

POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLER ÜZERİNE

Fuat YENER

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek Lisans Tezi

Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK

OCAK 2010

KABUL

Fuat YENER tarafından hazırlanan ‘POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLER ÜZERİNE’ başlıklı çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir. 18/01/2010.

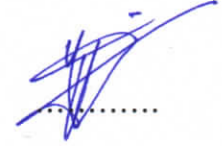
Başkan : Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN (ZKÜ)



Üye : Yrd. Doç. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI (GÜ)



Üye : Yrd. Doç. Dr. Yüksel SOYKAN (ZKÜ)



ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. / / 2010



Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”



Fuat YENER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLER ÜZERİNE

Fuat YENER

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN

Ocak 2010, 63 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde gerekli temel tanım ve teoremleri vererek başladık. İkinci bölümde önce C^1 çekirdekli integral operatörlerin özdeğerlerinin $o(1/n^{3/2})$ olduğunu gösteren Weyl teoremi (Weyl 1912), sonra bu teoremi çekirdeğin pozitif tanımlı olması durumunda $o(1/n^2)$ ye geliştiren Reade teoremi (Reade 1983) ispat edildi. Üçüncü bölümde C^1 çekirdekli integral operatörler için J.B.Reade'in bulmuş olduğu sonuç, T. Kühn tarafından kullanılan Banach uzayları üzerinden çarpanlara ayırma metodu ile ispat edildi (Dikmen 2008). Son bölümde ise Cauchy integral formülü ile matematiksel analizde karşımıza çıkan pozitif tanımlı integral çekirdek örnekleri (Dikmen 2006) ile ilgilendik. Bu örneklerden bir tanesi daha genel bir şekil kullanarak geliştirdik.

Anahtar Sözcükler: Pozitif integral operatör, Weyl teoremi, Reade teoremi, tekil sayılar, Cauchy integral formülü

Bilim Kodu: 403.03.01.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON POSITIVE INTEGRAL OPERATORS

Fuat YENER

**Zonguldak Karaelmas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assist. Prof. Can Murat DİKMEN

January 2010, 63 pages

This thesis consist of four chapters. In the first chapter we begin with some necessary definitions and teorems. In the second chapter we first proved the Weyl theorem (Weyl 1912) which shows that eigenvalues of the integral operators with C^1 kernels is $o\left(1/n^{3/2}\right)$, then we proved Reade's theorem which improves this result to $o\left(1/n^2\right)$ in the case the kernel is positive definite (Reade 1983). In the third chapter the result of J.B. Reade's for the operators with C^1 kernels was proved with the method used by T. Kühn which products the operator through Banach spaces (Dikmen 2008). In the last chapter we dealed with the examples of positive definite integral kernels coming from mathematical analysis using Cauchy integral formula (Dikmen 2006). We improved one of these examples using more general figure.

Key Words: Positive integral operator, Weyl's theorem, Reade's theorem, singular numbers, Cauchy integral Formula

Science Code: 403.03.01.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında değerli zamanını bana ayıran ve tüm çalışmalarımı titizlikle inceleyen tez danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN'e (ZKÜ), çalışmalarımı her konuda destekleyen, başından beri her zaman yanımda olan aileme ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
 BÖLÜM 1 GİRİŞ	 1
1.1 BANACH VE HİLBERT UZAYLARINDA OPERATÖRLER	1
1.2 SONLU RANKLI OPERATÖRLER	10
1.3 ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLAR.....	11
1.4 POZİTİF OPERATÖRLER.....	14
1.5 YAKLAŞIM TEOREMİ	19
1.6 O VE o NOTASYONU	21
 BÖLÜM 2 C^1 ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜN ÖZDEĞER YAKLAŞIMLARI	 23
2.1 WEYL TEOREMİ.....	23
2.2 READE TEOREMİ	27
2.2.1 En İyi Yaklaşım.....	28
2.2.2 Karekökler	29
2.2.3 Yaklaşık Birimler	30
2.2.4 Reade Teoreminin İspatı	35
2.2.5 En Uygun Örnek.....	38

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
BÖLÜM 3 READE TEOREMİNİN ÇARPANLARA AYIRMA METODU İLE İSPATI	39
3.1 TEKİL SAYILAR (SINGULAR NUMBERS)	39
3.2 KAREKÖKLER	46
3.3 2-TOPLANABİLİR DİZİLER	49
BÖLÜM 4 POZİTİF TANIMLI İNTEGRAL ÇEKİRDEK ÖRNEKLERİ.....	53
4.1 CAUCHY İNTEGRAL FORMÜLÜNDEN ÜRETİLEN ÖRNEK	55
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ	63

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 E_{mn} karesi	24
2.2 $[u, v]^2$ karesi	36
4.1 SS^* operatörü	54
4.2 $[a, b]$ aralığı ve D bölgesi	55
4.3 D_1 bölgesi	56
4.4 Üst yarı düzlemdeki kutup noktası $w(s - \beta)$	57
4.5 D_2 bölgesi	58
4.6 Üst yarı düzlemdeki kutup noktası $w(t - \beta)$	59
4.7 $D_1 \cap D_2$ bölgesi	60

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
H	: Hilbert uzayı
C^1	: Sürekli ve 1. türevi sürekli fonksiyonlar uzayı
$T _M$	: T operatörünün M ye kısıtlanması
X / M	: Bölüm uzayı
$L^2(J)$	: J aralığı üzerinde karesi integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$L^2(I \times J)$	: $I \times J$ dikdörtgeni üzerinde karesi integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
R_N	: Rankı $\leq N$ olan (Sonlu ranklı) operatör
$\ \cdot\ $	: Norm
$\langle \cdot \rangle$	: İç çarpım
λ_n	: n . özdeğer
φ_n	: n . özfonksiyon
$s_n(T)$	: T' nin n . tekil değeri
$a_n(T)$	: T operatörünün n . yaklaşım sayısı
$x_n(T)$	: T operatörünün n . Weyl sayısı
$c_n(T)$	: T operatörünün n . Gelfand sayısı
S	: T operatörünün karekökü
$K(x, t)$	: Çekirdek fonksiyonu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölüme tezimizin amacına uygun olarak hazırlayıcı ön bilgiler vererek başlayacağız. İkinci bölümde pozitif operatörler üzerinde durulacak ve $K(x, t)$ integral çekirdeğimiz $C^1[0, 1]^2$ iken pozitif tanımlı olması durumunda özdeğerlerinin asimptotik olarak $o(1/n^2)$ olduğu (Reade 1983) sonucunu Banach uzayları üzerinden çarpanlara ayırma metodu ile ispatlayacağız (Dikmen 2008). Daha sonra pozitif operatörlere örnekler oluşturan yüksek lisans tezindeki bir örneği genelleyeceğiz (Dikmen 1997). Oluşturduğumuz bu örneklerle tezimizi sonlandıracağız.

1.1 BANACH VE HİLBERT UZAYLARINDA OPERATÖRLER

Bu kısımda Fonksiyonel Analiz kitaplarında bulunan tanım ve teoremleri kullanarak hazırlayıcı ön bilgiler vereceğiz. (Riesz and Nagy 1955, Young 1990, Şuhubi 2001, Soykan 2008).

Tanım 1.1.1 V bir vektör uzayı, $\emptyset \neq U \subset V$ olsun. U kendisi bir vektör uzayı ise U ya V nin bir **alt uzayı** denir ve $\mathbb{F}$, ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) skaler bir cisim olmak üzere, her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in U$ için

$$\alpha x + \beta y \in U$$

olma koşulu ile denktir.

Tanım 1.1.2 V bir vektör uzayı olmak üzere boş olmayan bir $M \subset V$ kümesi için M nin vektörlerinin tüm sonlu lineer kombinasyonlarının kümesine M nin **gereni (spanı)** denir ve $\text{span}M$ ile gösterilir. $k \geq 1$ için $v = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ sonlu bir küme ve v lineer bağımsız ve bir spana sahipse o zaman V nin her tabanı aynı sayıda elemana sahiptir. Eğer bu sayı k ise o zaman V nin k -boyutlu (ya da daha genel olarak, sonlu-boyutlu) olduğu söylenir ve $\dim V = k$ yazılır. Eğer V böyle sonlu bir tabana sahip değilse V ye sonsuz-boyutludur denir.

Tanım 1.1.3 V ve W , aynı $\mathbb{F}$ skaler cismi üzerinde vektör uzayları olsun. Bir $T : V \rightarrow W$ fonksiyonu (dönüşümü) her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in V$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

özellikliğini sağlarsa veya buna denk olarak her $\alpha \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in V$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \text{ ve } T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

özellikliğini sağlarsa T ye bir **lineer dönüşüm** adı verilir. Lineer dönüşüm yerine bazen lineer operatör kullanılır. $T : V \rightarrow W$ lineer dönüşümlerinin tamamının oluşturduğu kümeyi $L(V, W)$ ile göstereceğiz. Eğer $V = W$ ise kısaca $L(V)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.1.4 V, W vektör uzayları ve $T \in L(V, W)$ olsun.

T nin görüntü kümesi $\text{Im } T = T(V)$ altuzayıdır, T nin rankı görüntü uzayının boyutu yani $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im } T)$ sayıdır. Eğer T nin görüntü uzayının boyutu sonlu ise T ye **sonlu ranklı operatör** denir.

Teorem 1.1.5 (Dini Teoremi) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun ve her bir $x \in [a, b]$ için $n \rightarrow \infty$ iken $f_n(x)$ nin $f(x)$ e azalarak yakınsadığını varsayalım. Bu durumda eğer f sürekli ise $n \rightarrow \infty$ iken düzgün olarak $f_n \rightarrow f$ dir.

Tanım 1.1.6 Bir X vektör uzayı üzerinde tanımlı olup, bir $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen, her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel-değerli bir fonksiyona bir **norm** denir:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| (\text{üçgen eşitsizliği}).$$

Üzerinde bir norm tanımlanmış bir X vektör uzayına bir **normlu uzay** adı verilir.

Normlu uzaylar $(X, \|\cdot\|)$ ya da kısaca X ile gösterilir.

Tanım 1.1.7 X bir normlu vektör uzay Y , X in bir altuzayı olsun. $x \in X$ için

$$\|x - x_0\| = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} = \text{dist}(x, Y)$$

yani her $y \in Y$ için

$$\|x - x_0\| \leq \|x - y\|$$

eşitsizliğini sağlayan Y içindeki bir $x_0 \in Y$ elemanına x in bir **en iyi yaklaşımı** adı verilir.

X in bir Y altuzayı için eğer her bir $x \in X$, Y içinde bir en iyi yaklaşıma sahipse Y altuzayına en iyi yaklaşım özelliğine sahiptir denir.

Tanım 1.1.8 Bir V vektör uzayı üzerinde iç çarpım, her $x, y, z \in V$ ve her $\lambda \in \mathbb{F}$ için

$$(i) \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

$$(ii) \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$(iii) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(iv) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

özelliklerini sağlayan bir $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ dönüşümüdür.

Mesela $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı olan $C[0, 1]$ karmaşık vektör uzayı üzerinde

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

formülü bir **iç çarpım** tanımlar.

Teorem 1.1.9 V üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, V üzerinde

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

ile indirgenen bir norm tanımlar.

Tanım 1.1.10 Üzerindeki iç çarpımın indirgediği normdan üretilen metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayına **Hilbert uzayı** denir. Hilbert uzayı genelde H harfi ile gösterilir.

Uyarı 1.1.11 Genel olarak, bir iç çarpım uzayının Hilbert uzayı olması gerekmez fakat fonksiyonel analizde bir temel teorem her X iç çarpım uzayının tamlanarak bir Hilbert uzayı haline getirilebilmesini garanti eder. Böyle bir H Hilbert uzayına X in tamlanması denir.

Tanım 1.1.12 (i) Reel eksen üzerinde (sonlu veya sonsuz) herhangi bir aralık I olsun. Karesi integrallenebilir, yani

$$\int |f(t)|^2 dt < \infty$$

olan karmaşık değerli Lebesgue ölçülebilir $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonlarının uzay $L^2(I)$ ile gösterilir.

Her $f, g \in L^2(I)$ için f ile g nin çarpımı

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt$$

ile tanımlanır. f nin normu ise

$$\|f\|^2 = \int |f(t)|^2 dt < \infty$$

dur.

(ii) Verilen I, J aralıkları için

$$\int_I \int_J |k(s, u)|^2 du ds < \infty$$

olacak şekilde $I \times J$ üzerindeki tüm karesi integrallenebilir (Lebesgue) ölçülebilir karmaşık değerli k fonksiyonlarının uzayı $L^2(I \times J)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.13 H, H_1 Hilbert uzayları olsunlar. Verilen $T : H_1 \rightarrow H$ sınırlıdır ancak ve ancak $\exists M \in \mathbb{R}$ öyleki $\forall f \in H_1$ için

$$\|Tf\| \leq M \|f\|$$

dir. Bu M sınırlarının en küçüğüne T **lineer operatörünün normu** denir ve $\|T\|_{H_1 \rightarrow H}$ ya da kısaca $\|T\|$ ile gösterilir. Operatör normunu aynı zamanda

$$\|T\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Tf\|$$

ile tanımlayabiliriz.

H_1 den H ye bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesini $B(H_1, H)$ ile göstereceğiz. $B(H_1, H)$ nin elemanları ayrıca süreklidir.

Tanım 1.1.14 Verilen $T : H_1 \rightarrow H$ operatörü kompakttır eğer verilen $(f_n) \subset H_1$ sınırlı dizisi için (yani $\sup \|f_n\| < \infty$),

$$Tf_{n_r} \rightarrow g$$

olacak şekilde $(f_{n_r}) \subseteq (f_n), g \in H$ vardır.

H_1 den H ye bütün kompakt operatörlerin kümesini $K(H_1, H)$ ile göstereceğiz.

Uyarı 1.1.15 Bir kompakt operatör aynı zamanda sürekli olması gerekir. Aksi halde $\|Tf_n\| \rightarrow \infty$ olacak şekilde $(f_n) \subset H_1$ vardır, bu durumda (Tf_n) in yakınsak bir alt dizisi olmayabilir.

Teorem 1.1.16 Eğer $T \in B(H_1, H)$ ise,

$$\langle Tf, g \rangle_H = \langle f, T^*g \rangle_{H_1}$$

olacak şekilde bir tek $T^* \in B(H, H_1)$ operatörü vardır.

Tanım 1.1.17 Yukarıdaki şartı sağlayan $T^* : H \rightarrow H_1$ operatörüne T operatörünün **eşleniği** adı verilir. Eğer $H = H_1$ ve $T = T^*$ olur ise T ye **öz-eşlenik** veya **simetriktir** denir.

Tanım 1.1.18 T nin **kuadratik normu**

$$\|T\|_{ku} = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle Tf, f \rangle|$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 1.1.19 Eğer T simetrik ise o zaman kuadratik norm operatör norma eşittir.

Önerme 1.1.20 $\langle Tf, f \rangle$ şeklindeki iç çarpım reel değerlidir ancak ve ancak T simetriktir.

