

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HESAPLAMALI AKIŞKANLAR DİNAMİĞİNDE
KONVEKSİYON TERİMLERİNİN AYRIKLAŞTIRILMASINDA
KARŞILAŞTIRMALAR**

DOKTORA TEZİ

Makine Yük.Müh. Müslüm ARICI

Anabilim Dalı: Makine Mühendisliği

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin Şinasi ONUR

KOCAELİ, 2009

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HESAPLAMALI AKIŞKANLAR DİNAMİĞİNDE
KONVEKSİYON TERİMLERİNİN AYRIKLAŞTIRILMASINDA
KARŞILAŞTIRMALAR**

DOKTORA TEZİ

Makine Yük.Müh. Müslüm ARICI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 20 KASIM 2009

Tezin Savunulduğu Tarih: 24 ARALIK 2009

**Tez Danışmanı
Prof.Dr. H.Şinasi ONUR**

(.....)

**Üye
Doç.Dr. Ahmet ERDİL**

(.....)

**Üye
Prof.Dr. Selma ERGİN**

(.....)

**Üye
Yrd.Doç.Dr. Hasan KARABAY**

(.....)

**Üye
Prof.Dr. H.Rıza GÜVEN**

(.....)

KOCAELİ, 2009

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (HAD) özellikle son yıllarda her türlü araç endüstrisinden meteorolojiye, yangın güvenliğinden sağlığa kadar birçok alanda kullanılmaktadır. Deneysel çalışmalardaki zorluklara, HAD'ın zaman ve maliyet avantajları da eklenince araştırmacılar bu alana yönelmişlerdir. Akışların HAD ile analizinde kullanılan sayısal yöntemlerin doğruluk, kararlılık ve sınırlılık gibi çok önemli özellikleri Navier-Stokes denklemlerindeki terimlerin ayrıklaştırılmasında kullanılan yaklaşımlara bağlıdır. İkinci mertebeden türev ile ifade edilen difüzyon terimleri hemen hemen her zaman ikinci mertebeden merkezi farklar ile ayrıklaştırılmakta ve oldukça tatmin edici sonuçlar alınmakta iken, birinci mertebeden türev ile ifade edilen konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılması için günümüze kadar birçok yaklaşım önerilmiş fakat hiçbirisi tam anlamı ile yeterli görülmemiştir. Bu çalışmada konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan hem klasik yaklaşımların hem de son yıllarda geliştirilen yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar olarak adlandırılan yaklaşımların incelenmesi amaçlanmıştır.

Önemi giderek artan bu alanla beni tanıştıran, her zaman bilgilerinden istifade ettiğim, bilim adamlığını ve kişiliğini örnek aldığım hocam Prof.Dr. Hüseyin Şinasi ONUR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, her zaman fikirlerine başvurduğum, yorumlarıyla çalışmama katkı sağlayan çok değerli hocam Yrd.Doç.Dr. Hasan KARABAY'a teşekkürü borç bilirim.

Çalışma boyunca desteklerini eksik etmeyen aileme ve tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
TABLolar DİZİNİ	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ÖZET.....	xi
İNGİLİZCE ÖZET.....	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç	3
1.2. Çalışmanın Genel Hatları	4
1.3. Literatür Araştırması	5
2. KONVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİNİN AYRIKLAŞTIRILMASI	12
2.1.Konveksiyon-Difüzyon Denkleminin Sonlu Hacimler Yöntemi ile Ayrıklaştırılması.....	13
2.1.1. Birinci mertebeden upwind yaklaşımı (First Order Upwind, FOU)	16
2.1.2. Merkezi farklar yaklaşımı (Central Differencing Scheme, CDS).....	18
2.1.3. Hibrid yaklaşımı.....	19
2.1.4. İkinci mertebeden upwind yaklaşımı (Second Order Upwind, SOU)	20
2.1.5. Fromm yaklaşımı	22
2.1.5. Karma yaklaşımı	22
2.1.6. QUICK Yaklaşımı.....	24
2.2. Zamana Bağlı Problemlerde Konveksiyon-Difüzyon Denkleminin Ayrıklaştırılması.....	26
2.3. Ayrıklaştırma Yöntemlerinin Bazı Özellikleri.....	30
2.3.1. Doğruluk (accuracy) özelliği.....	30
2.3.2. Tutarlılık (consistency) özelliği	34
2.3.3. Kararlılık (stability) özelliği.....	34
2.3.4. Taşınımsallık (transportiveness) ve konvektif kararlılık (convective stability) özellikleri.....	35
2.3.5. Sınırlılık (boundedness) özelliği	39
2.4. Basınç Düzeltme Algoritmaları.....	41
2.4.1. Kaydırılmış değişkenli ağ sistemi (Staggered grid)	44
2.4.2. SIMPLE Algoritması	50
2.4.3. SIMPLER Algoritması.....	56
2.4.4. SIMPLEC Algoritması.....	57
2.4.5. PISO Algoritması	58
3. İKİNCİ MERTEBEDEN KLASİK AYRIKLAŞTIRMA YAKLAŞIMLARIN KARŞILAŞTIRILMASI	62
3.1. Bir Kenarı Hareketli Bir Oyuktaki Akış Problemi.....	62
3.2. Kapalı Bir Oyuktaki Doğal Konveksiyon Problemi	74
3.3. Geriye Bakan Bir Basamak Arkasındaki Akış Problemi	91
4. SINIRLANDIRILMIŞ YÜKSEK ÇÖZÜNÜRLÜKLÜ YAKLAŞIMLAR	96
4.1. Normalize Edilmiş Değişken Formülasyonu	98

4.2. Konvektif Sınırlama Kriteri	101
4.3. Toplam Değişimin Azalması Yöntemi	105
4.4. Yüksek Çözünürlüklü Yaklaşımlar	107
4.5. Zamana Bağlı Problemlerde Yüksek Çözünürlüklü Yaklaşımların NVD’de Gösterimi	115
4.6. Akı-Sınırlayıcı Diyagramı.....	118
4.7. NVD ile FLD Arasındaki İlişki.....	121
5. SINIRLANDIRILMIŞ YÜKSEK ÇÖZÜNÜRLÜKLÜ YAKLAŞIMLARIN KARŞILAŞTIRILMASI	123
5.1. Dikdörtgen, Yarı-elips, Sinüs-kare ve Üçgen Şeklindeki Skaler Profillerin Sabit Bir Hız Alanında Konveksiyon ile Taşınması	124
5.1.1. Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması.....	129
5.1.2. Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması.....	143
5.1.3. Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması.....	157
5.1.4. Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması.....	170
5.2. Dikdörtgen, Yarı-elips, Sinüs-kare ve Üçgen Şeklinde Skaler Profillerin Değişken Bir Hız Alanı İçerisinde Konveksiyon ile Taşınması	184
5.2.1. Problemin analitik çözümü	185
5.2.2. Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar kullanılarak elde edilen çözümler	189
5.2.2.1. Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması	189
5.2.2.2. Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması.....	198
5.2.2.3. Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması.....	207
5.2.2.4. Üçgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması.....	215
5.3. Viskoz Olmayan Burgers Denklemi	223
5.4. Skaler Bir Büyüklüğün Üç Boyutlu Akış Alanı İçerisinde Konveksiyon-Difüzyon ile Taşınması	237
5.4.1. Problemin analitik çözümü	238
5.4.2. Yüksek Çözünürlüklü Yaklaşımlar Kullanılarak Elde Edilen Çözümler	239
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	255
6.1. Sonuçlar	255
6.2. Öneriler	260
KAYNAKLAR	262
ÖZGEÇMİŞ	271

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1:	Tek boyutlu bir kontrol hacmi.....	14
Şekil 2.2:	Bir boyutlu kontrol hacmi üzerinde hızların yerleşimi	16
Şekil 2.3:	Ara yüz değerlerinin farklı yaklaşımlar kullanılarak bulunmasının şematik gösterimi	25
Şekil 2.4:	Kesme hatalarından kaynaklanan hatalar	32
Şekil 2.5:	Tutarlılık, kararlılık ve yakınsama arasındaki kavramsal ilişki	35
Şekil 2.6:	Farklı Peclet sayılarında bir kaynak terim etrafında ϕ 'nin dağılımı.....	36
Şekil 2.7:	Merkezi farklar yönteminin konvektif duyarsızlığı.....	38
Şekil 2.8:	Birinci mertebeden upwind yönteminin kararlı konvektif duyarlılığı	39
Şekil 2.9:	Checker-board basınç alanı	43
Şekil 2.10:	Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde kontrol hücrelerinin yerleşimi.....	45
Şekil 2.11:	Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde u-kontrol hacmi üzerinde hızların gösterimi	46
Şekil 2.12:	Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde v-kontrol hacmi üzerinde hızların gösterimi.....	48
Şekil 2.13:	Süreklilik denkleminin ayrıklaştırıldığı skaler kontrol hacmi	52
Şekil 2.14:	SIMPLE algoritmasının akış şeması	55
Şekil 2.15:	PISO algoritması akış şeması	61
Şekil 3.1:	Hareketli kapaklı oyuk probleminin geometrisi	63
Şekil 3.2:	Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Re=100$	66
Şekil 3.3:	Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Re=400$	69
Şekil 3.4:	Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Re=1000$	72
Şekil 3.5:	Doğal taşınım için fiziksel model.....	74
Şekil 3.6:	Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Ra=10^4$	79
Şekil 3.7:	Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Ra=10^5$	84
Şekil 3.8:	Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Ra=10^6$	89
Şekil 3.9:	Geriye bakan bir basamak arkasındaki akış probleminin geometrisi.....	91
Şekil 3.10:	Farklı Reynolds sayılarındaki akış çizgileri	95
Şekil 4.1:	Normalize etme işlemi a) Orijinal değişkenler b) Normalize edilmiş değişkenler	99
Şekil 4.2:	Konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan bazı yaklaşımların NVD'de gösterimi	100
Şekil 4.3:	a) Gaskell ve Lau tarafından önerilen CBC bölgesi b) Yu ve diğ. tarafından genişletilmiş CBC bölgesi (ECBC).....	101
Şekil 4.4:	Hou ve diğ. tarafından tavsiye edilen CBC bölgesi	103
Şekil 4.5:	Wei ve diğ. tarafından önerilen GCBC bölgesi.....	104

Şekil 4.6:	Ayrıklaştırılmış noktalardan oluşan bir sistem.....	105
Şekil 4.7:	TVD kriterinin NVD’de gösterimi	107
Şekil 4.8:	CDS, SOU, Fromm ve QUICK yaklaşımlarının karakteristik eğrilerinin CFL sayısına bağlı olarak değişiminin NVD gösterimi	116
Şekil 4.9:	Bazı yüksek çözünürlüklü yaklaşımların karakteristik eğrilerinin CFL sayısına bağlı olarak değişiminin NVD gösterimi	117
Şekil 4.10:	Sweby TVD kriterine göre ikinci mertebeden olan bölge.....	120
Şekil 4.11:	Bazı yüksek çözünürlüklü yaklaşımların FLD gösterimi.....	122
Şekil 5.1:	NVD’de iç ve dış bölge	123
Şekil 5.2:	Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)	134
Şekil 5.3:	Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)	137
Şekil 5.4:	Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)	140
Şekil 5.5:	Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde MINMOD ve SUPER-C yaklaşımları elde edilen profillerin zamanla değişimi (CFL=0.25)	142
Şekil 5.6:	Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)	149
Şekil 5.7:	Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)	151
Şekil 5.8:	Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)	154
Şekil 5.9:	Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde MINMOD ve SUPER-C yaklaşımları elde edilen profillerin zamanla değişimi (CFL=0.25).....	156
Şekil 5.10:	Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)	162
Şekil 5.11:	Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)	164
Şekil 5.12:	Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)	167
Şekil 5.13:	Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde MINMOD ve SUPER-C yaklaşımları elde edilen profillerin zamanla değişimi (CFL=0.25)	169
Şekil 5.14:	Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)	176
Şekil 5.15:	Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)	178
Şekil 5.16:	Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)	181
Şekil 5.17:	Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde MINMOD ve SUPER-C yaklaşımları elde edilen profillerin zamanla değişimi (CFL=0.25)	183
Şekil 5.18:	Denklemler (5.5)’te verilen hız profili	184
Şekil 5.19:	Denklemler (5.11)’de verilen eşitlik için bazı karakteristik eğriler	186

Şekil 5.20:	Dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklindeki profillerin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminin farklı zamanlardaki analitik çözümleri	187
Şekil 5.21:	Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi	195
Şekil 5.22:	Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi	204
Şekil 5.23:	Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi	212
Şekil 5.24:	Üçgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi	220
Şekil 5.25:	Genişleyen bir şok dalgasının farklı zamanlardaki görünümü	224
Şekil 5.26:	Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=0.4$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümü	229
Şekil 5.27:	Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=0.9$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümü	231
Şekil 5.28:	Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=1.4$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümü	234
Şekil 5.29:	Üç boyutlu zamandan bağımsız problemin geometrisi	237
Şekil 5.30:	Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=90^\circ$, $Pe_\Delta=10$	242
Şekil 5.31:	Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=90^\circ$, $Pe_\Delta=100$	243
Şekil 5.32:	Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=90^\circ$, $Pe_\Delta=1000$	244
Şekil 5.33:	Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=45^\circ$, $Pe_\Delta=10$	247
Şekil 5.34:	Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=45^\circ$, $Pe_\Delta=100$	248
Şekil 5.35:	Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=45^\circ$, $Pe_\Delta=1000$	249
Şekil 5.36:	Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=22.5^\circ$, $Pe_\Delta=10$	252
Şekil 5.37:	Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=22.5^\circ$, $Pe_\Delta=100$	253
Şekil 5.38:	Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=22.5^\circ$, $Pe_\Delta=1000$	254

TABLolar DİZİNİ

Tablo 1.1:	Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar	10
Tablo 2.1:	İkinci mertebeden upwind (SOU) yaklaşımının farklı yorumları	21
Tablo 2.2:	Konveksiyon terimlerinin SOU ve Fromm yaklaşımları ile ayrılaştırılması durumunda elde edilen yeniden düzenlenmiş denklem...	23
Tablo 2.3:	Sık kullanılan yaklaşımların bazı özellikleri	41
Tablo 3.1:	Bu bölümde karşılaştırılan ikinci mertebeden yaklaşımlar	62
Tablo 3.2:	$Ra=10^4$ için sonuçların karşılaştırılması.....	77
Tablo 3.3:	$Ra=10^5$ için sonuçların karşılaştırılması.....	82
Tablo 3.4:	$Ra=10^6$ için sonuçların karşılaştırılması.....	87
Tablo 3.5:	Farklı Reynolds sayısı ve ağ yapısı için boyutsuzlaştırılmış tutunma uzunluklarının (x_1/L) karşılaştırılması.....	93
Tablo 4.1:	Konveksiyon teriminin ayrılaştırılmasında sıklıkla kullanılan bazı yaklaşımların normalize edilmiş formülasyonları	99
Tablo 4.2:	Kritik Peclet sayısı ile ϕ_D 'nin katsayısı arasındaki ilişki.....	100
Tablo 4.3:	Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar ve bu yaklaşımların NVD'de gösterimi.....	108
Tablo 4.4:	Yüksek çözünürlüklü yaklaşımların Akı-Sınırlayıcı (FL) formunda gösterimi.....	122
Tablo 5.1:	Dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklindeki skaler profiller...	125
Tablo 5.2:	Dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklinde profillerin konveksiyonla taşınması problemi için yaklaşımların toplam hataları	128
Tablo 5.3:	Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=50)..	131
Tablo 5.4:	Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=100)	132
Tablo 5.5:	Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=250)	133
Tablo 5.6:	Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=50)	146
Tablo 5.7:	Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=100)	147
Tablo 5.8:	Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=250)	148
Tablo 5.9:	Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=50)..	159
Tablo 5.10:	Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=100)	160
Tablo 5.11:	Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=250)	161
Tablo 5.12:	Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=50)	173
Tablo 5.13:	Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=100)	174

Tablo 5.14: Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları ($T=250$)	175
Tablo 5.15: Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları	192
Tablo 5.16: Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları	201
Tablo 5.17: Sinüs-kare şeklinde bir profilin değişken bir hız alanı içerisinde konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları	209
Tablo 5.18: Üçgen şeklinde bir profilin değişken bir hız alanı içerisinde konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları	217
Tablo 5.19: Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için yaklaşımların hataları	228
Tablo 5.20: Yaklaşımların farklı Peclet sayıları ve farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=90^\circ$	240
Tablo 5.21: Yaklaşımların farklı Peclet sayıları ve farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=45^\circ$	246
Tablo 5.22: Yaklaşımların farklı Peclet sayıları ve farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=22.5^\circ$	251

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

A	: Alan
D	: Difüzyon katsayısı
F	: Kütleli debi
Fo	: Fourier sayısı
h	: Isı taşıma katsayısı
L	: Boyutsuz mesafe
Nu	: Nusselt sayısı
Pe	: Peclet sayısı
Q	: Toplam ısı transferi
Q _c	: İletimle ısı transferi
r	: Gradyenlerin oranı
Ra	: Rayleigh sayısı
Re	: Reynolds sayısı
S	: Kaynak terim
T	: Boyutsuz zaman
u,v,w	: Hız bileşenleri
$\hat{u}, \hat{v}$	: Sahte hızlar
$\hat{\phi}$	: Boyutsuzlaştırılmış değişken
p^*, u^*, v^*	: Sırasıyla tahmini basınç, tahmini yatay hız ve tahmini düşey hız
U	: Boyutsuz hız
V _{diff}	: Boyutsuzlaştırılmış difüzyon hızı
x	: Mesafe
x ₁	: Tutunma uzunluğu
α	: Relaksasyon katsayısı
ϵ	: Hata
Δx	: Ağ genişliği
Δt	: Zaman adımı
ϕ	: Skaler bir değişken
Γ	: Difüzyon katsayısı
ψ	: Akı-sınırlayıcı fonksiyonu
ρ	: Yoğunluk
θ	: Açık
v	: Kinematik viskozite

Üst indisler

*	: Tahmini değerler
'	: Gerçek değerlerle tahmini değerler arasındaki fark
n	: Zaman veya iterasyon adımı

Alt indisler

C	: Merkez
f	: Ara yüz
D	: Downwind (Akışaltı)
maks	: Maksimum
min	: Minimum
o	: Ortalama
U	: Upwind (Akışüstü)
w,e,s,n	: Kontrol hacmi ara yüzeyleri
W,E,S,N,P	: Kontrol hacmi düğüm noktaları

Kısaltmalar

CBC	: Konveksiyon sınırlama kriteri
CDS	: Merkezi farklar yaklaşımı
CFL	: Courant-Friedrich-Lewy veya Courant sayısı
E-CBC	: Genişletilmiş konveksiyon sınırlama kriteri
FL	: Akı-sınırlayıcı
FLD	: Akı-sınırlayıcı diyagramı
FOU	: Birinci mertebeden upwind
GCBC	: Genişletilmiş konveksiyon sınırlama kriteri
G/L-CBC	: Gaskell/Lau konveksiyon sınırlama kriteri
HAD	: Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği
HRS	: Yüksek çözünürlüklü yaklaşım
NHT	: Sayısal ısı transferi
NVD	: Normalize-edilmiş değişken diyagramı
NVF	: Normalize-edilmiş değişken formülasyonu
PP1	: Paket Program 1
PP2	: Paket Program 2
SOU	: İkinci mertebeden upwind yaklaşımı
TVD	: Toplam Değişimin Azalması

HESAPLAMALI AKIŞKANLAR DİNAMİĞİNDE KONVEKSİYON TERİMLERİNİN AYRIKLAŞTIRILMASINDA KARŞILAŞTIRMALAR

Müslüm ARICI

Anahtar Kelimeler: Konveksiyon-Difüzyon denklemi, ikinci mertebeden upwind yaklaşımı, yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar, TVD, CBC, NVD

Özet: Bu çalışmada Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği'nde konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan yaklaşımlar incelenmiştir. İkinci mertebeden klasik ayrıklaştırma yaklaşımlarının karşılaştırıldığı ilk kısımda üç yeni yaklaşım önerilmiştir. Bu üç yaklaşımı literatürdeki ve iki ticari programdaki ikinci mertebeden upwind yaklaşımları ile karşılaştırmak amacıyla bir kenarı hareketli dikdörtgen oyuktaki akış, dikdörtgen bir oyuktaki doğal konveksiyon ve geriye bakan basamak arkasındaki akış problemleri çözülmüştür. Farklı boyutsuz sayılar ve farklı ağ noktası yoğunlukları için yapılan çözümler sonucunda tüm yaklaşımların sık ağlarda neredeyse aynı sonuçlar verdiği, ancak seyrek ağlarda bu çalışmada tavsiye edilen ikinci mertebeden upwind yaklaşımının diğer yaklaşımlara göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

Çalışmada ayrıca sınırlandırılmış yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar dört farklı test problemine uygulanarak karşılaştırılmıştır. Birinci problemde yaklaşımlar dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklindeki skaler profillerin bir boyutlu sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemine uygulanmıştır. İkinci problemde aynı skaler profillerin değişken bir hız alanında taşınması durumu incelenmiştir. Üçüncü problemde viskoz olmayan Burgers denklemi, dördüncü problemde ise küp şeklinde yer kaplayan skaler bir büyüklüğün üç boyutlu bir akış alanı içerisinde konveksiyon ile taşınması ve bu esnada difüzyon ile yayılması problemi çözülmüştür. Çözümler sonucunda, bazı yüksek çözünürlüklü yaklaşımların zamana bağlı problemlerde monotonik olmadığı, kompresif yaklaşımların keskin gradyenlerin olduğu bölgeleri oldukça iyi çözdüğü ancak bu yaklaşımların gradyenin küçük olduğu skaler profillerde dikleştirme/kırpma problemine sebep olduğu, difüzif yaklaşımların ise aşırı yapay difüzyon nedeniyle analitik çözümünden en uzak sonuçları verdiği görülmüştür. Zamandan bağımsız problemlerde kompresif yaklaşımların daha az hata içerdiği, ayrıca bu yaklaşımların özellikle küçük CFL sayılarında daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

COMPARISONS OF DISCRETISATION SCHEMES OF CONVECTION TERMS IN COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS

Müslüm ARICI

Keywords: Convection-Diffusion equation, second order upwind scheme, high resolution schemes, TVD, CBC, NVD

Abstract: In this study, discretisation schemes of convection terms are investigated. In the first part of the study where the second order conventional schemes are compared, three new schemes are proposed. These new schemes are compared with second order upwind schemes employed in commercial codes. For this purpose, lid-driven cavity, free convection in an enclosed cavity and backward-facing step flow are solved using above mentioned schemes. Computations are carried out for different dimensionless numbers and grid densities. Computations show that there is almost no difference between schemes in fine grids, however the second order upwind scheme proposed in this study works better than other schemes in coarse grids.

In the second part, bounded high resolution schemes are used in solving four test problems. In the first problem, convection of rectangular, semi-ellipse, sin-squared and triangular profiles in a constant velocity field is solved. In the second problem, convection of the same profiles in a variable velocity field is investigated. In the third problem, inviscid Burgers equation is solved. In the last problem, a three dimensional, time-dependent convection-diffusion problem in a specified constant velocity field is investigated. It is observed that some high resolution schemes may not be monotonic in time-dependent problems. Also, it is found that compressive schemes resolve sharp gradients quite well however these schemes cause steepening/clipping in smooth profiles, while diffusive schemes cannot predict sharp gradients adequately due to high artificial diffusion. Compressive schemes have less error than diffusive schemes and give much more satisfactory results particularly for small CFL numbers.

1. GİRİŞ

Akışkanlar mekaniği ve ısı transferinde karşılaşılan problemlerin matematik formülasyonları genellikle kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilir. Bu denklemlerin çözümünde teorik (analitik), deneysel ve sayısal olmak üzere üç farklı yaklaşım kullanılır.

Geometrilerin basitleştirilmesine, gerektiğinde özel fonksiyonlar ve sonsuz serilerin kullanılmasına rağmen çoğu zaman diferansiyel denklem sistemlerinin analitik çözümü elde edilememekte, fiziksel olayların ancak çok küçük bir bölümü analitik yöntemlerle çözülebilmektedir.

Fiziksel olayların incelenmesinde kullanılan bir diğer yöntem olan deneysel yöntemlerde maliyet ve zaman gibi çok önemli dezavantajlara ek olarak modelin yapımı, gerekli fiziksel koşulların sağlanması (örneğin çok yüksek veya çok düşük sıcaklık), incelenmek istenen parametrelerin gözlenmesi vb. birçok zorlukla karşılaşılabilir.

Analitik ve deneysel yöntemlere alternatif olarak geliştirilen sayısal çözüm yöntemlerinin en büyük avantajı, düşük maliyeti ve kısa bir zamanda sonuçları verme yeteneğidir. Deneysel çalışmalarda modeli oluşturma süreci, geometrinin karışıklığına ve ölçülmek istenen parametrelerin ölçümündeki zorluklara paralel olarak artarken, sayısal çözüm yöntemleri, bilgisayarların her gün biraz daha geliştirilmesiyle, dört boyutlu (üç mekan, bir zaman), daha sık ağ ve daha küçük zaman adımları için bile kısa bir sürede çözüm verebilmektedir. Sayısal çözüm yöntemlerinin temeli eskiden beri bilinmesine rağmen, diferansiyel denklemlerin çok sayıda basit aritmetik işleme dönüştürülüp hesaplanmasının çok zahmetli olmasından dolayı pek kullanılmıyordu. Akışkanlar mekaniğinde sayısal çözüm yöntemleriyle çözülen temel hareket denklemi olan Navier–Stokes denklemleri 20. yüzyıla kadar sadece teorik veya sadece deneysel çalışmalarla inceleniyordu. Bu alandaki ilk

Çalışma Lewis Fry Richardson tarafından 1910'da yapılan sayısal hava tahmin çalışmasıdır. Richardson 8 saat sonraki hava tahminini elle hesaplamaya çalışmış, hesabı ancak 6 haftada bitirebilmiş ve sonunda tahmininin yanlış olduğunu görmüştür. 1928'de Courant, Freidrich ve Lewy'nin hiperbolik denklemlerin çözümleri için geliştirdikleri sayısal yöntemler, Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (HAD) için büyük bir adım olmuştur. 1933'te A. Thom bir silindir etrafındaki akışı sayısal olarak çözmüştür. Benzer alışmayı M. Kawaguti 1953'te mekanik bir hesap makinesi kullanarak yapmıştır. Kawaguti bu çalışmayı haftada 20 saat çalışarak ancak 18 ayda bitirmiştir. İlk dijital otomatik bilgisayar 1930'larda yapılmasına rağmen sayısal çözüm yöntemlerinin HAD'daki kullanımı ancak 1960'larda yüksek hızlı bilgisayarların kullanılması ile yaygınlaşmaya başlamıştır. Günümüzde ise bilgisayar alanındaki hızlı gelişmelerle sayısal yöntemler çok yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Sayısal yöntemlerin yukarıda anlatılan avantajlarına karşın bazı dezavantajları da vardır. Fiziksel bilgi eksikliğinden kaynaklanan yeterli matematik tanımlama yapılamayan modellerde (türbülanslı akışlar, bazı iki fazlı akışlar vb.) sayısal yöntemlerin sonuçları büyük hatalar içerebilmektedir. Bu durumda yazılan programı test etmek amacıyla program, analitik çözümü olan bir probleme uygulanır, elde edilen sonuçlar analitik çözümle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılıp programın güvenirliği hakkında daha net bir fikir edinilebilir. Matematik modeli oluşturan denklem takımlarının analitik çözümleri bulunamıyorsa, deneysel çalışmalar yapılır ve sayısal çözümle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılır. Yukarıda anlatılan bilgiler ışığında, herhangi bir fiziksel olay için bir yöntem seçilirken, diğer yöntemlerin kesinlikle ihmal edilmemesi gerektiği görülür.

Kısaca özetlemek gerekirse, sayısal yöntemler son yıllarda özellikle bilgisayar alanındaki gelişmelere paralel olarak mühendisliğin her alanında kullanımı artan bir bilim dalı haline gelmiştir. Bu alandaki çalışmalar teorik ve deneysel çalışmalara da kolaylık getirmiş, bilimsel çalışmalara zaman ve maliyet açısından çok ciddi katkı sağlamıştır.

1.1. Amaç

Akışların HAD ile analizinde kullanılan sayısal yöntemlerin doğruluk (accuracy), kararlılık (stability) ve sınırlılık (boundedness) gibi özellikleri Navier-Stokes denklemlerindeki terimlerin ayrıklaştırılmasında kullanılan yöntemlere bağlıdır. İkinci mertebeden türev ile ifade edilen difüzyon terimleri hemen hemen her zaman ikinci mertebeden merkezi farklar ile ayrıklaştırılmakta ve oldukça tatmin edici sonuçlar alınmakta iken, birinci mertebeden türev ile ifade edilen konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılması için günümüze kadar birçok yöntem önerilmiş fakat hiçbirisi tam anlamı ile yeterli görülmemiştir.

Konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan birinci mertebeden upwind yaklaşımı kararlı olmasına rağmen nümerik viskozite içermesinden dolayı difüzyif sonuçlar vermektedir. Daha yüksek hata mertebesine sahip olan yaklaşımlar ise sınırlama özelliğine sahip olmadıklarından dolayı çözümde dalgalanmalara sebep olarak, negatif mutlak sıcaklık, negatif konsantrasyon gibi fiziksel olarak anlamsız sonuçlar verebilmektedir. Hata mertebesi üçten daha büyük olan yaklaşımlar, sınır şartlarının ele alınışında karşılaşılan sorunlardan ve bu yaklaşımlar ile yapılan çözümlerin çok uzun zaman gerektirmelerinden dolayı pek ilgi görmemiş ve başka çözüm yolları aranmıştır. Klasik ayrıklaştırma yaklaşımlarındaki bu sorunları gidermek için, sınırlama özelliğine sahip, çözümde dalgalanmalara sebep olmaksızın keskin gradyenlerin olduğu bölgeleri doğru çözmeye çalışan yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar kullanılmaktadır. Ancak yakınsama, kırpma ve dikleştirme problemleri sebebiyle bu yaklaşımlar da tam anlamı ile başarılı olamamıştır.

Bu çalışmada konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan yaklaşımlar incelenmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde ikinci mertebeden klasik ayrıklaştırma yaklaşımlarının farklı yorumları incelenmiştir. İnce ağlarda neredeyse aynı sonuç veren bu yaklaşımların seyrek ağlardaki doğruluğu iyileştirilmeye çalışılmıştır. Çalışmanın ikinci bölümünde, çözümde undershoot (sınıraltı) ve/veya overshoot (sınırustü) yapmadan keskin gradyenleri çözmekte kullanılan yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar karşılaştırılmış, bunların farklı problemlere uygulanması ile bu yaklaşımların davranışlarının incelenmesi amaçlanmıştır.

1.2. Çalışmanın Genel Hatları

Bu çalışma genel olarak iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda (Bölüm 2 ve Bölüm 3) ikinci mertebeden klasik ayırıklaştırma yaklaşımları, ikinci kısımda (Bölüm 4 ve Bölüm 5) ise sınırlandırılmış yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar incelenmiştir.

Bölüm 2’de öncelikle konveksiyon terimlerinin ayırıklaştırılmasında kullanılan FOU, SOU, CDS, QUICK vb. klasik ayırıklaştırılma yaklaşımlarından bahsedilmiştir. Daha sonra zamana bağlı konveksiyon-difüzyon probleminin belirtik (explicit) ve örtük (implicit) yöntemleri ile çözülmesi gösterilmiştir. Bu çalışmada konveksiyon terimlerinin ayırıklaştırılması için üç yeni yaklaşım önerilmiştir. Bu yaklaşımlar farklı bir yorum getirilerek tekrar incelenen SOU yaklaşımı, Fromm yaklaşımı ve bu iki yaklaşımın karışımı olan Karma yaklaşımıdır. Daha sonra yaklaşımların doğruluk (accuracy), tutarlılık (consistency), kararlılık (stability), sınırlılık (boundedness), taşınımsallık (transportiveness) ve konvektif kararlılık (convective stability) gibi özellikleri incelenmiştir. Bu bölüm, son kısmında incelenen SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC ve PISO basınç düzeltme algoritmaları ile bitirilmiştir.

Bölüm 3’te bu çalışmada önerilen üç yeni yaklaşım (İkinci mertebeden upwind, Fromm ve Karma yaklaşımları) literatürdeki ve iki adet ticari programdaki (PP1 ve PP2) ikinci mertebeden upwind yaklaşımları ile karşılaştırılmıştır. Bu amaçla üç farklı problem çözülmüştür: a) Hareket nedeninin viskoz kuvvetler olduğu bir kenarı hareketli dikdörtgen oyuktaki akış problemi b) Hareket nedeninin kaynak terimler olduğu dikdörtgen bir oyuktaki doğal konveksiyon problemi c) Hareket nedeninin konveksiyon terimler olduğu geriye bakan bir basamak arkasındaki akış problemi.

Bölüm 4’te bu çalışmanın ikinci kısmını oluşturan sınırlandırılmış yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar (Bounded high resolution schemes) konusuna giriş yapılmış, bir yaklaşımın sınırlandırılmış yüksek çözünürlüklü olabilmesi için önerilen şartlar anlatılmıştır. Daha sonra bu yaklaşımların değerlendirilmesinde kullanılan Normalize-edilmiş Değişken (Normalized Variable Diagram, NVD) ve Akı-Sınırlayıcı (Flux-Limiter Diagram, FLD) Diyagramları verilmiş ve bunlar arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir.

Bölüm 5'te sınırlandırılmış yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar belirtik (explicit) yöntem kullanılarak dört farklı test problemine uygulanarak karşılaştırılmıştır. Birinci problemde yaklaşımlar dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklindeki skaler profillerin bir boyutlu sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemine uygulanmıştır. İkinci problemde de dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklinde ϕ gibi bir skalerin konveksiyon ile taşınması incelenmiştir. Ancak bu problemde sabit hız alanı yerine değişken bir hız alanı kullanılmıştır. Üçüncü problemde viskoz olmayan Burgers denklemi çözülmüştür. Dördüncü problemde ise yaklaşımların akışın sayısal ağı paralel olmadığı, çok boyutlu problemlerdeki davranışını incelemek amacıyla başlangıç anında küp şeklinde yer kaplayan skaler bir büyüklüğün üç boyutlu bir akış alanı içerisinde konveksiyon ile taşınması ve bu esnada difüzyon ile yayılması problemi çözülmüştür.

Çalışma, sonuçların özetlendiği ve önerilerin yapıldığı Bölüm 6 ile sonuçlandırılmıştır.

1.3. Literatür Araştırması

Günümüze kadar konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılması ile ilgili birçok yaklaşım geliştirilmiştir. Bu çalışmadaki amaç, tüm bu yaklaşımları liste halinde sunmak değil, sık kullanılan yaklaşımların avantaj ve dezavantajlarıyla beraber özelliklerini incelemektir. Literatür araştırmasının özetlendiği bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Öncelikle klasik yaklaşımlar, daha sonra ise yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar incelenmiştir.

Merkezi farklar yaklaşımı (CDS) küçük yerel Peclet sayılarında oldukça hassas olmasına rağmen, yerel Peclet sayısı kritik bir değeri (bir boyutlu akış için $Pe_{kritik}=2$) aştıktan sonra bu yaklaşım “nümerik dispersiyon” içerdiğinden çözümde dalgalanmalara sebep olmakta, ayrıca kararlılık sorununun yaşanmasına neden olmaktadır. 1950 ve 1960'larda bu sorun ancak düğüm noktası arttırılarak yerel Peclet sayısını küçültme ile aşılmaya çalışılmıştır. Ancak, bu şekildeki bir çözüm o zamanlardaki bilgisayarlar dikkate alındığında pek mümkün olmamıştır.

Konveksiyonun asimetrik bir olay olduğu, yani ara yüzdeki değ er bulunurken, kaynak (upwind) yönündeki noktanın kuyu (downwind) yönündeki noktaya göre daha etkin olduğu fark edilmiş ve güçlü konvektif akışlarda çözüm olarak birinci mertebeden upwind yaklaşımı (First Order Upwind, FOU) kullanılmaya başlanılmıştır. FOU yaklaşımı ilk defa 1952 yılında Courant, Isaacson ve Rees tarafından sıkıştırılabilir Euler denkleminin çözümünde kullanılmıştır [1]. Bu yaklaşımda herhangi bir hücrenin ara yüzündeki değ er, akışın geldiğı yöndeki değ ere eşit alınır. Son derece kararlı olan bu yaklaşım ciddi “nümerik viskozite” içermekte ve difüzyif sonuçlar vermektedir. Nümerik difüzyon, hem akışın sayısal ağı paralel olduğu (streamwise diffusion), hem de akışın sayısal ağı paralel olmadığı (cross-stream diffusion) durumda görülebilir. İlk durum, FOU yaklaşımında olduğu gibi bir boyutlu akışta bile görülebilir. İkincisi ise akışın sayısal ağı paralel olmadığı çok boyutlu akışlarda görülür. FOU yaklaşımı ile yapılan çözümlerde, akışın sayısal ağı paralel olmadığı durumlarda bu hata büyümektedir.

Akışın sayısal ağı yaptığı aç ıyı dikkate alarak (cross-stream) nümerik difüzyonu azaltmak için Raithby tarafından [2] skew upwind yaklaşımı (Skew Upwind Differencing Scheme) önerilmiştir. Bu yaklaşım ile FOU yaklaşımındaki nümerik difüzyon önemli ölçüde azalmakta, ancak çözümde sınırlı olmayan sonuçlar görülebilmektedir [3-5].

Spalding [6] tarafından önerilen Hibrid yaklaşımında düşük yerel Peclet’li akışlarda CDS, yüksek yerel Peclet’li akışlarda ise FOU kullanılarak bu yaklaşımlarının dezavantajları elimine edilmiştir. Ancak, tüm Peclet sayıları için kullanılabilmesi ve çözümde dalgalanma yapmaması sebebiyle özellikle 1970’lerde çok popüler olan bu yaklaşımın da hata mertebesi birinci mertebededir.

İkinci mertebeden upwind (SOU) veya lineer upwind (LUD) olarak bilinen yaklaşım ilk 1960’larda önerilmiş ancak 1970’lerin sonuna kadar yaygın bir şekilde kullanılmamıştır [1]. Bu yaklaşım CDS ve FOU yaklaşımlarına göre daha iyi sonuç vermesine ve kararlı olmasına rağmen, iki boyutlu akışın sayısal ağı dik olmadığı durumlarda çözümde overshoot (sınırustü) ve/veya undershoot (sınıraltı) olmasına sebep olabilmektedir. Shyy ve diğ. [7] tarafından yapılan bir çalışmada SOU

yaklaşımının uygulanmasına 3 farklı yorum getirilmiş, bunlar birkaç probleme uygulanarak karşılaştırmıştır. Bu çalışmada ise SOU yaklaşımına farklı bir yorum getirilmiş ve Shyy ve diğ. [7] tarafından en iyisi olduğu iddia edilen SOU yorumu ile iki ticari koddaki SOU yorumları ile karşılaştırılmıştır.

Fromm [8] yaklaşımı özellikle dispersiyon hatasını azaltmak üzere geliştirilmiştir. Bu yaklaşımda merkezi ve kaynak tabanlı gradyenler eşit ağırlıklı alınarak simetrik bir yaklaşım elde edilmeye çalışılmıştır.

Leonard [9] tarafından geliştirilen üçüncü mertebeden olan QUICK yaklaşımının nümerik difüzyon içermemesi ve konvektif stabilite özelliğine sahip olması ve bunun sonucunda yukarıda bahsi geçen yöntemlere göre daha iyi sonuç vermesi sebebiyle 1980'lerin başında HAD'da çok kullanım alanı bulmuştur [10]. Ancak yüksek konvektif akıslarda QUICK yaklaşımı overshoot (sınırustü), undershoot (sınıraltı) ve yüksek gradyenin her iki tarafında osilasyonlara sebep olabilmektedir.

Yukarıda anlatılan yaklaşımlar haricinde Power-law yaklaşımı, Exponential yaklaşımı gibi daha birçok yaklaşım geliştirilmiştir [11]. Literatürde konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan klasik yaklaşımları karşılaştıran veya bu yaklaşımları iyileştirmek üzere yapılmış birçok çalışma bulunabilir [12-19]. Ancak, tek bir fonksiyon ile ifade edilen klasik ayrıklaştırma yaklaşımlarından hiçbirisi keskin gradyenlerin olduğu noktalarda çözümün monotonik olmasını sağlayarak hassas bir sonuç verememektedir. Gresho ve Lee [20] ağın yeterince sık olmadığı veya yanlış sınır şartlarının kullanıldığı konusunda bilgi içerdiği için çözümde oluşabilecek osilasyonların engellenmemesi gerektiğini söylemiştir. Ancak, bazı akıslarda fiziksel dalgalanmalar ile fiziksel olmayan dalgalanmalar arasındaki farkı tespit etmek pek mümkün olmayabilir. Ayrıca, osilasyonlar çözümün ıraksamasına sebep olabilir [21]. Bu nedenle bu öneri pek rağbet görmemiş ve osilasyonları engellemek için birçok metot geliştirilmiştir. Bu metotlardan birisi akı-sınırlaması esasına dayanan yüksek çözünürlüklü yaklaşımlardır. Bu yaklaşımlarda hücre ara yüzündeki akı, akı-sınırlama yaklaşımı kullanılarak sınırlı (monotonik) olmaya zorlanır. Genellikle farklı hata mertebesine sahip yaklaşımların kombinasyonundan oluşan kompozit yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar ile çözümde osilasyon, overshoot

(sınırustü) ve/veya undershoot (sınıraltı) olmadan, şok veya süreksizlik gibi yüksek gradyenlerin olduğu yerlerde çözüm elde edilebilir.

Yüksek mertebeden kompozit yaklaşımlar arasındaki ilişkiyi basitleştirmek için Leonard [22] tarafından Normalize Edilmiş Değişken Formülasyonu (Normalized Variable Formulation, NVF) önerilmiştir. NVF formunda yazılan yaklaşımların daha rahat karşılaştırabilmesi için ise Normalize Edilmiş Değişken Diyagramı (Normalized Variable Diagram, NVD) yine Leonard [22, 23] tarafından önerilmiş ve daha sonra Gaskell ve Lau [24] tarafından geliştirilmiştir. Yaklaşımların değerlendirilmesinde kullanılan bir diğer yaklaşım ise Sweby [25] tarafından geliştirilen Akı-Sınırlama Diyagramı'dır (Flux-Limiter Diagram, FLD). İki diyagram arasındaki ilişki Leonard [23] tarafından gösterilmiştir.

Yüksek çözünürlüklü yaklaşımların değerlendirilmesinde sınırlılık (boundedness) kriteri olarak; Konveksiyon-Sınırlama Kriteri (Convection Boundedness Criteria, CBC) ve Toplam Değişimin Azalması (Total Variation Diminishing, TVD) kriteri kullanılmaktadır.

Gaskell ve Lau [24] tarafından önerilen G/L-CBC uzun bir süre bir yaklaşımın konvektif-sınırlılık (convective-boundedness) özelliğine sahip olabilmesi için hem yeter hem gerek koşul olarak görülmüştür. Ancak, Yu ve diğ. [26] Gaskell ve Lau tarafından önerilen bu kriterlerin sadece yeter şart olduğunu, gerek şart olmadığını göstermiştir. Genişletilmiş Konvektif Sınırlama Kriteri (Extended Convective Boundedness Criteria, ECBC) olarak tanımlanan bu kriterlere göre yaklaşım köşegensel (diagonal) olmak zorunda değildir. Yu ve diğ. [26] çalışmalarında ayrıca bir boyutlu kararlılık (stability) analizine dayanarak yaklaşımların kararlı (stable) olduğu kritik Peclet sayısı ile NVD'daki karakteristik eğrileri arasındaki ilişkiyi göstermiştir. Buna göre bir yaklaşımın karakteristik eğrisinin düşey eksenini kestiği noktanın tersi o yaklaşımın kritik Peclet sayısına karşılık gelmektedir.

Hou ve diğ. [27], Gaskell ve Lau'nun tavsiye ettiği CBC bölgesinin yaklaşımların hassasiyetini dikkate almadığını, sadece konvektif sınırlılığı sağlamak üzere tasarlandığını ve kendileri tarafından önerilen kriterleri sağlayan bir yaklaşımın hem

yüksek hassasiyet hem de sınırlılık özelliğine sahip olacağını iddia etmişlerdir. Ayrıca, G/L-CBC şartını sağlayan bütün yaklaşımların fiziksel olarak mantıklı bir sonuç vermeyeceklerini iddia etmişlerdir.

Wei ve diğ. [28] NVD’de diagonal iç bölge ile dış bölge arasındaki bir ilişki olduğunu göstermişlerdir. Genelleştirilmiş Konvektif Sınırlılık Kriteri (General Convective Boundedness Criteria, GCBC) olarak adlandırılan bu kriterleri sağlayan bir yaklaşımın sınırlılık (boundedness) özelliğine sahip olacağını belirtilmiştir. Buna göre dış bölgenin genişlemesi iç bölgede bir daralmaya sebep olmaktadır. Ya da iç bölgedeki daralma, dış bölgenin genişlemesi ile dengelenebilir.

Toplam Değişimin Azalması Yöntemi (TVD) ilk defa Harten [29] tarafından zamana bağlı gaz dinamiği için kararlı, osilasyon yapmayan monotonik yüksek mertebeden yaklaşımların geliştirilmesi amacıyla geliştirilmiştir. TVD özelliğine sahip olan bir yaklaşımın çözümde overshoot (sınırustü) veya undershoot (sınıraltı) yapmaması gerekir denilebilir. TVD ile CBC arasındaki ilişki Lin ve Lin [30] tarafından NV formunda verilmiştir. Buna göre TVD kriterlerini sağlayan bir yaklaşım her zaman CBC şartlarını da sağlar ama tersi bir durum doğru değildir. Yani CBC daha esnek bir kriterdir.

CBC ve TVD kriterlerine bağlı olarak birçok yüksek çözünürlüklü yaklaşım geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlar Tablo 1.1’de verilmiştir. Tablodan görülebileceği gibi sadece Leonard; SHARP, ULTRA-SHARP, ULTIMATE, UTOPIA, NIRVANA, MACHO, COSMIC olarak adlandırdığı birçok yaklaşım geliştirmiştir. Ancak bu yaklaşımlardan hiçbiri tam anlamı ile başarılı olamamıştır. Literatürde görülen yüksek çözünürlüklü sınırlandırılmış yaklaşımların bir kısmı NVD, diğer kısmı ise FLD kullanılarak geliştirilmiştir. Farklı yazarlar tarafından geliştirilen bazı yaklaşımlar tamamen aynıdır. Örneğin NVD ile gösterilen SOUCUP [31], BSOU [32] ve HLPa [33] yaklaşımları, FLD ile gösterilen sırasıyla MINMOD [29], OSHER [34] ve CLAM [35] yaklaşımları ile aynıdır. Ayrıca farklı yıllarda, farklı yazarlar tarafından önerilen SMARTER [36], NOTABLE [37], CHARM [38] ve ISNAS [39] yaklaşımları arasında hiçbir fark yoktur.

Tablo 1.1: Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar

Yıl	Yaklaşım Adı	Yazar
1974	CLAM (Curved Line Advection Method)	van Leer [35,40]
1979	MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Law)	van Leer [41]
1982	MINMOD (MINium MODulus)	Roe ve Baines [29,42]
1983	EULER (Exponential Upwind or Lineer Extrapolation Refinement)	Leonard [43,44]
1983	OSHER	Chakravarthy ve Osher [34]
1985	SUPERBEE	Roe [42]
1988	SHARP (Simple High-Accuracy Resolution Program)	Leonard [23]
1988	SMART (Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport)	Gaskell ve Lau [24]
1990	ULTRA-SHARP (Universal Limiter for Tight Resolution and Accuracy in combination with Simple High-Accuracy Resolution Program)	Leonard ve Mokhtari [45]
1990	KOREN	Koren
1991	SOUCUP (Second-Order Upwind-Central Differencing-first-order UPwind)	Zhu ve Rodi [31]
1991	ULTIMATE (Universal Limiter for Transient Interpolation Modelling of the Advective Transport)	Leonard [46]
1991	SUPER-C (SUPER Compressive)	Leonard [46]
1992	HLPA (Hybrid Lineer/Parabolic Approximation)	Zhu [33]
1992	MLU (Monotonized Lineer-Upwind)	Noll [47]
1993	NOTABLE (New Option for the Treatment of Advection in the Boundary Layer Equations)	Pascau ve Perez [37]
1993	UTOPIA (Uniformly Third Order Polynomial Interpolation Algorithm)	Leonard ve diğ. [48]
1993	STOIC (Second and Third Order Interpolation for Convection)	Darwish [49]
1994	UMIST (Upstream monotonic interpolation for scalar transport)	Lien ve Leschziner [50]
1995	NIRVANA (Non-oscillatory Integrally Reconstructed Volume-Averaged Numerical Advection Scheme)	Leonard ve diğ. [51]
1995	COPLA (Combination of Piecewise Lineer Approximation)	Choi ve diğ. [52]
1995	SMARTER, (SMART Efficiently Revised)	Choi ve diğ. [36]
1995	H-QUICK	Waterson ve Deconinck [53]
1995	OSPRe (Optimum Symmetric Polynomial Ratio Expression)	Waterson ve Deconinck [53]
1995	CHARM (Cubic/Parabolic High-Accuracy Resolution Method)	Zhou ve diğ. [38]

Tablo 1.1 (Devam): Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar

1996	MACHO (Multidimensional Advection-Conservative Hybrid Operator)	Leonard ve diğ. [54]
1996	COSMIC (Conservative Operator Splitting for Multidimensions with Internal Constancy)	Leonard ve diğ. [54]
1996	ISNAS (Interpolation Scheme which is Non-oscillatory for Advected Scalars)	Zijlema M. [39]
1996	NVF SUDS (Normalized Variable Formulation Skew Upwind Differencing Scheme)	Darwish ve Moukalled [55]
1998	VONOS (Variable-order Non-Oscillatory Scheme)	Varonos ve Bergeles [56]
2000	WACEB (Weighted-Average Coefficient Ensuring Boundedness)	Song ve diğ. [57]
2001	SECBC (Scheme based on extended CBC)	Yu ve diğ. [26]
2003	CUBISTA (Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection)	Alves ve diğ. [58]
2003	HOAB (High-Order-Accurate Bounded Scheme)	Wei ve diğ. [59]

Leonard [46] zamana bağlı çözümlerde yüksek çözünürlüklü yaklaşımların NVD'deki karakteristik eğrilerinin CFL sayısına bağlı olarak değişeceğini, CFL sayısının 1'e yaklaşması ile NVD iç bölgesindeki monotonik bölgenin küçüldüğünü ve nihayet CFL=1 olduğunda bütün yaklaşımların FOU yaklaşımını kullanacağını göstermiştir.

Literatürde yüksek çözünürlüklü yaklaşımların özelliklerini inceleyen veya bunları karşılaştıran birçok çalışma mevcuttur [1, 29, 53, 55, 60-79].

Son yıllarda TVD yaklaşımlarının düzensiz (unstructured) ağlara uygulanması ile ilgili çalışmalar yapılmaktadır [80-82].

2. KONVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİNİN AYRIKLAŞTIRILMASI

Akışkan hareketini yöneten denklemleri (governing equations) çözmek için öncelikle bu denklemlerin sayısal analogları üretilir. Bu işleme ayrıklaştırma (discretization) denir. Akışı temsil eden kısmi diferansiyel denklemlerdeki tüm terimler ayrıklaştırılır. Sayısal ayrıklaştırma için en çok kullanılan ayrıklaştırma yöntemleri Sonlu Farklar Yöntemi (Finite Difference Method, FDM), Sonlu Elemanlar Yöntemi (Finite Element Method, FEM), Sonlu Hacimler Yöntemi (Finite Volume Method, FVM) ve Spektral Yöntemler'dir (Spectral Methods). Aşağıda kısaca açıklanan bu yöntemler arasındaki fark, değişkenlere nasıl yaklaşıldığı (approximation) ve ayrıklaştırılması işlemindedir. Yöntemlerin hepsinde aşağıdaki adımlar izlenir:

- Bilinmeyen akış değişkenlerinin basit fonksiyonlarla ile ifade edilmesi (approximation)
- Bu ifadelerin yönetici akış denklemlerinde yerine konularak diferansiyel denklemler yerine geçecek cebirsel denklem sisteminin elde edilmesi (ayrıklaştırma)
- Elde edilen cebirsel denklem takımının çözülmesi

Sonlu Farklar Yöntemi (FDM): Bu yöntemde Taylor serisi kullanılarak kısmi diferansiyel denklemlerdeki tek bir terimin yerine sonlu fark analoğu yazılır ve bir lineer denklem takımı elde edilir. FDM, Taylor serisini kullanarak uzayda veya zamanda farklı noktalardaki değişkenin değerleri arasındaki farkları alarak bir değişkenin türevini elde eder. Yönetici denklemlerdeki (governing equations) türevler yerine sonlu farklar yazılarak her bir ağ noktasındaki değişken değerleri için lineer bir denklem takımı elde edilir.

Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM): Bu yöntemde akış bölgesi, sonlu eleman denilen birçok alt bölgeye bölünür. Her eleman içindeki değişkenlerin değişimi basit bir fonksiyon ile tanımlanır ve akış alanını tanımlamakta kullanılır. Sonlu elemanların içinde basit parçalı (piecewise) fonksiyonlar (örneğin lineer veya kuadratik)

kullanarak herhangi bir değişkenin yerel değişimi tanımlanır. Yönetici denklem değişkenin tam çözümü için sağlanır. Ancak değişken için kullanılan parçalı yaklaşım fonksiyonu denkleminde yerine konulursa tam çözümü vermeyecektir. Bu durumda hatayı belirlemek için bir artık (residual) tanımlanır. Daha sonra artıklar (residual) ağırlıklı fonksiyonlar ile çarpılarak veya integrali alınarak bir anlamda minimize edilir. Sonuç olarak, yaklaşım fonksiyonunun bilinmeyen katsayıları için bir lineer denklem takımı elde edilir.

Spektral yöntemler: Bu yöntemde bilinmeyen fonksiyonlara Fourier serileri veya Chebyshev polinomları serileri kullanılarak yaklaşılr. FDM ve FEM aksine, yaklaşımlar (Fourier serileri veya Chebyshev polinomları serileri) yerel değildir, hesaplanan bütün çözüm bölgesinde geçerlidir. Yönetici denklemlerdeki bilinmeyenler kesme (truncated) serileri ile ifade edildikten sonra Fourier veya Chebyshev serilerinin katsayıları için cebirsel denklemler üretmek için bazı sınırlamalar kullanılır. Ya sonlu elemanlar metodundakine benzer bir ağırlıklı residual teknik ya da yaklaşım fonksiyonunu birçok ağ noktasındaki tam çözüm ile çakışacak şekilde yaklaşımı zorlayan bir teknik sınırlama olarak kullanılır.

Sonlu Hacimler Yaklaşımı (FVM): Bu yöntemde incelenen çözüm bölgesi belli sayıda kontrol hacimlerine bölünmekte, kontrol hacmi yüzlerindeki türevler sonlu farklar yaklaşımı ile ayrıklaştırılıp lineer bir denklem takımına dönüştürülmekte ve nihayetinde bir lineer denklem çözücü ile çözülmektedir.

Bu çalışmada Sonlu Hacimler Yöntemi kullanılmıştır. Bu bölümde konveksiyon-difüzyon denkleminin üniform kartezyen koordinatlarda Sonlu Hacimler Yöntemi ile ayrıklaştırılması anlatılmıştır.

2.1. Konveksiyon-Difüzyon Denkleminin Sonlu Hacimler Yöntemi ile Ayrıklaştırılması

Zamana bağlı konveksiyon-difüzyon denklemi en genel haliyle aşığıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S \quad (2.1)$$

Burada ϕ entalpi, konsantrasyon veya hız bileşeni gibi herhangi bir değişkeni, Γ difüzyon katsayısını, S herhangi bir kaynak terimini, ρ akışkanın yoğunluğunu, $\mathbf{V}$ ise akışın hız alanını göstermektedir. Denklem (2.1)'deki ilk terim ϕ 'nin zamanla değişimini, ikinci terim ϕ 'nin hız alanındaki ortam ile taşınımını, sağ taraftaki ilk terim ise difüzyonu temsil etmektedir. $\phi=1$ olması durumunda Denklem (2.1) süreklilik denklemine dönüşecektir. Denklem (2.1) üç boyutlu olarak ele alınırsa aşağıdaki gibi yazılır:

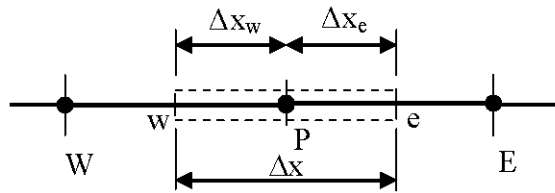
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\phi) \\ = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + S \end{aligned} \quad (2.2)$$

Basit olması açısından, kaynak terim olmadığı ($S=0$) kabul edilir ve problem bir boyutlu zamandan bağımsız olarak incelenirse Denklem (2.3) ve Denklem (2.4) elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad (2.4)$$

Şekil 2.1'de gösterilen kontrol hacmi için yukarıdaki denklemlerin integrali alınırsa Denklem (2.5 – (2.6) elde edilir.



Şekil 2.1: Tek boyutlu bir kontrol hacmi

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \quad (2.5)$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (2.6)$$

Yukarıdaki denklemler ayrıklaştırılmadan önce birim alan için kütesel debi $F=\rho u$ ve difüzyon katsayısı $D=\Gamma/\Delta x$ olarak tanımlanmış ve her bir hücre yüzü için bu değişkenler ayrı ayrı yazılmıştır.

$$F_w = (\rho u)_w, \quad F_e = (\rho u)_e, \quad D_w = \Gamma_w/\delta x_w, \quad D_e = \Gamma_e/\delta x_e \quad (2.7)$$

Denklemin sağ tarafındaki difüzyon terimi hemen hemen her zaman ikinci mertebeden merkezi farklar ile ayrıklaştırılmakta ve tatmin edici sonuçlar vermektedir. Bu nedenle, bu çalışmada difüzyon terimi her zaman ikinci mertebeden merkezi farklar yaklaşımı ile ayrıklaştırılmıştır.

Denklem (2.5)'te ayrıklaştırılmış konveksiyon–difüzyon denklemi ve Denklem (2.6)'daki süreklilik denklemi aşağıdaki düzenlenmiş genel formda yazılabilir.

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (2.8)$$

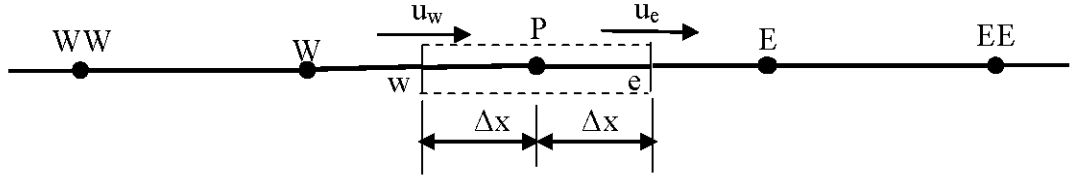
$$F_e - F_w = 0 \quad (2.9)$$

Denklem (2.8)'i çözebilmek için ϕ 'nin e ve w yüzeylerindeki değerlerini bulmak gerekmektedir. Aşağıda ϕ 'nin ara yüzlerdeki değerinin hesaplanmasında kullanılan bazı yaklaşımlar anlatılacaktır.

2.1.1. Birinci mertebeden upwind yaklaşımı (First Order Upwind, FOU)

Birinci mertebeden upwind (FOU) yaklaşımı ilk defa 1952 yılında Courant, Isaacson ve Rees tarafından sıkıştırılabilir Euler denkleminin çözümünde kullanılmıştır [1]. Şekil 2.2'de bir boyutlu bir kontrol hacmi üzerinde hızların yerleşimi gösterilmiştir.

Upwind yaklaşımında herhangi bir ara yüzdeki değer, upwind tarafındaki noktaya eşit olarak alınır. Bu durum Bölüm 2.1.7’de farklı yaklaşımlar kullanılarak ara yüz değerlerinin şematik olarak gösterildiği Şekil 2.3a’da gösterilmiştir.



Şekil 2.2: Bir boyutlu kontrol hacmi üzerinde hızların yerleşimi

Örneğin, akış batıdan doğuya doğru ise, $u_w > 0$, $u_e > 0$ ($F_w > 0$, $F_e > 0$),

$$\phi_w = \phi_W \text{ ve } \phi_e = \phi_P \quad (2.10)$$

olur. Buna göre Denklem (2.8)’de ayrıklaştırılmış ifade

$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (2.11)$$

şeklinde düzenlenir ve aşağıdaki şekilde genel formda yazılabilir:

$$(D_w + D_e + F_e)\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E \quad (2.12)$$

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)] \phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E \quad (2.13)$$

Eğer akış ters yönde, yani doğudan batıya doğru ise $u_w < 0$, $u_e < 0$ ($F_w < 0$, $F_e < 0$),

$$\phi_w = \phi_P \text{ ve } \phi_e = \phi_E \quad (2.14)$$

eşitlikleri yazılarak ayrıklaştırılmış denklem düzenlenir.

$$F_e \phi_E - F_w \phi_P = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (2.15)$$

$$[D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)] \phi_P = D_w \phi_W + (D_e - F_e) \phi_E \quad (2.16)$$

Denklem (2.13) ve Denklem (2.16) akış yönü dikkate alınarak genel bir formda yazılabilir:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (2.17)$$

Denklemdaki katsayılar:

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \quad (2.18a)$$

$$a_W = D_w + F_w, \quad a_E = D_e \quad (F_w > 0, F_e > 0) \quad (2.18b)$$

$$a_W = D_w, \quad a_E = D_e - F_e \quad (F_w < 0, F_e < 0) \quad (2.18c)$$

Akışın yönüne bağlı olarak değişen katsayılar ise tek bir ifade ile yazılabilir [83].

$$a_W = D_w + \max(F_w, 0) \quad (2.19a)$$

$$a_E = D_e + \max(0, -F_e) \quad (2.18b)$$

FOU yaklaşımının en büyük avantajı kararlı ve sınırlı olmasıdır. Bu nedenle yüksek mertebeden yaklaşımlar, Khosla ve Rubin [84] tarafından önerilen “ertelenmiş-düzeltilme” (deferred-correction) metodu denilen FOU tabanlı yazılarak programlanılır.

Bu yaklaşımın avantaj ve dezavantajını “Birinci mertebeden upwind yaklaşımı hakkında iki şey söylenir. Birincisi ve iyisi; bu yöntem her Reynolds sayısı için sonuç verir, ikincisi ve kötü olanı; Reynolds sayısı ne olursa olsun sonuç aynıdır” ifadesi kısaca özetlemektedir. Ayrıca, hata derecesinin sadece birinci mertebeden olması ve ciddi derecede nümerik difüzyon içermesi yeni yaklaşımların araştırılmasına sevk etmiştir.

2.1.2. Merkezi farklar yaklaşımı (Central Differencing Scheme, CDS)

Merkezi farklar yaklaşımında ara yüzdeki değerler Şekil 2.3b’de görüldüğü gibi komşu iki nokta kullanılarak lineer enterpolasyon ile bulunur. Ağ noktaları arasındaki mesafenin eşit olduğu bir ağ için konvektif terimler akış yönü dikkate alınmaksızın her zaman aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E)/2 \quad (2.20)$$

$$\phi_w = (\phi_W + \phi_P)/2 \quad (2.20)$$

Bu ifadeler Denklem (2.8)’de yerine yazılır.

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (2.22)$$

$$\left[\left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (2.23)$$

$$\left[\left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (2.24)$$

Denklem (2.24)’te ayrıklaştırılmış olarak verilen konveksiyon-difüzyon denklemindeki katsayılar aşağıdaki genel formda yazılabilir.

$$a_w = D_w + F_w/2 \quad (2.25)$$

$$a_e = D_e - F_e/2 \quad (2.26)$$

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w) \quad (2.27)$$

Merkezi farklar yönteminin en büyük dezavantajı akış yönünün tanımlanmasındaki eksikliklerdir. Örneğin, ϕ_w değeri hesaplanırken hem ϕ_P hem de ϕ_W kullanılır. Ancak batıdan doğuya güçlü bir konvektif akışta bu yaklaşım doğru olmayacaktır. Çünkü

konveksiyon, difüzyondan daha baskın olacak ve W noktasından daha fazla etkilenecektir. P noktasının etkisi ise daha az olacaktır. CDS küçük Peclet sayılarında oldukça iyi sonuç vermesine rağmen, güçlü konvektif akışlarda Peclet sayısı kritik bir değeri geçtikten sonra çözümde ciddi dalgalanmaların (wiggle) oluşmasına sebep olmaktadır.

2.1.3. Hibrid yaklaşımı

Spalding [6] tarafından önerilen bu yaklaşım, merkezi farklar yaklaşımı ile birinci mertebeden upwind yaklaşımının kombinasyonundan oluşur. Küçük Peclet sayılarında ($|Pe| < 2$) merkezi farklar yaklaşımı, büyük Peclet sayılarında ($|Pe| \geq 2$) ise upwind yaklaşımı daha doğru sonuçlar verir. Hibrid yöntemde, her bir kontrol hacmi için Peclet sayısı göz önüne alınarak ayrıklaştırılmış denklem elde edilir. Birim alan için batı yüzeyinden geçen net akı hibrid yaklaşımı ile aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$2 < Pe_w < 2 \quad \text{ise} \quad q_w = F_w \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_w + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_p \right] \quad (2.28)$$

$$Pe_w \geq 2 \quad \text{ise} \quad q_w = F_w A_w \phi_w \quad (2.29)$$

$$Pe_w \leq 2 \quad \text{ise} \quad q_w = F_w A_w \phi_p \quad (2.30)$$

Bu denklemlerden de görüldüğü gibi $|Pe| < 2$ olması durumunda, difüzyon ve konveksiyon terimleri merkezi farklar yaklaşımıyla, $|Pe| > 2$ olduğunda ise difüzyon terimi sıfır alınarak konveksiyon terimi FOU yaklaşımıyla ayrıklaştırılmıştır. Zamandan bağımsız bir boyutlu konveksiyon–difüzyon denklemi hibrid yaklaşımı ile ayrıklaştırıldığında katsayılar aşağıdaki genel formda yazılabilir.

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w) \quad (2.31a)$$

$$a_w = \max [F_w, (D_w + F_w/2), 0] \quad (2.31b)$$

$$a_e = \max [-F_e, (D_e - F_e/2), 0] \quad (2.31c)$$

2.1.4. İkinci mertebeden upwind yaklaşımı (Second order upwind, SOU)

İkinci mertebeden upwind yaklaşımı ilk defa 1960'larda önerilmesine rağmen, 1970'lerin sonuna kadar yaygın bir şekilde kullanılmamıştır [1]. Literatürde Beam-Warming yaklaşımı [85] olarak da bilinen bu yaklaşımda, kontrol hacminde herhangi bir ara yüzdeki parametrenin değeri belirlenirken, akışın yönüne bağlı olarak upwind tarafındaki iki noktadan yararlanılır. Şekil 2.3c'de görüldüğü gibi bu yaklaşımda ara yüz değerleri lineer ekstrapolasyon ile bulunur. FOU ile karşılaştırıldığında, bu yaklaşımın daha yüksek mertebeden olduğu ve komşu noktalar arasındaki çözüm profilinde bazı değişikliklere izin verdiği görülür. SOU yaklaşımında ara yüz değeri akış yönüne bağlı olarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

Eğer akış yönü doğudan batıya doğru ise ($F_e > 0$)

$$\phi_e = 1.5 \phi_P - 0.5 \phi_W \quad (2.32)$$

Eğer akış yönü batıdan doğuya doğru ise ($F_e < 0$)

$$\phi_e = 1.5 \phi_E - 0.5 \phi_{EE} \quad (2.33)$$

Bu durumda, Denklem (2.8)'de $F_e \phi_e$ terimi;

$$F_e \phi_e = (1.5 \phi_P - 0.5 \phi_W) \cdot \max(F_e, 0) - (1.5 \phi_E - 0.5 \phi_{EE}) \cdot \max(-F_e, 0) \quad (2.34)$$

Benzer ifadeler diğer ara yüzler için de yazılır ve ayrıklaştırılmış denklem elde edilir. Ayrıklaştırma işlemi yukarıda anlatılan yöntemler gibi olacağından burada tekrardan kaçınılacaktır.

Vanka [86], SOU yaklaşımını bir kenarı hareketli dikdörtgen oyuktaki akış problemine uygulamış ve bu yaklaşımın doğruluktan uzak ve kararsız olduğunu iddia etmiştir. Ancak, Shyy ve diğ. [7] SOU yaklaşımını A,B ve C diye gruplandırarak üç farklı şekilde yorumlamış, bu yaklaşımları kullanarak aynı problemi çözmüş ve çözüm sonucunda SOU yaklaşımının, CDS'e göre çok daha tatmin edici sonuçlar

verdiğini göstermiştir. Ayrıca, önerdiği üç farklı yaklaşım içerisinde en doğru sonucu sırasıyla C, B ve A yaklaşımlarının verdiğini göstermiştir.

Bu çalışmada ise SOU yaklaşımına farklı bir yorum getirilmiştir. Shyy ve diğ. [7] tarafından önerilen SOU yaklaşımının iki farklı yorumu ve bu çalışmada önerilen yorum, zamandan bağımsız bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemi ele alınarak, olabilecek tüm akış durumları için Tablo 2.1’de bir arada verilmiştir.

Tablo 2.1: İkinci mertebeden upwind (SOU) yaklaşımının farklı yorumları

	Shyy-B	Shyy-C	Bu çalışma
	$\longrightarrow \longrightarrow$ $u_w > 0, u_e > 0$	$\longrightarrow \longrightarrow$ $u_w > 0, u_e > 0$	$\longrightarrow \longrightarrow$ $u_w > 0, u_e > 0$
a_e	D_e	D_e	D_e
a_w	$D_w + C_w + 0.5C_e$	$D_w + 1.5C_w + 0.5C_e$	$D_w + 1.5C_w$
a_p	$D_e + D_w + C_w + 0.5C_e$	$D_e + D_w + 1.5C_e$	$D_e + D_w + C_w + 0.5C_e$
S	$0.5C_w\phi_w - 0.5C_w\phi_{WW}$	$-0.5C_w\phi_{WW}$	$0.5C_e\phi_w - 0.5C_w\phi_{WW}$
	$\longleftarrow \longrightarrow$ $u_w < 0, u_e > 0$	$\longleftarrow \longrightarrow$ $u_w < 0, u_e > 0$	$\longleftarrow \longrightarrow$ $u_w < 0, u_e > 0$
a_e	D_e	$D_e - 0.5C_w$	D_e
a_w	D_w	$D_w + 0.5C_e$	D_w
a_p	$D_e + D_w$	$D_e + D_w + 1.5C_e - 1.5C_w$	$D_e + D_w$
S	0	0	$-0.5C_w\phi_e + 0.5C_e\phi_w$
	$\longrightarrow \longleftarrow$ $u_w > 0, u_e < 0$	$\longrightarrow \longleftarrow$ $u_w > 0, u_e < 0$	$\longrightarrow \longleftarrow$ $u_w > 0, u_e < 0$
a_e	$D_e - C_e - 0.5C_w$	$D_e - 1.5C_e$	$D_e - 1.5C_e$
a_w	$D_w + C_w + 0.5C_e$	$D_w + 1.5C_w$	$D_w + 1.5C_w$
a_p	$D_e + D_w + 1.5C_w - 0.5C_e$	$D_e + D_w$	$D_e + D_w + 1.5C_w - 1.5C_e$
S	$0.5C_e\phi_{EE} - 0.5C_e\phi_E$ $+ 0.5C_w\phi_w - 0.5C_w\phi_{WW}$	$0.5C_e\phi_{EE} - 0.5C_w\phi_{WW}$	$0.5C_e\phi_{EE} - 0.5C_w\phi_{WW}$
	$\longleftarrow \longleftarrow$ $u_w < 0, u_e < 0$	$\longleftarrow \longleftarrow$ $u_w < 0, u_e < 0$	$\longleftarrow \longleftarrow$ $u_w < 0, u_e < 0$
a_e	$D_e - C_e - 0.5C_w$	$D_e - 1.5C_e - 0.5C_w$	$D_e - 1.5C_e$
a_w	D_w	D_w	D_w
a_p	$D_e + D_w - 0.5C_w - C_e$	$D_e + D_w - 1.5C_w$	$D_e + D_w - 0.5C_w - C_e$
S	$0.5C_e\phi_{EE} - 0.5C_e\phi_E$	$0.5C_e\phi_{EE}$	$0.5C_e\phi_{EE} - 0.5C_w\phi_E$

2.1.5. Fromm yaklaşımı

Fromm [8] tarafından önerilen bu yaklaşımda, konveksiyon terimleri yukarıda anlatılan CDS ve SOU ile ayrıklaştırılır ve ikisinin aritmetik ortalaması alınır. Örneğin Şekil 2.2’de gösterilen kontrol hacminde e ara yüzündeki terim akış yönünün doğudan batıya olması durumunda aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\phi_e = 0.5(\phi_e^{CDS} + \phi_e^{SOU}) \quad (2.35)$$

$$\phi_e = 0.25(\phi_E + 4\phi_P - \phi_W) \quad (2.36)$$

ve akış yönü dikkate alınarak;

$$F_e \phi_e = 0.25(\phi_E + 4\phi_P - 0.5\phi_W) \cdot \max(F_e, 0) - 0.25(\phi_P + 4\phi_E - 0.5\phi_{EE}) \cdot \max(-F_e, 0) \quad (2.37)$$

genel formunda yazılabilir. Benzer ifadeler w ara yüzü için de yazılabilir. Bu yaklaşımda hem upwind hem de merkezi gradyenler eşit ağırlıklı dikkate alındığından sonuçlar simetrik olmaktadır. Bu özellik bu yaklaşımın en büyük avantajıdır.

Yukarıda bahsedildiği gibi Fromm yaklaşımı, SOU ile CDS yaklaşımlarının ortalaması olarak düşünülebilir. Ancak Bölüm 2.1.4’te anlatıldığı gibi, SOU yaklaşımının farklı uygulamaları vardır. Bu çalışmada kullanılan Fromm yaklaşımında, farklı akış durumlarında katsayıları Tablo 2.1’de verilen, bu çalışmada farklı bir yorum getirilen SOU yaklaşımı ile CDS yaklaşımı kullanılmıştır.

2.1.6. Karma yaklaşımı

Bu çalışmada önerilen bu yaklaşım, momentum denklemindeki konveksiyon terimlerinin farklı yaklaşımlar ile ayrıklaştırılması esasına dayanır. Farklı yaklaşımların kullanılması sebebiyle “Karma” olarak adlandırılan bu yaklaşım,

aşağıda verilen iki boyutlu zamandan bağımsız Navier-Stokes denklemleri ele alınarak incelenmiştir:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.38)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.39)$$

Bu çalışmada kaydırılmış (staggered) ağ sistemi kullanılmıştır. Hızların kaydırılmış ağ sistemindeki yeri dikkate alınarak yapılan Taylor serisi analizine göre, konveksiyon terimlerinin bu çalışmada önerilen SOU ve Fromm yaklaşımları ile ayrıklaştırılması durumunda, yeniden düzenlenmiş denklem (modified equation), u momentum denklemi (Denklem (2.38)) için Tablo 2.2’de verilmiştir.

Tablo 2.2: Konveksiyon terimlerinin SOU ve Fromm yaklaşımları ile ayrıklaştırılması durumunda elde edilen yeniden düzenlenmiş denklem

Terim	Yaklaşım	Yeniden düzenlenmiş denklem
$u \frac{\partial u}{\partial x}$	SOU	$u \frac{\partial u}{\partial x}$
	Fromm	$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4} u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x^2$
$v \frac{\partial u}{\partial y}$	SOU	$v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{8} \delta x^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{8} \delta y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{4} \delta y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial y}$
	Fromm	$v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{8} \delta x^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{8} \delta y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

Yukarıda görüldüğü gibi u momentum denklemindeki ilk terimin SOU, ikinci terimin ise Fromm yaklaşımı ile ayrıklaştırılması durumunda hatanın daha az olacağı görülmektedir. Benzer analiz, v momentum denklemi için de yapılabilir. Bu çalışmada, Taylor serisi analizine dayanılarak geliştirilen “Karma” yaklaşımında, u momentum denklemindeki ilk terim ile v momentum denklemindeki ikinci terim SOU yaklaşımı ile, diğer konveksiyon terimleri (u momentum denklemindeki ikinci terim ile v momentum denklemindeki ilk terim) ise Fromm yaklaşımı ile ayrıklaştırılır.

2.1.7. QUICK yaklaşımı

Leonard [9,87] tarafından önerilen QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) yaklaşımında, kontrol hacminin herhangi bir ara yüzündeki değer bulunurken upwind (akışüstü) tarafında iki, downwind (akışaltı) tarafında ise bir komşu nokta kullanılır. Akış yönüne bağlı olarak ara yüz değerleri Şekil 2.3d’de görüldüğü gibi iki upwind (akışüstü) ve bir downwind (akışaltı) noktasından geçen ikinci dereceden bir polinom uydurularak bulunur. Bu yaklaşım tam upwind eğilimli (fully upwind biased) değildir ama akış üstünden daha fazla nokta kullandığı için upwind (akışüstü) eğilimli olarak tanımlanır.

$$\phi_e = \frac{3}{8}\phi_E + \frac{6}{8}\phi_P - \frac{3}{8}\phi_W \quad \text{eğer } u > 0 \text{ (dolayısı ile } F_e > 0) \text{ ise} \quad (2.40)$$

$$\phi_e = \frac{3}{8}\phi_P + \frac{6}{8}\phi_E - \frac{3}{8}\phi_{EE} \quad \text{eğer } u < 0 \text{ (dolayısı ile } F_e < 0) \text{ ise} \quad (2.41)$$

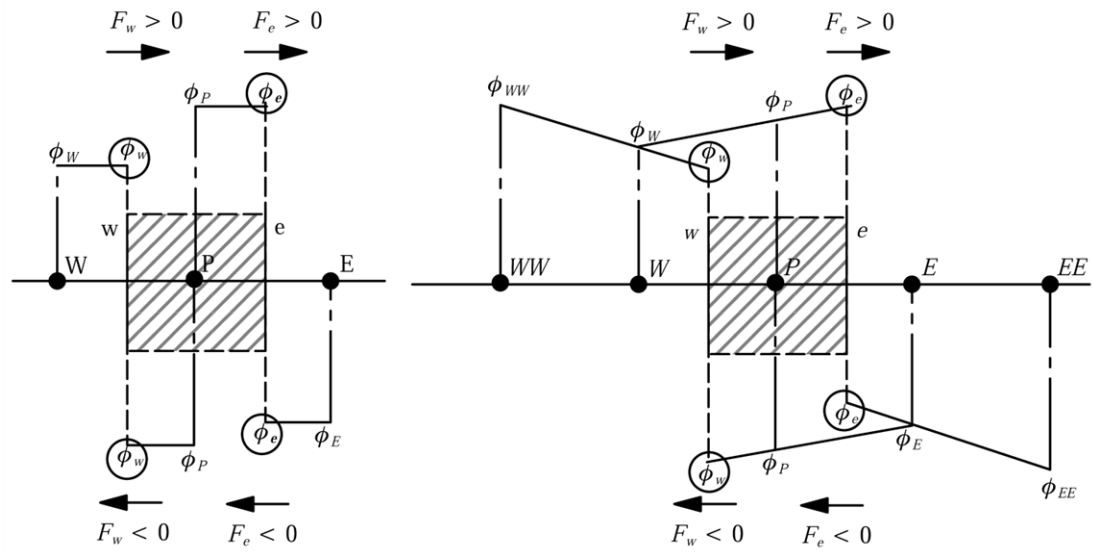
ve genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F_e \phi_e = \left[\frac{3}{8}\phi_E + \frac{6}{8}\phi_P - \frac{3}{8}\phi_W \right] \max(F_e, 0) - \left[\frac{3}{8}\phi_P + \frac{6}{8}\phi_E - \frac{3}{8}\phi_{EE} \right] \max(-F_e, 0) \quad (2.42)$$

Benzer ifadeler ϕ_w için de yazılarak Denklem (2.8)’de yerine konularak ayrıklaştırılmış denklem elde edilir.

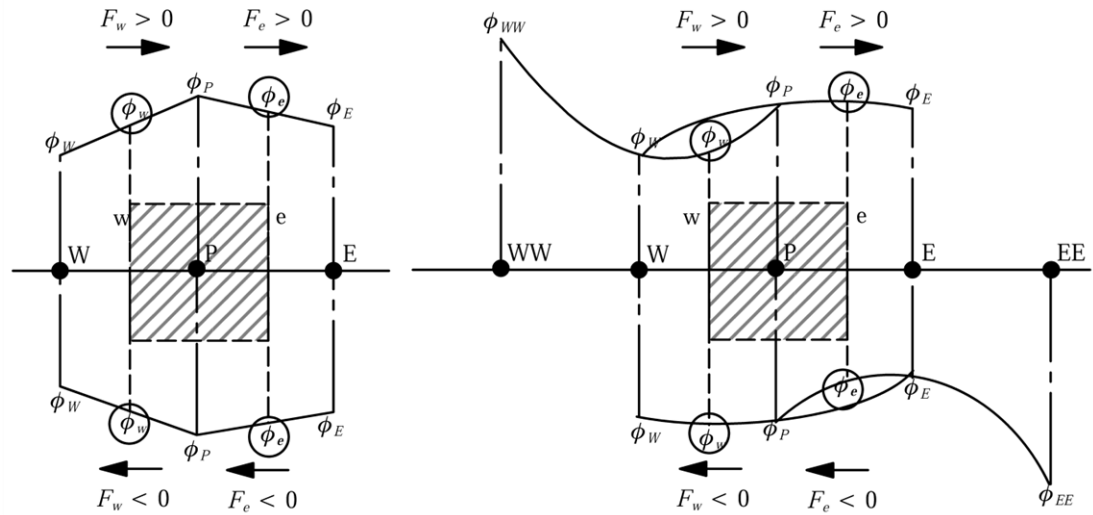
QUICK yaklaşımı yukarıda bahsedilen yaklaşımlara nazaran daha yüksek mertebeden bir kesme hatasına sahiptir. Bu yaklaşımın hata mertebesinin kaçınıcı mertebeden olduğuna dair literatürde birçok tartışma vardır. Leonard sonlu hacimler yönteminde bu yaklaşımın hata mertebesinin üçüncü dereceden olduğunu göstermiştir [88-89]. QUICK yaklaşımı upwind (akışüstü) karakteristiğini taşır ve seyrek ağlarda elde edilen çözümler diğer yaklaşımlara göre daha hassastır. Bu nedenle bu yaklaşım kısa sürede çok popüler olmuş ve birçok uygulamada kullanılmıştır. Öte yandan, matris katsayıları negatif olabileceğinden, bu yaklaşım kararlı olmayabilir. Bu sorun, Hayase ve diğ. [90] tarafından önerilen, yaklaşımın

FOU tabanlı yazılıp, diğer terimlerin kaynak terim içine atılması ile çözülmüştür. Ancak, QUICK yaklaşımı ile elde edilen sonuçlarda overshoot (sınırstü) veya undershoot (sınıraltı) olabilir. Fiziksel olarak anlamsız olabilecek bu tür sonuçların yorumunda bu husus dikkate alınmalıdır.



a) FOU (sabit ekstrapolasyon)

b) SOU (lineer ekstrapolasyon)



c) CDS (lineer interpolasyon)

d) QUICK (Kuatratik interpolasyon)

Şekil 2.3: Ara yüz değerlerinin farklı yaklaşımlar kullanılarak bulunmasının şematik gösterimi.

2.2. Zamana Bağlı Problemlerde Konveksiyon-Difüzyon Denkleminin Ayırıklaştırılması

Denklem (2.1)'deki zaman terimi de uzaysal terimler gibi FOU, CDS vb. yaklaşımlardan birisi ile ayırıklaştırılabilir. Denklemden uzaysal terimlerin hangi zaman adımında yazıldığına bağlı olarak çözüm yöntemi değişmektedir. Eğer bu terimler bilinen zaman adımında yazılıyorsa belirtik (explicit), bilinmeyen zaman adımında yazılıyorsa örtük (implicit) yöntem olarak adlandırılır. Belirtik (explicit) yöntemde bir önceki zaman adımından değerler bilindiğinden, tek bilinmeyen yeni zaman adımındaki değişken olmakta, bu nedenle değeri aranan değişken kolayca hesaplanabilmektedir. Örtük (implicit) yöntemde ise uzaysal terimler de yeni zaman adımında yazıldığından denklemden birçok bilinmeyen olmaktadır. Bu şekilde bir denklem takımı elde edilmekte, direkt veya iteratif olarak bu denklem takımı çözülmektedir. Belirtik (explicit) ve örtük (implicit) yaklaşımlar aşağıda bir boyutlu bir probleme uygulanarak anlatılmıştır.

Kaynak terimin olmadığı, bir boyutlu zamana bağlı konveksiyon-difüzyon denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.43)$$

Bu denklemin sağ tarafındaki terimler, Şekil 2.1'de gösterilen kontrol hacmi üzerinde Bölüm 2.1'de anlatılan yaklaşımlardan birisi ile ayırıklaştırılabilir. Bu yaklaşımlardan merkezi farklar yaklaşımı uzaysal terimlerinin ayırıklaştırılması için kullanılırsa Denklem (2.43) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} = -u \frac{\phi_E^n - \phi_W^n}{2\Delta x} + \Gamma \frac{\phi_E^n - 2\phi_P^n + \phi_W^n}{\Delta x^2} \quad (2.44)$$

Yukarıdaki eşitlik tekrar düzenlenerek:

$$\phi_P^{n+1} = \phi_P^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x}(\phi_E^n - \phi_W^n) + \frac{\Gamma\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_E^n - 2\phi_P^n + \phi_W^n) \quad (2.45)$$

$$\phi_P^{n+1} = (1 - 2Fo)\phi_P^n + \left(Fo - \frac{CFL}{2}\right)\phi_E^n + \left(Fo + \frac{CFL}{2}\right)\phi_W^n \quad (2.46)$$

Burada CFL ve Fo

$$CFL = \frac{|u|\Delta t}{\Delta x}, \quad Fo = \frac{\Gamma\Delta t}{\Delta x^2} \quad (2.47)$$

şeklinde tanımlanmıştır. CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) zaman adımının (Δt), karakteristik konveksiyon zamanına ($\Delta x/u$) oranı olup Courant sayısı olarak da adlandırılır. HAD'da çok önemli bir parametre olan bu boyutsuz sayı, bir akışkan partikülünün bir zaman adımında bir ağ noktasından daha uzağa taşınmaması gerektiği olarak yorumlanabilir [91]. Fo ise zaman adımının (Δt) karakteristik difüzyon hızına ($\Delta x^2/\Gamma$) oranı olarak tanımlanmıştır. Bu sayı Fourier sayısı olarak adlandırılır.

