

$$[F, \omega_{(p)}]_- = 0. \quad (4.46)$$

Buna göre, uzay-zamanın sahip olduğu KY formları arasında sadece yukarıdaki koşulu sağlayan KY formları simetri işlemcilerinin inşasında kullanılabilirler. Buradaki seçim işlemi potansiyel formunun kendisi değil kuvvet alanı yapmaktadır (Açık, Ertem, Önder and Verçin 2009).

(4.41) denklemini integre etmek ve (4.46) koşulundan elde edilebilecek diğer sonuçları görebilmek için (4.46) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılsın;

$$i_{X^a} F \wedge i_{X_a} \omega_{(p)} = 0. \quad (4.47)$$

Bu ifade $p=0$ ve $p=n$ için açıkça sağlanır. Dolayısıyla bu uç durumlar F üzerine simetri işlemcilerinde yer alacak KY formları üzerine ek koşullar getirmez. Genel olarak, bir KY p -formu $\omega_{(p)}$ ancak ve ancak F kuvvet alanı $i_{X_a} \omega_{(p)} \wedge i_{X^a}$ işlemcisinin çekirdeğinde ise simetri işlemcisinin inşasında kullanılabilir. Bir KY formunun 0-form bileşeni herhangi bir fonksiyon olabilir ve n -form bileşeni $\omega_{(n)}$ de paraleldir, yani hacim formun bir sabit katı kadardır; $\omega_{(n)} = kz$. 1-form bileşeni için ise $\omega_{(1)} = \tilde{K}$ yazılabilir, burada K bir Killing vektör alanıdır. Bu durumda (4.47) ifadesi aşağıdaki eşitliğe indirgenir;

$$i_K F = 0. \quad (4.48)$$

Bu da F 'nin K tarafından üretilen akış altında değişmez kaldığı anlamına gelir. Yani $L_K F = 0$. Diğer bir deyişle izometri üreticileri ancak (4.48) koşulunu sağarlarsa simetri işlemcilerinin inşasında kullanılabilirler.

(4.48) koşulu potansiyel formu cinsinden $i_K(e^a \wedge \nabla_{X_a} A) = 0$ şeklinde yazılabilir ve $i_{\nabla_X K} A = i_{\tilde{A}} \nabla_X \omega_{(1)}$ eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılabilir;

$$\nabla_K A - di_K A - \nabla_{\tilde{A}} \omega_{(1)}.$$

Bu denklem, (4.41) ile karşılaştırılarak ve integre edilerek bir sabit kadar farkla

$$\Omega_0 = 2i_K A \quad (4.49)$$

eşitliği elde edilir. Daha önce literatürde söz edilmemiş olan bu ifade Ω_0 'ı sabit yapmak için gerekli olan ayarı seçmeyi sağlar. Böyle bir durumda sadece akışları potansiyeli koruyan Killing vektörlerinin dualleri simetri işlemcilerinde yer alabilirler. (4.49)'u türetmek için başka bir eşdeğer yol da izlenebilir. Herhangi bir β 1-formu için $\nabla_X \beta$ 'nin metrik dualinin, bağlantının metrik uyumlu olması kullanılarak, $\nabla_X \tilde{\beta}$ şeklinde yazılabileceği göz önünde bulundurularak (4.41) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$d\tilde{\Omega}_{(0)} = -2i[\tilde{A}, K]_L = 2iL_K \tilde{A}.$$

Burada $[\cdot, \cdot]_L$ ifadesi vektör alanlarının Lie parantezini göstermektedir ve ayrıca burada burulmanın sıfır olması da kullanılmıştır. K bir Killing vektörü olduğundan yukarıdaki ifade $d\Omega_{(0)} = 2iL_K A$ olarak yazılabilir ve diferansiyel formlar üzerinde Lie türevinin etkisi ve (4.48) kullanılarak (4.49) eşitliğine ulaşılır.

Bir KY 2-formu $\omega_{(2)} = \frac{1}{2} \omega_{ab} e^a \wedge e^b$ için (4.47) koşulu $\omega_{a[b} F_{c]}^a = 0$ şeklinde yazılabilir.

Burada köşeli parantezler, içinde bulunan indislerin anti-simetrikleştirilmesini ifade etmektedir ve F_{cb} de $\{e^a\}$ bazına göre F 'nin bileşenleridir. 2-formlar için bu ifade ilk kez Hughston, Penrose, Sommers and Walker (1972)'de gösterilmiştir. Burada elde edilen (4.46) ya da (4.47) koşulu ise tüm dereceden formlar için bir genelleştirme değildir.

(4.47) koşulu, yüksek dereceli formlar için tartışılmak amacıyla $\beta_a = F \wedge i_{X_a} \omega_{(p)}$ şeklinde tanımlanan $(p+1)$ -formlar cinsinden $i_{X^a} \beta_a = 0$ biçiminde yazılabilir. Bu ifade $p=0, n$ durumları için de geçerlidir. $p=n$ durumunda β_a $(n+1)$ -form olacağından

$\beta_0 = 0$ eşitliği özdeş olarak sağlanır. $p = n - 1$ durumunda ise $\beta_a = f_a z$ yazılabilir. Burada f_a bir fonksiyonlar kümesidir öyle ki (4.47) koşulu $V = f_a X^a$ için $i_V z = 0$ şartını verir. $\varphi_z(V) = i_V z$ ifadesiyle tanımlanan φ_z dönüşümü vektör alanları ile $(n-1)$ -formlar arasında bir izomorfizm olduğundan, $i_V z = 0$ şartı ancak ve ancak $V = 0$ iken yani bütün f_a 'lar sıfır iken sağlanır. Bu da her X_a için $F \wedge i_{X_a} \omega_{(n-1)} = 0$ ya da başka bir ifadeyle

$$i_{X_a} F \wedge \omega_{(n-1)} = 0 \quad (4.50)$$

şartına eşdeğerdir. $p = n - 2$ durumunda β_a 'lar $(n-1)$ -formdurlar ve tek şekilde tanımlı bir $\sigma_a = \sigma_{ab} e^b$ 1-formu cinsinden $\beta_a = * \sigma_a$ biçiminde yazılabilirler. Bu durumda (4.47) koşulu $\sigma_a \wedge \tilde{X}^a = 0$ halini alır ve bu da $\sigma_{ab} = \sigma_{ba}$ olmasını gerektirir. Bu koşul daha açık olarak $a, b = 1, \dots, n$ olmak üzere

$$F \wedge (\tilde{X}_a \wedge i_{X_b} - \tilde{X}_b \wedge i_{X_a}) \omega_{(n-2)} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Böylece göz önüne alınan $p = 0, 1, n - 2, n - 1, n$ durumları dört boyutta (4.46) koşulunun tüm biçimlerini tüketmiş olur.

Bu kesimde göz önüne alınan potansiyel 1-formu $A = 0$ olarak seçilirse elde edilen sonuçlar daha önce incelenen etkileşimsiz durumdaki koşullara indirgenir. Bu durumda (4.46) koşulu ortadan kalkar ve tüm KY formları simetri işlemcilerinin inşasında rol alırlar.

4.4.2 Yano vektörleri ve eğrilik karakteristikleri

Daha önce üçüncü bölümde görüldüğü gibi bir KY $(n-1)$ -formu kapalı bir CKY 1-formu \tilde{Y} 'nin Hodge duali olarak yazılabilir;

$$\omega_{(n-1)} = i_Y z = * \tilde{Y}. \quad (4.51)$$

Burada Y vektör alanı \tilde{Y} 'nin metrik dualidir ve Yano vektörü olarak adlandırılır (McLenaghan and Spindel 1979). (4.51) ifadesinin (4.50)'de yerine konulmasıyla $i_{X_a} F \wedge * \tilde{Y} = 0$ eşitliği bulunur ve bu da bileşenler cinsinden yeniden yazılırsa

$$F_{ab}Y^b = 0 \quad (4.52)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.48) ifadesi de bileşenler cinsinden $F_{ab}K^b = 0$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla KY $(n-1)$ -formları ve KY 1-formlarının simetri işlemcilerinde yer alabilmeleri ancak karşılık gelen Yano ve Killing vektörlerinin F_{ab} matrisinin çekirdeğinde yer almalarıyla mümkündür.

Eğrilik 2-formları R_{ab} , Ricci 1-formları P_a ve konformal 2-formları C_{ab} 'nin bir Yano vektörüne göre büzülmeleri (iç türevleri) uzay-zamanın global yapısına ilişkin önemli çıkarımların yapılmasında yardımcı olur. Burada C_{ab} konformal 2-formları (2.24)'deki gibi tanımlanır;

$$C_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{n-2} \left(P_a \wedge e_b - P_b \wedge e_a - \frac{\mathfrak{R}}{n-1} e_a \wedge e_b \right).$$

Bu büzülmeleri hesaplamak için öncelikle KY denkleminin bir kez kovaryant türevi alınıp Hessian işlemcisinin bir KY p -formu $\omega_{(p)}$ üzerindeki etkisi bulunursa

$$\nabla^2(X_a, X_b)\omega_{(p)} = \frac{1}{p+1} i_{X_b} \nabla_{X_a} d\omega_{(p)} \quad (4.53)$$

eşitliği elde edilir. Eğrilik işlemcisi $\mathbf{R}(X_a, X_b)$, Hessian işlemcileri $\nabla^2(X_a, X_b)$ ve $\nabla^2(X_b, X_a)$ 'nın farkı olarak yazılabileceğinden (4.53) kullanılarak

$$\mathbf{R}(X_a, X_b)\omega_{(p)} = \frac{1}{p+1} (i_{X_a} \nabla_{X_a} - i_{X_b} \nabla_{X_b}) d\omega_{(p)} \quad (4.54)$$

bulunur. Diğer yandan eğrilik işlemcisinin herhangi bir form α üzerine etkisi

$$\mathbf{R}(X_a, X_b)\alpha = -i_{X^k} R_{ab} \wedge i_{X_k} \alpha \quad (4.55)$$

eşitliği ile verilir (Benn and Tucker 1987, Benn, Charlton and Kress 1997). Bir 1-form \tilde{X} üzerindeki etki ise $-i_X R_{ab}$ şeklinde yazılabilir. (4.55) ifadesi (4.54)'de kullanılarak ve elde edilen sonuç $e^a \wedge$ ile çarpılarak

$$\nabla_{X_a} d\omega_{(p)} = \frac{p+1}{p} R^b_a \wedge i_{X_b} \omega_{(p)} \quad (4.56)$$

sonucuna ulaşılır. Bu ifade (4.54)'de $\omega_{(n-1)} = *\tilde{Y}$ için kullanılırsa

$$\mathbf{R}(X_a, X_b)*\tilde{Y} = \frac{(-1)^n}{n-1} (i_{X_b} *\tilde{Y} \wedge P_a - i_{X_a} *\tilde{Y} \wedge P_b) \quad (4.57)$$

bulunur. Burada büzülmüş Bianchi özdeşliği $i_{X_b}P_a = i_{X_a}P_b$ kullanılmıştır. Eğrilik işlemcisinin 1-formlar üzerindeki etkisi ve Hodge yıldız işlemcisinin özellikleri kullanılarak aşağıdaki iki eşitlik bulunabilir;

$$\mathbf{R}(X_a, X_b) **\tilde{Y} = \varepsilon(-1)^n i_Y R_{ab}, \quad (4.58)$$

$$**[\tilde{Y} \wedge e_b] \wedge P_a = \varepsilon[(i_Y P_a)e_b - \tilde{Y}i_{X_b}P_a]. \quad (4.59)$$

Burada ε ifadesi $\det g$ 'nin işaretini göstermektedir. (4.57)'nin her iki tarafının Hodge duali alınır ve (4.58) ve (4.59) eşitlikleri kullanılırsa eğrilik işlemcisinin Yano vektörüne göre büzülmesi

$$i_Y R_{ab} = \frac{1}{n-1} [(i_Y P_a)e_b - (i_Y P_b)e_a] \quad (4.60)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin bir kez daha i_Y 'ye göre büzülmesiyle de Ricci 1-formlarının Yano vektörüne göre büzülmelerinin sağladığı aşağıdaki eşitliğe ulaşılır;

$$Y_b i_Y P_a = Y_a i_Y P_b.$$

C_{ab} 'nin tanımı ve (4.60) eşitliği kullanılarak da konformal 2-formlarının Yano vektörüne göre büzülmeleri bulunabilir;

$$i_Y C_{ab} = \frac{1}{(n-1)(n-2)} [(\mathfrak{R}g_{ac} - P_{ac})e_b - (\mathfrak{R}g_{bc} - P_{bc})e_a] Y^c + \frac{1}{n-2} (P_a Y_b - P_b Y_a).$$

Burada P_{ac} ifadesi Ricci 1-formlarının bileşenlerini göstermektedir. Bu eşitlikler dört boyutlu Lorentz uzay-zamanları için literatürde bulunan (McLenaghan and Spindel 1979) tensör bağıntılarının herhangi boyut ve işarete genelleştirilmiş ve diferansiyel form dilinde yazılmış halleridir.