İspat. Gerek şart için, $\langle Tf, f \rangle$ iç çarpımı reel değerli olsun, o zaman her T için

$$\begin{aligned} \langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle \\ + i \langle T(f+ig), f+ig \rangle - i \langle T(f-ig), f-ig \rangle = 4 \langle Tf, g \rangle \end{aligned} \quad (1.1)$$

dir. f ve g nin yerini değiştirdiğimizde ve kompleks eşleniklerini aldığımızda ayrıca

$$\begin{aligned} \langle f+g, T(f+g) \rangle - \langle f-g, T(f-g) \rangle \\ + i \langle f+ig, T(f+ig) \rangle - i \langle f-ig, T(f-ig) \rangle = 4 \langle f, Tg \rangle \end{aligned} \quad (1.2)$$

dır. $\langle Tf, f \rangle$ reel değerli olduğundan $\langle f, Tf \rangle = \overline{\langle Tf, f \rangle} = \langle Tf, f \rangle$ dir. Böylece, (1.1) ve (1.2) denklemlerinin sol tarafları eşittir. Sonuç olarak, $\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle$; ve böylece $T = T^*$, yani T simetriktir.

Yeter şart için, T simetrik bir operatör olsun. O zaman, $T^* = T$ ve

$$\langle Tf, f \rangle = \langle f, T^*f \rangle = \langle f, Tf \rangle = \overline{\langle Tf, f \rangle}$$

olduğundan $\langle Tf, f \rangle$ reel değerlidir.

Önerme 1.1.21 Eğer T kompakt simetrik bir dönüşüm ise, $\|f\| = 1$ olmak üzere bir f vardır öyleki $\lambda = \pm \|T\|$ olmak üzere $Tf = \lambda f$ dir.

İspat. $\|f_n\| \leq 1$ vardır, öyleki Tanım 1.1.18 den $|\langle Tf_n, f_n \rangle| \longrightarrow \|T\|_{ku}$ dur. Gerekli ise $|\langle Tf_{n_k}, f_{n_k} \rangle|$ alt dizisine geçerek $\lambda = \pm \|T\|_{op} = \pm \|T\|_{ku}$ olmak üzere Önerme 1.1.20 den

$$\langle Tf_n, f_n \rangle \rightarrow \lambda$$

kabul edebiliriz. Şimdi,

$$\begin{aligned} \|Tf_n - \lambda f_n\|^2 &= \|Tf_n\|^2 - 2\lambda \langle Tf_n, f_n \rangle + \lambda^2 \|f_n\|^2 \\ &\leq \|T\|_{op}^2 - 2\lambda \langle Tf_n, f_n \rangle + \lambda^2 \\ &= 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Tf_n, f_n \rangle \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dizisini göz önüne alalım. Bir alt diziye geçerek, $Tf_{n_k} \rightarrow f$ olacak şekilde f bulabiliriz. O halde, $\lambda f_n \rightarrow f$ dir. Böylece, $Tf = \lim T(\lambda f_n) = \lambda \lim Tf_n$ elde edilir.

Tanım 1.1.22 X bir iç çarpım uzayı olsun. $\{e_n\}$, X içinde bir dizi olsun. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\langle e_m, e_n \rangle = \begin{cases} 1 & , \quad m = n \text{ ise} \\ 0 & , \quad m \neq n \text{ ise} \end{cases}$$

sağlanırsa $\{e_n\}$ dizisine **ortonormal dizidir** denir. Burada, $m = n$ için $\langle e_m, e_n \rangle = 1$ olması $\|e_n\| = 1$ ile denktir.

Şimdi bir kümenin ortogonal tümleyeni kavramını tanımlayalım.

Tanım 1.1.23 X bir iç çarpım uzayı olsun ve A , X in bir altkümesi olsun. $x \perp A$ yı sağlayan $x \in X$ lerin tamamının oluşturduğu kümeye yani

$$A^\perp = \{x \in X : \text{her } a \in A \text{ için } \langle x, a \rangle = 0\}$$

kümesine A nın ortogonal tümleyeni denir.

O halde $A^\perp$, A içindeki her vektöre ortogonal olan X içindeki vektörlerin tamamının oluşturduğu kümedir ($A = \emptyset$ ise o zaman $A^\perp = X$ dir).

Tanım 1.1.24 M ve N , bir V vektör uzayının alt uzayları olsunlar. Eğer $M \cap N = \{0\}$ ve V 'nin her elemanı, M 'nin ve N 'nin bir elemanının toplamı şeklinde ifade edilebiliyorsa V uzayına M ve N uzaylarının **direkt toplamı** denir ve $V = M \oplus N$ şeklinde yazılır

Uyarı 1.1.25 X bir Banach uzayı ve M kapalı alt uzay olsun, X/M bölüm uzayını

$$x + M = \{x + y : y \in M\}$$

kalan sınıflarının kümesi olarak tanımlarız.

Önerme 1.1.26 Eğer X Banach uzayının bir kapalı alt uzayı $M \subseteq X$ ise, o zaman X/M

$$\|M + x\| = \inf_{y \in M} \|y + x\|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır

İspat. Tek problem X/M nin tam olduğunu göstermektir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|M + x_n\| < \infty$$

olsun. Keyfi n için $\|y_n + x_n\| < \|M + x_n\| + 1/n^2$ olacak şekilde $y_n \in M$ seçelim.

Buradan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n + x_n\| < \infty$$

dur.

Böylece,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n + x_n)$$

X te yakınsaktır.

Buradan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M + y_n + x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (M + x_n)$$

X/M de yakınsaktır.

Tanım 1.1.27 $M \subseteq X$ kapalı altuzayının **eşboyutunu** X/M nin boyutu olarak tanımlarız ve $\text{codim} M$ ile gösteririz.

Önerme 1.1.28 X in her kapalı altuzayı M, N için

$$\text{codim}(M \cap N) \leq \text{codim}M + \text{codim}N$$

dir.

İspat. $(X/M) \oplus (X/N)$ nin boyutu $m + n$ dir. $X/(M \cap N)$ yi $(X/M) \oplus (X/N)$ nin bir alt uzayı olduğunu göstermek istiyoruz.

$$I : X/(M \cap N) \rightarrow (X/M) \oplus (X/N) \text{ yi}$$

$$I(x + M \cap N) = (x + M, x + N) \in (X/M) \oplus (X/N)$$

olarak tanımlayalım. O zaman, I nın $(X/M) \oplus (X/N)$ alt uzayında bir izomorfizm olduğunu gösterebiliriz.

I iyi tanımlıdır: çünkü eğer $x + M \cap N = y + M \cap N$ ise, o zaman $x - y \in M \cap N$ dir. Buradan, $x + M = y + M$, $x + N = y + N$ dir.

I açıkça lineerdir.

I bire-bir dir: çünkü eğer $(x + M, x + N) = (y + M, y + N)$ ise, o zaman $x - y \in M$, $x - y \in N$ dir. Böylece, $x - y \in M \cap N$ dir. O zaman, $x + M \cap N = y + M \cap N$ dir.

Önerme 1.1.29 Eğer $T : X \rightarrow Y$ ve $N \subseteq Y$ nin sonlu eşboyutu n ise, o zaman $M = T^{-1}(N) \subseteq X$ nin sonlu eşboyutu $\leq n$ dir.

İspat. X/M yi Y/N nin alt uzayı olarak tanımlayalım. Eğer $I : X/M \rightarrow Y/N$ olarak tanımlanırsa, $I(x + M) = Tx + N \in Y/N$ dir. O zaman, I , Y/N nin bir alt uzayında izomorfizmdir.

I iyi tanımlıdır: Eğer $x + M = y + M$ ise, o zaman $x - y \in M$ dir. Buradan, $T(x - y) = Tx - Ty$ olduğundan $T(x - y) \in N$ dir. Böylece, $Tx + N = Ty + N$ dir.

Bu fikir ters yön için; yani I nın bire-bir olduğunu göstermek için de kullanılabilir. Ayrıca T lineer olduğundan I nın lineer olduğu açıktır.

Teorem 1.1.30 *Eğer T , H Hilbert uzayında bir kompakt simetrik operatör ise, o zaman T nin sıfırdan farklı özdeğerleri sıfıra yakınsayan bir $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ reel sayı dizisi oluşturur. Bunlara karşılık gelen $(\phi_n)_{n \geq 1}$ özfonksiyonları H üzerinde ortogonal bir dizi oluşturur.*

İspat. Önerme 1.1.21 den $\|\phi_1\| = 1$ olacak şekilde ϕ_1 vardır, öyleki $\lambda_1 = \pm \|T\|$ olmak üzere $T\phi_1 = \lambda_1\phi_1$ dir. $E_1 = \{\alpha\phi_1 : \alpha \in \mathbb{C}\}$ ve $M_1 = E_1^\perp$ olsun. T simetrik olduğundan M_1 üzerinde invaryanttır, böylece Önerme 1.1.21 ü tekrar uygulayarak $\|\phi_2\| = 1$ olacak şekilde $\phi_2 \in M_1$ elde ederiz öyleki $\lambda_2 = \pm \|T|_{M_1}\|$ olmak üzere $T\phi_2 = \lambda_2\phi_2$ dir.

Tümevarım ile $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ reel dizisi ve $(\phi_n)_{n \geq 1}$ ortonormal dizisi vardır, öyleki $T\phi_n = \lambda_n\phi_n$ dir. Ve eğer

$$E_n = \{\alpha\phi_n : \alpha \in \mathbb{C}\},$$

$$M_n = (E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n)^\perp,$$

ise, o zaman $\phi_{n+1} \in M_n$ ve $\lambda_{n+1} = \pm \|T|_{M_n}\|$ dir. Buradan, $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ ve bu yüzden $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$ bulunur.

Burada iki mümkün durum vardır:

Durum 1: M_n üzerinde $T = 0$ olacak şekilde n vardır. Bu durumda T sonlu ranka sahiptir.

Durum 2: Her n için $T|_{M_n} \neq 0$ dır. Bu durumda her n için $\lambda_n \neq 0$ dır. Üstelik $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_n \rightarrow 0$ olduğunu gösterebiliriz.

Öyle olmadığını farzedelim, o zaman her $n \geq 1$ için $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ var olacaktır. Buradan, $\|\phi_n/\lambda_n\|$ sınırlı olurdu ve böylece $T(\phi_n/\lambda_n) = \phi_n$ yakınsak alt diziye sahip olacaktır. $(\phi_n)_{n \geq 1}$ ortonormal olduğundan bunun olması mümkün değildir.

Eğer $M = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n)^\perp$ ise, o zaman M üzerinde $T = 0$ olduğunu görünüz. Eğer $T = 0$ olmasaydı Önerme 1.1.21 den $\lambda = \pm \|T|_M\| \neq 0$ olmak üzere $T\phi = \lambda\phi$ olacak şekilde $\exists \phi \in M$ var olmalıydı. Fakat bazı n ler için $|\lambda_n| < |\lambda|$ olmalıdır, bu yüzden $\|T|_{M_n}\| < \|T|_M\|$ olmalıdır ve bu ise $M_n \supseteq M$ olması ile çelişir. Buradan T nin her sıfırdan farklı λ özdeğerinin λ_n dizisi tarafından içerilirdiği bulunur. Aksi halde $T\phi = \lambda\phi \neq 0$ olacak şekilde bir $\phi \in M$ olması gerekirdi.

Sonuç 1.1.31 T nin sıfırdan farklı her özdeğeri sonlu defa tekrarlanır.

Sonuç 1.1.32 $H = \overline{T(H)} \oplus T^{-1}(0)$ dır.

Kabul 1.1.33 (λ_n) dizisi bundan sonra mutlak değerce azalan yani

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

olarak alınacaktır.

Kabul 1.1.34 $\phi(n)$ bundan sonra ortonormal, yani $\|\phi(n)\| = 1$ olarak alınacaktır.

1.2 SONLU RANKLI OPERATÖRLER

H Hilbert uzayı ve $T : H \rightarrow H$ operatörünün rankı N olsun. $\phi_1, \dots, \phi_N$ ler T nin görüntüsünü ve $\phi_{N+1}, \phi_{N+2}, \dots$ ler T nin çekirdeğini gerecek şekilde H nin bir ortonormal tabanı $(\phi_n)_{n \geq 1}$ olarak alabiliriz. Herhangi bir $f \in H$ için

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n,$$

$$Tf = \sum_{n=1}^N \langle Tf, \phi_n \rangle \phi_n = \sum_{n=1}^N \langle f, T^* \phi_n \rangle \phi_n$$

dir. $\psi_n = T^* \phi_n$ ve $H = L^2[0, 1]$ olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \sum_{n=1}^N \langle f, \psi_n \rangle \phi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\int_0^1 f(t) \overline{\psi_n(t)} dt \right) \phi_n(x) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^N \phi_n(x) \overline{\psi_n(t)} \right) f(t) dt \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^N \phi_n(x) \overline{\psi_n(t)} = K(x, t)$ yazılırsa

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$$

elde edilir.

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^N \phi_n(x) \overline{\psi_n(t)}$$

tipindeki çekirdeklere **dejenere** çekirdek adı verilir.

Eğer $K(x, t)$ simetrik ise, ϕ_n ler özfonksiyon olarak seçilebilir. Eğer λ_n ler de özdeğerler ise,

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(t)}$$

elde edilir.

1.3 ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLAR

Önerme 1.3.1 *Teorem 1.1.30 deki gibi $T : H \rightarrow H$ kompakt simetrik operatörü $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere λ_n özdeğerlerine ve ϕ_n özfonksiyonlarına sahip olsun. O zaman her $f \in H$ için*

$$Tf = \sum_1^{\infty} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

dir.

İspat. $T(\phi_n) = \lambda_n(\phi_n)$ dir ve T nin sıfır uzayı M nin ortonormal bir tabanı $(\psi_n)_{n \geq 1}$ olsun. O zaman $\alpha_n = \langle f, \phi_n \rangle, \beta_n = \langle f, \psi_n \rangle$ olmak üzere her $f \in H$

$$f = \sum_1^{\infty} \alpha_n \phi_n + \sum_1^{\infty} \beta_n \psi_n$$

şeklinde olmak zorundadır. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} Tf &= \sum_1^{\infty} \alpha_n \lambda_n \phi_n \\ &= \sum_1^{\infty} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \end{aligned} \tag{1.3}$$

dir. (1.3) **operatör özfonksiyon açılımı** adını alır.

Önerme 1.3.2 (ϕ_n) ortonormal bir dizi, (λ_n) sıfıra yakınsayan reel bir dizi ve $|\lambda_n|$ azalan olsun, o zaman

$$Tf = \sum_1^{\infty} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

λ_n özdeğerleri ve ϕ_n özfonksiyonlarına sahip H den H ye kompakt simetrik bir T operatörü tanımlar. Ayrıca

$$\|T\| = |\lambda_1|$$

dir.

İspat. ϕ_n ortonormal ve

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \lambda_n^2 \langle f, \phi_n \rangle^2 &\leq \lambda_1^2 \sum_1^\infty \langle f, \phi_n \rangle^2 \\ &\leq \lambda_1^2 \|f\|^2 < \infty \quad (\text{Bessel eşitsizliği}) \end{aligned}$$

olduğundan $\sum_1^\infty \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ serisi H de yakınsaktır. T açıkça lineerdir.

Eğer $\|f\| \leq 1$ ise

$$\|Tf\|^2 = \sum_1^\infty \lambda_n^2 |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \lambda_1^2 \sum_1^\infty \langle f, \phi_n \rangle^2 \leq \lambda_1^2 \|f\|^2 \leq \lambda_1^2$$

dir. O halde T sınırlıdır. Bu ayrıca $\|T\| \leq |\lambda_1|$ olduğunu ispatlar.

$\|T\| = |\lambda_1|$ olduğunu görmek için $\|\phi_1\| = 1$ ve $\|T\phi_1\| = \|\lambda_1\phi_1\| = |\lambda_1|$ olduğunu görünüz.