Belirtik (explicit) yöntem ile çözülen bir denklemin kararlı olabilmesi için aşağıdaki şartların sağlanması gerekir:

$$\text{Sadece difüzyon (CFL=0)} \quad : \quad \Delta t < \frac{\Delta x^2}{2\Gamma} \quad (2.48)$$

$$\text{Sadece konveksiyon (Fo=0)} \quad : \quad CFL < 1 \text{ veya } \Delta t < \frac{\Delta x}{u} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} &\text{Konveksiyon ve difüzyon} \\ & (CFL \neq 0, Fo \neq 0) \end{aligned} \quad : \quad \Delta t < \frac{1}{\frac{2\Gamma}{\Delta x^2} + \frac{u}{\Delta x}} \quad (2.50)$$

Yukarıdaki denklemlerden görüldüğü gibi belirtik (explicit) yöntemin en büyük dezavantajı zaman adımındaki sınırlamadır. Örneğin sadece difüzyonun olduğu durumda uzaysal doğruluğu (spatial accuracy) arttırmak çok zor olmaktadır. Çünkü mümkün olan en büyük zaman adımı Δx 'in karesi ile artmaktadır.

Denklem (2.43)'te verilen bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemi örtük (implicit) yöntem ile ayrıklaştırılırsa:

$$\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} = -u \frac{\phi_E^{n+1} - \phi_W^{n+1}}{2\Delta x} + \Gamma \frac{\phi_E^{n+1} - 2\phi_P^{n+1} + \phi_W^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (2.51)$$

Bu denklem, Denklem (2.44) ile karşılaştırılırsa tek farkın denklemin sağ tarafındaki terimlerin yeni zaman adımında olduğu görülebilir. Yukarıdaki eşitlik tekrar düzenlenerek:

$$\phi_P^n = (1 + 2Fo)\phi_P^{n+1} + \left(\frac{CFL}{2} - Fo\right)\phi_E^{n+1} - \left(\frac{CFL}{2} + Fo\right)\phi_W^{n+1} \quad (2.52)$$

Denklemin sağ tarafındaki bütün terimler bilinmeyen bir sonraki zaman adımında yazılmıştır. Bu durumda bir denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu denklem sistemi direkt veya iteratif olarak çözülebilir. Görüldüğü gibi bu yöntemde belirtik (explicit) yöntemde olduğu gibi herhangi bir zaman adımı kısıtlaması yoktur. Bu özellik örtük (implicit) yöntemin en büyük avantajıdır.

Hem belirtik (explicit) hem de örtük (implicit) yöntemde zamana göre hata terimi birinci mertebededir. Zaman boyutundaki hassasiyetin önemli olduğu durumlarda hatası ikinci mertebeden olan Crank-Nicolson yöntemi kullanılabilir. Denklem (2.43)'te verilen denklem Crank-Nicolson yöntemi ile ayrıklaştırılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} = & -u \frac{\phi_E^{n+1} - \phi_W^{n+1}}{2\Delta x} + \Gamma \frac{\phi_E^{n+1} - 2\phi_P^{n+1} + \phi_W^{n+1}}{\Delta x^2} \\ & + u \frac{\phi_E^n - \phi_W^n}{2\Delta x} + \Gamma \frac{\phi_E^n - 2\phi_P^n + \phi_W^n}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.53)$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki denklemden görülebileceği gibi Crank-Nicolson yöntemi, belirtik (explicit) ve örtük (implicit) yöntemlerin harmanlanması olarak düşünülebilir. Örtük (implicit) yöntemde olduğu gibi bu yöntemde de bir denklem takımı elde edilir. Ancak yöntemin kararlı olabilmesi için aşağıdaki kriteri sağlaması gerekmektedir:

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2\Gamma} \quad (2.54)$$

Bu denklem, Denklem (2.48) ile karşılaştırıldığında bu yöntemde mümkün olan en büyük zaman adımının belirtik (explicit) yöntemle göre iki kat daha büyük olduğu görülebilir. Belirtik (explicit) ve örtük (implicit) yöntemlerin ancak eşit oranda harmanlanması ile zaman boyutunda ikinci mertebeden hassasiyet elde edilir. Örtük yöntemin etkisi arttırılırsa yöntem daha kararlı (stabil) hale gelmekte, ancak yöntemin hassasiyeti azalmaktadır.

Belirtik (Explicit) ve Örtük (Implicit) Yöntemlerinin Karşılaştırılması: Belirtik (explicit) ve örtük (implicit) yöntemlerini karşılaştırmak amacıyla difüzyon terimi ihmal edilerek aşağıda verilen zamana bağlı bir boyutlu konveksiyon denklemi ele alınsın:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.55)$$

Uzaysal terimler $u > 0$ olduğu kabul edilerek FOU yaklaşımı ile ve zaman terimi sırasıyla örtük (implicit) ve belirtik (explicit) yöntem ile ayrıştırılırsa:

$$\phi_P^{n+1} = \phi_P^n - CFL(\phi_P^{n+1} - \phi_W^{n+1}) \quad (2.56)$$

$$\phi_P^{n+1} = \phi_P^n - CFL(\phi_P^n - \phi_W^n) \quad (2.57)$$

denklemleri elde edilir. Taylor serisi analizi yapılırsa denklemlerdeki yapay viskozite terimi:

$$\text{Örtük (Implicit) Yöntem} : (u\Delta x/2) (1+CFL) \quad (2.58)$$

$$\text{Belirtik (Explicit) Yöntem} : (u\Delta x/2) (1-CFL) \quad (2.59)$$

Yukarıdaki eşitliklerden görülebileceği gibi $CFL=1$ alınması durumunda belirtik (explicit) yöntem tam doğru sonucu verir. Ancak aynı şey örtük (implicit) yöntem için söz konusu değildir. $CFL>1$ olursa örtük (implicit) yöntemde yapay viskozite terimi daha da büyüyecektir. Ayrıca belirtik (explicit) upwind yaklaşımı taşınimsallık (transportive) özelliğine sahipken, hiçbir örtük (implicit) yöntem bu özelliğe sahip değildir [92].

2.3. Ayırıklaştırma Yöntemlerinin Bazı Özellikleri

Akışların HAD ile analizinde kullanılan sayısal yöntemlerin doğruluk (accuracy), kararlılık (stability) ve sınırlılık (boundedness) gibi özellikleri, Navier-Stokes denklemlerindeki terimlerin ayırıklaştırılmasında kullanılan yaklaşımlara bağlıdır. Bu bölümde konveksiyon terimlerinin ayırıklaştırmasında kullanılan yaklaşımların değerlendirilmesinde kullanılan bazı özellikler anlatılmıştır.

2.3.1. Doğruluk (accuracy) özelliği

Akış veya ısı transferi problemlerinin sayısal çözümleri yaklaşık çözümlerdir. Sayısal çözümlerde her zaman üç çeşit sistematik hata mevcuttur: a) Gerçek akış ile matematik modelin analitik çözümü arasındaki fark olan “modelleme hataları”, b) Lineer denklem sistemlerinin tam çözümü ile iteratif çözümleri arasındaki fark olan “iterasyon hataları” ve c) Denklemlerin analitik çözümleri ile bu denklemlerin ayırıklaştırılması ile elde edilen lineer denklem sistemlerinin tam çözümleri arasındaki fark olan “ayırıklaştırma hataları” [91]. Bu bölümde sadece ayırıklaştırma hatalarına değinilecektir.

Kullanılan ağ incelidikçe ayırıklaştırmadan kaynaklanan hatalar azalır. Bu nedenle, bir sonlu farklar yaklaşımının doğruluğu genellikle Taylor serisi açılımının hata derecesi dikkate alınarak yapılır. Fakat aynı sıklıktaki bir ağda, hata mertebesi aynı olan yöntemler çözümde birbirinden farklı hatalar üretebilir. Çünkü hata mertebesi ağ incilirken sadece hataların hangi oranda azalacağını gösterir, tek bir ağ noktasındaki hata hakkında bir bilgi içermez [91-93].

Kesme hatası ve yeniden düzenlenmiş denklem (modified equation): Kesme hatası çözülecek olan diferansiyel denklem ile bir model kullanılarak ayrıklaştırılmış denklem arasındaki farktır. Kesme hatası ve yeniden düzenlemiş diferansiyel denklem, çözülecek denklemin asıl denklemden nasıl farklı olacağı konusunda bir fikir verir. Bu, bir boyutlu konveksiyon denklemi dikkate alınarak basit bir şekilde açıklanabilir.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2.60)$$

Burada u konveksiyon hızı olup pozitif ($u > 0$) ve sabittir. Bu denklem sadece uzay boyutunda ayrıklaştırılarak yazılırsa;

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{(\phi_e - \phi_w)}{\Delta x} = 0 \quad (2.61)$$

ifadesi elde edilir. Burada ϕ_e ve ϕ_w hücre ara yüzlerindeki değerler, Δx ise hücre genişliğidir. Ara yüz değerleri için FOU yaklaşımı kullanılsın.

$$\phi_e = \phi_P \quad (2.62)$$

$$\phi_w = \phi_W \quad (2.63)$$

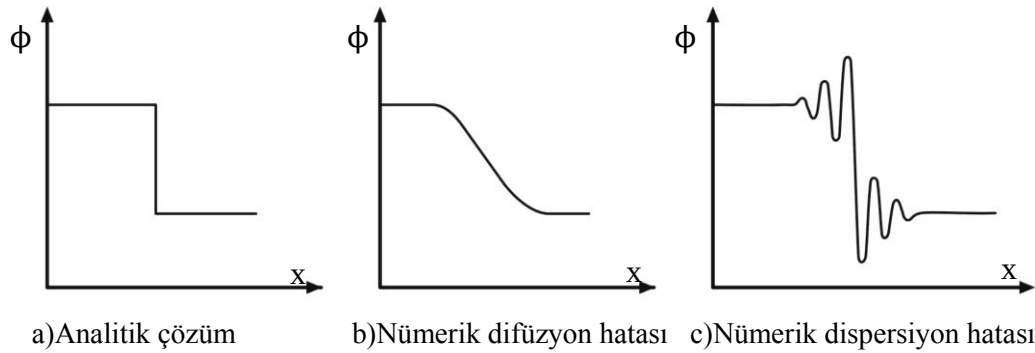
Bu ifadeler Denklem (2.61)'de yerine konur, ϕ_w değeri ϕ_P noktasına göre Taylor serisine açılır, Δx^3 ve daha büyük hata terimleri ile zaman boyutunun ayrıklaştırılmasından kaynaklanan hata terimleri ihmal edilirse aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2} u \Delta x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{6} u \Delta x^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \quad (2.64)$$

Denklem (2.64)'ün sol tarafındaki terimler ile Denklem (2.60)'da verilen çözümü istenen orijinal kısmi diferansiyel denklemin sol tarafı tamamen aynı iken, Denklem (2.64)'ün sağ tarafında ek terimler gözükmemektedir. Çözümü aranan diferansiyel

denklemden (Denklemler (2.60)) olmayan bu terimler, kesme hatalarından kaynaklanmaktadır. Denklem (2.64) yeniden düzenlenmiş denklem (modified equation) olarak adlandırılır. Navier-Stokes denklemleri $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ gibi terimler içermektedir. Bu terimler akışta fiziksel viskozitenin difüzyif özelliğini göstermektedir. Benzer terim yeniden düzenlenmiş denklemin sağ tarafında da görülmektedir. Ancak bu terim tamamen nümerik hatalardan kaynaklanmaktadır. Bu nedenle, sayısal çözüme sanki viskozite varmış gibi özellik katan bu terime “yapay viskozite” veya “nümerik viskozite” denir. FOU yaklaşımının en büyük dezavantajı olan difüzyif özellik, bu sebepten kaynaklanmaktadır [2, 9, 11, 94]. Özellikle düşük Peclet sayılı akışlarda bu hata çok büyüktür.

Sayısal hatalardan kaynaklanan başka bir sorun ise nümerik dispersiyondur. Bu tür hatalar çözümde dalgalanmalara (wiggles) sebep olmaktadır. Genel olarak yeniden düzenlenmiş denklemin sağ tarafındaki türevlerin mertebesi tek ise nümerik difüzyon, çift ise nümerik dispersiyon hataları görülmektedir. Kesme hatalarından kaynaklanan hatalar Şekil 2.4’te şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 2.4: Kesme hatalarından kaynaklanan hatalar [95]

Yeniden düzenlenmiş denklemde tamamen nümerik orijinli olan yapay viskozitenin olması çözümün doğruluğunu azaltırken, öte yandan çözümün kararlı olmasını sağlar. FOU yaklaşımının her zaman monotonik sonuç vermesi kesme hatalarından kaynaklanan yapay viskozite içermesidir. HAD’da özellikle keskin gradyanların (örneğin şok) olduğu yerlerde çözüm hiç elde edilmeyebilir. Bu nedenle en azından bir çözüm elde etmek için bazen yapay viskozite bilinçli olarak eklenir. Bu da

beraberinde yeni bir soruyu getirir: Ne kadar doğru olduğu önemli olmaksızın elde edilen bir çözüm, hiç çözüm olmamasından daha mı iyidir?

Ara yüz değerlerinin hesaplanmasında kullanılan yaklaşımlar genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{4}(1 + \kappa)(\phi_E - \phi_P) + \frac{1}{4}(1 - \kappa)(\phi_P - \phi_W) \quad (2.65)$$

$$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{4}(1 + \kappa)(\phi_P - \phi_W) + \frac{1}{4}(1 - \kappa)(\phi_W - \phi_{WW}) \quad (2.66)$$

Burada κ , -1 ila 1 aralığında değişen gerçel bir sayıdır ($-1 \leq \kappa \leq 1$). $\kappa = -1$ için SOU, $\kappa = 0$ için Fromm, $\kappa = 0.5$ için CDS ve $\kappa = 1$ için QUICK yaklaşımları elde edilir.

Bu ifadeler Denklem (2.61)'de yerine konulur ve ϕ_E , ϕ_W ve ϕ_{WW} değerleri ϕ_P noktasına göre Taylor serisine açılır, Δx^4 ve daha büyük hata terimleri ile zaman boyutunun ayrıklaştırılmasından kaynaklanan hata terimleri ihmal edilirse aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{12}(3\kappa - 1)u\Delta x^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \frac{1}{8}(\kappa - 1)u\Delta x^3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \quad (2.67)$$

Denklem (2.67) çözümü aranan orijinal Denklem (2.60)'dan farklıdır. Kesme hatalarına bakılarak κ -scheme için yeniden düzenlenmiş bu denklemin en az ikinci mertebeden, $\kappa = 1/3$ olması halinde ise üçüncü mertebeden kesme hatası içerdiği görülebilir. Konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan yaklaşımların hata mertebesi, yaklaşımların birçok özelliklerinin bir arada karşılaştırıldığı Bölüm 2.3.5'te verilen Tablo 2.3'te bir arada gösterilmiştir.

2.3.2. Tutarlılık (consistency) özelliği

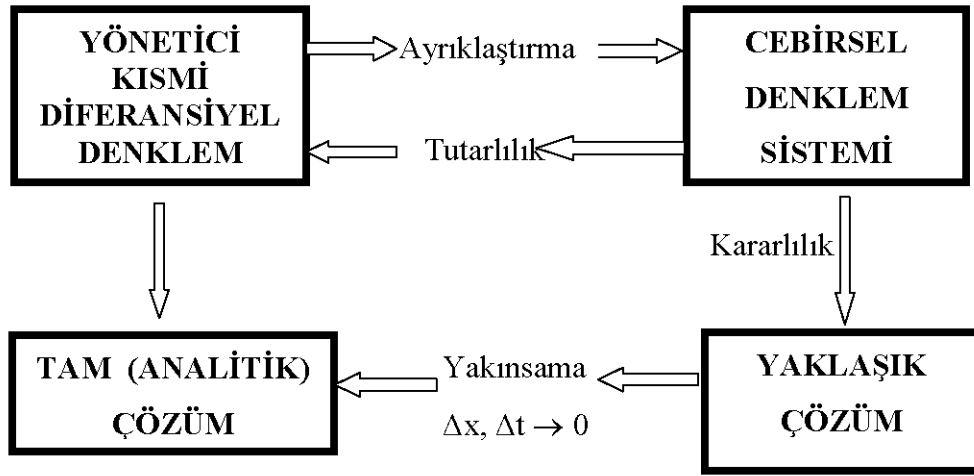
Ayrıklaştırılmış denklem ile tam çözüm arasındaki farka “kesme hatası (truncation error)” denir. Ağ noktaları arasındaki mesafeler azaldıkça, ayrıklaştırılmış denklem analitik çözüme yaklaşır. Bir yaklaşımın tutarlı olabilmesi için, $\Delta x \rightarrow 0$ ve/veya $\Delta t \rightarrow 0$ olduğunda kesme hatası sıfır olmalıdır. Hata mertebesi genellikle ağ noktaları arasındaki mesafe Δx 'nin ve/veya zaman adımı Δt 'nin hata mertebesi ile orantılıdır. Eğer en önemli terim $(\Delta x)^n$ ve $(\Delta t)^n$ ile orantılı olarak değişiyorsa, bu yöntem n. mertebeden yaklaşım denir ve bir yöntemin tutarlı olabilmesi için $n > 0$ olmalıdır. İdeal olarak, tüm terimler aynı hata mertebesi ile ayrıklaştırılmalıdır, ancak bazı akışlarda daha önemli olan terimler (örneğin, yüksek Re sayılı akışlarda konveksiyon terimleri veya düşük Re sayılı akışlarda difüzyon terimleri) diğerlerinden daha yüksek hata mertebesi ile ayrıklaştırılabilir [91]. Tutarlılık özelliğine sahip olmayan bir yaklaşımda, ağın sıklaştırılması ile çözümün iyileştirilmesi kesin olmayacağından, yaklaşımların bu özelliğe sahip olması çok önemlidir.

2.3.3. Kararlılık (stability) özelliği

Sayısal çözüm sırasında eğer hatalar artmıyorsa bu sayısal yaklaşım kararlıdır. Zamana bağlı problemlerde kararlılık, analitik çözüm sınırlandırılmış (bounded) ise sayısal çözümün de sınırlandırılmış (bounded) olmasını sağlar. İteratif çözümlerde ise çözümün yakınsamasını sağlar [91]. Bölüm 4'te anlatılan TVD yöntemlerinin esası yaklaşımların monotonik ve kararlı olmasına dayandığından yüksek çözünürlüklü yaklaşımların geliştirilmesinde bu özellik çok önemlidir [1].

Kararlılık özelliğinin incelenmesi sınır şartlarının dikkate alındığı veya non-lineerliklerin bulunduğu durumlarda çok zor olabilir. Bu nedenle, yöntemlerin kararlı olup olmadığı genellikle sınır şartları dikkate alınmaksızın sabit katsayılı lineer problemler göz önüne alınarak incelenir [91]. Matris denklemleri ile çözülen iteratif tekniklerin yakınsaması genellikle hızlandırılmak istenir. Fakat bu, bazı durumlarda ancak matris katsayıları köşegensel ağırlıklı (diagonally dominant) ise yapılabilir. Köşegensel ağırlıklı (diagonally dominant) olmayan yaklaşımların çözümde

dalgalanmalara (osilasyonlara) sebep olmasından dolayı, bazen ayırıklaştırma yönteminin bu özelliğe sahip olması öncelikli hedef olur. Patankar [11] pozitif katsayıların bu özelliği garantilediğini belirtmiştir. FOU yönteminin en büyük avantajlarından birisi bu özelliğe sahip olmasıdır. Ayrıca, hata mertebesi yüksek olan yaklaşımların FOU tabanlı yazılıp, ek terimlerin kaynak terim içine atılma nedeni bu özelliği yakalamaktır [1]. Tutarlılık, kararlılık ve yakınsama arasındaki kavramsal ilişkinin sembolik gösterimi Şekil 2.5’te gösterilmiştir [93].



Şekil 2.5: Tutarlılık, kararlılık ve yakınsama arasındaki kavramsal ilişki [93]

2.3.4. Taşınımsallık (transportiveness) ve konvektif kararlılık (convective stability) özellikleri

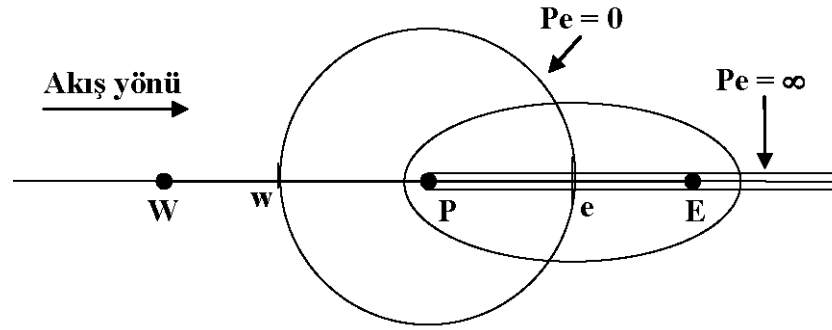
Bir akışın taşınımsallık özelliğini (transportiveness) göstermek için Şekil 2.6’da gösterildiği gibi P noktasında sabit bir ϕ kaynağı olduğu kabul edilsin ve iki uç durum ele alınsın:

- Pür difüzyon ($Pe = 0$)
- Pür konveksiyon ($Pe \rightarrow \infty$)

Pür difüzyonun ($Pe=0$) yani akışkanın durgun olduğu durumda ϕ her yöne eşit yayılarak daire şeklinde bir dağılım meydana getirecektir. Pe sayısı arttıkça, ϕ ’nin dağılımı dairesellikten eliptik bir şekle dönüşecek, P noktasının E noktasına göre etkisi daha fazla olacaktır. $Pe \rightarrow \infty$ olduğunda ise E noktasının “e” üzerinde hiçbir

etkisi olmayacak, P noktasından yayılan ϕ , anında “e” noktasına taşınacaktır. Bu durumda difüzyon olmadığı için $\phi_e = \phi_P$ olacaktır.

Konveksiyon teriminin ayrıklaştırılmasında taşınımsallık (transportiveness) özelliği, dolayısıyla Pe sayısı ve akışın yönü mutlaka dikkate alınmalıdır. CDS yaklaşımının güçlü konvektif akışlarda başarısız olmasının fiziksel sebebi akış yönünü dikkate almaması, dolayısıyla taşınımsallık özelliğine sahip olmamasıdır.



Şekil 2.6: Farklı Peclet sayılarında bir kaynak terim etrafında ϕ 'nin dağılımı [43].

Tao ve Sparrow [96], taşınamsallık özelliğine sahip bir yaklaşımda akışta oluşacak herhangi bir etkinin, sadece akış yönü boyunca taşınacağını belirtir. Ayrıca, bu özelliğe sahip bir yaklaşımda konvektif kararsızlığın görülmeyeceğini ve taşınamsallık özelliğinin konvektif kararsızlık için yeter şart olduğunu, gerek şart olmadığını belirtir.

Leonard [9, 22] konvektif kararlılığı, kontrol hücrelerine giren konveksiyon akısının (C_{IF}) kontrol hücreleri merkezine göre değişimi olarak tanımlar. Bu durumda üç olasılık mevcuttur:

$$\Sigma_C = \frac{\partial C_{IF}}{\partial \phi_P} < 0 \quad \text{Kararlı duyarlılık} \quad (2.68)$$

$$\Sigma_C = \frac{\partial C_{IF}}{\partial \phi_P} = 0 \quad \text{Nötr duyarlılık} \quad (2.69)$$

$$\Sigma_C = \frac{\partial C_{IF}}{\partial \phi_P} > 0 \quad \text{Kararlı olmayan duyarlılık} \quad (2.70)$$

Konvektif kararlılığı sağlamak için, bir sayısal geri besleme mekanizmasına sahip olmak önemlidir. Örneğin P noktasına dışarıdan herhangi bir etki, konvektif akıyı da etkileyecek ve ϕ_P sayısal yaklaşım ile uyumlu olacak bir değere yakınsayacaktır. Fiziksel açıdan bakılırsa, konveksiyon akış özelliklerinin upwind (akışüstü) tarafından downwind (akışaltı) tarafına doğru taşınması ile ilgilidir ve konveksiyon terimlerinin ayrıştırılmasında kullanılan sayısal yaklaşımlar bu özelliği yansıtmalıdır. Bu nedenle, sayısal yaklaşımın upwind (akışüstü) eğilimli olması gerekmektedir. Ayrıca, sayısal açıdan bakıldığında upwind (akışüstü) eğilimli olmayan herhangi bir ayrıştırmada, matris katsayıları sayısal olarak kararlı olmadığı için konvektif kararlılık sorunu görülecektir [24].

Difüzyon terimleri ikinci mertebeden merkezi farklar yaklaşımı ile ayrıştırıldığında, difüzyon kararlılık her zaman negatiftir. Kontrol hacmine giren difüzyon akının hücre merkezine göre değişimi her zaman negatif (fiziksel olarak her zaman $\Gamma > 0$) olduğundan, Σ_D terimi kararlılığı sağlar.

$$\Sigma_D = \frac{\partial C_{IF}}{\partial \phi_P} = -\frac{2\Gamma}{\Delta x^2} < 0 \quad (2.71)$$

Bu bazen konvektif kararlılık eksikliğini dengelemek için yeterli olsa da, yerel Peclet sayısı yüksek olan güçlü konvektif akışlarda yetersiz olabilir [9]. İkinci mertebeden olan diğer yaklaşımlar geri besleme hassasiyeti olarak ya nötrdür ya da pozitifdir. Her iki durum da istenmez. Difüzyon terimlerinin ayrıştırılmasında birçok yaklaşım kullanılmasına rağmen ikinci mertebeden merkezi farklar yaklaşımının tercih edilmesinin sebebi budur [22]. Konveksiyon teriminin merkezi farklar yaklaşımı ile ayrıştırılması halinde konvektif duyarlılık:

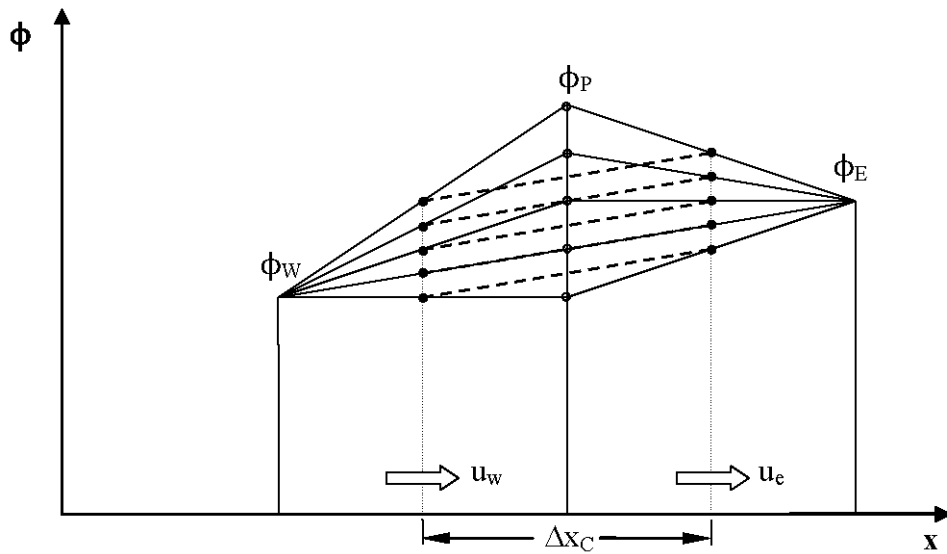
$$\Sigma_C = \frac{\partial C_{IF}}{\partial \phi_P} = -\frac{u_w - u_e}{2\Delta x} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.72)$$

olur. Görüldüğü gibi konvektif duyarlılık yerel hız gradyanlarına bağlıdır. Hızların sabit olması halinde ise;

$$\Sigma_C = \frac{\partial C_{IF}}{\partial \phi_P} = 0 \quad (2.73)$$

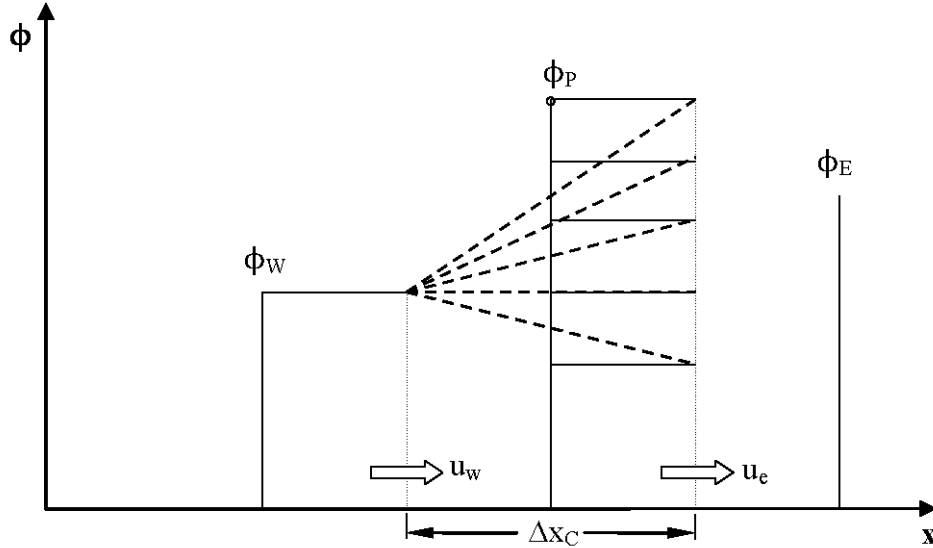
Bu durumda geri besleme duyarlılığı nötrdür. Tek mertebeden türevler merkezi farklar yaklaşımı ile ayrıştırıldığında geri besleme duyarlılığı her zaman nötrdür. Konveksiyon-difüzyon denkleminde hem konveksiyon hem de difüzyon terimleri merkezi farklar yaklaşımı ile ayrıştırıldığında negatif geri besleme duyarlılığı sadece difüzyon terimine bağlıdır. Bu da konveksiyonun etkili olduğu durumlarda çözümde dalgalanmaların (osilasyonların) olmasına sebep olabilir. Konveksiyon etkisinin difüzyona olan oranını gösteren Peclet sayısı, 1 boyutlu bir akışta ikiden küçük olduğunda difüzyondan kaynaklanan negatif geri besleme duyarlılığı oluşabilecek dalgalanmaları (wiggles) bastırmak için yeteri kadar etkiliyken, daha yüksek Peclet sayılarında yani güçlü konvektif akışın olduğu durumlarda yeterli olamamakta ve çözümde ciddi dalgalanmalar (wiggles) görülebilmektedir [22].

Şekil 2.7’de sabit u hızı ve farklı ϕ_P değerleri için ϕ_w ve ϕ_e değerleri merkezi farklar yöntemi ile bulunmuştur. ϕ_w ve ϕ_e değerlerini birleştiren hatların birbirine paralel (aynı eğime sahip) olması bu yaklaşımın konvektif duyarsızlığını açıkça göstermektedir. Yani $\phi_e - \phi_w$ ’nin değeri ϕ_P ’nin değişiminden bağımsızdır.



Şekil 2.7: Merkezi farklar yönteminin konvektif duyarsızlığı [9]

Konveksiyon terimlerinin birinci mertebeden upwind yaklaşımı ile çözülmesi halinde ulaşılan kararlı konvektif duyarlılık şematik olarak Şekil 2.8’de görülmektedir. Ancak kararlılık, doğruluktan ödün verilerek nümerik difüzyon sayesinde sağlanmıştır. Diğer yaklaşımların konvektif duyarlılığa sahip olup olmadıkları Tablo 2.3’te verilmiştir.



Şekil 2.8: Birinci mertebeden upwind yönteminin kararlı konvektif duyarlılığı [9]

2.3.5. Sınırlılık (boundedness) özelliği

Sayısal çözümlerle elde edilen bazı parametrelerin fiziksel olarak bir anlamı olabilmesi için değerleri belli sınırlar içerisinde olmalıdır. Örneğin yoğunluk, türbülans kinetik enerjisi vb. büyüklükler her zaman pozitif olmalıdır. Konsantrasyon gibi değerler ise %0 ila %100 arasında olmalıdır. Kaynak terimin olmadığı ısı iletim denkleminde olduğu gibi, maksimum ve minimum sıcaklıklar sınırlarda olduğundan aradaki değerler sınır şartlarından daha büyük veya daha küçük olmamalıdır [83]. Ancak sadece birinci mertebeden yaklaşımlar sınırlılık (boundedness) özelliğini sağlar. İki veya daha yüksek hata mertebesine sahip olan yaklaşımlar sınırlılık (bounded) özelliğine sahip olmadıklarından çözümde fiziksel olmayan sonuçlar görülebilir. Bu sorunlar genellikle ağın çok seyrek olduğu yerlerde görülür. Dolayısıyla, çözümde dalgalanmaların olduğu yerler, hataların büyük olduğu dolayısıyla ağın inceltilmesi gerektiği konusunda bir işaret verir. Ayrıca sınırlılık

(boundedness) özelliği olmayan yaklaşımlarda çözümde kararsızlık ve ıraksama gibi sorunlar görülebilir [91].

Gaskell ve Lau [24], interpolatif (interpolative) ve hesaplanmış (computed) olmak üzere iki farklı sınırlılık özelliğini tanımlar. Buna göre, hesaplanmış sınırlılık özelliğine sahip herhangi bir yaklaşım ile elde edilen sonuçlarda, çözümde overshoot (sınırustü) veya undershoot (sınıraltı) görülmez. İnterpolatif sınırlılık özelliği ise, herhangi bir yaklaşım ile ara yüz değeri hesaplanırken, bu değer komşu düğüm noktalarından daha büyük veya küçük olmaması demektir. Yani, komşu düğüm noktaları haricindeki diğer düğüm noktaları kullanılamaz. Bu özelliği sadece FOU ve CDS yaklaşımları sağlamaktadır. Bir yaklaşımın hesaplanmış sınırlı sonuçlar verebilmesi için, interpolatif sınırlılık özelliği gerek şartlardan birisidir, yeter şart değildir. Bu durum güçlü konvektif akışlarda CDS yaklaşımı ile elde edilen sonuçlarda görülebilir.

Eğer matris katsayıları köşegensel ağırlıklı (diagonally dominant) ise sayısal çözüm sınırlandırılmış (bounded) olmak zorundadır. Bu koşul sağlanıyorsa, istenilen bir noktadaki değişkenin değeri sadece komşu noktaların ağırlıklı bir ortalaması olur. Ayrıca, bu durumda yaklaşım sayısal olarak da kararlıdır [24]. Köşegensel ağırlık (diagonally dominant) özelliği bir ayrıklaştırma yaklaşımının değerlendirilmesinde önemli olmasına rağmen, tek başına problemin fiziği hakkında çok fazla bilgi vermez. Örneğin, hücrel Pe sayısı kritik bir değeri aştığı zaman, matris artık köşegensel ağırlıklı (diagonally dominant) olmadığı için çözümde dalgalanmaların (osilasyonların) olabileceği belirtilir. Ancak, hücrel Pe sayısı dalgalanmaların asıl sebebi değildir ve sadece konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan yaklaşımdan kaynaklan dalgalanmaların artmasında veya azalmasında etkisi görülür [24]. Örneğin bazı çalışmada CDS yaklaşımı ile yapılan çözümlerde yerel Pe sayısı kritik Peclet sayısından (bir boyutlu akışta $Pe_{kr}=2$) çok daha büyük ($Pe=180$) olmasına rağmen dalgalanmaların (osilasyonların) görülmediği belirtilmiştir [7, 26] .

Sınırlılık (bounded) özelliğine sahip olması için gerekli başka bir özellik ise ayrıklaştırılmış denklemdaki tüm katsayıların pozitif olmasıdır. Fiziksel olarak bu, herhangi bir ağ noktasında bulunan bir değişkendeki artış komşu noktalardaki

değişkenin artışına sebep olmalıdır şeklinde açıklanabilir [83]. Yüksek çözünürlüklü yaklaşımların sınırlılık özellikli (boundedness) olması için bazı kriterler önerilmiştir. Bu kriterler Bölüm 4'te anlatılmıştır.

Bu bölümde anlatılan konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan yaklaşımların kesme hatası, konvektif kararlılık, sınırlılık özelliği ve bir boyutlu akışta kararlı olduğu kritik Peclet sayısı gibi özellikleri Tablo 2.3'te verilmiştir.

Tablo 2.3: Sık kullanılan yaklaşımların bazı özellikleri [24].

	Kesme hatası	Konvektif kararlılık	Sınırlılık (boundedness) özelliği		Pe _{kritik}
			Hesaplanmış (computed)	Interpolatif	
FOU	$\frac{u\Delta x}{2}\phi_f'$	$-\frac{u}{\Delta x}$ kararlı	Var	Var	∞
CDS	$\frac{u\Delta x^2}{4}\phi_f''$	0 nötr	Yok	Var	2
SOU	$-\frac{3u\Delta x^2}{8}\phi_f''$	$-\frac{3u}{2\Delta x}$ kararlı	Yok	Yok	∞
Fromm	$-\frac{u\Delta x^2}{8}\phi_f''$	$-\frac{3u}{4\Delta x}$ kararlı	Yok	Yok	4
QUICK	$-\frac{u\Delta x^3}{16}\phi_f'''$	$-\frac{3u}{8\Delta x}$ kararlı	Yok	Yok	8/3

2.4. Basınç Düzeltme Algoritmaları

Denklem (2.1)'de verilen genel transport denklemi iki boyutlu zamandan bağımsız bir akış için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

u momentum denklemi;

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_u \quad (2.74)$$

v momentum denklemi;

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} + S_v \quad (2.75)$$

Süreklilik denklemi;

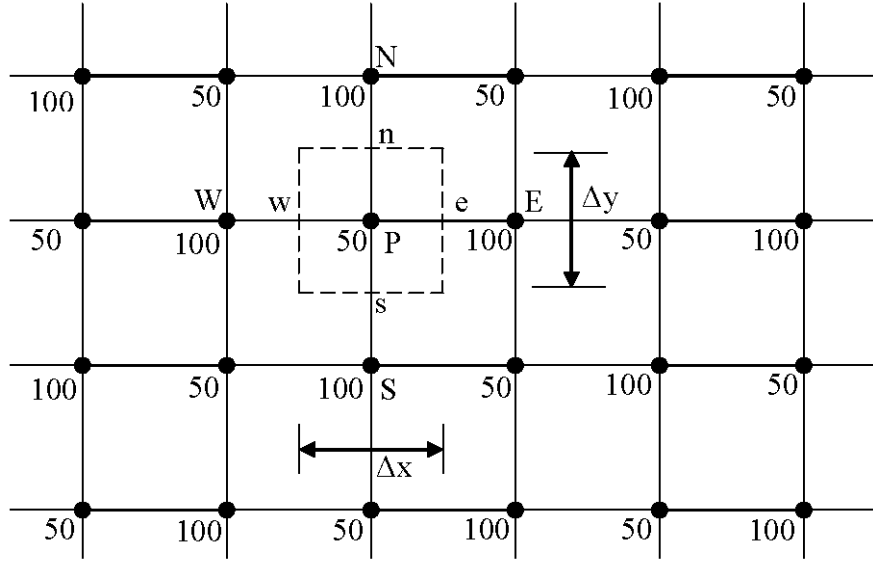
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.76)$$

Yukarıdaki denklemlerin çözümünde iki temel problemle karşılaşılır;

- Momentum denklemlerindeki konvektif terimler lineer değildir.
- Yukarıdaki denklemlerde hız bileşenleri her iki momentum denkleminde ve süreklilik denkleminde gözükmektedir, basınç sadece momentum denkleminde vardır ve basınç için ayrıca bir hareket denklemi veya başka bir denklem yoktur.

Bu sebeplerden dolayı, momentum denklemlerinin çözümündeki en büyük sorun basınç terimlerindedir. Genellikle akış hesaplarında çözümün bir parçası olarak basınçların da hesaplanması gerekir. Eğer akış sıkıştırılabilir ise süreklilik denklemi yoğunluk için ve yukarıdaki denklemlere ek olarak enerji denklemi de sıcaklık için transport denklemi olarak yazılabilir. Bu durumda basınç; sıcaklık ve yoğunluk ilişkisinden bulunabilir. Ancak akış sıkıştırılamaz ise yoğunluk sabit olmakta ve basınçla herhangi bir ilişkisi olmamaktadır. Bu durum ise denklemlerin çözümünü zorlaştırır.

Momentum denklemlerinin çözümünde, oluşturulan ağda öncelikle hızların nerede bulunacağına karar verilmesi gerekir. Hızların basınç, sıcaklık gibi diğer değişkenlerle aynı noktada bulunması mantıklı gözükmesine rağmen, bu durumda üniform olmayan basınç, ayrıklaştırılmış momentum denkleminde üniformmuş gibi gözükmesine sebep olabilir. Bu sorun, Şekil 2.9'da görülen iki boyutlu basit bir örnek ile daha açık bir şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.9: Checker-board basınç alanı

Şekil 2.9'da gösterilen ağda, basınç değerlerinin herhangi bir şekilde elde edildiği kabul edilsin. Buna göre u momentum denkleminde basınç terimi lineer enterpolasyon ile ayrıştırıldığında,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_e - P_w}{\delta x} = \frac{\frac{(P_E + P_P)}{2} - \frac{(P_P + P_W)}{2}}{\Delta x} = \frac{P_E - P_W}{2\Delta x} \quad (2.77)$$

ve benzer şekilde v momentum denklemi için

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_N - P_S}{2\Delta y} \quad (2.78)$$

ifadeleri elde edilir. P noktasındaki basınç, yukarıdaki her iki denklemde de gözükmez. Bu durumda, basınç gradyenlerinin sıfır olduğu görülür. Sonuç olarak fiziksel bir anlamı olmamasına rağmen ayrıştırılmış momentum denkleminde basınç terimleri üniform olarak gözükabilir. Basınçlar arasındaki bağlantı sorunu süreklilik denkleminin ayrıştırılmasında da görülür. Zamandan bağımsız bir boyutlu, sabit yoğunluklu bir akış için süreklilik denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad (2.79)$$

Bu ifadenin Şekil 2.1’de gösterilen kontrol hacmi üzerinde integrasyonu sonucu

$$\frac{u_P + u_E}{2} - \frac{u_W + u_P}{2} = u_E - u_W = 0 \quad (2.80)$$

ifadeleri elde edilir. Görüldüğü gibi süreklilik denkleminde yer alan hızlar kontrol hacminin ara yüzlerinde değil, düğüm noktalarındaki hızlardır. Bu durumda süreklilik denklemi sağlanmasına rağmen, fiziksel olarak mümkün olmayan sonuçlar elde edilebilir [83]. Aşağıdaki öncelikle bu sorunu çözmek için geliştirilen ağ sistemi anlatılmıştır.

2.4.1. Kaydırılmış değişkenli ağ sistemi (Staggered grid)

İlk defa Harlow ve Welch (1965) tarafından kullanılan bu yöntem, HAD’da çok yaygın olarak kullanılır [83]. Şekil 2.10’da iki boyutlu kaydırılmış değişkenli bir ağ sisteminde değişkenlerin yerleştirildiği hücreler ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi basınçlar (•) şeklinde gösterilen kontrol hacminin merkezine, hızlar ise kontrol hacminin ara yüzlerine yerleştirilmiş ve oklarla gösterilmiştir. Yatay oklar ($\rightarrow$) u hızlarını, dikey oklar ($\uparrow$) ise v hızlarını göstermektedir. Skaler hücrelerde u hızları, hücre ara yüzlerinin doğusuna (e) ve batısına (w), v hızı ise kuzeyine (n) ve güneyine (s) yerleştirilmiştir. Tüm işlemler skaler hücrede yapıldığı için, bu hücrelere “Basınç Kontrol Hücreleri” de denir. u ve v hücreleri ise skaler hücreden ve birbirlerinden farklıdır [83].

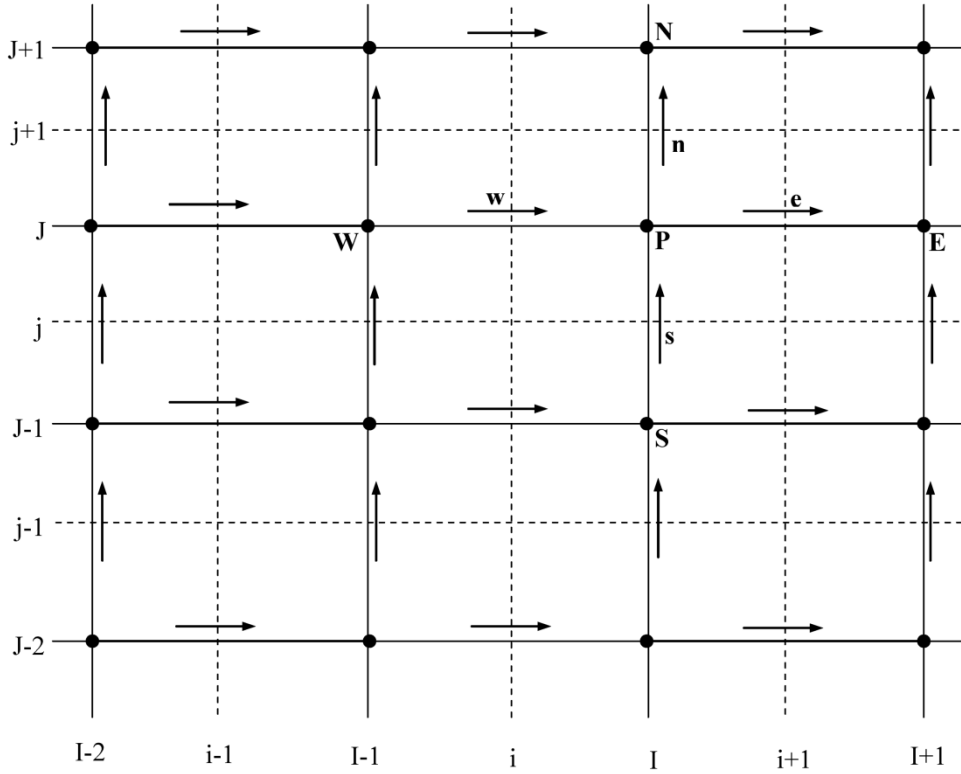
Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde, basınçlar u kontrol hücrelerinin ara yüzlerinde bulunmaktadır. Basınç gradyeni aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_P - P_W}{\Delta x_U} \quad (2.81)$$

Burada Δx_u , u-kontrol hücresinin genişliğini göstermektedir. Benzer şekilde basınç gradyeni v-kontrol hücresi için,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_P - P_S}{\Delta y_U} \quad (2.82)$$

yazılabilir. Burada δy_v ise v-kontrol hücresinin genişliğini göstermektedir.



Şekil 2.10: Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde kontrol hücrelerinin yerleşimi

Yukarıda anlatılan checker-board probleminde Denklem (2.81) ve Denklem (2.82) kullanıldığında, fiziksel anlamı olmayan sonuçların engellendiği ve sıfır olmayan basınç terimlerinin elde edildiği görülebilir. Bu ağ yapısının bir diğer avantajı, skaler kontrol hacmi sınırlarında ihtiyaç duyulan kütsel akıların enterpolasyona gerek duyulmadan, doğrudan o noktalarda bulunan hızlardan hesaplanmasını mümkün kılmasıdır. Aşağıda kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde momentum denkleminin ayrıklaştırılması anlatılmıştır.

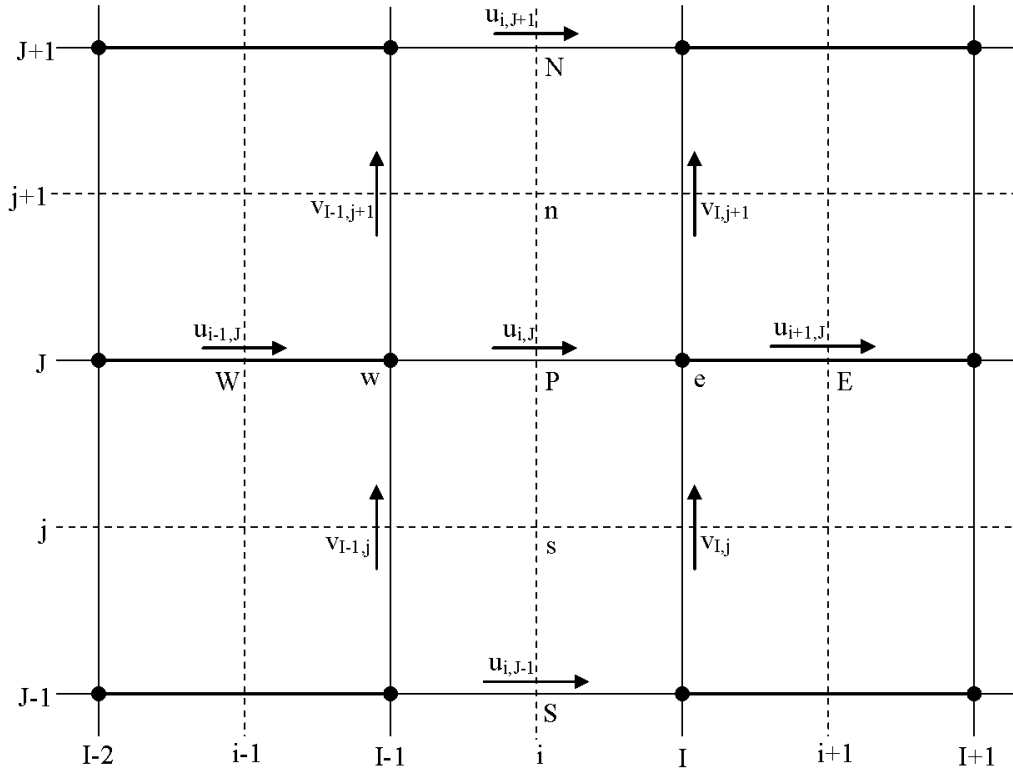
Şekil 2.10'a göre ayrıklaştırılmış momentum denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$a_{i,j} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} - \frac{P_{I,J} - P_{I-1,J}}{\Delta x_u} \Delta V_u + \bar{S} \Delta V_u \quad (2.83)$$

veya

$$a_{i,j} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_{I-1,J} - P_{I,J}) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (2.84)$$

Yukarıdaki denklemde ΔV_u ; u hücresinin hacmini, $b_{i,j} = S \Delta V_u$; momentum kaynak terimini ve $A_{i,j}$; u kontrol hacminin doğu (e) veya batı (w) hücresinin alanını göstermektedir. $\sum a_{nb} u_{nb}$ ifadesi komşu terimleri [(i-1,J), (i+1,J), (i,J+1), (i,J-1)] içermektedir. Bunların konumları Şekil 2.11’de ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. $a_{i,j}$ ve a_{nb} terimlerinin katsayıları FOU, SOU vb. bir yaklaşım ile hesaplanabilir. Katsayılar u kontrol hacmi yüzeylerinde kütleli debi (F) ve difüzyon (D) ifadelerini içerir. Aşağıda u kontrol hacminin e, w, n ve s yüzeyleri için F ve D değerleri verilmiştir.



Şekil 2.11: Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde u kontrol hacmi üzerinde hızların gösterimi

$$\begin{aligned}
F_w = (\rho u)_w &= \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\rho_{I-1,j} + \rho_{I-2,j}}{2} \right) u_{i-1,j} \right]
\end{aligned} \tag{2.85a}$$

$$\begin{aligned}
F_e = (\rho u)_e &= \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I+1,j} + \rho_{I,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I-1,j}}{2} \right) u_{i,j} \right]
\end{aligned} \tag{2.85b}$$

$$\begin{aligned}
F_s = (\rho v)_s &= \frac{F_{I,j} + F_{I-1,j}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I,j-1}}{2} \right) v_{I,j} + \left(\frac{\rho_{I-1,j} + \rho_{I-1,j-1}}{2} \right) v_{I-1,j} \right]
\end{aligned} \tag{2.85c}$$

$$\begin{aligned}
F_n = (\rho v)_n &= \frac{F_{I,j+1} + F_{I-1,j+1}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j+1} + \rho_{I,j}}{2} \right) v_{I,j+1} + \left(\frac{\rho_{I-1,j+1} + \rho_{I-1,j}}{2} \right) v_{I-1,j+1} \right]
\end{aligned} \tag{2.85d}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{I-1,j}}{x_i - x_{i-1}} \tag{2.85e}$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{I,j}}{x_{i+1} - x_i} \tag{2.85f}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{I-1,j} + \Gamma_{I,j} + \Gamma_{I-1,j-1} + \Gamma_{I,j-1}}{4(y_j - y_{j-1})} \tag{2.85g}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{I-1,j+1} + \Gamma_{I,j+1} + \Gamma_{I-1,j} + \Gamma_{I,j}}{4(y_{j+1} - y_j)} \tag{2.85h}$$

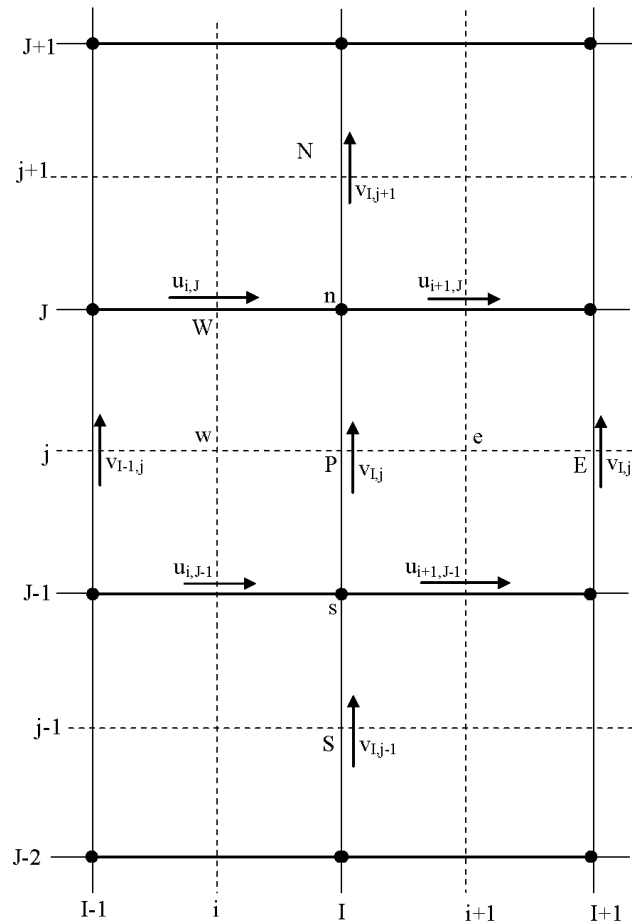
Bu eşitliklerde görüldüğü gibi, skaler değişkenler veya hızlar hesaplanılırken u kontrol hücresi üzerindeki değerler kullanılır. Hesaplanmak istenen değer, en yakınında değerleri bilinen iki veya dört düğüm noktası kullanılarak hesaplanır.

Yukarıdaki ifadeler hesaplanırken bir önceki iterasyonda elde edilen u ve v hızları, birinci iterasyonda ise başlangıç değerleri kullanılır.

Benzer ifadeler v momentum denklemi için de yazılabilir:

$$a_{I,j} v_{I,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (P_{I,J-1} - P_{I,J}) A_{I,j} + b_{I,j} \quad (2.86)$$

Denklem (2.86)'daki $\sum a_{nb} v_{nb}$ ifadesi komşu terimleri içermekte olup Şekil 2.12'de ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. $a_{I,j}$ ve a_{nb} katsayıları kütleli akış debisini (F) ve difüzyon (D) katsayısını içerir. Bu değerler, u momentum denklemine benzer bir şekilde elde edilir.



Şekil 2.12: Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde v-kontrol hacmi üzerinde hızların gösterimi

$$\begin{aligned}
F_w = (\rho u)_w &= \frac{F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\rho_{i,j-1} + \rho_{i,j-2}}{2} \right) u_{i,j-1} \right]
\end{aligned} \tag{2.87a}$$

$$\begin{aligned}
F_e = (\rho u)_e &= \frac{F_{i+1,j} + F_{i+1,j-1}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(\frac{\rho_{i,j-1} + \rho_{i+1,j-1}}{2} \right) u_{i+1,j-1} \right]
\end{aligned} \tag{2.87b}$$

$$\begin{aligned}
F_s = (\rho v)_s &= \frac{F_{i,j-1} + F_{i,j}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j-1} + \rho_{i,j-2}}{2} \right) v_{i,j-1} + \left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} \right]
\end{aligned} \tag{2.87c}$$

$$\begin{aligned}
F_n = (\rho v)_n &= \frac{F_{i,j-1} + F_{i,j}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} + \left(\frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j}}{2} \right) v_{i,j+1} \right]
\end{aligned} \tag{2.87d}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{i-1,j-1} + \Gamma_{i,j-1} + \Gamma_{i-1,j} + \Gamma_{i,j}}{4(x_i - x_{i-1})} \tag{2.87e}$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{i,j-1} + \Gamma_{i+1,j-1} + \Gamma_{i,j} + \Gamma_{i+1,j}}{4(x_{i+1} - x_i)} \tag{2.87f}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}} \tag{2.87g}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} \tag{2.87h}$$

Her iterasyonda F değerleri bir önceki iterasyonda hesaplanan u ve v hızları kullanılarak hesaplanır. Verilen bir basınç alanı için Denklem (2.84) ve Denklem (2.86)'daki ayrıklaştırılan momentum denklemleri, her bir u ve v kontrol hacmi için yazılabilir. Bu şekilde her bir kontrol hacmi için hızlar çözölür. Elde edilen hızlar

süreklilik denklemini sağlıyorsa, basınç değerleri doğrudur. Eğer basınçlar bilinmiyorsa, basınç değerlerini hesaplamak için ayrıca bir yönteme ihtiyaç duyulur. Bu ağ sisteminin dezavantajı ise fiziksel yapıdan daha çok algoritmik yapıya sahip olmasıdır. Farklı kontrol hacimlerinin kullanılması değişkenlerin zahmetli bir şekilde indislendirilmesini gerektirmektedir. Özellikle sınırlara yakın bölgelerde eksik düğüm noktalarından ve farklı kontrol hacim sınırlarından dolayı karışık algoritmalar kullanmak gerekir. Bu durum bilgisayar programının geliştirilmesinde hataya müsait bir durum oluşturmaktadır.

2.4.2. SIMPLE algoritması

SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) algoritması, Patankar ve Spalding [11] tarafından geliştirilmiştir. Bu bölümde, SIMPLE algoritması zamandan bağımsız (kararlı) iki boyutlu bir akış için kartezyen koordinatlar kullanılarak anlatılmıştır. SIMPLE algoritmasında çözüme tahmini bir basınç değeri, p^* ile başlanır. Ayrıklaştırılmış momentum denklemi öncelikle tahmini değerler ile çözülür.

$$a_{i,j} u_{i,j}^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_{I-1,j}^* - P_{I,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (2.88)$$

$$a_{i,j} v_{i,j}^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_{I,j-1}^* - P_{I,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (2.89)$$

Yukarıdaki denklemlerde üst indis * işareti (p^* , u^* , v^*) ilk tahmini değerleri göstermektedir. Gerçek basınç değeri, p ile tahmini basınç değeri, p^* arasındaki fark p' ile gösterilmektedir.

$$p = p^* + p' \quad (2.90)$$

Benzer şekilde gerçek hız değerleri u ve v ile tahmini hız değerleri u^* ve v^* arasındaki fark sırasıyla u' ve v' ile gösterilebilir.

$$u = u^* + u' \quad (2.91)$$

$$v = v^* + v' \quad (2.92)$$

Denklem (2.84)'ten Denklem (2.88) ve Denklem (2.86)'dan Denklem (2.89) çıkartılırsa sırasıyla aşağıdaki momentum denklemleri elde edilir:

$$a_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{nb}(u_{nb} - u_{nb}^*) + [(P_{l-1,j} - P_{l-1,j}^*) - (P_{l,j} - P_{l,j}^*)]A_{i,j} \quad (2.93)$$

$$a_{l,j}(v_{l,j} - v_{l,j}^*) = \sum a_{nb}(v_{nb} - v_{nb}^*) + [(P_{l,j-1} - P_{l,j-1}^*) - (P_{l,j} - P_{l,j}^*)]A_{l,j} \quad (2.94)$$

Yukarıda elde edilen Denklem (2.84) – Denklem (2.92), Denklem (2.93) ve Denklem (2.94) kullanılarak düzenlenebilir:

$$a_{i,j} u'_{i,j} = \sum a_{nb} u'_{nb} + (P'_{l-1,j} - P'_{l,j})A_{i,j} \quad (2.95)$$

$$a_{l,j} v'_{l,j} = \sum a_{nb} v'_{nb} + (P'_{l,j-1} - P'_{l,j})A_{l,j} \quad (2.96)$$

Bu denklemlerdeki bazı terimlerin ihmal edilmesi veya küçük değişiklikler yapılması sonucu farklı algoritmalar ortaya çıkar. SIMPLE yönteminde Denklem (2.95)'te $\sum a_{nb} u_{nb}$, Denklem (2.96)'da ise $\sum a_{nb} v_{nb}$ terimleri ihmal edilir. Bu kabul yapılarak denklemler tekrar düzenlenebilir:

$$u'_{i,j} = d_{i,j}(P'_{l-1,j} - P'_{l,j}) \quad (2.97)$$

$$v'_{l,j} = d_{l,j}(P'_{l,j-1} - P'_{l,j}) \quad (2.98)$$

Yukarıdaki denklemlerde $d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}}$ ve $d_{l,j} = \frac{A_{l,j}}{a_{l,j}}$ 'dır. Denklem (2.97) ve

Denklem (2.98), Denklem (2.91) ve Denklem (2.92)'da yerine yazılırsa:

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* + d_{i,j}(P'_{i-1,j} - P'_{i,j}) \quad (2.99)$$

$$v_{i,j} = v_{i,j}^* + d_{i,j}(P'_{i,j-1} - P'_{i,j}) \quad (2.100)$$

Benzer ifadeler $u_{i+1,j}$ ve $v_{i,j+1}$ içinde yazılabilir.

$$u_{i+1,j} = u_{i+1,j}^* + d_{i+1,j}(P'_{i,j} - P'_{i+1,j}) \quad (2.101)$$

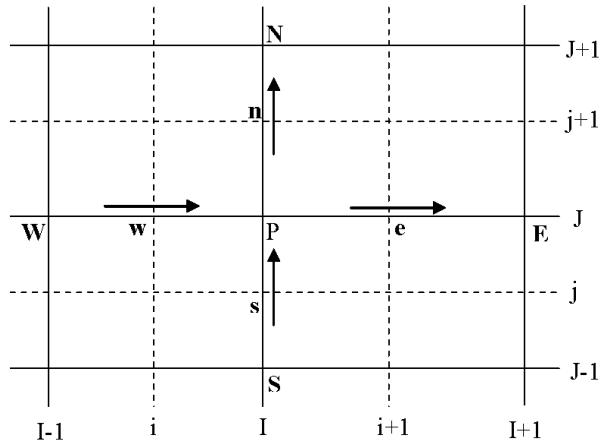
$$v_{i,j+1} = v_{i,j+1}^* + d_{i,j+1}(P'_{i,j} - P'_{i,j+1}) \quad (2.102)$$

Yukarıdaki denklemlerde $d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j}}{a_{i+1,j}}$ ve $d_{i,j+1} = \frac{A_{i,j+1}}{a_{i,j+1}}$ 'dır. Bu bölüme kadar

hep momentum denklemi incelendi. Ancak aynı zamanda hızların süreklilik denklemini de sağlaması gerekir. Şekil 2.13'de görülen skaler hücre için süreklilik denklemini ayrıklaştırılırsa Denklem (2.103) elde edilir.

$$[(\rho u A)_{i+1,j} - (\rho u A)_{i,j}] + [(\rho v A)_{i,j+1} - (\rho v A)_{i,j}] = 0 \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} & \left[\rho_{i+1,j} A_{i+1,j} (u_{i+1,j}^* + d_{i+1,j}(P'_{i,j} - P'_{i+1,j})) \right. \\ & \quad \left. - \rho_{i,j} A_{i,j} (u_{i,j}^* + d_{i,j}(P'_{i-1,j} - P'_{i,j})) \right] \\ & + \left[\rho_{i,j+1} A_{i,j+1} (v_{i,j+1}^* + d_{i,j+1}(P'_{i,j} - P'_{i,j+1})) \right. \\ & \quad \left. - \rho_{i,j} A_{i,j} (v_{i,j}^* + d_{i,j}(P'_{i,j-1} - P'_{i,j})) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$



Şekil 2.13: Süreklilik denkleminin ayrıklaştırıldığı skaler kontrol hacmi

Denklem (2.104) düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$a'_{IJ}P'_{IJ} = a_{I+1J}P'_{I+1J} + a_{I-1J}P'_{I-1J} + a_{IJ+1}P'_{IJ+1} + a_{IJ-1}P'_{IJ-1} + b'_{IJ} \quad (2.105a)$$

$$a_{IJ} = a_{I+1J} + a_{I-1J} + a_{IJ+1} + a_{IJ-1} \quad (2.105b)$$

$$a_{I+1J} = (\rho dA)_{i+1,J} \quad (2.105c)$$

$$a_{I-1J} = (\rho dA)_{i,J} \quad (2.105d)$$

$$a_{IJ+1} = (\rho dA)_{I,j+1} \quad (2.105e)$$

$$a_{IJ-1} = (\rho dA)_{I,j} \quad (2.105f)$$

$$b'_{IJ} = (\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1} \quad (2.105g)$$

Denklem (2.105)'te verilen ayrıklaştırılmış süreklilik denklemi, basınç düzeltme denklemi olarak kullanılır. Denklemdeki kaynak terim b' , tahmini hız değerlerinden (u^*, v^*) kaynaklanan süreklilik denklemindeki hata payıdır. İhmal edilen terimler $(\Sigma a_{nb} u_{nb}'$ ve $\Sigma a_{nb} v_{nb}'$) sonuçları etkilemez. Çünkü basınç ve hız düzeltmeleri çözüm yakınsadığında sıfır ($p^* = p$, $u^* = u$ ve $v^* = v$) olacaktır.

SIMPLE yönteminde yakınsamayı sağlayabilmek için, iterasyon boyunca hız ve basınç düzeltmelerinde alt relaksasyon (under-relaxation) faktörü, α kullanılır.

$$p^{yeni} = p^* + \alpha_p p' \quad (2.106)$$

$$u^{yeni} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{n-1} \quad (2.107)$$

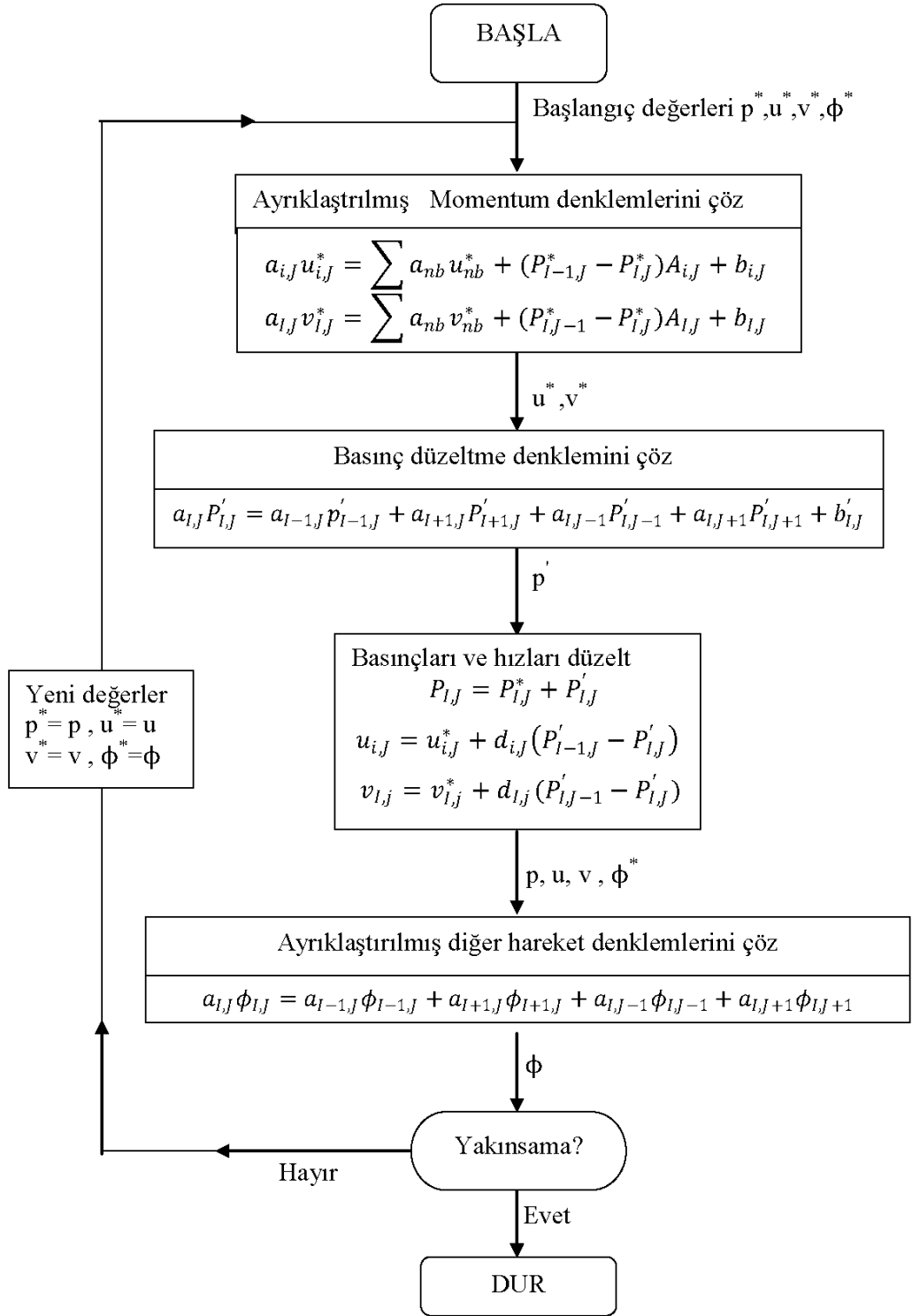
$$v^{yeni} = \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{n-1} \quad (2.108)$$

Yukarıdaki denklemlerde α_u , α_v ve α_p alt relaksasyon katsayılarıdır ve değerleri 0 ile 1 arasındadır. u^{n-1} ve v^{n-1} ise bir önceki iterasyondan bulunan hız değerleridir. Ayrıklaştırılmış momentum denklemleri alt relaksasyon katsayısı kullanılarak aşağıdaki şekillerde yazılabilir.

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_u} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_{I-1,j} - P_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j} + \left[(1 - \alpha_u) \frac{a_{i,j}}{\alpha_u} \right] u_{i,j}^{(n-1)} \quad (2.109)$$

$$\frac{a_{I,j}}{\alpha_v} v_{I,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (P_{I,j-1} - P_{I,j}) A_{I,j} + b_{I,j} + \left[(1 - \alpha_v) \frac{a_{I,j}}{\alpha_v} \right] v_{I,j}^{(n-1)} \quad (2.110)$$

SIMPLE algoritmasının akış Şekil 2.14'te gösterilmiştir. Alt relaksasyon katsayısı (α) akışa bağlı olarak seçilmelidir. Çok büyük seçilmesi halinde osilasyonlara veya çözümün ıraksamasına, küçük seçilmesi halinde ise yakınsamanın çok yavaş olmasına sebep olabilir [83].



Şekil 2.14: SIMPLE algoritmasının akış şeması [83].

2.4.3. SIMPLER algoritması

SIMPLER (SIMPLE Revised) algoritması Patankar tarafından geliştirilmiştir [11]. Genellikle basınç düzeltme denklemi hızların düzeltilmesinde kullanıldığında yeterince iyi bir sonuç elde edilirken, basınçların düzeltilmesinde çok etkili olmaz. Bu yüzden basınçlar bulunurken herhangi bir düzeltme kullanmaya gerek yokken, hızlar SIMPLE yönteminde olduğu gibi hız düzeltme denklemleri (Denklem (2.97) - (2.100)) kullanılarak bulunur. SIMPLER algoritmasında süreklilik denklemi (Denklem (2.101)) SIMPLE algoritmasındaki gibi basınç düzeltme denklemi olarak değil, basınç için ayrıklaştırılmış bir denklem elde etmek için kullanılır.

Ayrıklaştırılmış momentum denklemleri (Denklem (2.88)– (2.89)) aşağıdaki şekilde düzenlenebilir.

$$u_{i,j} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_{i,j}}{a_{i,j}} + \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} (P_{I-1,j} - P_{I,j}) \quad (2.111)$$

$$v_{I,j} = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_{I,j}}{a_{I,j}} + \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}} (P_{I,j-1} - P_{I,j}) \quad (2.112)$$

SIMPLER algoritmasında sahte hızlar aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\hat{u}_{i,j} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (2.113)$$

$$\hat{v}_{I,j} = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_{I,j}}{a_{I,j}} \quad (2.114)$$

Bu tanımlamalara göre Denklem (2.111) ve Denklem (2.112) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$u_{i,j} = \hat{u}_{i,j} + d_{i,j} (P_{I-1,j} - P_{I,j}) \quad (2.115)$$

$$v_{I,j} = \hat{v}_{I,j} + d_{I,j}(P_{I,j-1} - P_{I,j}) \quad (2.116)$$

Bu denklemler ayrıklaştırılmış süreklilik denkleminde (Denklem (2.101)) yerine yazılıp düzenlenirse aşağıdaki genel formda yazılabilir:

$$a_{I,j}P_{I,j} = a_{I+1,j}P_{I+1,j} + a_{I-1,j}P_{I-1,j} + a_{I,j+1}P_{I,j+1} + a_{I,j-1}P_{I,j-1} + b_{I,j} \quad (2.117)$$

Yukarıdaki denklemde kullanılan katsayılar, kaynak terim ($b_{I,j}$) terimi hariç SIMPLE algoritmasındaki katsayılar ile aynıdır. SIMPLER algoritmasında kaynak terim hesaplanırken aşağıda gösterildiği gibi sahte hızlar kullanılır [83].

$$b_{I,j} = (\rho \hat{u}A)_{i,j} - (\rho \hat{u}A)_{i+1,j} + (\rho \hat{v}A)_{I,j} - (\rho \hat{v}A)_{I,j+1} \quad (2.118)$$

2.4.4. SIMPLEC algoritması

SIMPLEC (SIMPLE – Consistent) algoritması Van Doormal ve Raithby [97] tarafından geliştirilmiştir. SIMPLE algoritmasından farkı, basınç düzeltme denklemlerinde ihmal edilen terimlerin farklı olmasıdır. $\sum a_{nb} u'_{nb}$ terimi Denklem (2.95)'te eklenip çıkarılır ve düzenlenirse hız düzeltme formülü şu şekilde yazılabilir.

$$(a_{i,j} - \sum a'_{nb}) u'_{i,j} = \sum a_{nb} (u'_{nb} - u'_{i,j}) + (P'_{I-1,j} - P'_{I,j})A_{i,j} \quad (2.119)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki terim ihmal edilirse;

$$u'_{i,j} = d_{i,j}(P'_{I-1,j} - P'_{I,j}) \quad (2.120)$$

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j} - \sum a_{nb}} \quad (2.121)$$

Benzer işlemler v düşey hız için yapılarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$v'_{I,j} = d_{I,j} (P'_{I,j-1} - P'_{I,j}) \quad (2.122)$$

$$d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j} - \sum a_{nb}} \quad (2.123)$$

Görüldüğü gibi SIMPLEC algoritmasının SIMPLE algoritmasından tek farkı, d terimlerinin farklı şekilde hesaplanmasıdır [83].

2.4.5. PISO algoritması

PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) algoritması aslında zamana bağlı olmayan sıkıştırılamaz akışların iteratif olmayan hesaplamalar için geliştirilen, daha sonra zamana bağlı olan akışların iteratif çözümlerine başarıyla uygulanmış basınç hız alanını hesaplayan bir algoritmadır [83]. PISO algoritması, SIMPLE algoritmasındaki bir tahmini değer ve bir düzeltme adımına ek olarak bir düzeltme adımı daha içerir. PISO algoritmasında momentum denklemleri tahmini u^* ve v^* hızları yardımıyla çözülürken SIMPLE algoritmasında olduğu gibi p^* değerlerinden yararlanılır. Basınç alanı p^* doğru olmadıkça, u^* ve v^* hızları süreklilik denklemlerini sağlamayacaktır. SIMPLE algoritmasında doğrultma adımında elden edilen hız alanıyla ayrıklaştırılmış süreklilik denklemini sağladığı yukarıda anlatılmıştı. PISO algoritmasında hız düzeltme denklemleri de, SIMPLE algoritmasındaki Denklem (2.96) ve Denklem (2.97) ile aynıdır. Sadece bir düzeltme adımı daha vardır. PISO algoritmasında biraz farklı notasyonlar kullanılır.

$$p^{**} = p^* + p' \quad (2.124)$$

$$u^{**} = u^* + u' \quad (2.125)$$

$$v^{**} = v^* + v' \quad (2.126)$$

Bu formüller düzeltilmiş u^{**} ve v^{**} hızlarını tanımlamakta kullanılır.

$$u_{i,j}^{**} = u_{i,j}^* + d_{i,j}(P'_{l-1,j} - P'_{l,j}) \quad (2.127)$$

$$v_{l,j}^{**} = v_{l,j}^* + d_{l,j}(P'_{l,j-1} - P'_{l,j}) \quad (2.128)$$

Denklem (2.127) ve Denklem (2.128), SIMPLE algoritmasındaki gibi Denklem (2.103)'te yerine konularak basınç düzeltme denklemi (Denklem (2.105)) elde edilir. PISO algoritmasında bu denkleme ilk basınç düzeltme denklemi denir ve ilk basınç düzeltme alanının (p') çözümünde kullanılır. Basınçlar elde edildikten sonra Denklem (2.127) ve Denklem (2.128) denklemlerinden u^{**} ve v^{**} hızları elde edilir.

PISO algoritmasını SIMPLE algoritmasından ayıran nokta, ikinci bir düzeltme adımının olmasıdır. u^{**} ve v^{**} hızları için ayrıklaştırılmış momentum denklemleri yeni notasyonlar ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$a_{i,j}u_{i,j}^{**} = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (P_{l-1,j}^{**} - P_{l,j}^{**})A_{i,j} + b_{i,j} \quad (2.129)$$

$$a_{l,j}v_{l,j}^{**} = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (P_{l,j-1}^{**} - P_{l,j}^{**})A_{l,j} + b_{l,j} \quad (2.130)$$

İki defa düzeltilmiş hız alanıyla (u^{***} ve v^{***}) momentum denklemleri bir daha çözülür.

$$a_{i,j}u_{i,j}^{***} = \sum a_{nb}u_{nb}^{**} + (P_{l-1,j}^{***} - P_{l,j}^{***})A_{i,j} + b_{i,j} \quad (2.131)$$

$$a_{l,j}v_{l,j}^{***} = \sum a_{nb}v_{nb}^{**} + (P_{l,j-1}^{***} - P_{l,j}^{***})A_{l,j} + b_{l,j} \quad (2.132)$$

Denklem (2.129)'un Denklem (2.131)'den, Denklem (2.130)'un ise Denklem (2.132)'den çıkarılmasıyla sırasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$u_{i,j}^{**} = u_{i,j}^{***} + \frac{\sum a_{nb}(u_{nb}^{**} - u_{nb}^{***})}{a_{i,j}} + d_{i,j}(P''_{l-1,j} - P''_{l,j}) \quad (2.133)$$

$$v_{I,j}^{**} = v_{I,j}^{**} + \frac{\sum a_{nb} (v_{nb}^{**} - v_{nb}^*)}{a_{I,j}} + d_{I,j} (P_{I,j-1}'' - P_{I,j}'') \quad (2.134)$$

Yukarıdaki denklemlerde p'' ikinci basınç düzeltmesidir. Bu durumda

$$p^{***} = p^{**} + p'' \quad (2.135)$$

yazılabilir. u^{***} ve v^{***} hızlarının ayrıklaştırılmış süreklilik denkleminde (Denklem (2.103)) yerine yazılarak ikinci basınç düzeltme denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$a_{I,j} P_{I,j}'' = a_{I+1,j} P_{I+1,j}'' + a_{I-1,j} P_{I-1,j}'' + a_{I,j+1} P_{I,j+1}'' + a_{I,j-1} P_{I,j-1}'' + b_{I,j}'' \quad (2.136)$$

Yukarıdaki denklemdeki katsayılar SIMPLE algoritmasındaki ile tamamen aynı olup, tek fark kaynak teriminin ($b_{I,j}''$) hesaplanmasındadır.

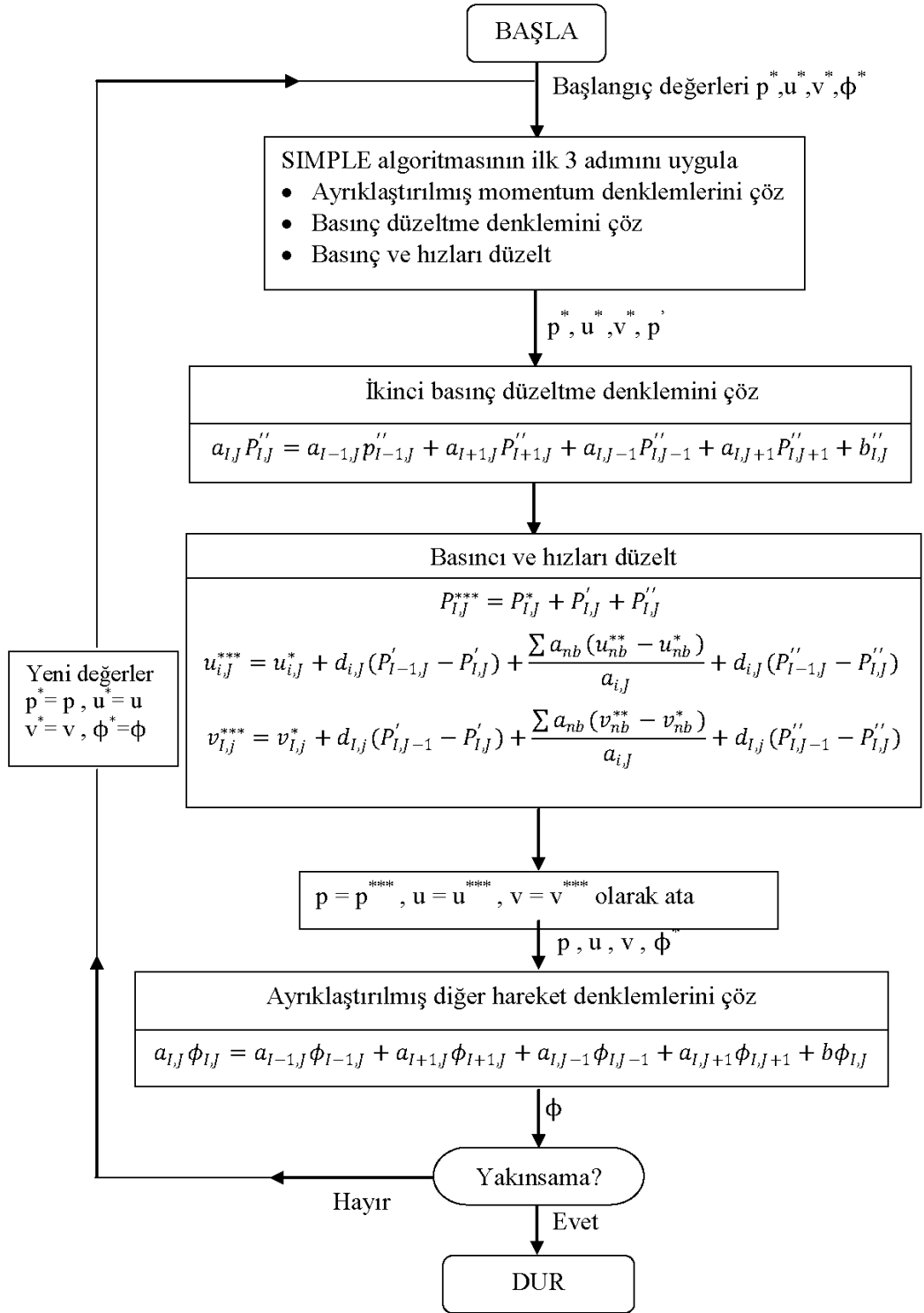
$$b_{I,j}'' = \left(\frac{\rho A}{a}\right)_{i,j} \sum a_{nb} (u_{nb}^{**} - u_{nb}^*) - \left(\frac{\rho A}{a}\right)_{i+1,j} \sum a_{nb} (u_{nb}^{**} - u_{nb}^*) + \left(\frac{\rho A}{a}\right)_{I,j} \sum a_{nb} (v_{nb}^{**} - v_{nb}^*) - \left(\frac{\rho A}{a}\right)_{I,j+1} \sum a_{nb} (v_{nb}^{**} - v_{nb}^*) \quad (2.137)$$

Denklem (2.137)'de u^{**} ve v^{**} hızlarının süreklilik denklemini sağlamasından dolayı kaynak terim $[(\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}]$ sıfırdır. İkinci basınç düzeltmesi

$$p^{***} = p^{**} + p'' = p^* + p' + p'' \quad (2.138)$$

denklemiyle ifade edilir ve sonunda ikinci defa düzeltilmiş hızlar Denklem (2.133) ve Denklem (2.134)'ten elde edilir.

PISO algoritması basınç düzeltme denklemini iki defa çözer. Bu yüzden ikinci basınç düzeltme denklemindeki kaynak terimi depolamak için bilgisayarda daha fazla geçici hafızaya ihtiyaç vardır [83].



Şekil 2.15: PISO algoritması akış şeması [83].

3. İKİNCİ MERTEBEDEN KLASİK AYRIKLAŞTIRMA YAKLAŞIMLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan, Tablo 3.1’de verilen bazı ikinci mertebeden klasik ayrıklaştırma yaklaşımları karşılaştırılmıştır. Bu amaçla yaklaşımlar, hareketin nedeninin viskoz kuvvetler olduğu bir kenarı hareketli dikdörtgen oyuktaki akış, kaynak terimlerinin olduğu dikdörtgen bir oyuktaki doğal konveksiyon ve konveksiyon terimlerinin olduğu geriye bakan bir basamak arkasındaki akış gibi gerçek mühendislik problemlerine uygulanmıştır.