Özel olarak Einstein uzaylarında yani $P_{ab} = \frac{\mathfrak{R}}{n} g_{ab}$ ve \mathfrak{R} sabit olduğunda $i_Y C_{ab} = 0$ 'dır.

Dört boyutta bir Einstein uzayında bir Yano vektörünün varlığı uzay-zamanın konformal olarak düz ($C_{ab} = 0$) ya da Petrov sınıflamasına göre tip N olmasını gerektirir. Daha yüksek boyutlarda ise $C_{ab} \neq 0$ için $i_Y C_{ab} = 0$ olması uzay-zamanın Petrov tipi N olmasını gerektirmez. Bu durumda uzay-zaman Petrov tip II de olabilir (Coley 2008). Y null olmadığında Ricci 1-formun kontraksiyonu için $i_Y P_a = \lambda Y_a$

şeklinde yazılabilir. Burada $\lambda = \frac{Y^b i_Y P_b}{g(Y, Y)}$ 'dir. Bu durumda Yano vektörü P_{ab} 'nin $\lambda = \frac{\mathfrak{R}}{n}$

özdeğerli bir özvektördür. Y null olduğunda ise aynı zamanda Ricci tensörüne göre de null olur, yani Yano vektörünün sıfırdan farklı bileşenleri yönünde $Y^a i_Y P_a = 0$ olur.

4.5 Jeodezik Denkleminin İlk İntegralleri ve Hareket Sabitleri

Kesim 3.2'de görüldüğü gibi KY formları kullanılarak jeodezik denkleminin ilk integralleri oluşturulabilir. Bir ω KY formu için tanımlanan $K^{(\omega)}(X, Y) = g(i_X \omega, i_Y \omega)$ Killing tensörü ifadesi göz önüne alınsın. Buna göre γ jeodeziği boyunca $K^{(\omega)}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ sabittir. Yano vektörünün dualinden oluşturulan $*\tilde{Y}$ KY $(n-1)$ -formu için $K^{(*\tilde{Y})}$ 'nin bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$K_{ab}^{(*\tilde{Y})} = g_{n-2}(i_{X_a} *\tilde{Y}, i_{X_b} *\tilde{Y}) = \varepsilon [g(Y, Y)g_{ab} - Y_a Y_b]. \quad (4.61)$$

Burada ε metriğin determinantının işaretidir. Tanımdan dolayı $K^{(*\tilde{Y})}(Y, Y) = 0$ 'dır, yani Yano vektörleri, kendileriyle ilişkili olan Killing tensörüne göre nulldır. Y null değilken (yani $g(Y, Y) \neq 0$) $K^{(*\tilde{Y})}$, Y tarafından gerilen bir boyutlu bir çekirdeğe sahiptir ve dolayısıyla tekildir. Bu durumda Y 'ye dik olan her vektör $\varepsilon g(Y, Y)$ özdeğerli bir özvektördür ve $K^{(*\tilde{Y})}$ 'nin izi $\varepsilon(n-1)g(Y, Y)$ 'dir. Dahası, normalize edilmiş Killing tensörü $K' = \frac{K^{(*\tilde{Y})}}{\varepsilon g(Y, Y)}$, $n-1$ ranklı idempotent bir izdüşürücüdür; $K'_{ab} K'^b{}_c = K'_{ac}$. Y null iken $K_{ab}^{(*\tilde{Y})} = -\varepsilon Y_a Y_b$ 'dir ve bu ifade rank-1 nilpotent bir izdüşürücüdür ($K_{ab}^{(*\tilde{Y})} K_c^{(*\tilde{Y})b}$) ve vektör alanlarını Yano vektörünün yönüne izdüşürür.

Bilindiği gibi herhangi bir p 'inci dereceden simetrik Killing tensörü, jeodezik invariant olan p 'inci dereceden bir hız polinomu tanımlar (Benn 2006). Fakat kesim 3.2'de olduğu gibi KY formları kullanılarak inşa edilen ikinci mertebeye simetrik Killing tensörleri, klasik yörüngeler boyunca hız vektörünün bir jeodezik değişmezi olma özelliğine de sahiptir. Bu kısımda, bahsedilen özelliğin daha genel durumlar için bir ispatı sunulacaktır. Aşağıdaki şekilde tanımlanan kuadratik fonksiyon göz önüne alınsın;

$$f^{(\omega)} = K^{(\omega)}(u, u) = K_{ab}^{(\omega)} u^a u^b . \quad (4.62)$$

Burada $u = \dot{C}$ ile aşağıdaki hareket denklemini sağlayan bir yüklü (birim) maddesel parçacığın dünya hızı gösterilmektedir;

$$\nabla_u u = \frac{1}{m} i_u \tilde{F} . \quad (4.63)$$

Ayrıca $u^a = dx^a / d\tau$ ve x^a 'lar τ öz zamanı ile parametrelendirilmiş dünya eğrisi C 'nin yerel koordinatlarıdır. $\nabla_u u$ ise parçacığın ivmesini göstermektedir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (f^{(\omega)} \circ C) &= C_*(\partial_\tau) f^{(\omega)} = \nabla_u [K^{(\omega)}(u, u)] \\ &= 2K^{(\omega)}(\nabla_u u, u) \end{aligned} \quad (4.64)$$

yazılabilir ve (4.63) kullanılarak

$$\frac{d}{d\tau} (f^{(\omega)} \circ C) = \frac{2}{m} u^a u^b F_{ac} K_b^{(\omega)c} \quad (4.65)$$

elde edilir.

Burada ispatlanmak istenen (4.63) tarafından belirlenen klasik yörünge boyunca $f^{(\omega)}$ 'nin sabitliğidir. Fakat öncelikle bazı özel durumlar üzerinde durmak aydınlatıcı olabilir. Kolaylıkla gösterilebileceği gibi (4.47) koşulunu sağlayan KY formları kullanılarak yazılan $f^{(\omega)}$ için (4.65)'in sağ tarafı sıfır olacaktır. (4.61) ile verilen $K_{ab}^{(*\tilde{Y})}$ durumunda ise (4.52) göz önüne alınarak Maxwell alanı ile büzölme

$$F_{ac} K_b^{(\omega)c} = \varepsilon g(Y, Y) F_{ab} \quad (4.66)$$

şeklinde bulunur. Bu da açıkça anti-simetriktir ve (4.65)'in sağ tarafını sıfır yapar. Dolayısıyla özel bir sonuç olarak $p = 1, 2, n-1, n$ olacak şekildeki KY p -formlarından inşa edilen bütün kuadratik fonksiyonların klasik yörünge boyunca sabit olacağı gerçeğine ulaşılır. Bu, dört boyutlu uzay-zaman için bütün olasılıkları tüketir ve daha önce literatürde bilinen durumlara karşılık gelir.

(4.63) ile belirlenen klasik yörüngeler boyunca her boyut ve imza için ve (4.47) simetri koşulunu sağlayan her $\omega_{(p)}$ KY p -formu için $f^{(\omega)}$ 'nin bir hareket sabiti olduğunu ispatlamak amacıyla öncelikle (4.65) denkleminin her iki tarafının Hodge duali alınmalıdır. Bunun için

$$I_{ab} = (F_{ac} K_b^{(\omega)c}) = (i_{X_c} i_{X_a} F) i_{X_c} \omega \wedge *i_{X_b} \omega \quad (4.67)$$

n -formu tanımlanısın. Bu durumda (4.65) denklemi aşığıdaki gibi yazılabilir;

$$* \frac{d}{d\tau} (f^{(\omega)} \circ C) = \frac{2}{m} u^a u^b I_{ab}. \quad (4.68)$$

Dolayısıyla $f^{(\omega)}$ 'nın $C(\tau)$ dünya çizgisi boyunca sabit olabilmesi ancak ve ancak (4.68) eşitliğinin sağ tarafının sıfır olmasıyla mümkündür. Açıkça anti-simetriklik koşulu $I_{ab} = -I_{ba}$ eşitliğin sağ tarafının sıfır olması için yeterlidir. Anti-simetrikliğini ispatlayabilmek için I_{ab} ifadesi aşığıdaki gibi yeniden yazılısın;

$$\begin{aligned} I_{ab} &= - \left[i_{X_a} (i_{X_c} F \wedge i_{X_c} \omega) + i_{X_c} F \wedge i_{X_a} i_{X_c} \omega \right] \wedge *i_{X_b} \omega \\ &= i_{X_c} F \wedge i_{X_c} (i_{X_a} \omega \wedge *i_{X_b} \omega) - i_{X_a} \omega \wedge i_{X_c} F \wedge i_{X_c} *i_{X_b} \omega \\ &= -i_{X_a} \omega \wedge i_{X_c} F \wedge * (i_{X_b} \omega \wedge e^c). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Burada ilk eşitlikteki köşeli parantezin içindeki ilk terim (4.47) koşulu nedeniyle sıfır olur ve ikinci eşitlikteki ilk terim ise bir $(n+1)$ -formun iç türevi olarak yazılabileceğinden sıfır olur. Üçüncü eşitliğin yazımında ise $i_{X_c} *i_{X_b} \omega = *(i_{X_b} \omega \wedge e^c)$ eşitliği kullanılmıştır. $i_{X_c} F = F_{ck} e^k$ eşitliği ve herhangi iki p -form için geçerli olan $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha$ özdeşliği kullanılarak (4.69)'dan

$$\begin{aligned} I_{ab} &= -i_{X_b} \omega \wedge F_{ck} e^c \wedge * (i_{X_a} \omega \wedge e^k) \\ &= i_{X_b} \omega \wedge i_{X_k} F \wedge * (i_{X_a} \omega \wedge e^k) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlik (4.69)'un üçüncü satırıyla karşılaştırılırsa ispatlanmak istenen $I_{ab} = -I_{ba}$ ifadesine ulaşılır.

$f^{(\omega)}$ 'nın sabitliğinin açık bir sonucu da (4.64)'den $K^{(\omega)}(\nabla_u u, u) = 0$ olmasıdır. Bu ise şu şekilde yorumlanabilir; yüklü bir maddesel parçacığın dünya hızı ve ivmesi birbirine sadece metriğe göre değil, aynı zamanda (4.47) koşulunu sağlayan KY formlarıyla ilişkili olan simetrik Killing tensörlerine göre de diktir (Açık, Ertem, Önder and Verçin 2009).

5. TEMEL KÜTLEÇEKİMSEL AKIMLAR VE KY FORMLARI

Korunum yasaları uzay-zamanın simetrisiyle ilişkilidir. Yerel izometrisi üreten Killing vektör alanları, bilinen korunumlu akımları inşa etmede önemli bir rol oynarlar ve her bir akımla da bir korunumlu yük ilişkilendirilebilir. n boyutlu bir uzay-zamanda, asimptotik uzay-zamanın simetrisi kullanılarak bir ADM korunumlu yükü (Arnowitt, Deser and Misner 1960), uzaysal sonsuzluktaki $(n-2)$ -küreler üzerinden bir integral olarak yazılabilir (Abbott and Deser 1982). Örneğin, zaman öteleme Killing vektör alanı ADM kütlelerini tanımlarken dönme Killing vektör alanları da ADM açısal momentumlarını tanımlar. Korunumlu akımlar, p uzaysal boyuta yayılmış nesnelere olan p -zar uzay-zamanlarına KY formları kullanılarak genelleştirilebilir (Kastor and Traschen 2004).

Korunumlu yüklerin oluşturulmasında kullanılan Abbott-Deser (AD) yöntemi (Abbott and Deser 1982), KY formlarına da genişletilebilir ve bu şekilde oluşturulan genelleştirilmiş yüklere Y-ADM yükleri adı verilir. Bu yükler asimptotik olarak düz ve asimptotik olarak anti-de Sitter uzay-zamanları için inşa edilmişlerdir (Kastor and Traschen 2004, Cebeci, Sarıoğlu and Tekin 2006). ADM durumunda yükler Einstein formları cinsinden yazılabilir ve dolayısıyla Einstein denklemleri aracılığıyla stres-enerji formlarıyla ilişkilendirilebilirler. Bu yüklerin fiziksel anlamları bu ilişki aracılığıyla ortaya çıkarılabilir. Diğer yandan, genelleştirilmiş yükler için Einstein denklemleriyle doğrudan bir ilişki yoktur ve dolayısıyla fiziksel anlamları henüz net değildir. ADM yükleri sonsuzda $(n-1)$ boyutlu bölgeleri sınırlayan $(n-2)$ -küreler üzerinden alınan integrallerden elde edildiğinden yaygın (extensive) niceliklerdir. Ancak bir KY p -formu ile ilişkili olan bir Y-ADM yükü sonsuzda p -zara dik olan yönler boyunca $(n-p-2)$ -küreler üzerinden integral alınarak hesaplanır. Bu küreler $(n-p-1)$ boyutlu bölgelerin sınırını oluşturduklarından karşılık gelen yükler yoğun (intensive) niceliklerdir. Bu da Y-ADM yüklerinin p -zar uzay-zamanları için yük yoğunluğu olarak yorumlanabilmeleri olasılığını ortaya çıkarır.

n -boyutlu bir uzay-zamanda bir korunumlu akımın ve karşılık gelen korunumlu yükün geleneksel tanımlanma şekli aşağıdaki gibi betimlenebilir. Bir p -form J 'nin $d^*J = 0$

eşitliğini sağladığı varsayılınsın. Bu durumda Stokes teoreminden $(n-p+1)$ boyutlu bir bölgenin sınırı boyunca $*J$ 'nin integralinin sıfır olacağı söylenebilir. Bu da J 'nin korunumlu bir akım olduğu anlamına gelir ve $*J$ 'nin $(n-p+1)$ boyutlu bir bölgenin sınırı olmayan bir $(n-p)$ boyutlu bölge Σ üzerinden integrali alınarak karşılık gelen yük tanımlanabilir; $Q = \int_{\Sigma} *J$. Q korunumlu bir yüküdür yani Σ ile aynı homoloji sınıfını paylaşan (birbirlerinden bir sınır terimi kadar farklı olan) tüm bölgeler için sabittir. J 'nin korunumlu olması aynı zamanda ko-kapalı olması anlamına da gelir; $\delta J = 0$.