T nin kompakt olduğunu görmek için N rankına sahip

$$R_N f = \sum_1^N \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

ve

$$(T - R_N)f = \sum_{N+1}^\infty \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

nin normunun $\|T - R_N\| = |\lambda_{N+1}|$ olduğu görülür. Buradan sonlu ranklı operatörlerin limiti $T = \lim_{N \rightarrow \infty} R_N$ dir.

T nin simetrik olduğunu görmek için her $f, g \in H$ için

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \left\langle \sum_1^\infty \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, g \right\rangle = \sum_1^\infty \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \langle \phi_n, g \rangle \\ &= \left\langle f, \sum_1^\infty \lambda_n \langle g, \phi_n \rangle \phi_n \right\rangle = \langle f, Tg \rangle \end{aligned}$$

dir. Açıkça T ; λ_n özdeğerli ve ϕ_n özfonksiyonlu olmak üzere her n için $T\phi_n = \lambda_n\phi_n$ dir.

Önerme 1.3.3 $K(x, t) \in L^2[0, 1]^2$ olmak üzere

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t)f(t)dt$$

ile tanımlanan her T çekirdek operatörü eğer $K(t, x) = \overline{K(x, t)}$ ise kompakt simetriktir.

Bu durumda, Teorem 1.1.30 deki gibi T nin özdeğerleri λ_n ve T nin özfonksiyonları ϕ_n ise, yakınsama L^2 normunda olmak üzere

$$K(x, t) = \sum_1^\infty \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(t)} \quad (1.4)$$

dir. Ayrıca

$$\int_0^1 \int_0^1 (K(x, t))^2 dx dt = \sum_1^\infty \lambda_n^2 \quad (1.5)$$

dir.

(1.4) **çekirdeğin özfonksiyon açılımı** olarak adlandırılır. Bu tipteki T operatörlere **Hilbert-Schmidt operatörler** denir. (1.5) **Parseval özdeşliği** olarak adlandırılır.

İspat. Önerme 1.3.2 den her $f \in L^2[0, 1]$ için

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \sum_1^\infty \lambda_n \left(\int_0^1 f(t) \overline{\phi_n(t)} dt \right) \phi_n(x) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_1^\infty \lambda_n \overline{\phi_n(t)} \phi_n(x) \right) f(t) dt \end{aligned}$$

dir. İntegralin toplam ile yer değiştirebilmesinin nedeni, L^2 normunda

$$\sum_1^N \overline{\phi_n(t)} \rightarrow \sum_1^\infty \overline{\phi_n(t)}$$

yakınsamasından dolayı

$$\left\langle \sum_1^N \overline{\phi_n(t)}, f \right\rangle \rightarrow \left\langle \sum_1^\infty \overline{\phi_n(t)}, f \right\rangle$$

yakınsamasının olmasındandır.

Buradan

$$K(x, t) = \sum_1^\infty \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(t)}$$

dir. $L^2[0, 1]^2$ üzerinde $\phi_n(x) \overline{\phi_n(t)}$ ortonormal olduğundan

$$\int_0^1 \int_0^1 (K(x, t))^2 dx dt = \sum_1^\infty \lambda_n^2$$

özdeşliği Pisagor Teoremidir.

Sonuç 1.3.4 T operatörü

$$\|T\| \leq \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 (K(x, t))^2 dx dt}.$$

eşitsizliğini sağlar.

Tanım 1.3.5 T operatörünün **Hilbert-Schmidt normu** (1.5) den

$$\begin{aligned}\|T\|_{HS} &= \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt} \\ &= \sqrt{\sum_1^\infty \lambda_n^2}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Bundan sonra T nin operatör normunu $\|T\|_{op}$ şeklinde göstereceğiz.

Önerme 1.3.6 Eğer λ_n özdeğerli $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ operatörü kompakt simetrik ve $\sum_1^\infty \lambda_n^2 < \infty$ ise T bir Hilbert-Schmidt operatördür. Burada T nin çekirdeği

$$K(x, t) = \sum_1^\infty \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(t)}$$

dir.

İspat. $L^2[0, 1]^2$ üzerinde $\phi_n(x) \overline{\phi_n(t)}$ ortonormal olsun. Buradan $L^2[0, 1]^2$ üzerinde

$$\sum_1^\infty \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(t)}$$

yakınsaktır. O zaman her $f \in L^2[0, 1]$ için,

$$\begin{aligned}\int_0^1 K(x, t) f(t) dt &= \int_0^1 \left(\sum_1^\infty \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(t)} \right) f(t) dt \\ &= \sum_1^\infty \left(\lambda_n \phi_n(x) \int_0^1 f(t) \overline{\phi_n(t)} dt \right) \\ &= \sum_1^\infty \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) = T f(x)\end{aligned}$$

dir.

1.4 POZİTİF OPERATÖRLER

Tanım 1.4.1 H Hilbert uzayı üzerinde T bir özeşlenik lineer operatör olsun. Her $f \in H$ için eğer $\langle T f, f \rangle \geq 0$ oluyor ise T ye **pozitif operatör** denir ve $T \geq 0$ yazılır. Eğer H kompleks uzay ve T sınırlı ise yukarıdaki tanım içinde T nin özeşlenik olması gerekli değildir. Genel olarak, eğer H üzerinde T ve S iki sınırlı simetrik lineer operatör ise, o zaman $T \geq S$, $T - S \geq 0$ anlamında tanımlanır. Eğer $-T$ pozitif ise T ye negatif denir ve $T \leq 0$ yazılır.

Bir H Hilbert uzayı üzerinde T bir simetrik operatör olsun. Eğer T simetrik operatörü pozitif ve bire bir ise T operatörüne kesin pozitif denir ve $T > 0$ yazılır. Eğer T aynı zamanda kompakt ise, pozitiflik aynı zamanda tüm özdeğerlerin negatif olmayan olduğunu söylemeye denktir.

Önerme 1.4.2 T pozitifdir ancak ve ancak her n için T nin özdeğerleri $\lambda_n \geq 0$ dır.

İspat. Herhangi bir T operatörü için, Önerme 1.3.1 den

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

dir. Eğer $\lambda_n \geq 0$ ise

$$\begin{aligned} \langle Tf, f \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \langle \phi_n, f \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece T pozitifdir. Eğer T pozitif ise her n ve ϕ_n için

$$0 \leq \langle T\phi_n, \phi_n \rangle = \langle \lambda_n \phi_n, \phi_n \rangle = \lambda_n$$

olduğundan $\lambda_n \geq 0$ dır.

Örnek 1.4.3

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

olmak üzere VV^* operatörü $L^2[0, 1]$ üzerinde pozitifdir.

Genelde, herhangi bir kompakt $T : H \rightarrow H$ operatörü için, TT^* operatörü pozitifdir $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ $Tf(x) = \int_{-1}^1 |x - t| f(t)dt$ operatörü ise pozitif değildir çünkü açık olarak negatif özdeğerlere sahip olduğu (Dikmen 2000) de gösterilmiştir.

Lemma 1.4.4 A, B, C operatörleri için eğer $A \leq B$, ve eğer C simetrik ise, o zaman

$$i. A + C \leq B + C$$

$$ii. CAC \leq CBC$$

dir.

İspat.

$$\text{i. } \langle (A + C)f, f \rangle = \langle Af, f \rangle + \langle Cf, f \rangle \leq \langle Bf, f \rangle + \langle Cf, f \rangle.$$

$$\text{ii. } \langle (CAC)f, f \rangle = \langle ACf, Cf \rangle \leq \langle BCf, Cf \rangle = \langle (CBC)f, f \rangle.$$

Tanım 1.4.5 $Tf(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$ integral operatörü eğer

i. $K(x, t)$ sürekli,

ii. T simetrik ve pozitif yani her f için $\langle Tf, f \rangle \geq 0$,

şartlarını sağlar ise bir **Mercer operatör** denir.

Teorem 1.4.6 (Mercer Teoremi) Eğer sürekli ve simetrik $K(x, t)$ çekirdeği ile üretilen T operatörü pozitif, yani her f için $\langle Tf, f \rangle \geq 0$ ya da denk bir ifade ile $\lambda_i \neq 0$ olmak üzere eğer T nin her özdeğeri pozitif ise, bu durumda T operatörünün çekirdek açılımı

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(x) \overline{\phi_i(t)}$$

düzgün yakınsaktır.

İspat. İlk olarak $K(x, t)$ çekirdeği sürekli olduğundan tüm

$$Tf(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt$$

görüntü fonksiyonları da sürekli dir. Böylece, özel olarak, bütün $\phi_i(x) = \frac{1}{\lambda_i} T\phi_i(x)$ öz-fonksiyonları sürekli dir.

Sonuç olarak ($n = 1, 2, \dots$) için

$$K_n(x, t) = K(x, t) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x) \overline{\phi_i(t)}$$

”kalan” fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca L^2 yakınsaklık anlamında

$$K_n(x, t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(x) \overline{\phi_i(t)}$$

olduğundan, L^2 nin her f elemanı için

$$\int_a^b \int_a^b K_n(x, t) f(t) \overline{f(x)} dx dt = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \langle \phi_i, f \rangle \langle f, \phi_i \rangle \geq 0 \quad (1.6)$$

dır.

Buradan $K_n(x, x) \geq 0$ elde edilir. Aslında, eğer $K_n(x_0, x_0) < 0$ olsaydı, (x_0, x_0) noktasının

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad x_0 - \delta < t < x_0 + \delta$$

komşuluğunda süreklilikten dolayı $K_n(x, t) < 0$ olmalıydı.

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ için $f(x) = 0$ ve diğer yerlerde $f(x) = 1$ yazarsak (1.6) integrali negatif olacaktır ki bu bir çelişkidir.

Böylece $(n = 1, 2, \dots)$ için

$$K_n(x, x) = K(x, x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x) \overline{\phi_i(x)} \geq 0$$

dır. Buradan, pozitif terimli

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(x) \overline{\phi_i(x)}$$

serisinin yakınsak ve toplamın $\leq K(x, x)$ olduğu sonucuna varılır.

$K(x, x)$ sürekli fonksiyonunun maksimumunu M ile gösterirsek, Cauchy eşitsizliğinden

$$\left| \sum_{i=m}^n \lambda_i \phi_i(x) \overline{\phi_i(t)} \right|^2 \leq \sum_{i=m}^n \lambda_i |\phi_i(x)|^2 \sum_{i=m}^n \lambda_i |\phi_i(t)|^2 \leq M \sum_{i=m}^n \lambda_i |\phi_i(x)|^2 \quad (1.7)$$

dir. Buradan x in her sabit değeri için

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(x) \overline{\phi_i(t)} \quad (1.8)$$

serisi t ye göre düzgün yakınsaktır. Böylece (1.8) nin toplamı $B(x, t)$, t nin sürekli bir fonksiyonudur ve sürekli her $f(t)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b B(x, t) f(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(x) \int_a^b \overline{\phi_i(t)} f(t) dt$$

dir. Şimdi ikinci ifadedeki seri $Tf(x)$ e yakınsak olduğundan Böylece

$$\int_a^b [B(x, t) - K(x, t)] f(t) dt = 0$$

dır ve özel olarak (x in sabit bir değeri için) $f(t) = \overline{B(x, t) - K(x, t)}$ yazılırsa, $a \leq t \leq b$ için $B(x, t) - K(x, t) = 0$ dır. Bu yüzden

$$K(x, x) = B(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\phi_i(x)|^2$$

dir. Bu serinin terimleri x in pozitif sürekli fonksiyonları olduğu ve $K(x, x)$ toplamı sürekli bir fonksiyon olduğu için, **Dini**'nin bilinen teoreminden seri düzgün yakınsaktır. (1.7) Cauchy eşitsizliği tekrar uygulanırsa, buradan sonuç olarak (1.8) deki serinin bağlı olduğu x ve t değişkenlerinin her birine göre düzgün yakınsadıkları gösterilmiş olacağından ispat elde edilir.

Sonuç 1.4.7 Eğer $K(x, t)$ çekirdekli T bir Mercer operatörü ise,

$$\int_0^1 K(x, x) dx = \sum_1^{\infty} \lambda_n \quad (1.9)$$

dir.

Not: Her n için $\lambda_n \geq 0$ dır, çünkü T pozitifdir. (1.9) **iz eşitliği** olarak adlandırılır.

İspat. T açıkça Hilbert-Schmidt'tir. Buradan, çekirdek açılımı

$$K(x, t) = \sum_1^{\infty} \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(t)}$$

dir. Böylece istenildiği gibi,

$$\int_0^1 K(x, x) dx = \sum_1^{\infty} \int_0^1 \lambda_n |\phi_n(x)|^2 dx = \sum_1^{\infty} \lambda_n$$

dir.

Tanım 1.4.8 T Mercer operatörünün **iz normu**

$$\|T\|_{tr} = \int_0^1 K(x, x) dx = \sum_1^{\infty} \lambda_n$$

şeklinde tanımlanır.

$\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 1}$ dizisi olmak üzere

$$\|\lambda\|_{\infty} = \sup_n |\lambda_n|, (\lambda \in l^{\infty})$$

$$\|\lambda\|_2 = \sqrt{\sum_1^{\infty} \lambda_n^2}, (\lambda \in l^2)$$

$$\|\lambda\|_1 = \sum_1^{\infty} |\lambda_n|, (\lambda \in l^1)$$

olmak üzere

$$\|T\|_{op} = \|\lambda\|_{\infty},$$

$$\|T\|_{HS} = \|\lambda\|_2,$$

$$\|T\|_{tr} = \|\lambda\|_1,$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\|T\|_{op} \leq \|T\|_{HS} \leq \|T\|_{tr}$$

dur.

1.5 YAKLAŞIM TEOREMİ

Şimdi T ye sonlu rank operatörlerinin operatör, Hilbert-Schmidt ve iz normu ile en iyi yaklaşımını bulmak istiyoruz. Bunun için aşağıdaki teorem ile başlayacağız.

Teorem 1.5.1 *Eğer $T : H \rightarrow H$ kompakt simetrik operatör ise, o zaman rankı $\leq N$ olan operatörlerin operatör normuyla T ye en iyi yakınsaması*

$$R_N f = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

şeklindedir. Ayrıca $\|T - R_N\|_{op} = |\lambda_{N+1}|$ dir.

İspat. Önerme 1.3.2 den $\|T - R_N\|_{op} = |\lambda_{N+1}|$ olduğunu biliyoruz.

rank $\leq N$ olacak şekilde her S için $\|T - S\|_{op} \geq |\lambda_{N+1}|$ olduğunu göstermeye ihtiyacımız var. S nin $\{\phi_1, \dots, \phi_{N+1}\}$ üzerinde boştan farklı sıfır uzayı (çekirdeği) olması gerektiği için, $S\phi = 0$ olacak şekilde $\phi = \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n \phi_n$ vardır öyleki $\|\phi\| = 1$ dir.

Buradan

$$\begin{aligned} \|(T - S)\phi\|^2 &= \|T\phi\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n \lambda_n \phi_n \right\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n^2 \lambda_n^2 \\ &\geq \lambda_{N+1}^2 \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n^2 \\ &= \lambda_{N+1}^2 \|\phi\|^2 = \lambda_{N+1}^2 \end{aligned}$$

dir. Böylece, $\|T - S\|_{op} \geq |\lambda_{N+1}|$ dir.