Tablo 3.1: Bu bölümde karşılaştırılan ikinci mertebeden yaklaşımlar

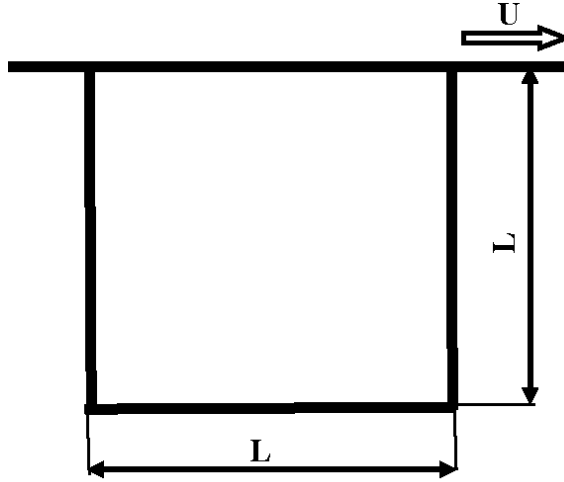
Shhy	Shyy ve diğ. [7] tarafından yapılan çalışmada Yaklaşım-A, Yaklaşım B ve Yaklaşım-C olmak üzere üç farklı şekilde yorumlanan ikinci mertebeden upwind (Second Order Upwind, SOU) yaklaşımlarından test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu verdiği söylenen Yaklaşım-C
SOU	Bu çalışmada farklı bir yorum getirilen ikinci mertebeden upwind yaklaşımı
Fromm	Bu çalışmada önerilen SOU yaklaşımı ile merkezi farklar yaklaşımının (CDS) aritmetik ortalaması olan yaklaşım
Karma	Bu çalışmada önerilen SOU yaklaşımı ile Fromm yaklaşımlarının karışımı olan yaklaşım
PP1	Konveksiyon terimlerini ayrıklaştırmada SOU yaklaşımı seçilen ticari bir program
PP2	Konveksiyon terimlerini ayrıklaştırmada SOU yaklaşımı seçilen ticari başka bir program

3.1. Bir Kenarı Hareketli Bir Oyuktaki Akış Problemi

Bir kenarı hareketli bir oyuktaki akış problemi, literatürde yeni geliştirilen kodların veya yaklaşımların hem test edilmesi hem de teyidinin (validation) yapılması için en sık kullanılan test (benchmark) problemlerinden birisidir. Bu problemde içerisinde

akışkan bulunan dikdörtgen boşluğun üst kapağı yüzeye paralel olacak şekilde hareketli iken diğer üç yüzey sabittir. İki boyutlu olarak ele alınan problemin geometrisi Şekil 3.1’de verilmiştir. Problem, hem geometrisi hem de sınır şartları basit olmasına rağmen oldukça karmaşıktır. Bu problemin test problemi (benchmark) olarak kullanılmasının sebebi bu konuyla ilgili birçok verinin olması, laminar olan çözümün zamandan bağımsız olması ve sınır koşullarının basit olmasıdır. Bu problemdeki en büyük dezavantaj ise üst köşelerdeki süreksizlik noktalarıdır. Şekil 3.1’den görülebileceği gibi $L \times L$ boyutlarındaki boşluğun üst kapağı U hızı ile hareket etmektedir. Karakteristik uzunluk olarak oyuk uzunluğu alınan Reynolds sayısı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (3.1)$$



Şekil 3.1: Hareketli kapaklı oyuk probleminin geometrisi

Bu problemle ilgili literatürde farklı Reynolds sayıları için birçok çalışma bulunmaktadır [98-101]. Reynolds sayısının 1000’den küçük olan değerlerinde akışların sonuçları birbirine çok yakın iken, daha büyük Reynolds sayılarında çalışmalar arasında farklılıklar gözükmemektedir. Koseff ve diğ. [100] yaptıkları bir çalışmada, Reynolds sayısının 1000 ile 10000 arasında olması durumunda akışın üç boyutlu bir etki gösterdiğini iddia etmişlerdir. Akışın zamana bağlı olarak değiştiği kritik Reynolds sayısı bazı çalışmalarda 7500 - 8000 civarında olduğu belirtmişlerdir. Bu değerin 30000 olduğu iddia eden çalışmalar bile vardır [101]. Bu nedenle bu

çalışmada en büyük Reynolds sayısı 1000 alınarak çözümler yapılmış ve elde edilen sonuçlar Ghia ve diğ. [98] sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Akış iki boyutlu olarak ele alınmış, akışın zamandan bağımsız ve sıkıştırılmaz olduğu kabul edilmiştir. Viskozite, özgül ısı, ısıl yayılım katsayısı, ısı iletim katsayısı gibi fiziksel özellikler sabit olarak alınmıştır. Hız ve basınç denklemlerinin çözümlemesinde SIMPLEC algoritması kullanılmıştır. Hareketli olan üst kapağın hızı 1 m/s sabit olarak alınmış, akışkan viskozitesi ise Reynolds sayısına bağlı olarak değiştirilmiştir. Tüm cidarlarda hızlar sıfır olarak alınmıştır.

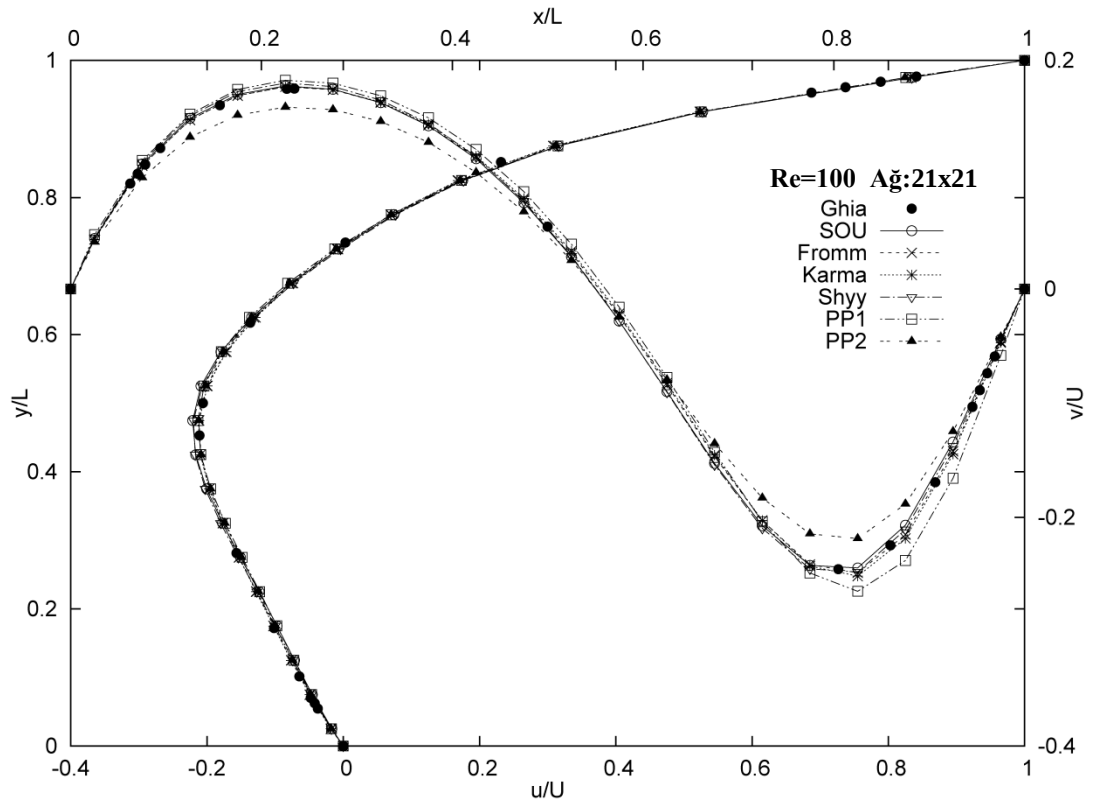
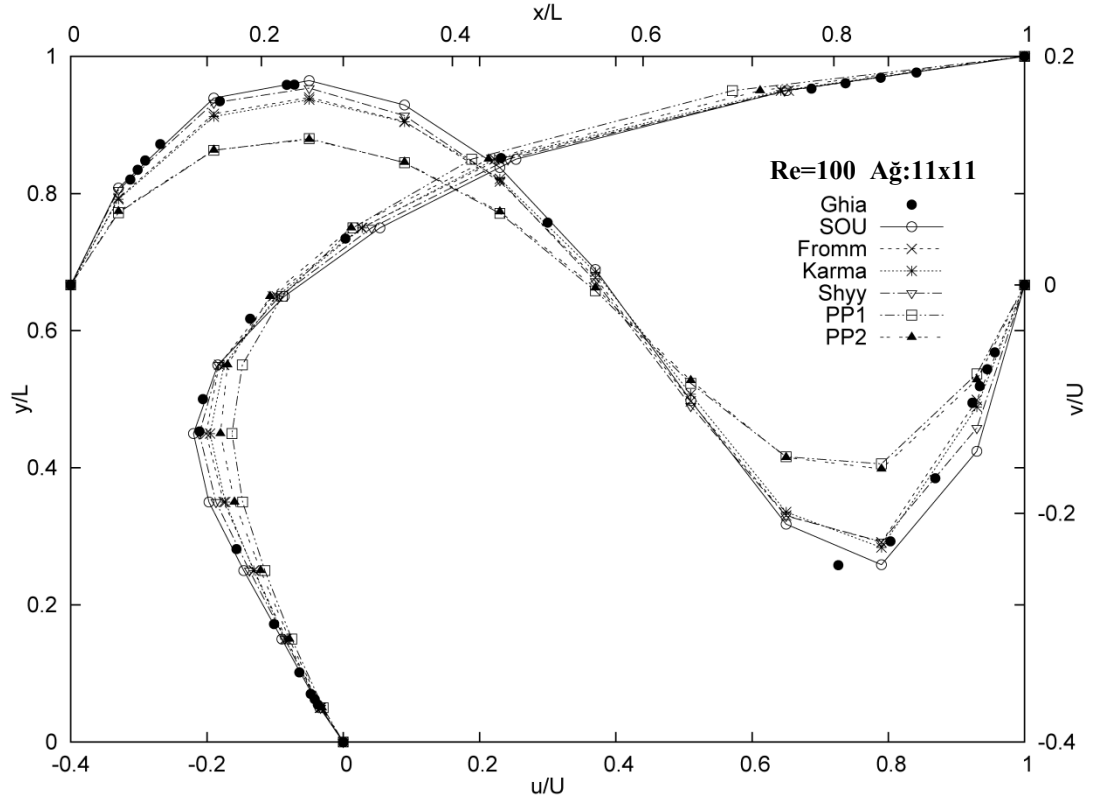
Tablo 3.1’de verilen her bir yaklaşım için $Re=100$, $Re=400$ ve $Re=1000$ olmak üzere üç farklı Reynolds sayısı ve 11×11 , 21×21 , 41×41 ve 81×81 olmak üzere 4 farklı ağ yoğunluğu için toplam 12 çözüm yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar, boşluğun düşey eksenindeki u hızı ve yatay eksenindeki v hızı için Şekil 4.2-4.4’de test problemi (benchmark) sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Hızlar üst kapak hızı (U), mesafe ise kapak uzunluğu (L) ile boyutsuzlaştırılmıştır.

$Re=100$ ve 11×11 ağ noktası yoğunluğu için sonuçların verildiği Şekil 3.2 incelendiğinde test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu bu çalışmada önerilen SOU yaklaşımının verdiği görülmektedir. Shyy, Fromm ve Karma yaklaşımları da SOU’ya yakın bir sonuç vermektedir. Ticari programlar cidara yakın bölgeleri iyi çözememekte, dolayısıyla en büyük hata içeren yaklaşımlar olmaktadır. Hata değeri v hızı için yapılan çözümde daha belirgindir. v hızında PP1 ve PP2 neredeyse aynı sonuçları verirken, v hızına göre daha büyük olan u hızında en büyük sapma PP1’de görülmektedir.

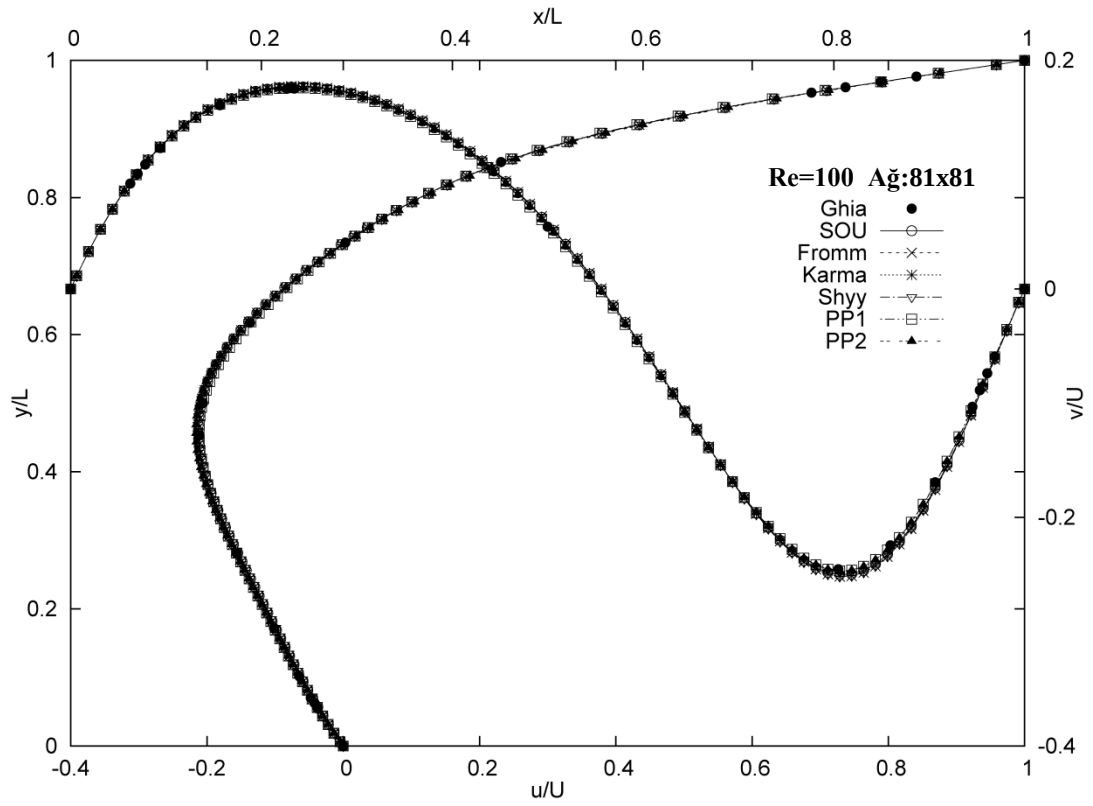
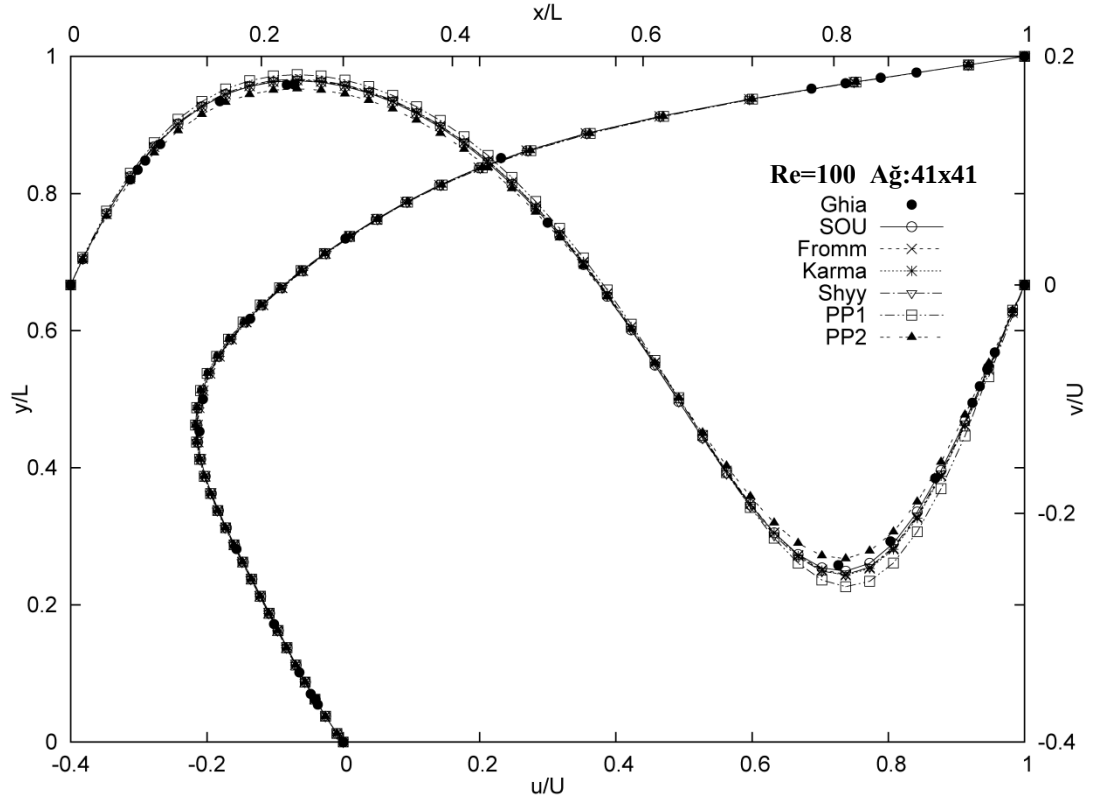
21×21 ağ noktası yoğunluğunun kullanılması ile bütün yaklaşımların u hızı için neredeyse aynı sonucu verdiği ve sonuçların test problemi (benchmark) sonuçlarına oldukça yakın olduğu görülmektedir. v hızında ise ticari programlar ile elde edilen sonuçların diğer yaklaşımlardan farklı bir davranış göstererek test problemi (benchmark) sonuçlarından uzak bir sonuç verdiği görülmektedir. Ticari programlardan PP1 küçük ölçüde overshoot (sınırustü) ve undershoot (sınıraltı)

yaparak test problemi (benchmark) sonuçlarından uzaklaşmakta, PP2 ise difüzyif bir davranış göstererek en büyük sapma gösteren yaklaşım olmaktadır.

41x41 ağ noktası yoğunluğu gibi daha sık bir ağ kullanılarak yapılan çözümlerde bütün yaklaşımların u hızı için neredeyse test problemi (benchmark) sonuçları ile aynı sonucu verdiği görülmektedir. v hızında ise, ticari programlar ile elde edilen çözümlerdeki hatanın azaldığı ancak hâlâ bir sapma olduğu görülmektedir. Ticari programlardaki bu farklılık ancak 81x81 ağ noktası yoğunluğu kullanılarak giderilebilmektedir. Şekil 3.2'den görülebileceği gibi, ticari programlarda ancak 81x81 ağ noktası yoğunluğu kullanılarak test problemi (benchmark) sonuçları elde edilebilirken, diğer yaklaşımlarda 21x21 ağ noktası yoğunluğu yeterli olmaktadır.



Şekil 3.2: Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Re=100$

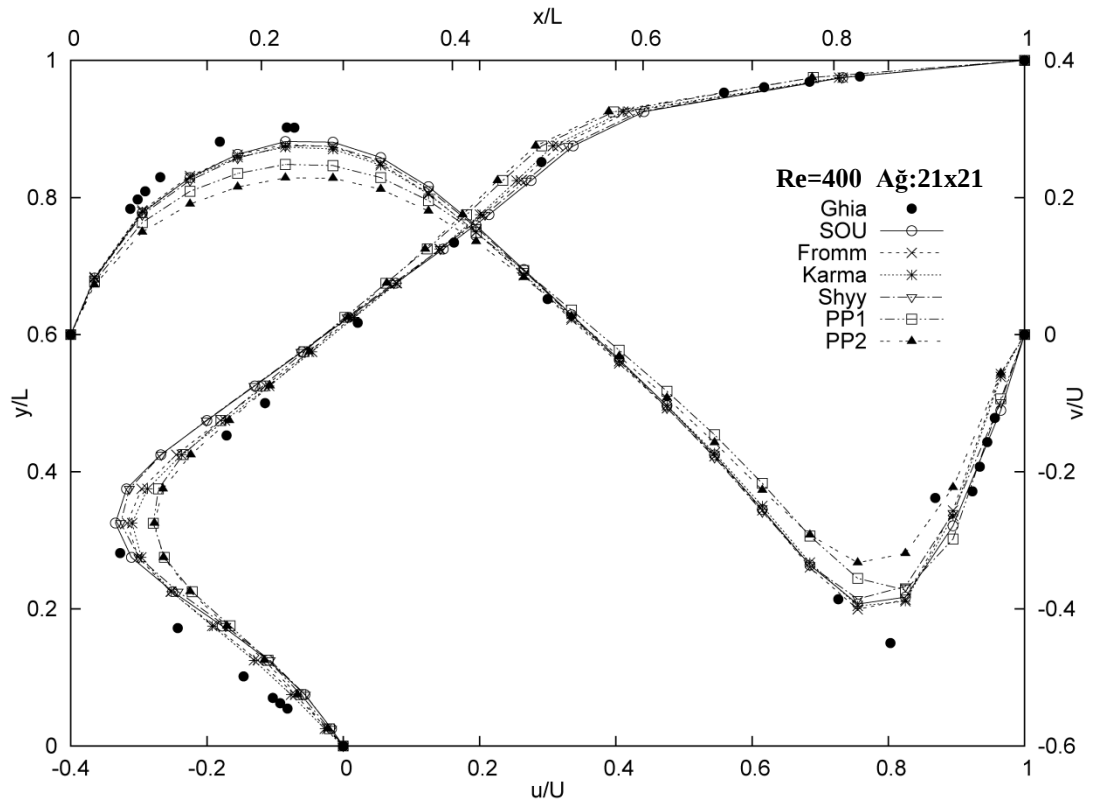
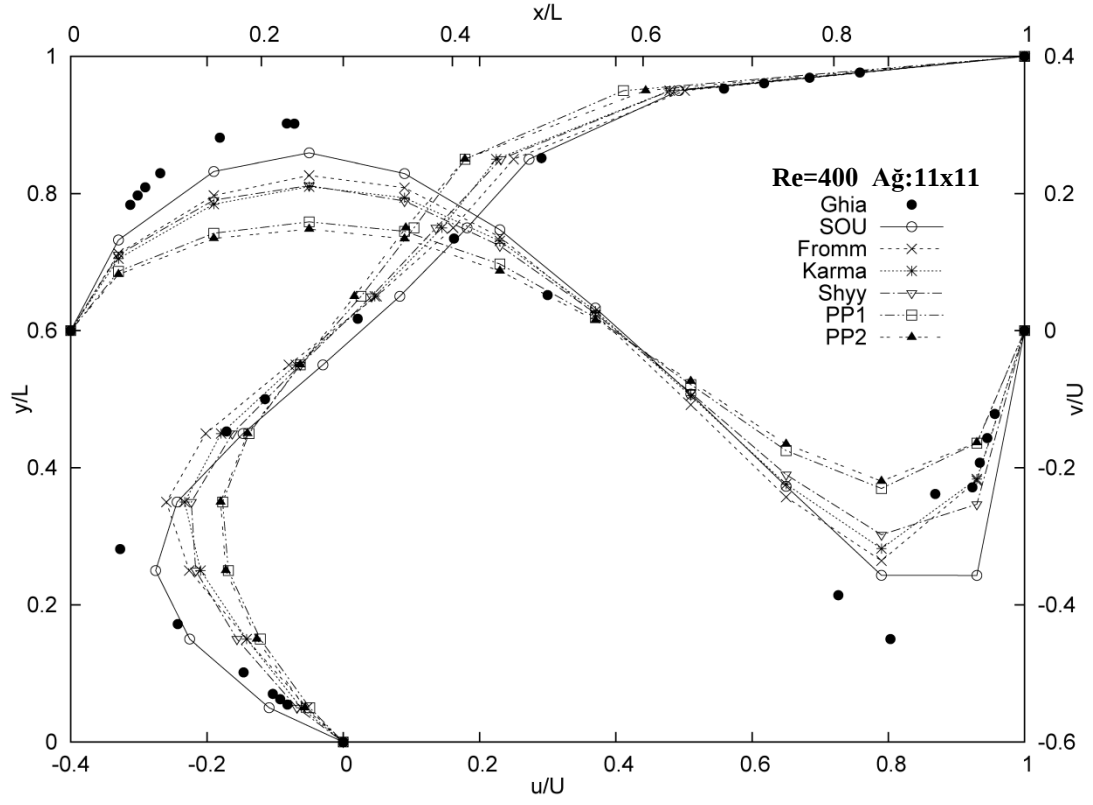


Şekil 3.2 (Devam): Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Re=100$

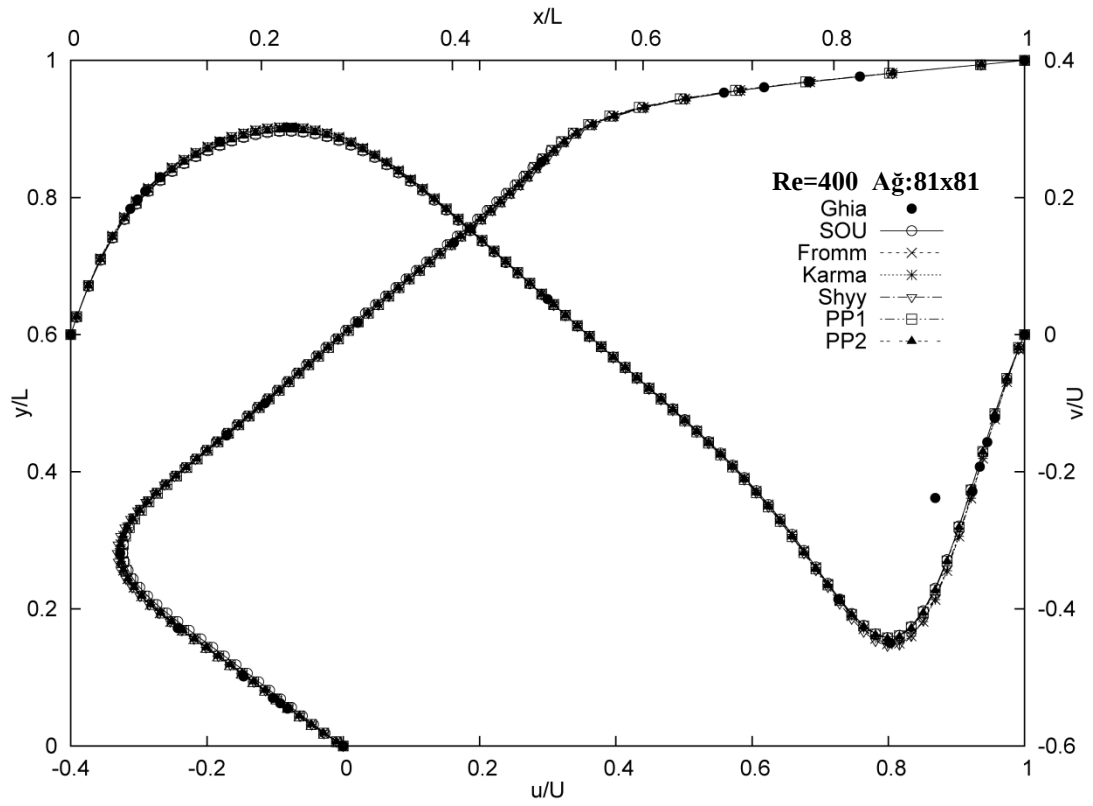
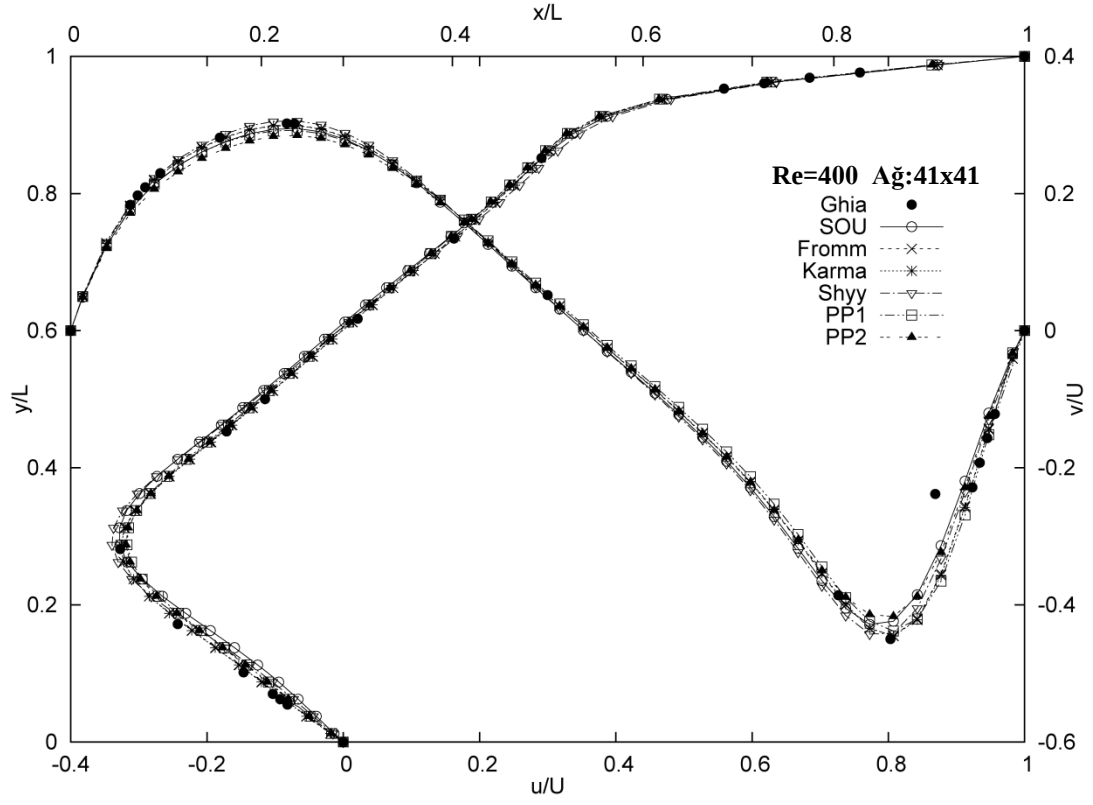
Re=400 için farklı ağ yapıları kullanılarak elde edilen sonuçlar Şekil 3.3'te verilmiştir. 11x11 ağ noktası yoğunluğu kullanılarak elde edilen sonuçlar incelendiğinde, Re sayının artmasıyla bütün yaklaşımlardaki hataların arttığı görülmektedir. En büyük hatalar hızların oyuk merkezine göre daha yüksek olduğu cidarlarda olmaktadır. Bu bölgelerde test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu bu çalışmada önerilen SOU yaklaşımı vermektedir. Shyy, Fromm ve Karma yaklaşımları birbirlerine çok yakın bir davranış göstermektedir. En büyük hata değerleri Re=100 için elde edilen sonuçlarda olduğu gibi ticari programlarda olmaktadır. PP1 ve PP2 arasındaki fark çok az olmakla beraber, en büyük hata PP2'de görülmektedir.

21x21 ağ noktası yoğunluğu kullanılarak elde edilen u hızı sonuçları incelendiğinde, Shyy ile SOU yaklaşımlarının, Fromm ile Karma yaklaşımlarının ve PP1 ile PP2 yaklaşımlarının neredeyse aynı sonuç verdiği görülmektedir. Yaklaşımların hata değerleri bu sıralamaya göre artmaktadır. v hızı için elde edilen sonuçlar incelendiğinde ise SOU, Shyy, Fromm ve Karma yaklaşımları birbirine çok yakın bir davranış göstermektedir. Ticari programlar arasındaki farklılıklar ise belirginleşmekte ve en büyük hata PP2 yaklaşımında görülmektedir.

41x41 ağ noktası yoğunluğu kullanılarak elde edilen sonuçlarda bütün yaklaşımların birbirine çok yakın bir sonuç verdiği ve test problemi (benchmark) sonuçlarını yakaladığı görülmektedir. Bu nedenle, Re=400 için bu ağ yapısının yeterli olacağı söylenebilir. Ağ yapısının daha da inceltilmesi (81x81) ile yaklaşımlar arasındaki farklılık tamamen kaybolmaktadır.



Şekil 3.3: Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Re=400$



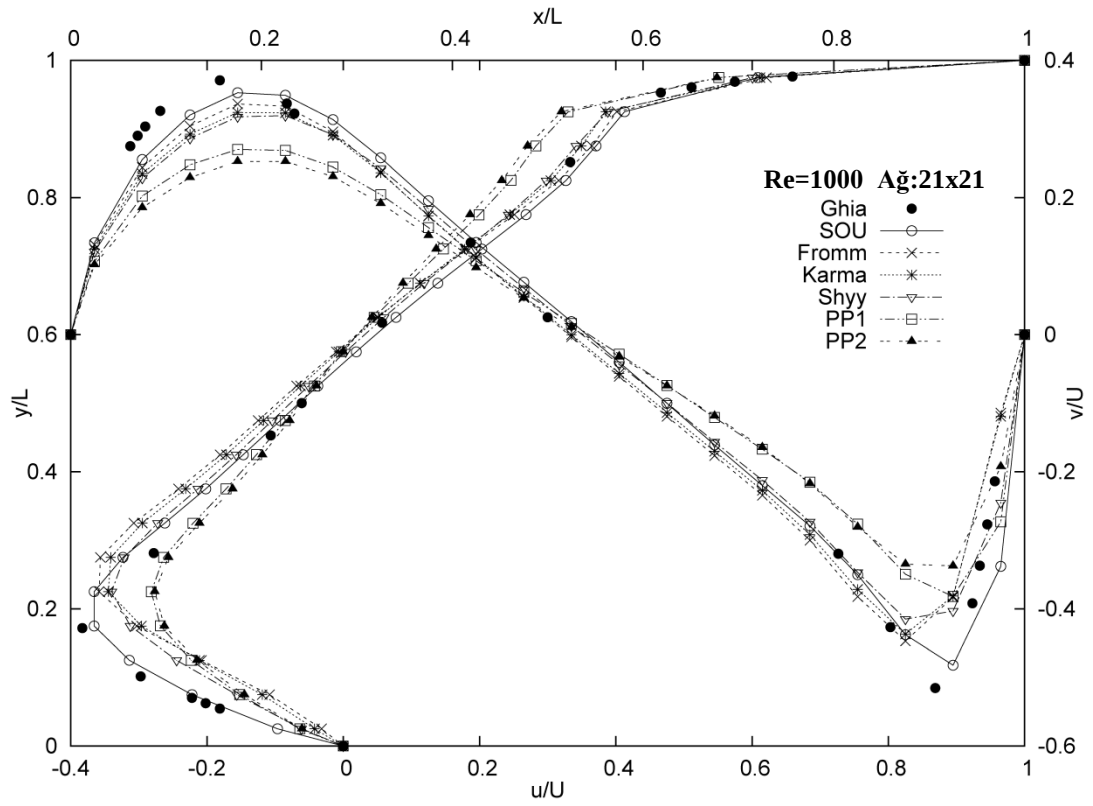
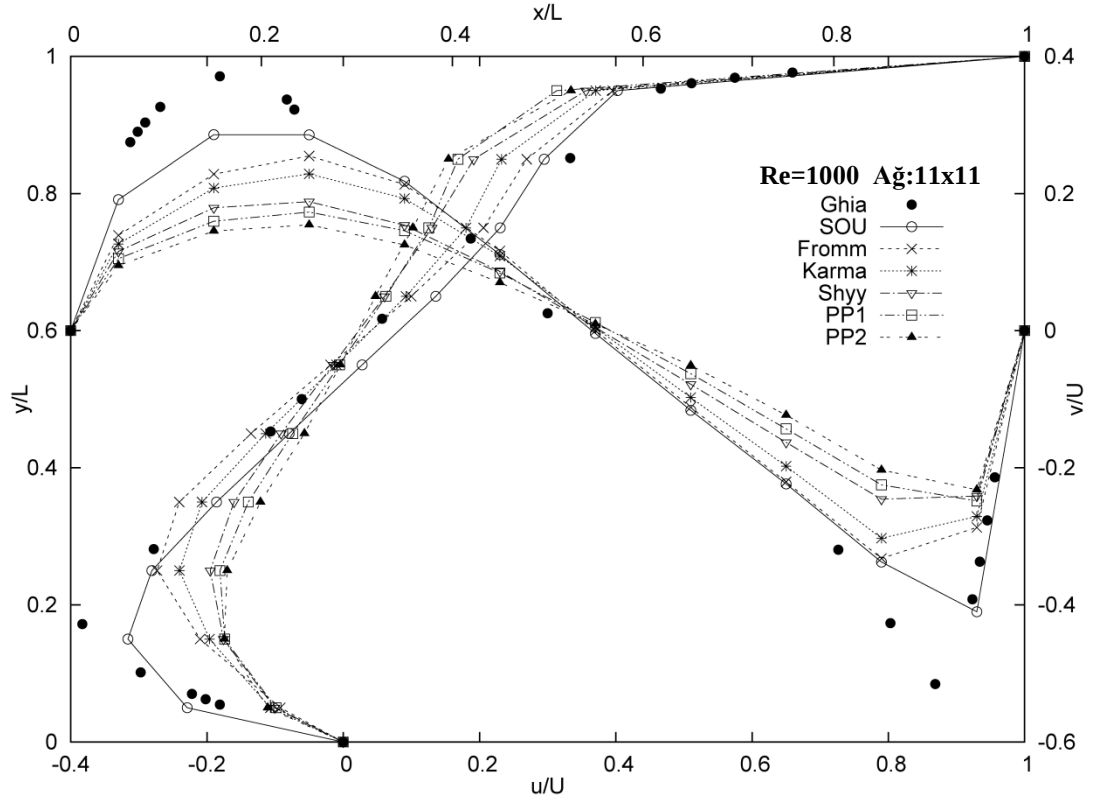
Şekil 3.3 (Devam): Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Re=400$

Farklı ağ noktası yoğunluklarında, $Re=1000$ için yapılan çözümler Şekil 3.4'te verilmiştir. 11×11 ağ noktası yoğunluğu kullanılarak elde edilen sonuçlar incelendiğinde, Re sayısının artmasıyla hızların büyüdüğü ve yaklaşım hatalarının arttığı görülmektedir. En büyük hatalar cidara yakın bölgelerde olmaktadır. Özellikle v hızındaki hatalar daha büyük olmaktadır. Bu bölgelerde yaklaşımlar arasındaki farklılık iyice belirginleşmekte ve bu çalışmada tavsiye edilen SOU yaklaşımı diğer yaklaşımlara nazaran test problemi (benchmark) sonuçlarına çok daha yakın bir sonuç vermektedir. Bu yaklaşımı sırasıyla Fromm, Karma, Shyy, PP1 ve PP2 yaklaşımları takip etmektedir.

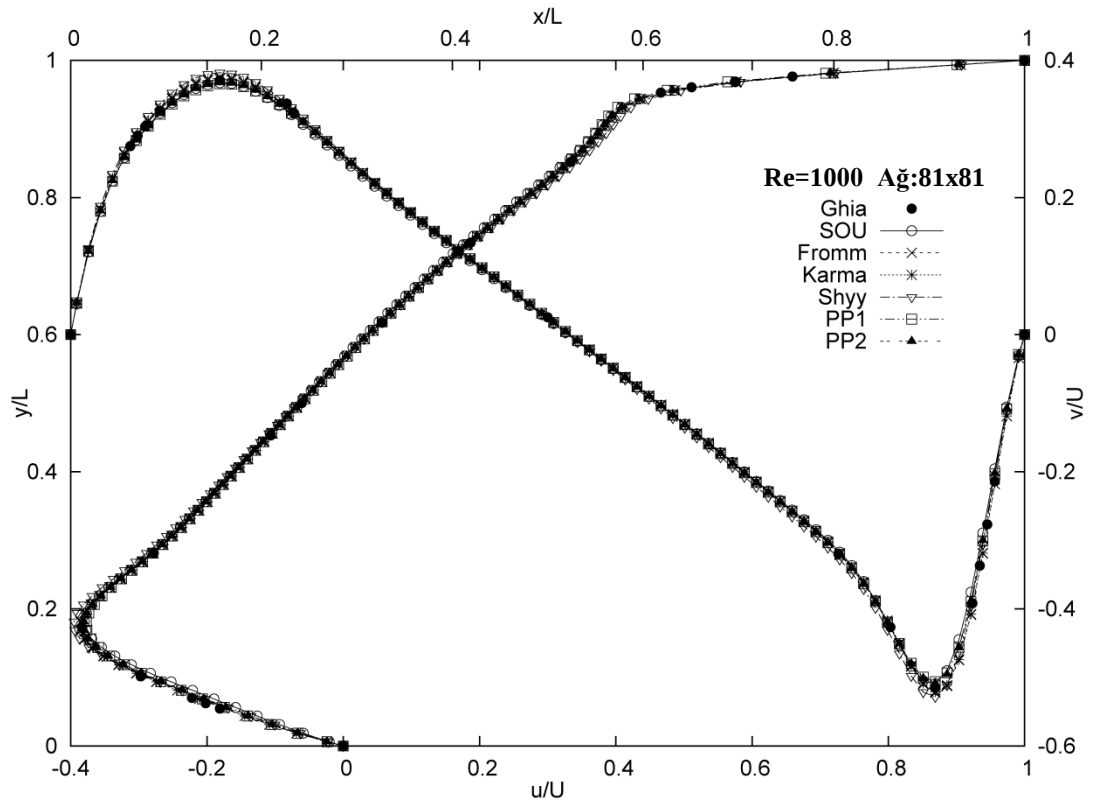
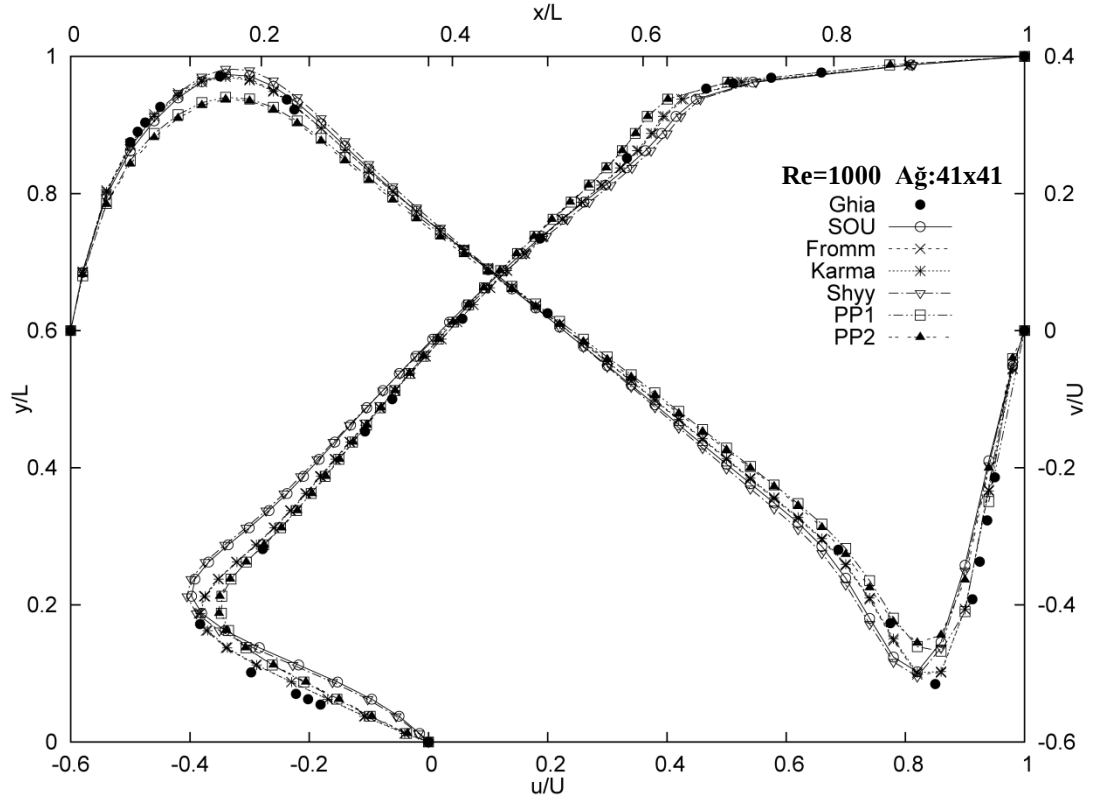
21×21 ağ noktası yoğunluğu kullanılarak elde edilen sonuçlar incelendiğinde Fromm, Karma ve Shyy yaklaşımları ile elde edilen sonuçların SOU yaklaşımına yaklaştığı, ancak SOU yaklaşımının özellikle cidara yakın bölgelerde daha doğru sonuç verdiği görülmektedir. Ticari programlar ile elde edilen sonuçlardaki hataların da azaldığı ancak diğer yaklaşımlardan hala ciddi ölçüde farklılık gösterdiği görülmektedir. En büyük hata yine PP2'de görülmektedir.

41×41 ağ noktası yoğunluğu kullanıldığında, $Re=400$ için elde edilen sonuçlar da olduğu gibi bu Re sayısında da Shyy ile SOU yaklaşımlarının, Fromm ile Karma yaklaşımlarının ve PP1 ile PP2 yaklaşımlarının neredeyse aynı sonuç verdiği görülmektedir. Alt cidara yakın u hızının en iyi Fromm ve Karma yaklaşımları ile yakalandığı kısım haricinde, tüm bölgelerde test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu SOU ve Shyy yaklaşımları vermektedir. Ticari programlar ile elde edilen sonuçlar özellikle v hızlarının cidara yakın bölgelerinde diğer yaklaşımlardan farklılık göstermekte ve en çok hata içeren yaklaşımlar olmaktadır.

Şekil 3.4'ten görülebileceği gibi, 81×81 ağ noktası yoğunluğu kullanıldığında bütün yaklaşımlar test problemi (benchmark) sonuçlarını yakalamaktadır.



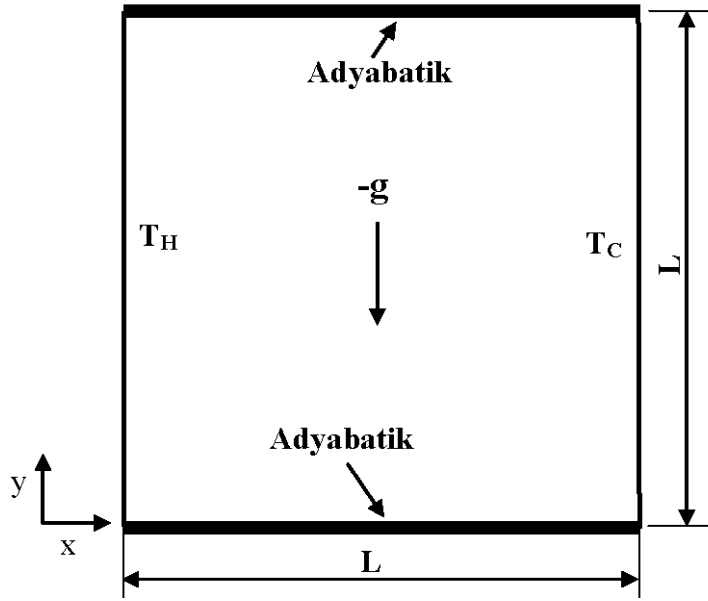
Şekil 3.4: Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Re=1000$



Şekil 3.4 (Devam): Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Re=1000$

3.2. Kapalı Bir Oyukta Doğal Konveksiyon Problemi

Kapalı hacimlerdeki doğal konveksiyon; çift camlı pencereler, güneş kolektörleri, elektronik ekipmanların soğutulması, bina yalıtımı gibi birçok mühendislik alanında önemli olmasının yanında geliştirilen kodların performanslarının değerlendirilmesi açısından da güzel bir test (benchmark) problemidir. Literatürde oldukça sık kullanılan [102-106] bu problemin fiziksel modeli Şekil 3.5'te verilmiştir.



Şekil 3.5: Doğal taşınım için fiziksel model

İki boyutlu olarak ele alınan problemde kenar uzunluğu L olan kare şeklindeki bir oyuk içinde, Prandtl sayısı 0.71 olan bir akışkan bulunmaktadır. Problemde yoğunluk dışındaki tüm fiziksel özellikler sabit kabul edilmiş, yoğunluk ise Boussinesq yaklaşımı elde edilmiştir. Soğuk duvar sıcaklığı (T_C), referans sıcaklık olarak alınmıştır.

Havanın temas ettiği tüm yüzeylerde hızlar sıfır olarak alınmıştır. Isı transferinin sıcak (T_H) ve soğuk (T_C) yüzey sıcaklıklarına sahip düşey yüzeylerden olduğu kabul edilmiş, alt ve üst yüzeylerde ise adyabatik sınır şartı uygulanmıştır:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0, y=L} = 0 \quad (3.2)$$

Doğal taşınımda akış karakteristiğini gösteren olan Rayleigh sayısı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha} \quad (3.3)$$

Newton Soğuma Kanunu'ndan yola çıkılarak yerel taşınım katsayısı h ve Nusselt sayısı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$h = \frac{q}{(T_w - T_c)} \quad (3.4)$$

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (3.5)$$

Tablo 3.1'de belirtilen yaklaşımlar kullanılarak Rayleigh sayısının 10^4 , 10^5 ve 10^6 değeri ve 11×11 , 21×21 , 41×41 ve 81×81 ağ noktası yoğunluğu için çözümler tekrar edilerek yapılmıştır. Ticari kodlar ile yapılan çözümlerde momentum ve enerji denklemleri ikinci mertebeden upwind yaklaşımı ile ayrıştırılmıştır. Diğer yaklaşımlarda ise enerji denklemi Fromm yaklaşımı ile ayrıştırılmıştır.

Sonuçların doğruluğunu kontrol etmek için bu çalışmada elde edilen sonuçlar, test problemi (benchmark) sonuçları de Vahl Davis [103] sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Hızlar, Denklem (3.6)'te verilen difüzyon hızı ile boyutsuzlaştırılarak test problemi (benchmark) sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

$$V_{diff} = \frac{\mu}{Pr\rho L} \quad (3.6)$$

Elde edilen sonuçların test problemi (benchmark) sonuçları ile karşılaştırılabilmesi için aşağıda belirtilen büyüklükler ilgili tablolarda verilmiştir:

- U_{maks} : Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) maksimum u hızı (yeri ile beraber)
 V_{maks} : Oyuğun yatay eksenindeki ($y=0.5$) maksimum v hızı (yeri ile beraber)
 Nu_{maks} : Oyuğun sol duvarındaki ($x=0$) maksimum Nu sayısı (yeri ile beraber)
 Nu_{min} : Oyuğun sol duvarındaki ($x=0$) minimum Nu sayısı (yeri ile beraber)
 Nu_o : Oyuğun sol düşey duvarındaki ($x=0$) ortalama Nu sayısı

Nu_o aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$Nu_o = Q/Q_c \quad (3.7)$$

Burada, Q oyuk boyunca olan toplam ısı transferi iken, Q_c ısı geçişinin tamamen iletim ile olması durumunda geçen ısı miktarını göstermektedir.

Farklı Rayleigh sayıları ve farklı ağ noktası yoğunluğu kullanılarak elde edilen sonuçlar boşluğun düşey eksenindeki u hızı ve yatay eksenindeki v hızı değişimleri için karşılaştırılmıştır. İlgili şekiller ve tablolar incelendiğinde genel olarak yaklaşımların iki gruba ayrıldığı görülmektedir. SOU, Shyy, Fromm ve Karma yaklaşımları bir grup, PP1 ve PP2 başka bir grup oluşturmaktadır. Birinci gruptaki yaklaşımlar arasındaki fark $Ra=10^4$ ve $Ra=10^5$ için seyrek ağlarda yapılan çözümlerde bile çok azdır. $Ra=10^6$ için yapılan çözümlerde yaklaşımlar arasındaki fark seyrek ağlarda görülebilir.

$Ra=10^4$ için boşluğun yatay ve düşey eksenlerindeki hız değişiminin verildiği Şekil 3.6 ve ilgili büyüklüklerin verildiği Tablo 3.2 incelendiğinde, 11×11 ağ noktası yoğunluğu kullanılması halinde dâhi bütün yaklaşımların birbirlerine çok yakın bir davranış göstererek test problemi (benchmark) sonuçlarına oldukça yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Ortalama Nusselt sayıları incelendiğinde ise 11×11 ağ noktası yoğunluğu kullanılması durumunda test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu PP2, en uzak sonucu ise PP1'nin verdiği görülmektedir. 21×21 ağ noktası yoğunluğu kullanılması halinde yine en büyük hatanın PP1'de olduğu ancak bu hata miktarının sadece %3 olduğu ve diğer yaklaşımların hatalarının %1 civarında olduğu görülmektedir. Bütün yaklaşımlardaki hız profillerinin 21×21 ağ noktası yoğunluğu

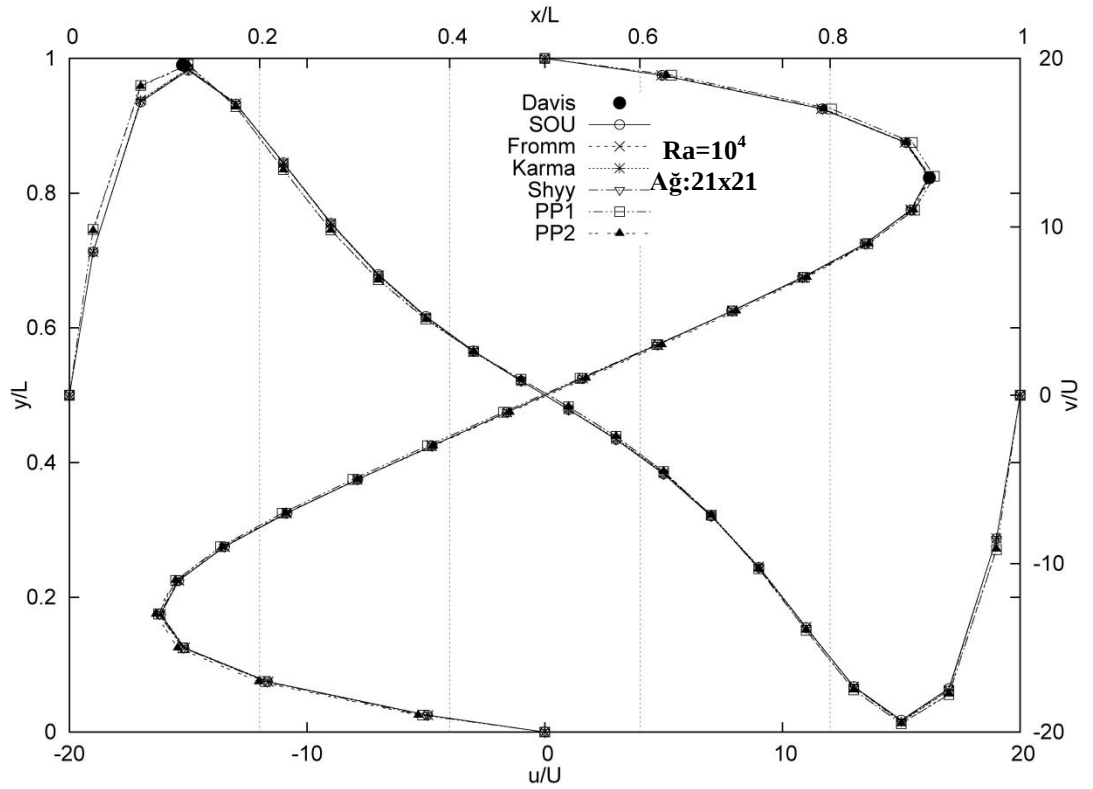
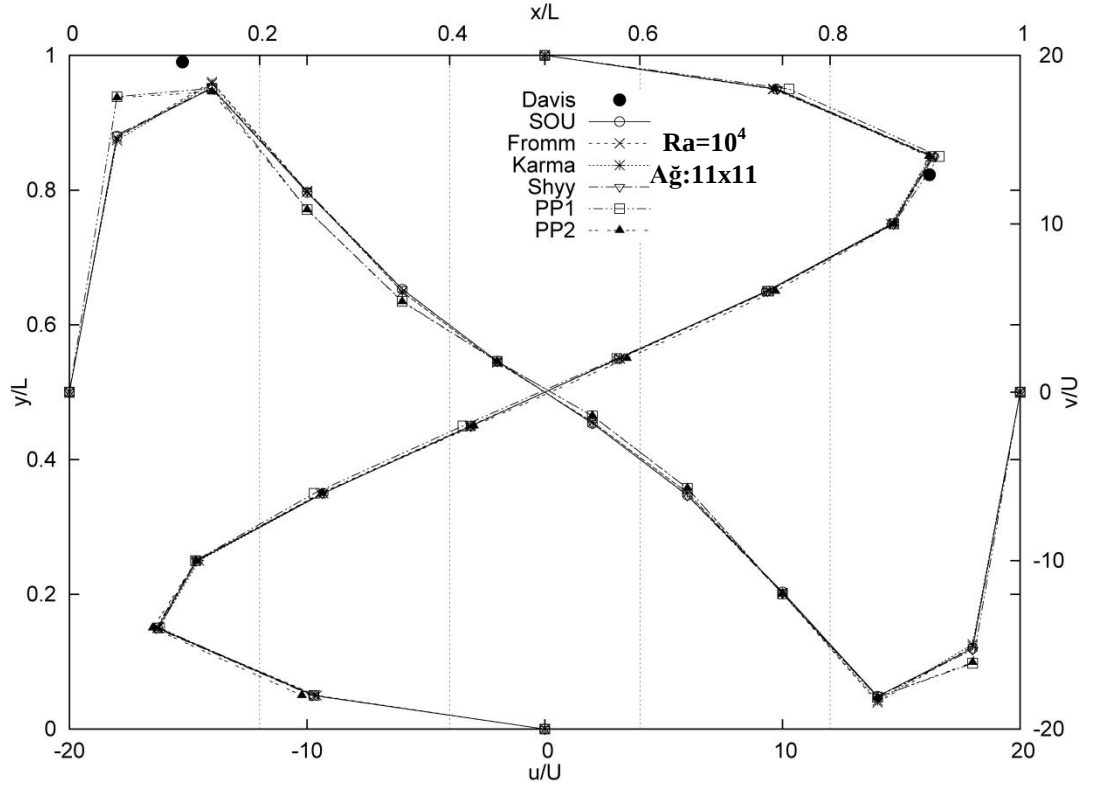
kullanılması durumunda ağ yapısından bağımsız sonuçlar verdiği ve Nu_o değerindeki hatanın %1'in altında olduğu görülmektedir.

Tablo 3.2: $Ra=10^4$ için sonuçların karşılaştırılması

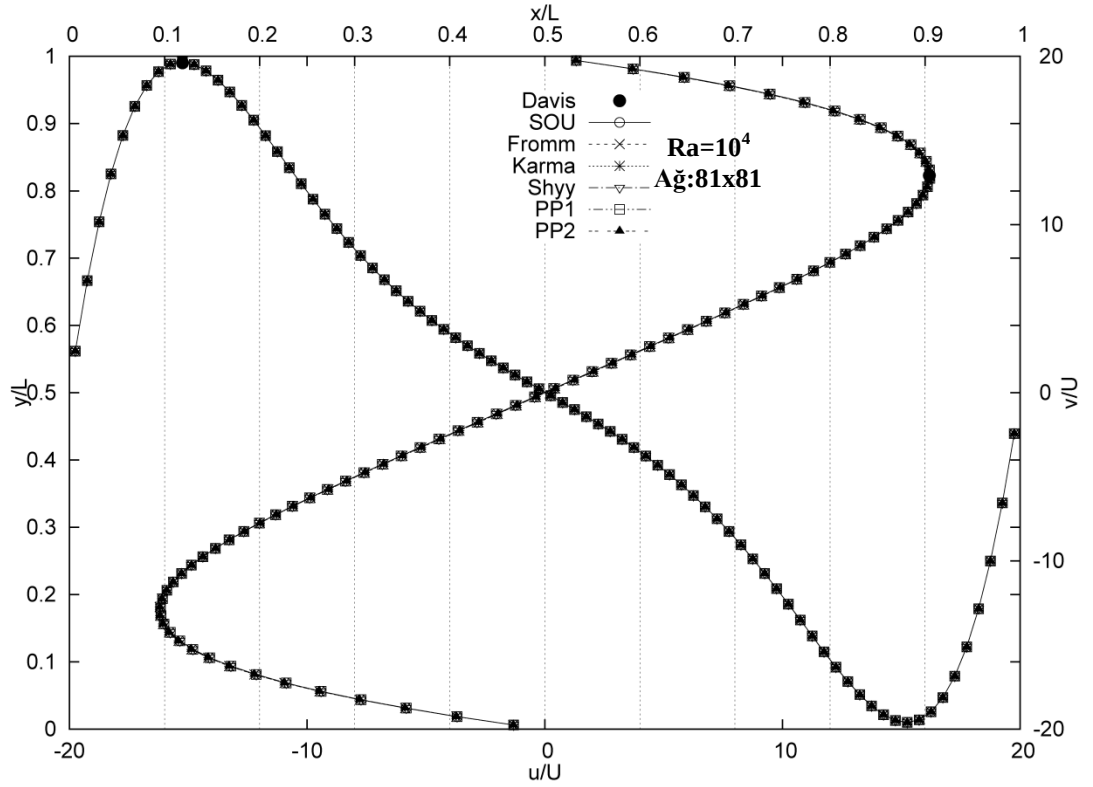
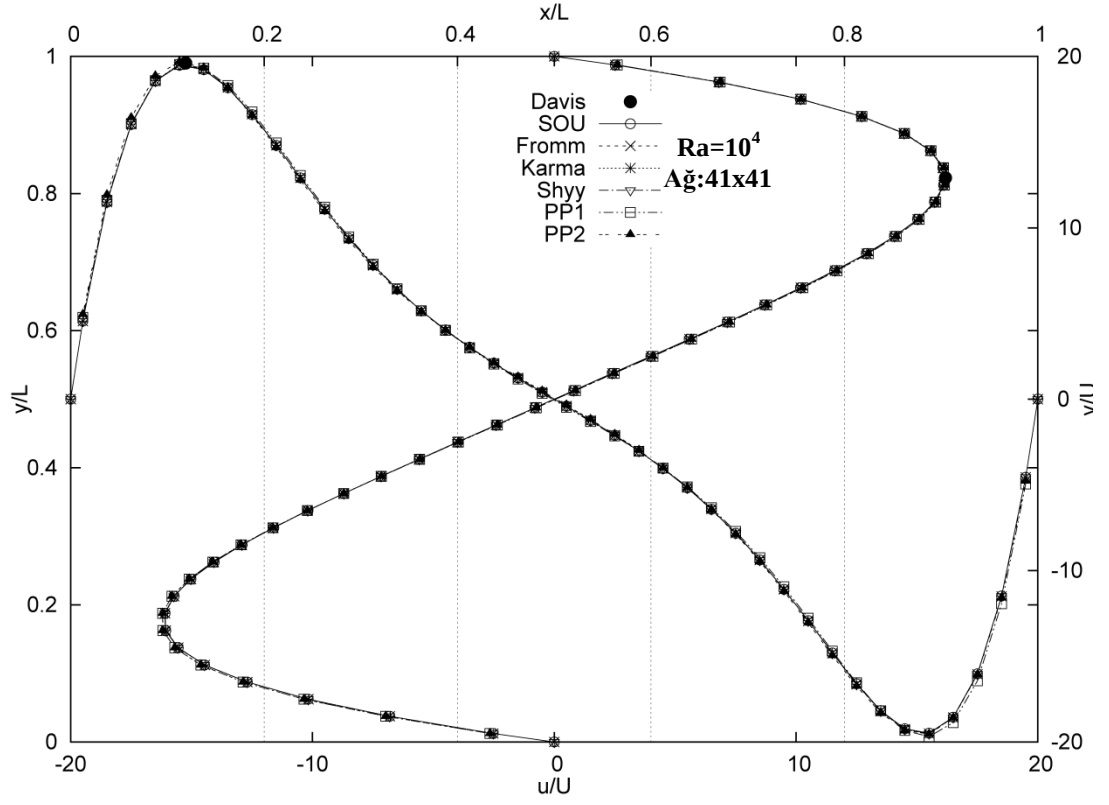
Ağ: 11x11					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu _o
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem Davis [103]	16.178	19.617	3.528	0.586	2.238
	0.823	0.119	0.143	1	
SOU	16.299	18.0442	3.868	0.59	2.3471
	0.85	0.15	0.15	0.95	
Fromm	16.301	18.4281	3.911	0.5998	2.3533
	0.85	0.15	0.15	0.95	
Karma	16.235	18.3189	3.891	0.5999	2.3441
	0.85	0.15	0.15	0.95	
Shyy	16.356	18.079	3.883	0.5909	2.3531
	0.85	0.15	0.15	0.95	
PP1	16.588	18.0464	4.122	0.5434	2.4575
	0.85	0.15	0.15	0.95	
PP2	16.162	17.837	4.118	0.2686	2.2238
	0.85	0.15	0.15	0.95	
Ağ: 21x21					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu _o
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem Davis [103]	16.178	19.617	3.528	0.586	2.238
	0.823	0.119	0.143	1	
SOU	16.1696	19.2877	3.622	0.6027	2.2621
	0.825	0.125	0.125	0.975	
Fromm	16.1572	19.401	3.6368	0.6018	2.255
	0.825	0.125	0.125	0.975	
Karma	16.1537	19.3863	3.633	0.6021	2.2669
	0.825	0.125	0.125	0.975	
Shyy	16.2076	19.3431	3.624	0.6034	2.2637
	0.825	0.125	0.125	0.975	
PP1	16.3884	19.6332	3.7295	0.5757	2.3075
	0.825	0.125	0.125	0.975	
PP2	16.2375	19.6009	3.7238	0.287	2.2
	0.825	0.125	0.125	0.975	

Tablo 3.2 (Devam): $Ra=10^4$ için sonuçların karşılaştırılması

Ağ: 41x41					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu _o
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem Davis [103]	16.178	19.617	3.528	0.586	2.238
	0.823	0.119	0.143	1	
SOU	16.0992	19.4848	3.5649	0.5938	2.2531
	0.8125	0.1125	0.1375	0.9875	
Fromm	16.1	19.513	3.5681	0.5933	2.255
	0.8125	0.1125	0.1375	0.9875	
Karma	16.0987	19.5113	3.5673	0.5931	2.2548
	0.8125	0.1125	0.1375	0.9875	
Shyy	16.1116	19.5033	3.5654	0.5935	2.2539
	0.8125	0.1125	0.1375	0.9875	
PP1	16.1409	19.5332	3.585	0.5828	2.2607
	0.8125	0.1125	0.1375	0.9875	
PP2	16.1446	19.6903	3.5843	0.2913	2.2104
	0.8125	0.1125	0.1375	0.9875	
Ağ: 81x81					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu _o
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem Davis [103]	16.178	19.617	3.528	0.586	2.238
	0.823	0.119	0.143	1	
SOU	14.7109	18.2336	3.5594	0.5578	2.181
	0.8313	0.1187	0.1313	0.9937	
Fromm	14.7754	18.3257	3.5623	0.5593	2.1857
	0.8313	0.1187	0.1313	0.9937	
Karma	14.7247	18.2569	3.5592	0.5583	2.1821
	0.8313	0.1187	0.1313	0.9937	
Shyy	14.7193	18.2468	3.5597	0.5578	2.1817
	0.8313	0.1187	0.1313	0.9937	
PP1	16.1968	19.6574	3.5453	0.5843	2.2489
	0.8188	0.1187	0.1438	0.9937	
PP2	16.1701	19.6607	3.5447	0.2922	2.224
	0.8188	0.1187	0.1437	0.9937	



Şekil 3.6: Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Ra=10^4$



Şekil 3.6 (Devam): Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Ra=10^4$

$Ra=10^5$ için elde edilen sonuçlar Tablo 3.3'te ve Şekil 3.7'de verilmiştir. Tablo 3.3 incelendiğinde Rayleigh sayısının artmasıyla bütün yaklaşımlardaki hatanın arttığı görülmektedir. 11×11 ağ noktası yoğunluğu kullanılarak elde edilen hızlar incelendiğinde SOU, Fromm, Karma ve Shyy yaklaşımlarının neredeyse aynı sonuçlar verdiği ve sonuçların test problemi (benchmark) sonuçlarından bir miktar sapma gösterdiği görülmektedir. Ortalama Nusselt sayıları incelendiğinde ise PP2'nin diğer yaklaşımlardan farklı davranarak test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu verdiği görülmektedir. PP2'deki hata yaklaşık %6 iken, diğer yaklaşımlardaki hata %17 ila %19 arasında değişmektedir.

21×21 ağ noktası yoğunluğu kullanılması durumunda hız profillerinin birbirine çok yaklaştığı ancak u hızı için PP2'nin, v hızı için ise Fromm yaklaşımının test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonuç veren yaklaşımlar olduğu görülmektedir. Bu ağ yapısındaki Nu_o değerleri incelendiğinde test problemi (benchmark) sonuçlarından en çok sapma gösteren PP1'de hatanın %8.5, diğer bütün yaklaşımlarda ise hatanın %3 civarında olduğu görülmektedir.

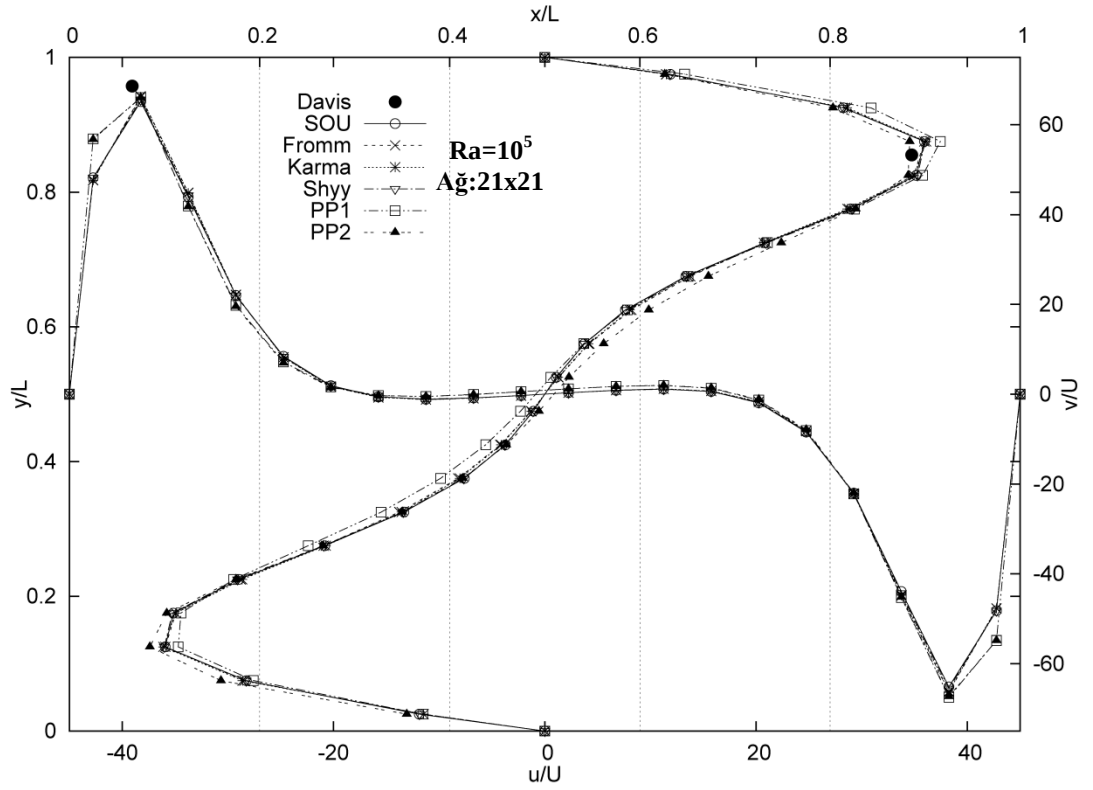
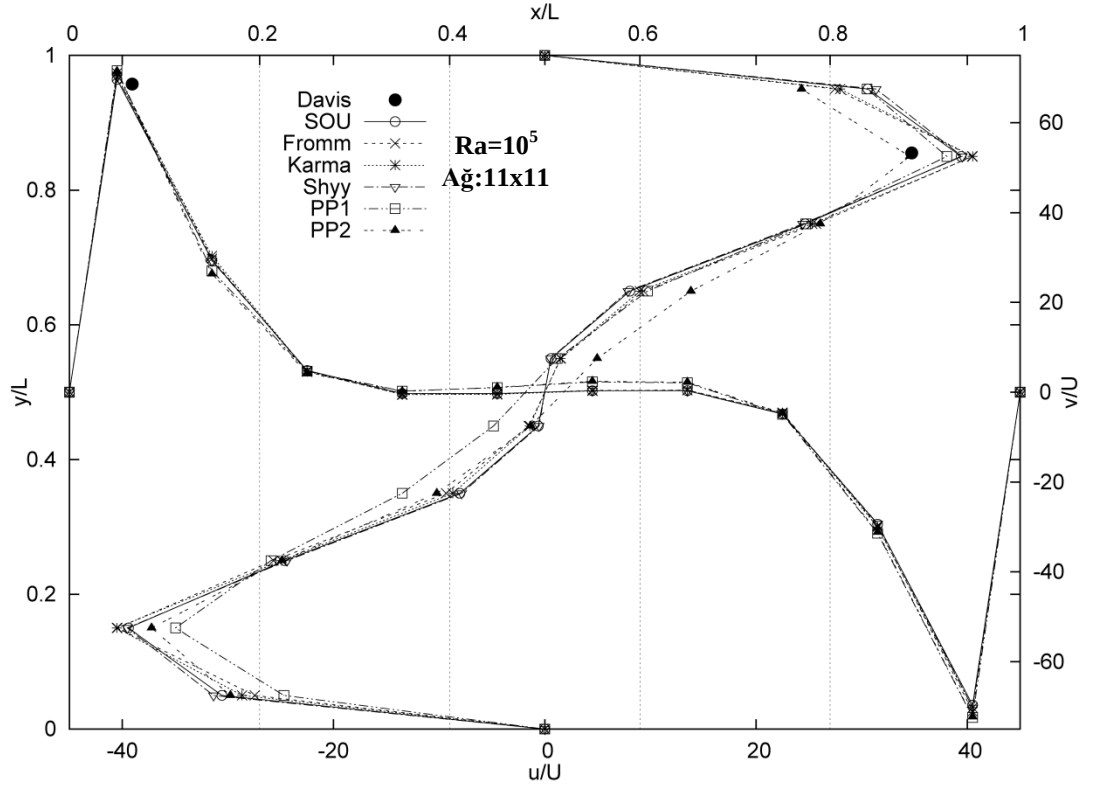
41×41 ağ noktası yoğunluğu kullanılması ile Şekil 3.7'den görülebileceği gibi hız profilleri arasındaki fark kaybolmakta ve test problemi (benchmark) sonuçları ile oldukça iyi bir uyum göstermektedir. Farklı yaklaşımlar ile elde edilen Nu_o değerleri test problemi (benchmark) sonuçları ile karşılaştırıldığında PP1'nin %2.5, diğer yaklaşımların ise %1'in altında hata içerdiği görülmektedir. Ağ noktası yoğunluğunun daha da sıklaştırılması (81×81) ile bütün yaklaşımlardaki hatalar %1'in altında olmaktadır.

Tablo 3.3: $Ra=10^5$ için sonuçların karşılaştırılması

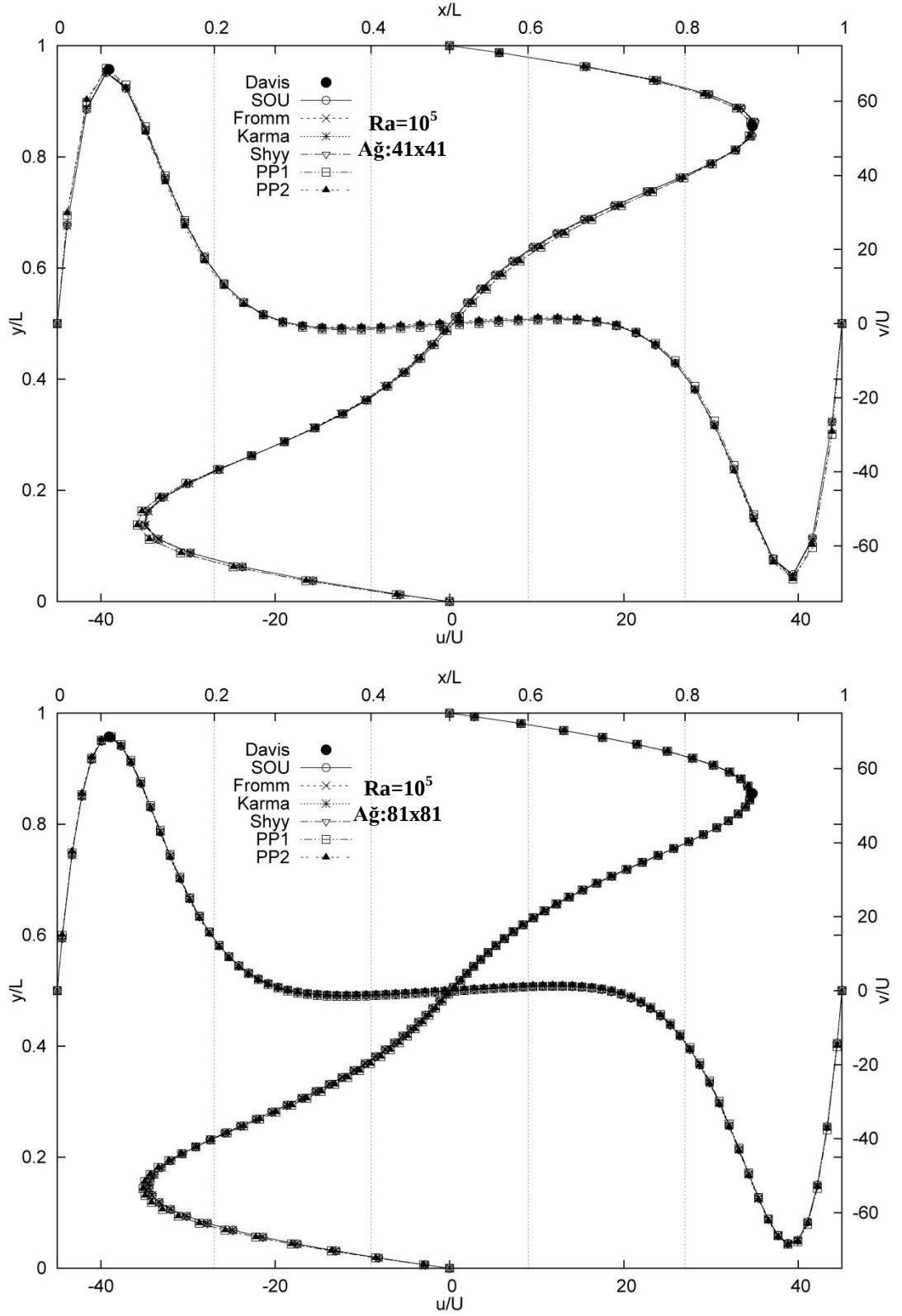
Ağ: 11x11					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu _o
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem Davis [103]	34.73	68.59	7.717	0.729	4.509
	0.855	0.066	0.081	1	
SOU	39.4162	69.658	9.041	0.7209	5.3437
	0.85	0.05	0.05	0.95	
Fromm	40.4516	71.0432	9.057	0.6898	5.3256
	0.85	0.05	0.05	0.95	
Karma	40.5012	70.2893	9.296	0.6815	5.2981
	0.85	0.05	0.05	0.95	
Shyy	39.5124	70.2471	9.1026	0.7307	5.3754
	0.85	0.05	0.05	0.95	
PP1	38.0561	71.6131	8.4952	0.8745	5.2714
	0.85	0.05	0.05	0.95	
PP2	34.5546	71.4515	8.3203	0.4032	4.7978
	0.85	0.05	0.15	0.95	
Ağ: 21x21					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu _o
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem Davis [103]	34.73	68.59	7.717	0.729	4.509
	0.855	0.066	0.081	1	
SOU	35.9418	65.1611	8.5045	0.7163	4.6516
	0.875	0.075	0.075	0.975	
Fromm	35.9278	66.3289	8.6313	0.7432	4.6715
	0.875	0.075	0.075	0.975	
Karma	36.0981	66.1792	8.5971	0.7437	4.6631
	0.875	0.075	0.075	0.975	
Shyy	36.0134	65.5609	8.5382	0.7194	4.6556
	0.875	0.075	0.075	0.975	
PP1	37.4491	66.0514	9.0792	0.6661	4.8966
	0.875	0.075	0.075	0.975	
PP2	34.5361	65.9988	9.0699	0.3307	4.6529
	0.875	0.075	0.075	0.975	

Tablo 3.3 (Devam): $Ra=10^5$ için sonuçların karşılaştırılması

Ağ: 41x41					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu _o
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem Davis [103]	34.73	68.59	7.717	0.729	4.509
	0.855	0.066	0.081	1	
SOU	35.0085	67.6933	7.9301	0.7447	4.5372
	0.8625	0.0625	0.0625	0.9875	
Fromm	34.8825	68.0122	7.9723	0.7448	4.5512
	0.8625	0.0625	0.0625	0.9875	
Karma	34.9243	67.9911	7.9629	0.7454	4.5499
	0.8625	0.0625	0.0625	0.9875	
Shyy	35.0562	67.8989	7.9358	0.7466	4.5394
	0.8625	0.0625	0.0625	0.9875	
PP1	34.5266	68.8946	8.1748	0.7148	4.6207
	0.8625	0.0625	0.0625	0.9875	
PP2	34.5124	68.9391	8.1755	0.3564	4.5122
	0.8625	0.0625	0.0625	0.9875	
Ağ: 81x81					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu _o
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem Davis [103]	34.73	68.59	7.717	0.729	4.509
	0.855	0.066	0.081	1	
SOU	34.4739	68.2913	7.7883	0.7387	4.5322
	0.8562	0.0688	0.0813	0.9937	
Fromm	34.5191	68.3748	7.7986	0.7394	4.5355
	0.8562	0.0688	0.0813	0.9937	
Karma	34.478	68.3948	7.7952	0.74	4.5355
	0.8562	0.0688	0.0813	0.9937	
Shyy	34.4976	68.3839	7.79	0.7404	4.5333
	0.8562	0.0688	0.0813	0.9937	
PP1	34.5672	68.5961	7.8448	0.7249	4.5465
	0.8563	0.0688	0.0812	0.9937	
PP2	34.564	68.5315	7.844	0.3622	4.4955
	0.8562	0.0688	0.0812	0.9937	



Şekil 3.7: Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Ra=10^5$



Şekil 3.7 (Devam): Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Ra=10^5$

$Ra=10^6$ için farklı yaklaşımlar kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 3.4 ve Şekil 3.8'de verilmiştir. 11×11 ağ noktası yoğunluğu kullanılarak elde edilen sonuçlar incelendiğinde PP2'nin u hızı için test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın, ancak v hızı için PP1'den sonra en uzak sonuç veren yaklaşım olduğu görülmektedir. Ortalama Nusselt değerleri için ise PP2'nin yaklaşık %18 hata ile en büyük hata içeren yaklaşım olduğu, bu yaklaşımı yaklaşık %10 hata ile PP1 yaklaşımının izlediği, diğer bütün yaklaşımlardaki hataların ise %5-6 civarında olduğu görülmektedir. Bu durumda, test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu SOU yaklaşımı vermektedir.

Şekil 3.8'den de görülebileceği gibi 21×21 ağ noktası yoğunluğu kullanılması ile yaklaşımların, hızlar için birbirine çok yakın sonuç verdiği görülmektedir. Nu_o incelendiğinde ise PP2'nin %8'lik hata ile test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonuç veren yaklaşım olduğu, bu yaklaşımı yaklaşık %16 hata ile Karma ve Fromm yaklaşımlarının takip ettiği, SOU, Shyy ve PP1'in ise yaklaşık %17.5 hata içerdiği görülmektedir.

Daha sık bir ağ (41×41) kullanılmasıyla farklı yaklaşımlar ile elde edilen hız değerleri arasındaki fark iyice azalmaktadır. Ancak aynı durum ortalama Nusselt sayılarında görülmemektedir. Test problemi (benchmark) sonuçları ile karşılaştırıldığında PP2'de yaklaşık %30'lik bir hata görülmektedir. PP1'deki hata yaklaşık %7 iken, diğer yaklaşımlardaki hata %2 civarında olup en az hata SOU yaklaşımda görülmektedir.

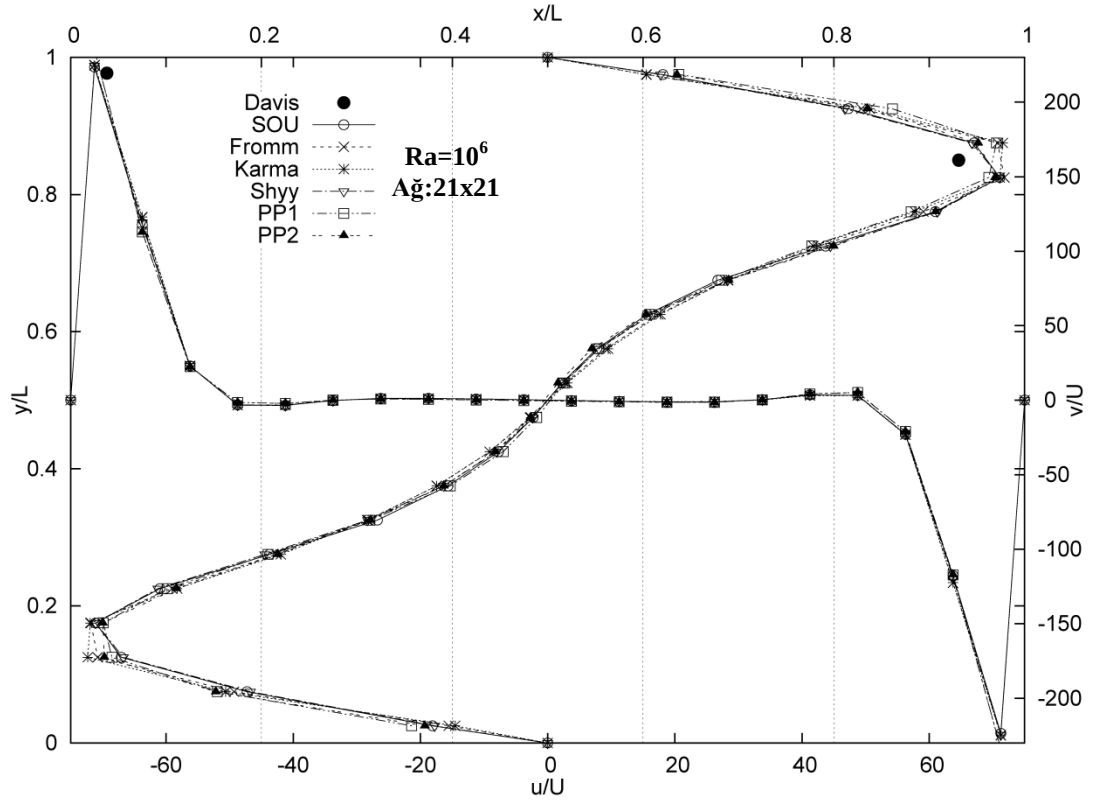
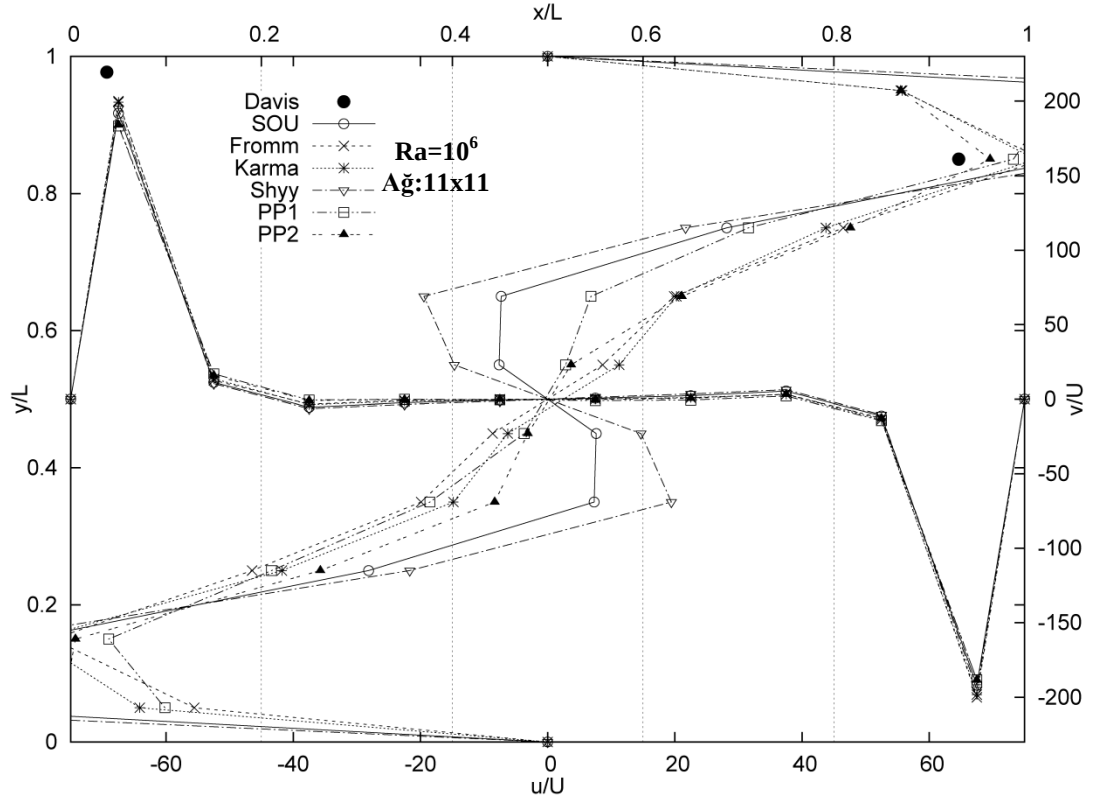
Şekil 3.8'den de görülebileceği gibi 81×81 ağ noktası yoğunluğu kullanılması ile yaklaşımların neredeyse aynı hız profilleri ürettiği görülmektedir. PP1'nin Nu_o değerleri için %2'lik bir hata içerdiği, diğer yaklaşımlardaki hatanın %0.5 civarında olduğu görülmektedir.