Açıkça korunumlu niceliklerin tüm lineer birleşimleri de korunumludur ve dolyısıyla bir korunum yasası diğerlerinden inşa edilemeyen bir temel korunumlu akımla ilişkili olmalıdır. Fiziksel olarak anlamlı korunumlu yükler de bu temel akımlardan inşa edilmelidir. Daha önce literatürde (Kastor and Traschen 2004) aşağıdaki şekilde tanımlanan ve bir KY p -formu ile eğrilik karakteristiklerinden oluşturulan

$$J = -i_{X_a} i_{X_b} \omega \wedge R^{ab} + 2(-1)^p i_{X_a} \omega \wedge P^a + \mathfrak{R} \omega \quad (5.1)$$

p -formunun genelleştirilmiş bir korunumlu akım olduğu ve bir p -zar uzay-zamanının bir korunumlu yükü ile ilişkilendirilebileceği gösterilmiştir. Bu şekilde tanımlanan J akımı, bir Killing vektör alanı K 'nin bileşenlerinden ve Einstein $(n-1)$ -formları $G^a = R_{bc} \wedge *(e^{abc})$ 'den inşa edilen ve iyi bilinen (1-form) akımı $K_a *^{-1} G^a$ 'nın yüksek dereceli formlara bir genelleştirilmesidir.

Bu kesimde uzay-zamanın KY formları ve eğrilik karakteristikleri kullanılarak iki temel korunumlu akımın inşa edilebileceği ve (5.1)'de tanımlanan akımın bu temel akımların özel bir lineer birleşimi olduğu ispatlanmıştır. Dahası bu akımlardan birinin ko-tam olduğu gösterilmiş ve bunun sonucunda bazı temel geometrik sonuçlara ulaşılmıştır. Bu sonuçlar şu şekilde sıralanabilir; i) Herhangi bir (pseudo)Riemann manifoldun eğrilik skaleri manifoldun tüm Killing vektörlerine göre bir akış değişmezidir, ii) Korunumlu akımlar, difeomorfizmler için KY p -formları ile eğrilik 2-formları, Ricci 1-formları ve Einstein $(n-1)$ -formlarının büzülmeleri cinsinden bir ayrışım sağlarlar, bu büzülmeler KY formlarının kendileri ve (ko)türevleri cinsinden betimlenebilirler, iii) Einstein manifoldları üzerinde Killing ve Yano vektör alanlarının dualleri Laplace-Beltrami işlemcisinin özformlarıdır, öyle ki özdeğerler iyi tanımlı alt sınırlara sahip bir katlılık

gösterirler. Sabit eğrilikli manifoldlar üzerinde Laplace-Beltrami işlemcisinin spektrumu ile ilişkili bazı iyi bilinen gerçekler de korunumlu akımların özelliklerinden doğrudan ortaya çıkmaktadır.

5.1 İki Temel Korunumlu Akım

Bir KY p -formu ω için aşağıdaki şekilde üç tane p -form tanımlansın;

$$\begin{aligned} j_1 &= i_{X_a} i_{X_b} \omega \wedge R^{ab} \\ j_2 &= i_{X_a} \omega \wedge P^a \\ j_3 &= \Re \omega. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Bu kısımdaki temel amaç, (5.2)'de tanımlanan ifadeler kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulan

$$J_1 = -j_1 + (-1)^p j_2 \quad (5.3)$$

$$J_2 = (-1)^p j_2 + j_3 \quad (5.4)$$

akımlarının her p için herhangi bir (pseudo)Riemann manifold üzerinde ayrı ayrı korunduğunun ispatlanmasıdır. Bu akımlar temel akımlar olarak adlandırılacaklardır. J_1 ve J_2 'nin korunumlu olmaları herhangi lineer kombinasyonlarının da korunumlu olmasını gerektireceğinden $J = J_1 + J_2$ şeklinde yazılan (5.1) akımının korunumlu olması özel bir duruma karşılık gelir. Bu da fiziksel olarak anlamlı korunumlu yüklerin temel akımlar olan J_1 ve J_2 ile ilişkili olması gerektiğini gösterir. (5.3) ve (5.4) akımları daha kapalı olarak

$$J_1 = i_{X_a} (i_{X_b} \omega \wedge R^{ba}) \quad , \quad J_2 = (-1)^p i_{X_a} (\omega \wedge P^a) \quad (5.5)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu ifadelerden açıkça görülebileceği gibi KY 0-formları için J_1 özdeş olarak sıfır olurken J_2 ise j_3 'e eşit olur ve KY n -formları için ise her iki akım da sıfırdır. Dahası (5.1) akımı

$$J = i_{X_a} i_{X_b} (\omega \wedge R^{ba})$$

şeklinde yazılabileceğinden her KY $(n-1)$ -formu için J sıfırdır. Fakat bu durumda temel akımlar sıfırdan farklı olup lineer bağımlıdırlar. Dolayısıyla genel bir (pseudo)-Riemann manifoldda verilen bir KY p -formuna bağlı olan korunumlu akımların uzayı en az iki

boyutludur ve J_1 ve J_2 tarafından gerilir. Fakat bazı özel durumlarda bu akımlar da birbiriyle lineer bağımlı olabilir.

5.1.1 J_1 'in ko-tamlığı

J_1 akımının ko-tamlığı (3.23)'de tanımlanan eğrilik endomorfizminin KY formları üzerine etkisinin doğrudan bir sonucudur. Eğrilik işlemcisinin ve eğrilik endomorfizminin herhangi bir p -form ϕ üzerine etkileri aşağıdaki gibidir;

$$\mathbf{R}(X_a, X_b)\phi = -i_{X_c} R_{ab} \wedge i_{X^c} \phi \quad (5.6)$$

$$I(\mathbf{R})\phi = P_c \wedge i_{X^c} \phi - R_{cb} \wedge i_{X^b} i_{X^c} \phi. \quad (5.7)$$

İlk bağıntı (4.55)'de verilmiştir ve ikinci bağıntı da birincisinin bir sonucudur. Gerçekten de (5.6) ifadesi soldan $e^a \wedge$ ile çarpılır ve birinci Bianchi özdeşliği $R_{ab} \wedge e^b = 0$ kullanılırsa

$$e^a \wedge \mathbf{R}(X_a, X_b)\phi = -R_{cb} \wedge i_{X^c} \phi \quad (5.8)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ise i_{X^b} ile kontrakte edilerek (5.7) elde edilir. (5.7) ve (5.3) eşitliklerinin sağ tarafları karşılaştırılırsa J_1 'in, tanımında kullanılan KY p -formu ω üzerine eğrilik endomorfizminin etkisiyle üretilebileceği görülebilir;

$$J_1 = -I(\mathbf{R})\omega. \quad (5.9)$$

Bulunan son eşitliğin sağ tarafı daha önce (4.53) ve (4.54) denklemleriyle verilen Hessian ve eğrilik işlemcilerinin KY formları üzerindeki etkileri kullanılarak hesaplanabilir. (4.54)'ün her iki tarafının $e^a \wedge$ ile çarpılması

$$e^a \wedge \mathbf{R}(X_a, X_b)\omega = -\frac{P}{p+1} \nabla_{X^b} d\omega \quad (5.10)$$

sonucunu verir. Her iki tarafın i_{X^b} ile büzülmesi alınırsa da

$$I(\mathbf{R})\omega = \frac{P}{p+1} \delta d\omega \quad (5.11)$$

elde edilir. Bunun (5.9) ile karşılaştırılması sonucu

$$J_1 = -\frac{P}{p+1} \delta d\omega \quad (5.12)$$

bulunur. Bu da J_1 'in ko-tam p -form olduğunu ve dolayısıyla korunumlu bir akım olduğunu gösterir (Açık, Ertem, Önder and Verçin 2008c).

5.1.2 J_2 'nin ko-kapalılığı

J_2 'nin ko-kapalılığının ispatlanabilmesi için $d\omega$ 'nın kovaryant türevlerinin ve büzülmüş Bianchi özdeşliklerinin kullanılması gerekir. Bu özdeşliklerin bazıları literatürde kolaylıkla bulunamaz ve türetilmeleri Ek C'de gösterilmiştir.

(5.8) ve (5.10)'dan kolaylıkla

$$\nabla_{X_b} d\omega = \frac{p+1}{p} R_{cb} \wedge i_{X^c} \omega \quad (5.13)$$

eşitliği bulunabilir ve her iki tarafın kovaryant türevleri alınarak da

$$\nabla_{X_b} \nabla_{X_a} d\omega = \frac{p+1}{p} (\nabla_{X_b} R^c{}_a \wedge i_{X^c} \omega + R^c{}_a \wedge \nabla_{X_b} i_{X^c} \omega) \quad (5.14)$$

ifadesine ulaşılır. Bağlantı 1-formları ve eğrilik 2-formları kullanılarak aşağıdaki ifadeler tanımlansın;

$$T^{bca} = \nabla_{X^b} R^{ca} + \omega^{cl} (X^b) R_l^a + \omega^{al} (X^b) R_l^c \quad (5.15)$$

$$Q^{ba} = T^{bca} \wedge i_{X^c} \omega. \quad (5.16)$$

T^{bca} ifadesi Ek C'de ayrıntılı olarak incelenmiştir. (5.14) eşitliği Q^{ba} cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\nabla_{X^b} \nabla_{X^a} d\omega = \frac{p+1}{p} Q^{ba} - \omega^{al} (X^b) \nabla_{X^l} d\omega + \frac{1}{p} R^{ca} \wedge i_{X^c} i_{X^b} d\omega$$

ve Q^{ba} yalnız bırakılırsa

$$Q^{ba} = \frac{1}{p+1} (p \nabla^2 (X^b, X^a) - R^{ca} \wedge i_{X^c} i_{X^b}) d\omega \quad (5.17)$$

elde edilir.

(5.5)'deki gibi tanımlanan J_2 'nin ko-türevi alınarak

$$\delta J_2 = -(-1)^p i_{X_b} \nabla_{X^b} i_{X^a} (\omega \wedge P^a)$$

bulunur. Burada $[\nabla_X, i_Y] = i_{\nabla_X Y}$ bağıntısı, KY formlarının tanımı ve büzülmüş Bianchi özdeşliği $i_{X^b} P^a = i_{X^a} P^b$ kullanılırsa

$$\delta J_2 = -(-1)^p i_{X^a} i_{X^b} (\omega \wedge S^{ab})$$

yazılabilir. Burada $S_{ab} = \nabla_{X^a} P_b + \omega_{bk}(X^a)P^k$ şeklinde tanımlanmıştır. (C.13)'de verilen $S^{ab} = S^{ba} + i_{X^c} T^{cab}$ bağıntısı yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa

$$\delta J_2 = -\delta J_2 - (-1)^p i_{X^a} i_{X^b} (\omega i_{X^c} T^{cab}) \quad (5.18)$$

elde edilir. (C.12) eşitliğindeki T^{cab} için devirsellik özelliği kullanılarak da

$$\begin{aligned} 2\delta J_2 &= -i_{X^a} i_{X^b} \left[i_{X^c} (\omega \wedge T^{cab}) - i_{X^c} \omega \wedge T^{cab} \right] \\ &= i_{X^a} i_{X^b} (i_{X^c} \omega \wedge T^{cab}) \\ &= -i_{X^a} i_{X^b} \left[i_{X^c} \omega \wedge (T^{abc} + T^{bca}) \right] \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. T^{cab} 'nin (C.7)'de verilen son iki indisine göre anti-simetriklik özelliğinden

$$\delta J_2 = -i_{X^a} i_{X^b} Q^{ba} \quad (5.19)$$

bulunur.