Teorem 1.5.2 *Teorem 1.5.1 deki R_N aynı zamanda rankı $\leq N$ olan operatörlerin Hilbert-Schmidt normuyla T ye en iyi yakınsamadır. Ayrıca*

$$\|T - R_N\|_{HS}^2 = \sum_{N+1}^{\infty} \lambda_n^2$$

dir.

İspat. S nin rankı $\leq N$ olsun. $\|S - T\|_{HS}^2 \geq \sum_{N+1}^{\infty} \lambda_n^2$ olduğunu göstermek zorundayız. $S - T$ nin özfonksiyon açılımı

$$(S - T)f = \sum_1^{\infty} \mu_n \langle f, \psi_n \rangle \psi_n$$

olsun. Bu açılımın k . kısmi toplamı

$$Pf = \sum_1^k \mu_n \langle f, \psi_n \rangle \psi_n$$

dir. O zaman $\|S - T - U\|_{op} = |\mu_{k+1}| \geq |\lambda_{N+k+1}|$ dir, çünkü $S - P$ nin rankı $\leq N + k$ dır. Böylece istenildiği gibi

$$\|S - T\|_{HS}^2 = \sum_1^{\infty} \mu_n^2 \geq \sum_{N+1}^{\infty} \lambda_n^2$$

dir.

Teorem 1.5.3 *Teorem 1.5.1 deki R_N aynı zamanda rankı $\leq N$ olan operatörlerin iz normuyla T ye en iyi yakınsamadır. Ayrıca*

$$\|T - R_N\|_{tr} = \sum_{N+1}^{\infty} |\lambda_n|$$

dir.

İspat. Önceki teoremin ispatıyla benzerdir.

Önerme 1.5.4 (Bessel eşitsizliği) H bir iç çarpım uzayı ve S bu uzayda bir ortonormal küme olsun. $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ vektörleri S kümesinin ayrık üyelerinin her hangi bir sonlu topluluğu ise her $u \in H$ vektörü için

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, \phi_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \quad (1.10)$$

sağlanır. (1.10) eşitsizliğine Bessel eşitsizliği denir (Erdoğan 2001).

Teorem 1.5.5 (*Riesz-Fischer teoremi*) H bir Hilbert uzayı ve $S = (\phi_i)$, H 'nin sayılabilir bir ortonormal alt kümesi olsun. (a_i) skalerler dizisi ile oluşturulan $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i$ serisi ancak ve ancak

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$$

koşulu sağlanırsa yakınsaktır.

İspat. (u_n) vektör dizisi ile (s_n) negatif olmayan reel sayılar dizisini

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k, \quad s_n = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \geq 0; \quad n = 1, 2, \dots$$

elemanlarıyla tanımlayalım. Genellikle kaybetmeksizin $n \geq m$ alırsak ortonormallik bağıntılarından

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &= \left\langle \sum_{k=m+1}^n a_k \phi_k, \sum_{l=m+1}^n a_l \phi_l \right\rangle \\ &= \sum_{k=m+1}^n \sum_{l=m+1}^n a_k \overline{a_l} \langle \phi_k, \phi_l \rangle \\ &= \sum_{k=m+1}^n |a_k|^2 = s_n - s_m, \quad s_n \geq s_m \end{aligned}$$

sonucunu buluruz. $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$ serisi yakınsaksa (s_n) bir Cauchy dizisi olur. Dolayısıyla (u_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. Buna göre u_n dizisi bir $u \in H$ vektörüne yakınsar ve $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i$ yazılabilir. Tersine olarak $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i$ serisi yakınsaksa (u_n) bir Cauchy dizisi, dolayısıyla da (s_n) bir Cauchy dizisidir ve bir $s \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsar. Yani $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$ serisi yakınsak olur. Ortonormallik bağıntıları nedeniyle kısmi toplamdan $a_k = \langle u_n, \phi_k \rangle$, $1 \leq k \leq n$ elde edileceği kolayca görülür. $u_n \rightarrow u$ ise iç çarpımın sürekliliğinden serinin katsayıları $a_k = \langle u, \phi_k \rangle$ şeklinde belirlenir.

1.6 O VE o NOTASYONU

(a_n) ve (b_n) reel sayıların dizileri olsun. Yeterince büyük her n için $|a_n| \leq K |b_n|$ olacak şekilde bir K sabiti varsa $|a_n| = O(b_n)$ yazarız. Aynı şekilde, yeterince büyük her n için $|a_n| \leq \varepsilon |b_n|$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ keyfi küçük reel sayısı varsa $|a_n| = o(b_n)$ yazarız. Bu kullanımlar $n \rightarrow \infty$ için neler olduğu hakkında bilgi vermektedir. Örneğin (a_n) dizisi

$o(1)$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ ve $O(1)$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = K < \infty$ demektir. Ayrıca, $O\left(\frac{1}{n}\right)$, “ $\frac{1}{n}$ nin en azından sabit bir katı kadar hızla sıfıra yaklaşması” demektir. $o\left(\frac{1}{n}\right)$, “ $\frac{1}{n}$ nin sıfıra yaklaşma hızından daha hızlı sıfıra yaklaşması” demektir.

Aynı notasyon bir reel değişkenli fonksiyonlar için kullanılır. Bu nedenle $x \rightarrow \infty$ davranışıyla ilgilendiğimizde $a < x < \infty$ için

$$|f(x)| \leq A |g(x)|$$

olacak şekilde $A > 0$ ve a reel sabitlerinin var olduğunu ifade etmek için

$$f(x) = O(g(x))$$

yazabiliriz. Benzer şekilde yukarıda A yerine ε gelirse eşitlikte O yerine o yazılır.

BÖLÜM 2

C^1 ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜN ÖZDEĞER YAKLAŞIMLARI

Bu bölümde önce C^1 çekirdekli integral operatörlerin özdeğerlerinin $o(1/n^{3/2})$ olduğunu gösteren Weyl teoremi (Weyl 1912), sonra bu teoremi çekirdeğin pozitif tanımlı olması durumunda $o(1/n^2)$ ye geliştiren Reade teoremi (Reade 1983) ispat edilecektir.

2.1 WEYL TEOREMİ

Teorem 2.1.1 *Simetrik $K(x, t) \in C^1[0, 1]^2$ verilsin.*

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$$

şeklindeki T nin λ_n özdeğerleri

$$\lambda_n = o(1/n^{3/2})$$

dir.

İspat. $K(x, t)$ nin (reel) C^1 çekirdeği olması $\partial K/\partial x, \partial K/\partial t$ kısmi türevlerinin var ve sürekli olması demektir. Eğer $K(x, t)$ simetrik ise

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial K}{\partial t}(t, x) \quad (2.1)$$

dir. $[0, 1]^2$ üzerinde $\partial K/\partial x, \partial K/\partial t$ düzgün süreklidirler. Böylece $\varepsilon > 0$ için $|x - y| < 1/N, |t - u| < 1/N$ olduğunda,

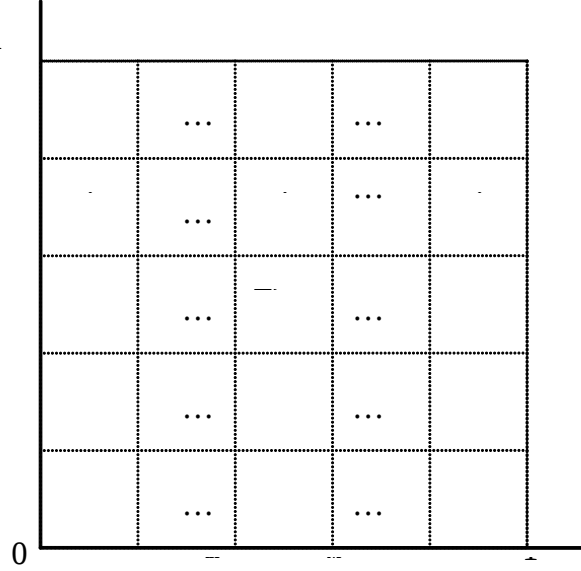
$$\left| \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial K}{\partial x}(y, u) \right| < \varepsilon$$
$$\left| \frac{\partial K}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial K}{\partial t}(y, u) \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde N vardır.

$x_n = t_n = n/N$ ($0 \leq n \leq N$) yazalım. E_{mn} karesi

$$E_{mn} = \{(x, t) : x_{m-1} \leq x \leq x_m, t_{n-1} \leq t \leq t_n\}$$

olsun.



Şekil 2.1 E_{mn} karesi

E_{mn} karesi üzerinde

$$R(x, t) = K(x_m, t_n) + (x - x_m) \frac{\partial K}{\partial x}(x_m, t_n) + (t - t_n) \frac{\partial K}{\partial t}(x_m, t_n) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlansın

$R_N(x, t)$, $x = x_m$ ve $y = t_n$ doğruları üzerinde tanımlı değildir fakat bu doğruların ölçümü sıfır olduğundan önemli değildir.

Bu taktirde, ortalama değer teoremi $K(x, t)$ ye uygulanırsa, $x < y < x_m$ şartını sağlayan bazı y ve $t < u < t_n$ şartını sağlayan bazı u lar için

$$\begin{aligned} K(x, t) - K(x_m, t_n) &= (K(x, t) - K(x_m, t)) + (K(x_m, t) - K(x_m, t_n)) \\ &= (x - x_m) \frac{\partial K}{\partial x}(y, t) + (t - t_n) \frac{\partial K}{\partial t}(x_m, u) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(x, t) \in E_{mn}$ için

$$K(x, t) - R(x, t) = (x - x_m) \left(\frac{\partial K}{\partial x}(y, t) - \frac{\partial K}{\partial x}(x_m, t_n) \right) + (t - t_n) \left(\frac{\partial K}{\partial t}(x_m, u) - \frac{\partial K}{\partial t}(x_m, t_n) \right)$$

ve böylece

$$|K(x, t) - R(x, t)| < |x - x_m|\varepsilon + |t - t_n|\varepsilon < \frac{1}{N}\varepsilon + \frac{1}{N}\varepsilon = 2\varepsilon/N$$

elde edilir. Buradan

$$\|K - R\|_\infty < 2\varepsilon/N, \|K - R\|_{HS} < 2\varepsilon/N \quad (2.3)$$

ve eğer K bir Mercer çekirdeği ise, bu durumda

$$\int_0^1 |K(x, x) - R(x, x)| dx < 2\varepsilon/N$$

dir.

Şimdi (2.2) ile tanımlı R nin rankının $2N$ olduğunu gösterelim.

(2.2) ile tanımlı $R(x, t)$

$$\begin{aligned} a_{mn} &= K(x_m, t_n) - x_m \frac{\partial K}{\partial x}(x_m, t_n) - t_n \frac{\partial K}{\partial t}(x_m, t_n) \\ &= K(x_m, x_n) - x_m \frac{\partial K}{\partial x}(x_m, x_n) - x_n \frac{\partial K}{\partial t}(x_m, x_n) \end{aligned}$$

olmak üzere (2.1) den $R(x, t) = a_{mn} + b_{mn}x + c_{mn}t$ şeklindedir.

Böylece $K(x, t)$ simetrik ise $a_{mn} = a_{nm}$ olduğu görülür. Ayrıca, (2.1) den eğer $K(x, t)$ simetrik ise

$$\begin{aligned} b_{mn} &= \frac{\partial K}{\partial x}(x_m, t_n) = \frac{\partial K}{\partial x}(x_m, x_n), \\ c_{mn} &= \frac{\partial K}{\partial t}(x_m, t_n) = \frac{\partial K}{\partial t}(x_m, x_n) \\ &= \frac{\partial K}{\partial x}(x_n, x_m) = b_{nm} \end{aligned}$$

dir. Buradan $(x, t) \in E_{nm}$ için

$$R(x, t) = a_{mn} + b_{mn}x + b_{nm}t$$

yazılabilir. Böylece eğer $K(x, t)$ simetrik ise $R(x, t)$ de simetriktir.

$n = 1, \dots, N$ için,

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve

$$\psi_n(x) = \begin{cases} x, & \text{eğer } x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olsun. Buradan,

$$R(x, t) = \sum_{m,n=1}^N a_{mn} \phi_m(x) \phi_n(t) + \sum_{m,n=1}^N b_{mn} \psi_m(x) \phi_n(t) + \sum_{m,n=1}^N b_{nm} \phi_m(x) \psi_n(t)$$

yazılır. Bu ise $R(x, t)$ nin rankının $2N$ olduğunu gösterir.

R yi (2.2) deki gibi seçelim. Teorem 1.5.2 ve (2.3) eşitsizliğinden λ_n reel ve mutlak değerce azalan iken

$$\sum_{2N+1}^{\infty} \lambda_n^2 \leq \|T - R\|_{HS}^2 = o(1/N^2)$$

bulunur. Buradan $\lambda_n^2 = o(1/n^3)$ olduğunu gösterelim.

Eğer $\varepsilon > 0$ verilirse, her $N > N_0$ için,

$$\sum_{2N+1}^{\infty} \lambda_n^2 < \varepsilon/N^2$$

olacak şekilde N_0 vardır. λ_n azalan olduğundan

$$\varepsilon/N^2 > \sum_{2N+1}^{3N} \lambda_n^2 \geq N \lambda_{3N}^2$$

dir. Bu yüzden, her $N > N_0$ için, $N^3 \lambda_{3N}^2 < \varepsilon$ dur.

Böylece,

$$N^3 \lambda_{3N}^2 \rightarrow 0 \tag{2.4}$$

dır.

Ayrıca

$$N^3 \lambda_{3N+1}^2 \leq N^3 \lambda_{3N}^2 \rightarrow 0, \tag{2.5}$$

$$N^3 \lambda_{3N+2}^2 \leq N^3 \lambda_{3N}^2 \rightarrow 0, \tag{2.6}$$

dır.

O zaman

$n = 3N$, için (2.4) den

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 (n^3 \lambda_n^2) \rightarrow 0,$$

$n = 3N + 1$, için (2.5) den

$$\left(\frac{n-1}{3}\right)^3 \lambda_n^2 \sim \left(\frac{1}{3}\right)^3 (n^3 \lambda_n^2) \rightarrow 0,$$

$n = 3N + 2$, için (2.6) dan

$$\left(\frac{n-2}{3}\right)^3 \lambda_n^2 \sim \left(\frac{1}{3}\right)^3 (n^3 \lambda_n^2) \rightarrow 0,$$

bulunur.

Böylece, her durumda $n^3 \lambda_n^2 \rightarrow 0$ dır. Sonuç olarak

$$\lambda_n^2 = o(1/n^3)$$

dir. Dolayısıyla

$$|\lambda_n| = o(1/n^{3/2})$$

elde edilir.

2.2 READE TEOREMİ

Teorem 2.2.1 Eğer $K(x, t) \in C^1[0, 1]^2$ ve

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$$

pozitif tanımlı ise

$$\lambda_n = o(1/n^2)$$

dir.

Teorem 2.2.2 $k(-t) = \overline{k(t)}$ olacak şekilde 2π -periodik $k \in L^1[-\pi, \pi]$ için

$$Tf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k(x-t) f(t) dt$$

konvolüsyon operatörü pozitifdir ancak ve ancak k nın Fourier katsayıları

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(t) e^{-int} dt$$

olmak üzere her n için $c_n \geq 0$ dır.