Tablo 3.4: $Ra=10^6$ için sonuçların karşılaştırılması

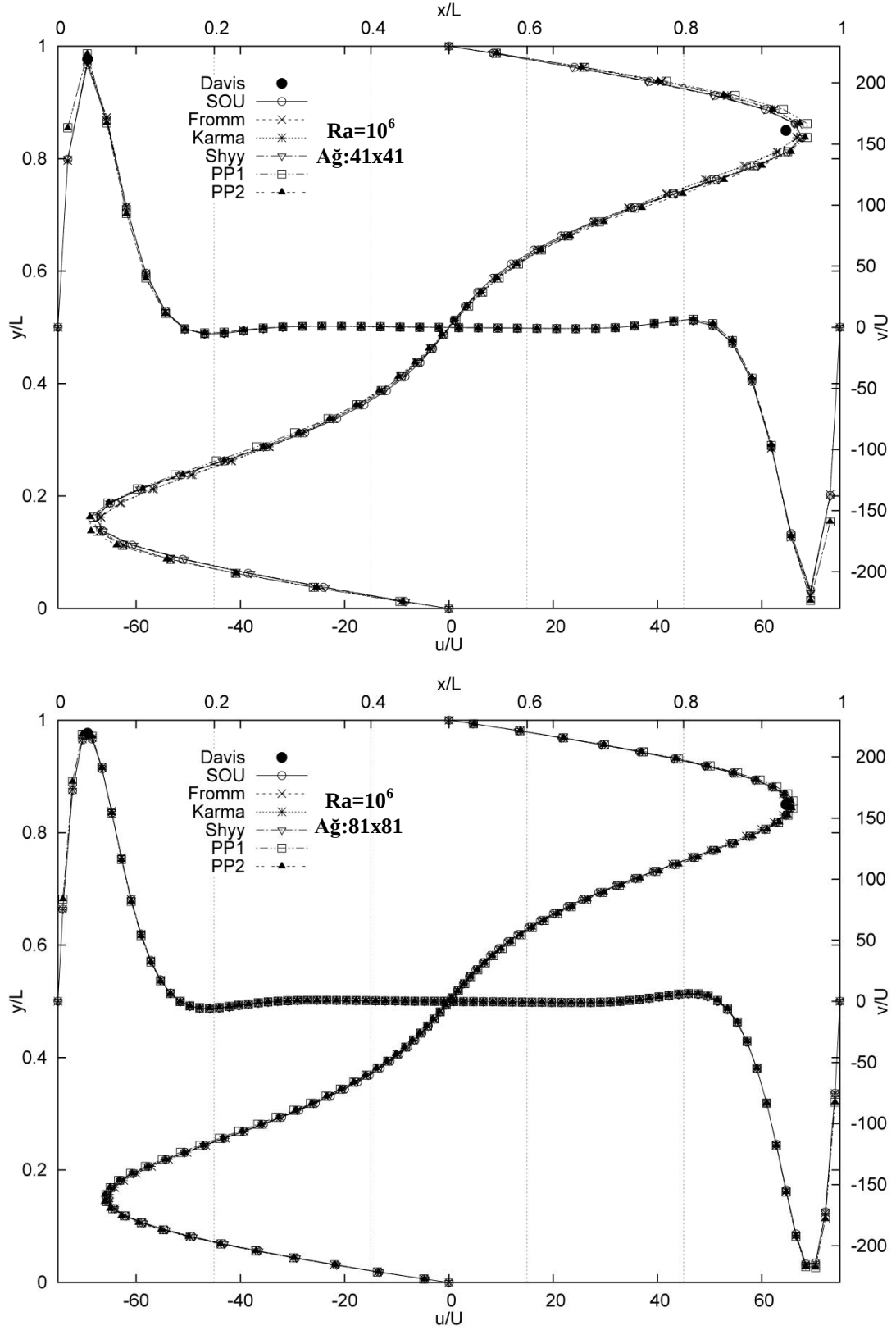
Ağ: 11x11					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu _o
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem Davis [103]	64.63	219.36	17.925	0.989	8.817
	0.85	0.0379	0.0378	1	
SOU	99.5573	191.8229	13.6986	1.9546	9.2789
	0.95	0.05	0.05	0.95	
Fromm	77.7719	199.9967	13.9341	1.8427	9.3152
	0.85	0.05	0.05	0.95	
Karma	76.7146	199.2341	14.2832	1.7368	9.2856
	0.85	0.05	0.05	0.95	
Shyy	117.9171	194.9303	13.5714	2.0649	9.3356
	0.95	0.05	0.05	0.95	
PP1	80.6058	183.304	10.9098	3.0011	7.9442
	0.95	0.05	0.05	0.95	
PP2	69.5697	184.011	10.6379	1.3874	7.2357
	0.85	0.05	0.15	0.95	
Ağ: 21x21					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu _o
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem Davis [103]	64.63	219.36	17.925	0.989	8.817
	0.85	0.0379	0.0378	1	
SOU	71.1154	223.5698	20.6857	0.7672	10.3612
	0.825	0.025	0.025	0.975	
Fromm	71.8397	224.894	20.5193	0.7727	10.2221
	0.825	0.025	0.025	0.975	
Karma	71.5681	224.6104	21.1655	0.7694	10.199
	0.875	0.025	0.025	0.975	
Shyy	71.0961	224.4735	20.7742	0.777	10.3843
	0.825	0.025	0.025	0.975	
PP1	70.5518	234.6359	18.6792	0.8978	10.352
	0.875	0.025	0.025	0.975	
PP2	70.3581	234.5919	18.4965	0.428	9.8584
	0.825	0.025	0.075	0.975	

Tablo 3.4 (Devam): $Ra=10^6$ için sonuçların karşılaştırılması

Ağ: 41x41					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu ₀
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem1 Davis [103]	64.63	219.36	17.925	0.989	8.817
	0.85	0.0379	0.0378	1	
SOU	67.6986	215.0251	19.6652	0.9485	9.0028
	0.8375	0.0375	0.0125	0.9875	
Fromm	66.8373	218.6147	19.902	0.9947	9.0465
	0.8625	0.0375	0.375	0.9875	
Karma	66.8602	218.5205	19.9177	0.9971	9.0385
	0.8625	0.0375	0.0125	0.9875	
Shyy	67.7611	217.053	19.7253	0.9526	9.0185
	0.8375	0.0375	0.0125	0.9875	
PP1	68.7112	223.7009	20.6545	0.9082	9.4377
	0.8625	0.0375	0.0375	0.9875	
PP2	68.3391	223.6116	13.7482	0.3004	6.114
	0.8375	0.0375	0.0375	0.9875	
Ağ: 81x81					
	U _{maks}	V _{maks}	Nu _{maks}	Nu _{min}	Nu ₀
	y _{maks}	x _{maks}	y _{maks}	y _{min}	
Test Problem1 Davis [103]	64.63	219.36	17.925	0.989	8.817
	0.85	0.0379	0.0378	1	
SOU	65.5137	214.7014	18.1327	0.9945	8.8435
	0.8438	0.0437	0.0313	0.9937	
Fromm	65.1521	215.5568	18.2329	0.9977	8.8644
	0.8562	0.0437	0.313	0.9937	
Karma	65.1354	215.5406	18.2052	0.9971	8.8632
	0.8562	0.0437	0.313	0.9937	
Shyy	65.4826	215.4946	18.1432	0.9962	8.8482
	0.8438	0.0437	0.313	0.9937	
PP1	66.029	218.5935	18.726	0.9622	8.9835
	0.8563	0.0313	0.0313	0.9937	
PP2	65.7278	218.6325	18.7146	0.4795	8.8625
	0.8438	0.0313	0.0313	0.9937	



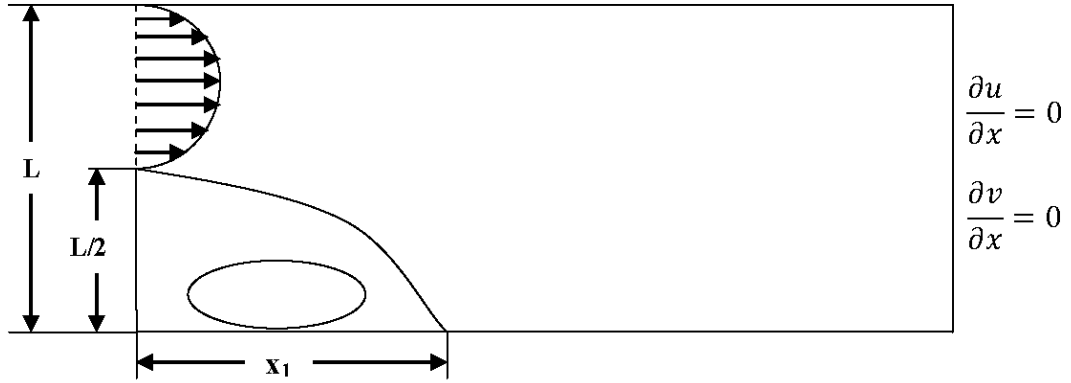
Şekil 3.8: Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Ra=10^6$



Şekil 3.8 (Devam): Oyuğun düşey eksenindeki ($x=0.5$) u hızı ve yatay eksenindeki ($y=0.5$) v hızı değişimleri için sonuçların karşılaştırılması. $Ra=10^6$

3.3. Geriye Bakan Bir Basamak Arkasındaki Akış Problemi

Geriye bakan bir basamak arkasındaki akış problemi, yeni geliştirilen kodların veya yaklaşımların testleri için kullanılan standart problemlerden birisidir. Şekil 3.9'da geometrisi verilen problem, pratikte borular veya kanallardaki ani geometrik değişimler sonucu görülebilir.



Şekil 3.9: Geriye bakan bir basamak arkasındaki akış probleminin geometrisi

Bu problem için Reynolds sayısı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (3.8)$$

Bu denklemde U ortalama hız değeri, L kanal yüksekliği, ν ise kinematik viskozitedir. Bu konuda Armaly ve diğ. [107] Reynolds sayısının 70 ile 8000 arasında, iki boyutlu laminar, geçiş ve türbülanslı akış bölgelerini incelemiştir. Çalışmalarında Reynolds sayısının 400'ten büyük olması durumunda, üç boyutlu ve zamana bağlı etkilerin oluştuğunu tespit etmişlerdir. Laminar akışla ilgili sayısal çalışmalarında, giriş şartı olarak deneylerden elde ettikleri parabolige yakın bir hız dağılımı kullanmışlardır. Tablo 3.1'de verilen yaklaşımlar kullanılarak yapılan çözülen bu problemde de hız giriş şartı olarak deneysel sonuçlardan yararlanarak elde edilen parabolik bir hız profili kullanılmıştır:

$$U=16(y-0.5)(1-y) \quad (3.9)$$

Şekil 3.9’de gösterildiği gibi parabolik hız profili $L/2$ yüksekliğinden itibaren başlamaktadır. Akışın çıkış bölgesinde ise herhangi bir hız değeri bilinmemektedir. Bu nedenle çıkışta türev sınır şartı kullanılmıştır. Diğer tüm katı yüzeylerde ise hızlar sıfır olarak alınmıştır.

Çözümler 100, 400 ve 600 olmak üzere üç farklı Reynolds sayısı ve 201×11 , 401×21 ve 801×41 olmak üzere üç farklı ağ noktası yoğunluğu için tekrar edilerek yapılmıştır. Sonuçların Armaly ve diğ. [107] ile karşılaştırılması için Reynolds sayısına bağlı olarak değişen tutunma uzunlukları karşılaştırılmış ve sonuçlar Tablo 3.5’te verilmiştir.

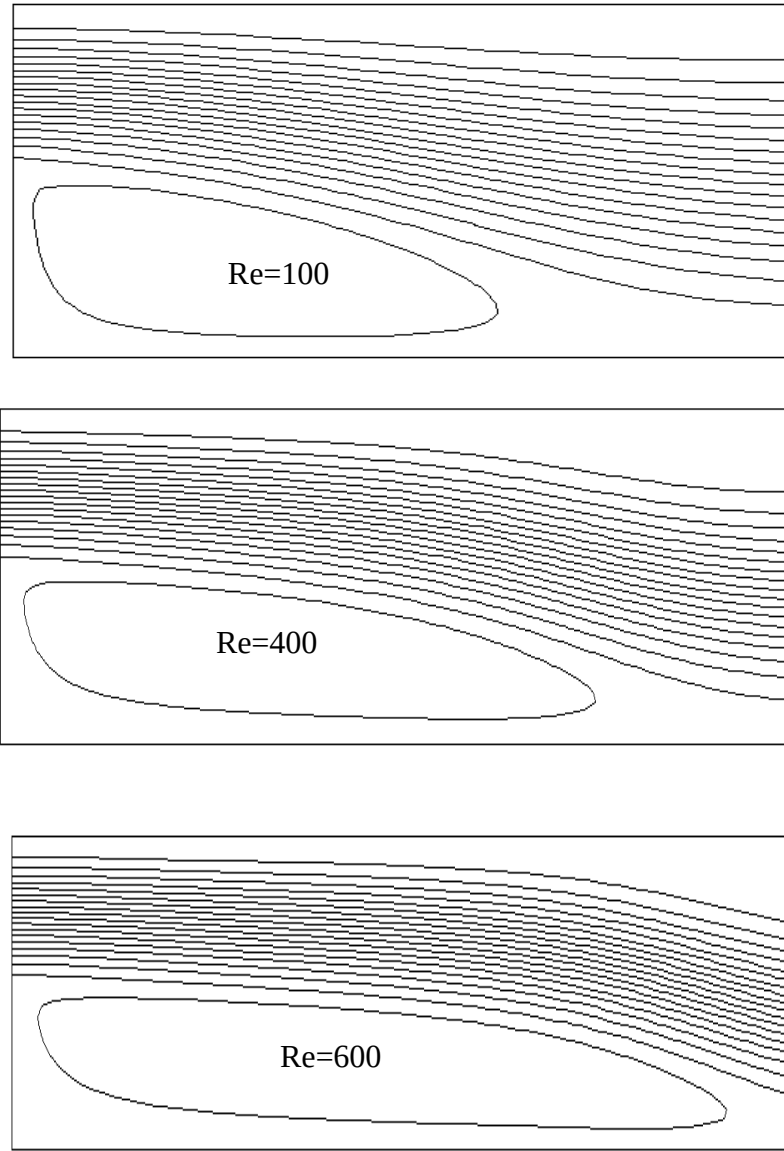
Tablo 3.5: Farklı Reynolds sayısı ve ağ yapısı için boyutsuzlaştırılmış tutunma uzunluklarının (x_1/L) karşılaştırılması

Re=100			
	Ağ: 201x11	Ağ: 401x21	Ağ: 801x41
SOU	2.850	3.135	3.196
Fromm	2.819	3.083	3.170
Karma	2.142	2.593	2.910
Shyy	2.827	3.124	3.190
PP1	2.598	2.997	3.133
PP2	2.662	3.059	3.156
Test Problemi Armaly ve diğ. [107]	3.2		
Re=400			
	Ağ: 201x11	Ağ: 401x21	Ağ: 801x41
SOU	5.645	7.733	8.488
Fromm	6.439	8.092	8.503
Karma	5.124	7.044	7.971
Shyy	4.900	7.543	8.385
PP1	5.305	7.732	8.349
PP2	5.614	7.730	8.368
Test Problemi Armaly ve diğ. [107]	8.7		
Re=600			
	Ağ: 201x11	Ağ: 401x21	Ağ: 801x41
SOU	6.685	9.343	10.493
Fromm	6.683	9.778	10.496
Karma	6.683	9.605	10.688
Shyy	5.243	9.005	10.319
PP1	4.994	9.251	10.303
PP2	5.378	8.936	10.354
Test Problemi Armaly ve diğ. [107]	11.4		

Tabloda Re=100 için sonuçlar incelendiğinde 201x11 ağ noktası yoğunluğu kullanılması durumunda bütün yaklaşımların birbirine yakın bir sonuç verdiği, test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu SOU yaklaşımının, en uzak sonucu ise Karma yaklaşımının verdiği görülmektedir. 401x21 ağ noktası yoğunluğunun kullanılması ile bütün yaklaşımlar test problemi (benchmark) sonuçlarına çok yakın bir sonuç vermektedir. Bu ağ yoğunluğu, Re=100 için ağdan bağımsız sonuç üretmek için yeterli olmaktadır. Ağın daha da sıklaştırılması ile yaklaşımlar arasındaki fark iyice azalmaktadır.

Farklı Reynolds sayıları için akım çizgilerinin verildiği Şekil 3.10'dan da görülebileceği gibi, Reynolds sayısının artmasıyla tutunma uzunluğu da artmaktadır. Tablo 3.5'te $Re=400$ için elde edilen sonuçlar incelendiğinde Reynolds sayısının artmasıyla bütün yaklaşımlardaki hataların arttığı görülmektedir. 201×11 ağ noktası yoğunluğu kullanıldığı durumda test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu yaklaşık %26 hata ile Fromm, en uzak sonucu ise yaklaşık %44 hata ile Shyy yaklaşımı vermektedir. Daha sık bir ağ yapısının kullanılması halinde bütün yaklaşımlardaki hatalar azalmakta, bu ağ yoğunluğunda da Fromm yaklaşımı en az hata içeren yaklaşım olmaktadır. Ağın sıklaştırılması ile yaklaşımlardaki hata neredeyse aynı mertebede olmakta, ancak SOU yaklaşımında undershoot (sınırlı) olmaktadır. Bu ağ yoğunluğunda en büyük hata %8 hata ile Karma yaklaşımındadır.

Zamana bağlı ve üç boyutlu etkilerin görüldüğü $Re=600$ için sonuçlar incelendiğinde seyrek ağda yapılan çözümlerde SOU, Fromm ve Karma yaklaşımlarının bir, Shyy, PP1 ve PP2 yaklaşımlarının başka bir grup oluşturdukları, ilk gruptaki yaklaşımların test problemi (benchmark) sonuçlarına daha yakın sonuç verdiği görülmektedir. 401×21 ağ noktası yoğunluğunun kullanılması ile yaklaşımlar arasındaki fark azalmaktadır. Bu durumda test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu yaklaşık %14 hata ile Fromm yaklaşımı, en uzak sonucu ise yaklaşık %22 hata ile PP2 vermektedir. İnce ağ (801×41) kullanılması halinde yaklaşımların test problemi (benchmark) sonucuna yaklaştığı, bu durumda en az hata içeren yaklaşım olan Karma yaklaşımının %6 hata içerdiği görülmektedir. Yaklaşımların bu Reynolds sayısında verdiği sonuçlar incelenirken, daha önce belirtildiği gibi $Re=400$ 'den sonra akışta üç boyutlu etkilerin görülebileceği dolayısıyla bu sonuçlarının çok güvenilir olamayacağı göz önüne alınmalıdır.



Şekil 3.10: Farklı Reynolds sayılarındaki akış çizgileri

4. SINIRLANDIRILMIŞ YÜKSEK ÇÖZÜNÜRLÜKLÜ YAKLAŞIMLAR

Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği'nde (HAD) ve Sayısal Isı Transferi'nde (Numerical Heat Transfer, NHT) konveksiyonun başarılı bir şekilde modellenmesi en zor konulardan birisidir. Kararlılık (stability), sınırlılık (boundedness) ve doğruluk (accuracy) konveksiyon teriminin ayrıklaştırılmasında kullanılan yaklaşımların en önemli özellikleridir. Diferansiyel denklemlerdeki konveksiyon terimlerinin sayısal analoglarının belirlenmesi, bu özellikler açısından çok önemlidir. Bu konuyla ilgili birçok araştırmacı ideal bir yöntem bulmak için yıllardır çalışmaktadır. Ancak bu özelliklerin hepsini aynı anda sağlayan bir yaklaşım henüz geliştirilememiştir. Yaklaşımların düzenlenmesindeki en büyük zorluk hem kararlılık hem sınırlılık hem de doğruluk özelliklerinin aynı anda sağlanamamasıdır [26].

Sayısal yaklaşımdaki kesme hatası terimi (truncation error term) ikinci mertebeden türevler içeriyorsa (FOU'de olduğu gibi), sonuçlar nümerik difüzyon yüzünden doğruluktan uzak olmaktadır. İkinci mertebeden olan CDS yaklaşımı kullanıldığında ise nümerik dispersiyon terimi (tek mertebeden türevler) yüzünden akış alanının büyük bir kısmında çözümde fiziksel olmayan dalgalanmalar (osilasyonlar) görülmektedir. Daha yüksek mertebeden merkezi farklar yaklaşımında osilasyonların boyutu bilinenin aksine daha da artmaktadır. İkinci mertebeden upwind (SOU) veya lineer upwind (LUD) olarak bilinen yaklaşım, CDS'a göre daha iyi sonuç vermesine ve kararlı olmasına rağmen, iki boyutlu akışın sayısal ağa dik olmadığı durumlarda overshootlara (sınırustü) veya undershootlara (sınıraltı) sebep olabilmektedir. Üçüncü mertebeden olan QUICK yaklaşımı nümerik difüzyon içermemesi ve konvektif stabilite özelliğine sahip olması ve bunun sonucunda yukarıda bahsi geçen yöntemlere göre daha iyi sonuç vermesi sebebiyle HAD'da çok kullanım alanı bulmuştur. Ancak, yüksek konvektif akışlarda QUICK yaklaşımı overshootlara (sınırustü), undershootlara (sınıraltı) ve yüksek gradyenin her iki tarafında osilasyonlara sebep olabilmektedir [23, 26].

Yukarıda anlatıldığı gibi sadece tek bir fonksiyon ile ifade edilen klasik ayrıklaştırma yaklaşımlarından hiçbirisi keskin gradyenlerin olduğu noktalarda çözümün monotonik olmasını sağlayarak hassas bir sonuç verememektedir. Bu nedenle, osilasyonları engellemek için birçok metot geliştirilmiştir. Bu metotlar iki gruba ayrılabilir. Bu metotlardan biri harmanlama (blending) stratejisini uygulayıp ya FOU yaklaşımına overshoot (sınırustü) veya undershoot (sınıraltı) olmadan keskin gradyenleri çözmesi için anti-difüzyon terim eklemek veya tam tersine, sınırlandırılmamış (unbounded) olan yüksek mertebeden bir yaklaşıma osilasyonları söndürmesi için difüzyon eklemektir. Yerel gradyene bağlı olarak CDS yaklaşımına nümerik difüzyon eklenen CONDIF [108] (Controlled Numerical Diffusion with Internal Feedback) yaklaşımı buna örnek olarak verilebilir. Genellikle yerel çözüm davranışına bağlı olan harmanlama derecesinin belirlenmesi, bu tarz metotların başarılı bir şekilde uygulanması için çok önemlidir. Bu yöntemler genellikle doğruluk (accuracy) ve sınırlılık (boundedness) özellikleri arasında arzu edilen optimum harmanlama derecesini sağlayamazlar. Bu metotlar FOU göre çok daha doğru sonuç vermelerine rağmen hâlâ nümerik difüzyon üretmekte, dolayısıyla keskin gradyenleri çözmekte yetersiz kalmaktadır. Harmanlama kriterinin yerel çözüm davranışından ziyade, yerel Peclet sayısına bağlı olduğu Spalding'in Hibrid yaklaşımı ve Patankar'ın Power Law yaklaşımı akı-harmanlama yaklaşımları olarak sınıflandırılabilir [49].

Fiziksel olmayan osilasyonları engellemek için başka bir metot ise kompozit akı-sınırlama yaklaşımıdır. Kompozit yüksek çözünürlüklü yaklaşımlarda, hücre ara yüzündeki nümerik akı, akı-sınırlama yaklaşımı kullanılarak sınırlı (bounded) olmaya zorlanır. Toplam Değişimin Azalması (Total Variational Diminishing, TVD) akı-sınırlayıcıları kompozit yaklaşımlara iyi bir örnektir. Yüksek çözünürlüklü kompozit yaklaşımların tasarımı ve incelenmesi için literatürde iki yöntem mevcuttur; Normalize Edilmiş Değişken (Normalized Variable, NV) yöntemi ve Akı-Sınırlayıcı (Flux limiter, FL) yöntemi. Yaklaşımların değerlendirilmesinde ise sınırlılık (boundedness) kriteri olarak; Konveksiyon-Sınırlılık Kriteri (Convection Boundedness Criteria, CBC) ve Toplam Değişimin Azalması (TVD) kriterleri kullanılmaktadır.

Bu bölümde öncelikle yüksek çözünürlüklü monotonik yaklaşımların (high resolution monotonic schemes) sınırlılık (boundedness) özelliğine sahip olabilmesi için önerilen şartlar anlatılmış, daha sonra literatürde bu yaklaşımların değerlendirilmesinde kullanılan formülasyonlar ve diyagramlar verilmiş ve bunlar arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir.

4.1. Normalize Edilmiş Değişken Formülasyonu

Normalize Edilmiş Değişken Formülasyonu (Normalized Variable Formulation, NVF), yüksek mertebeden kompozit yaklaşımlar arasındaki ilişkiyi basitleştirmek için Leonard [22] tarafından önerilmiştir. NV formunda yazılan yaklaşımların daha rahat karşılaştırabilmesi için ise Normalize Edilmiş Değişken Diyagramı (Normalized Variable Diagram, NVD) yine Leonard [23] tarafından önerilmiş ve daha sonra Gaskell ve Lau [24] tarafından geliştirilmiştir.

Şekil 4.1a'da gösterilen kontrol hacminde ϕ_U , ϕ_C , ϕ_D ve ϕ_f akış yönüne bağlı olarak sırasıyla akış üstü (U, upwind), merkez (C, central), akış altı (D, downwind) ve ara yüz (f, interface) değerlerini göstermektedir. ϕ_f , ara yüz değerini bulmak için akış üstü temelli yüksek mertebeden bir yaklaşım;

$$\phi_f = f(\phi_U, \phi_C, \phi_D) \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. ϕ değişkeni

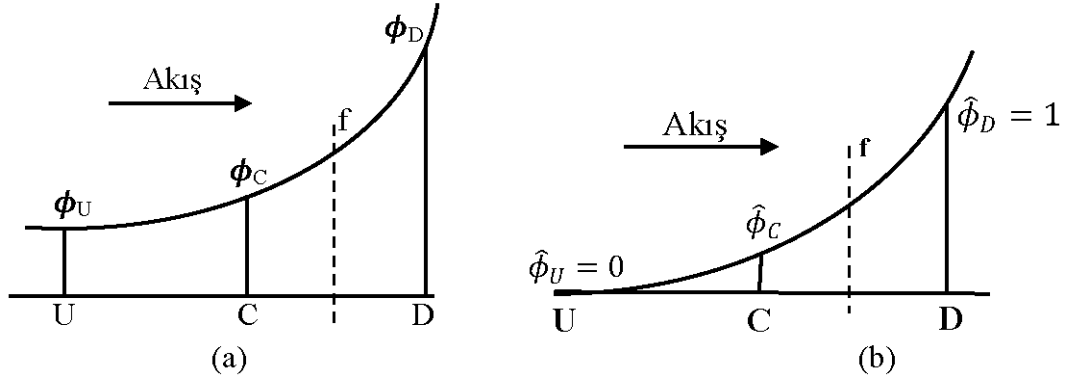
$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (4.2)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılırsa Denklem (4.1) aşağıdaki boyutsuz formda yazılabilir:

$$\hat{\phi}_f = f(\hat{\phi}_U, \hat{\phi}_C, \hat{\phi}_D) \quad (4.3)$$

$\hat{\phi}_D = 1$ ve $\hat{\phi}_U = 0$ olacağı için $\hat{\phi}_f = f(\hat{\phi}_C)$ şeklinde basitleşir (Şekil 4.1b). Konveksiyon terimlerini ayrıklaştırmada kullanılan klasik yaklaşımlar ve bu

yaklaşımların normalize edilmiş formu Tablo 4.1’de, grafiksel gösterimi ise normalize edilmiş değişken diyagramında Şekil 4.2’de verilmiştir.

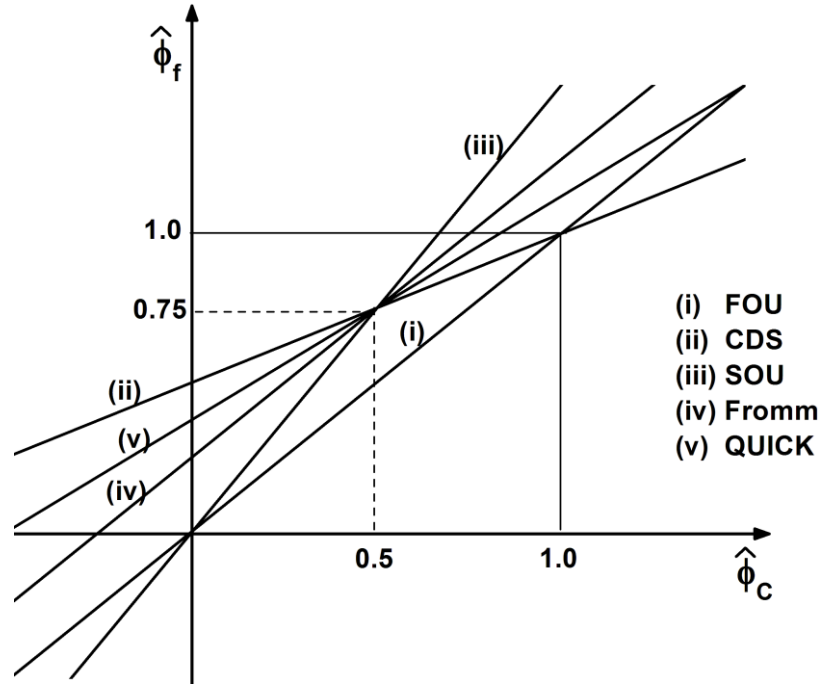


Şekil 4.1: Normalize etme işlemi a) Orijinal değişkenler b) Normalize edilmiş değişkenler

Tablo 4.1: Konveksiyon teriminin ayrıklaştırılmasında kullanılan bazı yaklaşımların normalize edilmiş formülasyonları

Yaklaşım	Sonlu fark gösterimi	NVF
FOU	$\phi_f = \phi_c$	$\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c$
CDS	$\phi_f = \frac{1}{2}(\phi_c + \phi_D)$	$\hat{\phi}_f = \frac{1}{2}(\hat{\phi}_c + 1)$
SOU	$\phi_f = \frac{1}{2}(3\phi_c - \phi_U)$	$\hat{\phi}_f = \frac{3}{2}\hat{\phi}_c$
FROMM	$\phi_f = \phi_c + \frac{1}{4}(\phi_D - \phi_U)$	$\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c + \frac{1}{4}$
QUICK	$\phi_f = \frac{1}{8}(3\phi_D + 6\phi_c - \phi_U)$	$\hat{\phi}_f = \frac{3}{4}\hat{\phi}_c + \frac{3}{8}$

Bir boyutlu stabilite analizine dayanılarak, kritik Peclet sayısı ile yaklaşımların karakteristik çizgileri arasındaki ilişki NVD diyagramında görülebilir. Karakteristik çizginin düşey eksenini kestiği noktanın veya NV formundaki downwind değerinin tersi, o yaklaşımın kritik Peclet sayısına karşılık gelmektedir [26]. Tablo 4.2’de yaklaşımların kritik Peclet sayısı ile downwind noktasının katsayısı arasındaki ilişki gösterilmiştir.



Şekil 4.2: Konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan bazı yaklaşımların NVD’de gösterimi

Leonard [27] üniform bir grid için (0.5,0.75) noktasından geçen bir yaklaşımın en az ikinci mertebeden olduğunu göstermiştir. Bu yüksek çözünürlüklü bir yaklaşımın nasıl olması konusunda bir ipucu verir. Tablo 4.3’de görüldüğü gibi birçok yüksek çözünürlüklü yaklaşım bu esasa dayanır.

Tablo 4.2: Kritik Peclet sayısı ile ϕ_D ’nin katsayısı arasındaki ilişki [26]

Yaklaşım	ϕ_D ’nin katsayısı	Kesişme noktası	Kritik Pe sayısı
FOU	0	0	∞
CDS	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
SOU	0	0	∞
FROMM	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	4
QUICK	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{8}{3}$

4.2. Konveksiyon Sınırlama Kriteri

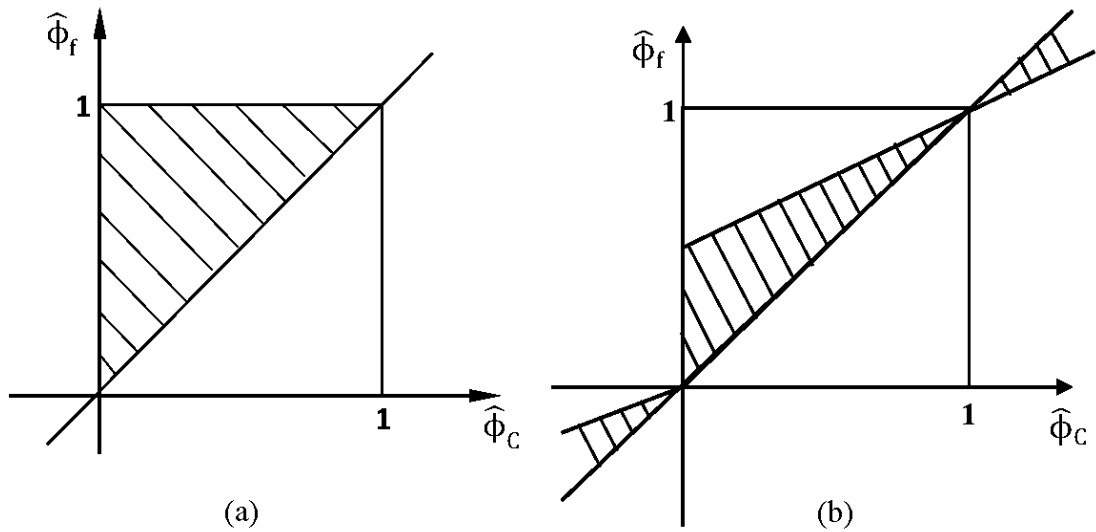
Normalize edilmiş değişken analizine dayanarak, Gaskel ve Lau [24], zamandan bağımsız akışlar için yüksek çözünürlüklü akı-sınırlayıcı yaklaşımların sınırlılık (boundedness) özelliğine sahip olup olmadıklarının değerlendirilmesinde kolaylık sağlayan Konveksiyon Sınırlama Kriteri'ni (Convective Boundedness Criterion, CBC) önermiştir. Bu kriter gere, sınırlılık özelliğine sahip bir yaklaşım aşağıdaki şartları sağlamalıdır:

$$\hat{\phi}_c \leq 0 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = f(\hat{\phi}_c) = \hat{\phi}_c \quad (4.4a)$$

$$0 < \hat{\phi}_c < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_c \leq \hat{\phi}_f \leq 1 \quad (4.4b)$$

$$\hat{\phi}_c \geq 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = f(\hat{\phi}_c) = \hat{\phi}_c \quad (4.4c)$$

Yukarıda tanımlanan kriterler Şekil 4.3a'da taralı alan ve bu alanın dışında (0,0) ile (1,1) noktasından geçen doğru ile gösterilmiştir. Eğer bir yaklaşımın karakteristik eğrisi bu bölge içerisinde kalıyorsa, bu yaklaşım sınırlılık (boundedness) özelliğini taşır.



Şekil 4.3: a) Gaskell ve Lau [24] tarafından önerilen CBC bölgesi b) Yu ve diğ. [26] tarafından genişletilmiş CBC bölgesi (ECBC)

Uzun bir süre, bu kriterler bir yaklaşımın konvektif sınırlılık (convective-boundedness) özelliğine sahip olabilmesi için hem yeter hem gerek koşul olarak görülmüştür. Ancak Yu ve diğ. [26], Gaskell ve Lau [24] tarafından önerilen CBC'nin yeter şart olduğunu, gerek şart olmadığını ve aşağıdaki şartları sağlayan bir yaklaşımın da sınırlı (bounded) olduğunu göstermişlerdir.

$$\hat{\phi}_c \leq 0 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_c \leq \hat{\phi}_f \leq \frac{\hat{\phi}_c}{2} \quad (4.5a)$$

$$0 < \hat{\phi}_c < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_c \leq \hat{\phi}_f \leq \frac{\hat{\phi}_c + 1}{2} \quad (4.5b)$$

$$\hat{\phi}_c \geq 1 \quad \text{ise} \quad \frac{\hat{\phi}_c + 1}{2} \leq \hat{\phi}_f \leq \hat{\phi}_c \quad (4.5c)$$

Genişletilmiş Konvektif Sınırlama Kriteri (Extended Convective Boundedness Criteria, ECBC) olarak tanımlanan bu kriter Şekil 4.3b'de taralı alan ile gösterilmiştir. Buna göre, $\hat{\phi} < 0$ veya $\hat{\phi} > 0$ olan bölgede yaklaşım köşegensel (diagonal) olmak zorunda değildir. Ayrıca Yu ve diğ. [26] bu bölgede kalan iki yeni yaklaşım önermiş, bu yaklaşımların hem hassas hem de sınırlama (bounded) özelliğine sahip olduklarını göstermiş ve yaklaşımların hassasiyetinin çoğunlukla $\hat{\phi} \in [0,1]$ arasındaki bölgeye bağlı olduğunu iddia etmişlerdir.

Hou ve diğ. [27], Gaskell ve Lau'nun tavsiye ettiği CBC (G/L-CBC) bölgesinin, yaklaşımın hassasiyetini dikkate almadığı, sadece konvektif sınırlılığı sağlamak üzere tasarlandığını ve aşağıdaki şartları sağlayan (Denklemler (4.6)) bir yaklaşımın hem yüksek hassasiyet hem de sınırlılık özelliğine sahip olacağını iddia etmişlerdir. Ayrıca, G/L-CBC şartını sağlayan bütün yaklaşımların fiziksel olarak mantıklı bir sonuç vermeyeceklerini iddia etmişlerdir.

$$\hat{\phi}_c \leq 0 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_c \leq \hat{\phi}_f \leq \frac{\hat{\phi}_c}{2} \quad (4.6a)$$

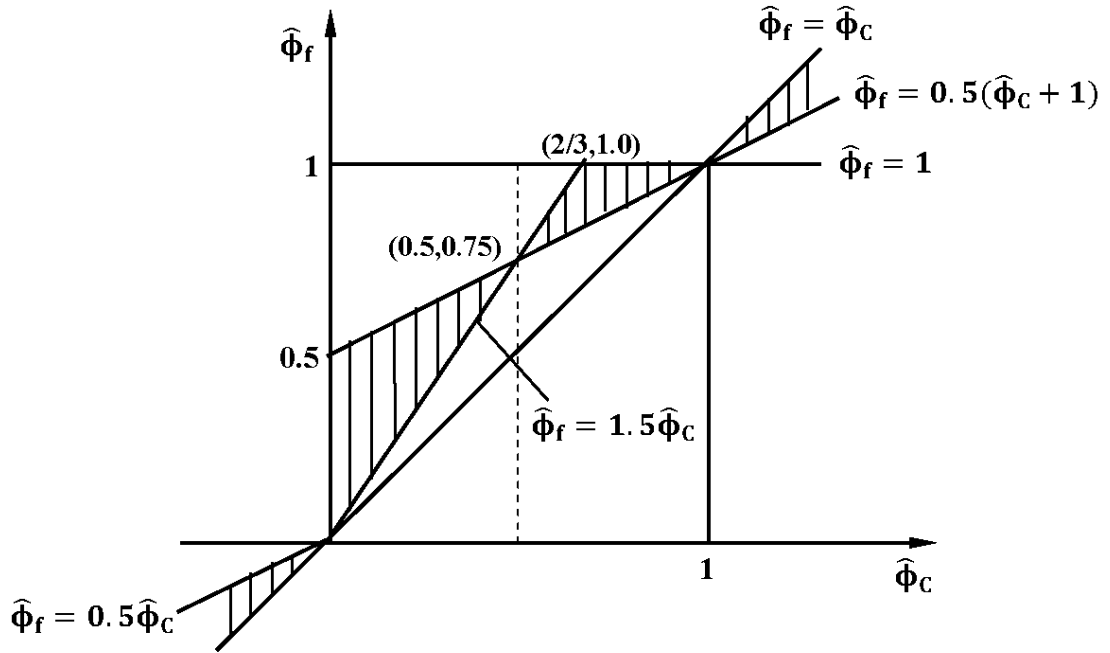
$$0 < \hat{\phi}_c < \frac{1}{2} \quad \text{ise} \quad \frac{3}{2}\hat{\phi}_c \leq \hat{\phi}_f \leq \frac{\hat{\phi}_c + 1}{2} \quad (4.6b)$$

$$\frac{1}{2} < \hat{\phi}_c < \frac{2}{3} \quad \text{ise} \quad \frac{\hat{\phi}_c + 1}{2} \leq \hat{\phi}_f \leq \frac{3}{2}\hat{\phi}_c \quad (4.6c)$$

$$\frac{2}{3} < \hat{\phi}_c < 1 \quad \text{ise} \quad \frac{3}{2}\hat{\phi}_c \leq \hat{\phi}_f \leq \frac{\hat{\phi}_c + 1}{2} \quad (4.6d)$$

$$\hat{\phi}_c \geq 1 \quad \text{ise} \quad \frac{\hat{\phi}_c + 1}{2} \leq \hat{\phi}_f \leq 1 \quad (4.6e)$$

Bu kriterler Şekil 4.4'te taralı bölge ile gösterilmiştir. Bugüne kadar önerilen yüksek çözünürlüklü kompozit yaklaşımlarının hepsi (SHARP hariç) Şekil 4.4'te gösterilen taralı alan içerisinde kalmaktadır.



Şekil 4.4: Hou ve diğ. tarafından tavsiye edilen CBC bölgesi [27]

Daha sonra yapılan çalışmalarda Wei ve diğ. [59], diagonal (iç) bölge ile dış bölge arasındaki bir ilişki olduğunu göstermişlerdir. Denklem (4.7)'de verilen ve Genelleştirilmiş Konvektif Sınırlılık Kriteri (General Convective Boundedness

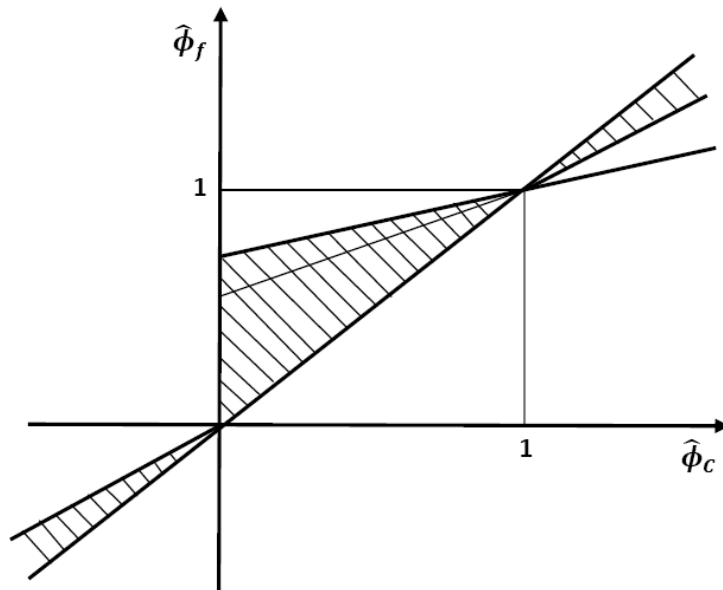
Criteria, GCBC) olarak adlandırılan bu kriterleri sağlayan bir yaklaşımın sınırlılık (boundedness) özelliğine sahip olacağını belirtmişlerdir.

$$\hat{\phi}_c \leq 0 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_c, \beta\hat{\phi}_c] \quad (4.7a)$$

$$0 < \hat{\phi}_c < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_c, (1 - \beta)\hat{\phi}_c + \beta] \quad (4.7b)$$

$$\hat{\phi}_c \geq 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f \in [(1 - \beta)\hat{\phi}_c + \beta, \hat{\phi}_c] \quad (4.7c)$$

Burada β , 0.5 ila 1 arasında değişen bir parametredir. Şekil 4.5’deki taralı bölge ile gösterilen GCBC bölgesinin en önemli özelliği sınırlarının hareket edebilmesidir. İç bölgenin üst sınırı $\hat{\phi}_f = 1$ hattı ile kesikli çizgi arasında, sol dıştaki bölgenin üst sınırı diyagonal ile kesikli çizgi arasında ve sağ dıştaki bölgenin alt sınırı diagonal ile kesikli çizgi arasında hareket edebilir. Buna göre, dış bölgenin genişlemesi iç bölgede bir daralmaya sebep olur. Ya da iç bölgedeki daralma, dış bölgenin genişlemesi ile dengelenebilir. GCBC, $\beta=0.5$ olduğunda G/L CBC ile, $\beta=1.0$ olduğunda ise ECBC ile aynı olmaktadır. Bu nedenle G/L CBC ve ECBC, GCBC’nin iki limit durumudur denilebilir.



Şekil 4.5: Wei ve diğ. tarafından önerilen GCBC bölgesi [28].

4.3. Toplam Değişimin Azalması Yöntemi

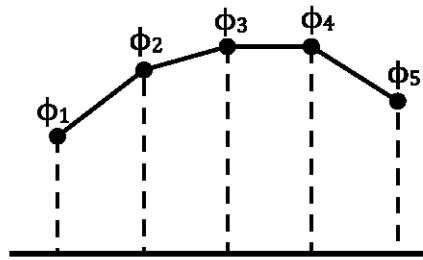
Toplam Değişimin Azalması Yöntemi (Total Variation Diminishing, TVD) ilk defa Harten [29] tarafından zamana bağlı gaz dinamiği için kararlı, osilasyon yapmayan monotonik yüksek mertebeden yaklaşımların geliştirilmesi amacıyla geliştirilmiştir. Buna göre, monotonik bir yaklaşım ile elde edilen çözümde:

- Yerel piklerin (extrama) olmaması
- Mevcut yerel minimumun azalan, yerel maksimumun ise artan olmaması gerekir.

Kısaca çözümde overshoot (sınırustü) veya undershoot (sınıraltı) olmaması gerekir denilebilir. Bu özelliğin ayrıklaştırılmış çözümdeki uygulamasına Toplam Değişimin Azalması (TVD) denir. Toplam değişim, ayrıklaştırılmış çözümün (ϕ) genel bir özelliğidir ve belirli bir zaman adımında aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$TV(\phi) = \sum_{n=1}^N |\phi_{i+1} - \phi_i| \quad (4.8)$$

Burada n hücre sayısını göstermektedir. Örneğin Şekil 4.6'da gösterilen ayrıklaştırılmış noktalardan oluşan bir sistem ele alınırsa, TVD koşulu Denklem (4.9)–(4.10) ile ifade edilir.



Şekil 4.6: Ayrıklaştırılmış noktalardan oluşan bir sistem

$$TV(\phi^n) = |\phi_2 - \phi_1| + |\phi_3 - \phi_2| + |\phi_4 - \phi_3| + |\phi_5 - \phi_4| \quad (4.9)$$

$$TV(\phi^n) = |\phi_3 - \phi_1| + |\phi_5 - \phi_3| \quad (4.10)$$

Eğer çözümün toplam değişimi zamanla artmıyorsa bu yaklaşım monotonik olma şartını sağlar ve TVD özelliklidir denir. TVD özelliği en genel haliyle Denklem (4.11) ile ifade edilebilir:

$$TV(\phi^{n+1}) \leq TV(\phi^n) \quad (4.11)$$

Burada n zaman adımını veya iterasyonu göstermektedir. Bu özellik, çözümün sınırlandırılmış (bounded) olmasını sağlaması yanında çözümün yakınsamasında da önemli katkı sağlar.

Yüksek çözünürlüklü monotonik yaklaşımlarının dizaynında kullanılan TVD ile CBC arasındaki ilişki, Lin ve Lin [30] tarafından NV formunda verilmiştir.

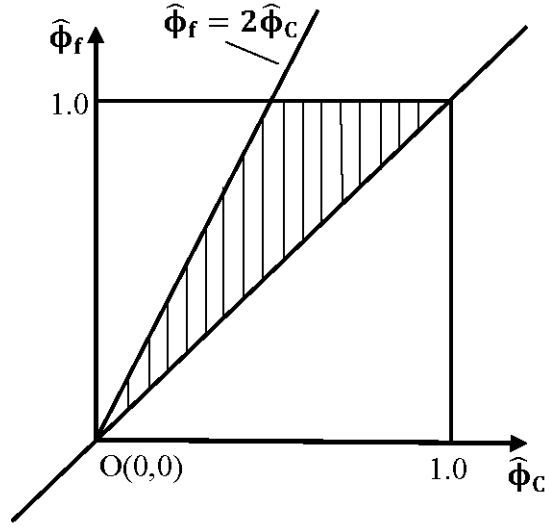
$$\hat{\phi}_c \leq 0 \text{ veya } \hat{\phi}_c \geq 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c \quad (4.12a)$$

$$0 < \hat{\phi}_c < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f \geq \hat{\phi}_c \quad (4.12b)$$

$$\hat{\phi}_f \leq 2\hat{\phi}_c \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f \leq 1 \quad (4.12c)$$

Şekil 4.7’de NVD diyagramında taralı bölge ile gösterilen TVD kriterinin CBC yöntemine göre daha sınırlayıcı olduğu açıkça görülmektedir.

TVD genellikle sıkıştırılabilir akışlarda keskin gradyenlerin olduğu yerlerde veya şokların olduğu süreksizliklerde kullanılır ve çözümde gerçek olmayan osilasyonları engeller. CBC kriteri ise genellikle sıkıştırılamaz akışlarda kullanılır. TVD kriterlerini sağlayan bir yaklaşım her zaman CBC şartlarını da sağlar, fakat tam tersi bir durum doğru değildir.



Şekil 4.7: TVD kriterinin NVD’de gösterimi [30]

4.4. Yüksek Çözünürlüklü Yaklaşımlar

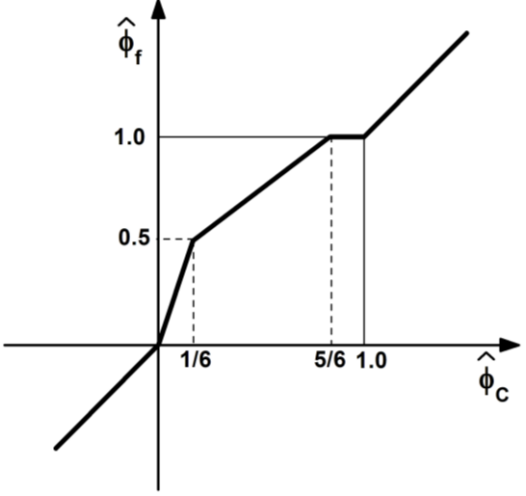
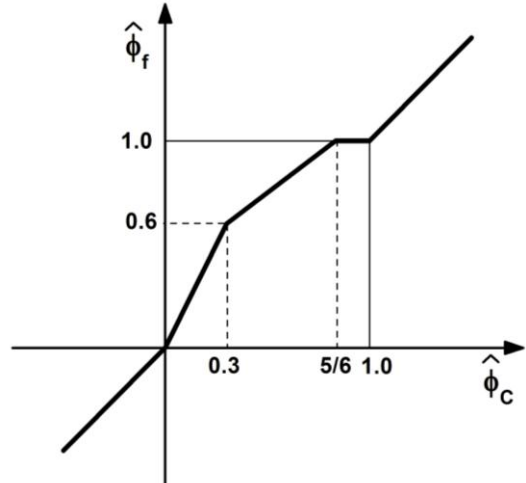
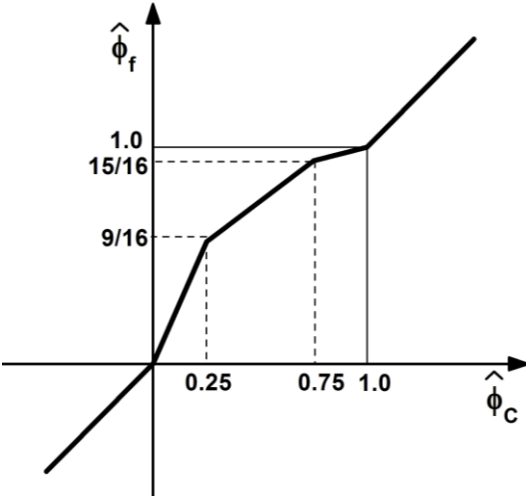
Günümüze kadar yüksek çözünürlüklü birçok yaklaşım (High Resolution Schemes, HRS) geliştirilmiştir. Bu çalışmada incelenen yüksek çözünürlüklü yaklaşımların NVF formu Tablo 4.3’te verilmiştir. Tablonun sağ tarafında ise her yaklaşımın NVD’deki gösterimi verilmiştir. Yüksek çözünürlüklü yaklaşımların bazıları lineer yaklaşımların sınırlandırılmış halleridir. Örneğin, OSHER [34] sınırlandırılmış SOU, MUSCL [40] sınırlandırılmış Fromm, SMART [24] sınırlandırılmış QUICK olarak tanımlanabilir. Bazı yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar literatürde farklı isimler altında birçok defa yayımlanmıştır. Örneğin SMARTER [36], NOTABLE [37], CHARM [38] ve ISNAS [39] yaklaşımları arasında hiçbir fark yoktur. NVD ile FLD arasındaki ilişki incelendiğinde, bazı yaklaşımların aynı oldukları halde farklı diyagramlarda değerlendirilmesinden dolayı farklı adlandırıldığı görülmektedir. Örneğin, NVD ile gösterilen SOUCUP [31], BSOU [32] ve HLPa [33] yaklaşımları FLD ile gösterilen MINMOD [29], OSHER [34] ve CLAM [35] yaklaşımları ile tamamen aynıdır. Tablo 4.3 incelendiğinde, bazı yaklaşımlar arasında çok ufak farklılıklar olduğu görülebilir. Örneğin, SMART ile WACEB ve COPLA ile CUBISTA arasındaki tek fark orijinden çıkan doğrunun eğimidir. Dikkat çeken diğer bir nokta CLAM, EULER, SMARTER, H-QUICK ve OSPRE yaklaşımlarının diğer yaklaşımlardan farklı olarak NVD iç bölgesinde lineer olmayan bir karakteristik

eğriye sahip olmalarıdır. SHARP ve SECBC yaklaşımları diğer yaklaşımlardan farklı olarak NVD dış bölgede FOU karakteristik doğrusunu takip etmemektedir.

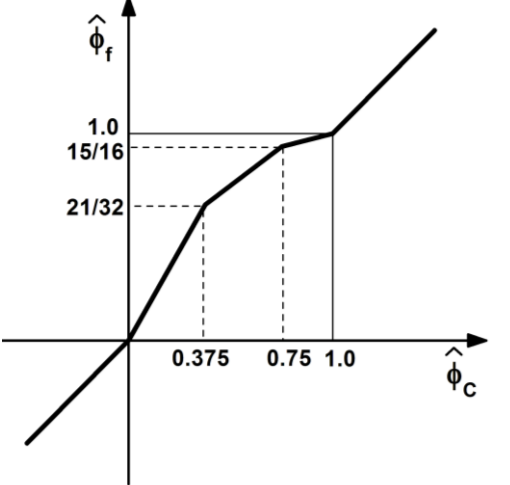
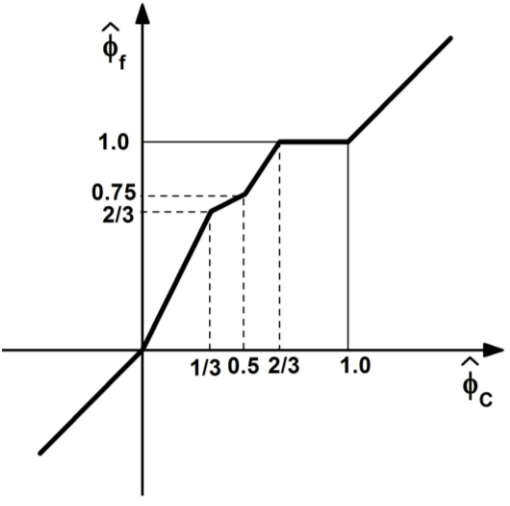
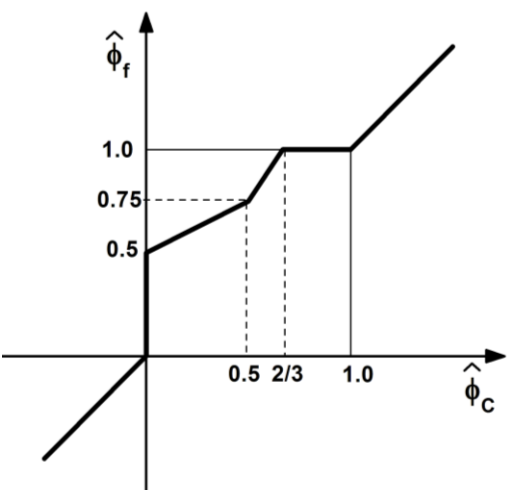
Tablo 4.3: Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar ve bu yaklaşımların NVD’de gösterimi

Fonksiyonel İlişki: $\hat{\phi}_f = f(\hat{\phi}_c)$	NVD Gösterimi
OSHER [34], BSOU [32] $0 \leq \hat{\phi}_c \leq \frac{2}{3} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{2} \hat{\phi}_c$ $\frac{2}{3} \leq \hat{\phi}_c < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 1$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c$	
MUSCL [35], MLU [47] $0 \leq \hat{\phi}_c \leq \frac{1}{4} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 2\hat{\phi}_c$ $\frac{1}{4} \leq \hat{\phi}_c \leq \frac{3}{4} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c + \frac{1}{4}$ $\frac{3}{4} < \hat{\phi}_c < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 1$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c$	
MINMOD [29], SOUCUP [31] $0 \leq \hat{\phi}_c \leq \frac{1}{2} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{2} \hat{\phi}_c$ $\frac{1}{2} < \hat{\phi}_c < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{1}{2} \hat{\phi}_c + \frac{1}{2}$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c$	

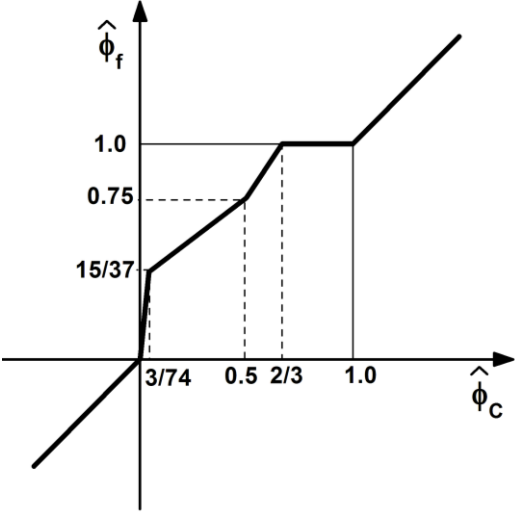
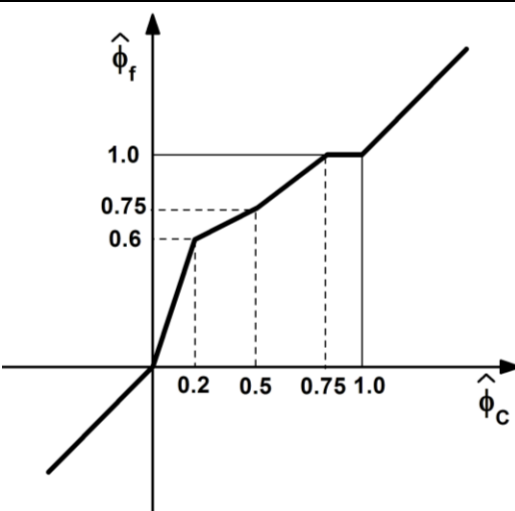
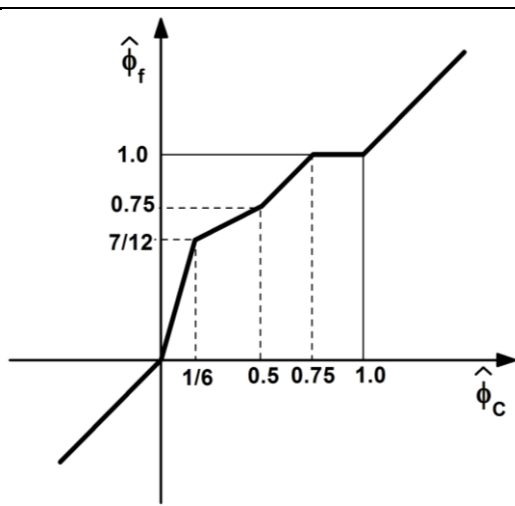
Tablo 4.3 (Devam): Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar ve bu yaklaşımların NVD’de gösterimi

SMART [24] $0 \leq \hat{\phi}_C < \frac{1}{6} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 3\hat{\phi}_C$ $\frac{1}{6} \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{5}{6} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{4}\hat{\phi}_C + \frac{3}{8}$ $\frac{5}{6} < \hat{\phi}_C \leq 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 1$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	
WACEB [57] $0 \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{3}{10} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 2\hat{\phi}_C$ $\frac{3}{10} \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{5}{6} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{4}\hat{\phi}_C + \frac{3}{8}$ $\frac{5}{6} < \hat{\phi}_C < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 1$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	
COPLA [52] $0 \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{1}{4} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 2.25\hat{\phi}_C$ $\frac{1}{4} \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{3}{4} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{4}\hat{\phi}_C + \frac{3}{8}$ $\frac{3}{4} < \hat{\phi}_C < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{1}{4}\hat{\phi}_C + \frac{3}{4}$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	

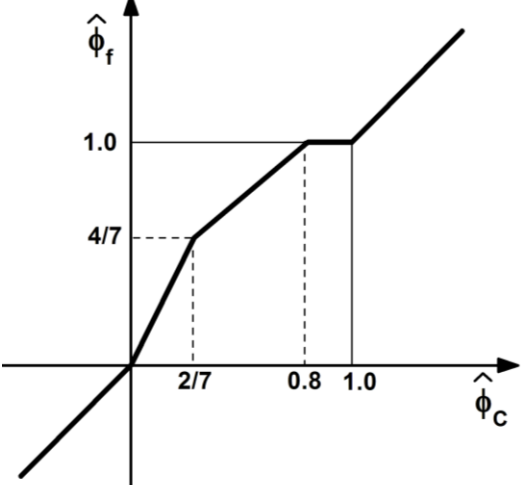
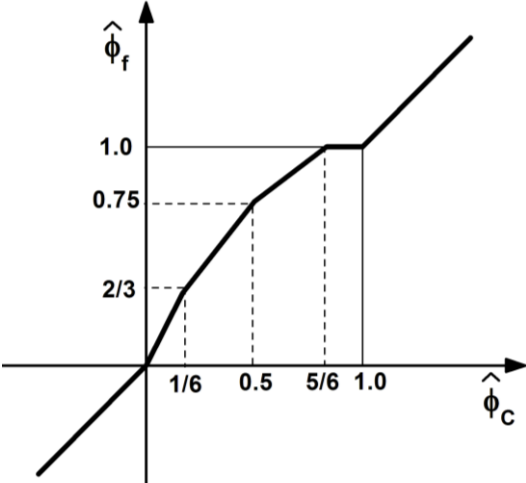
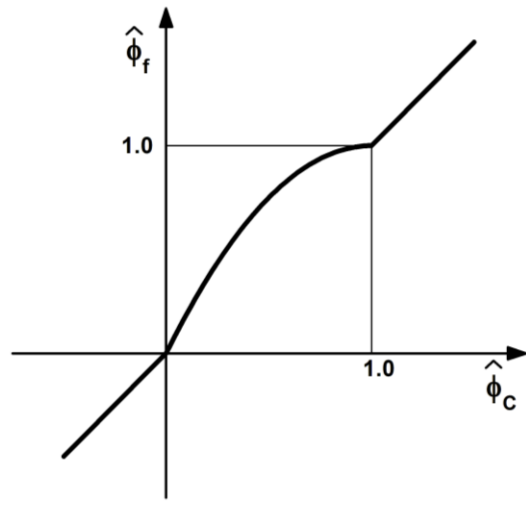
Tablo 4.3 (Devam): Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar ve bu yaklaşımların NVD’de gösterimi

CUBISTA [58] $0 < \hat{\phi}_C < \frac{3}{8} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{7}{4} \hat{\phi}_C$ $\frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{3}{4} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{4} \hat{\phi}_C + \frac{3}{8}$ $\frac{3}{4} < \hat{\phi}_C < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{1}{4} \hat{\phi}_C + \frac{3}{4}$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	
SUPERBEE [42] $0 < \hat{\phi}_C < \frac{1}{3} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 2\hat{\phi}_C$ $\frac{1}{3} \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{1}{2} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{1}{2} \hat{\phi}_C + \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} < \hat{\phi}_C < \frac{2}{3} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{2} \hat{\phi}_C$ $\frac{2}{3} \leq \hat{\phi}_C < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 1$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	
SUPER-C [46] $0 \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{1}{2} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{1}{2} \hat{\phi}_C + \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} < \hat{\phi}_C \leq \frac{2}{3} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{2} \hat{\phi}_C$ $\frac{2}{3} < \hat{\phi}_C \leq 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 1$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	

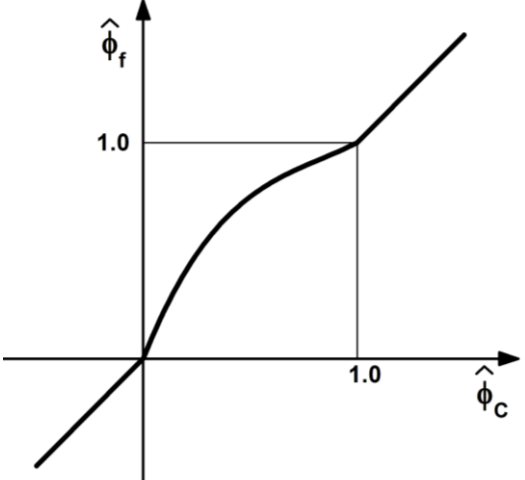
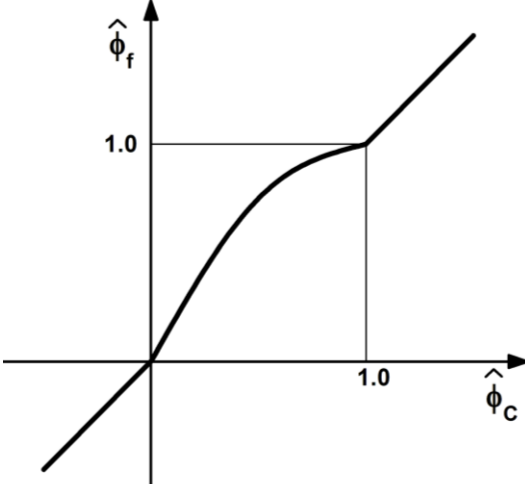
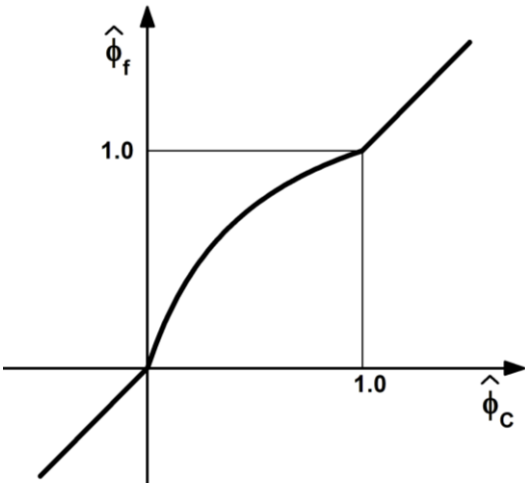
Tablo 4.3 (Devam): Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar ve bu yaklaşımların NVD’de gösterimi

VONOS [56] $0 \leq \hat{\phi}_C < \frac{3}{74} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 10\hat{\phi}_C$ $\frac{3}{74} \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{1}{2} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{4}\hat{\phi}_C + \frac{3}{8}$ $\frac{1}{2} < \hat{\phi}_C < \frac{2}{3} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{2}\hat{\phi}_C$ $\frac{2}{3} \leq \hat{\phi}_C < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 1$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	
STOIC [49] $0 \leq \hat{\phi}_C < \frac{1}{5} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 3\hat{\phi}_C$ $\frac{1}{5} \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{1}{2} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{1}{2}\hat{\phi}_C + \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} < \hat{\phi}_C \leq \frac{5}{6} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{4}\hat{\phi}_C + \frac{3}{8}$ $\frac{5}{6} < \hat{\phi}_C < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 1$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	
HOAB [59] $0 \leq \hat{\phi}_C < \frac{1}{6} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 3.5\hat{\phi}_C$ $\frac{1}{6} \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{1}{2} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{1}{2}\hat{\phi}_C + \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} < \hat{\phi}_C \leq \frac{3}{4} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C + \frac{1}{4}$ $\frac{3}{4} < \hat{\phi}_C < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 1$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	

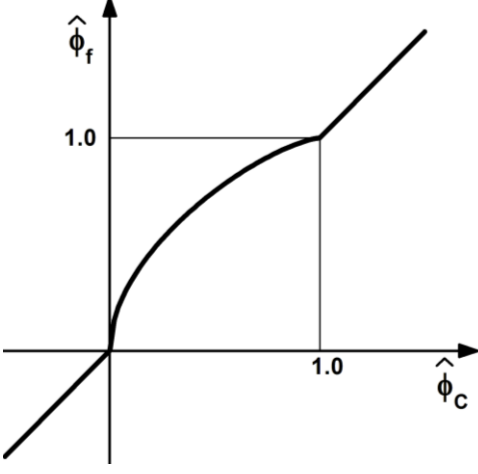
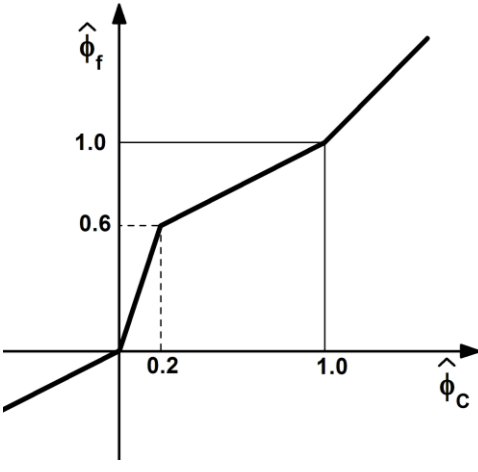
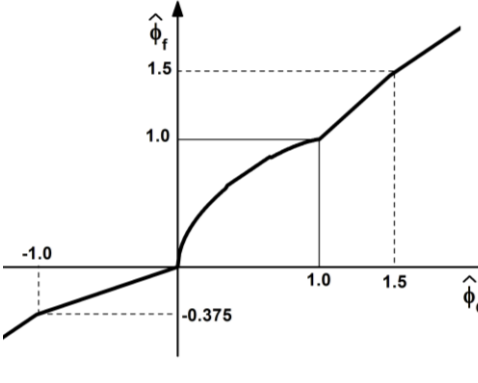
Tablo 4.3 (Devam): Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar ve bu yaklaşımların NVD’de gösterimi

KOREN [65] $0 < \hat{\phi}_C < \frac{2}{7} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 2\hat{\phi}_C$ $\frac{2}{7} \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{4}{5} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{5}{6}\hat{\phi}_C + \frac{1}{3}$ $\frac{4}{5} \leq \hat{\phi}_C < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 1$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$ $\max[0, \min(2r, 2r/3+1/3, 2)]$	
UMIST [50] $0 \leq \hat{\phi}_C < \frac{1}{6} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 2\hat{\phi}_C$ $\frac{1}{6} \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{1}{2} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{5}{4}\hat{\phi}_C + \frac{1}{8}$ $\frac{1}{2} < \hat{\phi}_C \leq \frac{5}{6} \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{4}\hat{\phi}_C + \frac{3}{8}$ $\frac{5}{6} < \hat{\phi}_C < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = 1$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	
CLAM=HARMONIC [35,60] HPLA [33] $0 < \hat{\phi}_C < 1 \quad \text{ise} \quad \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C(2 - \hat{\phi}_C)$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	

Tablo 4.3 (Devam): Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar ve bu yaklaşımların NVD’de gösterimi

SMARTER [36], NOTABLE [37], CHARM [38], ISNAS [39] $0 < \hat{\phi}_C < 1$ ise $\hat{\phi}_C^3 - \frac{5}{2}\hat{\phi}_C^2 + \frac{5}{2}\hat{\phi}_C$ Değilse $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	
OSPRED [53] $0 < \hat{\phi}_C < 1$ ise $\frac{\hat{\phi}_C^3 - \frac{7}{4}\hat{\phi}_C^2 + \frac{7}{4}\hat{\phi}_C}{\hat{\phi}_C^2 - \hat{\phi}_C + 1}$ Değilse $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	
H-QUICK [53] $0 < \hat{\phi}_C < 1$ ise $\hat{\phi}_f = \frac{3\hat{\phi}_C}{1 + 2\hat{\phi}_C}$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	

Tablo 4.3 (Devam): Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar ve bu yaklaşımların NVD’de gösterimi

EULER [44] $0 < \hat{\phi}_C < 1$ ise $\frac{\sqrt{\hat{\phi}_C(1-\hat{\phi}_C)^3} - \hat{\phi}_C^2}{(1-2\hat{\phi}_C)}$ $\hat{\phi}_C = 0.5$ ise $\hat{\phi}_f = \frac{3}{4}$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$	
SECBC [26] $\hat{\phi}_C \leq 0$ ise $\hat{\phi}_f = 0.5\hat{\phi}_C$ $0 < \hat{\phi}_C \leq \frac{1}{5}$ ise $\hat{\phi}_f = 3\hat{\phi}_C$ $\hat{\phi}_C \geq 0.2$ ise $\hat{\phi}_f = \frac{1}{2}\hat{\phi}_C + \frac{1}{2}$	
SHARP [23] $0 < \hat{\phi}_C < 0.35$ veya $0.65 < \hat{\phi}_C \leq 1$ ise $\frac{\sqrt{\hat{\phi}_C(1-\hat{\phi}_C)^3} - \hat{\phi}_C^2}{(1-2\hat{\phi}_C)}$ $-1 < \hat{\phi}_C \leq 0$ ise $\hat{\phi}_f = \frac{3}{8}\hat{\phi}_C$ $1 < \hat{\phi}_C \leq 1.5$ ise $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C$ Diğer durumlarda $\hat{\phi}_f = \frac{3}{4}\hat{\phi}_C + \frac{3}{8}$	

4.5. Zamana Bağlı Problemlerde Yüksek Çözünürlüklü Yaklaşımların NVD’de Gösterimi

Yüksek çözünürlüklü yaklaşımların zamandan bağımsız olan problemler için NVD’deki gösterimi yukarıda (Tablo 4.3) gösterilmiştir. Zamana bağlı olan çözümlerde ise $\hat{\phi}_f$ ara yüz değeri, $\hat{\phi}_c$ ’nin yanı sıra CFL sayısının da fonksiyonu olacaktır:

$$\hat{\phi}_f = f(\hat{\phi}_c, CFL) \quad (4.13)$$

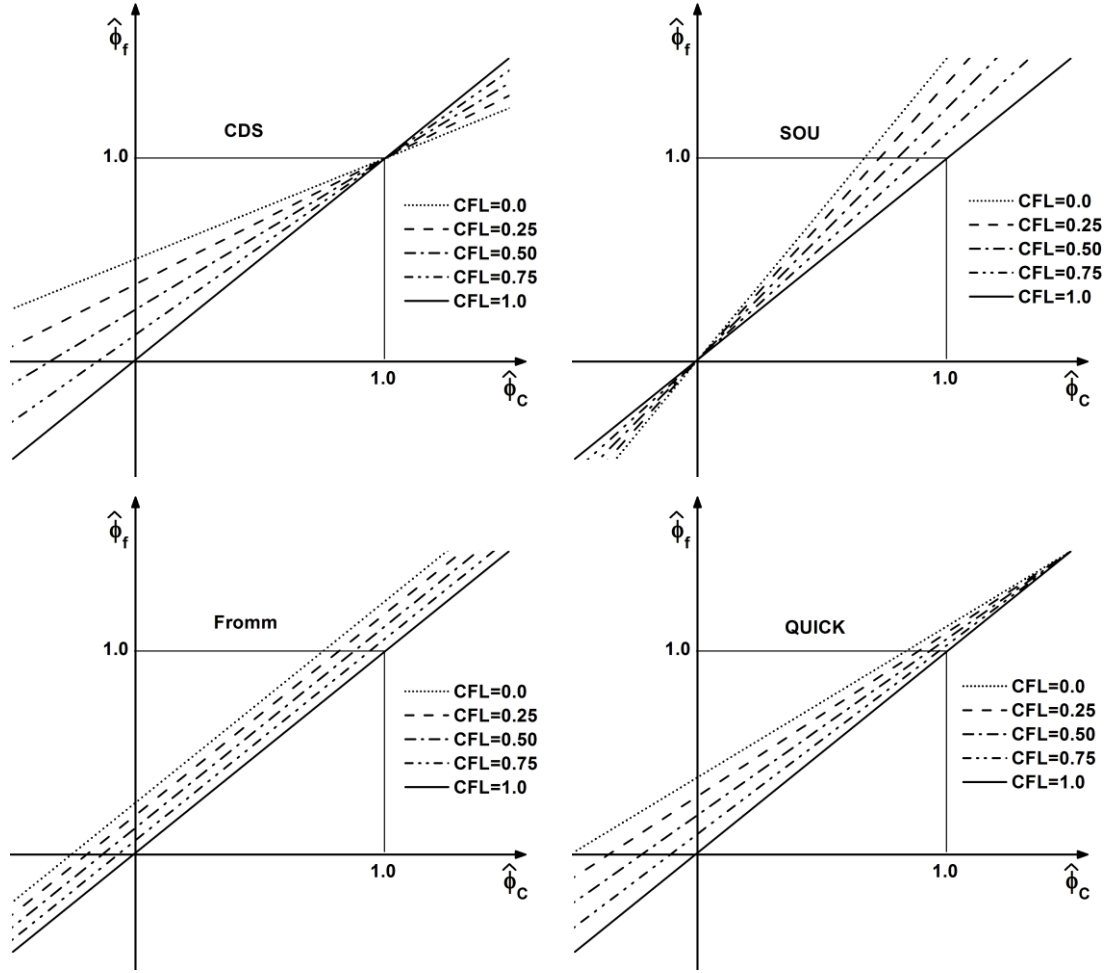
Bu nedenle yaklaşımların karakteristik eğrilerinin NVD’deki değişimi, CFL sayısına bağlı olarak değişmektedir. Leonard [46], herhangi bir yaklaşımın belirtik (explicit) olarak çözüldüğü bir problemde, boyutsuzlaştırılmış ara yüz değerinin ($\hat{\phi}_f$) genel olarak aşağıdaki gibi yazılabileceğini göstermiştir:

$$\hat{\phi}_f = CFL\hat{\phi}_c + (1 - CFL)\hat{\phi}_{SCHEME} \quad (4.14)$$

Burada SCHEME alt indisi, herhangi bir yaklaşımı göstermektedir. Örneğin CDS yaklaşımının kullanılması halinde, ara yüz değeri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

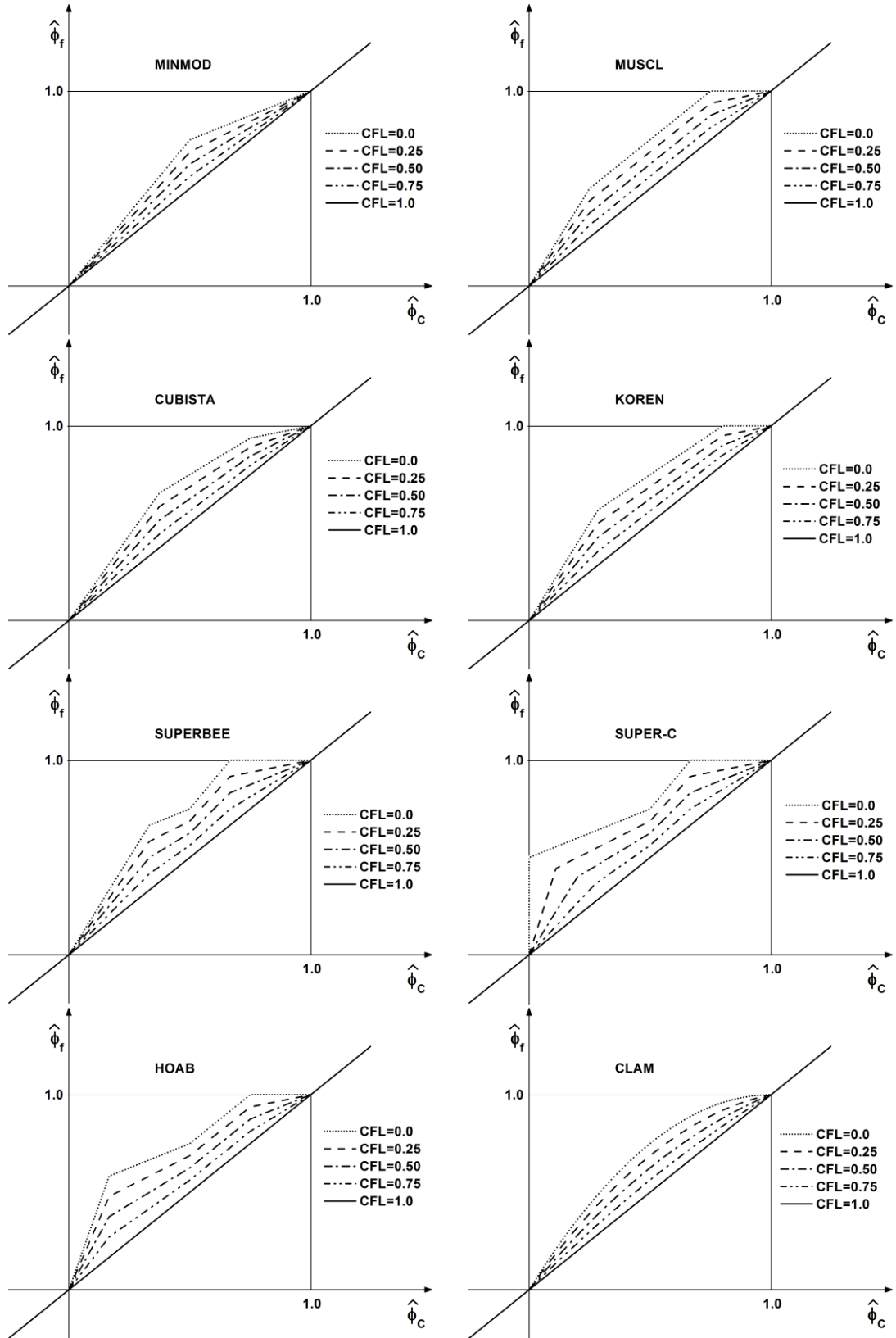
$$\hat{\phi}_f = CFL\hat{\phi}_c + (1 - CFL)(0.5\hat{\phi}_c + 0.5) \quad (4.15)$$

Diğer yaklaşımlar da benzer şekilde yazılabilir. Konveksiyon terimlerinin ayrıklaştırılmasında kullanılan bazı yaklaşımların 0, 0.25, 0.50, 0.75 ve 1.0 olmak üzere beş farklı CFL için NVD’deki değişimleri Şekil 4.8’de gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi CFL=1 olduğunda bütün yaklaşımların karakteristik eğrileri FOU ile aynı olmaktadır. CFL=0 olduğunda ise yaklaşımların karakteristik eğrileri zamandan bağımsız problemlerdeki NVD ile aynı olmaktadır.



Şekil 4.8: CDS, SOU, Fromm ve QUICK yaklaşımlarının karakteristik eğrilerinin CFL sayısına bağlı olarak değişiminin NVD gösterimi

Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar da zamana bağlı problemlerde belirtik yöntem ile çözülmesi durumunda, Denklem (4.14)'e benzer şekilde yazılabilir. Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlardan MINMOD, MUSCL, CUBISTA, KOREN, SUPERBEE, SUPER-C, HOAB ve CLAM yaklaşımlarının CFL sayısına bağlı olarak karakteristik eğrilerinin değişimleri Şekil 4.9'da gösterilmiştir.



Şekil 4.9: Bazı yüksek çözünürlüklü yaklaşımların karakteristik eğrilerinin CFL sayısına bağlı olarak değişiminin NVD gösterimi

Şekil 4.9'dan da görülebileceği gibi $\hat{\phi}_c < 0$ veya $\hat{\phi}_c > 1$ olması halinde bütün yaklaşımların karakteristik eğrileri FOU ile aynı olmaktadır. Aynı durum CFL=1 olması durumunda da görülmektedir. Ayrıca, CFL sayısının artması ile yaklaşımların NVD iç bölgesinde ($0 < \hat{\phi}_c < 1$) monotonik olduğu bölgenin daraldığı görülmektedir. SUPER-C haricindeki bütün yaklaşımlarda $\hat{\phi}_c$ değerinin tüm CFL sayılarında sabit olduğu, $\hat{\phi}_f$ değerinin ise CFL sayısına bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Diğer yaklaşımlardan farklı olarak SUPER-C yaklaşımında orijinden çıkan doğrunun CDS karakteristik doğrusu ile kesiştiği nokta aşağıda gösterildiği gibi CFL sayısına bağlı olarak değişmektedir.

$$\hat{\phi}_f = \frac{\hat{\phi}_c}{c} \quad (4.16)$$

Bu durum SUPER-C yaklaşımını diğer yaklaşımlardan ayıran en büyük özelliktir.