Dolayısıyla J_2 'nin ko-kapalılığının ispatı Q^{ba} 'nın iki kez kontraksiyonunun sıfır olması şartına indirgenmiş olur. Hessian işlemcisinin önemli bir özelliği iki kez kontraksiyonunun sıfır olmasıdır;

$$i_{X^b} i_{X^a} \nabla^2 (X^b, X^a) = 0.$$

Bu ifade kullanılarak (5.17)'nin iki kez kontraksiyonunda sağ taraftaki ilk terimin sıfır olacağı görülebilir. Sağ taraftaki ikinci terim için ise aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$i_{X^a} i_{X^b} (R^{ca} \wedge i_{X^c} i_{X^b} d\omega) = i_{X^b} P^c \wedge i_{X^c} i_{X^b} d\omega + i_{X^b} R^{ca} \wedge i_{X^a} i_{X^c} i_{X^b} d\omega.$$

$i_{X^b} P^c$ simetrik olduğundan sağ taraftaki ilk terim ve $i_{X^b} R^{ca}$ 'nın simetrik toplamı sıfır olduğundan da ikinci terim sıfır olur. Bu da $i_{X^a} i_{X^b} Q^{ba} = 0$ eşitliğini ve dolayısıyla J_2 'nin ko-kapalılığını ispatlar (Açık, Ertem, Önder and Verçin 2008c).

5.2 Özel p -form Akımları

Bu kesimde $p = 1, n-2, n-1$ değerleri için temel p -form akımları incelenecek ve bunların yol açtığı bazı geometrik sonuçlar tartışılacaktır. Bu kesimde göz önüne alınacak özel durumlar dört boyut için tüm olasılıkları içerir.

5.2.1 1-form akımları

Açıkça görülebileceği gibi her KY 1-formu için j_1 özdeş olarak sıfırdır ve dolayısıyla j_2 ko-tamdır. Herhangi bir KY 1-formu ω için $j_2 = K_a P^a$ 'dır. Burada

$$K = (i_{X_a} \omega) X^a = K^a X_a$$

ω 'ya dual olan Killing vektör alanıdır ve (5.3) ve (5.12)'den

$$K_a P^a = \frac{1}{2} \delta d\tilde{K} \quad (5.20)$$

bulunur. Bu ifade daha önce (3.13)'de elde edilen ifadenin aynısıdır. Böylece daha önceden literatürde bilinen bu bağıntının (Benn and Tucker 1987) alternatif bir türetimi elde edilmiş olur. Daha önemli bir sonuç da J_1 'in ko-kapalılığının $\delta j_2 = 0$ 'a eşdeğer olması ve bunun da J_2 'nin ko-kapalı olabilmesi için j_3 'ün ko-kapalılığını gerektirmesidir. Diğer yandan $j_3 = \mathfrak{R} \omega$ tanımından

$$\delta j_3 = -i_{X_a} \nabla_{X^a} (\omega \mathfrak{R}) = (\delta \omega) \mathfrak{R} - i_{X_a} \omega \nabla_{X^a} \mathfrak{R}$$

bulunur. Bütün KY formları ko-kapalı olduğundan da $\delta j_3 = -\nabla_K \mathfrak{R} = 0$ ifadesine ulaşılır. Sonuç olarak, eğrilik skalerinin manifoldun herhangi bir Killing vektör alanı K 'ya göre kovaryant türevi sıfır olmalıdır;

$$\nabla_K \mathfrak{R} = 0. \quad (5.21)$$

Bu bağıntı, (pseudo)-Riemann geometri için Killing vektör alanlarının bir özelliğini ortaya koymaktadır (Açık, Ertem, Önder and Verçin 2008c). 0-formlar üzerinde Lie türevi ile kovaryant türev işlemleri çakıştığından, bu bağıntı aynı zamanda eğrilik skalerinin bir Killing vektör alanına göre Lie türevinin de sıfır olduğu anlamına gelir. Yani herhangi bir (pseudo)-Riemann manifoldun eğrilik skaleri, tüm Killing vektör

alanlarının bir akış değişmezidir. (5.21) denkleminin alternatif bir ispatı Ek D’de verilmiştir.

Yukarıda verilen 1-form akımları için

$$J = -K_a (2P^a - \mathfrak{R}e^a) = K_a {}^*G^a$$

ifadesi bulunur. Bu da başlangıçta yüksek formlar için genelleştirilmesi düşünülen akımdır. Ancak bu kısımdaki analiz göstermektedir ki bu akım (5.20) ile verilen j_2 ko-tam akımı ile ko-kapalı olan $J_2 = -K_a (P^a - \mathfrak{R}e^a)$ akımının toplamı şeklinde yazılabilmektedir.

5.2.2 Yano vektör alanlarının dualleri için akımlar

Yano vektörleri, integral eğrileri pre-jeodezikler olan yerel gradyent alanlarıdır ve özel konformal dönüşümleri üretirler. Yano vektörleri için geçerli olan $\omega_{(n-1)} = {}^*\tilde{Y}$ özelliği kullanılarak J_2 akımı aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$J_2 = (-1)^{n-1} i_{X_a} ({}^*\tilde{Y} \wedge P^a) = i_{X_a} (\tilde{Y} \wedge {}^*P^a). \quad (5.22)$$

Bianchi özdeşliği nedeniyle $i_{X_a} {}^*P^a = {}^*(P^a \wedge e_a) = 0$ olduğundan (5.22) eşitliğinden $Y_a {}^*P^a$ ’nın ko-kapalı olduğu ve eşdeğer olarak 1-form $Y_a P^a$ ’nın kapalı olduğu sonucu çıkartılabilir. Dolayısıyla $Y_a \tilde{P}^a$ vektör alanı yerel bir gradyent alanıdır.

J_1 akımını KY $(n-1)$ -formları cinsinden yazabilmek için öncelikle j_1 ve j_2 akımları aşağıdaki gibi KY $(n-1)$ -formu ${}^*\tilde{Y}$ ve Einstein $(n-1)$ -formu G^a cinsinden yazılsın;

$$j_1 = i_{X^a} i_{X^b} {}^*\tilde{Y} \wedge R_{ab} = -Y_a G^a \quad (5.23)$$

$$j_2 = i_{X_a} {}^*\tilde{Y} \wedge P^a = Y^b {}^*e_{ab} \wedge P^a = (-1)^n Y_a (G^a + {}^*P^a). \quad (5.24)$$

Burada $G^c = R_{ab} \wedge {}^*e^{cab} = \mathfrak{R} {}^*e^c - 2 {}^*P^c$ tanımı kullanılmıştır. (5.23) ve (5.24) ifadeleri (5.3)’de yerine yazılırsa

$$J_1 = -Y_a {}^*P^a \quad (5.25)$$

bulunur. (5.12) göz önüne alındığında da bu $Y_a * P^a$ 'nın ko-tamlığını;

$$Y_a * P^a = \frac{n-1}{n} \delta d * \tilde{Y} \quad (5.26)$$

ya da eşdeğer olarak $Y_a P^a$ 'nın tamlığını ispatlar;

$$Y_a P^a = \frac{n-1}{n} d \delta \tilde{Y}. \quad (5.27)$$

(5.20) ve (5.27) denklemleri Killing ve Yano vektör alanlarının fizikte olduğu kadar geometride de önemli olabilecek rollerini ortaya koymaktadır. Bu vektör alanları Ricci 1-formları için “integre edici vektör alanlarıdır”, yani manifold bu vektör alanlarına sahipse Ricci 1-formlarıyla büzülmeleri sırasıyla ko-tam ve tam formlardır, öyle ki bu ifadeler de bu vektör alanlarının dualleri cinsinden yazılabilirler. Ayrıca bu ifadeler Einstein $(n-1)$ -formlarının tam ve ko-tam kısımlarına bir ayrışımını verir. Diğer yandan bir KY $(n-2)$ -formu ω için bir kapalı konformal KY 2-formu β cinsinden $\omega = * \beta$ yazılabilir. Bu durumda

$$J = i_{X_a} i_{X_b} (\omega \wedge R^{ba}) = \beta_{ba} * R^{ba}$$

elde edilir ki bu da $\beta_{ba} * R^{ba}$ 'nın ko-tam J_1 ve ko-kapalı J_2 cinsinden bir ayrışımını verir.

5.3 Bazı Özel Manifoldlar Üzerinde Korunumlu Akımlar

Ricci-düz bir (pseudo)-Riemann manifold için $P^a = 0$ ve dolayısıyla $\mathfrak{R} = 0$ 'dır, bu durumda J_2 özdeş olarak sıfır iken J_1 ise $-j_1$ 'e eşit olur. Dolayısıyla böyle bir manifolddaki her bir KY p -formu ω için

$$(i_{X_a} i_{X_b} \omega) \wedge R^{ab} = \frac{p}{p+1} \delta d \omega$$

eşitliği vardır.

İkinci olarak konformal 2-formlarının sıfır olmasıyla ya da eşdeğer olarak

$$R_{ab} = \frac{1}{n-2} \left(P_a \wedge e_b - P_b \wedge e_a + \frac{\mathfrak{R}}{n-1} e_a \wedge e_b \right)$$

eşitliğiyle tanımlanan konformal olarak düz bir (pseudo)-Riemann manifold göz önüne alınsın. Bu ifade j_1 'in j_2 ve j_3 'e lineer olarak bağımlı olduğunu ifade eder ve

$$J_1 = (-1)^p \frac{n-2p}{n-2} j_2 - \frac{p(p-1)}{(n-1)(n-2)} j_3$$

sonucunu verir. Dolayısıyla n çift iken ve $p = n/2$ için j_3 ko-tamdır. Genel olarak (5.3) ve (5.4)'den $1 < p < n-1$ durumunda J_1 ve J_2 'nin lineer bağımsız olabilmemesinin ancak ve ancak j_2 ve j_3 'ün lineer bağımsız olmasıyla mümkün olduğu söylenebilir.

5.3.1 Sabit eğrilikli uzay-zamanlar

n boyutlu sabit eğrilikli bir uzay-zaman bir c sabiti için $R_{ab} = ce_a \wedge e_b$ eşitliği ile karakterize edilir ve bunun sonucu olarak

$$P_a = c(n-1)e_a, \quad \mathfrak{R} = cn(n-1) \quad (5.28)$$

ifadeleri yazılabilir. Bu durumda, akımlar için

$$\begin{aligned} J_1 &= -c(i_{X^a} i_{X^b} \omega) \wedge e_{ab} + (-1)^p c(n-1) i_{X^a} \omega \wedge e^a \\ &= -cp(n-p)\omega \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= (-1)^p c(n-1) i_{X^a} \omega \wedge e^a + cn(n-1)\omega \\ &= c(n-1)(n-p)\omega \end{aligned} \quad (5.30)$$

eşitlikleri geçerlidir. Dolayısıyla akımlar, tanımlayıcı KY formlarının sabit katları olurlar ve birbirleriyle lineer bağımlıdırlar. Dahası, akımların ko-kapalılığı da KY formların ko-kapalılığına karşılık gelir ve yeni bir sonuç vermez. Fakat J_1 'in ko-tamlığının bazı sonuçları vardır.

(5.12) ve (5.29) karşılaştırılırsa $p \neq 0$ için

$$\delta d\omega = c(p+1)(n-p)\omega$$

elde edilir. KY formlarının ko-kapalı olduğu göz önüne alınarak da her KY p -formunun Laplace-Beltrami işlemcisinin bir özformu olduğu sonucuna ulaşılabilir;

$$d^2\omega = -c(p+1)(n-p)\omega. \quad (5.31)$$

Özdeğerler n 'ye, KY formunun derecesine ve c sabitine bağlıdır. Özel olarak özdeğerlerin işareti c 'nin işaretinin tersidir. Metrik uyumlu bir bağlantı Hodge yıldız işlemcisiyle sıra değiştiğinden, d^2 işlemcisi de Hodge yıldız ile sıra değişir. Dolayısıyla (5.31)'den herhangi bir KY p -formunun Hodge duali de d^2 'nin aynı özdeğere sahip bir $(n-p)$ -özformudur. Eğer Laplace-Beltrami işlemcisinin sadece p -özdeğerleri göz önüne alınırsa, bir KY $(n-p)$ -formunun Hodge dualinden de başka bir özdeğer serisi elde edilir. Yani bir β KY $(n-p)$ -formu ve $\alpha = *\beta$ için

$$d^2\alpha = -cp(n-p+1)\alpha$$

eşitliği vardır. Burada α bir kapalı konformal KY p -formudur. Sonuç olarak, bir KY p -formuna karşılık gelen her özdeğer, lineer bağımsız KY p -formlarının sayısından daha az olmayan bir katlılığa sahiptir. Özel bir durum n çift ve $p = n/2$ için oluşur. Bu durumda, bahsedilen alt sınır self-dual ve anti-self-dual KY p -formlarının varlığına bağlı olarak artabilir.

5.3.2 Einstein manifoldları

Bu kısımda $P^a = ke^a$ eşitliği ile karakterize edilen Einstein manifoldları göz önüne alınacaktır. Burada $k = \mathfrak{R}/n$ 'dir. Üç boyutta her Einstein uzayı sabit eğrilikli olacağından burada aşikar olmayan sonuçlara ulaşabilmek için $n \geq 4$ ve $R_{ab} \neq ce_a \wedge e_b$ olarak alınacaktır. Bu durumda temel akımlar aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$J_1 = -i_{X^a}i_{X^b}\omega \wedge R_{ab} - kp\omega,$$

$$J_2 = k(n-p)\omega.$$

J_2 'nin korunumu aşikardır, ancak J_1 'in ko-tamlığından

$$\begin{aligned} J_1 &= i_{X^a}i_{X^b}\omega \wedge R_{ab} \\ &= kp\omega - \frac{p}{p+1}\delta d\omega \end{aligned}$$

yazılabilir.