İspat. Eşleniği kendisine eşit olduğundan tüm c_n ler reeldir:

$$\begin{aligned}
\overline{c_n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{k(t)} e^{int} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(-t) e^{int} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(t) e^{-int} dt \\
&= c_n.
\end{aligned}$$

Eğer $c_n \geq 0$ ise herhangi bir $f \in L^2[-\pi, \pi]$ için

$$\begin{aligned}
\langle Tf, f \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(x-t) f(t) \overline{f(x)} dt dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in(x-t)} f(t) \overline{f(x)} dt dx \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

dır. Böylece K pozitif tanımlı olur.

Eğer $T \geq 0$ ise $\phi_n(t) = e^{int}$ için

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle T\phi_n, \phi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(x-t) e^{int} e^{-inx} dt dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} k(u) e^{-inu} du \right) dx \quad (u = x - t) \\
&= 4\pi^2 c_n
\end{aligned}$$

dır. Böylece her n için $c_n \geq 0$ olduğu görülür.

2.2.1 En İyi Yaklaşım

Mercer teoremi (Teorem 1.4.6 ve Sonuç 1.4.7), eğer $K(x, t)$ sürekli ve

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$$

pozitif ise,

$$\|T\|_{tr} = \sum_1^{\infty} \lambda_n = \int_0^1 K(x, x) dx < \infty$$

olduğunu söyler.

Rank $\leq N$ olacak şekilde sonlu ranklı operatörler ile iz normunda T ye en iyi yaklaşım

$$R_N f = \sum_1^N \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

dir. (Teorem 1.5.3).

2.2.2 Karekökler

Teorem 2.2.3 *Eğer $T : H \rightarrow H$ pozitif tanımlı ise $S^2 = T$ olacak şekilde pozitif tek bir $S : H \rightarrow H$ operatörü vardır.*

İspat. Eğer T nin özfonksiyon açılımı,

$$Tf = \sum_1^\infty \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

ise T nin karekökü,

$$Sf = \sum_1^\infty \lambda_n^{1/2} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

dir $(\lambda_n^{1/2} > 0)$.

Önerme 2.2.4 *Eğer $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ bir Mercer operatörü ise (sürekli çekirdekli ve pozitif tanımlı), T nin $S : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ karekökü $C[0, 1]$ içindedir.*

İspat. Eğer

$$Tf = \sum_1^\infty \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

ise

$$Sf = \sum_1^\infty \lambda_n^{1/2} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

dir. Bu seri $[0, 1]$ üzerinde düzgün yakınsaktır çünkü,

$$\left| \sum_M^N \lambda_n^{1/2} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \right|^2 \leq \sum_M^N \lambda_n |\phi_n(x)|^2 \sum_M^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2$$

dir. Sağ taraftaki her iki toplam x e göre düzgün olarak 0 a yakınsar çünkü Mercer teoreminden x e göre düzgün olarak

$$\sum_1^{\infty} \lambda_n |\phi_n(x)|^2 = K(x, x)$$

ve Bessel eşitsizliğinden

$$\sum_1^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2$$

dir.

$\|R_N - T\|_{tr} < \varepsilon$ olacak şekilde sonlu ranklı R_N operatörlerini bulmaya ihtiyacımız var. Eğer,

$$\|T\|_{tr} = \int_0^1 K(x, x) dx = \sum_1^{\infty} \lambda_n$$

eşitliğini kullanmak istersek, $R_N \leq T$ için çalışmalıyız. Ayrıca R_N sürekli çekirdeğe sahip olmalıdır. Bu koşullar sağlanırsa Mercer teoremini kullanabiliriz. Weyl tarafından kullanılan R_N bu özelliğe sahip değildir.

2.2.3 Yaklaşık Birimler

Tanım 2.2.5 $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$ için f ve g nin **konvolüsyonu** (convolution)

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

ile tanımlanır.

Bu işlem $L^1[-\pi, \pi]$ yi bir Banach cebirine dönüştürür, fakat her f için $e * f = f$ olacak şekilde bir e birim elemanı yoktur.

Tanım 2.2.6 $L^1[-\pi, \pi]$ de bir **yaklaşık birim** (approximate identity) her $f \in L^1[-\pi, \pi]$ için $e_n * f \rightarrow f$ olacak şekilde bir $(e_n)_{n \geq 1}$ dizisidir.

Tanım 2.2.7 N . Dirichlet çekirdeği

$$D_N(t) = \sum_{-N}^N e^{int} = \frac{\sin(N + 1/2)t}{\sin t/2}$$

ile tanımlanır.

N. Fejer çekirdeği

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \left(\sum_{-N}^N e^{int} \right)^2 = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(N+1/2)t}{\sin^2 t/2} \quad (2.7)$$

ile tanımlanır.

Örnek 2.2.8 Yukarıda verilen D_N, F_N çekirdekleri yaklaşık birimlerdir.

Önerme 2.2.9 Eğer,

$$D_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) f(t) dt,$$

$$F_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-t) f(t) dt,$$

şeklinde alınırsa, $0 \leq F_N \leq D_N \leq I$ olur.

İspat. Eğer $\phi_n(t) = e^{int}$ ise,

$$D_N f = \sum_{-N}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

dir. Böylece Bessel eşitsizliğinden

$$0 \leq \langle D_N f, f \rangle = \sum_{-N}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2$$

dir. Ayrıca,

$$F_N = \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_{N-1}}{N}$$

olduğundan

$$F_N f = \sum_{-N}^N (1 - |n|/N) \langle f, \phi_n \rangle \phi_n,$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \langle F_N f, f \rangle &= \sum_{-N}^N (1 - |n|/N) |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{-N}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 = \langle D_N f, f \rangle \end{aligned}$$

dir. Böylece istenildiği gibi $0 \leq F_N \leq D_N \leq I$ elde edilir.

Yukarıda ilgilendiğimiz D_N, F_N örnekleri bizim ispatlayacağımız teorem için yeterli değildir, o yüzden aşağıdaki R_N çekirdeğini kullanmamız gerekecek.

Örnek 2.2.10 Eğer $x_n = t_n = n/N$ ($0 \leq n \leq N$), ve eğer $1 \leq n \leq N$ için

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ve eğer,

$$R_N(x, t) = N \sum_{n=1}^N \phi_n(x) \phi_n(t)$$

ise, bu durumda

i. Her $N \geq 1$ için $0 \leq R_N \leq I$ dir.

ii. Her $f \in L^1[0, 1]$ için $\|R_N f - f\|_1 \rightarrow 0$ dir.

R_N bir yaklaşık birimdir; yani $R_N \rightarrow I$ kuvvetli yakınsaktır.

İspat. İlk olarak,

$$\int_0^1 R_N(x, t) dt = 1$$

olduğunu görürüz, çünkü hemen hemen her x için eğer $x_{n-1} \leq x \leq x_n$ ise

$$\int_0^1 R_N(x, t) dt = N \int_0^1 \phi_n(t) dt = N \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt = 1$$

dir. $0 \leq R_N \leq 1$ in ispatı için,

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle R_N f, f \rangle &= N \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=1}^N \phi_n(x) \phi_n(t) f(t) \overline{f(x)} dx dt \\ &= N \sum_{n=1}^N \int_0^1 f(t) \phi_n(t) dt \int_0^1 \phi_n(x) \overline{f(x)} dx \\ &= N \sum_{n=1}^N \left| \int_0^1 f(t) \phi_n(t) dt \right|^2 \\ &= N \sum_{n=1}^N \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t) dt \right|^2 \\ &\leq N \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_{t_{n-1}}^{t_n} |f(t)|^2 dt \quad (\text{Schwartz eşitsizliği}) \\ &= \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\|R_N f - f\|_1 &= \int_0^1 \left| \int_0^1 R_N(x, t) f(t) dt - f(x) \right| dx \\
&= \int_0^1 \left| \int_0^1 R_N(x, t) (f(t) - f(x)) dt \right| dx \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 R_N(x, t) |f(t) - f(x)| dt dx \\
&= N \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |f(t) - f(x)| dt dx
\end{aligned}$$

dir.

Eğer $f \in C[0, 1]$ ise verilen $\varepsilon > 0$ ve her $|x - t| < 1/N$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists N$ vardır.

Buradan, tüm bu N ler için

$$\|R_N f - f\|_1 < N \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \varepsilon dt dx = \varepsilon$$

olur. Bu, sürekli f fonksiyonları için $\|\cdot\|_1$ normunda $R_N f \rightarrow f$ olduğunu gösterir.

Eğer $f \in L^1[0, 1]$ ise, $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\|g - f\|_1 < \varepsilon$ olacak şekilde $g \in C[0, 1]$ seçebiliriz.

Böylece, $\|R_N g - R_N f\|_1 \leq \|g - f\|_1$ olduğundan

$$\|R_N g - g\|_1 \leq \|R_N g - R_N f\|_1 + \|R_N f - f\|_1 + \|f - g\|_1 < 3\varepsilon$$

dur. Gerçekten, $\|R_N\| \leq 1$, $L^1[0, 1] \rightarrow L^1[0, 1]$ şeklinde bir operatör olarak düşünülür çünkü

$$\begin{aligned}
\|R_N h\|_1 &= N \int_0^1 \left| \int_0^1 \sum_{n=1}^N \phi_n(x) \phi_n(t) h(t) dt \right| dx \\
&\leq N \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=1}^N \phi_n(x) \phi_n(t) |h(t)| dx dt \\
&= N \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |h(t)| dx dt \\
&= \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} |h(t)| dt \\
&= \|h\|_1
\end{aligned}$$

dür

Önerme 2.2.11 *Eğer T pozitif tanımlı ve S de onun pozitif karekökü ise ve eğer I birim operatörü olmak üzere R*

$$0 \leq R \leq I$$

olacak şekilde sonlu ranklı bir operatör ise, bu durumda SRS nin sürekli çekirdeği vardır ve

$$0 \leq SRS \leq T$$

dir. Bu yüzden SRS bir Mercer operatörüdür.

İspat. $0 \leq R \leq I$ olduğundan, Lemma 1.4.4 den

$$0 \leq SRS \leq S^2 = T$$

dır. Eğer,

$$\begin{aligned} Tf &= \int_0^1 K(x, t) f(t) dt, \\ Sf &= \int_0^1 J(x, t) f(t) dt, \\ Rf &= \int_0^1 H(x, t) f(t) dt, \end{aligned}$$

ise SRS nin çekirdeği

$$G(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 J(x, u) H(u, v) J(v, t) du dv$$

dir. Ayrıca $\psi_n \in L^2[0, 1]$ ($1 \leq n \leq N$) olmak üzere $H(u, v)$ çekirdeği

$$H(u, v) = \sum_{n=1}^N \psi_n(u) \overline{\psi_n(v)}$$

şeklindedir. Böylece,

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \sum_{n=1}^N \int_0^1 \int_0^1 J(x, u) \psi_n(u) \overline{\psi_n(v)} J(v, t) du dv \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\int_0^1 J(x, u) \psi_n(u) du \right) \overline{\left(\int_0^1 J(t, v) \psi_n(v) dv \right)} \end{aligned}$$

Önerme 2.2.4 den x, t ye göre süreklidir.

2.2.4 Reade Teoreminin İspatı

$K(x, t) \in C^1[0, 1]^2$ pozitif tanımlı olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için, $|x - y| < 1/N, |t - u| < 1/N$ koşulunu sağlayan tüm $x, y, t, u \in [0, 1]$ ler için

$$\left| \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial K}{\partial x}(y, u) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\partial K}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial K}{\partial t}(y, u) \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde N seçebiliriz.

R_N yi, Örnek 2.2.10 de tanımlanan operatör alalım. O zaman

$$0 \leq R_N \leq I$$

olur. Böylece, Önerme 2.2.11 den, $SR_N S$ nin sürekli bir çekirdeği vardır ve T nin pozitif karekökü S olmak üzere

$$0 \leq SR_N S \leq T$$

dir. Bu yüzden, Mercer teoremi ile,

$$\begin{aligned} \|SR_N S\|_{tr} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 J(x, u) R_N(u, v) J(v, x) dudvdx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 R_N(u, v) \left(\int_0^1 J(x, u) J(v, x) dx \right) dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 R_N(u, v) K(v, u) dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 R_N(u, v) K(u, v) dudv \end{aligned}$$

dir. Ayrıca, hemen hemen her u için

$$\int_0^1 R_N(u, v) dv = 1$$

olduğundan (Örnek 2.2.10 nin ispatına bakınız)

$$\begin{aligned} \|T\|_{tr} &= \int_0^1 K(u, u) du \\ &= \int_0^1 \int_0^1 K(u, u) R_N(u, v) dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 K(v, v) R_N(u, v) dudv \end{aligned}$$

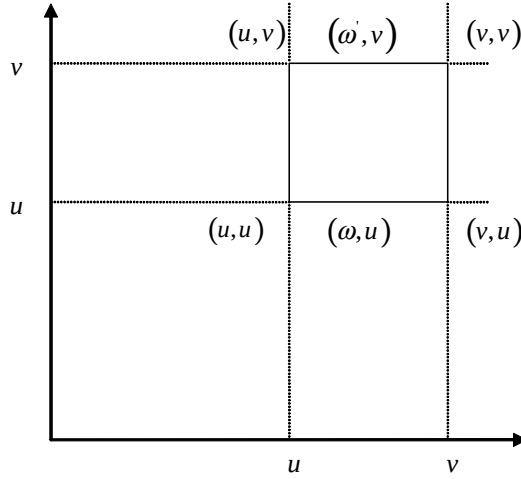
dir. Böylece,

$$T \geq SR_N S$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\|T - SR_N S\|_{tr} &= \int_0^1 \int_0^1 R_N(u, v) (K(u, u) - K(v, u)) dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 R_N(u, v) (K(v, v) - K(u, v)) dudv \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 R_N(u, v) [K(u, u) + K(v, v) - K(v, u) - K(u, v)] dudv
\end{aligned}$$

dir.



Şekil 2.2 $[u, v]^2$ karesi

Dikkat edilirse, ortalama değeri teoreminden $u \leq w \leq v$, $u < w' < v$ olmak üzere

$$K(u, u) + K(v, v) - K(v, u) - K(u, v) = \left(\frac{\partial K}{\partial x}(w, u) - \frac{\partial K}{\partial x}(w', v) \right) (u - v)$$

dir. Böylece eğer $|u - v| < 1/N$ ise,

$$|K(u, u) + K(v, v) - K(v, u) - K(u, v)| < \varepsilon/N$$

dir. Buradan,

$$\|T - SR_N S\|_{tr} < \frac{\varepsilon}{2N} \int_0^1 \int_0^1 R_N(u, v) dudv = \frac{\varepsilon}{2N}$$

bulunur. Bu ise

$$\sum_{N+1}^{\infty} \lambda_n = o\left(\frac{1}{N}\right)$$

olduğunu gösterir.

Şimdi bu eşitliğin doğruluğunu gösterelim.

Eğer $\lambda_n = o(1/n^2)$ ($\lambda_n \geq 0$) ise, $\varepsilon > 0$ olduğunda her $n > N'$ için $\lambda_n < \varepsilon/n^2$ olacak şekilde N' vardır. Bu yüzden her $N > N'$ için

$$\sum_{N+1}^{\infty} \lambda_n < \varepsilon \sum_{N+1}^{\infty} 1/n^2 < \varepsilon \int_N^{\infty} dx/x^2 = \varepsilon/N$$

dir. Buradan,

$$\sum_{N+1}^{\infty} \lambda_n = o(1/N)$$

dir. Tersine eğer,

$$\sum_{N+1}^{\infty} \lambda_n = o(1/N)$$

verilir ise λ_n nin azalan olduğu durumlarda $\lambda_n = o(1/n^2)$ olduğu görülür. Gerçekten de $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $N > N'$ için,

$$\sum_{N+1}^{\infty} \lambda_n = \varepsilon/N$$

olacak şekilde N' vardır.