4.6. Akı-Sınırlayıcı Diyagramı

Akı-sınırlayıcı Diyagramı (Flux-Limiter Diagram, FLD) geliştirilmiş olan birçok TVD yaklaşımlarını aynı diyagramda göstermek üzere Sweby [25] tarafından geliştirilmiştir. Bu çalışmada Roe [65] tarafından tavsiye edilen akı-sınırlayıcı formülasyonu kullanılmıştır. Lineer olmayan sınırlandırılmış akılı yaklaşımlar aşağıda şekilde genelleştirilebilir:

$$\phi_f = \phi_c + \frac{\Delta x_c}{2} \Psi(r) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_u \quad (4.17)$$

Burada Ψ bir “akı-sınırlayıcı” fonksiyonu, r ise çözümün iki yerel gradyeninin oranı olup:

$$r = \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_f}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_u} \quad (4.18)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Üniform ağ kullanılması halinde bu ifade basitleşir.

$$r = \frac{\phi_D - \phi_C}{\phi_C - \phi_U} \quad (4.19)$$

Bu durumda Denklem (4.17) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\phi_f = \phi_C + \frac{1}{2} \Psi(r)(\phi_C - \phi_U) \quad (4.20)$$

$\Psi(r)$ 'nin belirli değerleri Bölüm 2.1'de verilen lineer yaklaşımları tanımlar. Örneğin;

$\Psi(r) = 0 \rightarrow$ Birinci mertebeden upwind yaklaşımı (FOU)

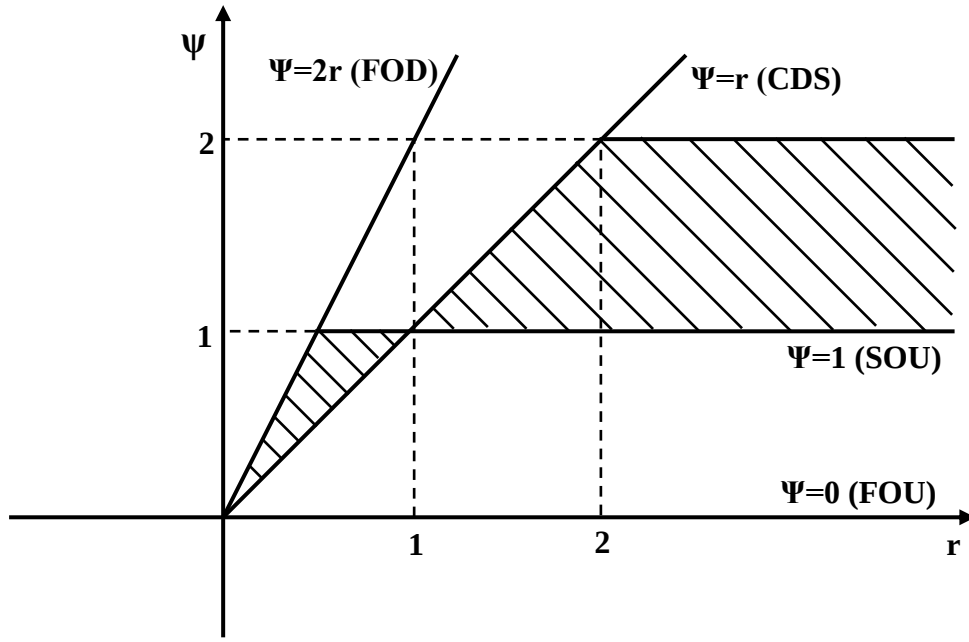
$\Psi(r) = 1 \rightarrow$ İkinci mertebeden upwind yaklaşımı (SOU)

$\Psi(r) = r \rightarrow$ Merkezi farklar yaklaşımı (CDS)

Akı sınırlayıcı Ψ 'nin r ile değişimini ifade eden FLD, Şekil 4.10'da gösterilmiştir. Diyagramda, çözümde bir pik (extremum) olduğunu gösteren $r < 0$ bölgesi ve çözümün monotonik olduğunu gösteren $r \geq 0$ bölgesi olmak üzere iki ana bölge vardır. Sınırlayıcı fonksiyon (Ψ), lokal gradyen (r) değerine bağlı olarak yaklaşımlar arasında geçiş yaparak çözümün monotonik olmasını sağlar. FLD'de $r = 1$ olduğu nokta ($\Psi(1)=1$) çözümde yerel lineer bir değişim olduğunu gösterir. Ara yüzey değeri lineer olarak değişen ikinci mertebeden bir yaklaşımda akı sınırlayıcı 1'e eşit olmalıdır. Dolayısıyla, FLD'de (1,1) noktasından geçen bir yaklaşımın ikinci mertebeden olduğu söylenebilir.

Örneğin FOU, CDS ve SOU yaklaşımlarının bir kombinasyonu olan MINMOD yaklaşımının FLD'deki gösterimi Şekil 4.10'da gösterilmiştir.

$$\left. \begin{array}{lll} -\infty < r < 0 & \text{için} & \Psi(r) = 0 \text{ (FOU)} \\ 0 \leq r \leq 1 & \text{için} & \Psi(r) = r \text{ (CDS)} \\ 1 < r < +\infty & \text{için} & \Psi(r) = 1 \text{ (SOU)} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{MINMOD} \\ \Psi(r) = \max(0, \min(r, 1)) \end{array}$$



Şekil 4.10: Sweby TVD kriterine göre ikinci mertebeden olan bölge

Sweby TVD Bölgesi: Harten [29] tarafından tanımlanan TVD ifadesi, belirtik (explicit) yöntem ile ayrıklaştırma yapılması durumunda Sweby [25] tarafından FLD diyagramında aşağıdaki ifade ile tanımlanmıştır:

$$r \geq 0 \quad \text{için} \quad 0 \leq \Psi(r) \leq \min(2r, 2) \quad (4.21)$$

$$r < 0 \quad \text{için} \quad \Psi(r) = 0 \quad (4.22)$$

Yukarıdaki ikinci ifade (Denklem (4.22)) TVD için gerekli şart değildir, pik (extrama) olan yerlerde Sweby tarafından emniyet amacıyla konulmuştur. Bu kriterlere göre Şekil 4.10'da taralı alan ile gösterilen bölge hem ikinci mertebededir hem de TVD şartını sağlar. Roe [42] zaman adımı sınırlamasını ihmal ederek, uzaysal terimlerin ayrıklaştırılmasında TVD olma şartını $\Psi(r) \leq \max(0, 2r)$ alanı olarak belirlemiştir. Ayrıca belirtik (explicit) çözümlerde yerel CFL sayısına bağlı olarak daha az sınırlayıcı olan şartların kullanılabileceğini belirtmiştir [65].

4.7. NVD ile FLD Arasındaki İlişki

NVD ile FLD birbirine çok yakın yöntemlerdir. FLD genellikle sıkıştırılabilir akışların (compressible aerodynamics) zamana bağlı çözümlerini, NVD ise genellikle basınç düzeltmeli Navier-Stokes çözümlerini geliştirmek için kullanılmıştır [1].

Normalize edilmiş hücre merkezi (ϕ_c^*) değerine dayalı NVD ile gradyen oranına (r) dayalı FLD arasındaki ilişki aşağıdaki şekildedir.

$$\phi_c^* = 1/(r + 1) \quad (4.23)$$

$$r = (1 - \phi_c^*)/\phi_c^* \quad (4.24)$$

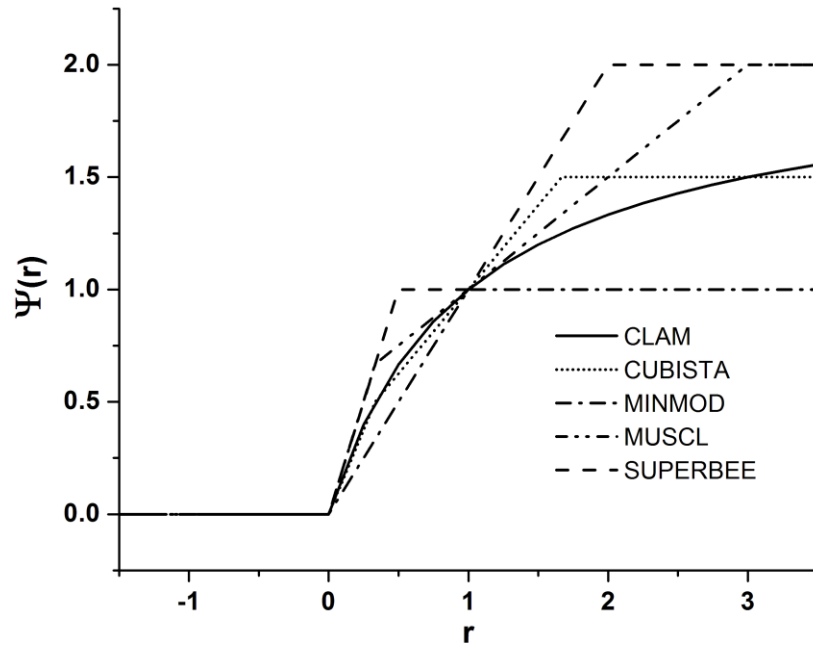
Denklem (4.23) ile (4.24) incelendiğinde iki diyagram arasında hiperbolik bir ilişkinin olduğu ve tekil noktalar ($\phi_c^* = 0$ ve $r = -1$ için) içerdiği görülebilir. Benzer şekilde lineer olmayan akı sınırlayıcı yaklaşımları normalize edilebilir. Bu durumda Denklem (4.20) aşağıdaki formu alır.

$$\phi_f^* = \phi_c^* + \frac{1}{2} \psi(r) \phi_c^* \quad (4.25)$$

Burada gradyen oranı $r = r(\phi_c^*)$ Denklem (4.24)'te gösterildiği gibi ϕ_c^* 'nin bir fonksiyonudur. Bu ifadeler yardımı ile NVD ve FLD arasında dönüşüm yapılarak TVD ile CBC arasındaki ilişki kurulabilir. Yüksek çözünürlüklü yaklaşımların FL formundaki gösterimi Tablo 4.4'te verilmiştir. Ayrıca, yaklaşımlardan bazıları Şekil 4.11'de FLD'de gösterilmiştir.

Tablo 4.4: Yüksek çözünürlüklü yaklaşımların Akı-sınırlayıcı (FL) formunda gösterimi

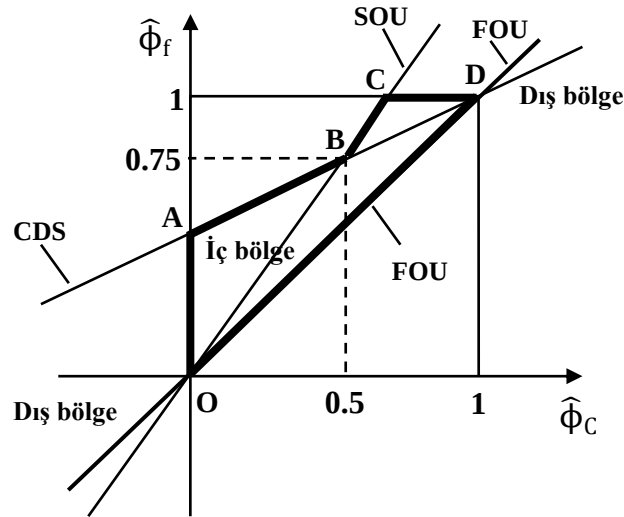
Yaklaşım	Akı-sınırlayıcı formu
MINMOD	$\max[0, \min(r, 1)]$
OSHER	$\max[0, \min(2r, 1)]$
CLAM	$(r+ r)/(r+1)$
HOAB	$\max[0, \min\{2r, \max(0.5r+0.5, r), 5\}]$
SMART	$\max[0, \min(2r, 0.75r+0.25, 4)]$
STOIC	$\max[0, \min\{2r, \max(0.75r+0.25, r), 4\}]$
WACEB	$\max[0, \min(2r, 0.75r+0.25, 2)]$
MUSCL	$\max[0, \min(2r, 0.5r+0.5, 2)]$
COPLA	$\max[0, \min(1.5r, 0.75r+0.25, 2.5)]$
CUBISTA	$\max[0, \min(1.5r, 0.75r+0.25, 1.5)]$
SUPERBEE	$\max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$
VONOS	$\max[0, \min\{2r, \max(0.75r+0.25, 1), 18\}]$
SMARTER	$(r + r)(3r+1)/2(r+1)^2$
SHARP	$\min[\max\{0, 2r(r/2-1)/(r-1)\}, \max\{0.75r+0.25, -1.25\}]$
KOREN	$\max[0, \min(2r, 2r/3+1/3, 2)]$
UMIST	$\max[0, \min(2r, 0.25+0.75r, 0.75+0.25r, 2)]$
H-QUICK	$4(r+ r)/2(r+3)$



Şekil 4.11: Bazı yüksek çözünürlüklü yaklaşımların FLD gösterimi

5. SINIRLANDIRILMIŞ YÜKSEK ÇÖZÜNÜRLÜKLÜ YAKLAŞIMLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Yüksek çözünürlüklü yaklaşımların NVD'deki karakteristik eğrileri Şekil 5.1'de gösterildiği gibi, düzlemi iç ve dış bölge olmak üzere iki bölüme ayırmaktadır. Hemen hemen bütün yaklaşımların karakteristik çizgileri dış bölgede FOU doğrusundan oluştuğundan dış bölgede aynıdır. Yaklaşımlar arasındaki farklılık, yaklaşımların iç bölgedeki karakteristik eğrilerinin farklılığından kaynaklanmaktadır. Bütün yaklaşımların iç bölgedeki karakteristik eğrileri ise Şekil 5.1'de gösterildiği gibi bir alt ve bir de üst limitten oluşan bir bölge (koyu çizgi ile sınırlanmış bölge) içerisinde kalmaktadır. Bu bölgenin üst limiti (OABCD) en kompresif yaklaşıma (SUPER-C), alt limiti (OD) en difüzif yaklaşıma (FOU) karşılık gelmektedir. Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar içerisinde ise alt limit MINMOD yaklaşımıdır (OBCD).



Şekil 5.1: NVD'de iç ve dış bölge.

Bu bölümde yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar, bunların farklılıklarını belirlemek amacıyla birkaç test problemlerine uygulanarak karşılaştırılmıştır. Bu amaçla, öncelikle literatürde çokça kullanılan farklı profillerdeki skalerlerin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi incelenmiştir. Daha sonra, aynı skaler profillerin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi ele

alınmıştır. Üçüncü problemde viskoz olmayan Burgers denklemi çözülmüştür. Son olarak yaklaşımların çok boyutlu problemlerdeki davranışını incelemek amacıyla skaler bir büyüklüğün üç boyutlu bir akış alanı içerisinde konveksiyon ve difüzyon ile taşınması problemi çözülmüştür. Yaklaşımların doğruluğu tanımlanan bir toplam hata ifadesine göre yapılmış ve ilgili tablolarda verilmiştir. Ayrıca bazı yaklaşımların davranışı şekillerde gösterilmiştir.

5.1. Dikdörtgen, Yarı-elips, Sinüs-kare ve Üçgen Şeklinde Skaler Profillerin Sabit Bir Hız Alanında Konveksiyon ile Taşınması

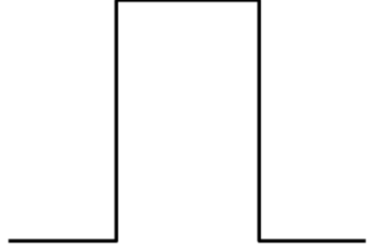
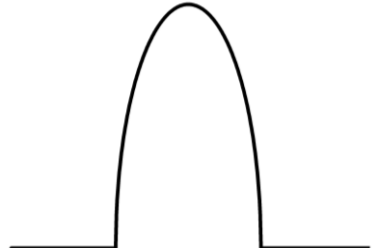
Bir boyutlu, zamana bağlı, sabit bir u hızıyla taşınan skaler bir ϕ büyüklüğü için taşınım denklemi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada u taşınım hızı olup sabit bir değerdedir. Difüzyon olmadığı için başlangıç anında verilen bir ϕ skaler profilinin teorik olarak zamanla değişmemesi ve ilk şeklini koruması gerekir.

Bu bölümde başlangıç skaler profilleri Tablo 5.1’de gösterildiği gibi dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklinde olan dört farklı skaler profilin taşınması incelenmiştir. Bu skaler profillerden her birisi yaklaşımların farklı özelliklerini test etmek için kullanılır. Dikdörtgen skaler profil; yaklaşımların minimum nümerik difüzyonla ve osilasyon yapmadan keskin gradyenleri çözme özelliği için iyi bir testtir. Sinüs-kare; bir yerel maksimumun olduğu ve gradyenin sürekli olarak değiştiği göreceli olarak daha yumuşak bir profile sahiptir. Yarı-elips; değişken eğimlere sahip keskin bir maksimumun olmadığı, maksimum noktasında karşılıklı gradyen süreksizliklerin olduğu bir skaler profildir. Bundan dolayı yaklaşımların “kırpma/dikleştirme” (clipping/steepening) özelliklerinin test edilmesi için kullanılmaktadır. Üçgen skaler profil ise bir maksimumun olduğu ve bu noktanın her iki tarafında diğer yaklaşımlardan farklı olarak sabit bir gradyene sahip bir profildir.

Tablo 5.1: Dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklinde skaler profiller

Dikdörtgen Skaler Profil $0 \leq x \leq 20\Delta x$ ise $\phi = 1$ Diğer durumlarda $\phi = 0$	
Yarı-Elips Skaler Profil $x - x_c < 10\Delta x$ ise $\phi = \sqrt{1 - \frac{(x - x_c)^2}{(10\Delta x)^2}}$ Diğer durumlarda $\phi = 0$	
Sinüs-kare Skaler Profil $0 \leq x \leq 20\Delta x$ ise $\phi = \sin^2(\frac{\pi x}{20\Delta x})$ Diğer durumlarda $\phi = 0$	
Üçgen Skaler Profil $0 \leq x \leq 10\Delta x$ ise $\phi = \frac{x}{10\Delta x}$ $10\Delta x < x \leq 20\Delta x$ ise $\phi = \frac{20\Delta x - x}{10\Delta x}$ Diğer durumlarda $\phi = 0$	

Problemde kullanılan boyutsuz zaman (T) ve boyutsuz mesafe (L) aşağıdaki şekilde boyutsuzlaştırılmıştır:

$$T = \frac{t}{\Delta x/V} \quad (5.2)$$

$$L = \frac{x - x_o - Vt}{\Delta x} \quad (5.3)$$

Burada t zamanı, V hızı, x mesafeyi, x_0 skaler profilin başlangıç anındaki yerini ve Δx hücreler arasındaki mesafeyi göstermektedir.

Yaklaşımların doğruluğu, Denklem (5.4)'te tanımlanan toplam hata ifadesine göre yapılmıştır:

$$\varepsilon = \sum_n^N |\phi_{analitik}^n - \phi_{nümerik}^n| \quad (5.4)$$

Yaklaşımlar farklı skaler profiller için farklı davranışlar gösterebilirler. Bu nedenle öncelikle bütün skaler profillerde genişlik $20\Delta x$ olarak alınarak dört skaler profil aynı anda çözülmüş ve yaklaşımların dört skaler profildeki genel davranışı incelenmiştir. Farklı zaman ve farklı CFL sayıları için yapılan çözümlerdeki toplam hatalar Tablo 5.2'de verilmiştir. CFL=1 alınarak yapılan çözümde FOU kullanılacağından skaler değişkenin bir ağ noktasından diğer ağ noktasına hatasız olarak taşındığı ve hatanın bütün yaklaşımlarda sıfır olduğu görülmüştür. Yaklaşımların çözümde undershoot (sınıraltı) ve/veya overshoot (sınırustü) yapmadan çözüp çözemeyeceğini test etmek için CFL=0.98, 0.5, 0.25, 0.1 ve 0.05 olmak üzere beş farklı CFL sayısı alınarak boyutsuz zamanın T=50, 100 ve 250 olması durumu için çözümler yapılmıştır.

Farklı CFL sayıları için yapılan çözümler sonucunda COPLA, EULER, HOAB, H-QUICK, OSPRE, SECBC, SHARP, SMART, SMARTER, STOIC ve VONOS yaklaşımlarının en az bir skaler profilde undershoot (sınıraltı) ve/veya overshoot (sınırustü) yaptığı görülmüştür. Örneğin COPLA yaklaşımı CFL $\leq$ 0.5 iken hiçbir skaler profilde undershoot (sınıraltı) ve/veya overshoot (sınırustü) yapmamakta, SHARP yaklaşımı ise bütün CFL değerlerinde en az bir skaler profilde undershoot (sınıraltı) ve/veya overshoot (sınırustü) yapmaktadır. Bu yaklaşımların hangi skaler profilde böyle bir davranış gösterdiği, yaklaşımların her bir profil için ayrı ayrı incelendiği bölümlerde görülebilir. Bu yaklaşımlardan HOAB, VONOS, STOIC, SMART ve COPLA yaklaşımları küçük CFL sayılarında hata sıralamasında ilk sıralarda yer almaktadır. Ancak, bu yaklaşımlar tüm CFL sayılarında undershoot

(sınıraltı) ve/veya overshoot (sınırüstü) yapmayan yaklaşımlar arasında olmadığından değerlendirmede çok fazla üzerinde durulmamış, tüm CFL sayıları için monotonik sonuçlar veren yaklaşımlar değerlendirilmiştir. Tablo 5.2 incelendiğinde küçük CFL sayılarında sıralamada ilk sıralarda yer alan SUPER-C, SUPERBEE, HOAB, VONOS, STOIC gibi yaklaşımların hepsinin karakteristik eğrilerinin NVD iç bölgesinde üst limite yakın olan yaklaşımlar olduğu göze çarpmakta ve yaklaşımların genel davranışı ile karakteristik çizgileri arasındaki ilişkiyi göstermekte yardımcı olmaktadır.

Tablo 5.2 incelendiğinde bütün zamanlarda ve CFL sayılarında en az hatalı olan yaklaşımın SUPER-C, en çok hata içeren yaklaşımın ise MINMOD olduğu görülmektedir. Ancak yaklaşımların farklı skaler profillerdeki davranışı genel durumdan farklılık gösterebilir. Örneğin dikdörtgen skaler profili en az hatayla çözen bir yaklaşım, yarı-elips probleminde oldukça ciddi hatalar içerebilir. Bu nedenle skaler profiller ayrı ayrı ele alınarak çözümler yapılmış, detayları ilgili tablolarda verilmiştir. Ayrıca, yaklaşımların genel olarak en az hata içeren SUPER-C, bu yaklaşımı takip eden SUPERBEE, en çok hata içeren MINMOD, literatürde sık kullanılan MUSCL ve zamana bağlı problemler için geliştirilmiş olan CUBISTA yaklaşımları ilgili şekillerde analitik çözümle karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.2: Dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklinde skaler profillerin sabit bir hız alanında konveksiyonla taşınması problemi için yaklaşımların toplam hataları

		T=50					T=100					T=250				
		0.98	0.50	0.25	0.10	0.05	0.98	0.5	0.25	0.1	0.05	0.98	0.5	0.25	0.1	0.05
	CFL															
1	CLAM	1.645	5.447	6.241	6.774	6.982	2.209	6.748	7.936	8.799	9.118	3.253	9.574	11.686	13.223	13.821
2	COPLA	-	5.511	5.806	5.779	5.751	-	6.969	7.253	7.123	7.054	-	10.057	10.490	10.204	10.048
3	CUBISTA	1.686	5.783	6.261	6.400	6.437	2.288	7.293	7.900	8.036	8.053	3.426	10.625	11.633	11.743	11.713
4	EULER	-	-	-	6.174	6.152	-	-	-	7.803	7.764	-	-	-	11.453	11.364
5	HOAB	-	-	3.955	3.944	3.917	-	-	4.571	4.466	4.406	-	-	5.247	5.030	4.954
6	HQUICK	-	5.973	6.475	6.594	6.625	-	7.649	8.270	8.395	8.423	-	11.217	12.326	12.508	12.516
7	KOREN	1.618	5.033	5.292	5.387	5.414	2.147	6.298	6.511	6.556	6.588	3.167	8.897	9.171	9.165	9.178
8	MINMOD	1.802	8.096	9.796	10.74	11.05	2.565	11.343	14.128	15.566	16.015	4.055	18.493	22.638	24.803	25.467
9	MUSCL	1.581	4.474	5.165	5.672	5.868	2.064	5.508	6.316	7.128	7.436	2.951	7.199	8.801	10.337	10.953
10	OSHER	1.665	6.959	8.406	9.247	9.548	2.319	9.099	11.518	12.993	13.465	3.441	14.208	18.416	20.675	21.373
11	OSPRE	-	6.155	6.729	6.943	6.997	-	7.890	8.645	8.912	8.992	-	11.672	13.024	13.439	13.576
12	SECBC	-	6.787	7.652	7.940	8.006	-	8.927	10.103	10.495	10.581	-	13.913	15.943	16.599	16.737
13	SHARP	-	-	-	-	5.904	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14	SMART	-	5.307	5.600	5.525	5.465	-	6.806	7.063	6.882	6.776	-	9.879	10.212	9.812	9.599
15	SMARTER	-	6.179	6.758	6.972	7.029	-	7.914	8.680	8.944	9.021	-	11.699	13.064	13.467	13.600
16	STOIC	-	5.248	5.546	5.454	5.391	-	6.730	6.958	6.722	6.588	-	9.709	9.935	9.344	9.041
17	SUPERBEE	1.535	4.081	4.273	4.367	4.366	2.006	4.607	4.805	4.880	4.868	2.790	5.211	5.460	5.486	5.460
18	SUPERC	1.531	3.241	3.268	3.147	3.090	2.000	3.448	3.432	3.285	3.218	2.782	3.717	3.699	3.634	3.557
19	UMIST	1.653	5.979	7.152	7.857	8.098	2.224	8.078	9.833	10.953	11.336	3.330	12.758	15.809	17.591	18.178
20	VONOS	-	-	-	3.881	3.923	-	-	-	4.284	4.360	-	-	-	4.775	4.881
21	WACEB	1.641	5.523	5.821	5.817	5.789	2.206	6.993	7.274	7.207	7.161	3.309	10.117	10.591	10.364	10.232

5.1.1. Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması

Dikdörtgen skaler profilin farklı zaman ve farklı CFL sayıları için yapılan çözümleri Tablo 5.3-Tablo 5.5’te verilmiştir. Tablolardan görüleceği üzere COPLA, H-QUICK, OSPRE, SECBC, SMART, SMARTER, STOIC, HOAB, EULER, SHARP ve VONOS yaklaşımları $CFL=0.98$ olması durumunda undershoot (sınırlı) ve/veya overshoot (sınırlı) yapmaktadır. Bu yaklaşımlardan ilk yedisi için $CFL \leq 0.5$, HOAB yaklaşımı için $CFL \leq 0.25$, EULER ve VONOS yaklaşımları için $CFL \leq 0.1$ olması halinde bu sorun ortadan kalkmaktadır. SHARP yaklaşımı ise bütün CFL sayılarında sınırlı olmayan sonuçlar vermektedir. Büyük CFL sayılarında monotonik olmayan HOAB ve VONOS yaklaşımları küçük CFL sayılarında oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Bütün zaman ve CFL sayıları için en az hata içeren yaklaşım SUPER-C olmakta, bu yaklaşımı SUPERBEE takip etmektedir. Hata değeri en yüksek olan yaklaşım ise MINMOD’dur.

Tablo 5.3 - Tablo 5.5 incelendiğinde, küçük CFL sayılarında hata sıralamasında ilk sıralarda yer alan SUPER-C, SUPERBEE, HOAB, VONOS gibi yaklaşımların karakteristik eğrilerinin NVD iç bölgesinde üst limite yakın olan yaklaşımlar olduğu görülmektedir.

Bütün zamanlar için SUPER-C, SUPERBEE, MUSCL, CUBISTA ve MINMOD yaklaşımları, farklı CFL sayıları için Şekil 5.2 - Şekil 5.4’te analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Şekil 5.2’den görüldüğü gibi $CFL=0.98$ ’de yaklaşımlar arasındaki fark çok azdır. Genel olarak CFL sayının azalması ile hata miktarı bütün yaklaşımlarda artarken, SUPER-C yaklaşımında azalmaktadır. Bu nedenle özellikle küçük CFL sayılarında SUPER-C ile diğer yaklaşımlar arasındaki fark açıkça gözükmemektedir. Bu yaklaşımı takip eden SUPERBEE ile SUPER-C arasındaki fark sadece keskin gradyenin olduğu yerlerde göze çarpmaktadır. CFL sayısının azalmasıyla MINMOD ile elde edilen çözümde dikdörtgen skaler profilin kenarlarındaki yayılma artmaktadır. MUSCL ve CUBISTA yaklaşımlarının

hatalarının SUPERBEE ile MINMOD arasında olduğu ve bu iki yaklaşımın benzer davranışlar gösterdiği görölmektedir.

T=100 anındaki sonuçlar Tablo 5.4 ve Şekil 5.3'te, T=250 anındaki sonuçlar ise Tablo 5.5 ve Şekil 5.4'te verilmiştir. İlgili tablolar ve şekiller incelendiğinde yaklaşımların hata sıralamasındaki yerinin ve yaklaşımların CFL sayısına bağlı olarak değişimlerinin T=50 anındaki duruma benzer olduğu görölmektedir. Tablo 5.4 ve Tablo 5.5'ten görülebileceği gibi artan zamanla bütün yaklaşımlarda hata miktarı artmaktadır. Ancak hata miktarındaki artış yaklaşımdan yaklaşıma farklılık göstermektedir. Yaklaşım hatalarının zamanla değişimini göstermek amacıyla CFL=0.25 için MINMOD ve SUPER-C çözümleri Şekil 5.5'te verilmiştir. Şekil 5.5'ten SUPER-C yaklaşımı ile elde edilen profillerin bütün zamanlar için neredeyse aynı olduğu, yani hatanın zamanla pek artmadığı, MINMOD yaklaşımında ise profilin artan zamanla ciddi ölçüde yayıldığı görölmektedir. T=100 anında MINMOD yaklaşımı ile elde edilen profildeki maksimum değerin 1'in altında olduğu ve artan zamanla bu yayılmanın devam ettiği görölmektedir. SUPERBEE, MUSCL ve CUBISTA yaklaşımlarında da artan zamanla hata miktarı artmakta ancak maksimum değer 1'in altına düşmemektedir. T=50 ile T=250 anındaki hatalar CFL=0.25 için karşılaştırıldığında hata artışının MINMOD yaklaşımında yaklaşık %76, MUSCL yaklaşımında %52, SUPERBEE yaklaşımında %7, SUPER-C yaklaşımında ise sadece %2 civarında olduğu görölmektedir.

Tablo 5.3: Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=50)

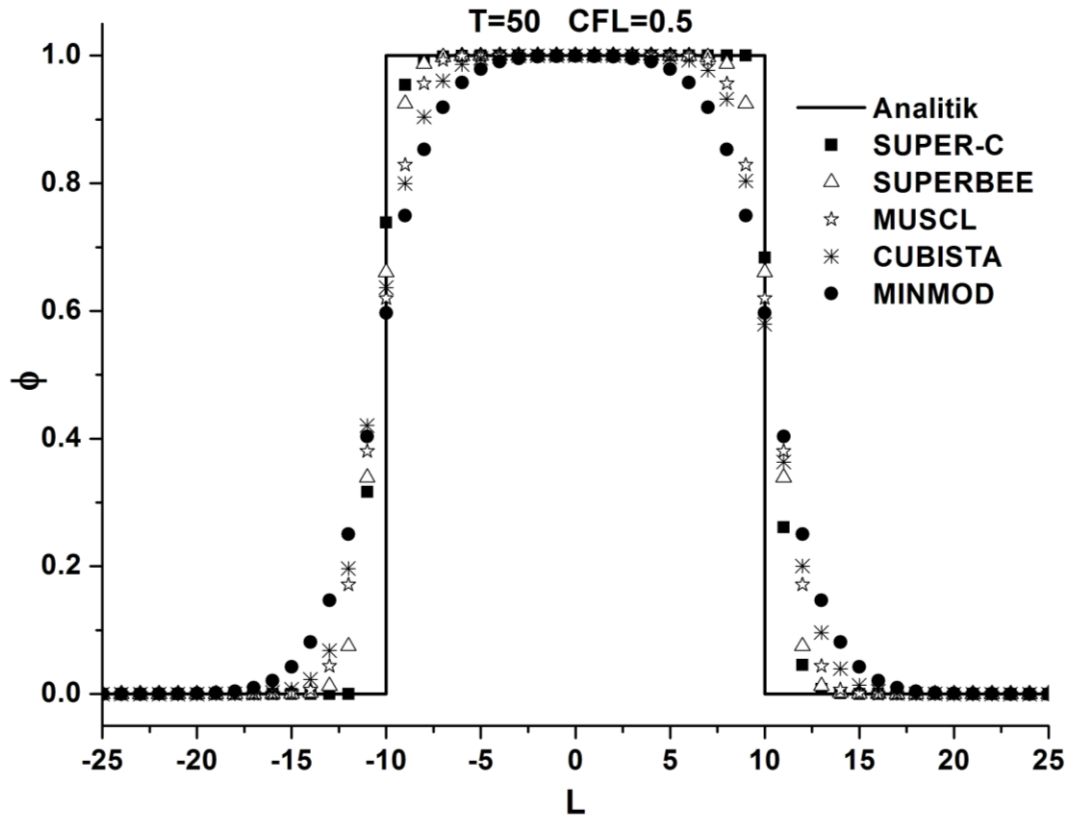
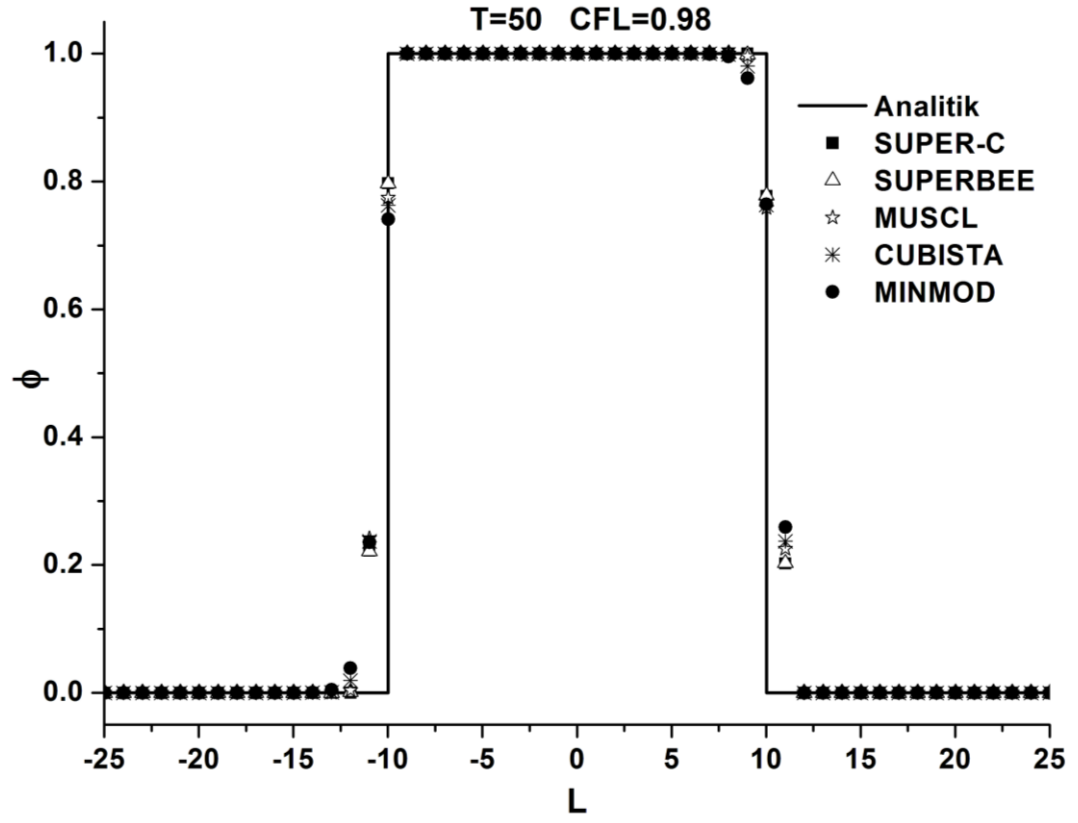
CFL=0.98			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1			CFL=0.05		
1	SUPERC	0.8501	1	SUPERC	1.2657	1	SUPERC	1.3029	1	SUPERC	1.2487	1	SUPERC	1.2273
2	SUPERBEE	0.8524	2	SUPERBEE	1.7185	2	SUPERBEE	1.6901	2	SUPERBEE	1.7352	2	SUPERBEE	1.7465
3	MUSCL	0.9415	3	MUSCL	2.4128	3	HOAB	1.9692	3	VONOS	1.9063	3	HOAB	1.895
4	KOREN	0.9543	4	KOREN	2.5795	4	STOIC	2.7019	4	HOAB	1.9172	4	VONOS	1.9435
5	WACEB	0.9607	5	STOIC	2.601	5	MUSCL	2.708	5	STOIC	2.6614	5	STOIC	2.6331
6	OSHER	0.9784	6	SMART	2.6592	6	KOREN	2.7533	6	SMART	2.8188	6	SMART	2.8141
7	CLAM	0.9838	7	COPLA	2.7163	7	SMART	2.8079	7	KOREN	2.8192	7	KOREN	2.8415
8	CUBISTA	0.9891	8	WACEB	2.7296	8	COPLA	2.8818	8	COPLA	2.9043	8	COPLA	2.9033
9	UMIST	1.0002	9	CLAM	2.8072	9	WACEB	2.9059	9	MUSCL	2.9106	9	WACEB	2.9412
10	MINMOD	1.0759	10	CUBISTA	2.8756	10	CUBISTA	3.1059	10	WACEB	2.9382	10	MUSCL	2.9853
11	COPLA	-	11	HQUICK	2.9593	11	CLAM	3.164	11	SHARP	3.0235	11	SHARP	3.0159
12	EULER	-	12	OSPRES	3.0397	12	HQUICK	3.2036	12	EULER	3.1176	12	EULER	3.1229
13	HOAB	-	13	SMARTER	3.0487	13	OSPRES	3.3174	13	CUBISTA	3.178	13	CUBISTA	3.1947
14	HQUICK	-	14	UMIST	3.0679	14	SMARTER	3.3264	14	HQUICK	3.2795	14	HQUICK	3.2974
15	OSPRES	-	15	SECBC	3.2571	15	UMIST	3.5468	15	CLAM	3.376	15	OSPRES	3.4428
16	SECBC	-	16	OSHER	3.3144	16	SECBC	3.5979	16	OSPRES	3.4168	16	CLAM	3.4496
17	SHARP	-	17	MINMOD	3.8476	17	OSHER	3.9177	17	SMARTER	3.4258	17	SMARTER	3.4519
18	SMART	-	18	EULER	-	18	MINMOD	4.4651	18	SECBC	3.7125	18	SECBC	3.7379
19	SMARTER	-	19	HOAB	-	19	EULER	-	19	UMIST	3.8041	19	UMIST	3.8885
20	STOIC	-	20	SHARP	-	20	SHARP	-	20	OSHER	4.2422	20	OSHER	4.3461
21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	MINMOD	4.767	21	MINMOD	4.8602

Tablo 5.4: Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=100)

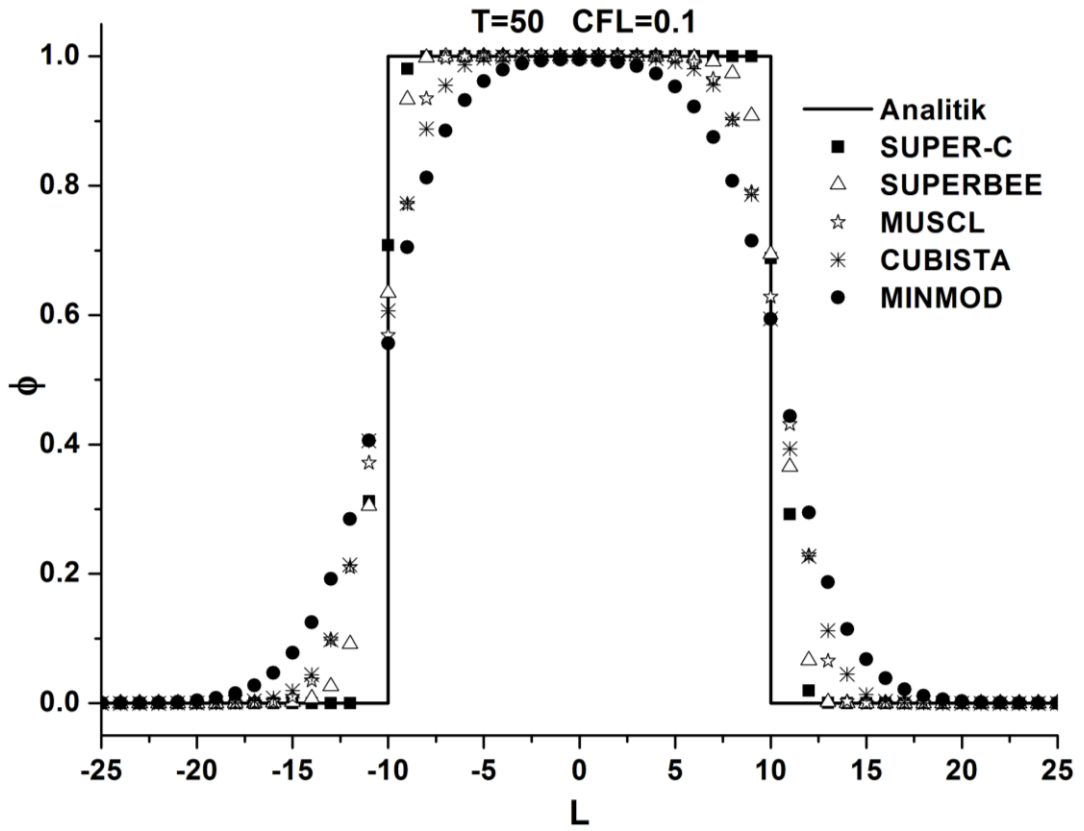
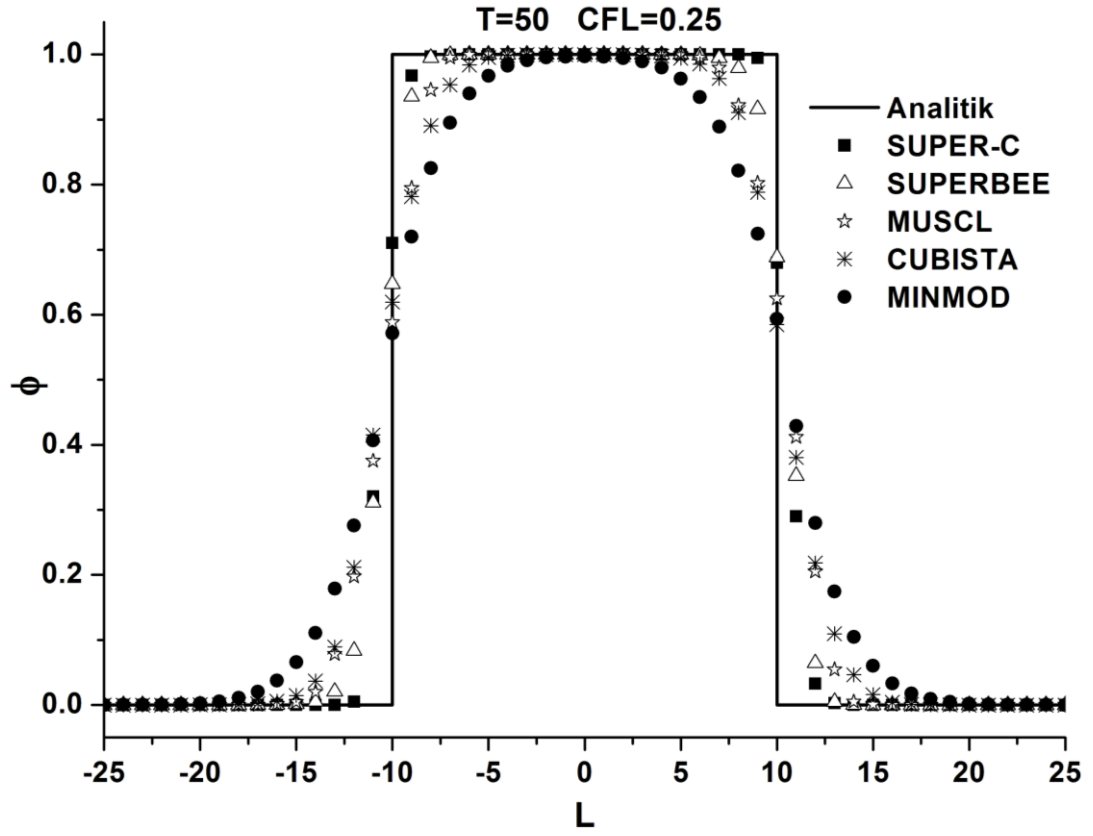
CFL =0.98			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1			CFL =0.05		
1	SUPERC	1.0635	1	SUPERC	1.2661	1	SUPERC	1.3262	1	SUPERC	1.2647	1	SUPERC	1.2446
2	SUPERBEE	1.0674	2	SUPERBEE	1.7512	2	SUPERBEE	1.7611	2	SUPERBEE	1.7988	2	SUPERBEE	1.8072
3	MUSCL	1.2065	3	MUSCL	2.8621	3	HOAB	2.249	3	HOAB	2.1587	3	HOAB	2.1240
4	KOREN	1.2332	4	KOREN	3.15	4	MUSCL	3.2392	4	VONOS	2.1609	4	VONOS	2.2128
5	WACEB	1.2537	5	STOIC	3.2622	5	KOREN	3.3036	5	STOIC	3.259	5	STOIC	3.2079
6	CLAM	1.2898	6	SMART	3.3225	6	STOIC	3.3488	6	KOREN	3.3514	6	KOREN	3.3711
7	CUBISTA	1.3022	7	COPLA	3.3719	7	SMART	3.4604	7	SMART	3.4333	7	SMART	3.4124
8	OSHER	1.3042	8	WACEB	3.3867	8	COPLA	3.5258	8	COPLA	3.5098	8	COPLA	3.4925
9	UMIST	1.3108	9	CLAM	3.3905	9	WACEB	3.5515	9	MUSCL	3.5298	9	WACEB	3.5319
10	MINMOD	1.4682	10	CUBISTA	3.5348	10	CUBISTA	3.7561	10	WACEB	3.5452	10	MUSCL	3.6395
11	COPLA	-	11	HQUICK	3.6736	11	CLAM	3.8305	11	CUBISTA	3.7933	11	EULER	3.7943
12	EULER	-	12	OSPRED	3.7679	12	HQUICK	3.9299	12	EULER	3.8007	12	CUBISTA	3.7954
13	HOAB	-	13	SMARTER	3.7772	13	OSPRED	4.0652	13	HQUICK	3.9891	13	HQUICK	3.9991
14	HQUICK	-	14	UMIST	3.8722	14	SMARTER	4.0741	14	CLAM	4.1155	14	OSPRED	4.1778
15	OSPRED	-	15	SECBC	4.1411	15	UMIST	4.4819	15	OSPRED	4.1563	15	SMARTER	4.1865
16	SECBC	-	16	OSHER	4.194	16	SECBC	4.5497	16	SMARTER	4.165	16	CLAM	4.2173
17	SHARP	-	17	MINMOD	4.9257	17	OSHER	4.9797	17	SECBC	4.6814	17	SECBC	4.7091
18	SMART	-	18	EULER	-	18	MINMOD	5.6953	18	UMIST	4.8142	18	UMIST	4.9235
19	SMARTER	-	19	HOAB	-	19	EULER	-	19	OSHER	5.4037	19	OSHER	5.5394
20	STOIC	-	20	SHARP	-	20	SHARP	-	20	MINMOD	6.0757	20	MINMOD	6.1942
21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	SHARP	-	21	SHARP	-

Tablo 5.5: Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=250)

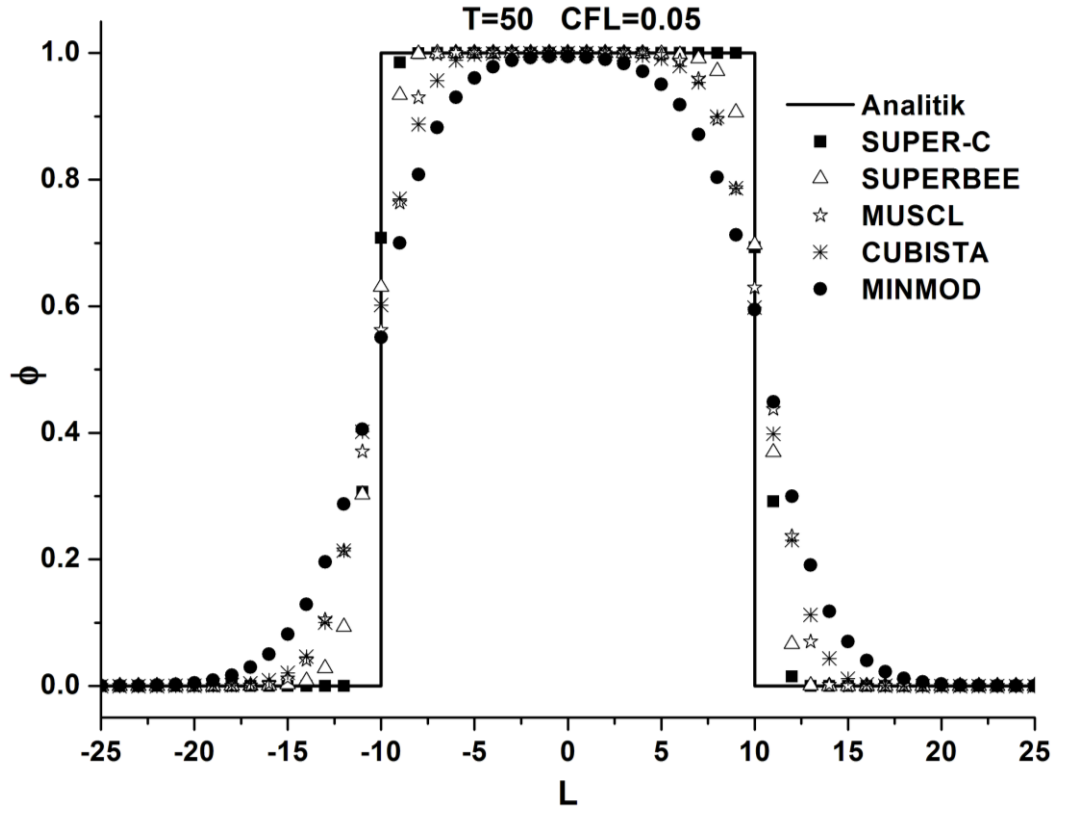
CFL =0.98			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1			CFL =0.05		
1	SUPERC	1.3374	1	SUPERC	1.2661	1	SUPERC	1.3309	1	SUPERC	1.2668	1	SUPERC	1.2471
2	SUPERBEE	1.3422	2	SUPERBEE	1.7527	2	SUPERBEE	1.8198	2	SUPERBEE	1.8411	2	SUPERBEE	1.8468
3	MUSCL	1.6120	3	MUSCL	3.5794	3	HOAB	2.6585	3	HOAB	2.5005	3	HOAB	2.4440
4	KOREN	1.6935	4	KOREN	4.1448	4	MUSCL	4.1273	4	VONOS	2.5329	4	VONOS	2.6102
5	WACEB	1.7464	5	CLAM	4.3218	5	KOREN	4.2358	5	KOREN	4.2301	5	STOIC	4.2138
6	CLAM	1.7737	6	STOIC	4.4306	6	STOIC	4.4914	6	STOIC	4.3095	6	KOREN	4.2412
7	OSHER	1.8116	7	SMART	4.4872	7	SMART	4.6021	7	SMART	4.4942	7	SMART	4.4371
8	CUBISTA	1.8137	8	COPLA	4.5260	8	COPLA	4.6541	8	COPLA	4.5563	8	COPLA	4.5026
9	UMIST	1.8277	9	WACEB	4.5415	9	WACEB	4.6803	9	WACEB	4.5912	9	WACEB	4.5412
10	MINMOD	2.1361	10	CUBISTA	4.6781	10	CUBISTA	4.8725	10	MUSCL	4.6054	10	MUSCL	4.7861
11	COPLA	-	11	HQUICK	4.8957	11	CLAM	4.9197	11	CUBISTA	4.8284	11	CUBISTA	4.7950
12	EULER	-	12	OSPREE	5.0072	12	HQUICK	5.1643	12	EULER	4.9546	12	EULER	4.9234
13	HOAB	-	13	SMARTER	5.0162	13	OSPREE	5.3269	13	HQUICK	5.1813	13	HQUICK	5.1709
14	HQUICK	-	14	UMIST	5.2859	14	SMARTER	5.3351	14	CLAM	5.3553	14	OSPREE	5.3953
15	OSPREE	-	15	SECBC	5.6725	15	UMIST	6.1210	15	OSPREE	5.3884	15	SMARTER	5.4026
16	SECBC	-	16	OSHER	5.7210	16	SECBC	6.1996	16	SMARTER	5.3958	16	CLAM	5.5133
17	SHARP	-	17	MINMOD	6.7884	17	OSHER	6.8227	17	SECBC	6.3614	17	SECBC	6.3933
18	SMART	-	18	EULER	-	18	MINMOD	7.8748	18	UMIST	6.5792	18	UMIST	6.7300
19	SMARTER	-	19	HOAB	-	19	EULER	-	19	OSHER	7.4155	19	OSHER	7.6044
20	STOIC	-	20	SHARP	-	20	SHARP	-	20	MINMOD	8.4440	20	MINMOD	8.6242
21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	SHARP	-	21	SHARP	-



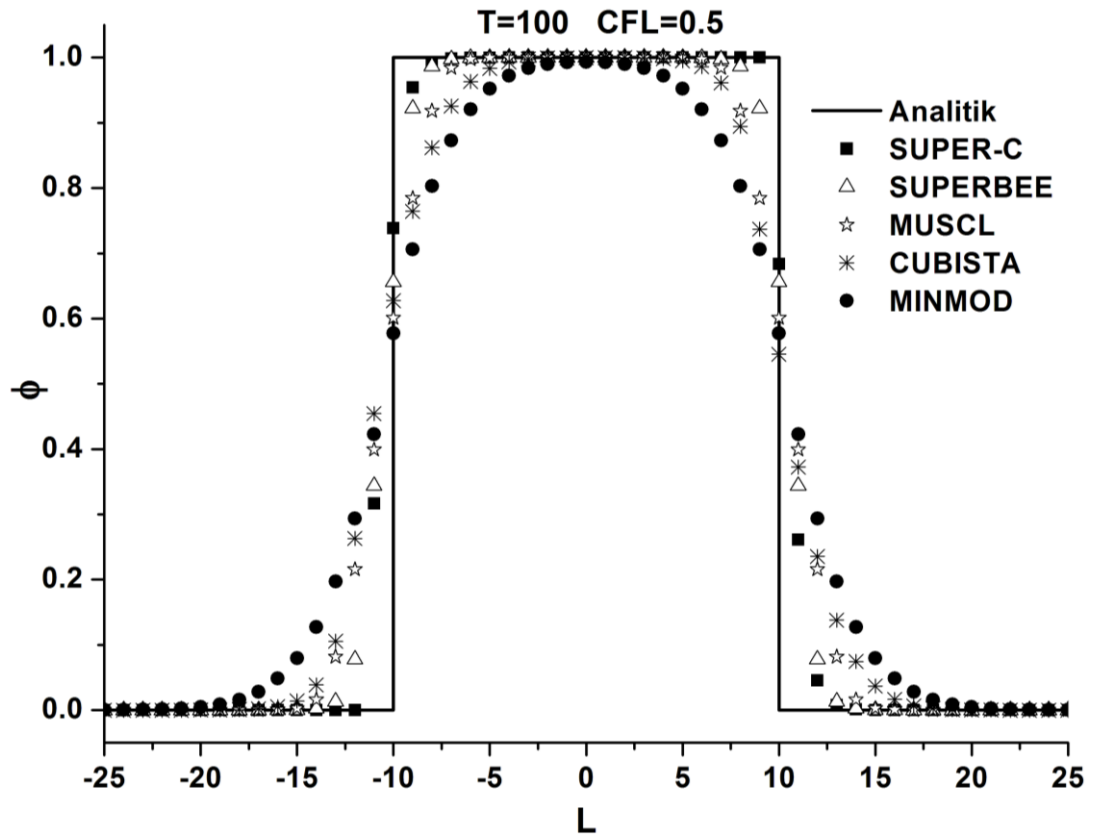
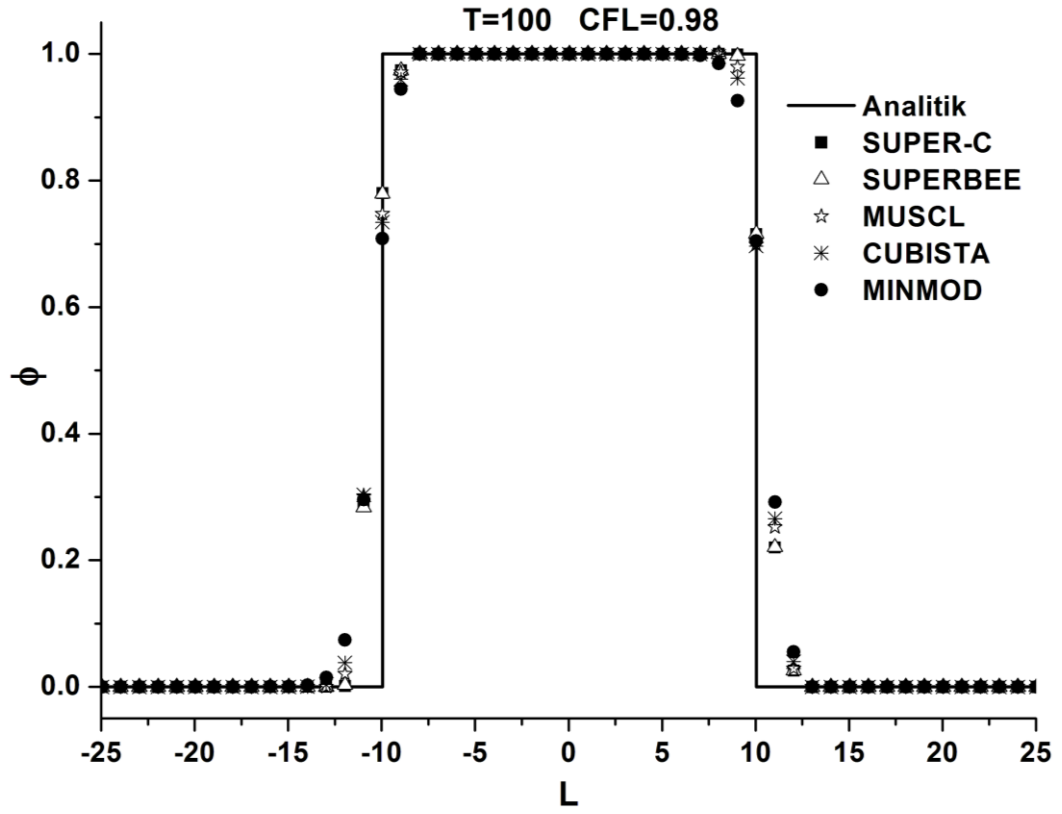
Şekil 5.2: Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



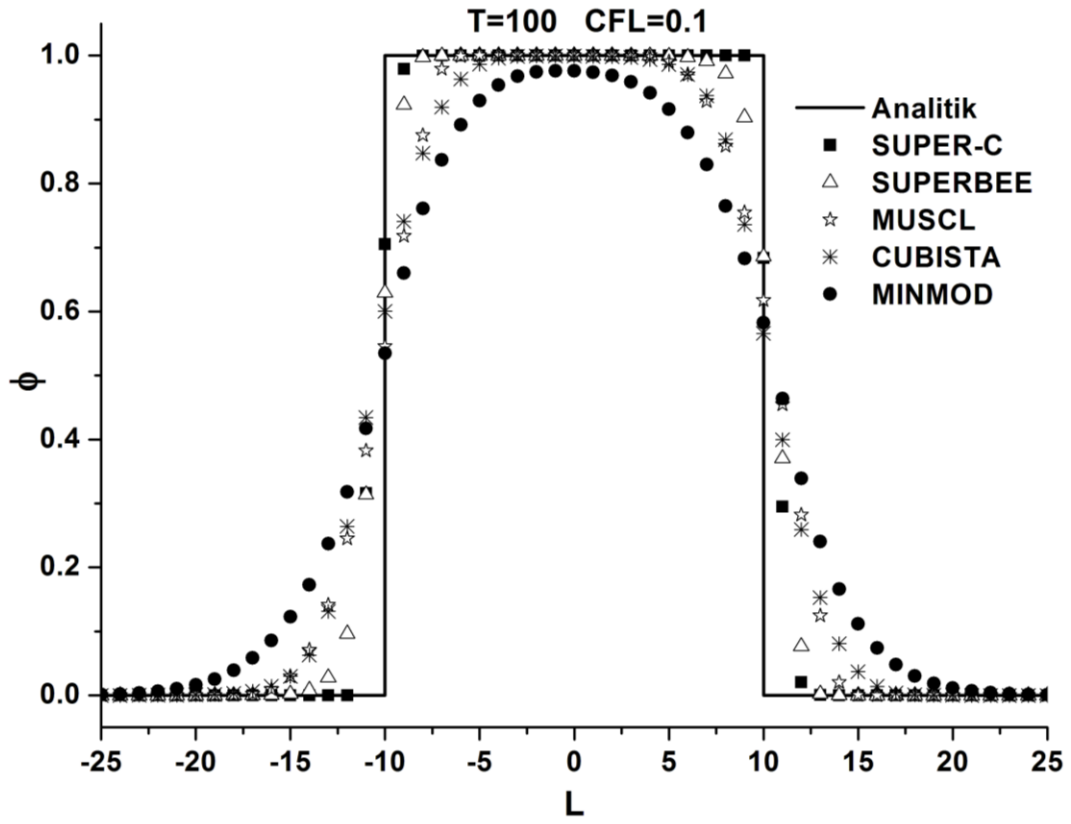
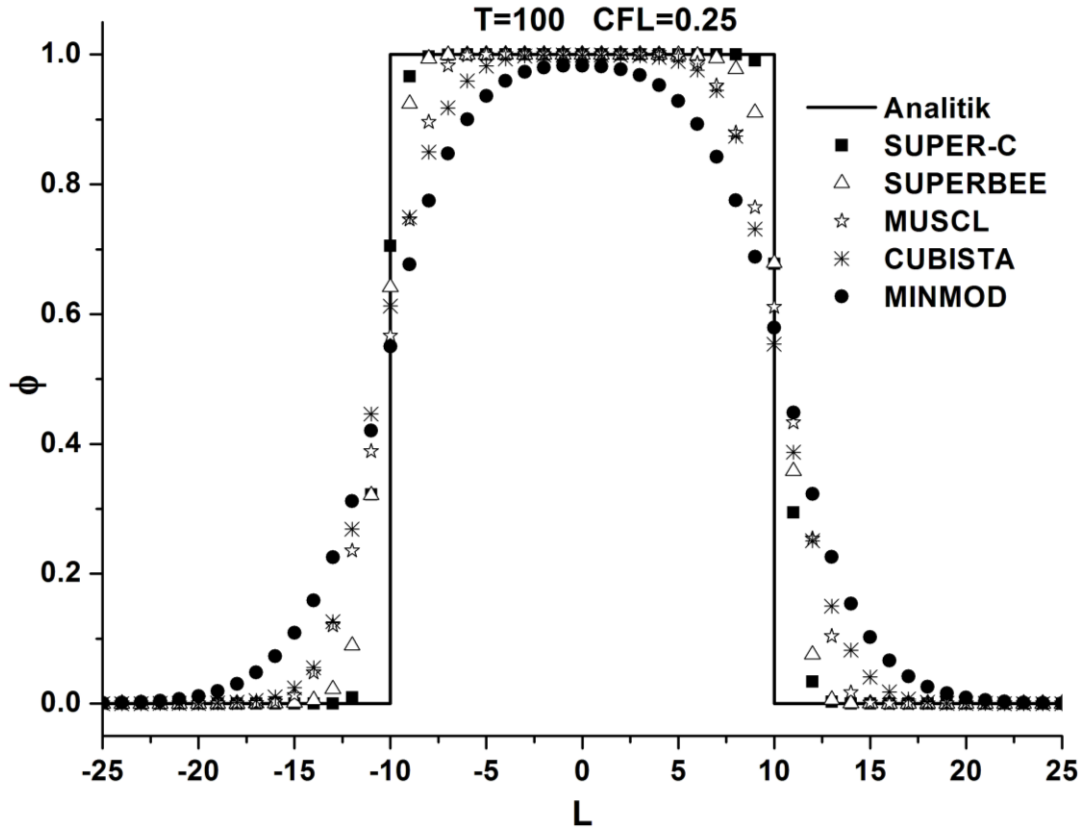
Şekil 5.2 (Devam): Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



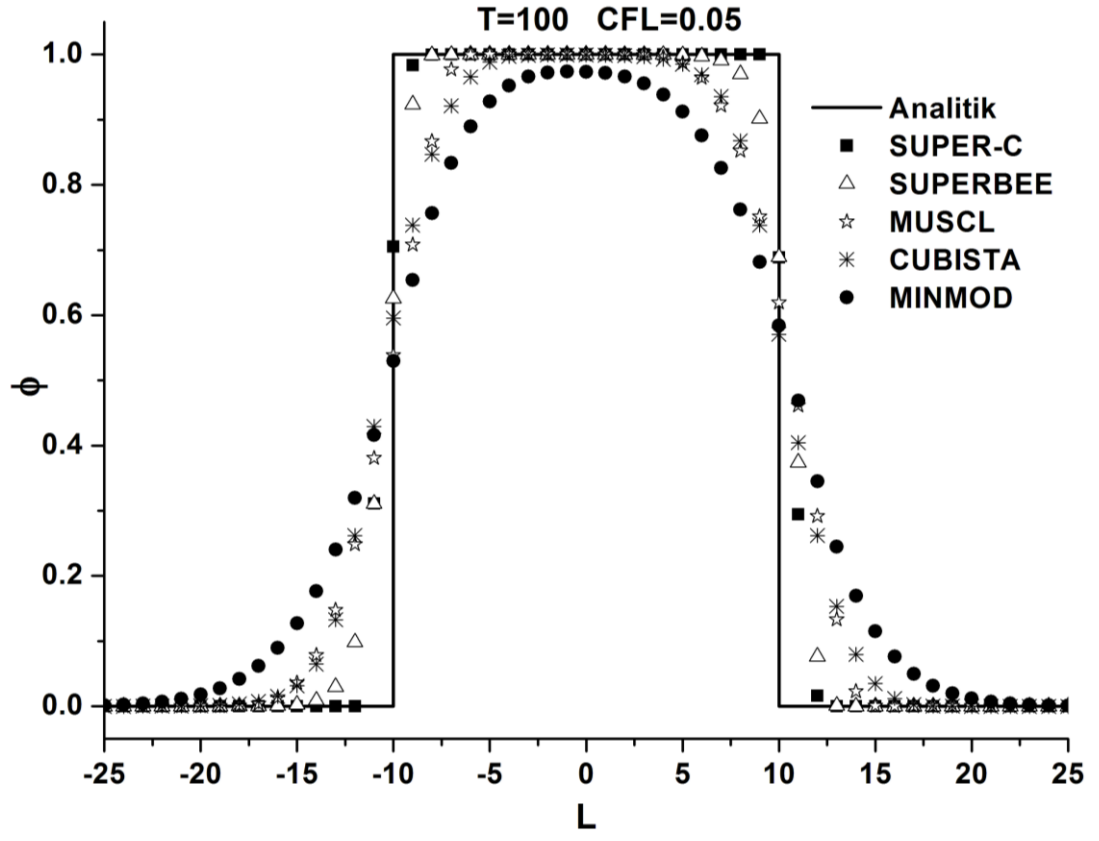
Şekil 5.2(Devam): Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



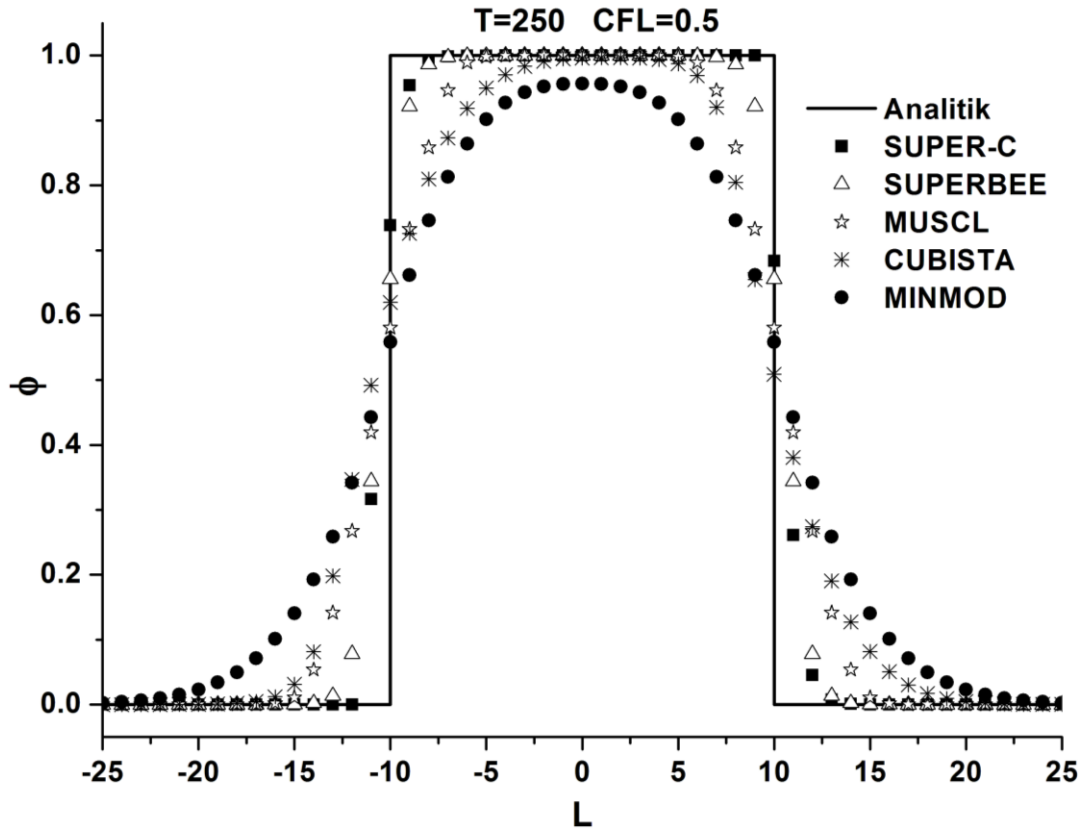
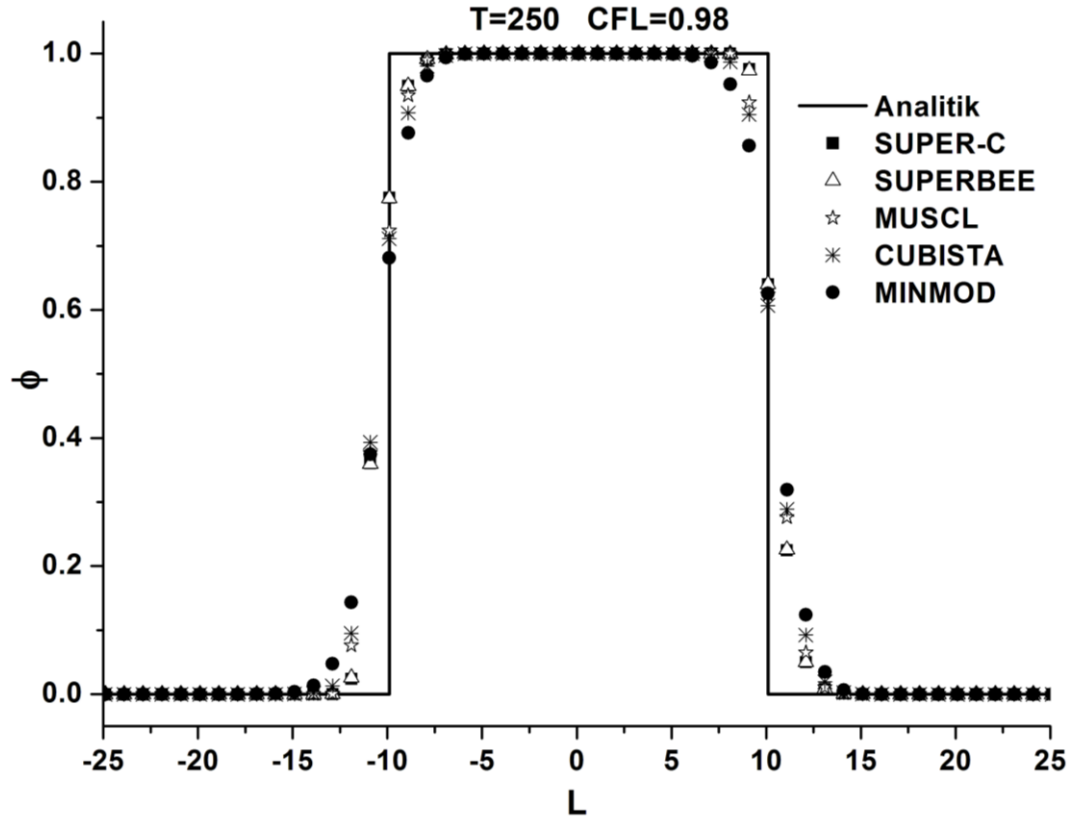
Şekil 5.3: Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



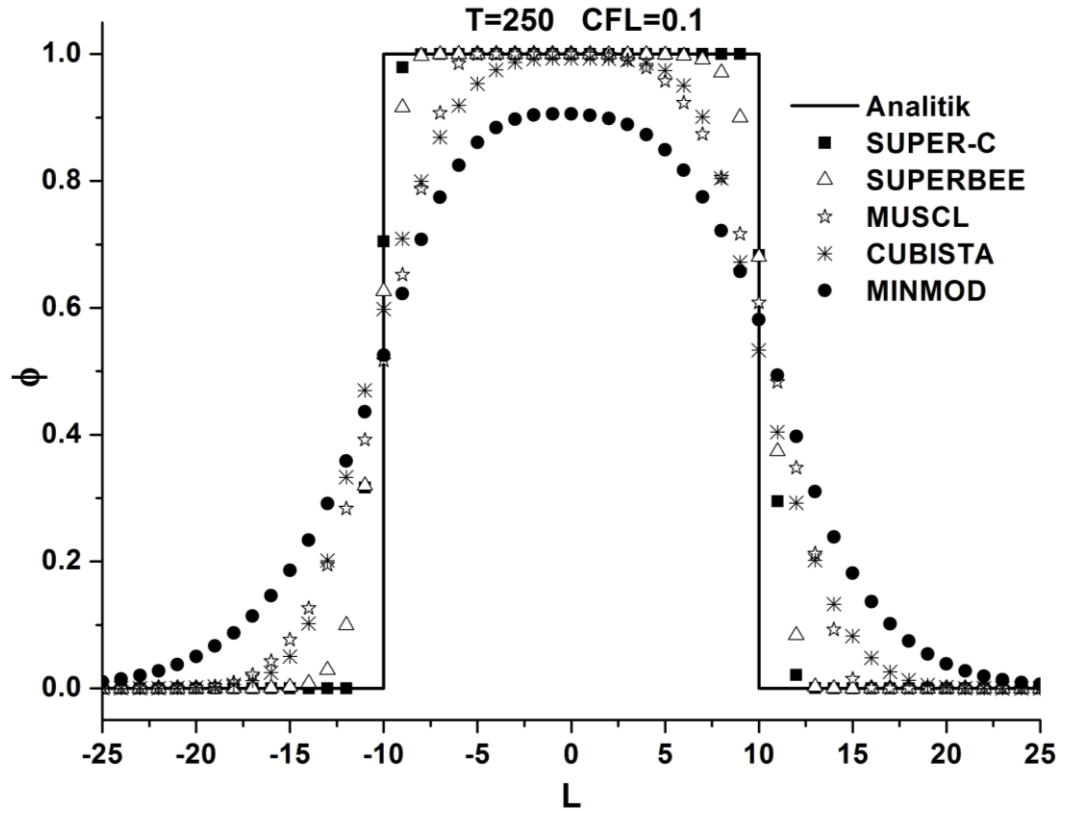
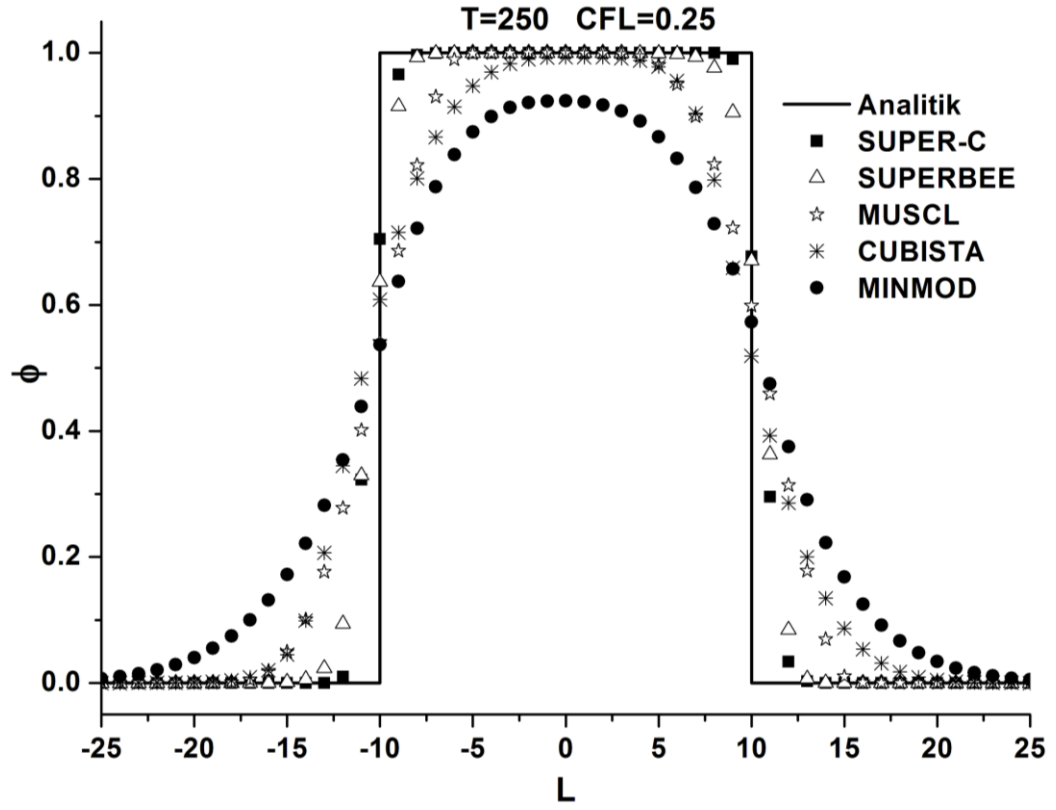
Şekil 5.3(Devam): Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



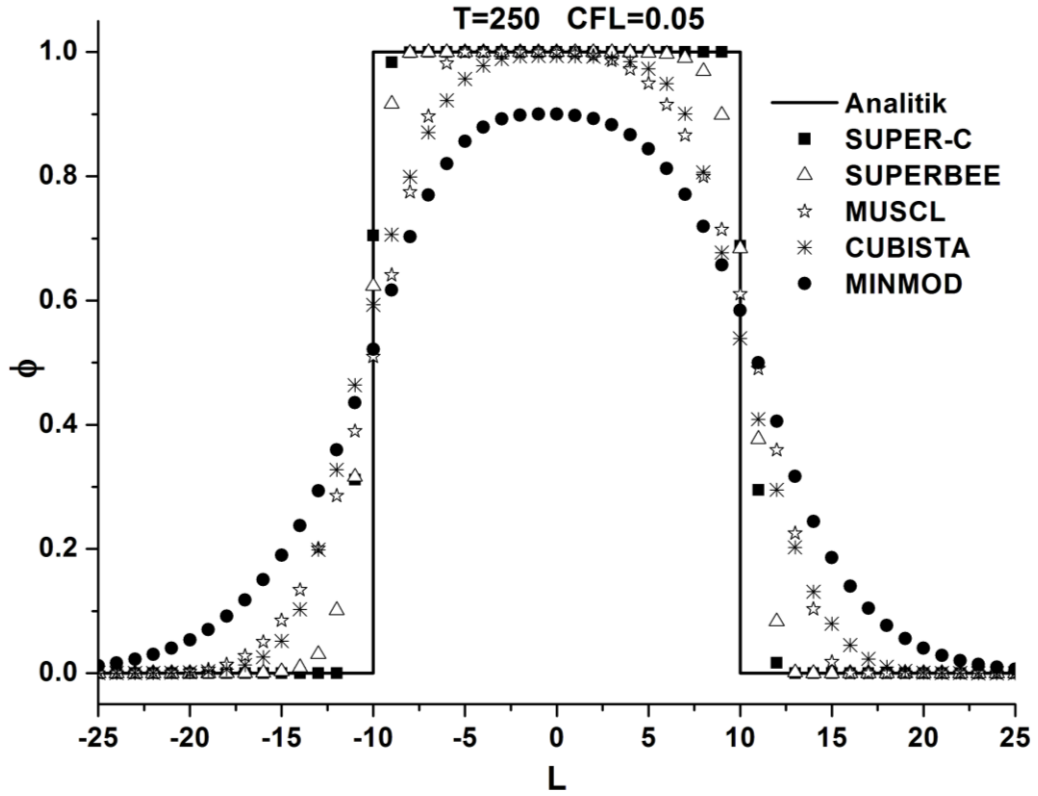
Şekil 5.3(Devam): Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



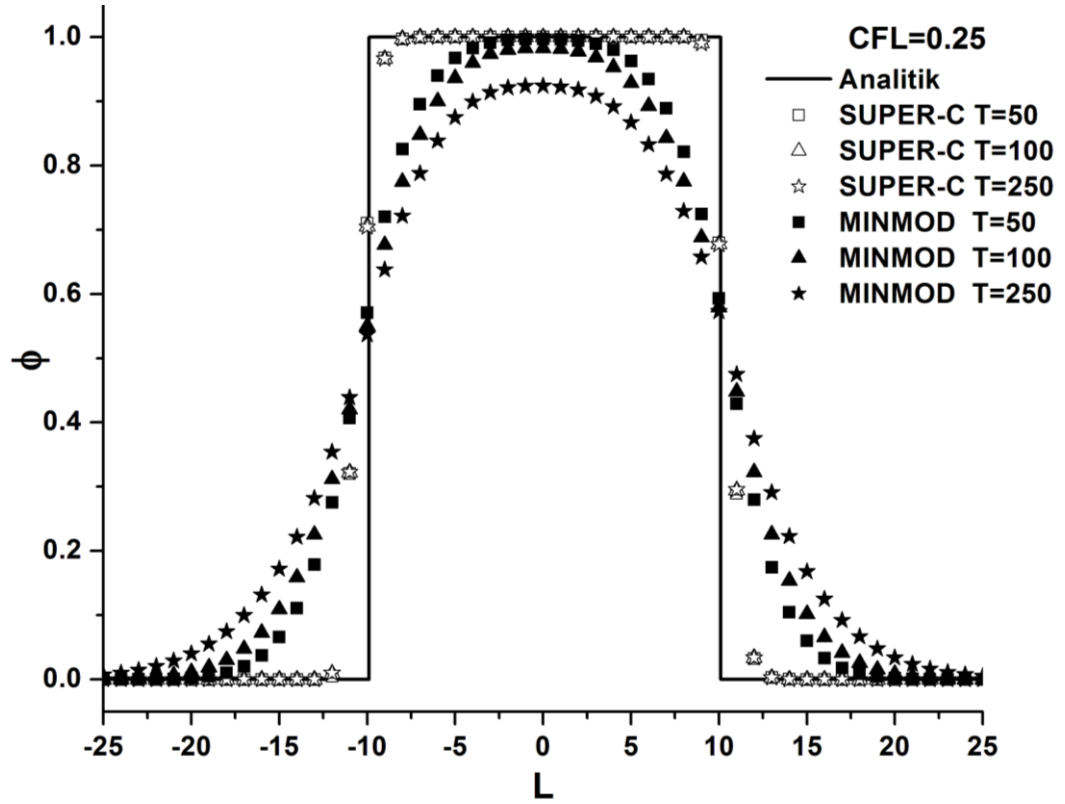
Şekil 5.4: Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



Şekil 5.4(Devam): Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



Şekil 5.4(Davam): Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



Şekil 5.5: Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde MINMOD ve SUPER-C yaklaşımları elde edilen profillerin zamanla değişimi (CFL=0.25)

5.1.2. Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması

Yarı-elips şeklinde skaler profilin, farklı zaman ve farklı CFL sayıları için yapılan çözümlerinin Denklem (5.4) kullanılarak elde edilen toplam hata değerleri Tablo 5.6-Tablo 5.8’de verilmiştir. Bölüm 5.1’de belirtilen sebepten dolayı seçilen yaklaşımlar ise Şekil 5.6-Şekil 5.8’de verilmiştir. Tablolardan görüleceği üzere bu problemde undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapan yaklaşımlar ile dikdörtgen skaler profilin taşınması probleminde undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapan yaklaşımlar aynıdır. Ayrıca, yaklaşımların CFL sayısına bağlı olarak monotonik davranışı da benzerdir. Sadece dikdörtgen skaler profilde bütün CFL sayılarında undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapan SHARP yaklaşımı bu problemde CFL=0.05 için monotonik sonuçlar vermektedir. CFL=0.05 için SHARP yaklaşımı ile elde edilen sonuçların bütün zamanlarda en iyi durumda dahi 10. sırada olduğu görülmektedir. Tablo 5.6 - Tablo 5.8 incelendiğinde küçük CFL sayılarında karakteristik eğrileri SUPER-C yaklaşımına yakın olan HOAB, VONOS, COPLA, SMART, STOIC yaklaşımlarının en iyi 8 yaklaşım arasında olduğu görülmektedir.