Özel olarak, bir Einstein manifoldundaki her KY 2-formu $\omega = (1/2)\omega_{ab}e^{ab}$ için “büzülmüş” eğrilik 2-formu $\omega_{ba}R^{ab}$ şu şekilde yazılabilir;

$$\omega_{ba}R^{ab} = 2k\omega - \frac{2}{3}\delta d\omega. \quad (5.32)$$

Bu bağıntı bir Einstein uzayındaki her KY 2-formu için eğrilik 2-formlarının (5.32)'deki gibi büzülmelerinin ko-kapalı ve ko-tam kısımlarına bir ayrışımını vermektedir. Diğer yandan (5.20) ve (5.27) bağıntılarından Einstein manifoldları durumunda \tilde{K} ve \tilde{Y} 'nin Laplace-Beltrami işlemcisinin özformları olduğu sonucu çıkartılabilir;

$$d^2\tilde{K} = -2k\tilde{K} \quad , \quad d^2\tilde{Y} = k\frac{n}{n-1}\tilde{Y}. \quad (5.33)$$

Burada ilk durumda özdeğerler k ile ters işaretli iken ikinci durumda aynı işaretlidir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada, daha önce literatürde bulunan en genel boyut ve imzaya sahip eğri uzay-zamanda Dirac denkleminin birinci mertebeden simetri işlemcilerinin bulunması problemi, en genel boyut ve imzaya sahip eğri uzay-zamanda Maxwell alanı ile etkileşim terimi içeren Dirac denklemi durumuna genelleştirilmiştir. Birinci mertebeye simetri işlemcileri, uzay-zamanın sahip olduğu KY formlarının dış türevleri ve potansiyel alanı ile büzülmeleri cinsinden yazılmıştır. Ancak, uzay-zamanın sahip olduğu KY formları arasından yalnızca Maxwell alanı ile Clifford anlamında sıradeğişenlerin birinci mertebeye simetri işlemcilerinin inşasında kullanılabileceğini ifade eden bir dinamik simetri koşulu bulunmuştur. Ayrıca bu dinamik simetri koşulunun özel durumları da tartışılmıştır. Özel olarak, KY $(n-1)$ -formları ve KY 1-formları, ancak bunlara karşılık gelen Yano ve Killing vektörleri Maxwell alanının bileşenlerinden kurulan F_{ab} anti-simetrik matrisinin çekirdeğinde bulunuyorlarsa simetri işlemcilerinin inşasında kullanılabilirler. Bu da F_{ab} 'nin tekil olmayan bir matris olduğu durumda KY $(n-1)$ -formları ve KY 1-formlarının simetri işlemcilerinde yer alamayacağı anlamına gelir.

Eğri uzay-zamanın global yapısını belirleyen Yano vektörlerinin varlığı durumundaki sonuçlar da tartışılmıştır. Ayrıca, dinamik simetri koşulunu sağlayan KY formları için, herhangi boyut ve imzaya sahip eğri uzay-zamandaki klasik hareket için bir hareket sabitine karşılık gelen hıza bağlı bir karesel fonksiyonunun var olduğu da gösterilmiştir.

Doğrudan KY denkleminin çözümleri yapılarak, küresel simetrik uzay-zamanlar için KY formlarının açık ifadeleri elde edilmiştir. Bu şekilde bulunan Schwarzschild ve Reissner-Nordström uzay-zamanları için KY formları kullanılarak, bu uzay-zamanlardaki Dirac denkleminin simetri işlemcileri inşa edilmiş ve bu işlemcilerin sağladığı cebir incelenmiştir. Diğer uzay-zamanlardaki simetri işlemcilerinin sağladığı cebirlerin bulunması da benzer şekilde tartışılabilir.

KY formları ile korunumlu akımlar arasındaki ilişki incelenmiş ve daha önce literatürde bulunan ve KY formları ile eğrilik karakteristikleri kullanılarak inşa edilen korunumlu akımın, iki tane lineer bağımsız temel korunumlu akım cinsinden yazılabileceği gösterilmiştir. Daha önce literatürde bulunan akım, bu temel akımların bir lineer birleşimidir. Ayrıca daha önce ileri sürülen akım, KY $(n-1)$ -formları için sıfır olurken, yeni bulunan temel akımlar sıfır olmayıp birbirlerine lineer bağımlı hale gelirler. Bu temel akımlardan birinin ko-kapalı değerinin de ko-tam olduğu ispatlanmıştır. Bir temel akımın ko-tam olması bazı özel durumlar için çeşitli sonuçlar ortaya koymuştur. Herhangi bir (pseudo)-Riemann manifoldun eğrilik skaleri, manifoldun bütün Killing vektörlerine göre bir akış değişmezidir; $\nabla_K \mathcal{R} = 0$. Bir Einstein manifoldu üzerinde, bütün Killing ve Yano vektör alanlarının dualleri Laplace-Beltrami işlemcisinin özformlarıdır ve özdeğerleri iyi tanımlı alt sınırları olan çok katlılığa sahiptir. Sabit eğrilikli bir (pseudo)-Riemann manifoldda, bütün KY formları ve bunların Hodge dualleri Laplace-Beltrami işlemcisinin özformlarıdır.

Bulunan bu temel korunumlu akımlar kullanılarak, bunlara karşılık gelen korunumlu yüklerin inşa edilmesi mümkündür. Bulunacak bu genelleştirilmiş yüklerin fiziksel anlamlarının tartışılması da ileriye yönelik bir problem olarak görülebilir.

KAYNAKLAR

- Abbott, L. F. and Deser, S. 1982. Stability of gravity with a cosmological constant. Nucl. Phys. B, 195; 76.
- Açık, Ö., Ertem, Ü., Önder, M. and Verçin, A. 2008a. Killing-Yano forms of a class of spherically symmetric space-times I: A unified generation of Killing vector fields. e-print arXiv: 0803.3327.
- Açık, Ö., Ertem, Ü., Önder, M. and Verçin, A. 2008b. Killing-Yano forms of a class of spherically symmetric space-times II: A unified generation of higher forms. e-print arXiv: 0803.3328.
- Açık, Ö., Ertem, Ü., Önder, M. and Verçin, A. 2008c. Basic gravitational currents and Killing-Yano forms. e-print arXiv: 0811.1712.
- Açık, Ö., Ertem, Ü., Önder, M. and Verçin, A. 2009. First-order symmetries of Dirac equation in curved background: A unified dynamical symmetry condition. Class. Quant. Grav., 26; 075001.
- Arnold, R., Deser, S. and Misner, C. W. 1960. The dynamics of general relativity. Phys. Rev., 17; 1595, Gravitation: An Introduction to Current Research, edited by L. Witten, Wiley, New York, 1962.
- Benn, I. M. 1994. A unified description of null and non-null shear-free congruences. J. Math. Phys., 35; 1796.
- Benn, I. M. 2006. Geodesics and Killing tensors in mechanics. J. Math. Phys., 47; 022903.
- Benn, I. M. and Charlton, P. 1997. Dirac symmetry operators from conformal Killing-Yano tensors. Class. Quant. Grav., 14; 1037.

- Benn, I. M., Charlton, P. R. and Kress, J. 1997. Debye potentials for Maxwell and Dirac fields from a generalization of the Killing-Yano equation. *J. Math. Phys.*, 38; 4504.
- Benn, I. M. and Kress, J. 1996. Force-free fields from Hertz potentials. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29; 6295.
- Benn, I. M. and Kress, J. 2004. First-order Dirac symmetry operators. *Class. Quant. Grav.*, 21; 427.
- Benn, I. M. and Kress, J. 2005. Symmetry operators for the Dirac and Hodge-de Rham equation. *Dif. Geo and Appl. Proc. Conf. Prague*, 421.
- Benn, I. M. and Tucker, R. W. 1987. *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*. Adam Hillger, 350 s., Bristol.
- Cariglia, M. 2004. Quantum mechanics of Yano tensors: Dirac equation in curved spacetime. *Class. Quant. Grav.*, 21; 1051.
- Carter, B. 1968. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Phys. Rev.*, 174; 1559.
- Carter, B. 1977. Killing tensor quantum numbers and conserved currents in curved background. *Phys. Rev. D*, 16; 3395.
- Carter, B. and McLenaghan, R. G. 1979. Generalized total angular momentum operator for the Dirac equation in curved space-time. *Phys. Rev. D*, 19; 1093.
- Cebeci, H., Sarioğlu, Ö. and Tekin, B. 2006. Gravitational charges of transverse asymptotically AdS space-times. *Phys. Rev. D*, 74; 124021.

- Coley, A. 2008. Classification of the Weyl tensor in higher dimensions and applications. *Class. Quant. Grav.*, 25; 033001.
- Collinson, C. D. and Howarth, L. 2000a. Generalized Killing tensors. *Gen. Rel. Grav.*, 32; 1767.
- Collinson, C. D. and Howarth, L. 2000b. Letter: Note on Killing-Yano tensors admitted by spherically symmetric static space-times. *Gen. Rel. Grav.*, 32; 1845.
- Dietz, W. and Rüdiger, R. 1982. Space-times admitting Killing-Yano tensors II. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 381; 315.
- Frolov, P. V. and Kubiznak, D. 2007. Hidden symmetries of higher-dimensional rotating black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 98; 011101.
- Frolov, P. V. and Kubiznak, D. 2008. Higher dimensional black holes: Hidden symmetries and separation of variables. *Class. Quant. Grav.*, 25; 154005.
- Gibbons, G. W., Rietdijk, R. H. and von Holten, J. W. 1993. SUSY in the sky. *Nucl. Phys. B*, 404; 42.
- Hughston, L. P., Penrose, R., Sommers, P. and Walker, M. 1972. On a quadratic first integral for the charged particle orbits in the charged Kerr solution. *Commun. Math. Phys.*, 27; 303.
- Kamran, N. and McLenaghan, R. G. 1984. Symmetry operators for neutrino and Dirac fields on curved spacetime. *Phys. Rev. D*, 30; 357.
- Kastor, D., Ray, S. and Traschen, J. 2007. Do Killing-Yano tensors form a Lie algebra?. *Class. Quant. Grav.*, 24; 3759.

- Kastor, D. and Traschen, J. 2004. Conserved gravitational charges from Yano tensors. *J. High En. Phys.*, 0408; 045.
- Kress, J. 1997. Generalized conformal Killing-Yano tensors: Applications to electrodynamics. <http://web.maths.unsw.edu.au/~jonathan/research>.
- Kubiznak, D. 2008. Hidden symmetries of higher-dimensional rotating black holes. e-print arXiv: 0809.2452.
- McLenaghan, R. G. and Spindel, Ph. 1979. Quantum numbers for Dirac spinor fields on a curved space-time. *Phys. Rev. D*, 20; 409.
- Penrose, R. 1973. Naked singularities. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 224; 125.
- Semmelmann, U. 2003. Conformal Killing forms on Riemannian manifolds. *Math. Z.*, 243; 503.
- Stepanov, S. E. 2003. The Killing-Yano tensor. *Theor. Math. Phys.*, 134; 333.
- Thirring, W. 1997. *Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theory*. Third Edition, Springer, 543 s., New York.
- Walker, M. and Penrose, R. 1970. On quadratic first integrals of the geodesic equations for type {2,2} spacetimes. *Commun. Math. Phys.*, 18; 265.