Bu durumda $N > N'$ için

$$\varepsilon/N > \sum_{N+1}^{2N} \lambda_n \geq N\lambda_{2N}$$

yazabiliriz. Bu ise bize,

$$(2N)^2 \lambda_{2N} \leq 4\varepsilon,$$

$$(2N+1)^2 \lambda_{2N+1} \leq (3N)^2 \lambda_{2N} < 9\varepsilon$$

olduğunu verir.

Bundan dolayı istenildiği gibi $n^2 \lambda_n \rightarrow 0$ dir.

O halde

$$\lambda_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir.

Bu bölümü Reade'in bulmuş olduğu bu sonucun mümkün en iyi sonuç olduğunu gösterecek bir C^1 çekirdeği örneği ile kapatacağız.

2.2.5 En Uygun Örnek

Şimdi λ_n özdeğerlerinin $o(1/n^2)$ olduğu bir C^1 çekirdeği bulunduğunu göstererek Reade'in bulmuş olduğu sonucun mümkün en iyi sonuç olduğunu göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 2.2.12 Her $\alpha > 2$ için

$$K(x, t) = \sum_1^\infty \frac{\cos 2\pi n(x - t)}{n^\alpha}$$

çekirdeği $C^1[0, 1]^2$ dedir ve buna karşılık gelen operatör

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x, t)f(t)dt$$

$\lambda_n = 1/n^\alpha$ özdeğerlerine sahiptir.

Buradan, C^1 çekirdekli pozitif tanımlı T nin $\lambda_n(T)$ özdeğerlerinin $\lambda_n = o(1/n^2)$ yaklaşımının n nin kuvvetleri için mümkün en iyi sonuç olduğunu gösterir.

BÖLÜM 3

READE TEOREMİNİN ÇARPANLARA AYIRMA METODU İLE İSPATI

Bu bölümde C^1 çekirdekli integral operatörler için J.B. Reade'in bulmuş olduğu sonuç, T.Kühn tarafından kullanılan Banach uzayları üzerinden çarpanlara ayırma metodu ile ispatlanmıştır.

H.Weyl (Weyl 1912) makalesinde $K(x, t) \in C^1[0, 1]^2$ olmak üzere

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t)f(t)dt$$

şeklindeki Fredholm integral operatörünün özdeğerlerinin $o(1/n^{3/2})$ olduğunu göstermiştir. J.Reade (Reade 1983) makalesinde bu sonucu T nin pozitif olması durumunda $o(1/n^2)$ ye geliştirmiştir. T.Kühn (Kühn 1987) makalesinde çekirdek bir kompakt metrik uzay üzerinde bir Lipschitz koşulunu sağlamak üzere T operatörünün özdeğerlerinin $O(1/n^2)$ olduğunu Banach uzayları üzerinden çarpanlara ayırma ile göstermiştir. Kühn tarafından kullanılan metodu J.Reade'in bulduğu sonucun yeni bir ispatını vermek için kullanıyoruz. Bu metodun avantajı genelleştirmeye uygun olmasıdır.

3.1 TEKİL SAYILAR

$T : H \rightarrow H$, H Hilbert uzayında kompakt bir operatör olsun.

O zaman T^*T kompakt, simetrik ve pozitif tanımlıdır. Böylece $s_n > 0$ ($s_n \rightarrow 0$) olduğunda s_n^2 ile gösterebileceğimiz pozitif özdeğerler ve bu özdeğerlere karşılık gelen ϕ_n özfonksiyonları vardır.

Tanım 3.1.1 s_n sayıları T nin tekil değerleri (Singular numbers) olarak adlandırılır.

$\psi_n = T\phi_n/s_n$ olsun. O zaman ψ_n ortonormaldir çünkü

$$\begin{aligned}\langle \psi_m, \psi_n \rangle &= \langle T\phi_m, T\phi_n \rangle / s_m s_n \\ &= \langle \phi_m, T^* T \phi_n \rangle / s_m s_n \\ &= \langle \phi_m, s_n^2 \phi_n \rangle / s_m s_n \\ &= \delta_{mn}\end{aligned}$$

dir. Ayrıca TT^* in özfonksiyonları ψ_n dir çünkü

$$\begin{aligned}TT^*\psi_n &= TT^*T\phi_n/s_n \\ &= T(s_n^2\phi_n)/s_n \\ &= s_n^2\psi_n\end{aligned}$$

dir.

Önerme 3.1.2 ψ_n ler TT^* in sıfırdan farklı özfonksiyonlarıdır.

İspat. ψ_n fonksiyonları M uzayının gereni olsun. $M^\perp$ in TT^* in sıfır uzayı olduğunu göstermemiz gerekir.

$f \in M^\perp$ olsun. O zaman T^*T nin sıfır uzayı T^*f dir çünkü

$$\langle T^*f, \phi_n \rangle = \langle f, T\phi_n \rangle = s_n \langle f, \psi_n \rangle$$

dır. Buradan $T^*TT^*f = 0$, ve $TT^*f = 0$ dir çünkü

$$\|TT^*f\|^2 = \langle TT^*f, TT^*f \rangle = \langle T^*f, T^*TT^*f \rangle = 0$$

dır.

Böylece aşağıdaki özfonksiyon açılımlarına sahibiz

$$\begin{aligned}T^*Tf &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, \\ TT^*f &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 \langle f, \psi_n \rangle \psi_n, \\ Tf &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle f, \phi_n \rangle \psi_n, \\ T^*f &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle f, \psi_n \rangle \phi_n.\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\tag{3.2}$$

Şimdi (3.1) ü gösterelim. Eğer TT^* ın sıfır uzayının ortonormal tabanı ϕ'_n ise, her $f \in H$ için

$$\begin{aligned} Tf &= T \left(\sum_1^\infty \langle f, \phi_n \rangle \phi_n + \sum_1^\infty \langle f, \phi'_n \rangle \phi'_n \right) \\ &= \sum_1^\infty \langle f, \phi_n \rangle T\phi_n + \sum_1^\infty \langle f, \phi'_n \rangle T\phi'_n \\ &= \sum_1^\infty s_n \langle f, \phi_n \rangle \psi_n \end{aligned}$$

dır. Burada her n için $T\phi'_n = 0$ olduğunu kullandık çünkü

$$\|T\phi'_n\|^2 = \langle T\phi'_n, T\phi'_n \rangle = \langle T^*T\phi'_n, \phi'_n \rangle = 0$$

dır.

Benzer şekilde (3.2) ifadesi de gösterilebilir.

$K(x, t) \in L^2[0, 1]$ olmak üzere $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ çekirdek operatörü

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$$

ile veriliyor, o zaman

$$T^*f(x) = \int_0^1 \overline{K(x, t)} f(t) dt$$

ve

$$J(x, t) = \int_0^1 K(x, u) \overline{K(x, u)} du$$

olmak üzere

$$TT^*f(x) = \int_0^1 J(x, t) f(t) dt$$

dır.

Her $f \in L^2[0, 1]$ için

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \int_0^1 K(x, t) f(t) dt \\ &= \sum_1^\infty s_n \langle f, \phi_n \rangle \psi_n(x) \\ &= \sum_1^\infty s_n \int_0^1 f(t) \overline{\phi_n(t)} dt \psi_n(x) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_1^\infty s_n \overline{\phi_n(t)} \psi_n(x) \right) f(t) dt \end{aligned}$$

dir. Buradan T için çekirdek açılımı

$$K(x, t) = \sum_1^{\infty} s_n \psi_n(x) \overline{\phi_n(t)}$$

şeklindedir. Benzer olarak T^* için çekirdek açılımı

$$K^*(x, t) = \sum_1^{\infty} s_n \phi_n(x) \overline{\psi_n(t)}$$

dir. Ayrıca T^*T için iz özdeşliğinden (trace identity)

$$\sum_1^{\infty} s_n^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt = \int_0^1 J(x, x) dx \quad (3.3)$$

dir. Bu (3.3) özdeşliğine Parseval özdeşliği adı verilir.

Örnek 3.1.3 $L^2[0, 1]$ üzerinde

$$Tf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ile tanımlanan T integral operatörünün

$$s_n = 1/(n + \frac{1}{2})\pi$$

tekil değerleri ve $n \geq 0$ ve $\|\phi_n\|^2 = \|\psi_n\|^2 = 1/2$ olmak üzere

$$\phi_n(t) = \cos(n + \frac{1}{2})\pi t,$$

$$\psi_n(t) = \sin(n + \frac{1}{2})\pi t$$

özfonksiyonları vardır.

Tanım 3.1.4 X, Y Banach uzayları olmak üzere

$$s : B(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}^{\infty}$$

fonksiyonuna bir **s-ölçüsü** denir. $T \in B(X, Y)$ için $s(T)$ nin n . terimi $s_n(T)$ olmak üzere

i. T kompakt, $X = Y = H$ Hilbert uzayı olduğu takdirde $s_n(T) = n$. tekil sayısıdır

ii. $s_1(T) = \|T\|$,

iii. $0 \leq s_{n+1}(T) \leq s_n(T) \quad (n \geq 1),$

$$iv. s_{m+n+1}(T+U) \leq s_{m+1}(T) + s_{n+1}(U).$$

Ayrıca W, X, Y ler Banach uzayları ve $T \in B(X, Y), U \in B(W, X)$ olmak üzere

$$v. s_{m+n+1}(TU) \leq s_{m+1}(T) \cdot s_{n+1}(U)$$

eşitsizliği sağlanır ise s -ölçüsü **çarpımsaldır** deriz.

Yukarıdaki şekilde tanımlı s -ölçüsü için $s_n(T)$ sayılarına s -sayıları denir.

Bu sayılara bazı örnekler, $a_n(T)$ Yaklaşım sayıları, $x_n(T)$ Weyl sayıları ve $c_n(T)$ Gelfand sayılarıdır.

Tanım 3.1.5 X, Y Banach uzayları arasındaki $T : X \rightarrow Y$ operatörünün $a_n(T)$ ile gösterilen n inci **yaklaşım sayısı**, infimum rankı $< n$ olan tüm R operatörleri üzerinde alınmak üzere

$$a_n(T) = \inf_R \|T - R\|$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.1.6 $x_n(T)$ ile gösterilen n inci **Weyl sayısı** H bir Hilbert uzay ve $\|A\| \leq 1$ olmak üzere supremum tüm $A : H \rightarrow X$ operatörleri üzerinde alınmak üzere

$$x_n(T) = \sup_A a_n(TA)$$

ile tanımlanır.

Bu sayılar $X = Y = H$ bir Hilbert uzayı oldukları durumda hepsi özdeğerlere eşittir.

Tanım 3.1.7 $T : X \rightarrow Y$ için eşboyutu n den küçük olan kapalı $M \subseteq X$ için

$$c_n(T) = \inf_M \|T|_M\|$$

olarak tanımlandığında, buna **Gelfand** sayıları denir.

Önerme 3.1.8 $T : H \rightarrow H$ kompakt simetrik olduğu takdirde,

$$a_n(T) = |\lambda_n(T)|$$

dir.

İspat. $T\phi_n = \lambda_n\phi_n$, öyleki λ_n reel ve sıfıra azalan, $\langle\phi_m, \phi_n\rangle = \delta_{mn}$ olduğunu biliyoruz.

Böylece, her $f \in H$ için T nin sıfır uzayının tabanı $(\psi_n)_{n \geq 1}$ olduğunda

$$f = \sum_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n + \sum_n \langle f, \psi_n \rangle \psi_n$$

dir. Özfonksiyon açılımından

$$Tf = \sum_n \langle f, \phi_n \rangle \lambda_n \phi_n$$

görelim ki;

$$\begin{aligned} \|Tf\|^2 &= \sum_n |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \lambda_n^2 \\ &\leq \lambda_1^2 \sum_n |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \\ &= \lambda_1^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan, $\|T\| \leq |\lambda_1|$ gerçekte $\|T\| = |\lambda_1|$ dir, çünkü $T\phi_1 = \lambda_1\phi_1$ dir.

Şimdi,

$$Rf = \sum_1^{N-1} \langle f, \phi_n \rangle \lambda_n \phi_n$$

rankı N den büyüktür ve

$$(T - R)f = \sum_N^\infty \langle f, \phi_n \rangle \lambda_n \phi_n.$$

dir. Böylece,

$$\|T - R\| = |\lambda_N|.$$

dir. Buradan,

$$a_n(T) \leq |\lambda_n(T)|$$

dir. Diğer taraftan rankı N den büyük olan S verilsin, öyle $\phi = \sum_1^N |\alpha_n|^2 = 1$ vardır öyleki $S\phi = 0$ dir.

Böylece,

$$\begin{aligned} \|(T - S)\phi\|^2 &= \|T\phi\|^2 = \sum_1^N |\alpha_n|^2 \lambda_N^2 \\ &\geq \lambda_N^2 \sum_1^N |\alpha_n|^2 = \lambda_N^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\|T - S\|^2 \geq |\lambda_N|.$$

dir. Buradan,

$$a_n(T) \geq |\lambda_n(T)|$$

dir.

Şimdi yaklaşım sayılarının **alt-toplamsal** ve **alt-çarpımsal** olduklarını ispatlayalım.

Önerme 3.1.9 *H Hilbert uzayındaki herhangi iki kompakt operatör T, U için*

$$a_{m+n+1}(T + U) \leq a_{m+1}(T) + a_{n+1}(U),$$

$$a_{m+n+1}(TU) \leq a_{m+1}(T)a_{n+1}(U)$$

dir.

İspat. Keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\|T - R\|_{op} < a_{m+1}(T) + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde R nin rankını m den küçük ya da eşit,

$$\|U - S\|_{op} < s_{n+1}(U) + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde S nin rankında n den küçük ya da eşit olacak şekilde seçebiliriz.

Şimdi, $R + S$ nin rankı $\leq m + n$ dir, ayrıca,

$$\begin{aligned} a_{m+n+1}(T + U) &\leq \|(T + U) - (R + S)\|_{op} \\ &\leq \|T - R\|_{op} + \|U - S\|_{op} \\ &< a_{m+1}(T) + a_{n+1}(U) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

dur. Böylece,

$$a_{m+n+1}(T + U) \leq a_{m+1}(T) + a_{n+1}(U)$$

dur. Ayrıca,

$$(T - R)(U - S) = TU - (RU + TS - RS)$$

ve

$$TS + RU - RS = RU + (T - R)S$$

nin rankı $\leq m + n$ dir Böylece,

$$\begin{aligned} a_{m+n+1}(TU) &\leq \|(T - R)(U - S)\|_{op} \\ &\leq \|T - R\|_{op} \|U - S\|_{op} \\ &< (a_{m+1}(T) + \varepsilon)(a_{n+1}(U) + \varepsilon) \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$a_{m+n+1}(TU) = a_{m+1}(T)a_{n+1}(U).$$

dir.

Uyarı 3.1.10 Eğer $T : H \rightarrow H$ kompakt operatör ise $x_n(T)$ içinde bu önerme doğrudur, çünkü $a_n(T) = x_n(T)$ dir.