T=50 için sonuçların verildiği Tablo 5.6 incelendiğinde, CFL=0.98 için sıralamada ilk üç sırada UMIST, MUSCL ve CLAM yaklaşımlarının yer aldığı görülmektedir. Ancak Şekil 5.6’dan da görülebileceği gibi bütün yaklaşımlar profili oldukça başarılı bir şekilde yakalamakta, yaklaşımlar arasındaki fark çok küçük olmaktadır. Örneğin sıralamada ilk sırada yer alan UMIST ile son sırada yer alan MINMOD yaklaşımlarının hataları arasındaki fark %10’dan daha küçüktür. CFL=0.98 için analitik çözüme en yakın sonucu veren UMIST ve CLAM yaklaşımlarının küçülen CFL sayıları ile sıralamada hızla gerileyerek, CFL=0.05 için hata payı en yüksek olan yaklaşımlar olduğu görülmektedir. Dikdörtgen skaler profilde bütün CFL sayıları için ilk sırada yer alan SUPER-C yaklaşımı, bu problemde özellikle T=50 anında ve yüksek CFL sayılarında farklı davranarak sıralamada gerilere düşmektedir. Küçük CFL sayılarının seçilmesi ile SUPER-C yaklaşımı Şekil 5.6’dan da görülebileceği gibi çözümde basamak oluşturmaya rağmen sıralamada ilk sıralara

doğru tırmanmakta ve $CFL=0.25$ olduğunda analitik çözüme en yakın sonucu veren yaklaşım olmaktadır. SUPER-C yaklaşımının basamak şeklindeki davranışı özellikle küçük CFL sayılarında daha da belirginleşmesine rağmen, yüksek gradyenlerin olduğu yerleri diğer yaklaşımlara göre çok daha iyi çözme yeteneği bu yaklaşımı ön plana çıkarmaktadır. Dikdörtgen skaler profilde sıralamada SUPER-C yaklaşımını takip eden SUPERBEE yaklaşımı bu problemde aynı davranışı gösterememekte ve gerilerde kalmaktadır. $CFL=0.5$ 'te sıralamada ilk sırada yer alan MUSCL yaklaşımının da küçük CFL sayılarında sıralamada gerilediği görülmektedir. Bütün CFL sayılarında MUSCL ve CUBISTA yaklaşımlarının yarı-elips skaler profili oldukça iyi çözdüğü, ancak yüksek gradyenlerin olduğu noktalardaki yayılmanın artması ile hata değerinin artarak sıralamada gerilediği görülmektedir. Bu problemde KOREN yaklaşımının bütün CFL sayılarında tutarlı davranarak sıralamada ilk sıralarda yer aldığı görülmektedir.

Yarı-elips skaler profilin farklı CFL sayıları için elde edilen $T=100$ anındaki sonuçları Tablo 5.7 ve Şekil 5.7'de, $T=250$ anındaki sonuçları ise Tablo 5.8 ve Şekil 5.8'de verilmiştir. İlgili tablolar incelendiğinde $T=100$ anında $CFL=0.98$ ve $CFL=0.5$ için ve $T=250$ anında $CFL=0.98$ için MUSCL yaklaşımının, diğer bütün durumlarda ise SUPER-C yaklaşımının sıralamada ilk sıralarda yer aldığı görülmektedir. Şekil 5.7 ve Şekil 5.8'den görülebileceği gibi SUPER-C yaklaşımı özellikle küçük CFL sayılarında skaler profilin sağ tarafında bir basamak oluşturmakta, sol tarafını ise dikdörtgen skaler bir profil çözüyormuş gibi dikleştirmektedir. Dikleştirme özelliği SUPERBEE yaklaşımında da görülmektedir. MUSCL ve CUBISTA yaklaşımları, difüzyif bir davranış gösterdikleri skaler profil ayağının her iki tarafı haricinde profili oldukça iyi çözmekte, profilde herhangi bir dikleştirme yapmamaktadır. MINMOD yaklaşımının artan zamanla skaler profili yayarak hata miktarında ciddi bir artış olduğu görülmektedir. KOREN yaklaşımının neredeyse bütün CFL sayılarında tutarlı bir davranış göstererek sıralamada ilk sıralarda yer aldığı göze çarpmaktadır.

MINMOD ve SUPER-C yaklaşımlarının, $CFL=0.25$ için farklı zamanlardaki çözümleri Şekil 5.9'da verilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi SUPER-C yaklaşımında bütün zamanlar için skaler profil neredeyse aynıdır. MINMOD yaklaşımında ise artan zamanla profilin ciddi ölçüde yayıldığı görülmektedir. $T=50$

ile $T=250$ anındaki hatalar $CFL=0.25$ için karşılaştırıldığında hata artışının MINMOD, UMIST ve OSHER yaklaşımlarında %110'un üzerinde, CLAM, CUBISTA, WACEB, KOREN ve MUSCL yaklaşımlarında %50'nin üzerinde olduğu görülmektedir. SUPERBEE ve SUPER-C yaklaşımlarındaki hata ise sırasıyla %8 ve %2'dir. Görüldüğü gibi SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarındaki hata artışı diğer yaklaşımlara göre çok küçüktür. Bu iki yaklaşım ile elde edilen çözümde profil çözüm başladıktan sonra bir şekil almakta ve bu şeklini hemen hemen korumaktadır. Bu nedenle artan zamanla SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımları ile diğer yaklaşımlar arasındaki fark daha da artmaktadır. Dolayısıyla zamandan bağımsız çözümlerde ($t \rightarrow \infty$) SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarının en az hata içeren yaklaşım olacakları söylenebilir.

Tablo 5.6: Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=50)

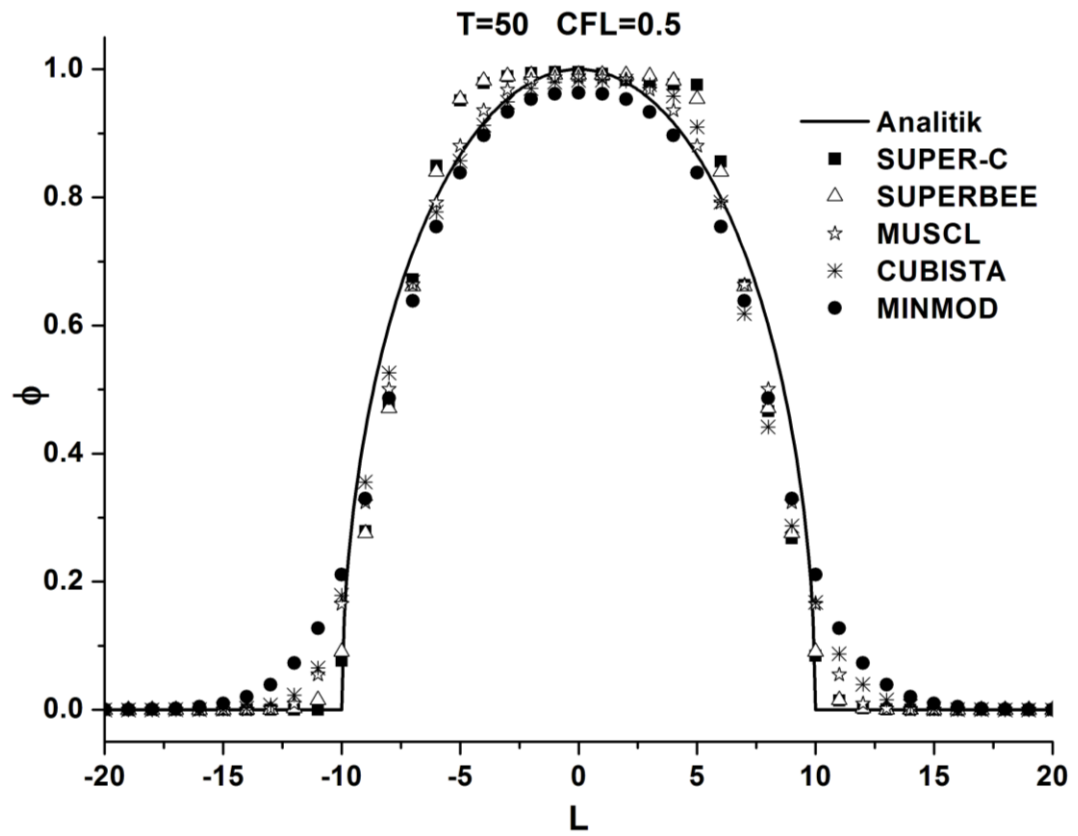
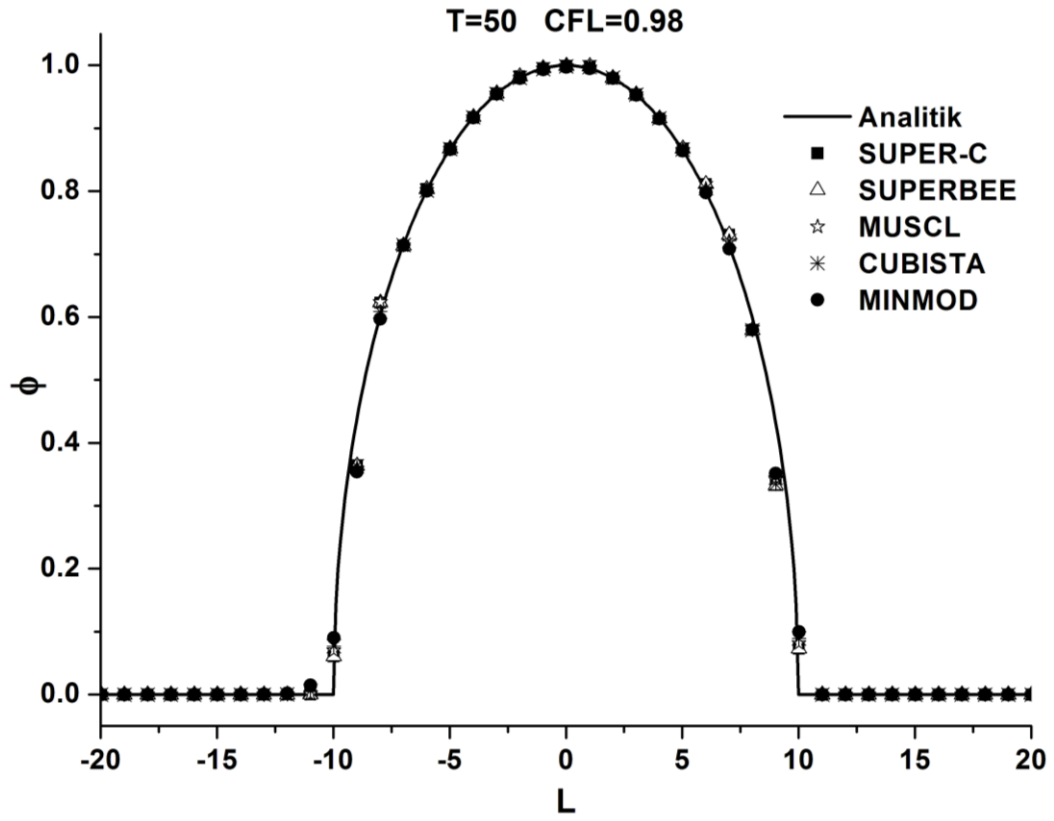
CFL =0.98			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1			CFL =0.05		
1	UMIST	0.3808	1	MUSCL	1.1337	1	HOAB	1.2573	1	SUPERC	1.2642	1	SUPERC	1.2419
2	MUSCL	0.3826	2	CLAM	1.2723	2	MUSCL	1.3136	2	HOAB	1.3302	2	HOAB	1.3543
3	CLAM	0.3831	3	KOREN	1.2868	3	SUPERC	1.3248	3	KOREN	1.3589	3	KOREN	1.3663
4	KOREN	0.3886	4	SUPERC	1.3571	4	KOREN	1.3428	4	STOIC	1.3777	4	STOIC	1.3675
5	WACEB	0.3944	5	STOIC	1.3697	5	STOIC	1.4088	5	VONOS	1.3819	5	VONOS	1.3820
6	SUPERC	0.3978	6	SUPERBEE	1.3997	6	SMART	1.4514	6	SMART	1.4276	6	SMART	1.4139
7	CUBISTA	0.3985	7	SMART	1.4059	7	SUPERBEE	1.4526	7	MUSCL	1.4322	7	WACEB	1.4277
8	SUPERBEE	0.3989	8	CUBISTA	1.4100	8	CLAM	1.4544	8	COPLA	1.4379	8	COPLA	1.4287
9	OSHER	0.4116	9	WACEB	1.4141	9	WACEB	1.4556	9	WACEB	1.4384	9	SUPERBEE	1.4512
10	MINMOD	0.4162	10	COPLA	1.4185	10	COPLA	1.4589	10	SUPERBEE	1.4516	10	SHARP	1.4592
11	COPLA	-	11	UMIST	1.4195	11	CUBISTA	1.4691	11	CUBISTA	1.4663	11	CUBISTA	1.4676
12	EULER	-	12	HQUICK	1.4679	12	HQUICK	1.5504	12	EULER	1.5081	12	MUSCL	1.4827
13	HQUICK		13	OSPRES	1.4858	13	OSPRES	1.5857	13	HQUICK	1.5550	13	EULER	1.4956
14	HOAB		14	SMARTER	1.4907	14	SMARTER	1.5901	14	CLAM	1.5941	14	HQUICK	1.5519
15	OSPRES	-	15	SECBC	1.6778	15	UMIST	1.7014	15	OSPRES	1.6044	15	OSPRES	1.6065
16	SECBC	-	16	OSHER	1.7125	16	SECBC	1.8264	16	SMARTER	1.6085	16	SMARTER	1.6106
17	SHARP	-	17	MINMOD	1.9515	17	OSHER	1.9843	17	UMIST	1.8546	17	CLAM	1.6410
18	SMART	-	18	EULER	-	18	MINMOD	2.3645	18	SECBC	1.8673	18	SECBC	1.8751
19	SMARTER	-	19	HOAB	-	19	EULER	-	19	OSHER	2.1797	19	UMIST	1.9053
20	STOIC	-	20	SHARP	-	20	SHARP	-	20	MINMOD	2.5794	20	OSHER	2.2476
21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	SHARP	-	21	MINMOD	2.6469

Tablo 5.7: Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=100)

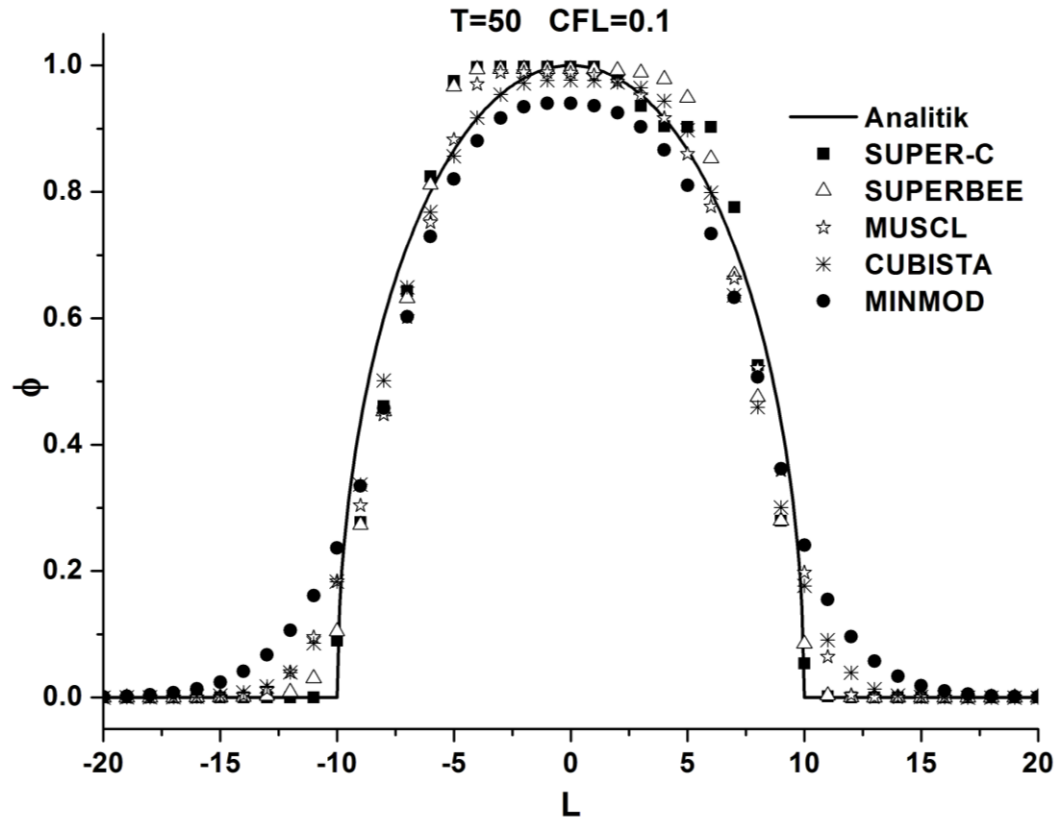
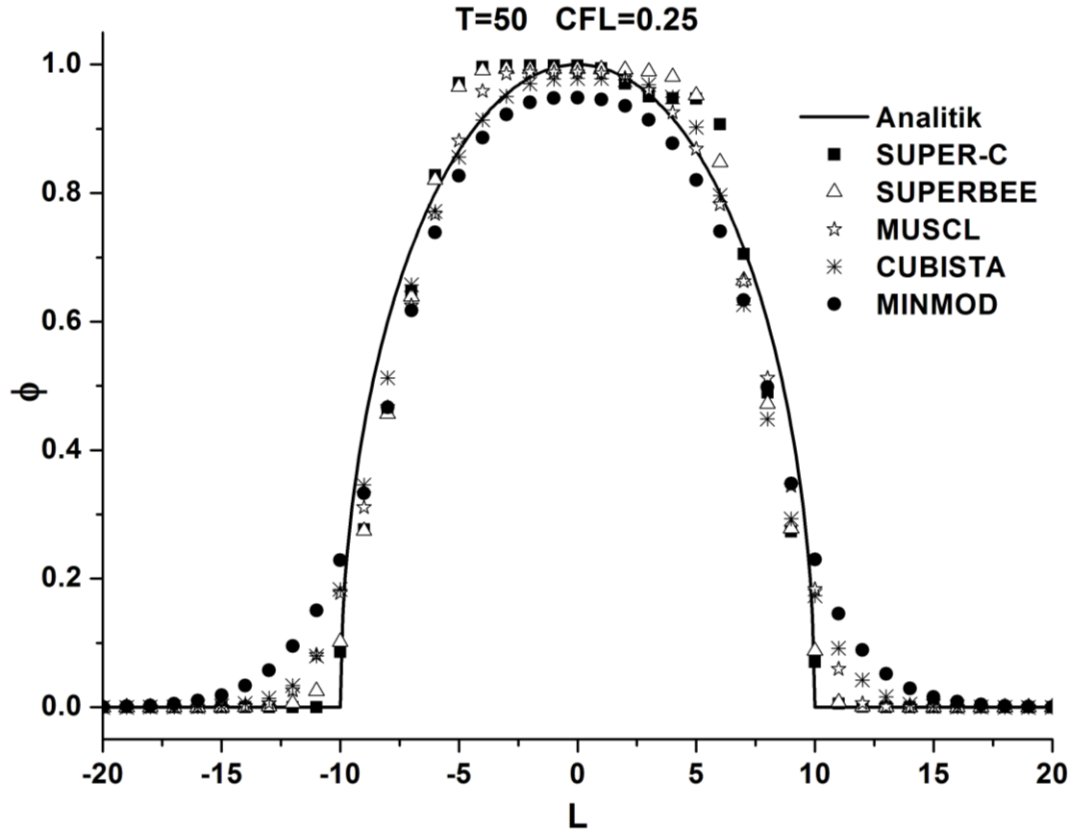
CFL=0.98			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1			CFL=0.05		
1	MUSCL	0.4836	1	MUSCL	1.3851	1	SUPERC	1.3742	1	SUPERC	1.3097	1	SUPERC	1.2823
2	CLAM	0.5058	2	SUPERC	1.4585	2	HOAB	1.4069	2	HOAB	1.4425	2	HOAB	1.4513
3	KOREN	0.5073	3	SUPERBEE	1.4749	3	SUPERBEE	1.4752	3	VONOS	1.4729	3	SUPERBEE	1.4786
4	UMIST	0.5079	4	CLAM	1.5250	4	MUSCL	1.5376	4	SUPERBEE	1.4769	4	VONOS	1.4820
5	WACEB	0.5263	5	KOREN	1.5711	5	KOREN	1.5711	5	KOREN	1.5584	5	KOREN	1.5686
6	SUPERC	0.5321	6	STOIC	1.6820	6	STOIC	1.6977	6	STOIC	1.6385	6	STOIC	1.6088
7	SUPERBEE	0.5334	7	WACEB	1.7071	7	COPLA	1.7256	7	COPLA	1.6844	7	COPLA	1.6638
8	CUBISTA	0.5391	8	CUBISTA	1.7100	8	WACEB	1.7271	8	SMART	1.6899	8	SMART	1.6693
9	OSHER	0.5621	9	COPLA	1.7109	9	SMART	1.7329	9	WACEB	1.6904	9	WACEB	1.6718
10	MINMOD	0.5950	10	SMART	1.7229	10	CUBISTA	1.7528	10	MUSCL	1.7129	10	SHARP	1.7041
11	COPLA	-	11	HQUICK	1.8086	11	CLAM	1.7829	11	CUBISTA	1.7335	11	CUBISTA	1.7223
12	EULER	-	12	OSPRES	1.8336	12	HQUICK	1.8730	12	EULER	1.8070	12	MUSCL	1.7863
13	HQUICK		13	SMARTER	1.8375	13	OSPRES	1.9210	13	HQUICK	1.8709	13	EULER	1.7920
14	HOAB		14	UMIST	1.9344	14	SMARTER	1.9252	14	OSPRES	1.9535	14	HQUICK	1.8672
15	OSPRES	-	15	SECBC	2.0691	15	SECBC	2.2951	15	SMARTER	1.9552	15	OSPRES	1.9646
16	SECBC	-	16	OSHER	2.0845	16	UMIST	2.3403	16	CLAM	1.9680	16	SMARTER	1.9662
17	SHARP	-	17	MINMOD	2.7225	17	OSHER	2.5999	17	SECBC	2.3687	17	CLAM	2.0355
18	SMART	-	18	EULER	-	18	MINMOD	3.3324	18	UMIST	2.5650	18	SECBC	2.3823
19	SMARTER	-	19	HOAB	-	19	VONOS	-	19	OSHER	2.9282	19	UMIST	2.6400
20	STOIC	-	20	SHARP	-	20	SHARP	-	20	MINMOD	3.6532	20	OSHER	3.0440
21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	EULER	-	21	SHARP	-	21	MINMOD	3.7548

Tablo 5.8: Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=250)

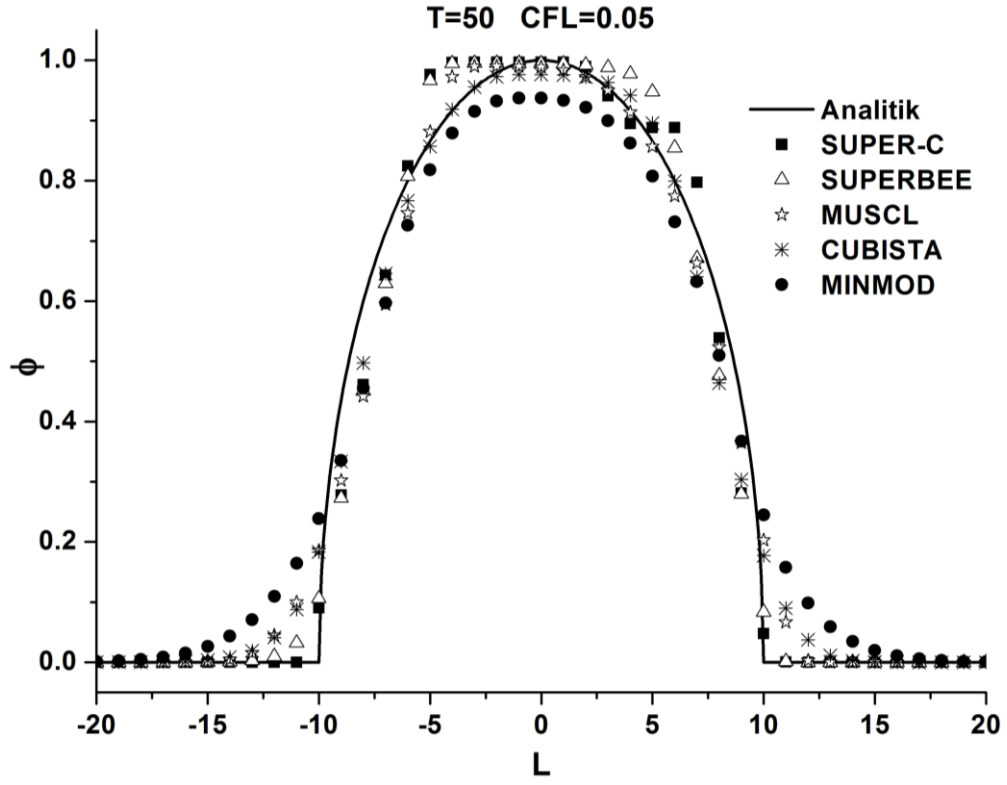
CFL =0.98			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1			CFL =0.05		
1	MUSCL	0.6944	1	SUPERBEE	1.4747	1	SUPERC	1.4275	1	SUPERC	1.4241	1	SUPERC	1.3855
2	CLAM	0.7361	2	SUPERC	1.4760	2	HOAB	1.4453	2	HOAB	1.4508	2	HOAB	1.4572
3	KOREN	0.7504	3	MUSCL	1.6437	3	SUPERBEE	1.4797	3	SUPERBEE	1.4827	3	SUPERBEE	1.4849
4	UMIST	0.7539	4	KOREN	2.0317	4	MUSCL	1.9579	4	VONOS	1.4948	4	VONOS	1.5110
5	SUPERC	0.7677	5	CLAM	2.0763	5	KOREN	2.0210	5	KOREN	1.9718	5	KOREN	1.9664
6	SUPERBEE	0.7688	6	STOIC	2.2679	6	STOIC	2.2766	6	STOIC	2.1423	6	STOIC	2.0749
7	WACEB	0.7899	7	WACEB	2.2730	7	COPLA	2.3108	7	COPLA	2.2239	7	COPLA	2.1786
8	CUBISTA	0.8083	8	COPLA	2.2762	8	SMART	2.3169	8	SMART	2.2263	8	SMART	2.1820
9	OSHER	0.8575	9	SMART	2.2915	9	WACEB	2.3283	9	WACEB	2.2476	9	WACEB	2.2051
10	MINMOD	0.9275	10	CUBISTA	2.3285	10	CUBISTA	2.4772	10	MUSCL	2.2897	10	SHARP	2.2402
11	COPLA	-	11	HQUICK	2.4624	11	CLAM	2.5168	11	CUBISTA	2.4371	11	CUBISTA	2.4063
12	EULER	-	12	OSPRE	2.5483	12	HQUICK	2.6660	12	EULER	2.4978	12	MUSCL	2.4249
13	HQUICK		13	SMARTER	2.5509	13	OSPRE	2.8137	13	HQUICK	2.6898	13	EULER	2.4752
14	HOAB		14	UMIST	2.9897	14	SMARTER	2.8172	14	CLAM	2.8613	14	HQUICK	2.6876
15	OSPRE	-	15	SECBC	3.1791	15	SECBC	3.6399	15	OSPRE	2.8845	15	OSPRE	2.9015
16	SECBC	-	16	OSHER	3.1928	16	UMIST	3.6739	16	SMARTER	2.8847	16	SMARTER	2.9017
17	SHARP	-	17	MINMOD	4.3384	17	OSHER	4.2353	17	SECBC	3.7910	17	CLAM	3.0034
18	SMART	-	18	EULER	-	18	MINMOD	5.3766	18	UMIST	4.0832	18	SECBC	3.8223
19	SMARTER	-	19	HOAB	-	19	VONOS	-	19	OSHER	4.8272	19	UMIST	4.2307
20	STOIC	-	20	SHARP	-	20	SHARP	-	20	MINMOD	5.9779	20	OSHER	5.0157
21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	EULER	-	21	SHARP	-	21	MINMOD	6.1674



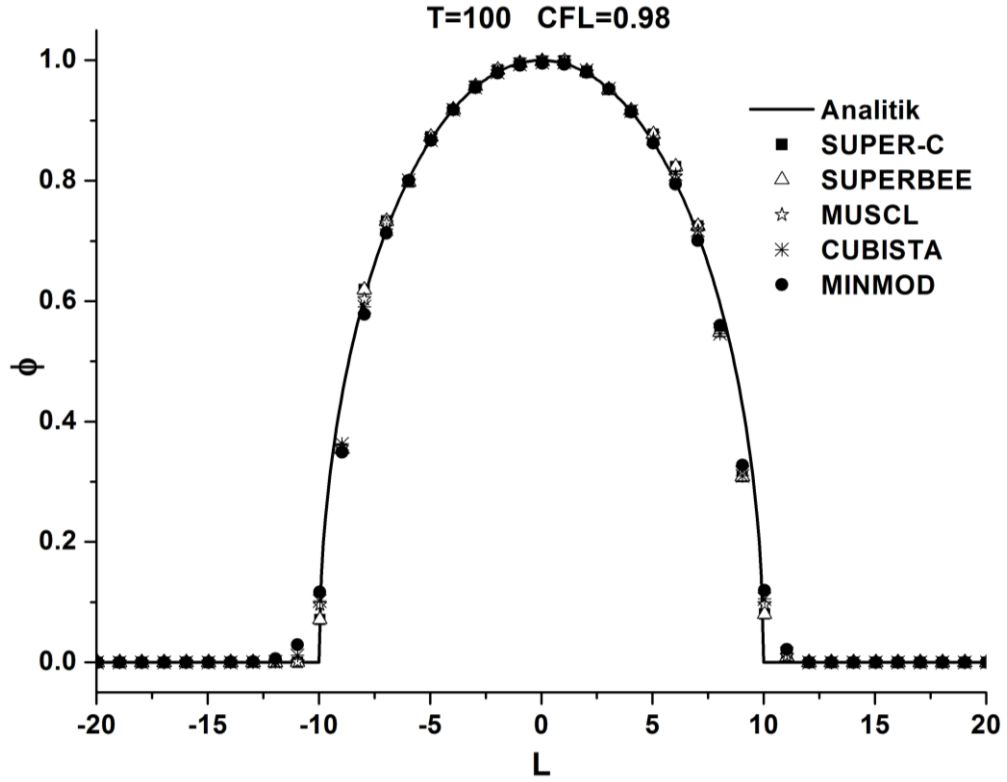
Şekil 5.6: Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



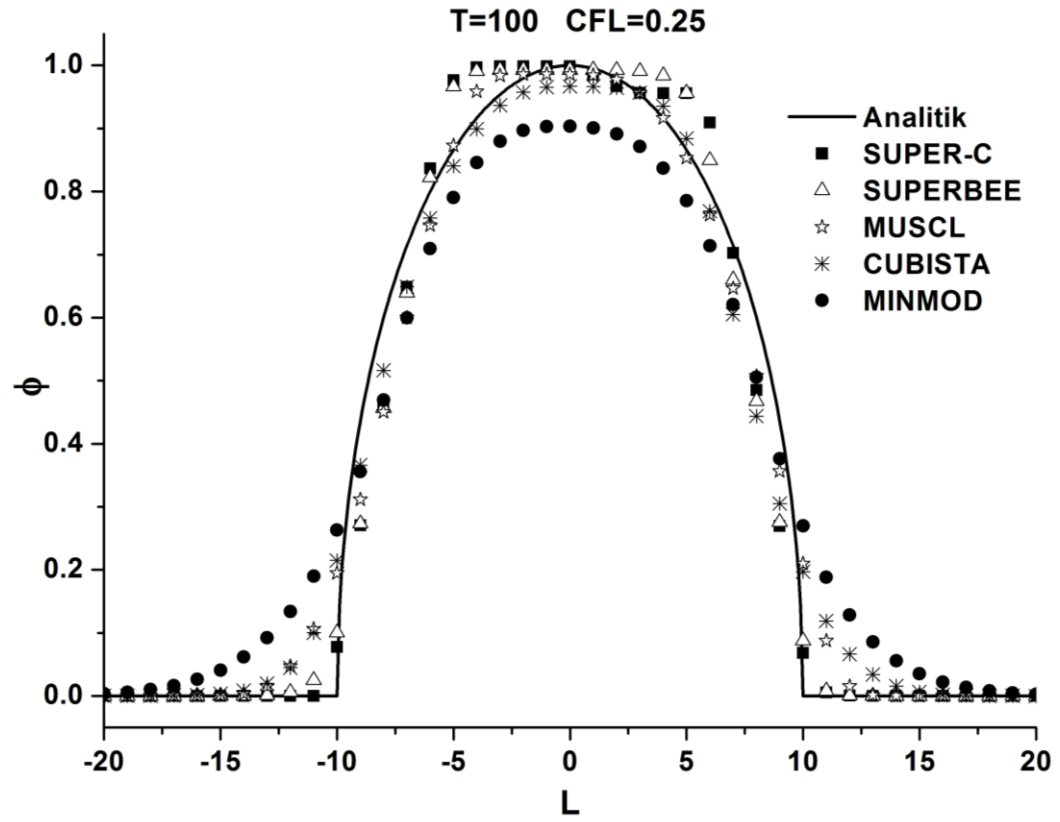
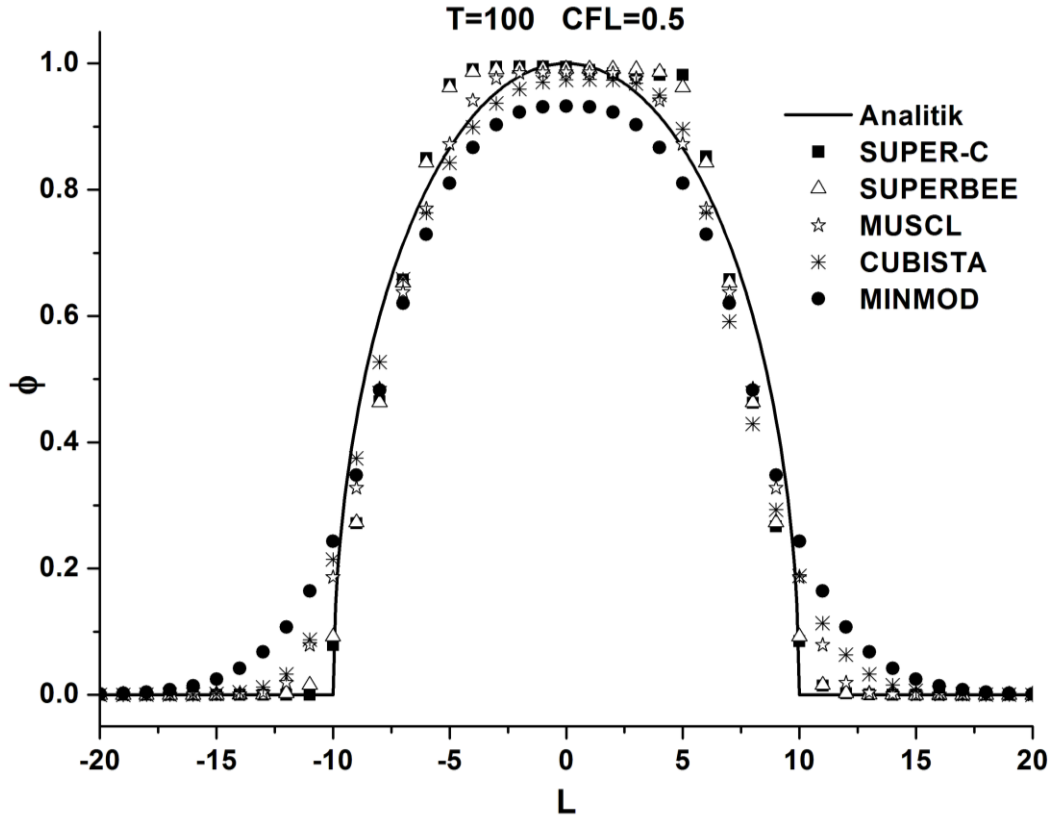
Şekil 5.6(Devam): Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



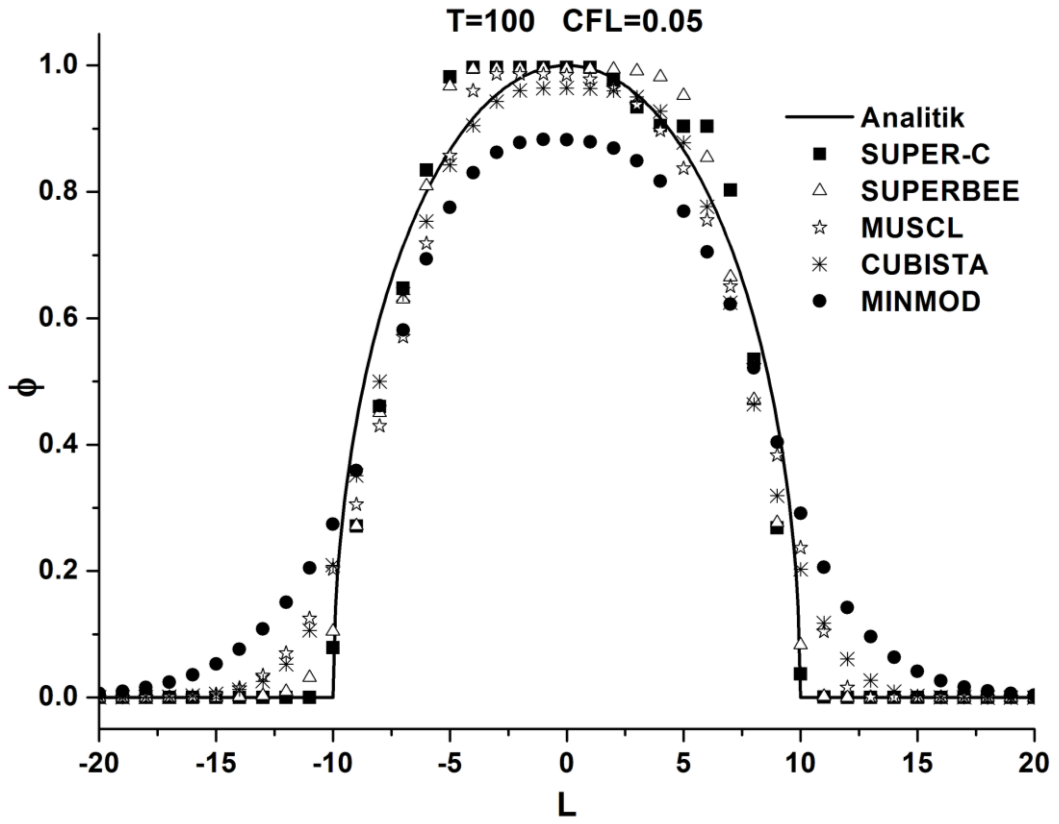
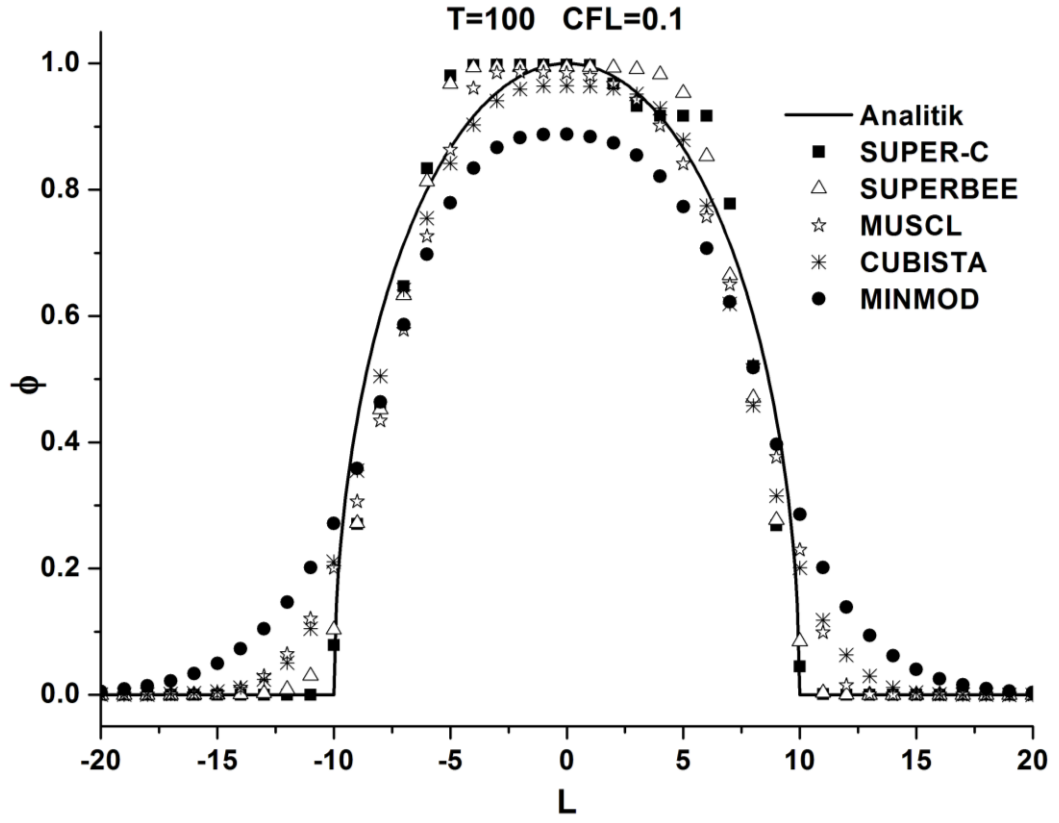
Şekil 5.6(Devam): Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



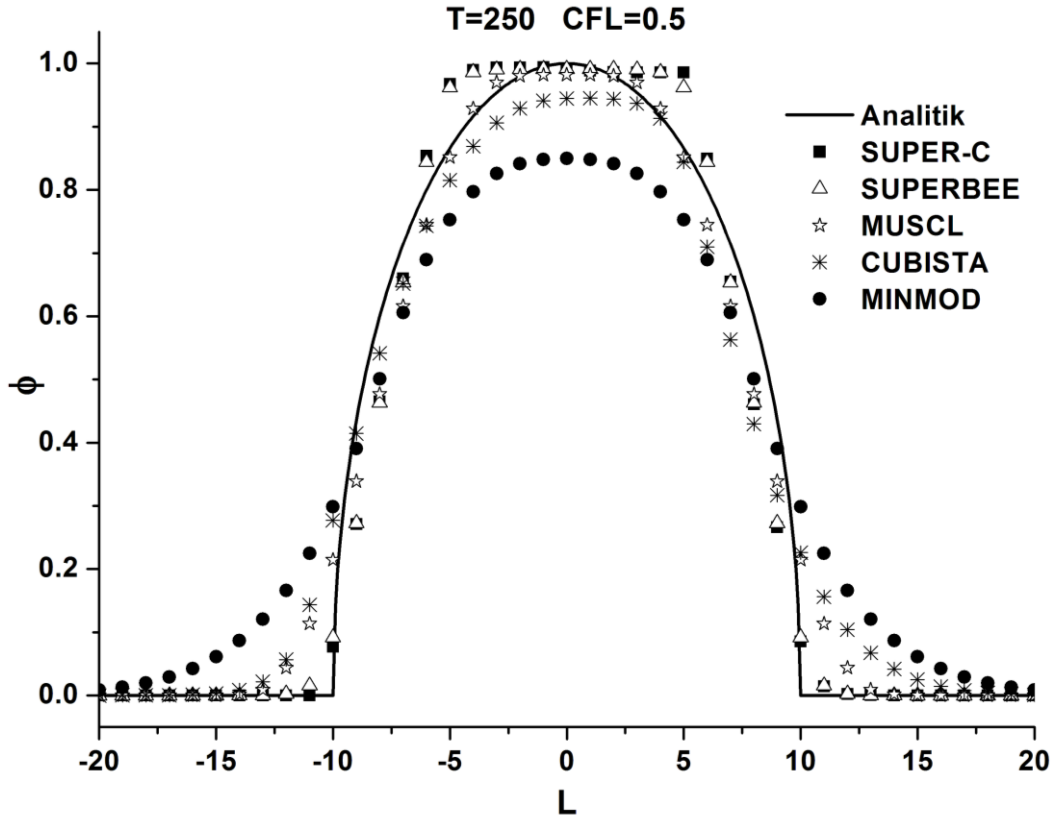
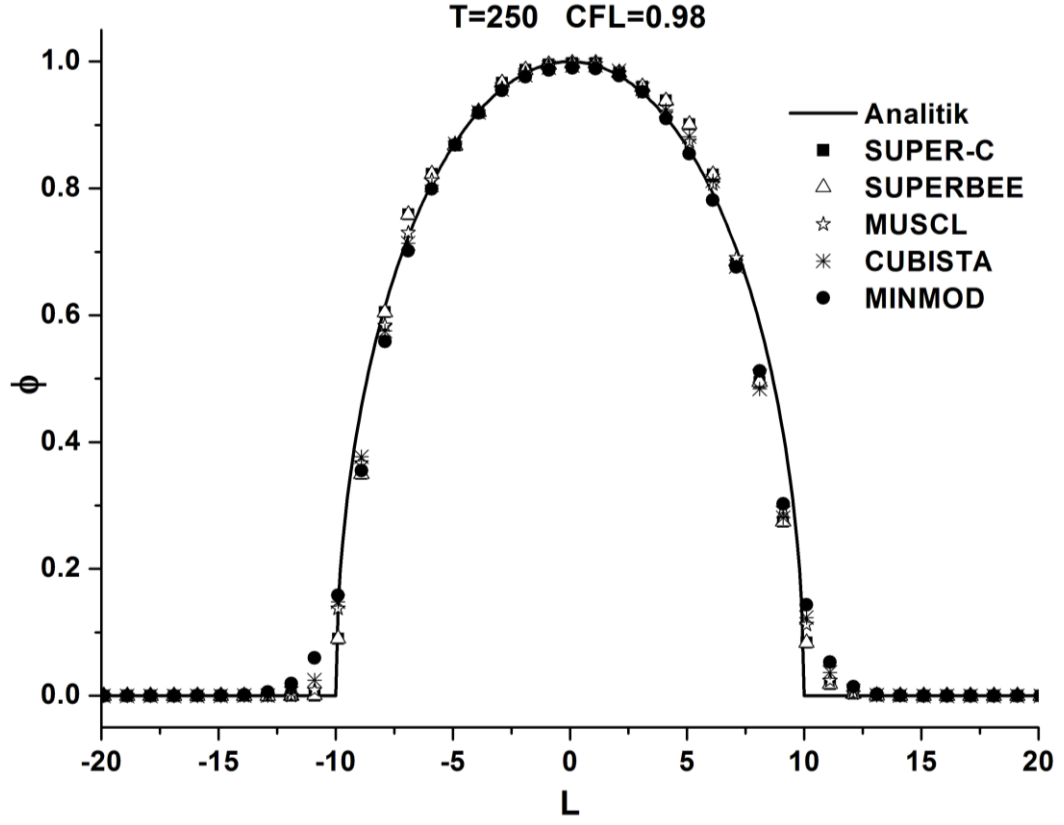
Şekil 5.7: Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



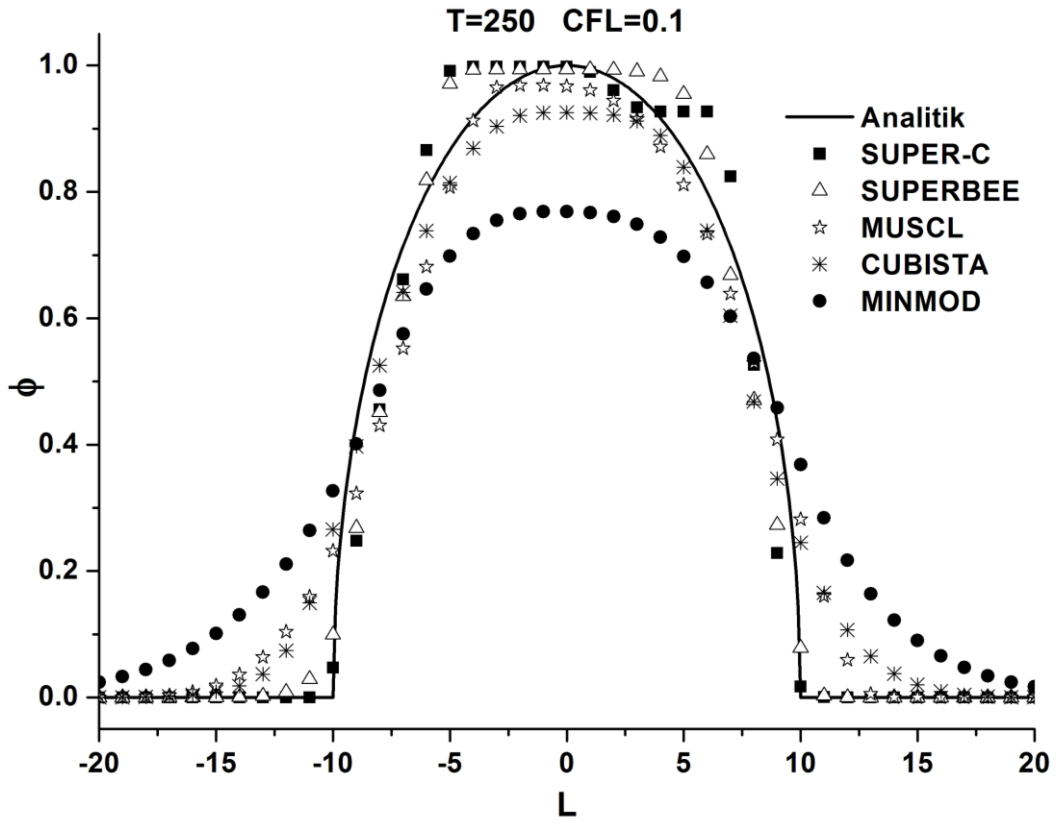
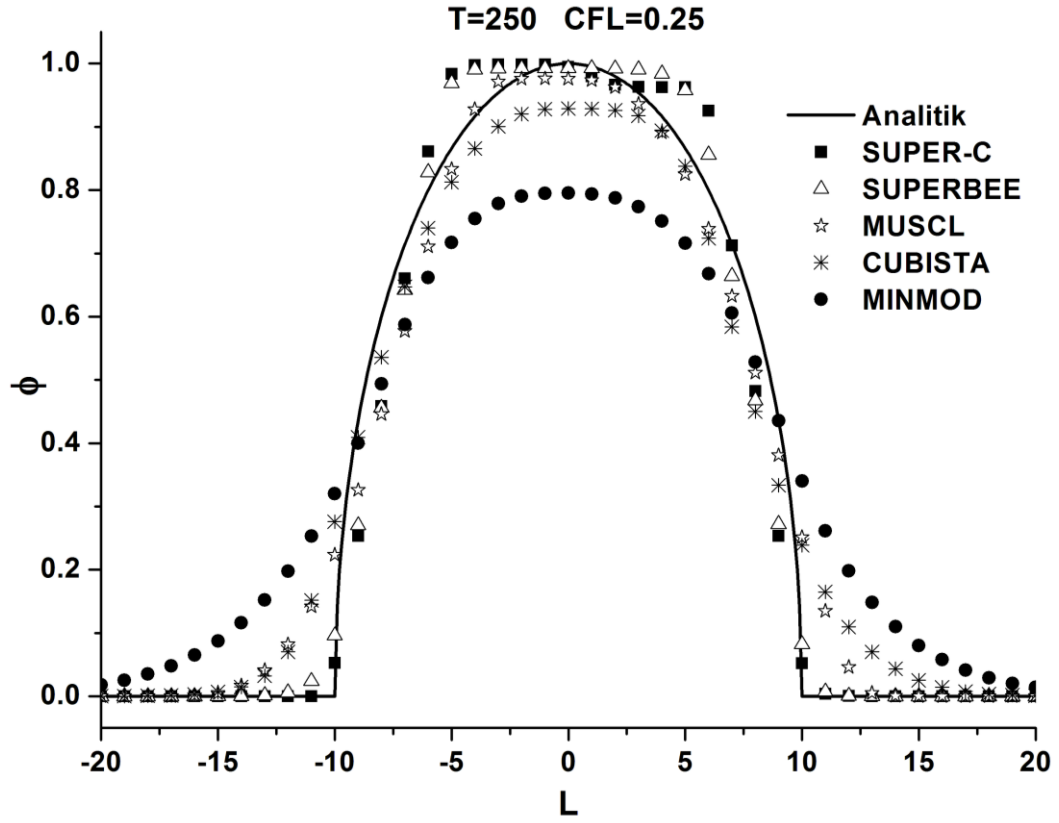
Şekil 5.7 (Devam): Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



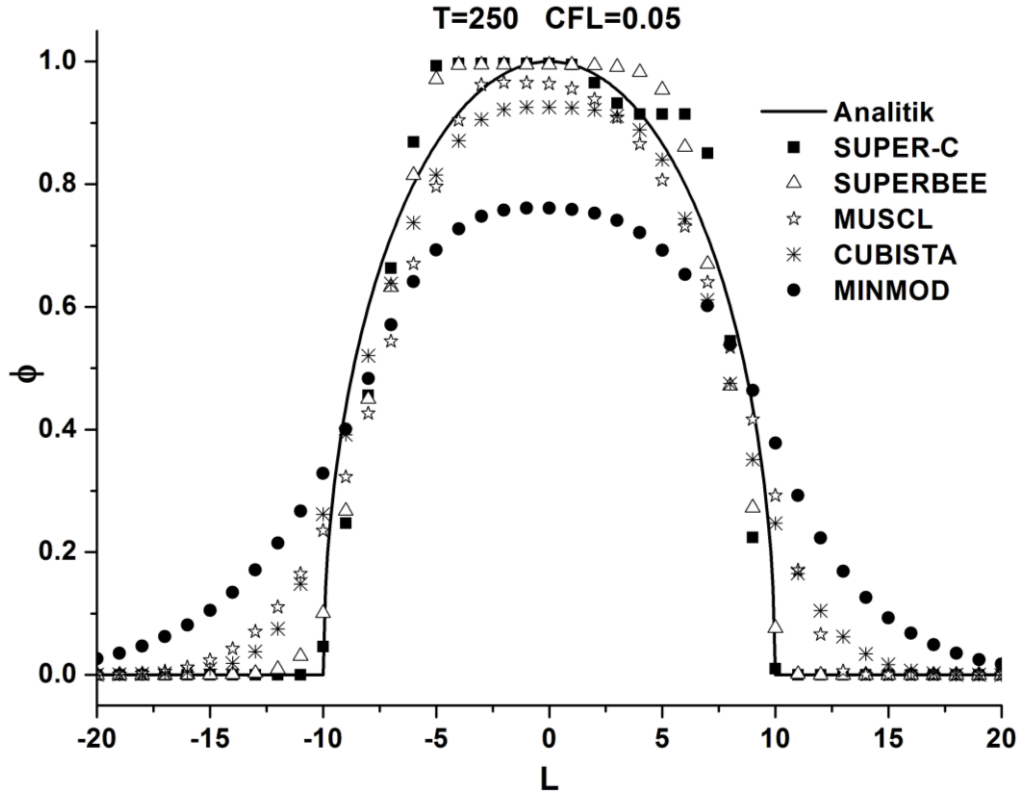
Şekil 5.7 (Devam): Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



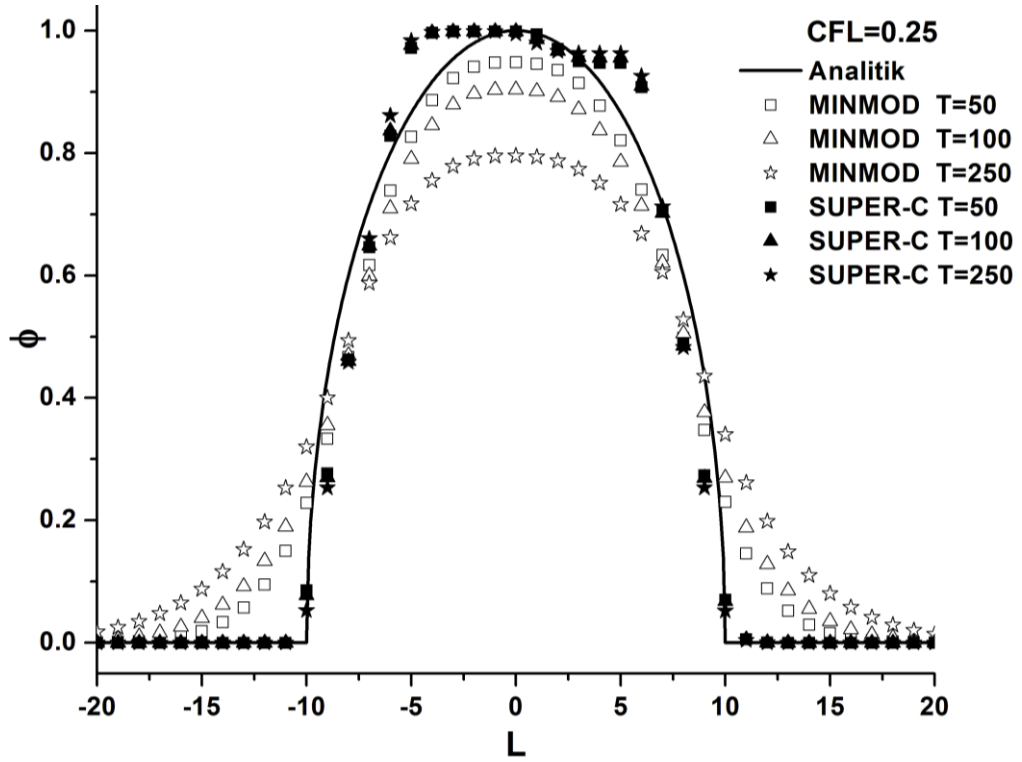
Şekil 5.8: Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



Şekil 5.8 (Devam): Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



Şekil 5.8 (Devam): Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



Şekil 5.9: Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde MINMOD ve SUPER-C yaklaşımları elde edilen profillerin zamanla değişimi (CFL=0.25)

5.1.3. Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması

Sinüs-kare şeklinde bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminin, farklı zaman ve farklı CFL sayıları için yapılan çözümlerinin Denklem (5.4) kullanılarak elde edilen toplam hata değerleri, Tablo 5.9 - Tablo 5.11’de verilmiştir. Yaklaşımlardan bazıları seçilerek, bu yaklaşımlar ile elde edilen profiller Şekil 5.10 - Şekil 5.12’de analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Tablolardan görülebileceği gibi dikdörtgen ve yarı-elips profillerinde undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapan yaklaşımların bu problemde de undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yaptığı görülmektedir. Bu yaklaşımlardan OSPRE ve SMARTER yaklaşımlarının $T=50$ olması durumunda undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapmadığı, ancak artan zamanla çözümde monotonik olmayan sonuçlar verdiği görülmektedir. VONOS ve HOAB yaklaşımlarının küçük CFL sayılarında SUPER-C yaklaşımından bile daha az hata içerdiği görülmektedir. Ancak, daha önce belirtildiği gibi bu yaklaşımlar yüksek CFL sayılarında monotonik olmayan sonuçlar verdiği için değerlendirilmeye alınmamaktadır.

Tablo 5.9 - Tablo 5.11 incelendiğinde, dikdörtgen ve yarı-elips skaler profillerinde neredeyse bütün zaman ve CFL sayıları için analitik çözümden en uzak sonuç veren OSHER yaklaşımının bu profilde $T=50$ ve $T=100$ için analitik çözüme en yakın sonuç veren yaklaşım olduğu, $T=250$ için ise MUSCL yaklaşımını müteakiben ikinci sırada olduğu görülmektedir. Fakat $CFL \leq 0.5$ olması durumunda, bu yaklaşımın daha önceki skaler profillerde olduğu gibi MINMOD yaklaşımı ile beraber sıralamada son sıralarda yeri aldığı görülmektedir.

SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarının $CFL \leq 0.5$ için sıralamada yine ilk sıralarda yer aldığı görülmektedir. $CFL=0.5$ ve $CFL=0.25$ olması durumunda MUSCL, $CFL \leq 0.1$ olması durumunda ise KOREN yaklaşımı, SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarını izlemektedir. Dikdörtgen ve yarı-elips skaler profillerinin aksine bu profilde küçülen CFL sayısı ile SUPER-C yaklaşımının hata değerinin arttığı görülmektedir. Küçük CFL sayılarında, sinüs-kare skaler profilinin tepe noktasına

yakın yerlerde SUPER-C yaklaşımının dikleştirme özelliği hata artışının sebebidir. Skaler profil ayaklarının olduğu yerlerde SUPER-C yaklaşımının profili daralttığı görülmektedir. Yarı-elips skaler profilinde olduğu gibi SUPER-C yaklaşımı kompresif bir davranış göstererek sanki dikdörtgen skaler bir profil çözüyormuş gibi bir davranış göstermektedir. Bu durum Şekil 5.10 - Şekil 5.12’de açıkça görülebilir. SUPERBEE yaklaşımı da skaler profilin ayağında bir daralmaya, profil tepesinde ise dikleştirmeye sebep olmaktadır. SUPER-C yaklaşımı neredeyse bütün durumlarda maksimum değeri yakalarken, SUPERBEE yaklaşımında tepe noktasında bir çökme olmaktadır. MUSCL ve CUBISTA yaklaşımlarındaki bu çökme çok daha belirgindir.

Sinüs-kare skaler profilin farklı CFL sayıları için elde edilen $T=100$ anındaki sonuçları Tablo 5.10 ve Şekil 5.11’de, $T=250$ anındaki sonuçları ise Tablo 5.11 ve Şekil 5.12’de verilmiştir. İlgili tablolar incelendiğinde dikdörtgen ve yarı-elips skaler profillerinden farklı olarak bu profilde $CFL=0.98$ olması halinde dahi artan zamanla bütün yaklaşımların hatalarında ciddi bir artma görülmektedir. Sinüs-kare skaler profilin şeklini koruması daha önce tartışılan skaler profillere göre daha zor olmaktadır.

Şekil 5.10 - Şekil 5.12 incelendiğinde SUPERBEE yaklaşımı ile elde edilen çözümlerde artan zamanla bu yaklaşımın dikleştirme özelliği iyice ön plana çıkmaktadır. MUSCL yaklaşımının ise profil ayak ve tepesinde hafif bir difüzyif özellik gösterdiği görülmektedir. Bu yaklaşım $T=50$ anında profil ayaklarını oldukça iyi bir şekilde yakalarken, artan zaman ile belirgin bir şekilde yayılmaktadır. MINMOD ve SUPER-C yaklaşımlarının $CFL=0.25$ için elde edilen profillerinin zamanla değişimi ayrıca Şekil 5.13’te verilmiştir. Şekilden de görüleceği üzere SUPER-C yaklaşımı ile elde edilen sonuçlarda artan zamanla profilin tepe bölgesinde çok küçük bir çökme olurken, MINMOD yaklaşımında bu durum çok belirgindir. MINMOD ile elde edilen çözümde profilin maksimum değerinin $T=50$ anında 0.8 civarında, $T=250$ anında ise 0.6’nın altında olduğu görülmektedir. $T=50$ ile $T=250$ anındaki hatalar $CFL=0.25$ için karşılaştırıldığında hata artışının SUPER-C yaklaşımında %22, SUPERBEE yaklaşımında %123, diğer yaklaşımlarda ise %200’ün üzerinde olduğu görülmektedir.

Tablo 5.9: Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=50)

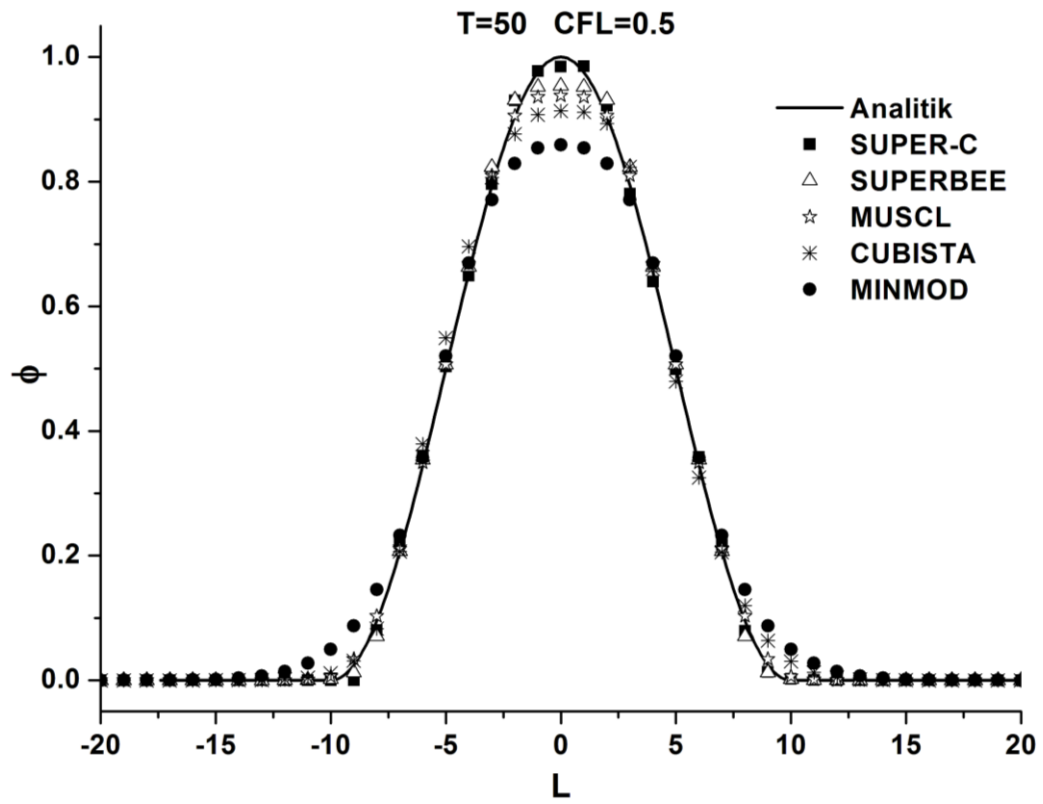
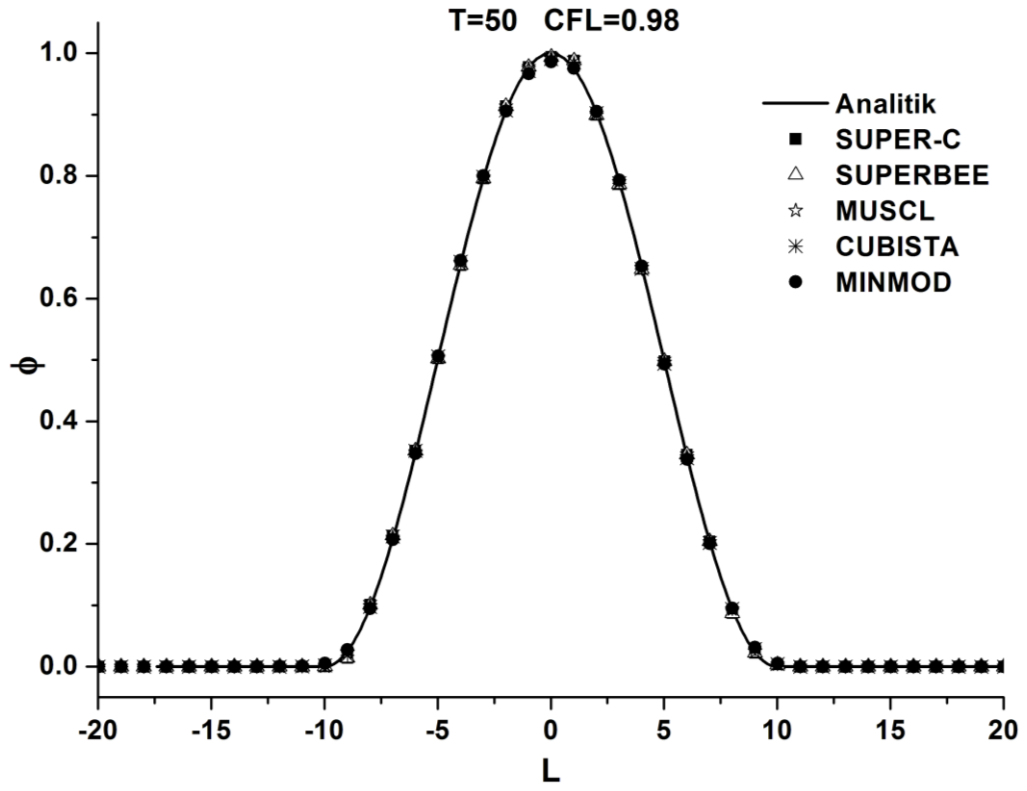
CFL =0.98			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1			CFL =0.05		
1	OSHER	0.0576	1	SUPERC	0.2333	1	SUPERC	0.2586	1	VONOS	0.2121	1	HOAB	0.2163
2	MUSCL	0.0741	2	MUSCL	0.2819	2	HOAB	0.2616	2	HOAB	0.2306	2	VONOS	0.2180
3	UMIST	0.0782	3	SUPERBEE	0.3350	3	SUPERBEE	0.4107	3	SUPERC	0.2747	3	SUPERC	0.2781
4	CLAM	0.0823	4	KOREN	0.4758	4	MUSCL	0.4279	4	SUPERBEE	0.4298	4	SUPERBEE	0.4225
5	KOREN	0.0937	5	CLAM	0.5167	5	KOREN	0.4505	5	KOREN	0.4634	5	KOREN	0.4684
6	MINMOD	0.0938	6	SMART	0.5918	6	SMART	0.5896	6	SMART	0.5327	6	SMART	0.5029
7	SUPERBEE	0.1013	7	WACEB	0.6106	7	WACEB	0.6166	7	MUSCL	0.5720	7	WACEB	0.5757
8	SUPERC	0.1014	8	UMIST	0.6164	8	COPLA	0.6299	8	WACEB	0.5910	8	COPLA	0.5788
9	WACEB	0.1041	9	COPLA	0.6216	9	STOIC	0.6598	9	COPLA	0.5953	9	SHARP	0.5868
10	CUBISTA	0.1053	10	CUBISTA	0.6232	10	CLAM	0.6962	10	SHARP	0.6100	10	STOIC	0.6092
11	OSPREE	0.1077	11	STOIC	0.6315	11	CUBISTA	0.7095	11	STOIC	0.6288	11	MUSCL	0.6281
12	SMARTER	0.1088	12	HQUICK	0.6952	12	HQUICK	0.7602	12	EULER	0.6597	12	EULER	0.6445
13	COPLA	-	13	OSPREE	0.7250	13	OSPREE	0.8120	13	CUBISTA	0.7626	13	HQUICK	0.7748
14	EULER	-	14	SMARTER	0.7330	14	SMARTER	0.8222	14	HQUICK	0.7676	14	CUBISTA	0.7810
15	HOAB	-	15	SECBC	0.9243	15	UMIST	0.9402	15	CLAM	0.8378	15	OSPREE	0.8702
16	HQUICK	-	16	OSHER	0.9248	16	SECBC	1.1038	16	OSPREE	0.8599	16	SMARTER	0.8822
17	SECBC	-	17	MINMOD	1.1612	17	OSHER	1.3420	17	SMARTER	0.8701	17	CLAM	0.9018
18	SHARP	-	18	EULER	-	18	MINMOD	1.6700	18	SECBC	1.1697	18	SECBC	1.1855
19	SMART	-	19	HOAB	-	19	EULER	-	19	UMIST	1.1757	19	UMIST	1.2534
20	STOIC	-	20	SHARP	-	20	SHARP	-	20	OSHER	1.5931	20	OSHER	1.6749
21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	MINMOD	1.9625	21	MINMOD	2.0559

Tablo 5.10: Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=100)

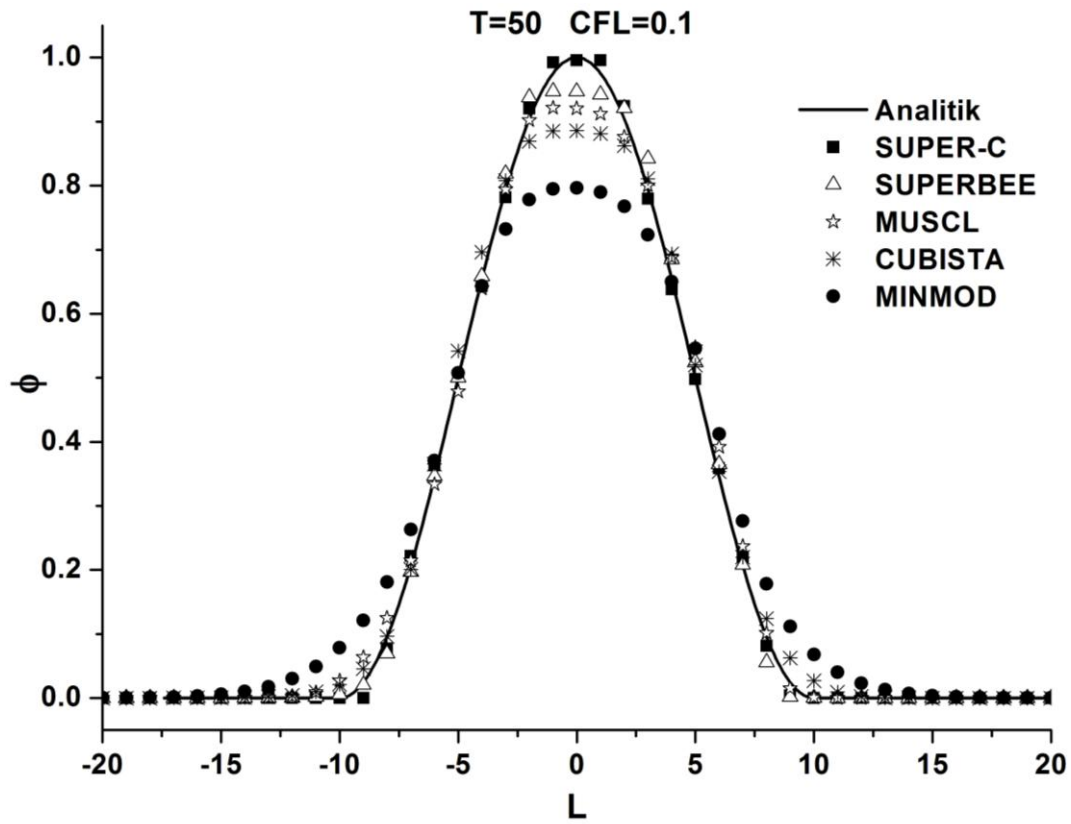
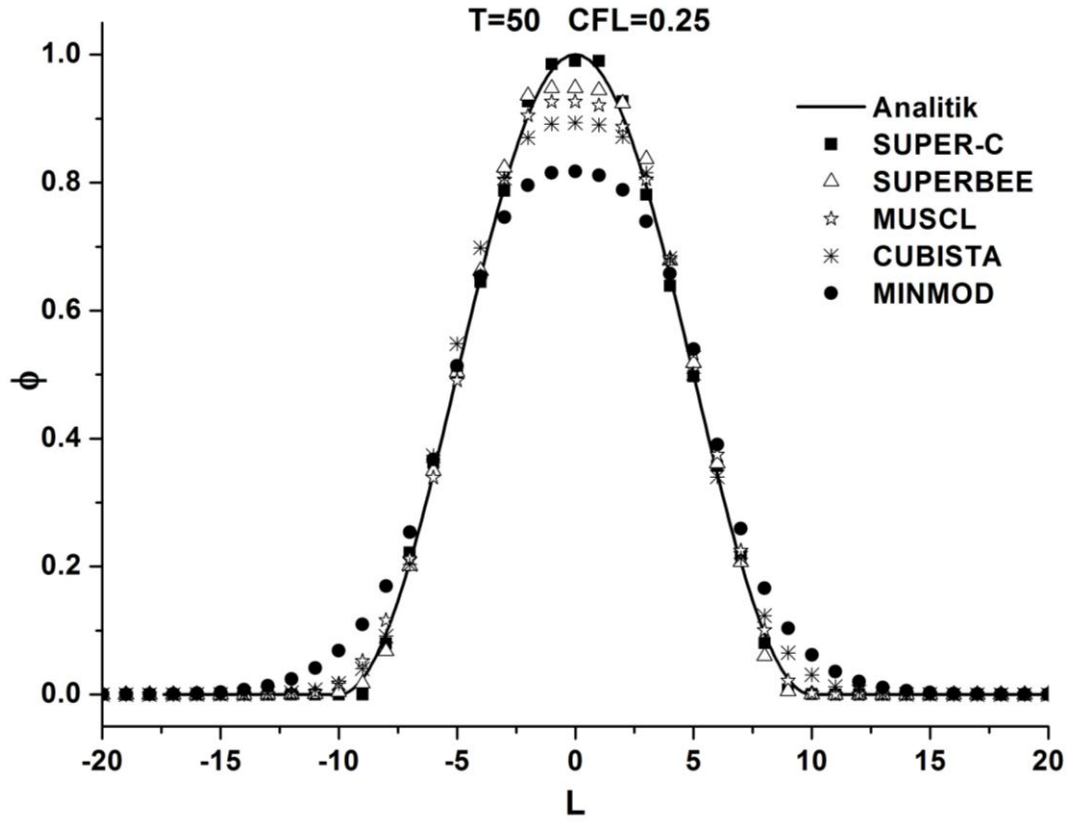
CFL =0.98			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1			CFL =0.05		
1	OSHER	0.1202	1	SUPERC	0.2539	1	SUPERC	0.2601	1	VONOS	0.2118	1	VONOS	0.2252
2	MUSCL	0.1296	2	MUSCL	0.5084	2	HOAB	0.3232	2	SUPERC	0.2742	2	HOAB	0.2683
3	UMIST	0.1398	3	SUPERBEE	0.5339	3	SUPERBEE	0.6161	3	HOAB	0.2835	3	SUPERC	0.2785
4	CLAM	0.1460	4	KOREN	0.7161	4	MUSCL	0.7086	4	SUPERBEE	0.6225	4	SUPERBEE	0.6079
5	SUPERBEE	0.1592	5	CLAM	0.8478	5	KOREN	0.7713	5	KOREN	0.8164	5	STOIC	0.8104
6	SUPERC	0.1602	6	SMART	0.8777	6	STOIC	0.9242	6	STOIC	0.8508	6	SMART	0.8218
7	KOREN	0.1616	7	STOIC	0.8786	7	SMART	0.9315	7	SMART	0.8608	7	KOREN	0.8254
8	WACEB	0.1783	8	WACEB	0.9042	8	WACEB	0.9715	8	COPLA	0.9334	8	COPLA	0.9137
9	CUBISTA	0.1807	9	COPLA	0.9135	9	COPLA	0.9814	9	WACEB	0.9560	9	WACEB	0.9581
10	MINMOD	0.1870	10	CUBISTA	0.9700	10	CLAM	1.2019	10	MUSCL	0.9652	10	SHARP	0.9822
11	OSPREE	0.1876	11	HQUICK	1.0971	11	CUBISTA	1.2133	11	EULER	1.1368	11	MUSCL	1.0600
12	COPLA	-	12	OSPREE	1.1668	12	HQUICK	1.2942	12	CUBISTA	1.3154	12	EULER	1.1258
13	EULER	-	13	SMARTER	1.1746	13	OSPREE	1.4191	13	HQUICK	1.3396	13	CUBISTA	1.3382
14	HOAB	-	14	UMIST	1.2002	14	SMARTER	1.4332	14	CLAM	1.4863	14	HQUICK	1.3535
15	HQUICK	-	15	SECBC	1.4741	15	UMIST	1.7351	15	OSPREE	1.5175	15	OSPREE	1.5538
16	SECBC	-	16	OSHER	1.5384	16	SECBC	1.8123	16	SMARTER	1.5329	16	SMARTER	1.5645
17	SHARP	-	17	MINMOD	2.1620	17	OSHER	2.2584	17	SECBC	1.9260	17	CLAM	1.5889
18	SMART	-	18	EULER	-	18	MINMOD	2.9759	18	UMIST	2.0758	18	SECBC	1.9533
19	SMARTER	-	19	HOAB	-	19	EULER	-	19	OSHER	2.6508	19	UMIST	2.1851
20	STOIC	-	20	SHARP	-	20	SHARP	-	20	MINMOD	3.3773	20	OSHER	2.7694
21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	SHARP	-	21	MINMOD	3.4988

Tablo 5.11: Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=250)

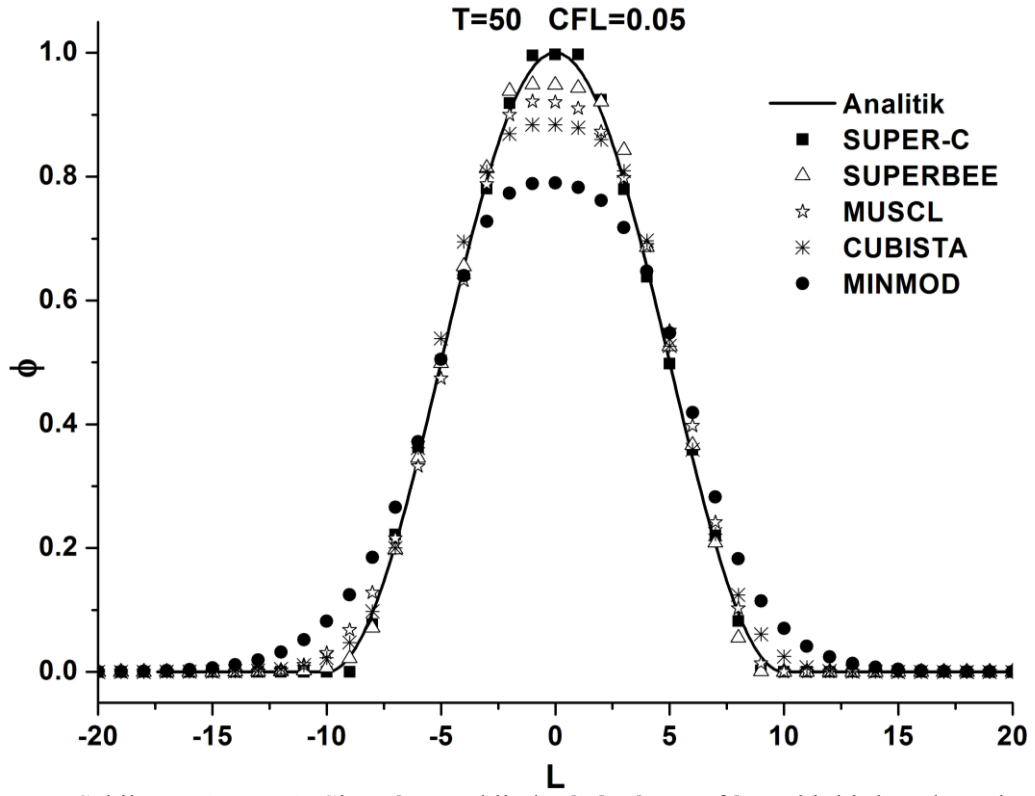
CFL =0.98			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1			CFL =0.05		
1	MUSCL	0.2734	1	SUPERC	0.3493	1	SUPERC	0.3147	1	VONOS	0.2295	1	VONOS	0.2496
2	OSHER	0.2787	2	SUPERBEE	0.8209	2	HOAB	0.4273	2	SUPERC	0.3412	2	SUPERC	0.3467
3	SUPERBEE	0.2945	3	MUSCL	1.0578	3	SUPERBEE	0.9168	3	HOAB	0.3733	3	HOAB	0.3630
4	SUPERC	0.2946	4	KOREN	1.5230	4	MUSCL	1.5470	4	SUPERBEE	0.9133	4	SUPERBEE	0.8909
5	CLAM	0.3243	5	STOIC	1.6937	5	KOREN	1.6634	5	STOIC	1.6434	5	STOIC	1.5517
6	UMIST	0.3245	6	SMART	1.7563	6	STOIC	1.8090	6	KOREN	1.6871	6	KOREN	1.6969
7	KOREN	0.3338	7	CLAM	1.8183	7	SMART	1.8918	7	SMART	1.7964	7	SMART	1.7376
8	WACEB	0.3680	8	COPLA	1.8574	8	COPLA	2.0483	8	COPLA	1.9941	8	COPLA	1.9591
9	CUBISTA	0.3753	9	WACEB	1.8956	9	WACEB	2.0816	9	MUSCL	2.0001	9	WACEB	2.0177
10	MINMOD	0.4297	10	CUBISTA	2.0846	10	CLAM	2.4649	10	WACEB	2.0478	10	MUSCL	2.1589
11	COPLA	-	11	HQUICK	2.2128	11	CUBISTA	2.4668	11	EULER	2.3123	11	EULER	2.3034
12	EULER	-	12	OSPREE	2.3704	12	HQUICK	2.5928	12	CUBISTA	2.5714	12	CUBISTA	2.5917
13	HOAB	-	13	SMARTER	2.3751	13	OSPREE	2.8235	13	HQUICK	2.6960	13	HQUICK	2.7161
14	HQUICK	-	14	UMIST	2.6127	14	SMARTER	2.8343	14	CLAM	2.9045	14	OSPREE	3.0619
15	OSPREE	-	15	SECBC	2.8569	15	SECBC	3.4297	15	OSPREE	2.9999	15	CLAM	3.0632
16	SECBC	-	16	OSHER	3.0111	16	UMIST	3.4646	16	SMARTER	3.0110	16	SMARTER	3.0704
17	SHARP	-	17	MINMOD	4.1887	17	OSHER	4.1374	17	SECBC	3.6220	17	SECBC	3.6645
18	SMART	-	18	EULER	-	18	MINMOD	5.2344	18	UMIST	3.9412	18	UMIST	4.0891
19	SMARTER	-	19	HOAB	-	19	EULER	-	19	OSHER	4.6970	19	OSHER	4.8625
20	STOIC	-	20	SHARP	-	20	SHARP	-	20	MINMOD	5.7493	20	MINMOD	5.9009
21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	SHARP	-	21	SHARP	-



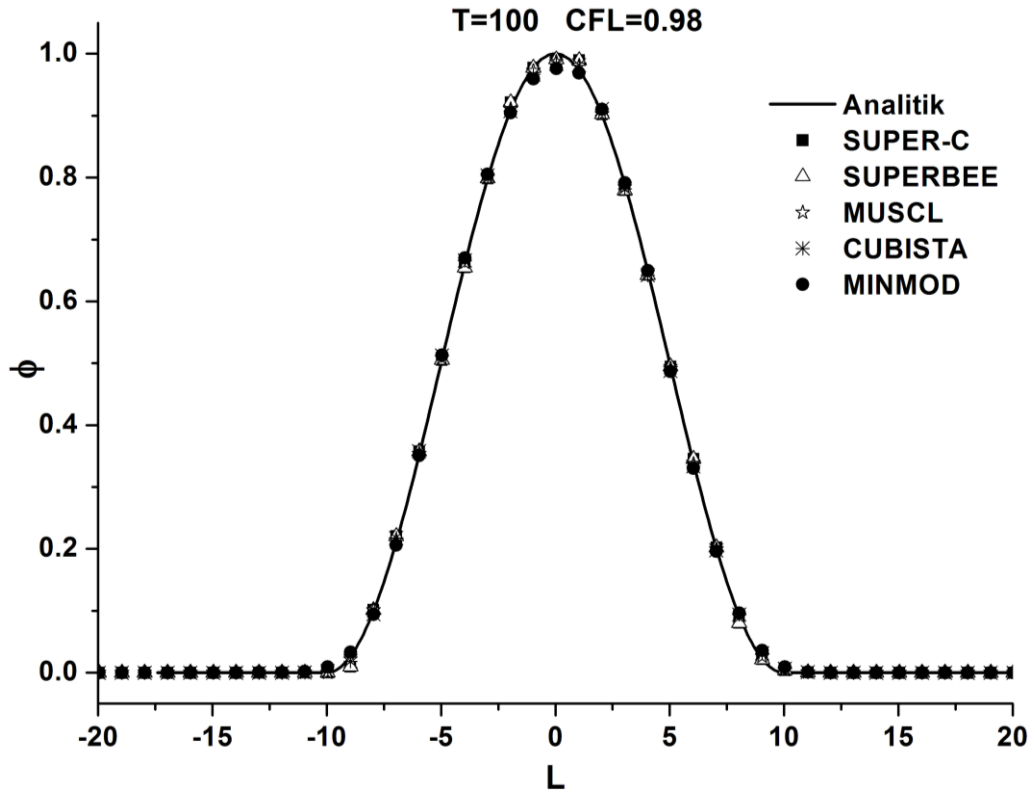
Şekil 5.10: Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