E K L E R

EK A. KÜRESEL SİMETRİK UZAY-ZAMANLARDA KY FORMLARI

EK B. SCHWARZSCHILD VE REISSNER-NORDSTRØM UZAY-ZAMANLARI

İÇİN KÜTLELİ DIRAC DENKLEMİNİN SİMETRİ CEBİRİ

EK C. BÜZÜLMÜŞ BIANCHI ÖZDEŞLİKLERİ

EK D. $\nabla_k \mathfrak{R} = 0$ İÇİN ALTERNATİF BİR İSPAT

EK A. KÜRESEL SİMETRİK UZAY-ZAMANLARDA KY FORMLARI

4 boyutta belirli bir pseudo-Riemann manifold için KY denklemleri çözülerek KY formları elde edilebilir. 1-form bazı cinsinden metrik

$$g = -e^0 \otimes e^0 + e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$e^0 = H_0 dt \quad , \quad e^1 = TH_1 dr$$

$$e^2 = TH_2 d\theta \quad , \quad e^3 = TH_2 \sin \theta d\varphi$$

biçiminde alınarak küresel simetrik bir metrik sınıfı seçilmiş olur. Ayrıca

$$T = \exp(\lambda(t)) \text{ ve } H_j = H_j(r) \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

olmak üzere t ve r 'nin fonksiyonlarıdır. Bu şekilde tanımlanan 1-formların metrik dualleri ise

$$X_0 = \frac{1}{H_0} \partial_t \quad , \quad X_1 = \frac{1}{TH_1} \partial_r$$

$$X_2 = \frac{1}{TH_2} \partial_\theta \quad , \quad X_3 = \frac{1}{TH_2 \sin \theta} \partial_\varphi$$

biçimindedir. KY denklemleri bu sınıf küresel simetrik uzay-zamanlar için yazılıp çözülerek, küresel simetrik uzay-zamanlardaki KY formları bulunabilir. Minkowski, Schwarzschild, Reissner-Nordström, Robertson-Walker ve de Sitter gibi iyi bilinen küresel simetrik uzay-zamanların tümü yukarıda seçilen sınıf içerisinde yer alır. Dolayısıyla denklemlerin çözümüyle bu uzay-zamanlar için var olan tüm KY formları bulunabilir. KY denkleminin küresel simetrik uzay-zamanlardaki çözümüyle ilgili ayrıntılı hesaplar (Açık, Ertem, Önder and Verçin 2008a ve 2008b)'de bulunabilir. Aşağıdaki çizelgede çeşitli fiziksel küresel simetrik uzay-zamanlar için KY formlarının sayısı gösterilmiştir. Bu KY formlarının açık ifadeleri ise alt kesimlerde verilmiştir.

Çizelge A.1 Çeşitli fiziksel küresel simetrik uzay-zamanlar için KY formlarının sayısı.

<u>uzay-zaman</u>	T	H_0	H_1	<u>KY-1</u>	<u>KY-2</u>	<u>KY-3</u>
Schwarzschild	1	$\sqrt{1-\frac{2M}{r}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$	4	1	0
Reissner-Nordström	1	$\sqrt{1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}}}$	4	1	0
Robertson-Walker	$T(t)$	1	$\frac{1}{\sqrt{1-kr^2}}$	6	4	1
de Sitter üstel form	$\exp(Ht)$	1	1	10	10	5
zamana bağlı	$T(t)$	1	$\frac{1}{\sqrt{1-\ell r^2}}$	10	10	5
statik form	1	$\sqrt{1-kr^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-kr^2}}$	10	10	5
Minkowski	1	1	1	10	10	5

A.1 KY 1-Formları

Schwarzschild ve Reissner-Nordström uzay-zamanları için 4 tane olan KY 1-formları aşağıdakilerdir;

$$\tilde{K}_0 = H_0 e^0$$

$$\tilde{K}_1 = TH_2 (\sin \varphi e^2 + \cos \theta \cos \varphi e^3)$$

$$\tilde{K}_2 = TH_2 (-\cos \varphi e^2 + \cos \theta \sin \varphi e^3)$$

$$\tilde{K}_3 = -TH_2 \sin \theta e^2.$$

Roberston-Walker uzay-zamanı için 6 tane olan KY 1-formları ise şu şekildedir;

$$\tilde{K}_1 = TH_2 (\sin \varphi e^2 + \cos \theta \cos \varphi e^3)$$

$$\tilde{K}_2 = TH_2 (-\cos \varphi e^2 + \cos \theta \sin \varphi e^3)$$

$$\tilde{K}_3 = -TH_2 \sin \theta e^2$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= T \left(\sin \theta \cos \varphi e^1 + \frac{H'_2}{H_1} \cos \theta \cos \varphi e^2 - \frac{H'_2}{H_1} \sin \varphi e^3 \right) \\ \omega_2 &= T \left(-\sin \theta \sin \varphi e^1 - \frac{H'_2}{H_1} \cos \theta \sin \varphi e^2 - \frac{H'_2}{H_1} \cos \varphi e^3 \right) \\ \omega_3 &= T \left(\cos \theta e^1 - \frac{H'_2}{H_1} \sin \theta e^2 \right).\end{aligned}$$

de Sitter uzay-zamanı için KY 1-formlarının sayısı 10 tanedir. Ancak de Sitter metriğinin farklı biçimleri için KY formları da farklıdır. Üstel de Sitter metriği için;

$$\begin{aligned}\tilde{K}_1 &= TH_2 (\sin \varphi e^2 + \cos \theta \cos \varphi e^3) \\ \tilde{K}_2 &= TH_2 (-\cos \varphi e^2 + \cos \theta \sin \varphi e^3) \\ \tilde{K}_3 &= -TH_2 \sin \theta e^2 \\ \omega_1 &= H_0 e^0 + \frac{\dot{T}}{P} e^1 \\ \omega_2 &= \dot{T} (\cos \theta e^1 - H_2 P \sin \theta e^2) \\ \omega_3 &= \dot{T} (\sin \theta \cos \varphi e^1 + H_2 P \cos \theta \cos \varphi e^2 - H_2 P \sin \varphi e^3) \\ \omega_4 &= \dot{T} (-\sin \theta \sin \varphi e^1 - H_2 P \cos \theta \sin \varphi e^2 - H_2 P \cos \varphi e^3) \\ \omega_5 &= T (\cos \theta e^1 - H_2 P \sin \theta e^2) \\ \omega_6 &= T (\sin \theta \cos \varphi e^1 + H_2 P \cos \theta \cos \varphi e^2 - H_2 P \sin \varphi e^3) \\ \omega_7 &= T (-\sin \theta \sin \varphi e^1 - H_2 P \cos \theta \sin \varphi e^2 - H_2 P \cos \varphi e^3),\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $P = \frac{H'_2}{H_1 H_2}$ biçiminde tanımlanmıştır. Zamana bağlı de Sitter metriği için ise KY 1-formları;

$$\begin{aligned}\tilde{K}_1 &= TH_2 (\sin \varphi e^2 + \cos \theta \cos \varphi e^3) \\ \tilde{K}_2 &= TH_2 (-\cos \varphi e^2 + \cos \theta \sin \varphi e^3) \\ \tilde{K}_3 &= -TH_2 \sin \theta e^2 \\ \omega_1 &= H_2 (H_0 P e^0 + \dot{T} e^1)\end{aligned}$$

$$\omega_2 = H_2 \left(\cos \theta e^0 + \dot{T} \frac{H_2}{H_0} \sin \theta e^1 \right)$$

$$\omega_3 = H_2 \left(\sin \theta \cos \varphi e^0 - \frac{\dot{T}}{\ell} H_0 P \cos \theta \cos \varphi e^1 - \left(\dot{T} \frac{H_2}{H_0} \cos \theta \cos \varphi - (\dot{T}P)^2 \frac{H_0 H_2}{\ell} \sin \theta \cos \varphi \right) e^2 + \frac{\dot{T}}{H_0} \sin \varphi e^3 \right)$$

$$\omega_4 = H_2 \left(-\sin \theta \sin \varphi e^0 + \frac{\dot{T}}{\ell} H_0 P \cos \theta \sin \varphi e^1 + \left(\dot{T} \frac{H_2}{H_0} \cos \theta \sin \varphi - (\dot{T}P)^2 \frac{H_0 H_2}{\ell} \sin \theta \sin \varphi \right) e^2 + \frac{\dot{T}}{H_0} \cos \varphi e^3 \right)$$

$$\omega_5 = T \left(\cos \theta e^1 - \dot{T} H_2 P \sin \theta e^2 \right)$$

$$\omega_6 = \sin \theta \cos \varphi e^1 + \dot{T} H_2 P \cos \theta \cos \varphi e^2 - H_2 P \sin \varphi e^3$$

$$\omega_7 = -\sin \theta \sin \varphi e^1 - \dot{T} H_2 P \cos \theta \sin \varphi e^2 - H_2 P \cos \varphi e^3$$

ile verilir. Statik de Sitter metriği için KY 1-formları ise aşağıdaki biçimde elde edilirler;

$$\tilde{K}_0 = H_0 e^0$$

$$\tilde{K}_1 = T H_2 \left(\sin \varphi e^2 + \cos \theta \cos \varphi e^3 \right)$$

$$\tilde{K}_2 = T H_2 \left(-\cos \varphi e^2 + \cos \theta \sin \varphi e^3 \right)$$

$$\tilde{K}_3 = -T H_2 \sin \theta e^2$$

$$\omega_1 = \cos \theta \psi_1 - \kappa \frac{H_2'}{H_1} \sinh \kappa \tau \sin \theta e^2 \quad , \quad \omega_2 = \cos \theta \psi_2 - \kappa \frac{H_2'}{H_1} \cosh \kappa \tau \sin \theta e^2$$

$$\omega_3 = \sin \theta \cos \varphi \psi_1 + \kappa \frac{H_2'}{H_1} \sinh \kappa \tau \phi_1 \quad , \quad \omega_4 = \sin \theta \cos \varphi \psi_2 + \kappa \frac{H_2'}{H_1} \cosh \kappa \tau \phi_1$$

$$\omega_5 = -\sin \theta \sin \varphi \psi_1 - \kappa \frac{H_2'}{H_1} \sinh \kappa \tau \phi_2 \quad , \quad \omega_6 = -\sin \theta \sin \varphi \psi_2 - \kappa \frac{H_2'}{H_1} \cosh \kappa \tau \phi_2 .$$

Burada

$$\psi_1 = \cosh \kappa \tau \frac{H_0'}{H_1} e^0 + \kappa \sinh \kappa \tau e^1 \quad , \quad \psi_2 = \sinh \kappa \tau \frac{H_0'}{H_1} e^0 + \kappa \cosh \kappa \tau e^1$$

$$\phi_1 = \cos \theta \cos \varphi e^2 - \sin \varphi e^3 \quad , \quad \phi_2 = \cos \theta \sin \varphi e^2 + \cos \varphi e^3$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca κ bir integral sabiti ve $\tau = t/T$ 'dir.

Minkowski uzay-zamanı için de 10 tane olan KY 1-formları aşağıdaki gibidir;

$$\tilde{K}_0 = H_0 e^0$$

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_1 &= TH_2 (\sin \varphi e^2 + \cos \theta \cos \varphi e^3) \\
\tilde{K}_2 &= TH_2 (-\cos \varphi e^2 + \cos \theta \sin \varphi e^3) \\
\tilde{K}_3 &= -TH_2 \sin \theta e^2 \\
\omega_1 &= -\frac{1}{H_0 P} \cos \theta e^0 + \tau \cos \theta e^1 + \tau H_2 P \cos \theta e^2 \\
\omega_2 &= \sin \theta \cos \varphi \left(-\frac{1}{H_0 P} e^0 + \tau e^1 + \tau H_2 P e^2 \right) - \tau H_2 P \sin \varphi e^3 \\
\omega_3 &= \sin \theta \sin \varphi \left(\frac{1}{H_0 P} e^0 - \tau e^1 - \tau H_2 P e^2 \right) - \tau H_2 P \cos \varphi e^3 \\
\omega_4 &= \cos \theta (e^1 + H_2 P e^2) \\
\omega_5 &= \sin \theta \cos \varphi (e^1 + H_2 P e^2) - H_2 P \sin \varphi e^3 \\
\omega_6 &= \sin \theta \sin \varphi (-e^1 - H_2 P e^2) - H_2 P \cos \varphi e^3.
\end{aligned}$$

A.2 KY 2-Formları

Küresel simetrik uzay-zamanların hepsi için geçerli olan bir KY 2-formu yazılabilir (statik durum için bu Collinson and Howarth (2000a) ve (2000b)'de gösterilmiştir, en genel durumda ise Açıık, Ertem, Önder and Verçin (2008b)'de hesaplanmıştır). Bu da Schwarzschild ve Reissner-Nordström uzay-zamanları için yazılabilen tek KY 2-formuna karşılık gelir;

$$\omega_0 = TH_2 e^{23}.$$

Robertson-Walker uzay-zamanı içinse 4 tane olan KY 2-formları şunlardır;

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= TH_2 e^{23} \\
\omega_1 &= T (\cos \varphi e^{12} - \cos \theta \sin \varphi e^{13}) + H_2 P \sin \theta \sin \varphi e^{23} \\
\omega_2 &= T (\sin \varphi e^{12} + \cos \theta \cos \varphi e^{13}) - H_2 P \sin \theta \cos \varphi e^{23} \\
\omega_3 &= T (\sin \theta e^{13} + H_2 P \cos \theta e^{23}).
\end{aligned}$$

Farklı tipteki de Sitter uzay-zamanları içinse KY 2-formlarının sayısı maksimal sayı olan 10 tanedir. Üstel de Sitter metriği için

$$\begin{aligned}\omega_0 &= TH_2 e^{23} \\ \omega_1 &= 2 \frac{H_0}{\lambda} H_2 e^0 \wedge \Phi_\varphi + \varepsilon TS_+ e^1 \wedge \Phi - TS_- \sin \theta \sin \varphi e^{23} \\ \omega_2 &= 2 \frac{H_0}{\lambda} H_2 e^0 \wedge \Phi - \varepsilon TS_+ e^1 \wedge \Phi_\varphi - TS_- \sin \theta \cos \varphi e^{23} \\ \omega_3 &= 2 \frac{H_0}{\lambda} H_2 \sin \theta e^{03} + \varepsilon TS_+ \sin \theta e^{13} - TS_- \cos \theta e^{23} \\ \omega_4 &= \cos \theta e^{01} - \sin \theta \Psi \wedge e^2 \\ \omega_5 &= \cos \varphi (\sin \theta e^{01} + \cos \theta \Psi \wedge e^2) - \sin \varphi \Psi \wedge e^3 \\ \omega_6 &= \sin \varphi (\sin \theta e^{01} + \cos \theta \Psi \wedge e^2) + \cos \varphi \Psi \wedge e^3 \\ \omega_7 &= -\varepsilon T \cos \varphi e^{12} + T \sin \varphi (\varepsilon \cos \theta e^{13} - \sin \theta e^{23}) \\ \omega_8 &= -\varepsilon T \sin \varphi e^{12} - T \cos \varphi (\varepsilon \cos \theta e^{13} - \sin \theta e^{23}) \\ \omega_9 &= -\varepsilon T \sin \theta e^{13} - T \cos \theta e^{23}\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$S_\pm = H_2^2 \pm \frac{H_0^2}{\lambda^2 T^2}, \quad \Phi = \cos \varphi e^2 - \cos \theta \sin \varphi e^3, \quad \Psi = \varepsilon e^0 + \frac{\lambda}{H_0} TH_2 e^1$$

olarak tanımlanmıştır. ε ve λ ise $H_2 P = \varepsilon$ ve $\dot{T} = \lambda T$ şeklinde tanımlanan sabitlerdir.