3.2 KAREKÖKLER

Her pozitif tanımlı $K(x, t) \in C^1[0, 1]^2$ çekirdekli

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t)f(t)dt$$

Fredholm operatörü, tek bir pozitif $J(x, t) \in L^2[0, 1]^2$ çekirdekli

$$Sf(x) = \int_0^1 J(x, t)f(t)dt$$

kare köke sahiptir. Eğer T nin özdeğerleri ve özvektörleri λ_n, ϕ_n ise Mercer teoreminden

$$\sum_1^\infty \lambda_n < \infty$$

sağlanır. Bu yüzden

$$J(x, t) = \sum_1^\infty \lambda_n^{1/2} \phi_n(x) \overline{\phi_n(t)}$$

bir Hilbert-Schmidt çekirdeğidir.

Lemma 3.2.1 $S : L^2 [0, 1] \longrightarrow C [0, 1]$ olmak üzere

$$Sf(x) = \int_0^1 J(x, t) f(t) dt$$

ile tanımlı S operatörünün yaklaşım sayıları $a_n(S) = o(1/\sqrt{n})$ dir.

İspat. $\|f\|_2 \leq 1$ ve $\varepsilon > 0$ verirsin. Her $|x - y| < \delta$, $|t - u| < \delta$ için

$$|\partial K/\partial x(x, t) - \partial K/\partial x(y, u)| < \varepsilon^2$$

olacak şekilde $\delta > 0$ seçelim.

$[-\pi, \pi]$ aralığında Fejer çekirdeği (2.7) ile çalışarak, eğer

$$R_n f(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} f(x - t) dt,$$

alırsa

$$R_n S f(x) - S f(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} (S f(x - t) - S f(x)) dt$$

olur. Burada

$$\int_0^1 J(x, u) J(u, t) du = K(x, t)$$

olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} |S f(x - t) - S f(x)|^2 &= \left| \int_0^1 (J(x - t, u) - J(x, u)) f(u) du \right|^2 \\ &\leq \int_0^1 |J(x - t, u) - J(x, u)|^2 du \int_0^1 |f(u)|^2 du \\ &\leq \int_0^1 (J(x - t, u) - J(x, u)) \overline{(J(x - t, u) - J(x, u))} du \\ &= \int_0^1 (J(x - t, u) - J(x, u)) (J(u, x - t) - J(u, x)) du \\ &\leq |K(x - t, x - t) - K(x, x - t) - K(x - t, x) + K(x, x)| \end{aligned}$$

bulunur. Üstelik ortalama değer teoreminden bazı $0 < \theta, \theta' < 1$ için

$$\begin{aligned} |K(x - t, x - t) - K(x, x - t) - K(x - t, x) + K(x, x)| \\ = \left| \partial K/\partial x(x - \theta t, x - t) - \partial K/\partial x(x - \theta' t, x) \right| |t| \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$|Sf(x-t) - Sf(x)|^2 < \begin{cases} \varepsilon^2 |t| & , \quad |t| < \delta \text{ ise} \\ 2\|\partial K/\partial x\|_\infty |t|, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

elde edilir. Eğer

$$R_n Sf(x) - Sf(x) = \frac{1}{2\pi n} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} (Sf(x-t) - Sf(x)) dt$$

yazılır ise, ikinci integral

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi n} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} (Sf(x-t) - Sf(x)) dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi n} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} |Sf(x-t) - Sf(x)| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2\pi n} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} |t|^{1/2} dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} |t|^{1/2} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{\pi n} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} t^{1/2} dt \\ &\leq \frac{\varepsilon \pi}{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 nt/2}{t^{3/2}} dt \\ &\leq \frac{\varepsilon \pi}{\sqrt{2n}} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 u}{u^{3/2}} du \\ &\leq \frac{\varepsilon \pi}{\sqrt{2n}} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^{3/2}} du \end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca üçüncü integral, yeterince büyük n için

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} (Sf(x-t) - Sf(x)) dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} |Sf(x-t) - Sf(x)| dt \\ &< \frac{\sqrt{2\|\partial K/\partial x\|_\infty}}{2\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} t^{1/2} dt \\ &< \frac{\sqrt{2\|\partial K/\partial x\|_\infty}}{2\pi n \sin^2 \delta/2} \int_0^{\pi} t^{1/2} dt \\ &< \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

bulunur.

İlk integralde üçüncüye benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} (Sf(x-t) - Sf(x)) dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} |Sf(x-t) - Sf(x)| dt \\
&< \frac{\sqrt{2} \|\partial K / \partial x\|_{\infty}}{2\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2 t/2} t^{1/2} dt \\
&< \frac{\sqrt{2} \|\partial K / \partial x\|_{\infty}}{2\pi n \sin^2 \delta/2} \int_0^{\pi} t^{1/2} dt \\
&< \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

ele alınarak istenen sonuç elde edilir.

3.3 2-TOPLANABİLİR DİZİLER

X bir Banach uzayı ve X deki bir dizi $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1} \subseteq X$ olsun.

Tanım 3.3.1 *Eğer*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$$

sağlanır ise $\mathbf{x}$ e kuvvetli 2 – toplanabilir denir ve $\mathbf{x} \in l^2(X)$ ile gösterilir.

$$\|\mathbf{x}\|_S = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2}$$

normu ile $l^2(X)$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.3.2 *Eğer her $x^* \in X^*(X$ in dual uzayı için)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n \rangle|^2 < \infty$$

sağlanır ise $\mathbf{x}$ e zayıf 2 – toplanabilir denir ve $\mathbf{x} \in w^2(X)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.3 $\mathbf{x} \in w^2(X)$ için zayıf 2 – toplanabilir norm

$$\|\mathbf{x}\|_W = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n \rangle|^2}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.3.4 X, Y Banach uzayları olmak üzere $T \in B(X, Y)$ operatörüne, eğer her $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1} \in w^2(X)$ için

$$T\mathbf{x} = (Tx_n)_{n \geq 1} \in l^2(Y)$$

oluyor ise 2 – toplanabilir denir ve $T \in \Pi_2(X, Y)$ yazılır.

Tanım 3.3.5 2 – toplanabilir $T \in B(X, Y)$ için 2 – toplanabilir norm

$$\Pi_2(T) = \sup_{\|\mathbf{x}\|_W \leq 1} \|T\mathbf{x}\|_S$$

ile tanımlanır.

Lemma 3.3.6 $I : C[0, 1] \longrightarrow L^2[0, 1]$ birim operatörü 2 – toplanabilir dir.

İspat. $(f_n)_{n \geq 1} \in w^2(C[0, 1])$ olsun. Eğer $E_t f = f(t)$ değerlendirme fonksiyoneli ise $E_t \in (C[0, 1])^*$ ve $\|E_t\| = 1$ dir. O halde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_t(f_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|^2 \leq \|(f_n)_{n \geq 1}\|_W^2$$

dir. Böylece Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminden

$$\|(f_n)_{n \geq 1}\|_S^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(t)|^2 dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|^2 dt \leq \|(f_n)_{n \geq 1}\|_W^2$$

bulunur.

Lemma 3.3.7 Eğer $T : X \longrightarrow Y$ 2 – toplanabilir ise, $x_n(T) = O(1/\sqrt{n})$ dir

İspat. $n \geq 1$ için $\|A\| \leq 1$ olacak şekilde $A : H \longrightarrow X$ olsun öyleki

$$a_n(TA) > x_n(T) - \varepsilon$$

sağlansın. O halde

$$\begin{aligned} na_n(TA) &\leq a_1(TA) + a_2(TA) + \dots + a_n(TA) \\ &\leq \sqrt{(a_1(TA))^2 + \dots + (a_n(TA))^2} \sqrt{n} \\ &\leq \sqrt{(c_1(T))^2 + \dots + (c_n(T))^2} \sqrt{n} \\ &\leq \Pi_2(T) \sqrt{n} \end{aligned}$$

dir.(Reade 1983 ve Reade 1984). Burada $c_n(T)$ ler Gelfand sayılarıdır. Böylece istenildiği gibi

$$x_n(T) < (\Pi_2(T) / \sqrt{n}) + \varepsilon$$

elde edilir.

Lemma 3.3.8 *Eğer $I : C[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ birim operatör ise, $x_n(I) = O(1/\sqrt{n})$ dir.*

İspat. Lemma 3.3.6 den

$$I : C[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1] \tag{3.4}$$

2- toplanabilirdir.

O halde(3.4) 2-toplanabilir olduğundan Lemma 3.3.7 den

$$x_n(I) = O(1/\sqrt{n})$$

dir.

Teorem 3.3.9 *Eğer $K(x, t) \in C^1[0, 1]^2$ ve*

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$$

pozitif tanımlı ise

$$\lambda_n = o(1/n^2)$$

dir.

İspat. İspatı $C[0, 1]$ Banach uzayı üzerinden S karekök operatörünü çarpanına ayırarak $K(x, t) \in C^1[0, 1]^2$ durumunda pozitif tanımlı T nin λ_n özdeğerlerinin $o(1/n^2)$ olduğunu aşağıdaki şekilde gösteriyoruz.

Açık olarak $S : L^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ nin yaklaşım sayılarının $a_n(S) = o(1/\sqrt{n})$ olduğunu Fejer çekirdeği yardımı ile Lemma 3.2.1 de gösterdik. Daha sonra $I : C[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ birim operatörünün 2-toplanabilir olduğunu Lemma 3.3.6 da gösterdik. Benzer şekilde

Weyl sayılarının $x_n(I) = O(1/\sqrt{n})$ olduğunu Lemma 3.3.8 de gösterdik. Buradan, tekil sayıların alt çarpımsallığı ile $\lambda_n^{1/2} = o(1/n)$ olduğunu göstermiş oluyoruz. Dolayısıyla istenilen $\lambda_n = o(1/n^2)$ sonucunu elde etmiş oluruz.

Yukarıda kullandığımız Banach uzayları üzerinden çekirdeği çarpanlara ayırma metodu genelleştirilebilir olması açısından önemlidir.

BÖLÜM 4

POZİTİF TANIMLI İNTEGRAL ÇEKİRDEK ÖRNEKLERİ

Matematiksel analizde karşımıza çıkan k çekirdeklerini kullanarak, pozitif tanımlı K çekirdeklerinin örneklerini [Dikmen1997] ve [Kesmen 2008] vermişlerdir. Cauchy integral formülü ile karşımıza çıkan k çekirdeklerini çalışırken bazı durumlarda özel şekiller çalışılmıştır. Biz bu özel şekillerden birini daha genel bir şekil ile değiştirerek yeni bir örnek vereceğiz. Burada K , s ve t nin analitik çekirdeği olacaktır.

Tanım 4.0.10 $I, J \subseteq \mathbb{R}$ aralıklar ve $k \in L^2(I \times J)$, yani

$$\int_I \int_J |k(s, u)|^2 du ds < \infty$$

olsun. O zaman $s \in I, f \in L^2(J)$ olmak üzere;

$$Sf(s) = \int_J k(s, u) f(u) du$$

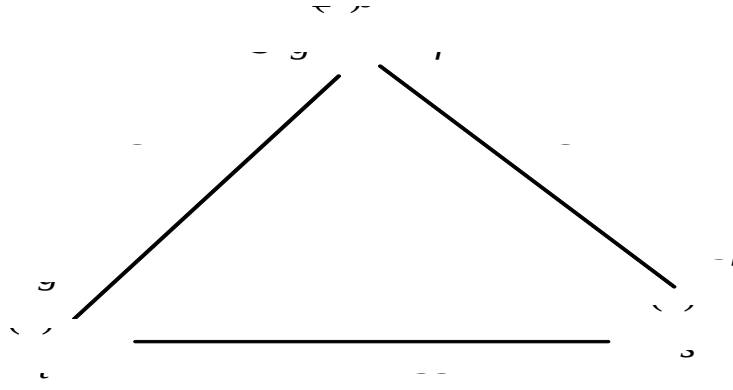
formülü $L^2(J)$ den $L^2(I)$ içine bir lineer kompakt S operatörünü tanımlar. $S^* : L^2(I) \rightarrow L^2(J)$ eşlenik operatörü

$$S^*g(u) = \int_I g(t) \overline{k(t, u)} dt$$

ile verilir. Böylece, eğer $f \in L^2(I)$ ise $s, t \in I$ için

$$\begin{aligned} SS^*g(u) &= \int_J S^*g(u) k(s, u) du \\ &= \int_I \int_J g(t) \overline{k(t, u)} k(s, u) du dt \\ &= \int_I g(t) K(s, t) dt \end{aligned}$$

dir. Burada $K(s, t) = \int_J k(s, u) \overline{k(t, u)} du$ dur. $k \in L^2(I \times J)$ olduğundan integralin sırasını değiştirmek mümkündür ve $K \in L^2(I \times I)$ dır.



Şekil 4.1 SS^* operatörü

Teorem 4.0.11 $T = SS^*$ operatörü pozitifdir.

ispat. Burada,

$$\langle Tg, g \rangle_{L^2(I)} = \langle SS^*g, g \rangle_{L^2(I)} = \langle S^*g, S^*g \rangle_{L^2(J)} = \|S^*g\|_{L^2(J)}^2 \geq 0$$

olduğundan T pozitifdir.

O halde, $k \in L^2(I \times J)$ olduğu zaman $T = SS^*$ operatörü

$$K(s, t) = \int_J k(s, u) \overline{k(t, u)} du$$

çekirdeği ile $L^2(I)$ üzerinde bir pozitif integral operatördür.

Benzer şekilde S^*S operatörü $L^2(J)$ üzerinde pozitifdir.

Uyarı 4.0.12 Eğer $k(s, u) = l(s, u) h(u)$, $|h(u)| = 1$ ise bu durumda

$$\int_J k(s, u) \overline{k(t, u)} du = \int_J l(s, u) \overline{l(t, u)} du$$

dur. Yani, integralin çekirdeğinde mutlak değeri 1 olan kısım ihmal edilebilir.

Uyarı 4.0.13 Teorem 4.0.11 nin sonucu J üzerinde Lebesgue ölçümü bir m pozitif sabiti ile çarpıldığı zamanda doğrudur (genellikle $\frac{1}{2\pi}$). Bu durumda

$$Sf(s) = \int_J k(s, u) f(u) (mdu)$$

öyle ki $s \in I, f \in L^2(J)$ dir.

$$S^*g(u) = \int_I \overline{k(t, u)} g(t) dt$$

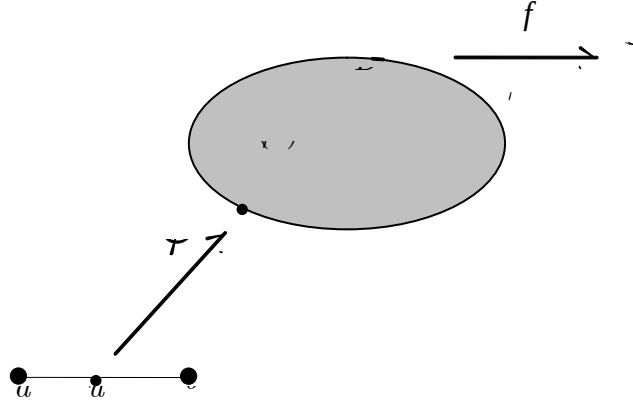
öyle ki $u \in J, t \in I$ ve $g \in L^2(I)$ dir.

$$Tf(s) = SS^*f(s) = \int_I K(s, t) g(t) dt$$

öyle ki $K(s, t) = \int_J k(s, u) \overline{k(t, u)} (mdu)$ dur.

4.1 CAUCHY İNTEGRAL FORMÜLÜNDEN ÜRETİLEN ÖRNEK

Parametrik Cauchy İntegral Formülünü hatırlayalım. İntegrali $z = \varphi(u)$ ile parametrik yazarız.