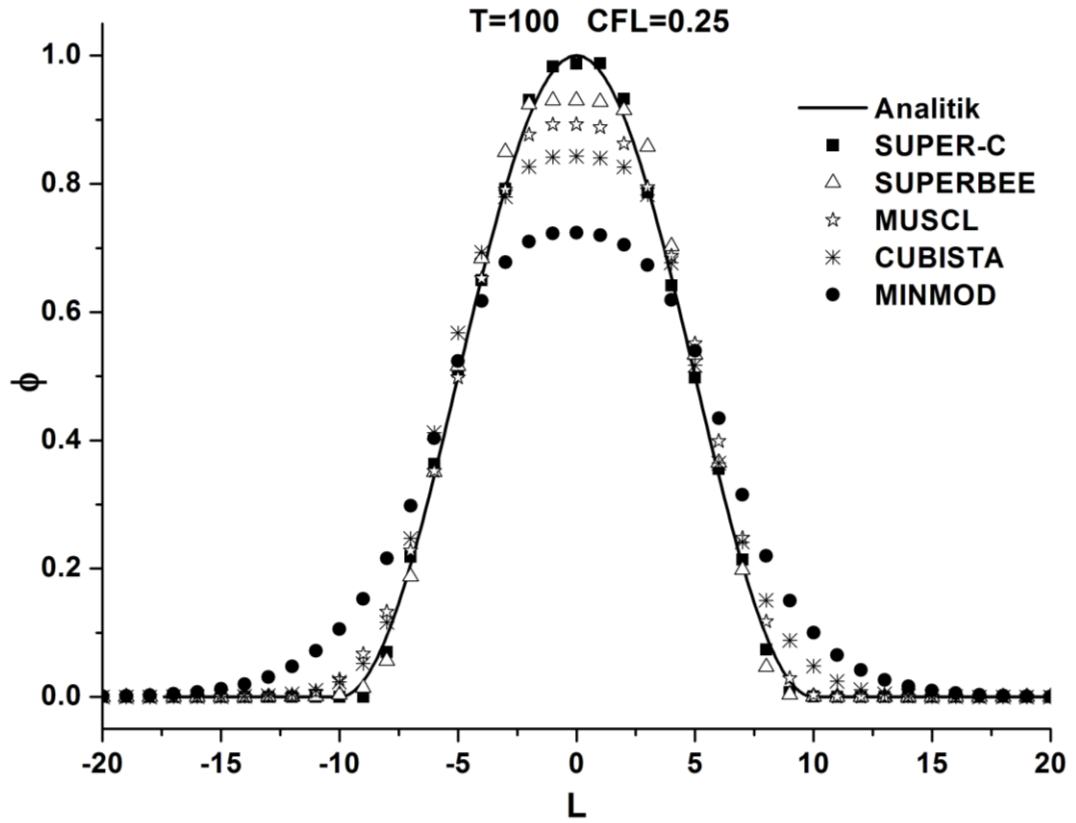
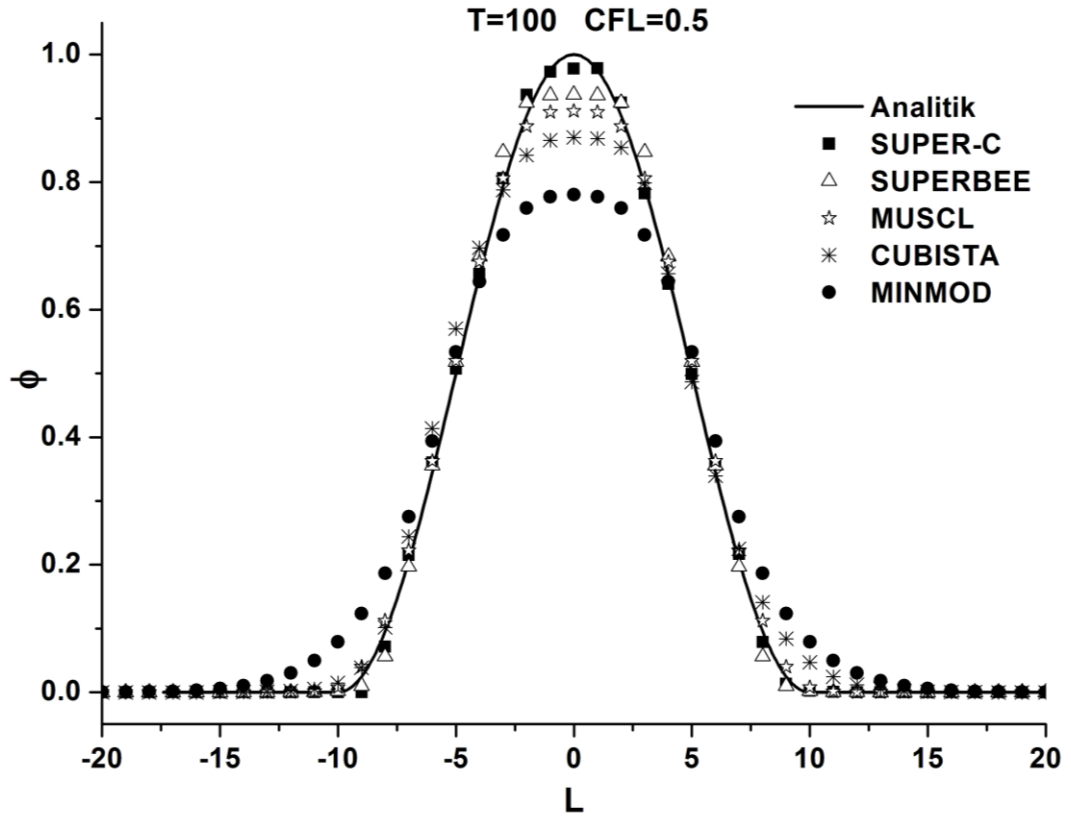
Şekil 5.10 (Devam): Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



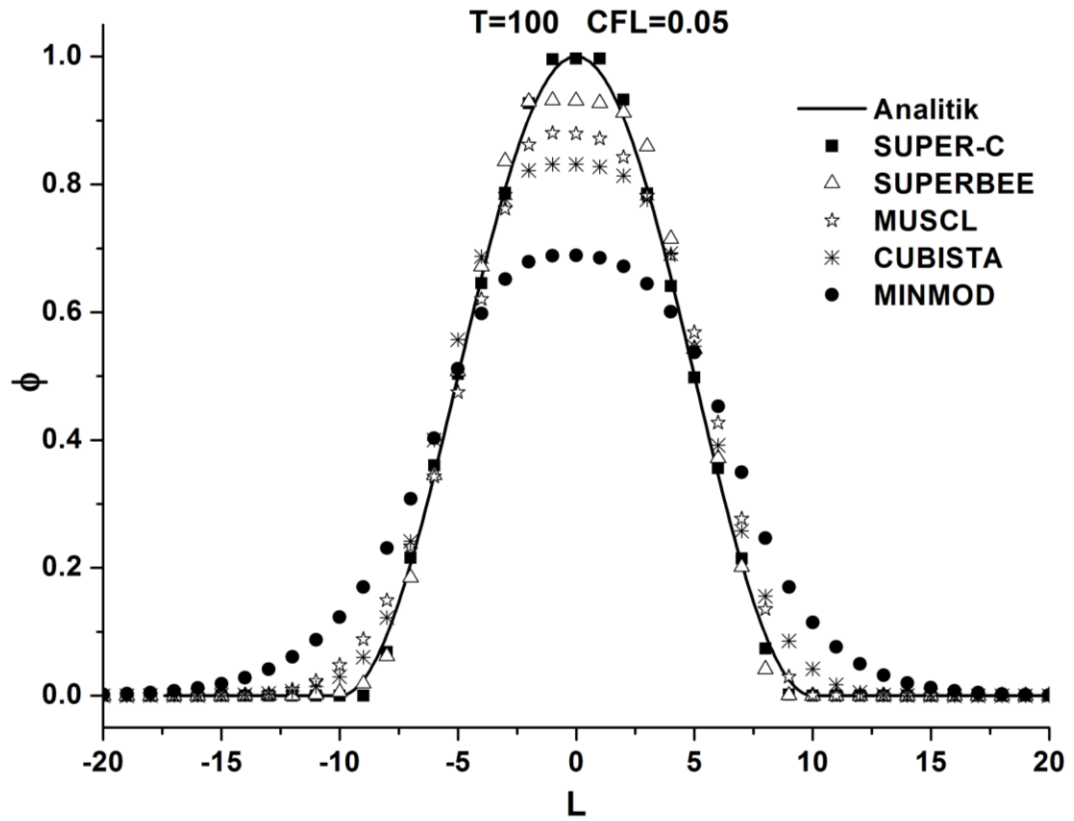
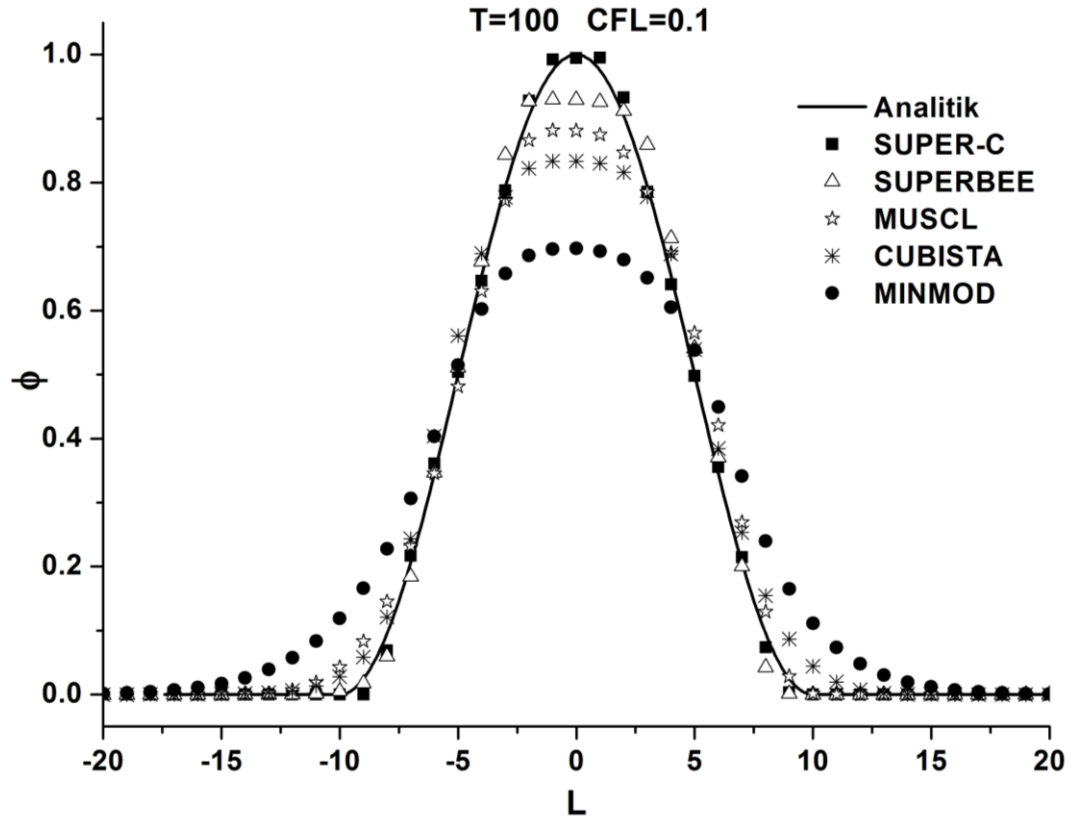
Şekil 5.10 (Devam): Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



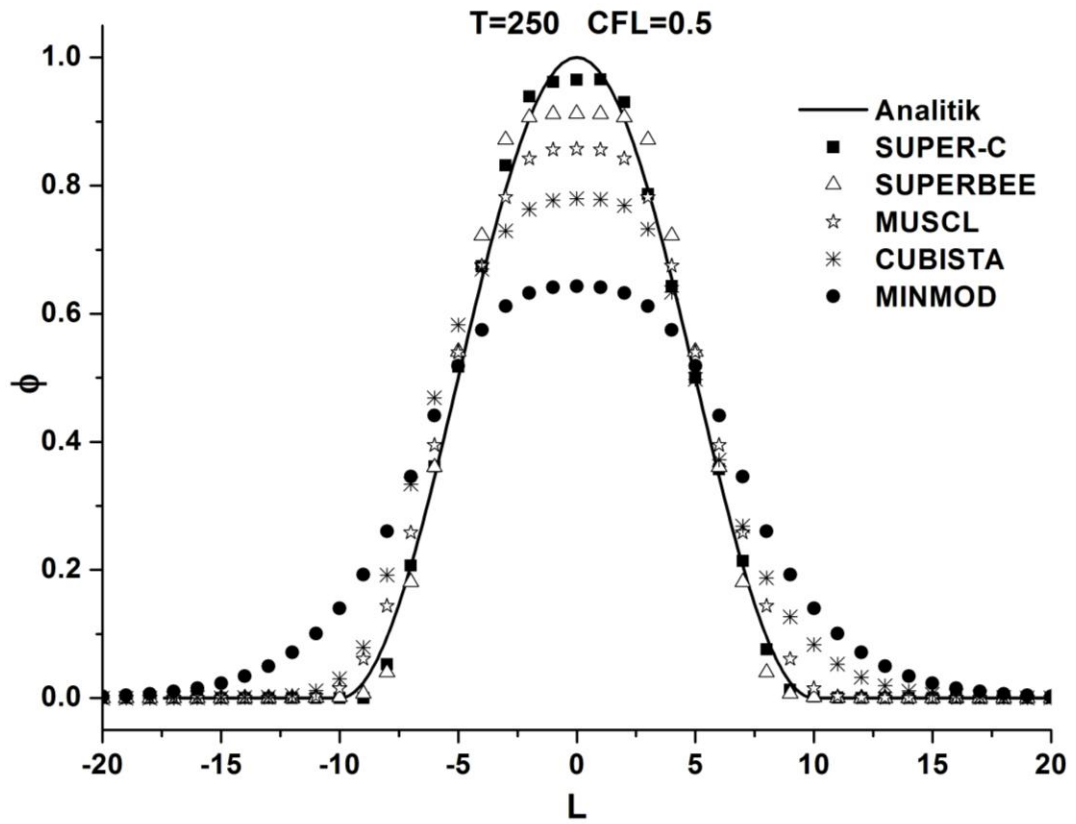
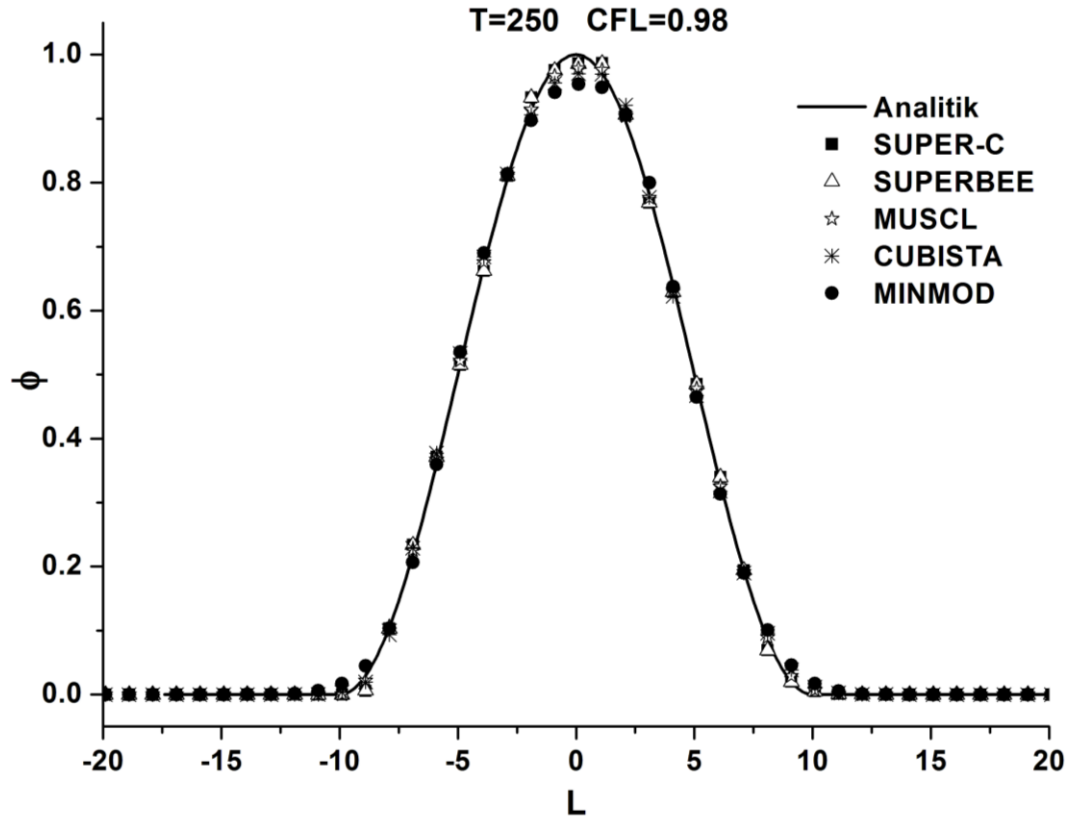
Şekil 5.11: Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



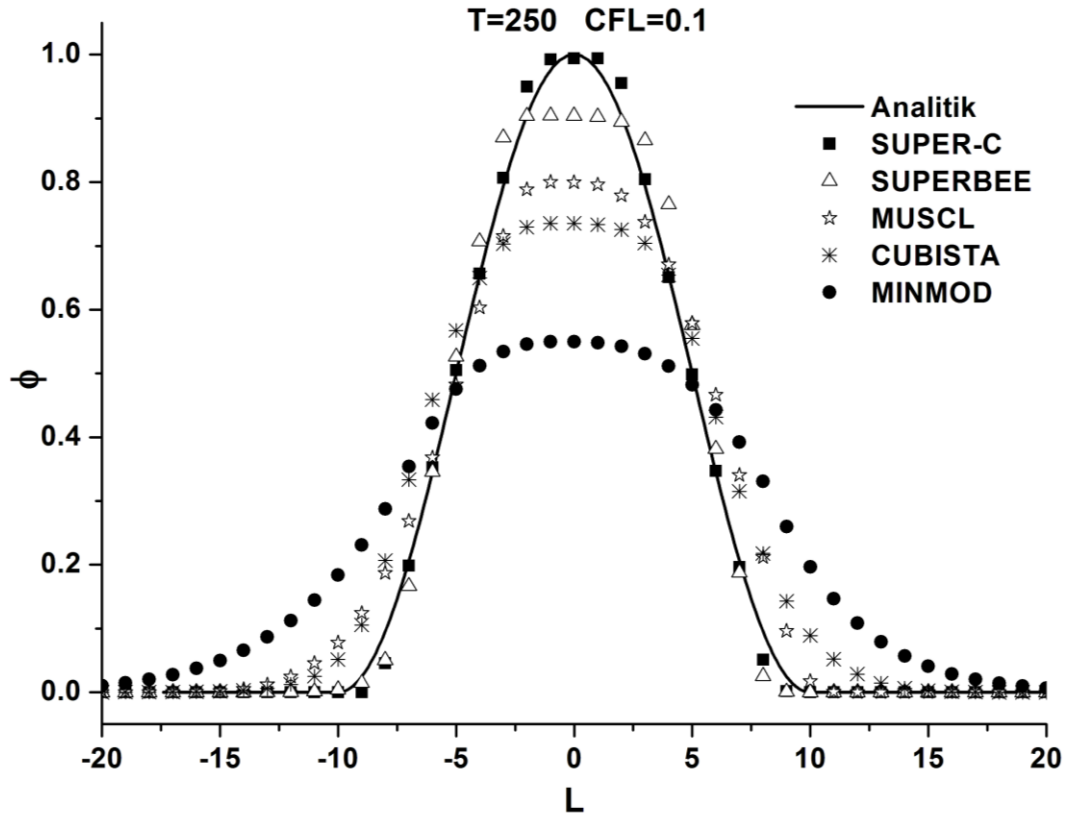
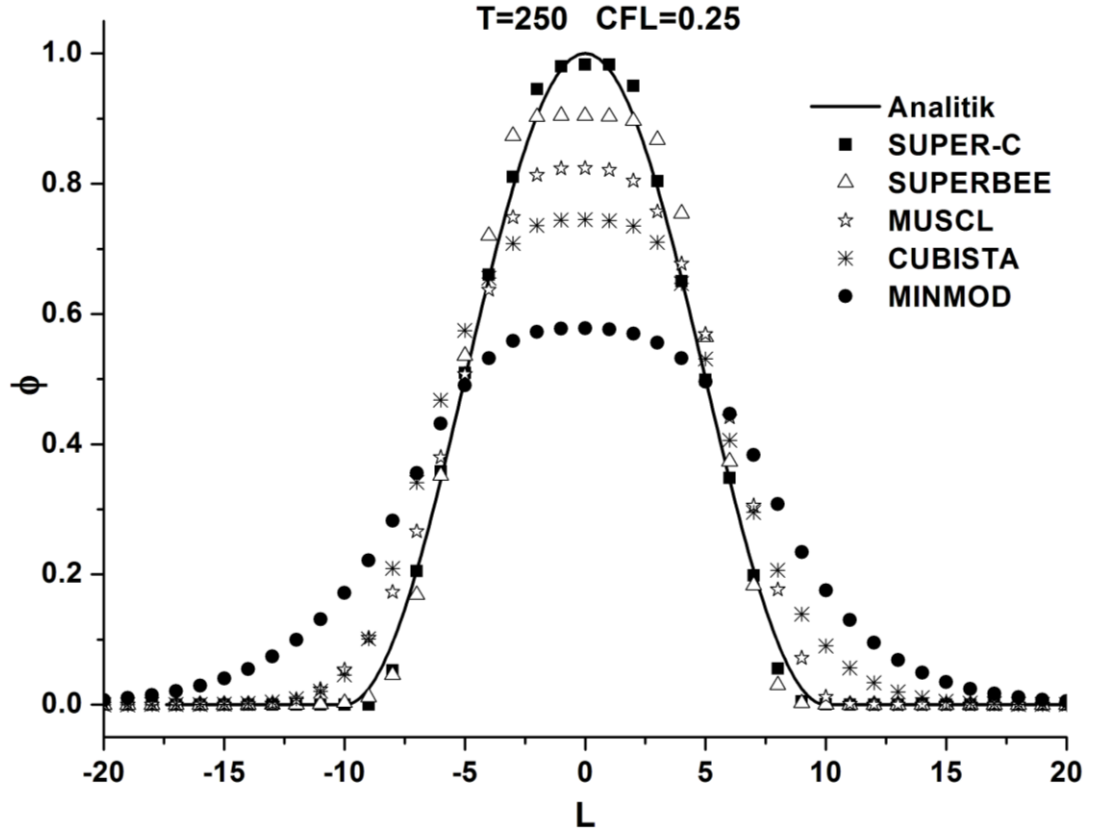
Şekil 5.11 (Devam): Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



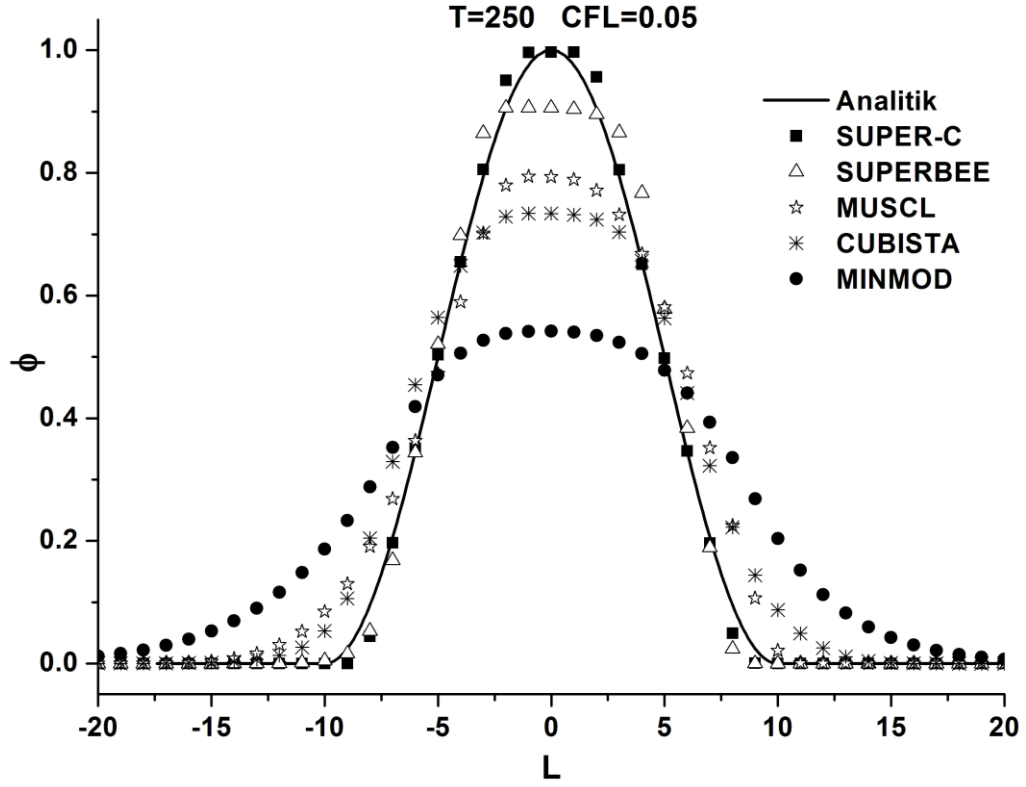
Şekil 5.11 (Devam): Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



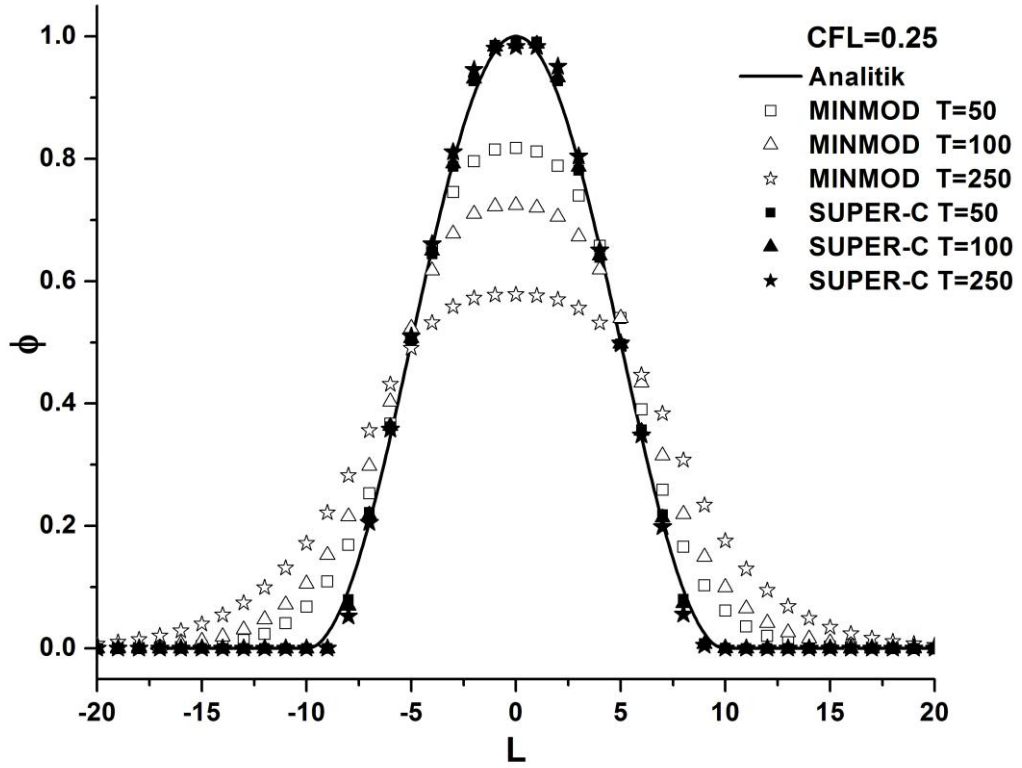
Şekil 5.12: Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



Şekil 5.12 (Devam): Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



Şekil 5.12 (Devam): Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



Şekil 5.13: Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde MINMOD ve SUPER-C yaklaşımları elde edilen profillerin zamanla değişimi (CFL=0.25)

5.1.4. Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması

Üçgen şeklinde skaler bir profilin farklı zaman ve farklı CFL sayıları için yapılan çözümleri Tablo 5.12 - Tablo 5.14'te, seçilen bazı yaklaşımların analitik sonuçlarla karşılaştırılması ise Şekil 5.14 - Şekil 5.16'da verilmiştir. Tablolardan görüleceği gibi bu problemde undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapan yaklaşımlar ile diğer profillerin taşınması probleminde undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapan yaklaşımlar aynıdır. Ancak bu yaklaşımlardan COPLA, OSPRE ve SMARTER yaklaşımları $T=50$ anında monotonik sonuçlar vermişlerdir. COPLA yaklaşımı $CFL=0.98$ için analitik çözüme en yakın sonucu veren yaklaşım olmakta, fakat küçük CFL sayılarında sıralamada gerilere düşmektedir. Büyük CFL sayılarında undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapan yaklaşımlardan HOAB, VONOS, SMART, STOIC gibi yaklaşımları daha önce çözülen skaler profillerde olduğu gibi bu problemde de küçük CFL sayılarında monotonik sonuç vermekte ve sıralamada üst sıralarda yer almaktadır. Örneğin VONOS yaklaşımı en büyük boyutsuz zamanda ($T=250$), $CFL \leq 0.1$ için analitik çözüme en yakın sonucu veren yaklaşım olmaktadır.

$T=50$ için sonuçların verildiği Tablo 5.12 incelendiğinde, SUPER-C'nin $CFL=0.98$ için sıralamada COPLA ve KOREN yaklaşımlarını takip ettiği, diğer CFL sayılarında ise analitik çözüme en yakın sonucu veren yaklaşım olduğu görülmektedir. $T=50$ için sonuçların verildiği Şekil 5.14 incelendiğinde, $CFL=0.98$ için bile hiçbir yaklaşımın profilin tepe noktasını yakalayamadığı, bütün yaklaşımlardaki çözümlerin skalerin maksimum değeri olan 1'in altında olduğu görülmektedir. Şekil 5.14'te verilen yaklaşımlardan SUPER-C, SUPERBEE ve MUSCL yaklaşımları profil ayaklarını oldukça iyi bir şekilde çözmektedir. Profilin tepe noktasını en iyi SUPER-C yaklaşımı çözmektedir. SUPERBEE yaklaşımı profilin tepe noktasını SUPER-C yaklaşımına göre daha fazla dikleştirilmektedir. MUSCL yaklaşımı $CFL \geq 0.5$ olması durumunda SUPER-C yaklaşımından sonra analitik çözüme en yakın sonucu veren yaklaşım olmakta, küçük CFL sayılarında ise SUPERBEE, KOREN gibi yaklaşımların gerisine düşmektedir. Bütün CFL sayılarında KOREN yaklaşımı oldukça tutarlı bir davranış göstererek en az hata

içeren ilk üç yaklaşım içerisinde olmaktadır. Daha önceki profillerin çözümünde olduğu gibi üçgen skaler profilin taşınması probleminde de MINMOD yaklaşımı aşırı difüzyif bir davranış göstererek üçgen skaler profilin şeklini bozmaktadır. CUBISTA yaklaşımı da difüzyif bir özellik göstermekte, fakat bu, MINMOD yaklaşımındaki gibi çok yüksek mertebede olmamaktadır. Küçülen CFL sayısı ile profildeki deformasyon her iki yaklaşımda da artmaktadır.

Üçgen skaler profilin farklı CFL sayıları için elde edilen $T=100$ anındaki sonuçları Tablo 5.13 ve Şekil 5.15'te, $T=250$ anındaki sonuçları ise Tablo 5.14 ve Şekil 5.16'da verilmiştir. Bahsi geçen tablolar incelendiğinde, $CFL=0.98$ olması durumunda $T=250$ olması anında dahi bütün yaklaşımlar ile elde edilen çözümlerin hata değerinin çok fazla artmadığı görülmektedir. $CFL=0.98$ olması durumunda en az hata içeren yaklaşım MUSCL yaklaşımıdır. Küçük CFL sayılarında $T=50$ anında olduğu gibi SUPER-C yaklaşımı sıralamada ilk sırada olmaktadır. $T=250$ ve $CFL \leq 0.1$ için VONOS yaklaşımı SUPER-C yaklaşımına göre daha az hata içermekte ancak daha önce belirtildiği gibi bu yaklaşım büyük CFL sayılarında undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapmaktadır. Artan zaman ile SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımları kompresif bir davranış göstererek üçgen skaler profili ayakların olduğu bölgede daraltmakta, tepe bölgesini ise dikleştirilmektedir. Bütün yaklaşımlarda artan zamanla tepe bölgesinde bir çökme görülmektedir. Örneğin MUSCL yaklaşımı ile $T=100$ anında elde edilen çözümlerde skaler profilin tepe noktası, $CFL=0.98$ haricindeki bütün CFL sayılarında 0.85'in altındadır. Küçük CFL sayılarında tepe noktasındaki bu düşme daha da artmaktadır. Bu durum MINMOD ve SUPER-C yaklaşımlarının $CFL=0.25$ için farklı zamanlardaki çözümlerinin verildiği Şekil 5.17'de açıkça görülmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi artan zamanla SUPER-C yaklaşımı ile elde edilen skaler profilin tepe noktasında çok az bir düşme, profil ayaklarında ise bir daralma görülmektedir. Maksimum değer bütün zamanlarda 0.9 civarındadır. MINMOD ile elde edilen profiller incelendiğinde artan zamanla maksimum değer 0.8'den 0.6'nın altına düştüğü görülmektedir. MINMOD ile elde edilen profil şeklinin üçgen skaler profilden oldukça uzak olduğu görülmektedir.

$T=50$ ile $T=250$ anındaki hatalar $CFL=0.25$ için karşılaştırıldığında hata artışının MUSCL, SUPER-C, SUPERBEE ve KOREN yaklaşımlarında %65, WACEB,

CUBISTA ve CLAM yaklaşımlarında %85, UMIST ve OSHER yaklaşımlarında %170, MINMOD yaklaşımında ise %220 civarında olduğu görülmektedir. Yaklaşımların hata değerlerindeki artış incelendiğinde, SUPER-C yaklaşımındaki hata artışının diğer skaler profillere nazaran çok daha yüksek olduğu, MUSCL yaklaşımındaki hata artışının ise diğer skaler profillere nazaran çok daha düşük olduğu görülmektedir. Ancak toplam hata miktarları diğer skaler profillerdeki hatalar ile karşılaştırıldığında bu skaler profildeki hataların çok küçük mertebelerde olduğu görülmektedir.

Tablo 5.12: Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=50)

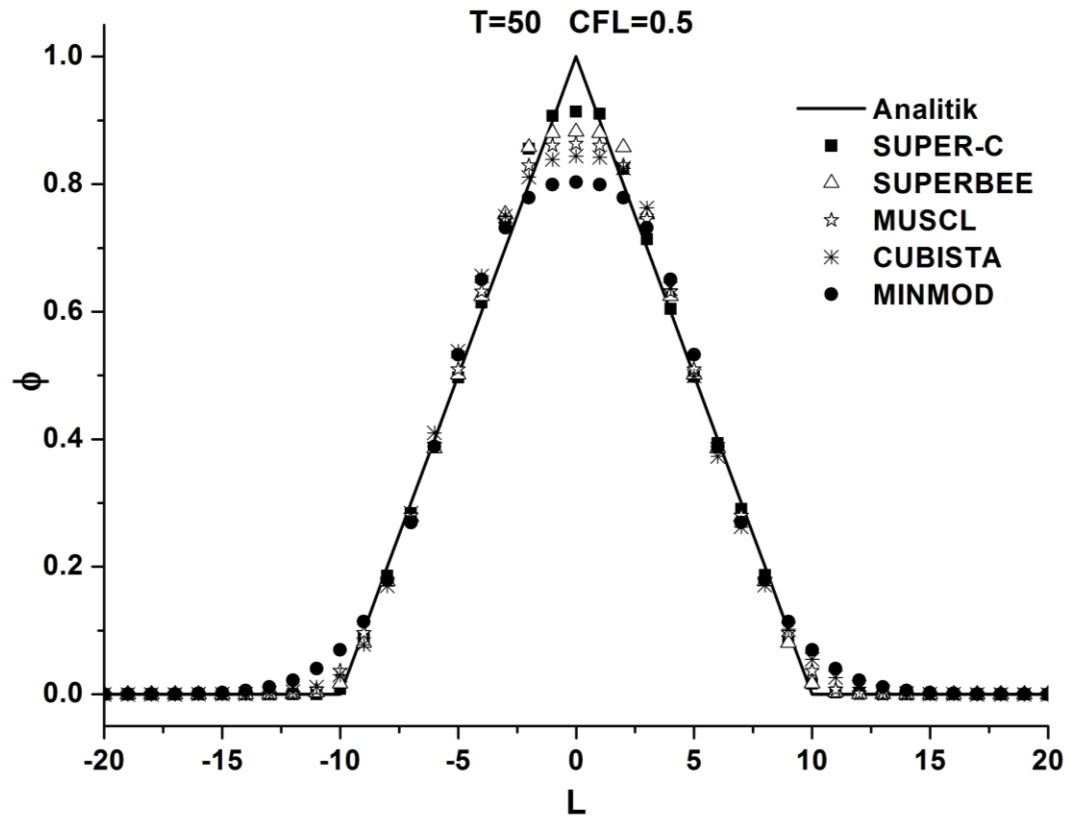
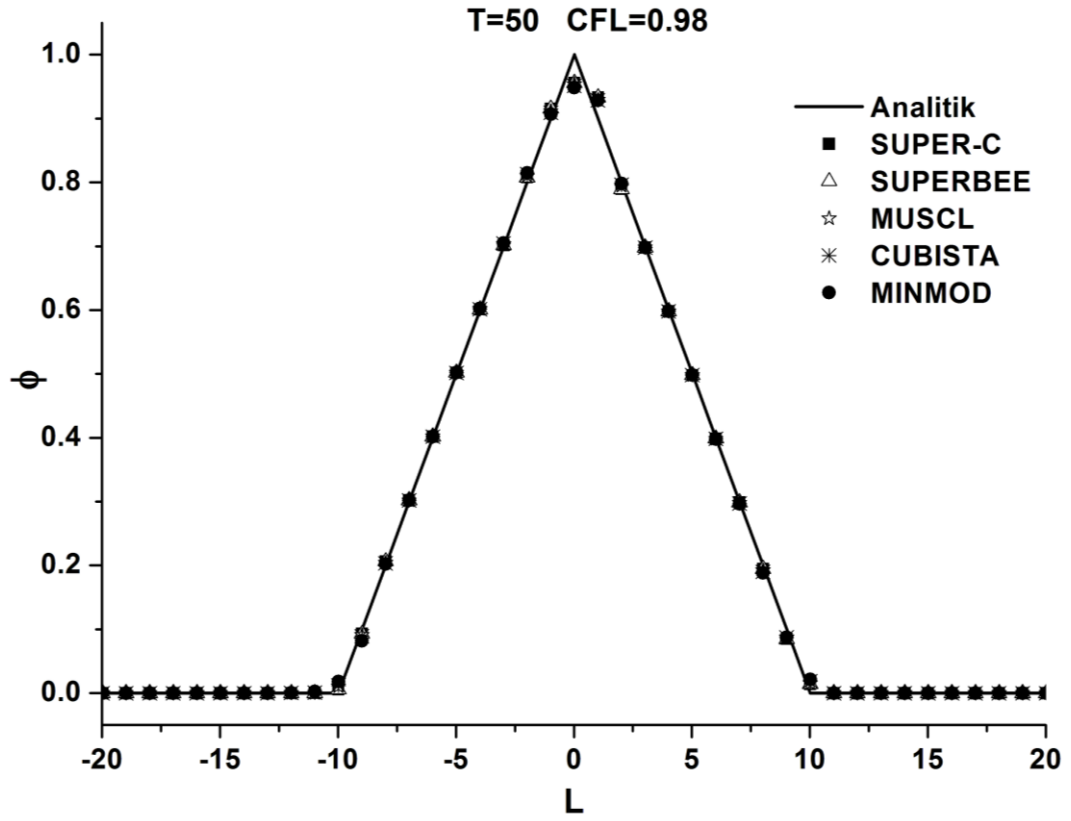
CFL =0.98		CFL =0.5		CFL =0.25		CFL =0.1		CFL =0.05	
1	COPLA	0.1807	SUPERC	0.3848	1	SUPERC	0.3595	1	SUPERC
2	KOREN	0.1810	SUPERBEE	0.6281	2	HOAB	0.4666	2	VONOS
3	SUPERC	0.1814	MUSCL	0.6451	3	MUSCL	0.7151	3	HOAB
4	WACEB	0.1820	STOIC	0.6459	4	SUPERBEE	0.7198	4	SMART
5	SUPERBEE	0.1822	SMART	0.6498	5	KOREN	0.7453	5	KOREN
6	MUSCL	0.1825	KOREN	0.6905	6	SMART	0.7514	6	SUPERBEE
7	OSPREE	0.1907	COPLA	0.7547	7	STOIC	0.7756	7	MUSCL
8	SMARTER	0.1907	WACEB	0.7685	8	COPLA	0.8358	8	STOIC
9	UMIST	0.1933	CLAM	0.8503	9	WACEB	0.8427	9	COPLA
10	CUBISTA	0.1934	HQUICK	0.8509	10	EULER	0.8659	10	SHARP
11	CLAM	0.1960	CUBISTA	0.8743	11	CLAM	0.9268	11	WACEB
12	MINMOD	0.2162	UMIST	0.8749	12	HQUICK	0.9611	12	EULER
13	OSHER	0.2175	OSPREE	0.9044	13	UMIST	0.9631	13	CLAM
14	EULER	-	SMARTER	0.9062	14	CUBISTA	0.9764	14	CUBISTA
15	HOAB	-	SECBC	0.9276	15	OSPREE	1.0142	15	HQUICK
16	HQUICK	-	OSHER	1.0073	16	SMARTER	1.0192	16	UMIST
17	SECBC	-	MINMOD	1.1361	17	SECBC	1.1235	17	OSPREE
18	SHARP	-	EULER	-	18	OSHER	1.1620	18	SMARTER
19	SMART	-	HOAB	-	19	MINMOD	1.2961	19	SECBC
20	STOIC	-	SHARP	-	20	SHARP	-	20	OSHER
21	VONOS	-	VONOS	-	21	VONOS	-	21	MINMOD

Tablo 5.13: Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=100)

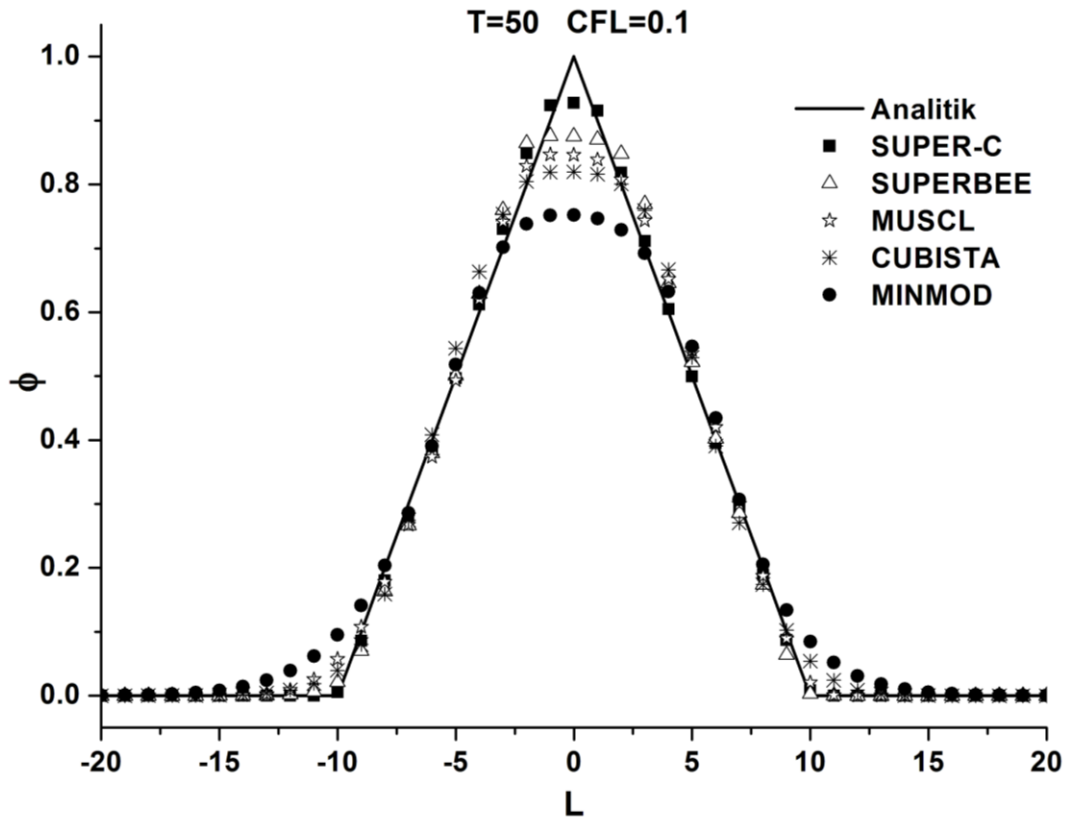
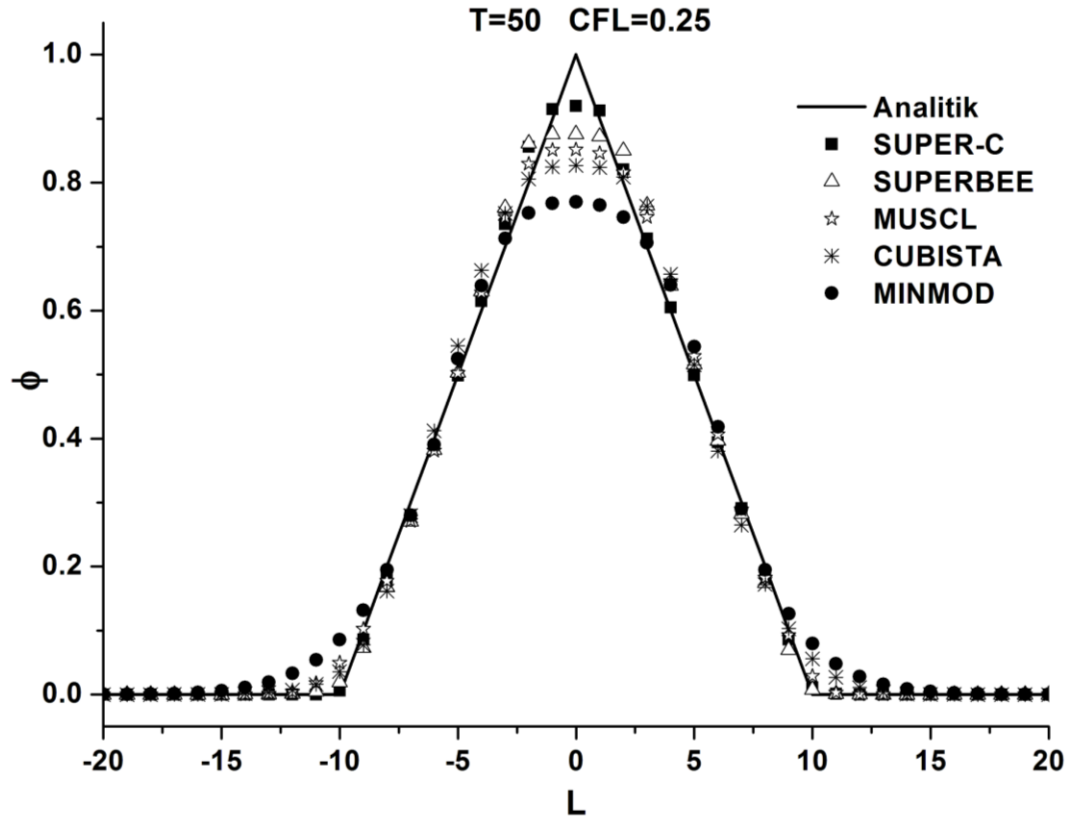
CFL =0.98			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1			CFL =0.05		
1	MUSCL	0.2438	1	SUPERC	0.4691	1	SUPERC	0.4718	1	SUPERC	0.4365	1	SUPERC	0.4128
2	SUPERC	0.2443	2	MUSCL	0.7524	2	HOAB	0.5916	2	VONOS	0.4383	2	VONOS	0.4396
3	KOREN	0.2444	3	SUPERBEE	0.8473	3	MUSCL	0.8304	3	HOAB	0.5813	3	HOAB	0.5621
4	SUPERBEE	0.2457	4	KOREN	0.8611	4	KOREN	0.8651	4	KOREN	0.8297	4	KOREN	0.8232
5	WACEB	0.2473	5	SMART	0.8826	5	SMART	0.9378	5	SMART	0.8982	5	SMART	0.8722
6	OSPRES	0.2643	6	STOIC	0.9072	6	SUPERBEE	0.9528	6	MUSCL	0.9197	6	MUSCL	0.9499
7	CUBISTA	0.2657	7	COPLA	0.9727	7	STOIC	0.9877	7	STOIC	0.9736	7	STOIC	0.9607
8	UMIST	0.2658	8	CLAM	0.9850	8	COPLA	1.0198	8	SUPERBEE	0.9814	8	SUPERBEE	0.9739
9	CLAM	0.2672	9	WACEB	0.9945	9	WACEB	1.0240	9	COPLA	0.9949	9	SHARP	0.9787
10	MINMOD	0.3146	10	HQUICK	1.0694	10	CLAM	1.1209	10	WACEB	1.0149	10	COPLA	0.9843
11	OSHER	0.3329	11	UMIST	1.0711	11	HQUICK	1.1728	11	EULER	1.0587	11	WACEB	0.9989
12	COPLA	-	12	CUBISTA	1.0781	12	CUBISTA	1.1779	12	CUBISTA	1.1937	12	EULER	1.0516
13	EULER	-	13	OSPRES	1.1220	13	OSPRES	1.2397	13	HQUICK	1.1958	13	CUBISTA	1.1968
14	HOAB	-	14	SMARTER	1.1244	14	SMARTER	1.2470	14	CLAM	1.2291	14	HQUICK	1.2034
15	HQUICK	-	15	SECBC	1.2429	15	UMIST	1.2757	15	OSPRES	1.2849	15	CLAM	1.2758
16	SECBC	-	16	OSHER	1.2826	16	SECBC	1.4461	16	SMARTER	1.2913	16	OSPRES	1.2955
17	SHARP	-	17	MINMOD	1.5332	17	OSHER	1.6801	17	UMIST	1.4985	17	SMARTER	1.3041
18	SMART	-	18	EULER	-	18	MINMOD	2.1248	18	SECBC	1.5187	18	SECBC	1.5359
19	SMARTER	-	19	HOAB	-	19	EULER	-	19	OSHER	2.0100	19	UMIST	1.5877
20	STOIC	-	20	SHARP	-	20	SHARP	-	20	MINMOD	2.4601	20	OSHER	2.1127
21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	SHARP	-	21	MINMOD	2.5670

Tablo 5.14: Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları (T=250)

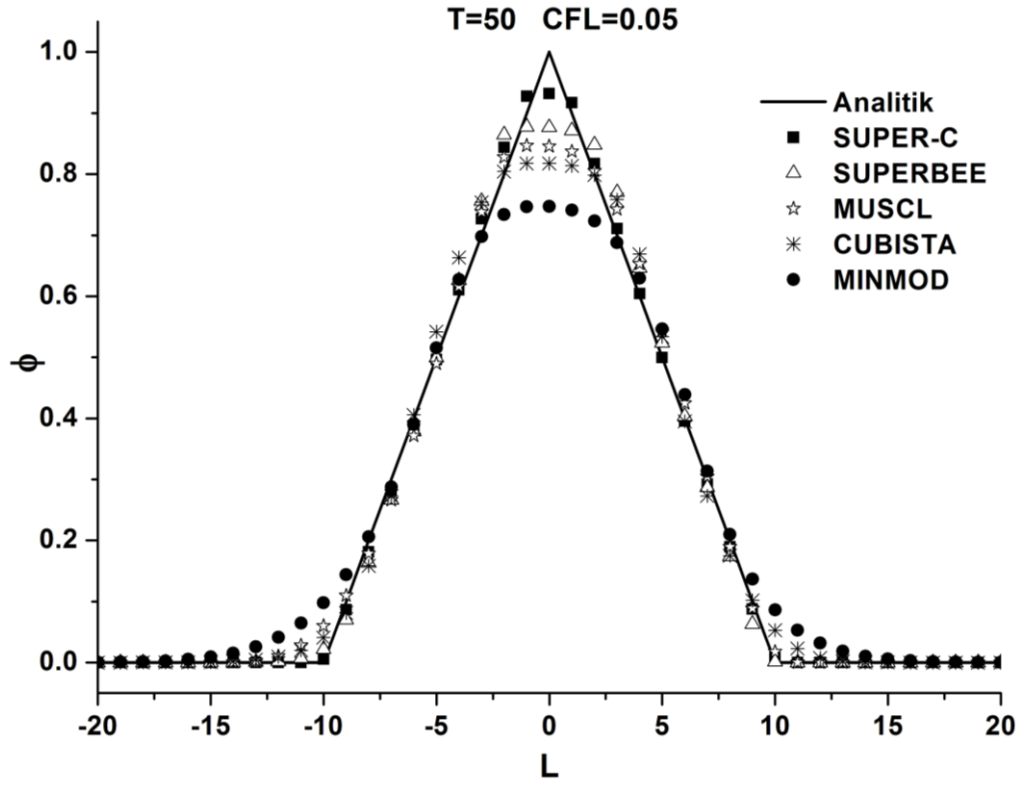
CFL=0.98			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1			CFL=0.05		
1	MUSCL	0.3713	1	SUPERC	0.6253	1	SUPERC	0.6263	1	VONOS	0.5175	1	VONOS	0.5106
2	SUPERC	0.3827	2	MUSCL	0.9178	2	HOAB	0.7161	2	SUPERC	0.6018	2	SUPERC	0.5780
3	SUPERBEE	0.3842	3	SUPERBEE	1.1626	3	MUSCL	1.1687	3	HOAB	0.7055	3	HOAB	0.6894
4	KOREN	0.3895	4	KOREN	1.1975	4	SUPERBEE	1.2437	4	STOIC	1.2489	4	STOIC	1.2004
5	WACEB	0.4047	5	STOIC	1.3164	5	KOREN	1.2508	5	SUPERBEE	1.2491	5	SUPERBEE	1.2373
6	CLAM	0.4192	6	SMART	1.3435	6	STOIC	1.3581	6	KOREN	1.2758	6	SMART	1.2423
7	UMIST	0.4239	7	CLAM	1.3573	7	SMART	1.4008	7	SMART	1.2948	7	KOREN	1.2737
8	CUBISTA	0.4290	8	COPLA	1.3973	8	COPLA	1.4772	8	COPLA	1.4298	8	COPLA	1.4078
9	OSHER	0.4935	9	WACEB	1.4064	9	WACEB	1.5010	9	MUSCL	1.4419	9	WACEB	1.4684
10	MINMOD	0.5612	10	CUBISTA	1.5339	10	CLAM	1.7848	10	WACEB	1.4770	10	SHARP	1.4854
11	COPLA	-	11	HQUICK	1.6465	11	CUBISTA	1.8167	11	EULER	1.6884	11	MUSCL	1.5832
12	EULER	-	12	OSPREE	1.7465	12	HQUICK	1.9031	12	CUBISTA	1.9061	12	EULER	1.6621
13	HOAB	-	13	SMARTER	1.7571	13	OSPREE	2.0594	13	HQUICK	1.9404	13	CUBISTA	1.9199
14	HQUICK	-	14	UMIST	1.8696	14	SMARTER	2.0772	14	CLAM	2.1015	14	HQUICK	1.9416
15	OSPREE	-	15	SECBC	2.2048	15	UMIST	2.5490	15	OSPREE	2.1666	15	OSPREE	2.2176
16	SECBC	-	16	OSHER	2.2834	16	SECBC	2.6733	16	SMARTER	2.1753	16	SMARTER	2.2257
17	SHARP	-	17	MINMOD	3.1779	17	OSHER	3.2202	17	SECBC	2.8248	17	CLAM	2.2409
18	SMART	-	18	EULER	-	18	MINMOD	4.1526	18	UMIST	2.9871	18	SECBC	2.8569
19	SMARTER	-	19	HOAB	-	19	EULER	-	19	OSHER	3.7357	19	UMIST	3.1279
20	STOIC	-	20	SHARP	-	20	SHARP	-	20	MINMOD	4.6320	20	OSHER	3.8907
21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	VONOS	-	21	SHARP	-	21	MINMOD	4.7741



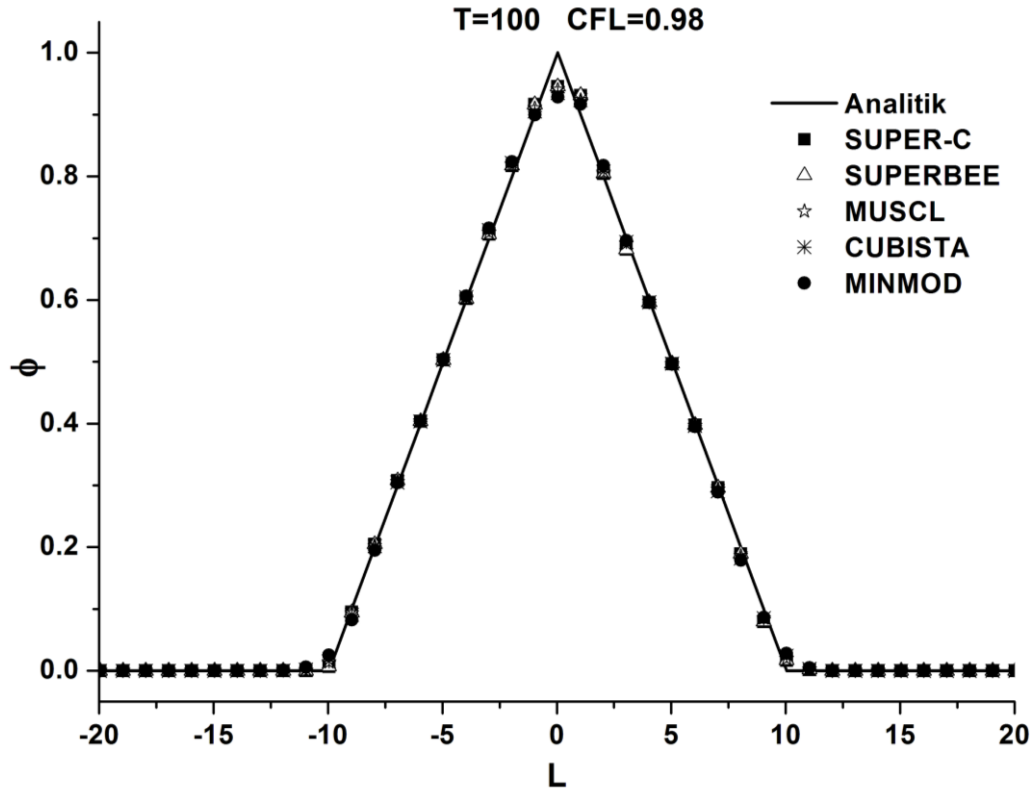
Şekil 5.14: Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



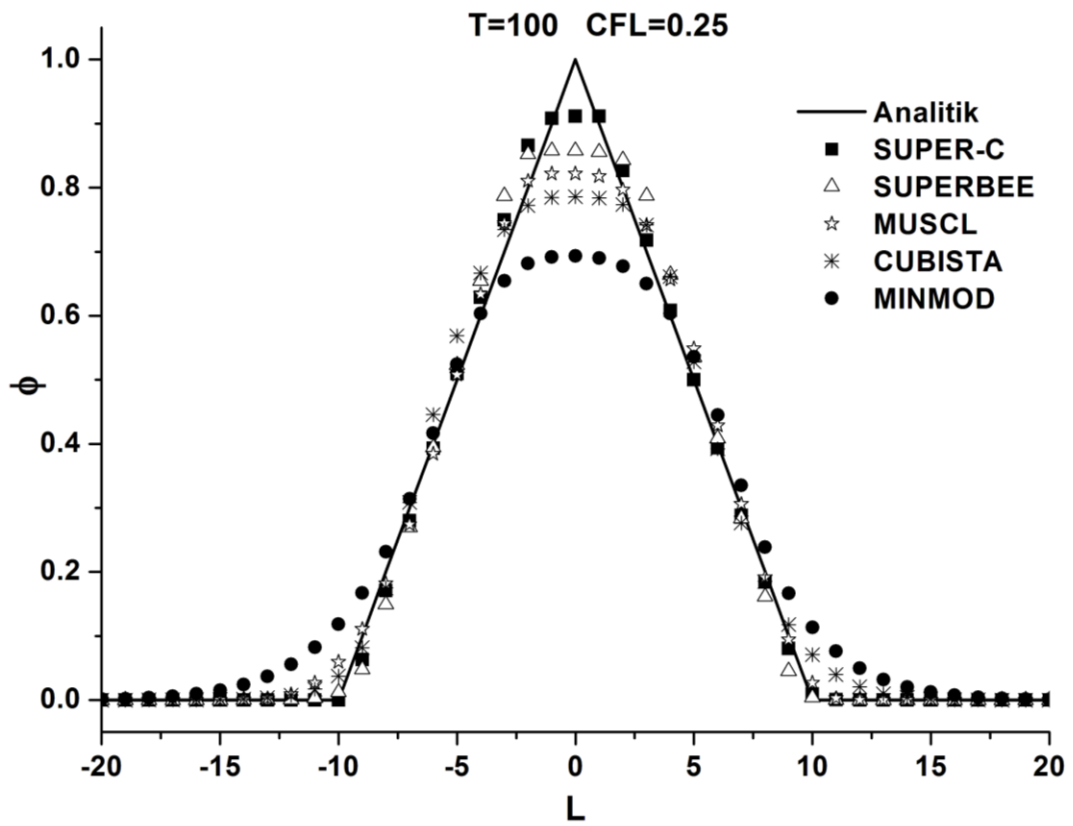
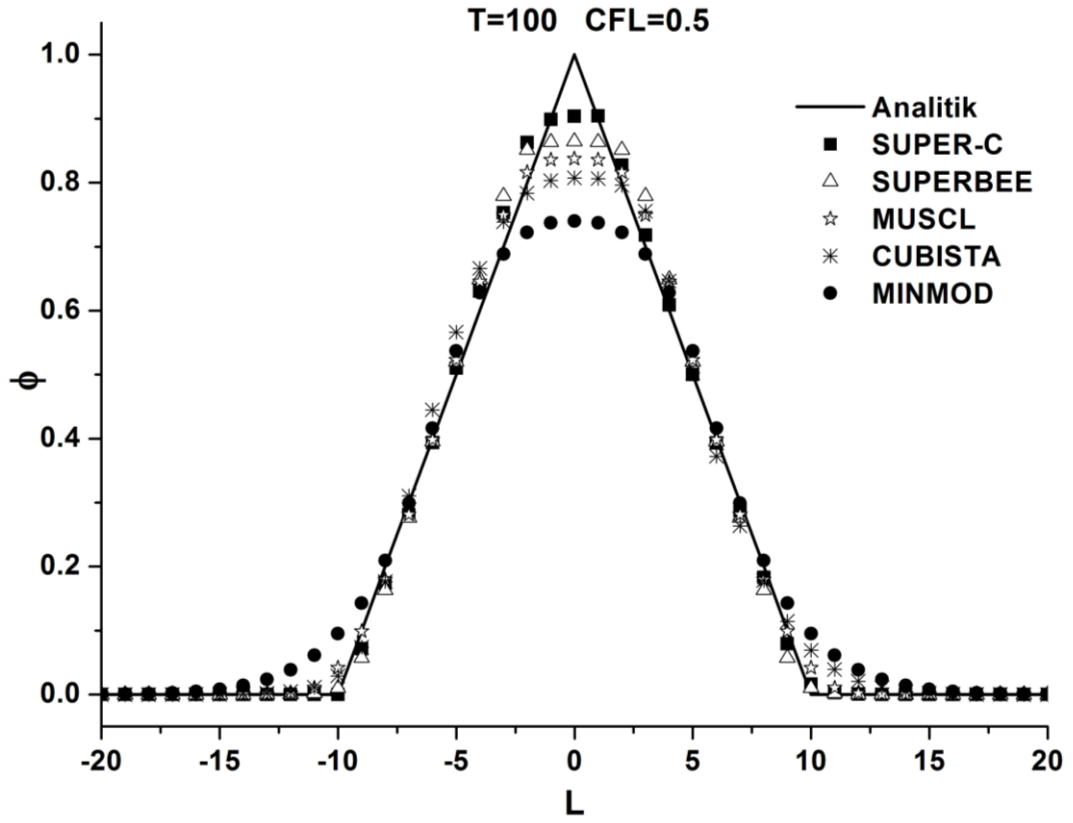
Şekil 5.14 (Devam): Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



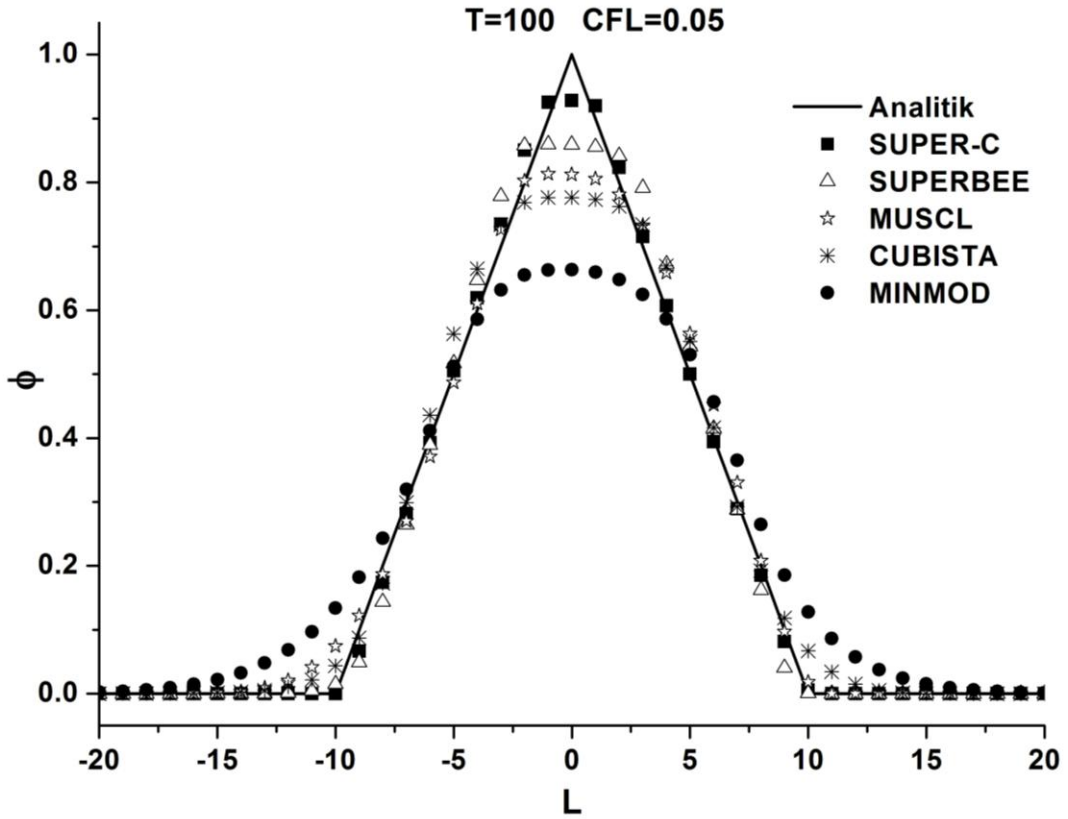
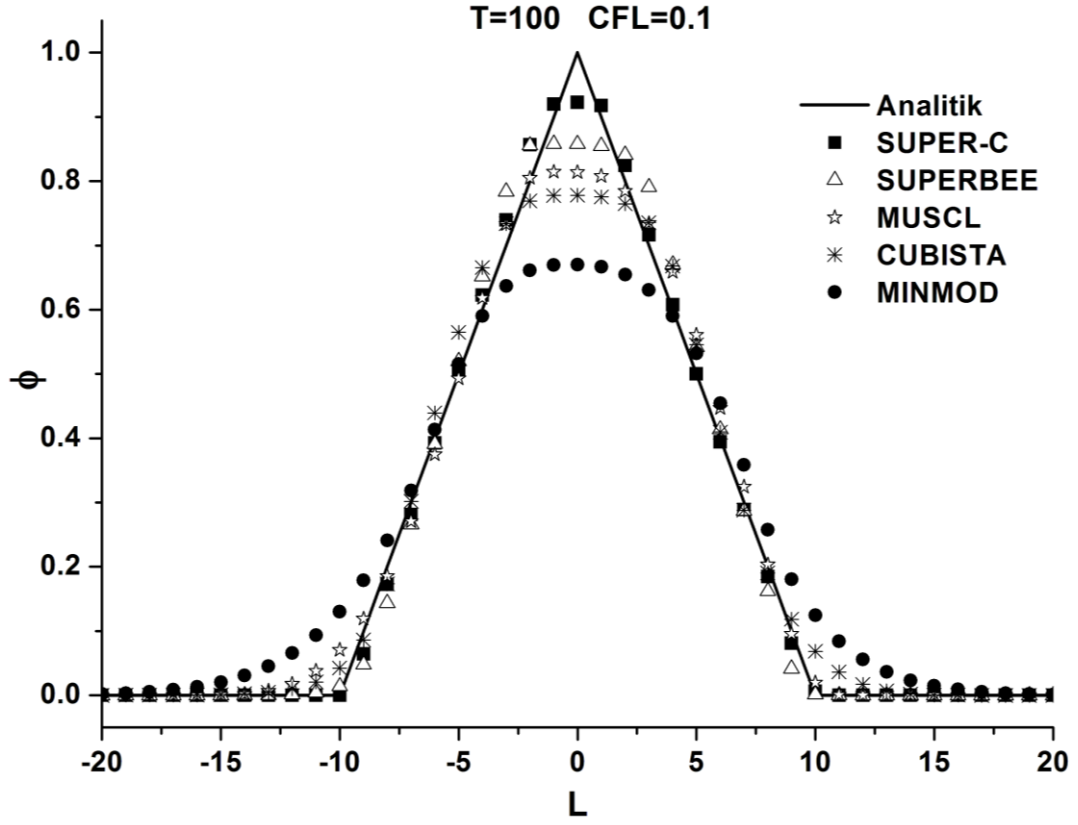
Şekil 5.14 (Devam): Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=50)



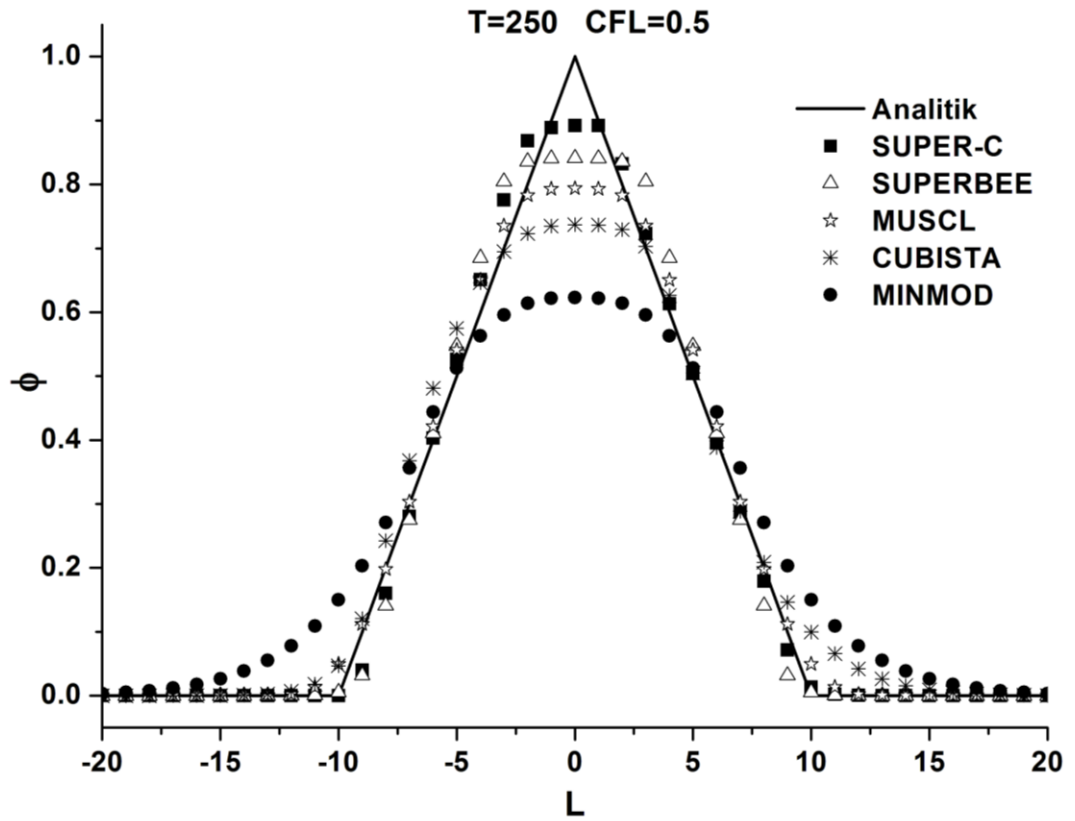
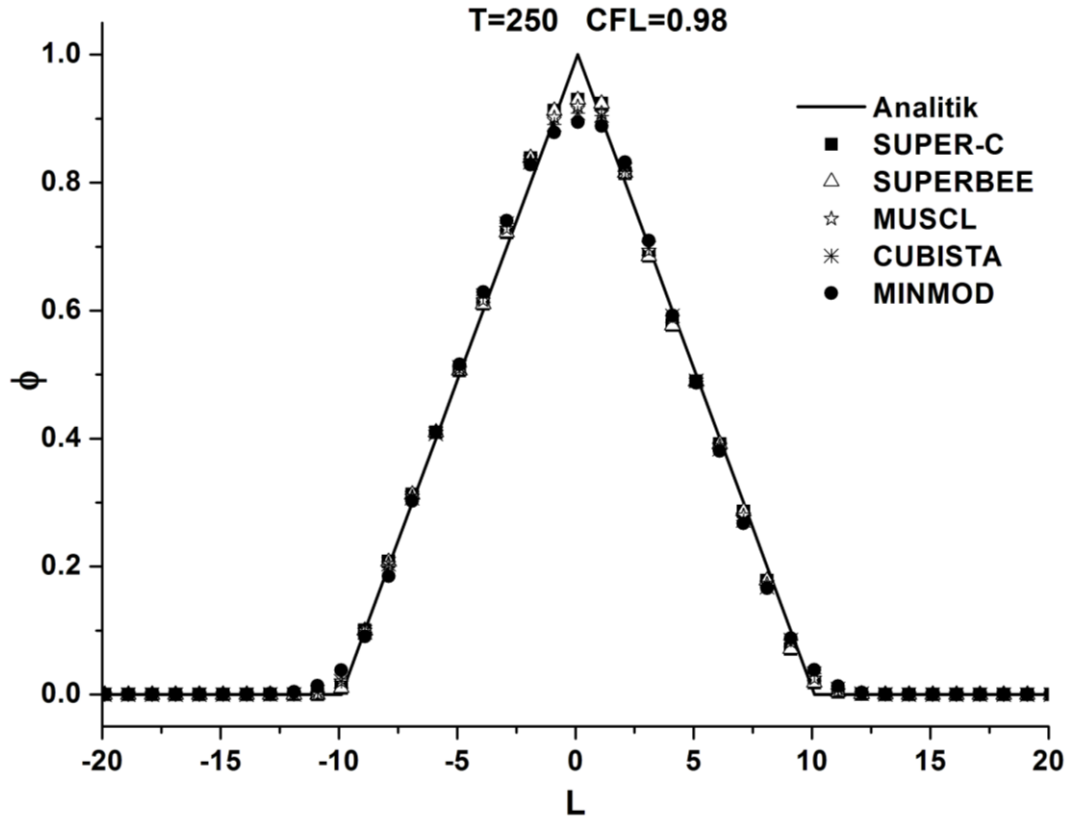
Şekil 5.15: Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



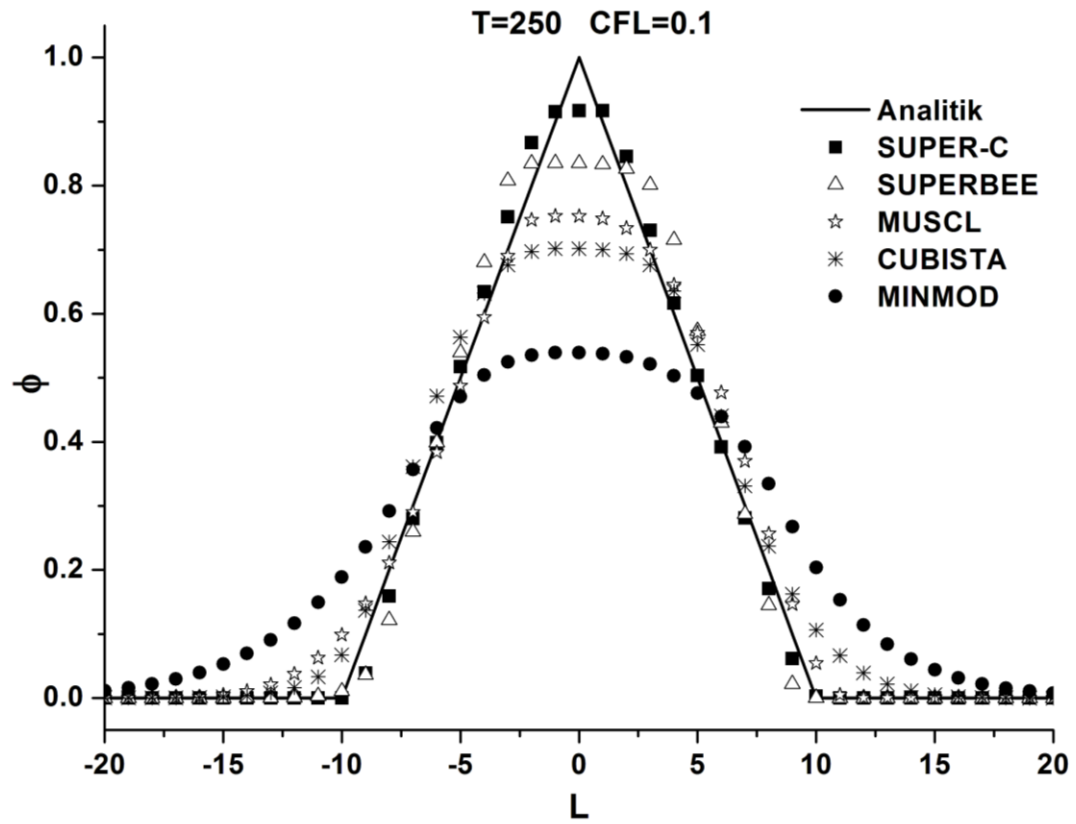
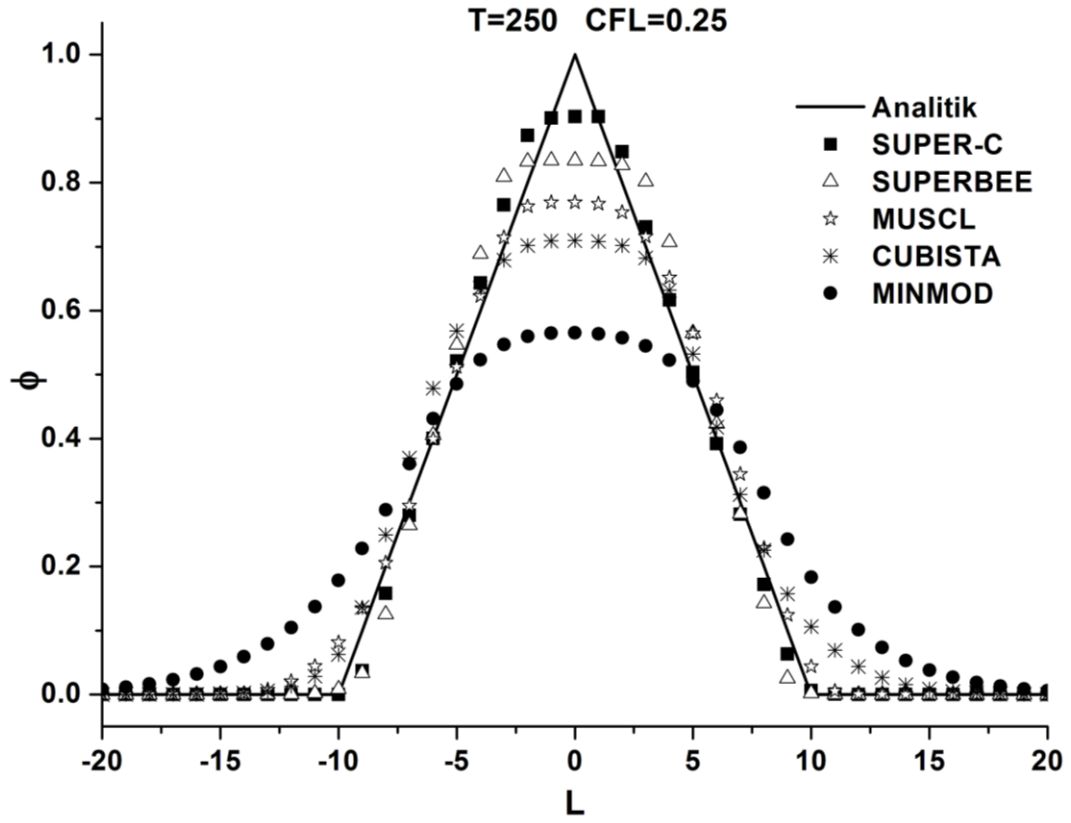
Şekil 5.15 (Devam): Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



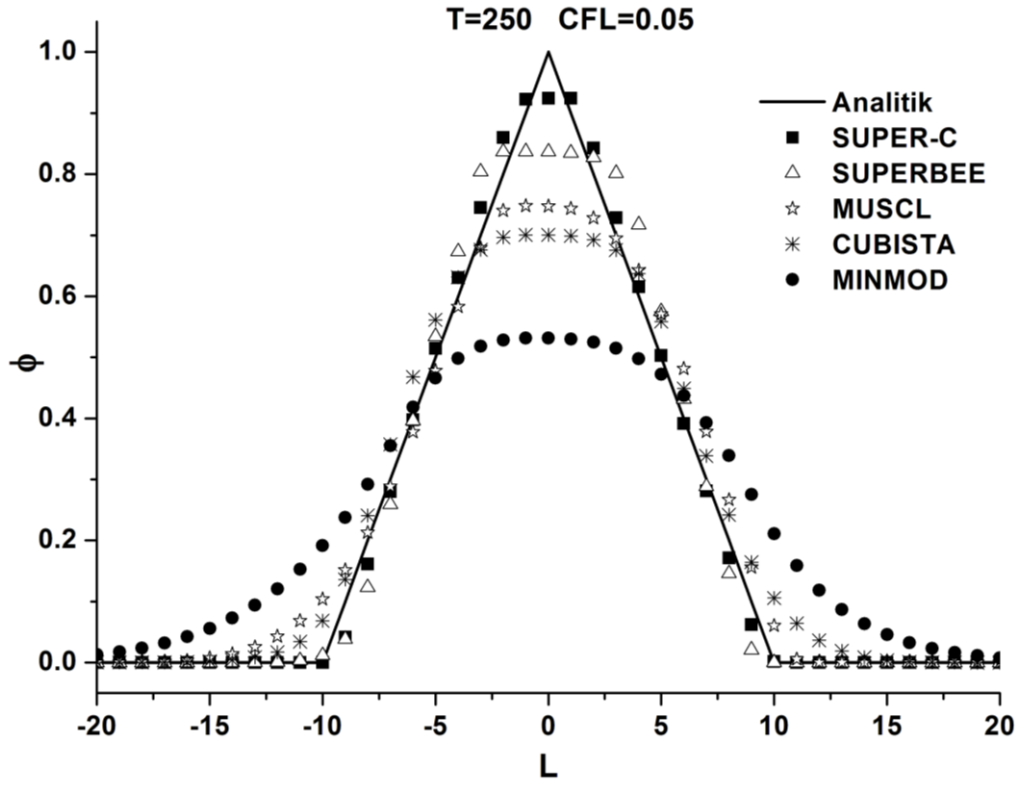
Şekil 5.15 (Devam): Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=100)



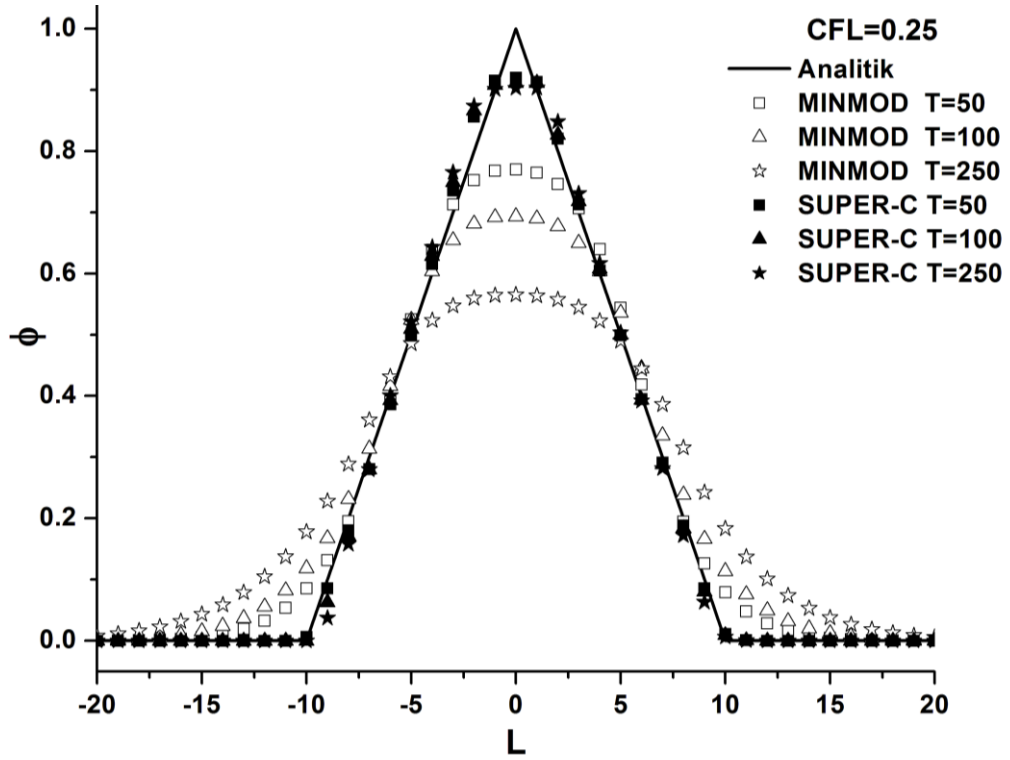
Şekil 5.16: Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



Şekil 5.16 (Devam): Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



Şekil 5.16 (Devam): Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması (T=250)



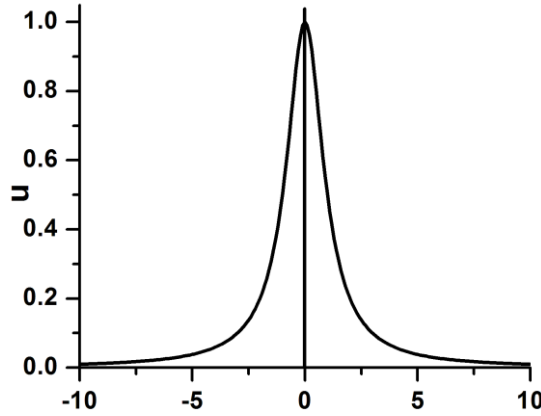
Şekil 5.17: Üçgen şeklinde skaler bir profilin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde MINMOD ve SUPER-C yaklaşımları elde edilen profillerin zamanla değişimi (CFL=0.25)

5.2. Dikdörtgen, Yarı-elips, Sinüs-kare ve Üçgen Şeklinde Skaler Profillerin Değişken Bir Hız Alanında Konveksiyon ile Taşınması

Literatürde yüksek çözünürlüklü yaklaşımların değerlendirilmesinde genellikle skaler profilin uzayda ve zamanla bozulmadığı sabit hız alanındaki problemler kullanılmaktadır. Bu bölümde ise dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklindeki skaler profillerin uzayda değişen bir hız alanında konveksiyon ile taşınması incelenmiştir. Önceki bölümde incelenmiş olan sabit hız alanındaki konveksiyon probleminde undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapan yaklaşımlar çıkarılarak, bütün zaman ve CFL sayılarında monotonik sonuç veren CLAM, CUBISTA, KOREN, MINMOD, MUSCL, OSHER, SUPERBEE, SUPER-C, UMIST ve WACEB yaklaşımları ile çözümler yapılmıştır.