Zamana bağlı de Sitter metriği içinse KY 2-formları

$$\begin{aligned}\omega_0 &= TH_2 e^{23} \\ \omega_1 &= -T \cos \varphi e^{12} + T \sin \varphi (\cos \theta e^{13} + H_2 P \sin \theta e^{23}) \\ \omega_2 &= -T \sin \varphi e^{12} - T \cos \varphi (\cos \theta e^{13} - H_2 P \sin \theta e^{23}) \\ \omega_3 &= -T (\sin \theta e^{13} + H_2 P \cos \theta e^{23}) \\ \omega_4 &= \cos \theta e^{01} - H_2 \sin \theta \Omega_1 \wedge e^2 \\ \omega_5 &= \cos \varphi (\sin \theta e^{01} + H_2 \cos \theta \Omega_1 \wedge e^2) - H_2 \sin \varphi \Omega_1 \wedge e^3 \\ \omega_6 &= \sin \varphi (\sin \theta e^{01} + H_2 \cos \theta \Omega_1 \wedge e^2) + H_2 \cos \varphi \Omega_1 \wedge e^3\end{aligned}$$

$$\omega_7 = H_2 \cos \varphi \Omega_2 \wedge e^2 - H_2 \sin \varphi \left(\cos \theta \Omega_2 \wedge e^3 + \frac{\dot{T}}{\ell} \sin \theta e^{23} \right)$$

$$\omega_8 = H_2 \sin \varphi \Omega_2 \wedge e^2 + H_2 \cos \varphi \left(\cos \theta \Omega_2 \wedge e^3 + \frac{\dot{T}}{\ell} \sin \theta e^{23} \right)$$

$$\omega_9 = H_2 \sin \theta \Omega_2 \wedge e^3 - \frac{\dot{T}}{\ell} \cos \theta e^{23}$$

olarak bulunur. Buradaki Ω_1 ve Ω_2 ise aşağıdaki şekilde tanımlıdır;

$$\Omega_1 = P e^0 + \frac{\dot{T}}{H_0} e^1, \quad \Omega_2 = \frac{1}{H_0} e^0 - \frac{\dot{T}}{\ell} P e^1.$$

Statik de Sitter metriği için de

$$\omega_0 = T H_2 e^{23}$$

$$\omega_1 = \cos \theta e^{01} - H_2 P \sin \theta e^{02}$$

$$\omega_2 = \sin \theta \cos \varphi e^{01} + H_2 P \cos \theta \cos \varphi e^{02} - H_2 P \sin \varphi e^{03}$$

$$\omega_3 = \sin \theta \sin \varphi e^{01} + H_2 P \cos \theta \sin \varphi e^{02} + H_2 P \cos \varphi e^{03}$$

$$\omega_4 = -\frac{w_0}{m_1} H_2 \sinh w_0 \tau e^0 \wedge \Phi + \cosh w_0 \tau (e^1 \wedge \Phi + H_2 P \sin \theta \sin \varphi e^{23})$$

$$\omega_5 = -\frac{w_0}{m_1} H_2 \cosh w_0 \tau e^0 \wedge \Phi + \sinh w_0 \tau (e^1 \wedge \Phi + H_2 P \sin \theta \sin \varphi e^{23})$$

$$\omega_6 = \frac{w_0}{m_1} H_2 \sinh w_0 \tau e^0 \wedge \Phi_\varphi - \cosh w_0 \tau (e^1 \wedge \Phi_\varphi + H_2 P \sin \theta \cos \varphi e^{23})$$

$$\omega_7 = \frac{w_0}{m_1} H_2 \cosh w_0 \tau e^0 \wedge \Phi_\varphi - \sinh w_0 \tau (e^1 \wedge \Phi_\varphi + H_2 P \sin \theta \cos \varphi e^{23})$$

$$\omega_8 = -\frac{w_0}{m_1} H_2 \sinh w_0 \tau \sin \theta e^{03} + \cosh w_0 \tau (\sin \theta e^1 + H_2 P \cos \theta e^2) \wedge e^3$$

$$\omega_9 = -\frac{w_0}{m_1} H_2 \cosh w_0 \tau \sin \theta e^{03} + \sinh w_0 \tau (\sin \theta e^1 + H_2 P \cos \theta e^2) \wedge e^3$$

elde edilir. Buradaki w_0 sabiti $m = \frac{H'_0}{H_1 H_2}$ ve $m_1 = \left(\frac{H_2}{H_0} \right)' \frac{H_0^2}{H_1}$ olmak üzere $m m_1 = \pm w_0^2$

biçiminde tanımlıdır.

Minkowski uzay-zamanı içinse 10 tane olan KY 2-formlarının açık ifadeleri aşağıdaki gibidir;

$$\omega_0 = TH_2 e^{23}$$

$$\omega_1 = -\varepsilon \frac{H_2}{H_0} (\cos \varphi e^{02} - \cos \theta \sin \varphi e^{03}) + \tau (\cos \varphi e^{12} - \cos \theta \sin \varphi e^{13} + \varepsilon \sin \theta \sin \varphi e^{23})$$

$$\omega_2 = -\varepsilon \frac{H_2}{H_0} (\sin \varphi e^{02} + \cos \theta \cos \varphi e^{03}) + \tau (\sin \varphi e^{12} + \cos \theta \cos \varphi e^{13} - \varepsilon \sin \theta \cos \varphi e^{23})$$

$$\omega_3 = \cos \varphi e^{12} - \tau (\cos \theta \sin \varphi e^{13} + \varepsilon \sin \theta \sin \varphi e^{23})$$

$$\omega_4 = \cos \theta e^{01} - \varepsilon \sin \theta e^{02}$$

$$\omega_5 = \sin \theta \cos \varphi e^{01} + \varepsilon (\cos \theta \cos \varphi e^{02} - \sin \varphi e^{03})$$

$$\omega_6 = \sin \theta \sin \varphi e^{01} + \varepsilon (\cos \theta \sin \varphi e^{02} + \cos \varphi e^{03})$$

$$\omega_7 = \sin \varphi e^{12} + \tau (\cos \theta \cos \varphi e^{13} - \varepsilon \sin \theta \cos \varphi e^{23})$$

$$\omega_8 = -\varepsilon \frac{H_2}{H_0} \sin \theta e^{03} + \tau (\sin \theta e^{13} + \varepsilon \cos \theta e^{23})$$

$$\omega_9 = \sin \theta e^{13} + \varepsilon \cos \theta e^{23}.$$

A.3 KY 3-Formları

Schwarzschild ve Reissner-Nordström uzay zamanları için KY 3-formu yoktur. Robertson-Walker uzay-zamanında ise 1 tane KY 3-formu bulunmaktadır;

$$\omega = Te^{123}.$$

KY 3-formlarının sayısı de Sitter metriği için 5 tanedir. Bunlar üstel de Sitter metriği için;

$$\omega_1 = \cos \varphi e^{012} - \cos \theta \sin \varphi e^{013} + \sin \theta \sin \varphi \left(Re^{023} + \dot{T} \frac{H_2}{H_0} e^{123} \right)$$

$$\omega_2 = \sin \varphi e^{012} + \cos \theta \cos \varphi e^{013} - \sin \theta \cos \varphi \left(Re^{023} + \dot{T} \frac{H_2}{H_0} e^{123} \right)$$

$$\omega_3 = \sin \theta e^{013} + \cos \theta \left(\text{Re}^{023} + \dot{T} \frac{H_2}{H_0} e^{123} \right)$$

$$\omega_4 = H_2 e^{023} + \left(\lambda_0 T H_2^2 + \frac{1}{\lambda_0 T} \right) e^{123}$$

$$\omega_5 = \frac{1}{T} e^{123}$$

biçimindedir. Burada $R = \frac{H_2'}{H_1}$ şeklinde tanımlanmıştır. Zamana bağlı de Sitter metriği

için;

$$\omega_1 = \cos \varphi e^{012} - \cos \theta \sin \varphi e^{013} + \sin \theta \sin \varphi \left(\text{Re}^{023} + \dot{T} \frac{H_2}{H_0} e^{123} \right)$$

$$\omega_2 = \sin \varphi e^{012} + \cos \theta \cos \varphi e^{013} - \sin \theta \cos \varphi \left(\text{Re}^{023} + \dot{T} \frac{H_2}{H_0} e^{123} \right)$$

$$\omega_3 = \sin \theta e^{013} + \cos \theta \left(\text{Re}^{023} + \dot{T} \frac{H_2}{H_0} e^{123} \right)$$

$$\omega_4 = H_2 e^{023} - \frac{\dot{T}}{\ell} H_0 \text{Re}^{123}$$

$$\omega_5 = T e^{123},$$

ve statik de Sitter metriği içinse;

$$\omega_1 = w_1 + H_0 \sin \theta \sin \varphi e^{023}$$

$$\omega_2 = w_2 - H_0 \sin \theta \cos \varphi e^{023}$$

$$\omega_3 = \sin \theta e^{013} + H_0 \cos \theta e^{023}$$

$$\omega_4 = r \sinh \tau e^{023} + \cosh \tau e^{123}$$

$$\omega_5 = -r \cosh \tau e^{023} + \sinh \tau e^{123}$$

olarak elde edilir. Burada w_1 ve w_2 aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$w_1 = \cos \varphi e^{012} - \cos \theta \sin \varphi e^{013}, \quad w_2 = \sin \varphi e^{012} + \cos \theta \cos \varphi e^{013}.$$

Minkowski uzay-zamanında da 5 tane KY 3-formu vardır;

$$\omega_1 = w_1 + \sin \theta \sin \varphi e^{023}$$

$$\omega_2 = w_2 - \sin \theta \cos \varphi e^{023}$$

$$\omega_3 = \sin \theta e^{013} + \cos \theta e^{023}$$

$$\omega_4 = e^{123}$$

$$\omega_5 = -r e^{023} + \tau e^{123} .$$

EK B. SCHWARZSCHILD VE REISSNER-NORDSTRÖM UZAY-ZAMANLARI İÇİN KÜTLELİ DIRAC DENKLEMİNİN SİMETRİ CEBİRİ

Schwarzschild ve Reissner-Nordström uzay-zamanları için Ek A'da bulunan KY formları kullanılarak, kütleli Dirac denklemi için simetri işlemcilerinin açık ifadelerine ulaşılabilir. Buna göre KY 0 ve 4-formlarının yanı sıra 4 tane KY 1-formu ve 1 tane KY 2-formu kullanılarak simetri işlemcileri inşa edilebilir. Bu kesimde, bulunan simetri işlemcilerinin kendi aralarındaki sıradeğişimleri hesaplanarak kütleli Dirac denkleminin simetri cebiri yapısı araştırılmıştır.