Şekil 4.2 $[a, b]$ aralığı ve D bölgesi

Burada γ bir pozitif yönlü doğrultulabilir Jordan eğrisi ve D bunun iç bölgesidir. $f, \overline{D}$ nin bir analitik komşuluğunda tanımlı ve $s \in D$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-s} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\varphi(u)) \varphi'(u)}{\varphi(u)} du \end{aligned}$$

dur. Şimdi örneğimize geçelim.

Örnek 4.1.1 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ olsun.

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : -\theta < \arg z < -\theta + \pi\}$$

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \theta - \pi < \arg z < \theta\}$$

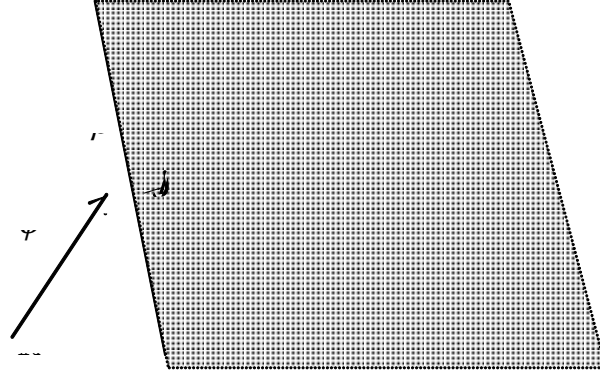
ile iki yarı düzlem tanımlayalım.

$I = [a, b]$, $a > \beta \in \mathbb{R}$ ise $I \subset D_1 \cap D_2$. $\gamma_1 = \partial D_1$, $\gamma_2 = \partial D_2$ olsun ve $\omega = e^{i\theta}$, $\overline{\omega} = e^{-i\theta}$ olsun.

$u \in \mathbb{R}$ olmak üzere γ_1 eğrisini

$$\varphi(u) = \overline{\omega}u + \beta = \beta + e^{-i\theta}u$$

ile parametrik yazabiliriz.



Şekil 4.3 D_1 bölgesi

Böylece D_1 için Cauchy İntegral Formülünden

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\bar{\omega} f(\bar{\omega} u + \beta)}{\beta + \bar{\omega} u - s} du \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada Uyarı 4.0.12 den (4.1) denkleminde $\frac{\bar{\omega}}{i}$ modülü 1 olduğundan ihmal edilebilir. Bu bize

$$S_1 f(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u)}{\beta + \bar{\omega} u - s} \frac{du}{2\pi}$$

ile tanımlı $S_1 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(I)$ lineer operatörünü önerir. O zaman

$$k_1(s, u) = \frac{1}{\beta + \bar{\omega} u - s} \in L^2(I \times \mathbb{R})$$

dir. Çünkü

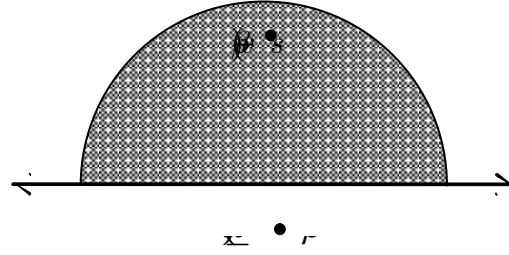
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{|\beta + \bar{\omega} u - s|^2} ds du &= \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{|\beta - s + u \cos \theta - i u \sin \theta|^2} ds du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{(\beta - s + u \cos \theta)^2 + (u \sin \theta)^2} ds du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{\beta^2 + s^2 + u^2 \cos^2 \theta + 2\beta u \cos \theta - 2s\beta - 2su \cos \theta + u^2 \sin^2 \theta} ds du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{\beta^2 + s^2 - 2s\beta + u^2 + 2(\beta - s)u \cos \theta} ds du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{(s - \beta)^2 + u^2 - 2(s - \beta)u \cos \theta} ds du \end{aligned} \quad (4.2)$$

$s - \beta > a$ olduğundan $s = a + \beta$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{|\beta + \bar{\omega}u - s|^2} ds du &= \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{(s - \beta)^2 + u^2 - 2(s - \beta)u \cos \theta} ds du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{a^2 + u^2 - 2au \cos \theta} ds du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{(1 - \cos \theta)(a^2 + u^2)} ds du \\
&= \frac{b - a}{(1 - \cos \theta)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(a^2 + u^2)} du < \infty
\end{aligned} \tag{4.3}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
K_1(s, t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\beta + \bar{\omega}u - s)(\beta + \omega u - t)} \frac{du}{2\pi} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(u - \omega(s - \beta))(u - \bar{\omega}(t - \beta))} \frac{du}{2\pi}
\end{aligned}$$



Şekil 4.4 Üst yarı düzlemdeki kutup noktası $w(s - \beta)$

dir. Üst yarı düzlemdeki kutup noktası $\omega(s - \beta)$ dir.O zaman

$$\begin{aligned}
K_1(s, t) &= i \operatorname{Re} s(h(u), (\omega(s - \beta))) \\
&= i \frac{1}{\omega(s - \beta) - \bar{\omega}(t - \beta)}
\end{aligned}$$

$\omega = \cos \theta + i \sin \theta$, $\bar{\omega} = \cos \theta - i \sin \theta$ yazıp, eşleniğiyle çarparsak

$$\begin{aligned}
K_1(s, t) &= \frac{1}{(s - t) \cos \theta + i(s + t - 2\beta) \sin \theta} \\
&= \frac{1}{(s + t - 2\beta) \sin \theta - i(s - t) \cos \theta} \\
&= \frac{(s + t - 2\beta) \sin \theta + i(s - t) \cos \theta}{(s + t - 2\beta)^2 \sin^2 \theta + (s - t)^2 \cos^2 \theta} \\
&= \overline{K_1(t, s)}
\end{aligned}$$

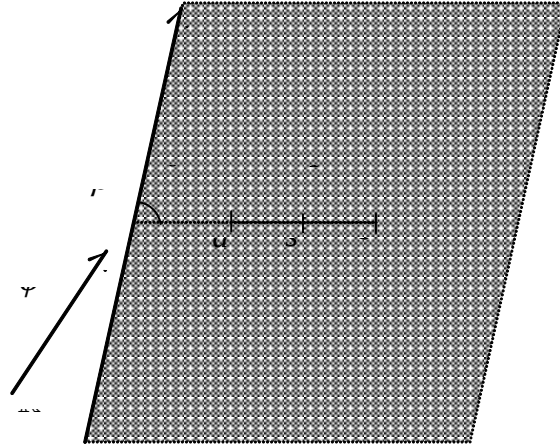
dir.

O zaman $K_1(t, s)$ çekirdeği $L^2(I \times I)$ üzerinde simetrik ve pozitif tanımlıdır.

Şimdi D_2 çekirdeği için inşa edelim.

$u \in \mathbb{R}$ olmak üzere γ_2 eğrisini $\varphi(u) = \omega u + \beta$ ile parametrik yazabiliriz.

$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \theta - \pi < \arg z < \theta\}$ açık yarı düzlemi



Şekil 4.5 D_2 bölgesi

D_2 için Cauchy İntegral Formülünden

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega f(\omega u + \beta)}{\beta + \omega u - s} du$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$S_2 f(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u)}{\beta + \omega u - s} du$$

ile tanımlı $S_2 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(I)$ operatörünü önerir.

Benzer şekilde

$$k_2(s, u) = \frac{1}{\beta + \omega u - s} \in L^2(I \times \mathbb{R})$$

elde edilir. Çünkü

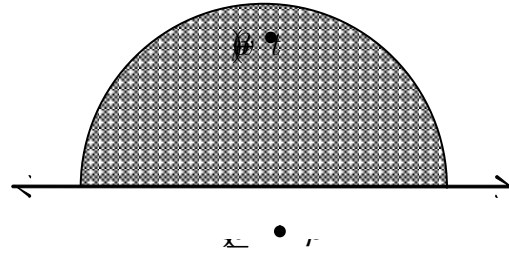
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{|\beta + \omega u - s|^2} ds du &= \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{|\beta - s + u \cos \theta + i u \sin \theta|^2} ds du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_I \frac{1}{(\beta - s + u \cos \theta)^2 + (u \sin \theta)^2} ds du \end{aligned}$$

(4.2)denkleminin aynısıdır ve (4.3) den dolayı yakınsaktır.

O zaman

$$\begin{aligned} K_2(s, t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\omega u + \beta - s)(\bar{\omega} u + \beta - t)} \frac{du}{2\pi} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(u - \bar{\omega}(s - \beta))(u - \omega(t - \beta))} \frac{du}{2\pi} \end{aligned}$$

dir.



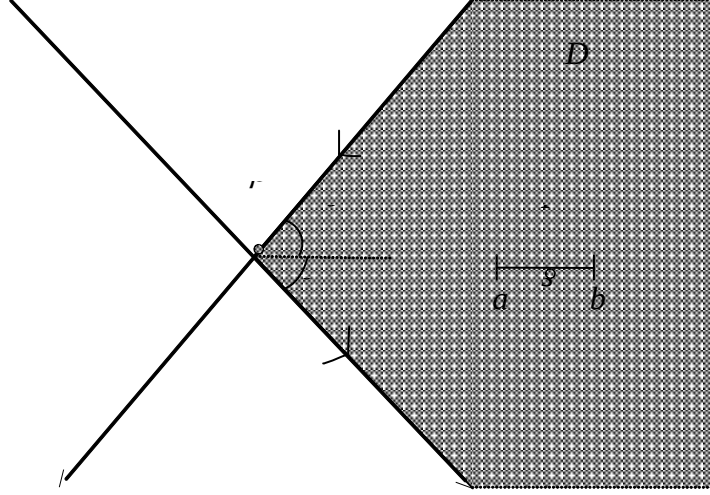
Şekil 4.6 Üst yarı düzlemdeki kutup noktası $\omega(t - \beta)$

Üst yarı düzlemdeki kutup noktası $\omega(t - \beta)$ dir. O halde

$$\begin{aligned} K_2(s, t) &= i \cdot \text{Re } s(h(u), \omega(t - \beta)) \\ &= \frac{i}{\omega(t - \beta) - \bar{\omega}(s - \beta)} \\ &= \frac{i}{(t - s) \cos \theta + i(t + s - 2\beta) \sin \theta} \\ &= \frac{1}{(t + s - 2\beta) \sin \theta - i(t - s) \cos \theta} \\ &= \frac{(t + s - 2\beta) \sin \theta + i(t - s) \cos \theta}{(t + s - 2\beta)^2 \sin^2 \theta + (t - s)^2 \cos^2 \theta} \\ &= \overline{K_2(t, s)} \end{aligned}$$

olup, $K_2(s, t)$ çekirdeği de $L^2(I \times I)$ üzerinde simetrik ve pozitif tanımlıdır.

Şimdi iki pozitif operatörün toplamının pozitif olduğu gerçeğini kullanalım;



Şekil 4.7 $D_1 \cap D_2$ bölgesi

$D = D_1 \cap D_2$ bölgesi olmak üzere bu bölgede $K_1(s, t)$ ve $K_2(s, t)$ çekirdeklerinin toplamı olan $L^2(I \times I)$ üzerinde tanımlı $K(s, t)$ pozitif tanımlı çekirdeğini aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$\begin{aligned}
 K(s, t) &= K_1(s, t) + K_2(s, t) \\
 &= \frac{1}{(s+t-2\beta)\sin\theta - i(s-t)\cos\theta} + \frac{1}{(s+t-2\beta)\sin\theta - i(t-s)\cos\theta} \\
 &= \frac{1}{(s+t-2\beta)\sin\theta - i(s-t)\cos\theta} + \frac{1}{(s+t-2\beta)\sin\theta + i(s-t)\cos\theta} \\
 &= \frac{(s+t-2\beta)\sin\theta + i(s-t)\cos\theta + (s+t-2\beta)\sin\theta - i(s-t)\cos\theta}{(s+t-2\beta)^2\sin^2\theta + (s-t)^2\cos^2\theta} \\
 &= \frac{2(s+t-2\beta)\sin\theta}{(s^2+t^2+2st+4\beta^2-4\beta s-4\beta t)\sin^2\theta + (s^2+t^2-2st)\cos^2\theta} \\
 &= \frac{2(s+t-2\beta)\sin\theta}{s^2+t^2+2st(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + 4\beta(\beta - s - t)\sin^2\theta}.
 \end{aligned}$$

Böylece $L^2(I \times I)$ üzerinde tanımlı pozitif tanımlı çekirdek elde ettik.

Sonuç olarak basit halleri ile verilen eğrilerin daha genel formdaki hallerini kullanarak analitik çekirdekli pozitif tanımlı çekirdek örneklerini vermemiz mümkündür. Diğer örneklerin daha genel halleri ve tezlerde kullanılmamış olan eğrilerin kullanılması ile analitik çekirdekli pozitif tanımlı çekirdek örneklerini veren bir başka yüksek lisans tezinin yapılabileceğini düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

- Dikmen C M** (1997) *Positive Integral Operators with Analytical Kernels*. M.Sc. Thesis, University of Manchester., pp. 13-30.
- Dikmen C M** (2000) *Hille Tamarkin Programme*. PhD. Thesis, University of Manchester, pp 66-78.
- Dikmen C M** (2006) *Positive Operators With Analytic Kernels*. Çankaya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Journal of Arts and Sciences Sayı 6.
- Dikmen C M** (2008) *Positive definite integral operators*. Archiv Der Mathematik, 91, 339-343 Birkhauser Verlag.
- Kesmen Y** (2008) *Analitik Çekirdekli Pozitif Integral Operatörler*. Yüksek Lisans Tezi (Yayımlanmamış), Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, s.26-32.
- Kühn T** (1987) *Eigenvalues of Integral Operators with Smooth Positive Kernels*. Arch. Math. Vol. 49, pp. 525-534.
- Reade J B** (1983) *Eigenvalues of Positive Definite Kernels I*. Siam J. Math. Anal., Vol. 14, No.1, pp. 152-157.
- Reade J B** (1984) *Eigenvalues of Positive Definite Kernels II*. Siam J. Math. Anal., Vol. 15, No.1, pp. 137-142
- Riesz F and Nagy B** (1955) *Functional Analysis*. Ungar, New York, pp 195-208, 242-247.
- Soykan Y** (2008) *Fonksiyonel Analiz*. Nobel Yayınları, s.151-170.
- Şuhubi E S** (2001) *Fonksiyonel Analiz*. İTÜ Vakfı Yayınları, s. 474-478.
- Weyl H** (1912) *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen*. Matematische Annalen, Vol. 71, pp. 441-479.
- Young N** (1990) *An Introduction to Hilbert Space*. Cambridge University Press., reprinted, pp. 21-28.

ÖZGEÇMİŞ

Fuat YENER 17 Kasım 1980’de Kdz. Ereğli’de doğdu; ilköğretimini Alaplı’da ortaöğretimini Düzce Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 1998 yılında Konya Selçuk Üniversitesi (SÜ) Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü’ne girdi. 2003 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığında Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı Şu an Kozlu İmam Hatip Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

ADRES BİLGİLERİ

Adres: 19 Mayıs Mah. Kasapgil Sok. Elmas Evler Sit.
A/2 Blok D:10 Kozlu
67600 Zonguldak

Tel: 0 505 748 45 26

E-posta: fuatyener67@hotmail.com

Fuat YENER