Ek A'da bulunan sonuçlar simetri işlemcilerinin genel biçimi olan

$$L = 2i_{x^a} \omega_{(p)} S_{x^a} + \frac{p}{p+1} d\omega_{(p)}$$

ifadesinde kullanılarak ve çift formlar için elde edilen işlemcinin hacim form ile Clifford çarpılması gerekliliği de göz önünde bulundurularak, Schwarzschild ve Reissner-Nordström uzay-zamanları için aşağıdaki simetri işlemcileri elde edilir;

$$L_0 = 2H_0 S_{x_0} - \frac{H'_0}{H_1} e^{01}$$

$$L_1 = 2r \sin \varphi S_{x_2} + 2r \cos \theta \cos \varphi S_{x_3} + \frac{1}{H_1} \sin \varphi e^{12} + \frac{1}{H_1} \cos \theta \cos \varphi e^{13} - \sin \theta \cos \varphi e^{23}$$

$$L_2 = -2r \cos \varphi S_{x_2} + 2r \cos \theta \sin \varphi S_{x_3} - \frac{1}{H_1} \cos \varphi e^{12} + \frac{1}{H_1} \cos \theta \sin \varphi e^{13} - \sin \theta \sin \varphi e^{23}$$

$$L_3 = -2r \sin \theta S_{x_3} - \frac{1}{H_1} \sin \theta e^{13} - \cos \theta e^{23}$$

$$L_4 = 2re^{012} S_{x_2} + 2re^{013} S_{x_3} - \frac{2}{H_1} e^0$$

$$L_5 = -2\mathcal{S} .$$

1-formlardan üretilen simetri işlemcileri spinörler üzerinde tanımlı olan Lie türevine karşılık geldiğinden ve Killing vektör alanlarına göre spinör Lie türevleri için

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$$

eşitliği geçerli olduğundan L_1 , L_2 ve L_3 işlemcilerinin birbirleriyle sıradeğişimleri yine birinci mertebeden bir simetri işlemcisi verir ve kendi aralarında bir cebir oluştururlar; $[L_i, L_j] = -\varepsilon_{ij}^k L_k$. Burada ε_{ij}^k tamamen antisimetrik tensör olup $i, j, k = 1, 2, 3$ değerlerini alır. Hacim formdan üretilen L_3 işlemcisi de doğrudan Dirac işlemcisine karşılık geldiğinden diğer tüm işlemcilerle sıra değişir ve dolayısıyla simetri cebirinin içerisinde yer alır. 2-formdan üretilen L_4 işlemcisinin diğer işlemcilerle sıradeğişimleri hesaplanarak birinci mertebeye simetri işlemcilerinin tümünün bir cebir oluşturup oluşturmadığı incelenebilir.

Yukarıda tanımlanan L_3 ve L_4 işlemcilerinin Clifford sıradeğişimleri hesaplanırsa;

$$[L_3, L_4] = 4r^2 \sin \theta e^{012} [S_{X_2}, S_{X_3}] + 4r \cos \theta e^{012} S_{X_3} + \frac{2}{H_1^2} \sin \theta e^{013} - 2 \sin \theta e^{013} \quad (\text{B.1})$$

bulunur. İki kovaryant türevin sıradeğişimi için eğrilik işlemcisinin tanımından

$$[S_{X_2}, S_{X_3}] = \mathbf{S}(X_2, X_3) + S_{[X_2, X_3]}$$

yazılabilir. Schwarzschild ve Reissner-Nordström metrikleri için eğrilik 2-formları kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(X_2, X_3) &= \frac{1}{2} e^a(X_2) e^b(X_3) R_{ab} \\ &= \frac{1}{2} R_{23} \\ &= \frac{1}{2r^2} \left(1 - \frac{1}{H_1^2} \right) e^{23} \end{aligned}$$

ve baz vektörlerinin ifadelerinden de

$$S_{[X_2, X_3]} = -\frac{\cot \theta}{r} S_{X_3}$$

elde edilir. Bu ifadeler (B.1)'de yerine konulursa

$$[L_3, L_4] = 0$$

bulunur.

Benzer şekilde L_2 ve L_4 işlemcilerinin Clifford sıradeğişimleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
[L_2, L_4] &= \left(-4r^2 \cos \varphi e^{013} - 4r^2 \cos \theta \sin \varphi e^{012} \right) [S_{X_2}, S_{X_3}] \\
&+ \left(-4r \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \sin \varphi e^{012} - 4r \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi e^{013} \right) S_{X_3} \\
&+ 2 \left(1 - \frac{1}{H_1^2} \right) \left(-\cos \varphi e^{012} + \cos \theta \sin \varphi e^{013} \right)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

elde edilir. Yine eğrilik işlemcisi kullanılarak

$$[S_{X_2}, S_{X_3}] = \frac{1}{2r^2} \left(1 - \frac{1}{H_1^2} \right) e^{23} - \frac{\cot \theta}{r} S_{X_3}$$

yazılır ve (B.2)'de kullanılırsa

$$[L_2, L_4] = 0$$

bulunur. Ayrıca Jacobi özdeşliğinden

$$[L_1, L_4] = 0$$

yazılabilir.

Ayrıca 2-formdan elde edilen L_4 ile L_0 'ın sıradeliğini hesaplanırsa

$$[L_0, L_4] = 4rH_0 \left(e^{012} [S_{X_0}, S_{X_2}] + e^{013} [S_{X_0}, S_{X_3}] \right) + 4 \frac{H'_0}{H_1^2} e^1$$

bulunur. Burada $S_{[X_0, X_2]} = S_{[X_0, X_3]} = 0$ eşitlikleri ve eğrilik işlemcisi kullanılarak

$$[S_{X_0}, S_{X_2}] = \frac{H'_0}{2rH_0H_1^2} e^{02} \quad , \quad [S_{X_0}, S_{X_3}] = \frac{H'_0}{2rH_0H_1^2} e^{03}$$

yazılabilir. Bu ifadeler yukarıdaki sıradeliğini eşitliğinde yerine yazılırsa

$$[L_0, L_4] = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde hesaplamalar yapılarak $i = 1, 2, 3$ için $[L_0, L_i] = 0$ eşitliklerine ulaşılabilir. Dolayısıyla birinci mertebeli simetri işlemcileri kendi aralarında bir cebir oluştururlar ve dahası L_0 , L_4 ve L_5 işlemcileri diğer tüm işlemcilerle sıradeliğirler. Bu da Schwarzschild ve Reissner-Nordström uzay-zamanlarında kütleli Dirac denkleminin, yukarıda inşa edilenler dışında birinci ve daha yüksek mertebeli simetri işlemcilerinin olmadığını gösterir.

EK C. BÜZÜLMÜŞ BIANCHI ÖZDEŞLİKLERİ

(Pseudo)-Riemann geometride birinci ve ikinci Bianchi özdeşlikleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$R^a_b \wedge e^b = 0 \quad (C.1)$$

$$DR^{ab} = 0. \quad (C.2)$$

(C.1) eşitliğinin üst üste büzülmeleri alınarak aşağıdaki önemli özdeşliklere ulaşılabilir;

$$i_{X_a} i_{X_b} R_{cd} = i_{X_c} i_{X_d} R_{ab} \quad , \quad i_{X_a} P_b = i_{X_b} P_a \quad (C.3)$$

$$i_{X_a} R_{bc} + c.p. = 0 \quad , \quad P_b \wedge e^b = 0. \quad (C.4)$$

Burada $c.p.$ ifadesi devirsel permütasyonu göstermektedir. Benzer şekilde (C.2) eşitliğinden de büzülmüş Bianchi özdeşlikleri elde edilebilir. Ancak bunlar literatürde dağınık halde bulunmaktadır ve tezdeki bazı hesaplarda kullanılmaları nedeniyle burada türetilmelerinin ayrıntıları tartışılacaktır.

(C.2)'den elde edilecek olan büzülmüş Bianchi özdeşlikleri en iyi şekilde aşağıdaki gibi tanımlanan T_c^{ab} 2-formu ve onun büzülmesi cinsinden ifade edilebilir;

$$T_c^{ab} = \nabla_{X_c} R^{ab} + \omega^a_d(X_c)R^{db} + \omega^b_d(X_c)R^{ad} \quad (C.5)$$

$$S_c^b = i_{X_a} T_c^{ab}. \quad (C.6)$$

Tanımdan görülebileceği gibi T_c^{ab} son iki indisine göre anti-simetriktir;

$$T_c^{ab} = -T_c^{ba}. \quad (C.7)$$

T_c^{ab} 'nin büzülmesi hesaplanarak

$$i_{X_a} T_c^{ab} = \nabla_{X_c} (i_{X_a} R^{ab}) + \omega^b_d(X_c)P^d + \omega^a_d(X_c)i_{X_a} R^{db} - i_{\nabla_{X_c} X_a} R^{ab}$$

bulunacağından ve son iki terim birbirini götürdüğünden

$$S_c^b = \nabla_{X_c} P^b + \omega^b_d(X_c)P^d \quad (C.8)$$

elde edilir. Bu ifade X_b ile büzülerek de

$$i_{X_b} S^{cb} = \nabla_{X^c} \mathfrak{R} \quad (C.9)$$

bulunur. Ayrıca (C.2) eşitliği $e^c \wedge T_c^{ab} = DR^{ab} = 0$ şeklinde yazılabilir ve (C.8) de $e^c \wedge S_c^a = DP^a$ biçiminde ifade edilebilir.

(C.2)'nin iç türevi alınarak ve (C.3) eşitlikleri kullanılarak

$$T^{cab} = di_{X^c} R^{ab} + \omega^a_d \wedge i_{X^c} R^{db} + \omega^b_d \wedge i_{X^c} R^{ad} + \omega^{cd} \wedge i_{X^d} R^{ab} \quad (C.10)$$

bulunabilir. Bu ifade daha kapalı olarak da

$$T^{cab} = Di_{X^c} R^{ab} \quad (C.11)$$

şeklinde yazılabilir. (C.4)'deki ilk bağıntı ve (C.11)'den de

$$T^{cab} + T^{abc} + T^{bca} = 0 \quad (C.12)$$

eşitliği bulunur. Bu ifadenin iki kez büzülmesiyle de

$$i_{X^a} T^{abc} - S^{bc} + S^{cb} = 0 \quad (C.13)$$

$$i_{X^c} S^{cb} - i_{X^c} S^{bc} + i_{X^c} i_{X^a} T^{abc} = 0 \quad (C.14)$$

bağıntılarına ulaşılır. (C.14)'deki üçüncü terim ilk terime eşit olduğundan (C.9) da göz önüne alınarak

$$i_{X^c} S^{cb} = \frac{1}{2} \nabla_{X^b} \mathfrak{R} \quad (C.15)$$

eşitliği yazılabilir. (C.9) ve (C.15)'den S^{cb} 'nin ilginç bir özelliği söylenebilir; ikinci indise göre büzülmesi ilk indise göre büzülmesinin iki katıdır.

Sonuç olarak (C.10) (ya da eşdeğer olarak (C.11)), (C.12), (C.13) ve (C.15) ifadeleri (C.2) ile verilen ikinci Bianchi özdeşliğinin büzülmelerinden elde edilen büzülmüş Bianchi özdeşlikleridir. Ayrıca son eşitlik Ek D'de önemli bir rol oynayacaktır.

EK D. $\nabla_K \mathfrak{R} = 0$ İÇİN ALTERNATİF BİR İSPAT

Bu kısımda (5.21) eşitliği için alternatif bir ispat sunulacaktır. (C.8) eşitliğinden

$$i_{X_c} S^{cb} = i_{X_c} \nabla_{X^c} P^b + \omega^b_d(X_c) i_{X^c} P^d$$

ifadesi bulunabilir ve bu (C.15)'de kullanılarak, \mathfrak{R} 'nin herhangi bir Killing vektör alanı K 'ya göre kovaryant türevi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\nabla_K \mathfrak{R} = 2K_b i_{X_c} S^{cb} = 2i_{X^c} \left[\nabla_{X^c} (K_b P^b) - P^b \nabla_{X^c} K_b \right] + 2K_b \omega^b_d(X_c) i_{X^c} P^d. \quad (D.1)$$

(5.20) eşitliği ve $\delta^2 = 0$ özelliğinden dolayı ikinci eşitlikteki ilk terim sıfır olur ve (D.1) ifadesi

$$\nabla_K \mathfrak{R} = -2(i_{X^c} P^b) i_{X_b} \nabla_{X^c} \tilde{K} \quad (D.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade yazılırken aşağıdaki bağıntıdan yararlanılmıştır;

$$i_{X_b} \nabla_{X^c} \tilde{K} = \nabla_{X^c} K_b + K_d \omega_b^d(X_c).$$

(C.3)'deki ikinci eşitlikten ve herhangi bir KY formunun simetrikleştirilmiş kovaryant türevi sıfır olduğundan (D.2)'den $\nabla_K \mathfrak{R} = 0$ sonucu elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ümit ERTEM

Doğum Yeri : Cide

Doğum Tarihi : 07/03/1981

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Yenimahalle Alparslan Lisesi, Ankara, 1998

Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü, 2002

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, 2004

Yayımları :

Açık, Ö., Ertem, Ü., Önder, M. and Verçin, A. 2009. First-order symmetries of Dirac equation in curved background: A unified dynamical symmetry condition. *Class. Quant. Grav.*, 26; 075001.

Açık, Ö., Ertem, Ü., Önder, M. and Verçin, A. 2008. Killing-Yano forms of a class of spherically symmetric space-times I: A unified generation of Killing vector fields. e-print arXiv: 0803.3327.

Açık, Ö., Ertem, Ü., Önder, M. and Verçin, A. 2008. Killing-Yano forms of a class of spherically symmetric space-times II: A unified generation of higher forms. e-print arXiv: 0803.3328.

Açık, Ö., Ertem, Ü., Önder, M. and Verçin, A. 2008. Basic gravitational currents and Killing-Yano forms. e-print arXiv: 0811.1712.