Bu bölümde çözülen problemin kısmi diferansiyel denklemi, Denklem (5.1) ile aynıdır. Fakat burada hız sabit olmayıp uzayda değişmektedir. Uzayda değişen hız profili Denklem (5.5)'teki gibi seçilmiş ve Şekil 5.18'de gösterilmiştir.

$$u(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (5.5)$$



Şekil 5.18: Denklem (5.5)'te verilen hız profili

Bu durumda 1 boyutlu olarak incelenen problemin diferansiyel denklemi:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{1+x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (5.6)$$

şeklinde olur. Problemin yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar ile elde edilen sonuçlarına geçmeden önce aşağıda problemin analitik çözümü verilmiştir.

5.2.1. Problemin analitik çözümü

Aşağıdaki gibi 1 boyutlu, bir kısmi diferansiyel denklem ele alınsın:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (5.7)$$

Bu denklemde $u(x)$, çözüm bölgesinde uzayla değişmektedir. Bu denklem üniform olmayan ancak durgun bir ortamdaki bir dalganın tek yönde ilerlemesini ifade eder.

Denklem (5.7)'de gösterilen kısmi diferansiyel denkleminin $\phi(t,x)$ çözümü

$$\phi(t,x) = p(x - u(x)t) = p(\xi) \quad (5.8)$$

formundadır. Burada $p(\xi)$, karakteristik değişkenin ($\xi = x - u(x)t$) keyfi bir fonksiyonudur. Buna göre çözüm, eğimin karakteristik eğrileri boyunca sabittir[109].

$$\frac{dx}{dt} = u(x) \quad (5.9)$$

Bu denklemin analitik çözümü yukarıda bahsedildiği gibi karakteristik yöntem ile bulunabilir. Bu durumda birinci mertebeden adi diferansiyel denklemini sağlayan karakteristik eğri aşağıdaki gibi verilir:

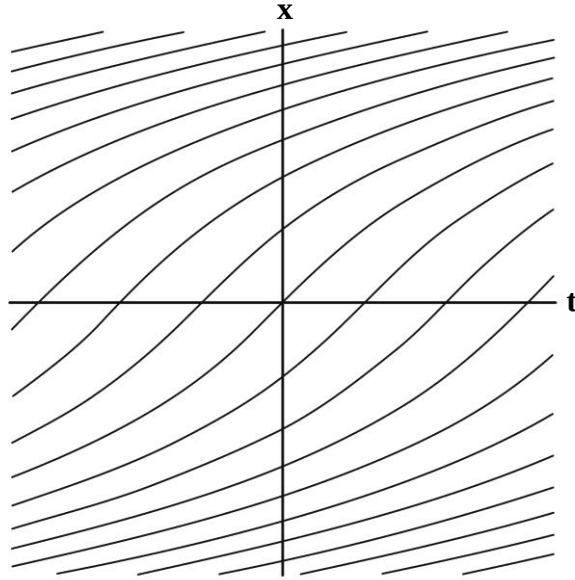
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+x^2} \quad (5.10)$$

Bu ifadenin değişkenlere ayırma yöntemiyle integrali alındığında

$$\int (x^2 + 1)dx = \frac{1}{3}x^3 + x = t + k \quad (5.11)$$

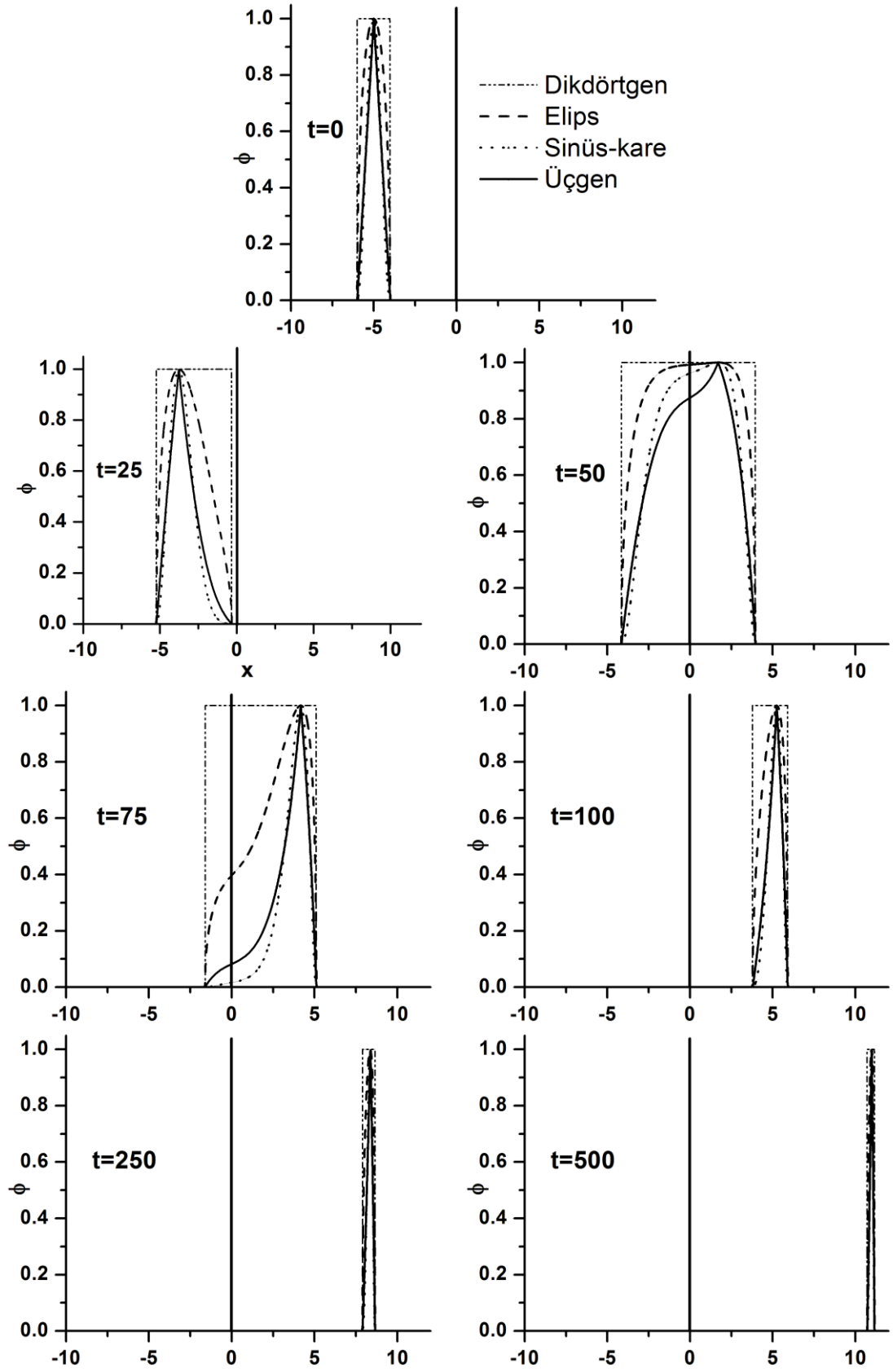
bulunur. Burada k integral sabitidir. Çözümün karakteristik eğrilerinden bazıları Şekil 5.19'da verilmiştir. Denklem (5.11)'de karakteristik değişken $\xi = \frac{1}{3}x^3 + x - t$ 'dir. Dolayısıyla denklemin genel çözümü aşağıdaki formdadır:

$$\phi = p\left(\frac{1}{3}x^3 + x - t\right) \quad (5.12)$$



Şekil 5.19: Denklem (5.11)'de verilen eşitlik için bazı karakteristik eğriler

Hızın sabit olması ($u=\text{sabit}$) halinde karakteristik eğriler doğru şeklinde olur ve önceki bölümde çözüldüğü gibi, profil çözüm bölgesi içerisinde sabit bir hızla şekli değişmeden ilerler. Hızın uzayda değiştiği bu problemde ise çözüm karakteristik eğriler boyunca sabit olmakta ve profil üniform olmayan ortamda ilerlerken çözüm bölgesi boyunca değişmektedir. Profillerin çözüm bölgesi içerisinde ilerlerken zamanla olan değişimleri Şekil 5.20'de gösterilmiştir. Tüm profillerin genişliği 2 birim ve başlangıç anındaki merkez noktası $x = -5$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.20: Dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklindeki profillerin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminin farklı zamanlardaki analitik çözümleri

Şekil 5.18’de verilen hız profili incelendiğinde hızın $x=0$ ’da maksimum değerde olduğu ve düşey eksenin her iki tarafında simetrik olarak azaldığı görülmektedir. Dolayısıyla, skaler profillerin taşındığı hız alanı değişken olduğundan skaler profilin her bir noktasındaki taşınma hızı mekâna bağlı olarak değişmektedir. Şekil 5.20’den de görülebileceği gibi bütün skaler profillerde hız alanına bağlı olarak skaler profil genişliğinde bir genişleme/daralma olmaktadır. Ayrıca yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen skaler profillerde profil genişliğinin yanı sıra profil şeklinde de değişimler olmaktadır. Dikdörtgen skaler profilin şeklinde ise herhangi bir bozulma olmamakta, sadece genişliği değişmektedir. Bu durum dikdörtgen skaler profildeki noktaların, hızın ya 1 ya da 0 olduğu hız alanında olmasından kaynaklanmaktadır. Öte yandan yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen skaler profillerde hız, skaler profil boyunca noktadan noktaya farklılık göstermektedir. Yani skaler profilin taşınma hızı yerel olarak değişmektedir. Dolayısıyla, bu skaler profillerin sadece genişliği değil, şekilleri de değişmektedir. Skaler profil şeklindeki bu değişiklik Şekil 5.20’den görülebilir.

$t=25$ anında skaler profilde taşınma hızının noktadan noktaya değişmesi sebebiyle, skaler profil şekillerindeki simetri bozulmakta ve hızın daha yüksek olduğu profillerin sağ tarafında bir genişleme olmaktadır. Düşey eksene yaklaşan skaler profiller, hızın daha yüksek olduğu bölgeden geçmektedir. $t=50$ anında skaler profillerin genişliği başlangıçtaki genişliğinin yaklaşık 4 katı olmaktadır. Bu anda skaler profil şekillerinde ciddi bozulmalar görülmektedir. Artan zamanla skaler profiller tekrar azalan hız bölgesine girmekte, skaler profilin sağ tarafı daha yavaş taşınarak $t=75$ anında görüldüğü gibi daralmaktadır. Skaler profil şekilleri ise bozulmaya devam etmektedir. $t=100$ anında skaler profillerin genişliği neredeyse başlangıç anındaki ile aynıdır. Bu anda skaler profiller hızların çok düşük olduğu bölgeye taşınmıştır. $t=250$ ve $t=500$ anlarında görüldüğü gibi, oldukça uzun zaman geçmesine rağmen skaler profiller çok az ilerlemektedir. Artan zamanla profiller iyice daralmakta, $t=500$ anında profil genişliği başlangıç anındaki genişliğinin neredeyse dörtte biri kadar olmaktadır.

5.2.2. Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar kullanılarak elde edilen çözümler

Dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen skaler profiller $t=25, 50, 75, 100, 250$ ve 500 olmak üzere 6 farklı zaman ve $1.0, 0.75, 0.5, 0.25$ ve 0.1 olmak üzere 5 farklı CFL sayısı için yukarıda bahsedilen yaklaşımlar ile çözülmüştür. Yaklaşımların hataları Denklem (5.4)'te verilen denklem ile hesaplanarak ilgili tablolarda analitik çözüme en yakın sonuç verenden en uzak sonuç veren yaklaşıma göre sıralanmıştır.

Hızların profil boyunca değişmesinden dolayı, CFL sayısı hesaplarında maksimum hız referans olarak alınmıştır. Maksimum hızın 1 olduğu hatırlanarak, CFL sayısının aslında zaman adımının (Δt) ve hücre genişliğinin (Δx) bir fonksiyonu olduğuna dikkat edilmelidir. Bütün skaler profillerde yaklaşım hatalarının CFL sayısına bağlı olarak değişimi ilgili tablolarda verilmiştir. Hataların CFL sayısına bağlı olarak pek değişmediği, çoğu yaklaşımda bu değişimin %1'in altında olduğu görülmüştür. Bu nedenle şekillerde sadece CFL=1.0 için sonuçlar karşılaştırılmıştır. Şekillerde analitik çözümle ile SUPER-C, SUPERBEE, MUSCL, CUBISTA ve MINMOD yaklaşımları ile elde edilen çözümler karşılaştırılmıştır. Aynı ayrı ele alınan skaler profillerde yaklaşımların hataları ve davranışları aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

5.2.2.1. Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması

Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin değişken hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi daha önce belirtilen zaman ve CFL sayıları için çözülmüş, yaklaşımların hataları Tablo 5.15'te verilmiştir. Her bir zamanda CFL=1.0 için analitik sonuç Şekil 5.21'de verilmiştir. Dikdörtgen skaler profilin $t=25$ anındaki analitik çözümü ile SUPER-C, SUPERBEE, MUSCL, CUBISTA ve MINMOD yaklaşımları ile elde edilen çözümü Şekil 5.21'de verilmiştir. Şekil 5.21 incelendiğinde $t=25$ anında dikdörtgen skaler profilin genişleyerek hızın yüksek olduğu orijine yakın bir noktaya taşındığı görülmektedir. Hiçbir yaklaşımın skaler profilin sağ ayağını iyi çözemediği, skaler profilin daha yavaş taşınan sol ayağının ise iyi çözüldüğü ve yaklaşımlar arasındaki farkın çok belirgin olmadığı görülmektedir. Dikdörtgen skaler profilde en çok yayılma MINMOD, en az yayılma

ise sırasıyla SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarında görülmektedir. Diğer yaklaşımların hataları birbirine çok yakın olmaktadır.

Hız alanının simetrik olduğu orijinden geçen dikdörtgen skaler profil, Şekil 5.21 $t=50$ anında görüldüğü gibi başlangıç anındaki genişliğinin 4 katına ulaşmıştır. Düşey eksene göre simetrik olan skaler profilde bütün yaklaşımların $t=25$ anına göre analitik çözümü çok daha iyi yakaladığı görülmektedir. Yaklaşımlar arasındaki fark yüksek gradyenin her iki tarafında görülmekte, hızın daha yüksek olduğu skaler profil sol ayağındaki hatalar biraz daha büyük olmaktadır.

Skaler profilin azalmaya devam eden hız alanından geçerek, tekrar asimetrik bir form aldığı $t=75$ anındaki şekli, Şekil 5.21’de görülmektedir. $t=75$ anında elde edilen skaler profil, $t=25$ anındaki skaler profilin neredeyse simetridir. Ancak her iki durumdaki skaler profil genişlikleri birbirlerinden farklıdır. $t=75$ anında yaklaşımlar bu defa skaler profilin daha yavaş taşınan sağ tarafını iyi çözmekte, skaler profilin sol tarafını ise ciddi şekilde yaymaktadır. Hata sıralamasında ilk iki sırada yine SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımları olmakta, $t=25$ ’te bu iki yaklaşımı takip eden MUSCL yaklaşımı, artan zamanla sıralamada geriye düşmekte ve hata payı en çok hata içeren yaklaşım diğer zamanlardan farklı olarak OSHER olmaktadır.

$t=75$ anındaki skaler profilin taşındığı bölgedeki hız profili, başlangıç anındaki profil ile hemen hemen aynıdır. Bu noktadan sonra skaler profil artık çok yavaş taşınmaktadır. Şekil 5.21’de görüldüğü gibi $t=100$ ’de daralan skaler profilin genişliği başlangıç anındaki genişlik ile neredeyse aynıdır. $t=0$ ile $t=100$ anlarındaki skaler profilin şekli karşılaştırıldığında skaler profil sol ayağının yaklaşık 10 birim taşındığı görülmektedir. Bu noktadan itibaren 1.5 kat daha fazla zaman ($t=250$) geçmesine rağmen skaler profilin taşındığı noktada çok az bir değişiklik olmakta ve skaler profil genişliğinde daralma görülmektedir. Bu durum $t=500$ anı için daha açık bir şekilde görülebilir. Tablo 5.15 incelendiğinde zamanın artmasıyla toplam hata miktarlarının azaldığı görülmektedir. Artan zamanla skaler profil genişliğinde bir daralma olmakta, dolayısı ile bu bölgede kalan nokta sayısında azalma olmaktadır. Örneğin $t=500$ anında dikdörtgen skaler profil içinde sadece 4 ağ noktası kalmaktadır. Artan zamanla hatalardaki azalmanın sebebi budur. Toplam hata miktarında bir azalma

olmasına rağmen $t=250$ anında MINMOD ve CUBISTA yaklaşımları skaler profilin maksimum noktasını artık yakalayamamaktadır. $t=500$ anında bu yaklaşımlara MUSCL ve SUPERBEE yaklaşımları da eklenmektedir. Bu anda MINMOD yaklaşımı ile elde edilen skaler profildeki maksimum değer 0.6'ya kadar inmektedir. Bütün zaman adımlarında skaler profilin tepe noktasını yakalayan tek yaklaşım SUPER-C olmaktadır.

Bütün zamanlardaki toplam hata miktarları dikkate alınarak yapılan incelemede yaklaşımların dikdörtgen skaler profili çözmedeki davranışlarının zamanla pek değişmediği görülmektedir. Örneğin bütün zamanlarda SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımları sıralamada ilk iki sırada olmaktadır. Bu yaklaşımları, sıralamada yeri 3 ile 5 arasında değişen MUSCL, KOREN ve WACEB yaklaşımları takip etmektedir. Bu yaklaşımların hata değerleri birbirine çok yakındır. Bu yaklaşımları da zamana bağlı olarak sıralamadaki yeri 6 ile 8 arasında değişen CUBISTA, CLAM ve UMIST yaklaşımları izlemektedir. Tüm zamanlarda analitik çözümden en uzak sonucu veren iki yaklaşım ise OSHER ve MINMOD'dur.

Tablo 5.15: Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

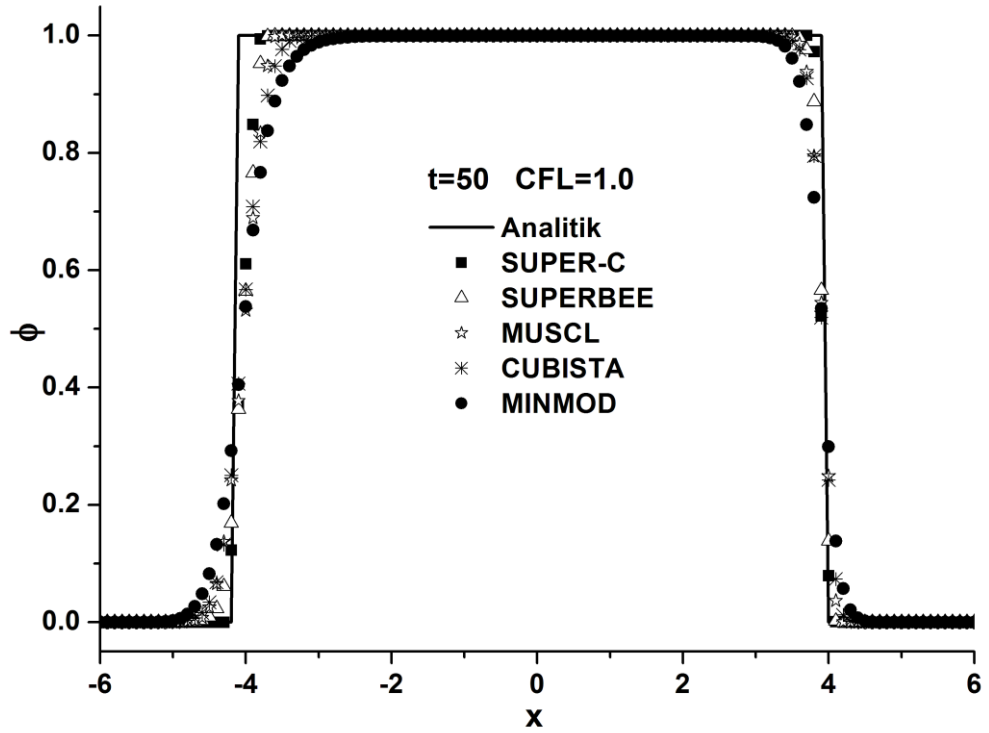
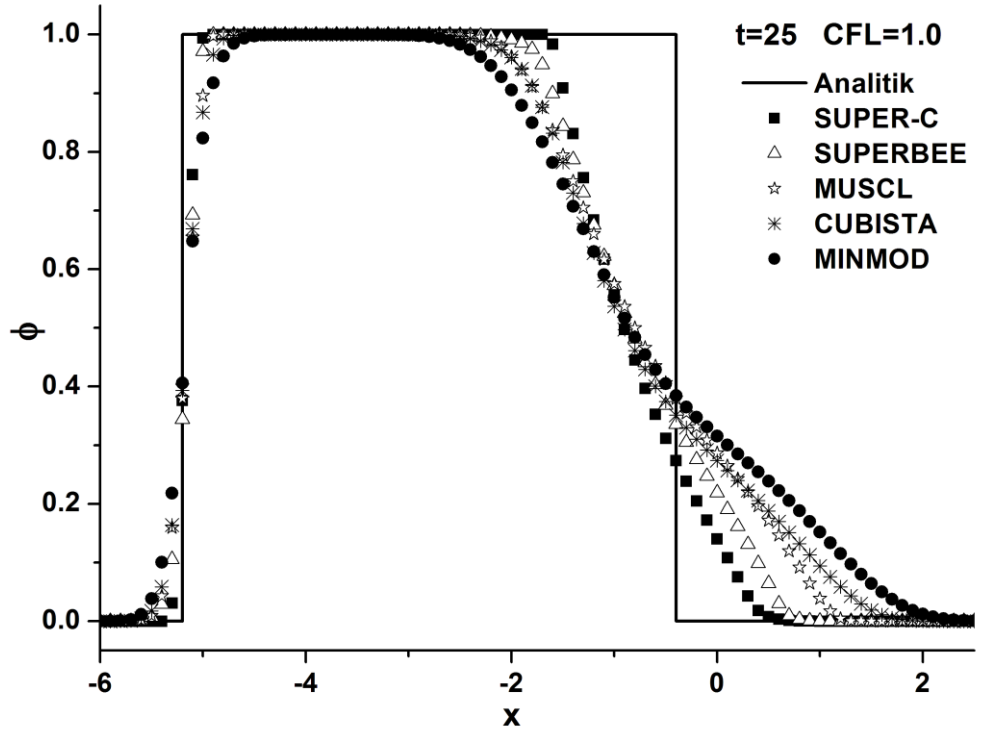
I=25	CFL=1.0			CFL=0.75			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1		
	1	SUPERC	7.3005	1	SUPERC	7.2867	1	SUPERC	7.2219	1	SUPERC	7.1836	1	SUPERC	7.1711
	2	SUPERBEE	8.2985	2	SUPERBEE	8.2860	2	SUPERBEE	8.2706	2	SUPERBEE	8.2589	2	SUPERBEE	8.2524
	3	MUSCL	9.8362	3	MUSCL	9.8452	3	MUSCL	9.8724	3	MUSCL	9.8933	3	MUSCL	9.9024
	4	KOREN	10.0877	4	KOREN	10.0900	4	KOREN	10.0847	4	KOREN	10.0837	4	KOREN	10.0838
	5	WACEB	10.3558	5	WACEB	10.3613	5	WACEB	10.3475	5	WACEB	10.3414	5	WACEB	10.3404
	6	CLAM	10.4713	6	CLAM	10.4844	6	CLAM	10.5163	6	CLAM	10.5425	6	CLAM	10.5547
	7	CUBISTA	10.6805	7	CUBISTA	10.6882	7	CUBISTA	10.6850	7	CUBISTA	10.6864	7	CUBISTA	10.6882
	8	UMIST	10.9237	8	UMIST	10.9425	8	UMIST	10.9745	8	UMIST	11.0018	8	UMIST	11.0154
	9	OSHER	11.1075	9	OSHER	11.1334	9	OSHER	11.2188	9	OSHER	11.2746	9	OSHER	11.2958
	10	MINMOD	12.3616	10	MINMOD	12.3981	10	MINMOD	12.4335	10	MINMOD	12.4676	10	MINMOD	12.4868
I=50	CFL=1.0			CFL=0.75			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1		
	1	SUPERC	1.8868	1	SUPERC	1.8804	1	SUPERC	1.8769	1	SUPERC	1.8716	1	SUPERC	1.8684
	2	SUPERBEE	2.3405	2	SUPERBEE	2.3380	2	SUPERBEE	2.3449	2	SUPERBEE	2.3477	2	SUPERBEE	2.3501
	3	KOREN	3.0409	3	KOREN	3.0439	3	KOREN	3.0531	3	KOREN	3.0599	3	KOREN	3.065
	4	WACEB	3.0846	4	WACEB	3.0861	4	WACEB	3.0901	4	WACEB	3.0928	4	WACEB	3.0957
	5	MUSCL	3.1307	5	MUSCL	3.1392	5	MUSCL	3.1607	5	MUSCL	3.1767	5	MUSCL	3.1866
	6	CUBISTA	3.3272	6	CUBISTA	3.3291	6	CUBISTA	3.3378	6	CUBISTA	3.3433	6	CUBISTA	3.3472
	7	CLAM	3.4863	7	CLAM	3.4936	7	CLAM	3.5162	7	CLAM	3.5321	7	CLAM	3.5418
	8	UMIST	3.7436	8	UMIST	3.7534	8	UMIST	3.7787	8	UMIST	3.7968	8	UMIST	3.8075
	9	OSHER	4.0529	9	OSHER	4.0642	9	OSHER	4.0988	9	OSHER	4.1222	9	OSHER	4.1358
	10	MINMOD	4.5213	10	MINMOD	4.5360	10	MINMOD	4.5644	10	MINMOD	4.5857	10	MINMOD	4.5977

Tablo 5.15 (Devam): Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

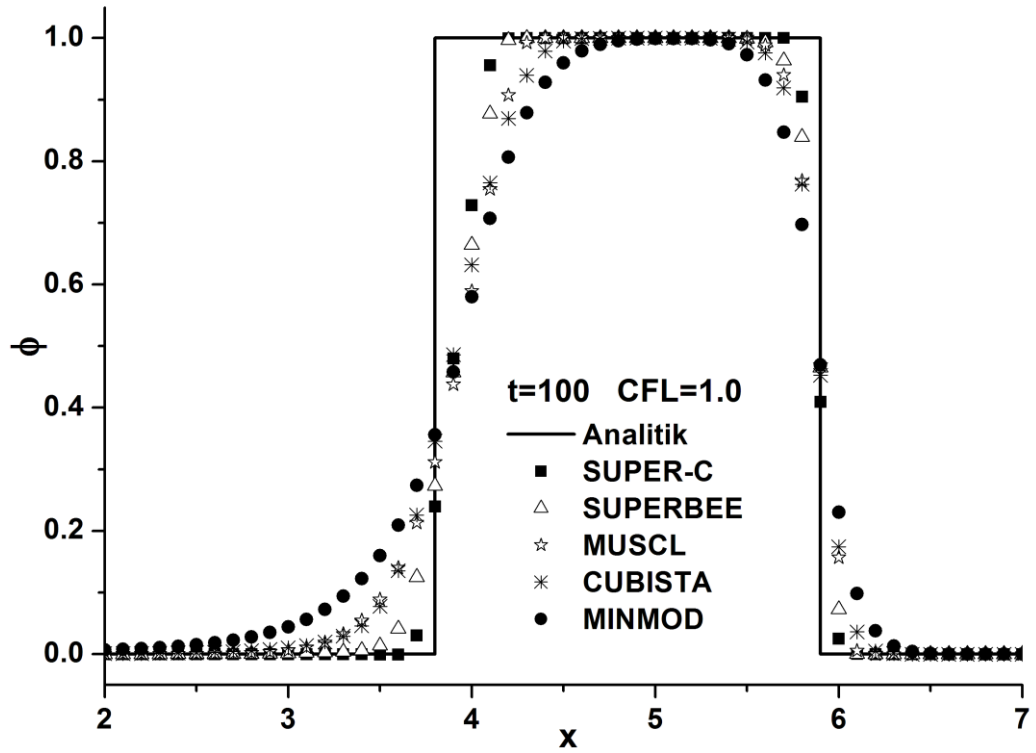
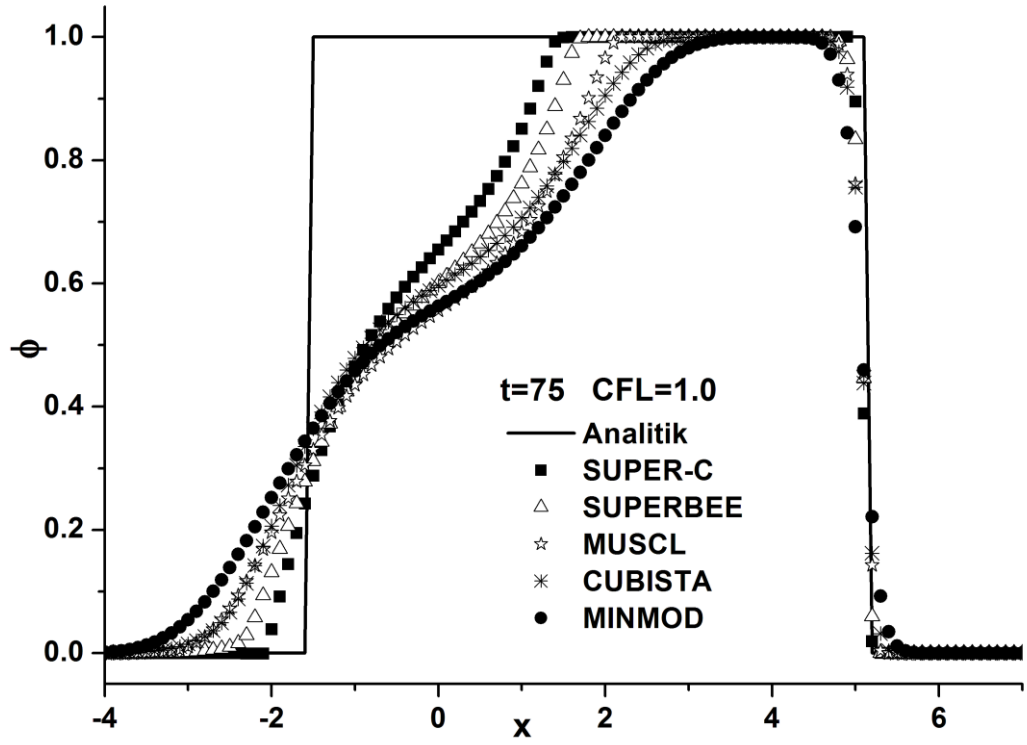
$\tau=5$	CFL =1.0			CFL =0.75			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1		
	SUPERC	12.0917	1	SUPERC	12.3255	1	SUPERC	12.0667	1	SUPERC	12.0532	1	SUPERC	12.5289	
2	SUPERBEE	14.3498	2	SUPERBEE	14.5705	2	SUPERBEE	14.3750	2	SUPERBEE	14.3877	2	SUPERBEE	14.8103	
3	WACEB	15.9534	3	WACEB	16.1191	3	WACEB	16.0041	3	WACEB	16.0309	3	WACEB	16.3391	
4	KOREN	16.2629	4	KOREN	16.4653	4	KOREN	16.3394	4	KOREN	16.3792	4	KOREN	16.7306	
5	CUBISTA	16.7911	5	CUBISTA	16.9803	5	CUBISTA	16.8558	5	CUBISTA	16.8897	5	CUBISTA	17.2216	
6	MUSCL	17.1861	6	MUSCL	17.4315	6	MUSCL	17.2906	6	MUSCL	17.3435	6	MUSCL	17.7414	
7	CLAM	18.1705	7	CLAM	18.4242	7	CLAM	18.2892	7	CLAM	18.3488	7	CLAM	18.7455	
8	UMIST	18.6971	8	UMIST	18.9401	8	UMIST	18.8179	8	UMIST	18.8789	8	UMIST	19.2581	
9	MINMOD	19.8322	9	MINMOD	20.0329	9	MINMOD	19.9248	9	MINMOD	19.9716	9	MINMOD	20.2909	
10	OSHER	20.4894	10	OSHER	20.7491	10	OSHER	20.5832	10	OSHER	20.6299	10	OSHER	21.0248	
$\tau=100$	CFL =1.0			CFL =0.75			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1		
	SUPERC	2.3404	1	SUPERC	2.3308	1	SUPERC	2.3329	1	SUPERC	2.3288	1	SUPERC	2.3244	
2	SUPERBEE	2.7444	2	SUPERBEE	2.7416	2	SUPERBEE	2.7492	2	SUPERBEE	2.7518	2	SUPERBEE	2.7521	
3	WACEB	3.4008	3	WACEB	3.4042	3	WACEB	3.4118	3	WACEB	3.4178	3	WACEB	3.4213	
4	KOREN	3.4147	4	KOREN	3.4208	4	KOREN	3.4323	4	KOREN	3.4416	4	KOREN	3.4470	
5	MUSCL	3.5809	5	MUSCL	3.5914	5	MUSCL	3.6085	5	MUSCL	3.6228	5	MUSCL	3.6310	
6	CUBISTA	3.6967	6	CUBISTA	3.7025	6	CUBISTA	3.7128	6	CUBISTA	3.7213	6	CUBISTA	3.7260	
7	CLAM	3.9940	7	CLAM	4.0062	7	CLAM	4.0244	7	CLAM	4.0399	7	CLAM	4.0487	
8	UMIST	4.2652	8	UMIST	4.2807	8	UMIST	4.3013	8	UMIST	4.3196	8	UMIST	4.3303	
9	OSHER	4.7434	9	OSHER	4.7619	9	OSHER	4.7862	9	OSHER	4.8078	9	OSHER	4.8204	
10	MINMOD	5.1316	10	MINMOD	5.1520	10	MINMOD	5.1736	10	MINMOD	5.1946	10	MINMOD	5.2071	

Tablo 5.15 (Devam): Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

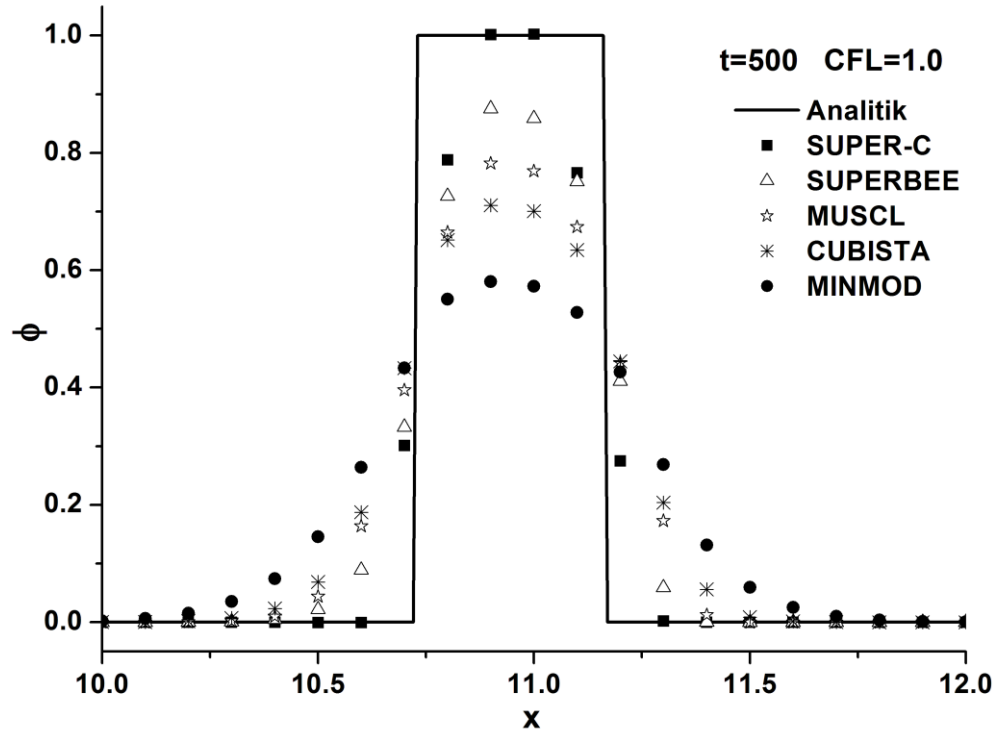
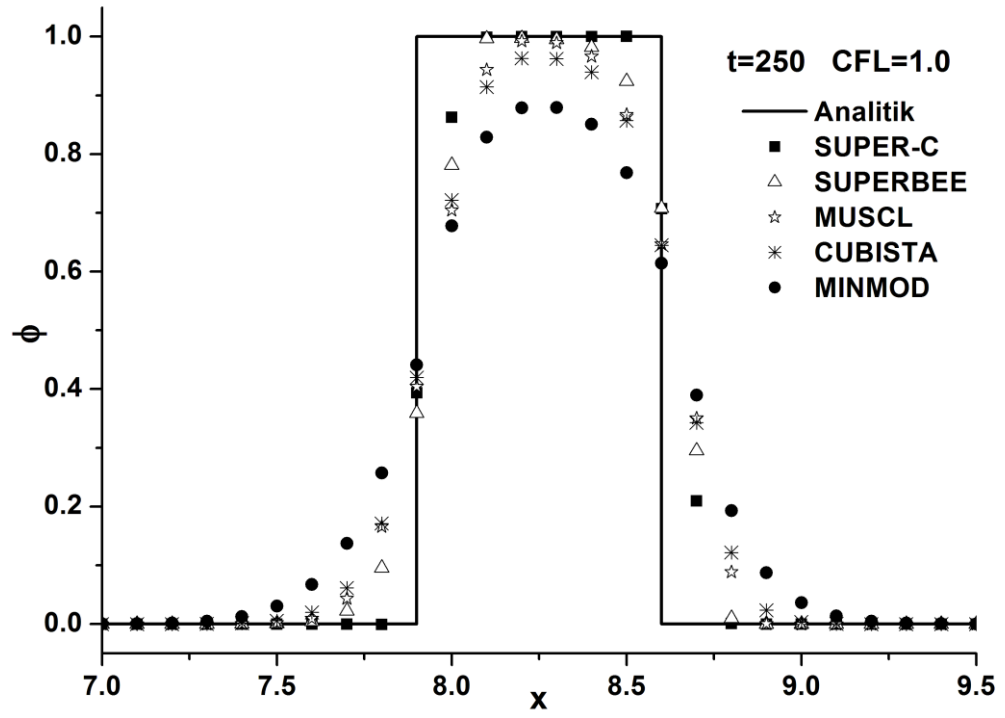
↑2500	CFL =1.0			CFL =0.75			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1		
	1	SUPERC	1.2507	1	SUPERC	1.2466	1	SUPERC	1.2494	1	SUPERC	1.2491	1	SUPERC	1.2486
	2	SUPERBEE	1.6849	2	SUPERBEE	1.6838	2	SUPERBEE	1.6877	2	SUPERBEE	1.6893	2	SUPERBEE	1.6897
	3	KOREN	2.0686	3	KOREN	2.0688	3	KOREN	2.0724	3	KOREN	2.0745	3	KOREN	2.0755
	4	WACEB	2.0989	4	WACEB	2.0985	4	WACEB	2.1011	4	WACEB	2.1022	4	WACEB	2.1027
	5	MUSCL	2.1456	5	MUSCL	2.1481	5	MUSCL	2.1545	5	MUSCL	2.1591	5	MUSCL	2.1616
	6	CUBISTA	2.3295	6	CUBISTA	2.3301	6	CUBISTA	2.3343	6	CUBISTA	2.3367	6	CUBISTA	2.3377
	7	CLAM	2.4647	7	CLAM	2.4680	7	CLAM	2.4751	7	CLAM	2.4803	7	CLAM	2.4831
	8	UMIST	2.6832	8	UMIST	2.6879	8	UMIST	2.6960	8	UMIST	2.7026	8	UMIST	2.7061
	9	OSHER	3.0171	9	OSHER	3.0222	9	OSHER	3.0312	9	OSHER	3.0383	9	OSHER	3.0420
	10	MINMOD	3.3001	10	MINMOD	3.3059	10	MINMOD	3.3145	10	MINMOD	3.3217	10	MINMOD	3.3255
↑500	CFL =1.0			CFL =0.75			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1		
	1	SUPERC	1.0289	1	SUPERC	1.0291	1	SUPERC	1.0291	1	SUPERC	1.0325	1	SUPERC	1.0464
	2	SUPERBEE	1.7080	2	SUPERBEE	1.7062	2	SUPERBEE	1.7059	2	SUPERBEE	1.7046	2	SUPERBEE	1.7037
	3	KOREN	2.3235	3	KOREN	2.3248	3	KOREN	2.3264	3	KOREN	2.3279	3	KOREN	2.3288
	4	MUSCL	2.3536	4	MUSCL	2.356	4	MUSCL	2.3591	4	MUSCL	2.3618	4	MUSCL	2.3635
	5	WACEB	2.3983	5	WACEB	2.3994	5	WACEB	2.4004	5	WACEB	2.4015	5	WACEB	2.4022
	6	CUBISTA	2.7402	6	CUBISTA	2.7422	6	CUBISTA	2.7442	6	CUBISTA	2.7463	6	CUBISTA	2.7475
	7	CLAM	2.7949	7	CLAM	2.7979	7	CLAM	2.8014	7	CLAM	2.8046	7	CLAM	2.8066
	8	UMIST	2.9706	8	UMIST	2.9742	8	UMIST	2.9782	8	UMIST	2.982	8	UMIST	2.9843
	9	OSHER	3.2436	9	OSHER	3.2467	9	OSHER	3.2514	9	OSHER	3.2554	9	OSHER	3.2576
	10	MINMOD	3.6723	10	MINMOD	3.6761	10	MINMOD	3.6796	10	MINMOD	3.6832	10	MINMOD	3.6854



Şekil 5.21: Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi



Şekil 5.21(Devam): Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi



Şekil 5.21 (Devam): Dikdörtgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi

5.2.2.2. Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması

Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminin farklı zaman ve farklı CFL sayıları için yapılan çözümlerinin hataları Tablo 5.16'da verilmiştir. Farklı zamanlardaki hatalar incelendiğinde sıralamanın dikdörtgen skaler profilden farklı olarak sürekli değiştiği görülmektedir. Her bir zamanda CFL=1.0 için yaklaşımların sonuçları Şekil 5.22'de analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Yaklaşımların davranışını daha açık görebilmek amacıyla, gerek görülen yerler büyütülerek şekil üzerinde gösterilmiştir.

Şekil 5.22 incelendiğinde, hızın sağ tarafa göre daha düşük olduğu, dolayısıyla daha az taşınan skaler profilin sol tarafında yaklaşımların analitik çözüme yakın bir sonuç verdiği görülmektedir. Bu kısımda yaklaşımlar arasındaki fark çok azdır. Büyütülerek verilen skaler profilin üst kısmında, SUPER-C yaklaşımının skaler profilin tepesini dikleştirdiği ve skaler profilin sağ tarafında bir basamak oluşturduğu görülmektedir. Benzer davranış SUPERBEE yaklaşımında da görülmekte fakat SUPER-C gibi çok belirgin olmamaktadır. Skaler profilin tepe bölgesini CUBISTA ve MUSCL yaklaşımları oldukça iyi çözmektedir. Ancak hiçbir yaklaşım skaler profilin sağ tarafını iyi çözmemektedir. Bu skaler profilde de bütün yaklaşımlar dikdörtgen profilin taşınmasında olduğu gibi skaler profilin sağ tarafını önemli ölçüde yaymaktadır. CUBISTA ve MINMOD yaklaşımlarındaki yayılma oldukça yüksektir. $t=25$ anında en az hata içeren yaklaşım MUSCL yaklaşımı olmaktadır. Bu yaklaşımı SUPERBEE ve dikdörtgen skaler profilde alt sıralarda yer alan CLAM yaklaşımı takip etmektedir. SUPER-C ise sıralamada gerilere düşmektedir. Genellikle en çok hata içeren MINMOD ve OSHER yaklaşımlarından MINMOD yaklaşımı yine son sırada olmakta, OSHER yaklaşımı ise bu problemde sıralamada 5. sırada olmaktadır. Skaler profilin üst kısmını oldukça iyi yakalayan CUBISTA yaklaşımı skaler profilin sağ tarafındaki yayılma özelliğinden dolayı MINMOD yaklaşımından sonra en çok hata içeren yaklaşım olmaktadır. KOREN yaklaşımı istikrarlı bir davranış göstererek en az hata içeren yaklaşımlar arasında olmaktadır.

Şekil 5.22’de görüldüğü gibi $t=50$ anında yaklaşımlar skaler profilin sol ve sağ ayaklarında analitik çözüme yakın bir sonuç vermektedir. Bu kısımda yaklaşımlar arasındaki fark çok belirgin olmamakla beraber, keskin gradyenleri çözmekte başarılı olan SUPER-C’nin bu bölgeleri daha iyi çözdüğü görülmektedir. Büyütülerek verilen skaler profilin tepe bölgesi incelendiğinde SUPER-C, SUPERBEE ve MUSCL yaklaşımlarının bu bölgeyi oldukça dikleştirdiği görülmektedir. SUPER-C yaklaşımı ile elde edilen skaler profilin üst ve sağ tarafında küçük bir basamak görülmektedir. Öte yandan şekil olarak analitik skaler profile benzer bir profil üreten CUBISTA ve MINMOD yaklaşımlarında tepe noktasının çöktüğü görülmektedir. $t=50$ anındaki hatalar incelendiğinde yaklaşımların sıralamadaki yerinin çok değiştiği görülmektedir. Örneğin $t=25$ anında en az hata içeren ikinci yaklaşım olan SUPERBEE, $t=50$ anında en çok hata içeren ikinci yaklaşım olmaktadır. Dikdörtgen skaler profil probleminde tüm zamanlarda en az hata içeren SUPER-C yaklaşımı, birçok problemde son sıralarda olan MINMOD yaklaşımından daha büyük hata içermekte ve sıralamada son sıralarda yer almaktadır. Bu zaman adımında en az hata içeren yaklaşım KOREN’dir. Bu yaklaşımı $t=25$ ’de sıralamada sonlarda olan WACEB ve CUBISTA yaklaşımları izlemektedir.

$t=75$ anında yaklaşımların skaler profilin sağ tarafını iyi çözdüğü, ancak aynı başarıyı eğimi daha düşük olan sol tarafında gösteremediği görülmektedir. Şekil 5.22’de görüldüğü gibi yaklaşımların bu andaki davranışı $t=25$ ’deki duruma benzerdir. SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarının skaler profilin sol tarafında basamak oluşturduğu görülmektedir. Ayrıca, SUPER-C’nin skaler profilin tepe kısmını dikleştirdiği ve skaler profilin sağ tarafında da küçük bir basamak oluşturduğu görülmektedir. Bu nedenle SUPER-C yaklaşımı sıralamada oldukça gerilerdedir. CUBISTA yaklaşımı skaler profilin tepe noktasını oldukça iyi yakalamaktadır. Bu yaklaşım, hata payı en az olan WACEB ve KOREN yaklaşımlarını takip etmektedir. OSHER ve MINMOD yaklaşımları sıralamada son sıralarda yer almakta, bu yaklaşımları SUPERBEE izlemektedir.

Şekil 5.22’de görüldüğü gibi $t=100$ anında skaler profil, başlangıç anındaki genişliğine ve şekline dönmeye başlamaktadır. Bütün yaklaşımlardaki hatalar ciddi oranda azalmaktadır. SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımları gradyenin yüksek

olduğu skaler profilin ayaklarını, MUSCL ve CUBISTA yaklaşımları skaler profilin tepe noktasını daha iyi çözmekte, MINMOD yaklaşımı ise skaler profilin her yerinde difüzif davranmaktadır. Artan zamanla yaklaşımlar bu özelliğini korumaktadır. Daralan skaler profilde MUSCL, WACEB ve CUBISTA yaklaşımlarının skaler profil ayaklarındaki difüzif hataları, SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarının skaler profil tepesindeki kompresif hatalarından daha büyük olmakta ve sıralamada bu yaklaşımların gerisine düşmektedir. $t=500$ anında dahi SUPER-C yaklaşımı analitik çözüme oldukça yakın bir sonuç vermektedir. Sıralamadaki ilk iki sırada yine SUPER-C ve SUPERBEE yer almaktadır. Diğer yaklaşımlar ile elde edilen çözümlerde skaler profilin tepe noktasında ciddi ölçüde çökme olduğu görülmektedir. Örneğin MINMOD yaklaşımında skaler profilin maksimum değerinin 0.5'in altında olduğu görülmektedir.

Tablo 5.16: Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

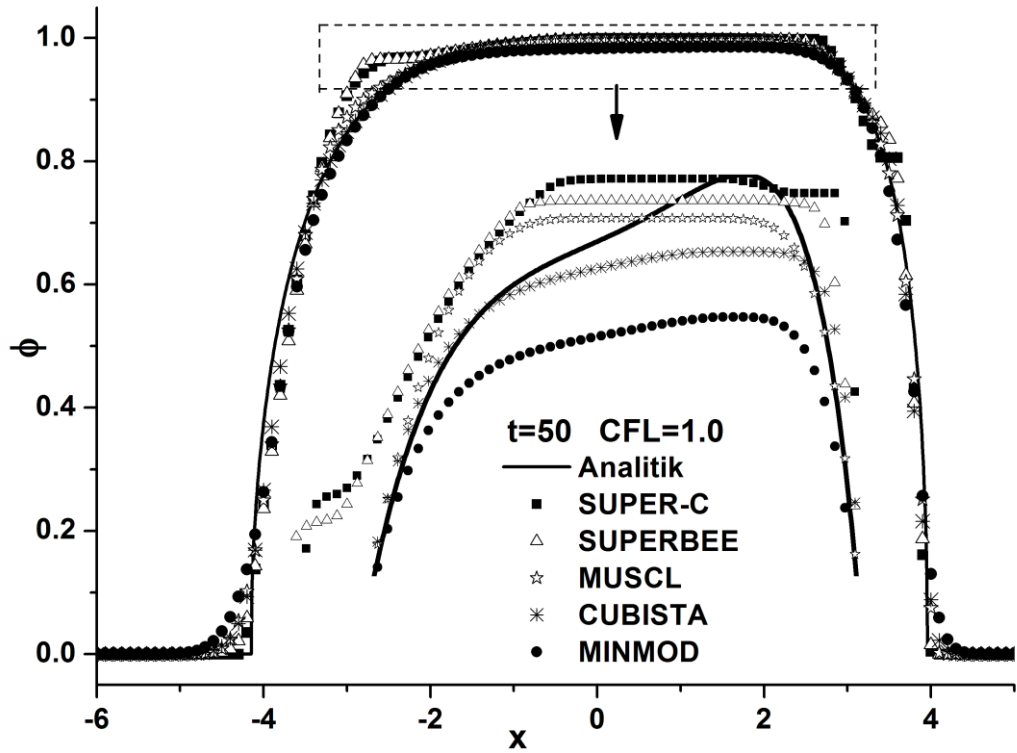
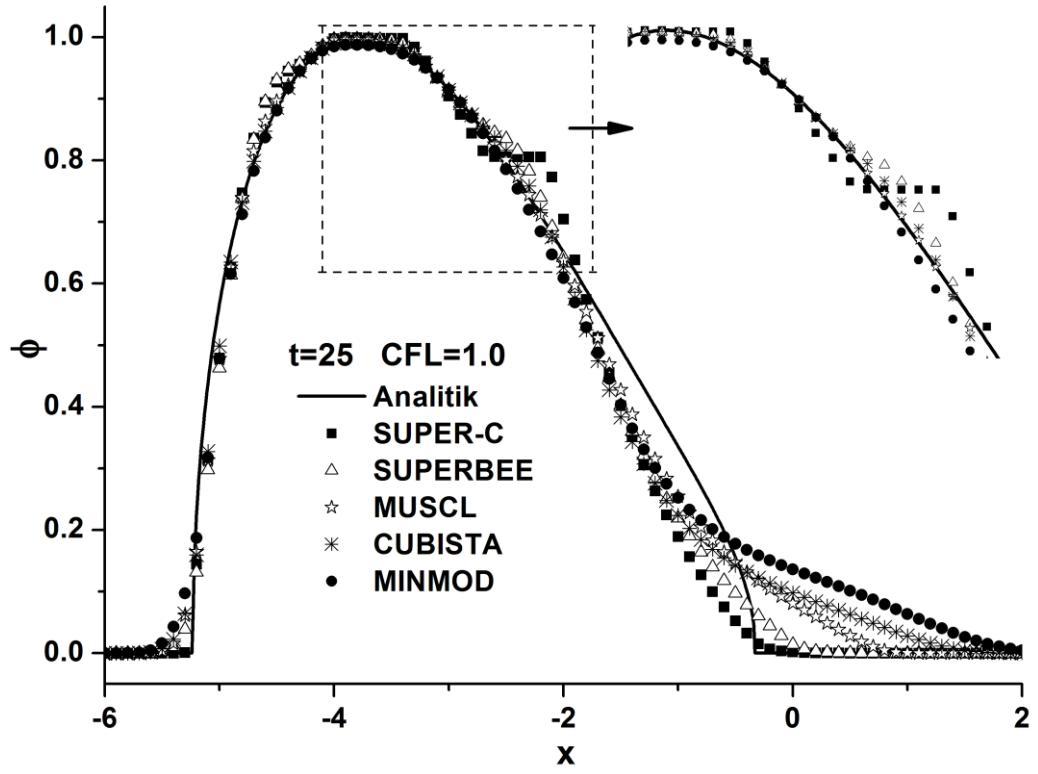
$t=25$	CFL =1.0			CFL =0.75			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1		
	MUSCL	2.0830	1	MUSCL	2.0385	1	MUSCL	2.044	1	MUSCL	2.025	1	MUSCL	2.0032	1
	SUPERBEE	2.3894	2	SUPERBEE	2.3434	2	SUPERBEE	2.3648	2	SUPERBEE	2.3544	2	SUPERBEE	2.3365	2
	CLAM	2.4417	3	CLAM	2.4104	3	CLAM	2.4086	3	CLAM	2.3942	3	CLAM	2.3796	3
$t=50$	KOREN	2.5338	4	KOREN	2.4878	4	KOREN	2.4866	4	KOREN	2.4615	4	KOREN	2.4361	4
	OSHER	2.5884	5	OSHER	2.5868	5	OSHER	2.6195	5	OSHER	2.6374	5	OSHER	2.6416	5
	UMIST	2.6947	6	UMIST	2.6762	6	UMIST	2.6845	6	UMIST	2.6784	6	UMIST	2.6683	6
	SUPERC	2.7018	7	SUPERC	2.681	7	SUPERC	2.6899	7	SUPERC	2.6964	7	SUPERC	2.6944	7
	WACEB	2.8853	8	WACEB	2.8459	8	WACEB	2.8497	8	WACEB	2.8292	8	WACEB	2.8068	8
	CUBISTA	2.9805	9	CUBISTA	2.9436	9	CUBISTA	2.9522	9	CUBISTA	2.9356	9	CUBISTA	2.9152	9
	MINMOD	3.6496	10	MINMOD	3.6495	10	MINMOD	3.6768	10	MINMOD	3.689	10	MINMOD	3.6897	10
	CFL =1.0			CFL =0.75			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1		
	KOREN	1.1565	1	KOREN	1.1574	1	KOREN	1.1578	1	KOREN	1.1583	1	KOREN	1.1587	1
	WACEB	1.2095	2	WACEB	1.2082	2	WACEB	1.2034	2	WACEB	1.1994	2	WACEB	1.1970	2
	CUBISTA	1.3259	3	CUBISTA	1.3273	3	CUBISTA	1.326	3	CUBISTA	1.3254	3	CUBISTA	1.3252	3
	MUSCL	1.3819	4	MUSCL	1.3909	4	MUSCL	1.4054	4	MUSCL	1.4172	4	MUSCL	1.4237	4
	UMIST	1.4418	5	UMIST	1.4515	5	UMIST	1.4603	5	UMIST	1.4697	5	UMIST	1.4753	5
	CLAM	1.4675	6	CLAM	1.4788	6	CLAM	1.4933	6	CLAM	1.5067	6	CLAM	1.5146	6
	MINMOD	2.0710	7	MINMOD	2.0859	7	MINMOD	2.0975	7	MINMOD	2.1106	7	MINMOD	2.1187	7
	SUPERC	2.1027	8	SUPERC	2.1201	8	SUPERC	2.1321	8	SUPERC	2.1457	8	SUPERC	2.147	8
	SUPERBEE	2.1151	9	SUPERBEE	2.1295	9	SUPERBEE	2.1427	9	SUPERBEE	2.1551	9	SUPERBEE	2.1623	9
	OSHER	2.5553	10	OSHER	2.5765	10	OSHER	2.6089	10	OSHER	2.6359	10	OSHER	2.6519	10

Tablo 5.16 (Devam): Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

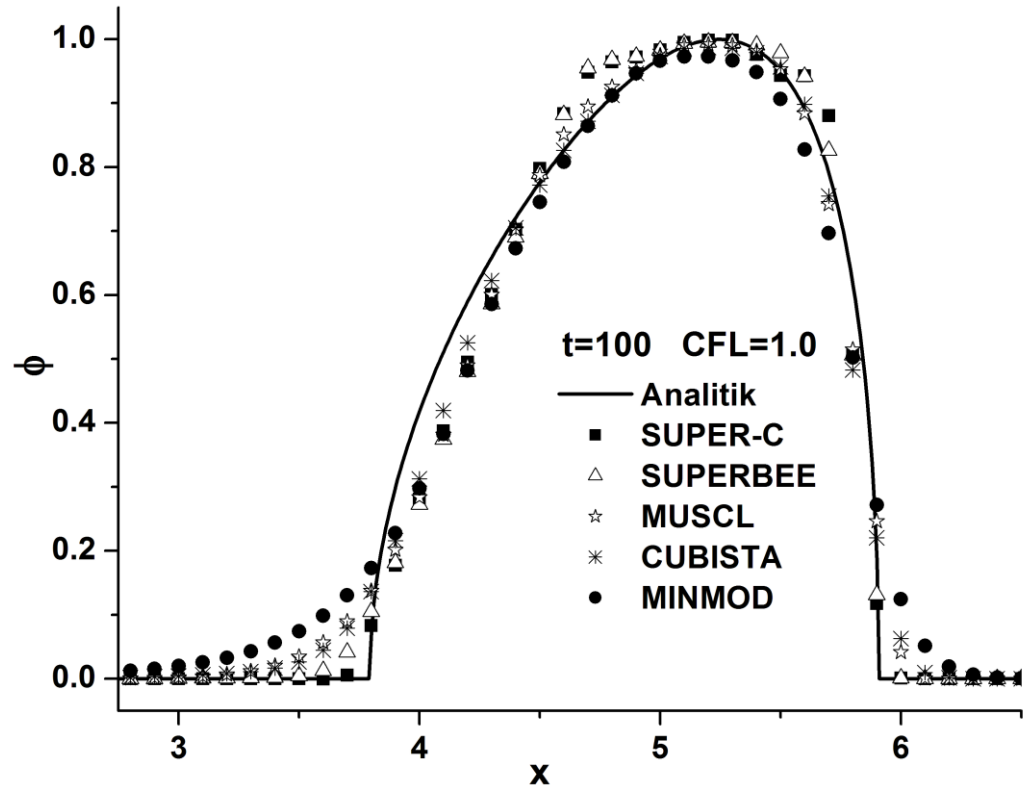
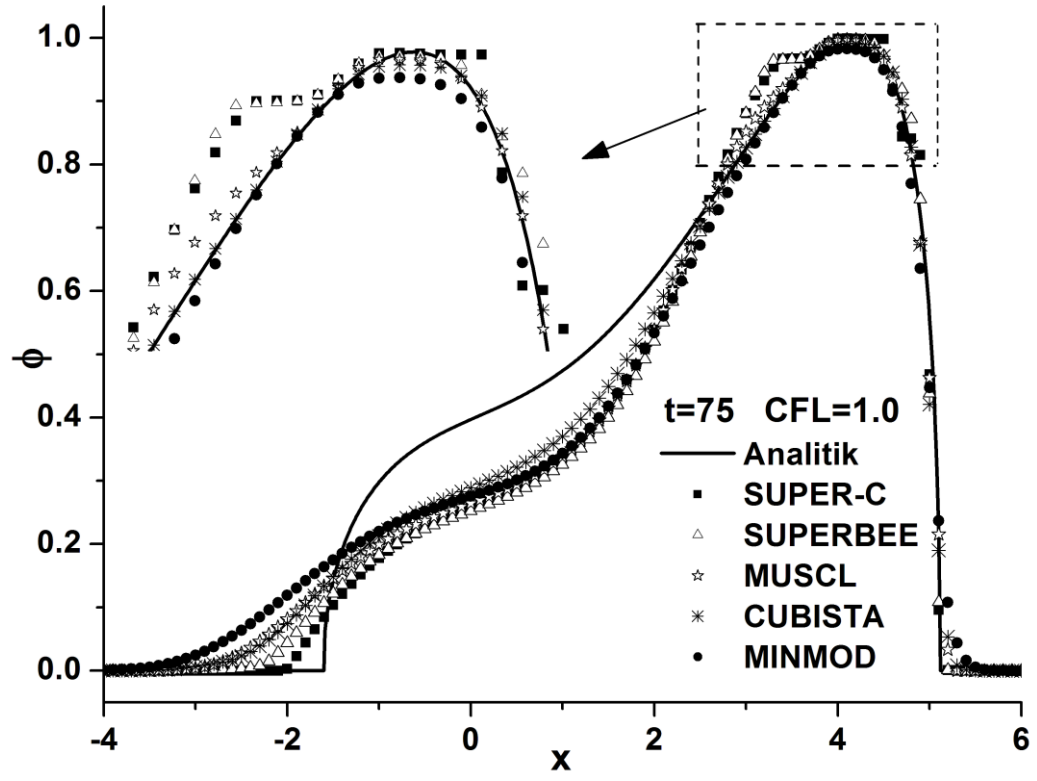
$\tau = 5$	CFL = 1.0			CFL = 0.75			CFL = 0.5			CFL = 0.25			CFL = 0.1		
	WACEB	KOREN	CUBISTA	WACEB	KOREN	CUBISTA	WACEB	KOREN	CUBISTA	WACEB	KOREN	CUBISTA	WACEB	KOREN	CUBISTA
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	4.0113	4.4607	4.5234	3.9654	4.4411	4.496	4.0514	4.5135	4.5689	4.0723	4.5404	4.5925	4.0373	4.5089	4.5587
2	5.5141	5.7276	5.7652	5.5318	5.7283	5.7332	5.5836	5.7882	5.836	5.6183	5.793	5.8185	5.5962	5.7563	5.7947
3	5.8008	6.2087	6.2228	5.815	6.1884	6.2312	5.87	6.2523	6.2709	5.9047	6.2733	6.2949	5.8829	6.2418	6.2684
4	8.1044	8.1236	8.1236	8.1236	8.1236	8.1236	8.1572	8.1572	8.1572	8.1828	8.1828	8.1828	8.1582	8.1582	8.1582
$\tau = 10$	CFL = 1.0			CFL = 0.75			CFL = 0.5			CFL = 0.25			CFL = 0.1		
	WACEB	KOREN	CUBISTA	WACEB	KOREN	CUBISTA	WACEB	KOREN	CUBISTA	WACEB	KOREN	CUBISTA	WACEB	KOREN	CUBISTA
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0.9107	0.9713	1.0098	0.9148	0.9784	1.0146	0.9178	0.9855	1.0197	0.9216	0.9929	1.0250	0.9240	0.9973	1.0280
2	1.1700	1.2018	1.2701	1.1639	1.2137	1.2644	1.1844	1.2273	1.2820	1.1988	1.2402	1.2876	1.2017	1.2475	1.2863
3	1.3726	1.4974	2.0192	1.3860	1.5102	2.0348	1.4005	1.5240	2.0491	1.4146	1.5378	2.0641	1.4227	1.5459	2.0732
4	2.2692	2.2692	2.2692	2.2843	2.2843	2.2843	2.3001	2.3001	2.3001	2.3152	2.3152	2.3152	2.3239	2.3239	2.3239

Tablo 5.16 (Devam): Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

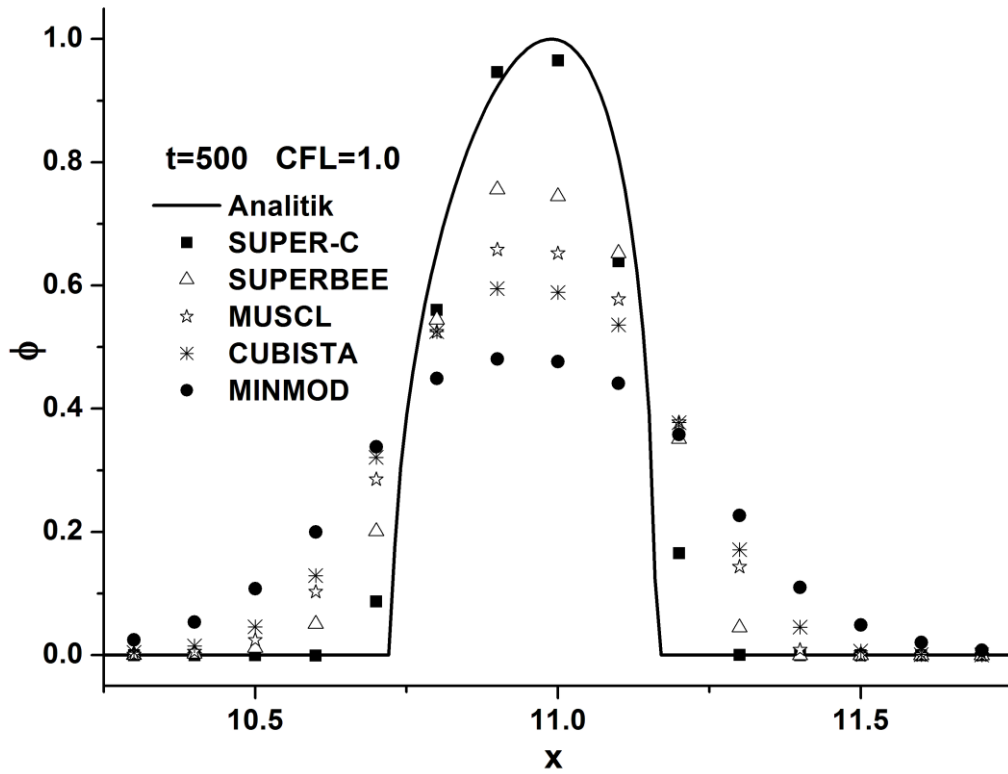
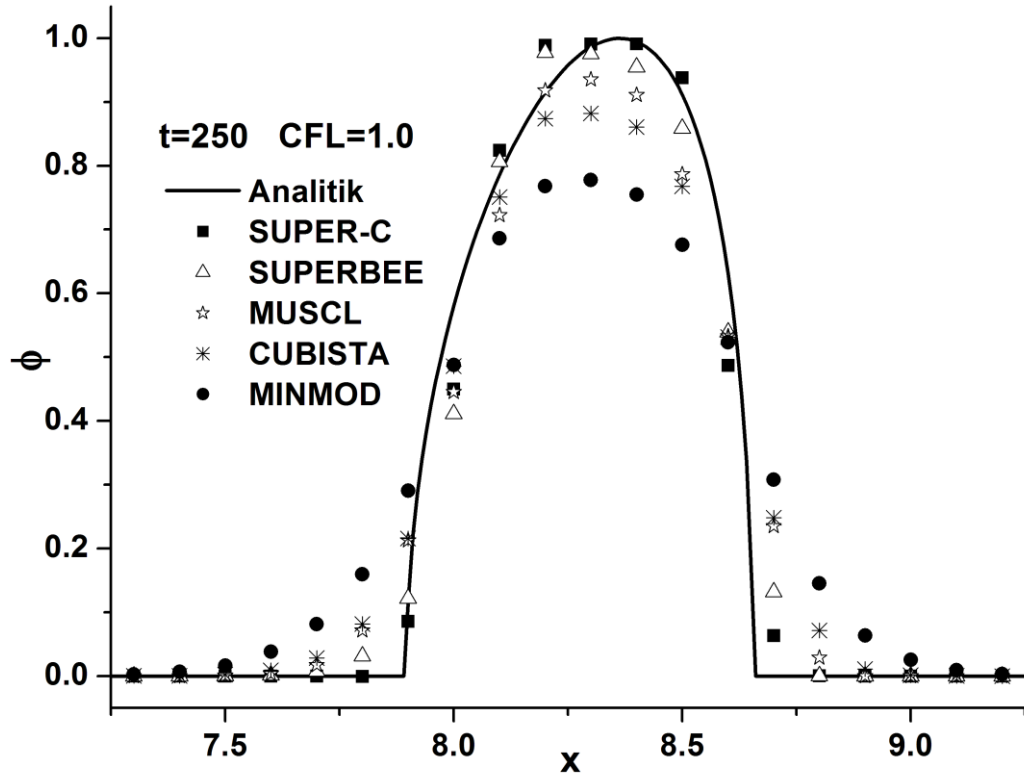
t=250	CFL=1.0			CFL=0.75			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1		
	1	SUPERC	0.5186	1	SUPERC	0.5218	1	SUPERC	0.5186	1	SUPERC	0.5183	1	SUPERC	0.5181
	2	SUPERBEE	0.6291	2	SUPERBEE	0.623	2	SUPERBEE	0.6287	2	SUPERBEE	0.6282	2	SUPERBEE	0.6253
	3	KOREN	0.9672	3	KOREN	0.9625	3	KOREN	0.97	3	KOREN	0.9713	3	KOREN	0.9696
	4	MUSCL	1.016	4	WACEB	1.0108	4	WACEB	1.0174	4	WACEB	1.018	4	WACEB	1.0159
	5	WACEB	1.0161	5	MUSCL	1.0128	5	MUSCL	1.0226	5	MUSCL	1.0259	5	MUSCL	1.0252
	6	CUBISTA	1.2078	6	CUBISTA	1.2036	6	CUBISTA	1.2119	6	CUBISTA	1.2139	6	CUBISTA	1.2126
	7	CLAM	1.3158	7	CLAM	1.314	7	CLAM	1.3252	7	CLAM	1.3299	7	CLAM	1.3301
	8	UMIST	1.5546	8	UMIST	1.5541	8	UMIST	1.5664	8	UMIST	1.5722	8	UMIST	1.5731
	9	OSHER	1.8009	9	OSHER	1.8006	9	OSHER	1.8142	9	OSHER	1.8209	9	OSHER	1.822
	10	MINMOD	2.1704	10	MINMOD	2.1711	10	MINMOD	2.1843	10	MINMOD	2.1913	10	MINMOD	2.1929
	t=500	CFL=1.0			CFL=0.75			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1	
1		SUPERC	0.5740	1	SUPERC	0.5730	1	SUPERC	0.5724	1	SUPERC	0.5726	1	SUPERC	0.5677
2		SUPERBEE	1.3508	2	SUPERBEE	1.3500	2	SUPERBEE	1.3514	2	SUPERBEE	1.3516	2	SUPERBEE	1.3514
3		KOREN	1.8955	3	KOREN	1.8970	3	KOREN	1.8987	3	KOREN	1.9003	3	KOREN	1.9011
4		MUSCL	1.9226	4	MUSCL	1.9250	4	MUSCL	1.9281	4	MUSCL	1.9308	4	MUSCL	1.9324
5		WACEB	1.9562	5	WACEB	1.9576	5	WACEB	1.9587	5	WACEB	1.9599	5	WACEB	1.9606
6		CUBISTA	2.2600	6	CUBISTA	2.2620	6	CUBISTA	2.2638	6	CUBISTA	2.2657	6	CUBISTA	2.2669
7		CLAM	2.3103	7	CLAM	2.3131	7	CLAM	2.3162	7	CLAM	2.3191	7	CLAM	2.3209
8		UMIST	2.4620	8	UMIST	2.4654	8	UMIST	2.4689	8	UMIST	2.4724	8	UMIST	2.4743
9		OSHER	2.7152	9	OSHER	2.7182	9	OSHER	2.7222	9	OSHER	2.7258	9	OSHER	2.7278
10		MINMOD	3.0559	10	MINMOD	3.0595	10	MINMOD	3.0622	10	MINMOD	3.0653	10	MINMOD	3.0673



Şekil 5.22: Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi



Şekil 5.22 (Devam): Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemünde profil şeklinin zamanla değişimi



Şekil 5.22 (Devam): Yarı-elips şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi

5.2.2.3. Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması

Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin, farklı zaman ve farklı CFL sayıları için yapılan çözümlerinin hataları Tablo 5.17’de verilmiştir. Tüm zamanlar için yaklaşımların sonuçları Şekil 5.23’te analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Şekil 5.23’ten görülebileceği gibi yaklaşımlar, skaler profilin ayakları ve tepesi haricindeki bölgede birbirine yakın bir davranış göstermektedir. SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımları skaler profil sol ve sağ ayaklarında bir daralma, skaler profil tepesinde ise bir dikleştirme meydana getirmektedir. Bu yaklaşımlar OSHER ve MINMOD yaklaşımlarından sonra hata miktarı en yüksek olan yaklaşımlardır. MUSCL ve CUBISTA yaklaşımları skaler profilin ayaklarını oldukça iyi çözmekte, skaler profil tepesinde ise hafif bir çökme meydana getirmektedir. MUSCL yaklaşımı KOREN’den sonra analitik çözüme en yakın sonuç veren yaklaşım olmaktadır.

Şekil 5.23’te $t=50$ anındaki sinüs-kare skaler profil ile Şekil 5.22’de aynı andaki yarı-elips skaler profil karşılaştırıldığında, analitik çözümlerin ve yaklaşımlar ile elde edilen skaler profillerin çok benzer olduğu görülmektedir. En büyük farklılık SUPER-C yaklaşımının yarı-elips skaler profilinin sol ve üst taraflarında oluşturduğu basamağı sinüs-kare skaler profilinde oluşturamamasıdır.

Şekil 5.23’ten görülebileceği gibi (büyütülerek verilen bölge), $t=75$ anında skaler profilin sol tarafını şekilde gösterilen yaklaşımlar içerisinde en iyi CUBISTA yaklaşımı yakalamaktadır. SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımları skaler profilin sol ayağını ciddi ölçüde sıkıştırmakta, skaler profil tepesini ise kırpmaktadır. $t=100$ anına kadar bütün zamanlarda en az hata içeren yaklaşım KOREN olmaktadır. $t=100$ anında bu yaklaşımı SUPERBEE izlemekte, SUPER-C ise bu yaklaşımları takip eden WACEB ve MUSCL yaklaşımlarından sonra gelmektedir. Ancak bu yaklaşımlar arasındaki hatanın çok küçük değerlerde olduğu gözden kaçırılmamalıdır. Zamanın artmasıyla daha önceki problemlerde olduğu gibi SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımları sıralamada ilk sıraya yerleşmektedir. MINMOD ve OSHER bütün zamanlarda en çok hata içeren yaklaşımlar olmaktadır. $t=500$ anındaki skaler profil,

aynı zamandaki yarı-elips ile karşılaştırıldığında, bütün yaklaşımların sinüs-kare skaler profilinde tepe bölgesini daha fazla çökerttiği görülmektedir. Örneğin yarı-elips skaler profilinde SUPER-C ile elde edilen skaler profilin tepe noktası 0.97 değerinde iken, sinüs-kare skaler profilinde bu değer 0.67'dir. MINMOD yaklaşımında ise yarı-elips skaler profilinde 0.6 olan bu değer, sinüs-kare skaler profilinde 0.3'e kadar inmektedir.

Tablo 5.17: Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

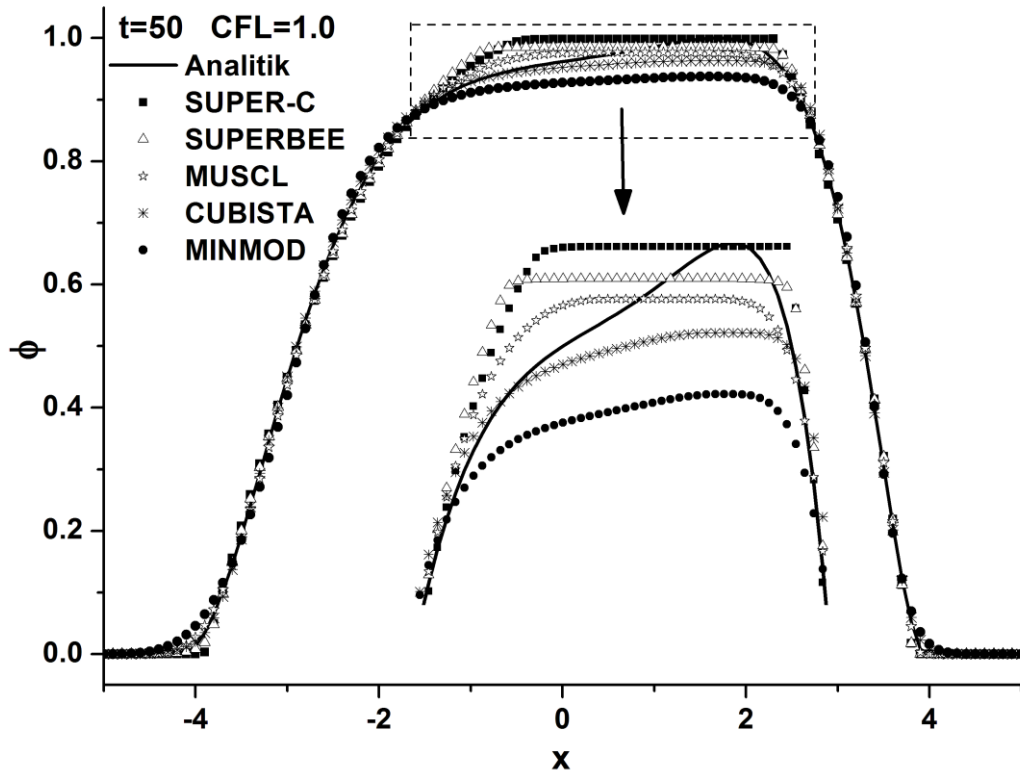
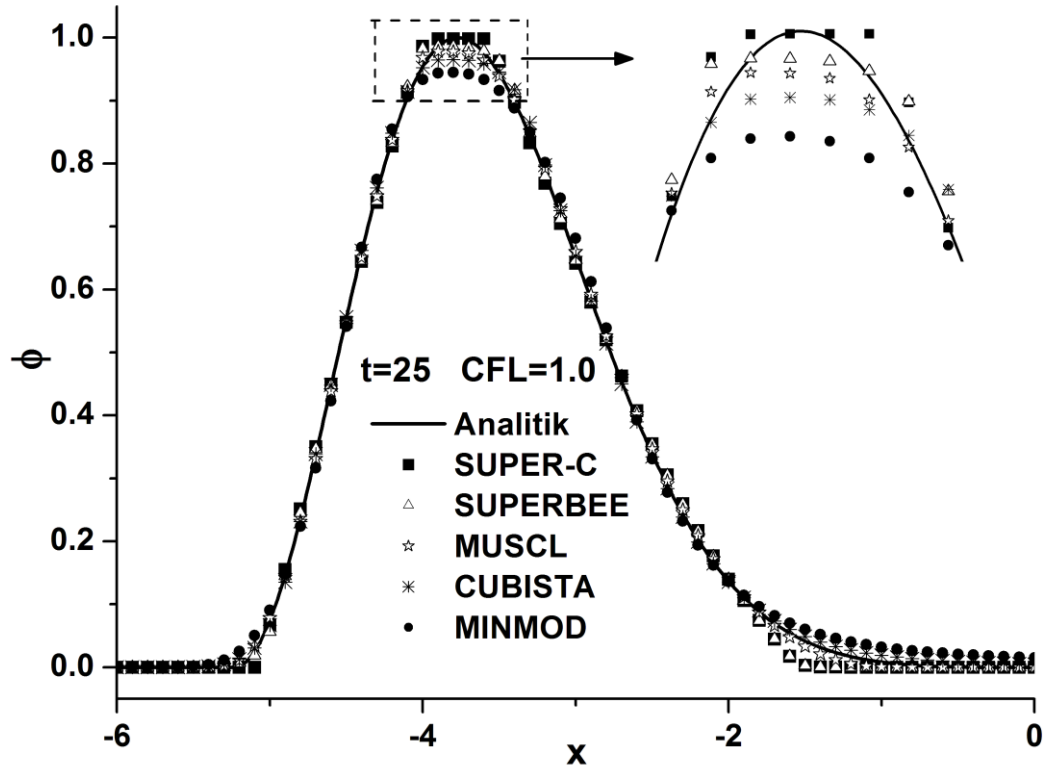
I=25	CFL=1.0			CFL=0.75			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1		
	1	KOREN	0.1964	1	KOREN	0.1891	1	KOREN	0.1837	1	KOREN	0.1783	1	KOREN	0.1752
	2	MUSCL	0.3487	2	MUSCL	0.3602	2	WACEB	0.3540	2	WACEB	0.3445	2	WACEB	0.3378
	3	WACEB	0.3713	3	WACEB	0.3612	3	MUSCL	0.3737	3	MUSCL	0.3860	3	MUSCL	0.3929
	4	CLAM	0.4108	4	CLAM	0.4108	4	CLAM	0.4142	4	CLAM	0.4192	4	CLAM	0.4239
	5	CUBISTA	0.4630	5	CUBISTA	0.4554	5	CUBISTA	0.4496	5	CUBISTA	0.4419	5	CUBISTA	0.4366
	6	UMIST	0.5398	6	UMIST	0.5369	6	UMIST	0.5373	6	UMIST	0.5353	6	UMIST	0.5332
	7	SUPERBEE	0.5433	7	SUPERBEE	0.5451	7	SUPERBEE	0.5517	7	SUPERBEE	0.5555	7	SUPERBEE	0.5565
	8	SUPERC	0.5972	8	SUPERC	0.6014	8	SUPERC	0.6096	8	SUPERC	0.6153	8	SUPERC	0.6178
	9	OSHER	0.9990	9	OSHER	1.0096	9	OSHER	1.0255	9	OSHER	1.0381	9	OSHER	1.0444
	10	MINMOD	1.1325	10	MINMOD	1.1372	10	MINMOD	1.1484	10	MINMOD	1.1556	10	MINMOD	1.1590
	I=50	CFL=1.0			CFL=0.75			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1	
1		KOREN	0.4731	1	KOREN	0.4730	1	KOREN	0.4661	1	KOREN	0.4630	1	KOREN	0.4627
2		WACEB	0.7391	2	WACEB	0.7356	2	WACEB	0.7201	2	WACEB	0.7095	2	WACEB	0.7039
3		MUSCL	0.8770	3	MUSCL	0.8935	3	MUSCL	0.9153	3	MUSCL	0.9332	3	MUSCL	0.9427
4		CUBISTA	0.9793	4	CUBISTA	0.9844	4	CUBISTA	0.9739	4	CUBISTA	0.9702	4	CUBISTA	0.9692
5		CLAM	1.1322	5	SUPERBEE	1.1422	5	SUPERBEE	1.1580	5	SUPERBEE	1.1653	5	SUPERBEE	1.1672
6		SUPERBEE	1.1435	6	CLAM	1.1523	6	CLAM	1.1687	6	CLAM	1.1881	6	CLAM	1.2006
7		UMIST	1.2057	7	UMIST	1.2219	7	UMIST	1.2225	7	UMIST	1.2309	7	UMIST	1.2372
8		SUPERC	1.3269	8	SUPERC	1.3364	8	SUPERC	1.3590	8	SUPERC	1.3726	8	SUPERC	1.3807
9		OSHER	1.9813	9	OSHER	1.9928	9	OSHER	2.0141	9	OSHER	2.0309	9	OSHER	2.0399
10		MINMOD	2.2746	10	MINMOD	2.3073	10	MINMOD	2.3152	10	MINMOD	2.3348	10	MINMOD	2.3489

Tablo 5.17 (Devam): Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

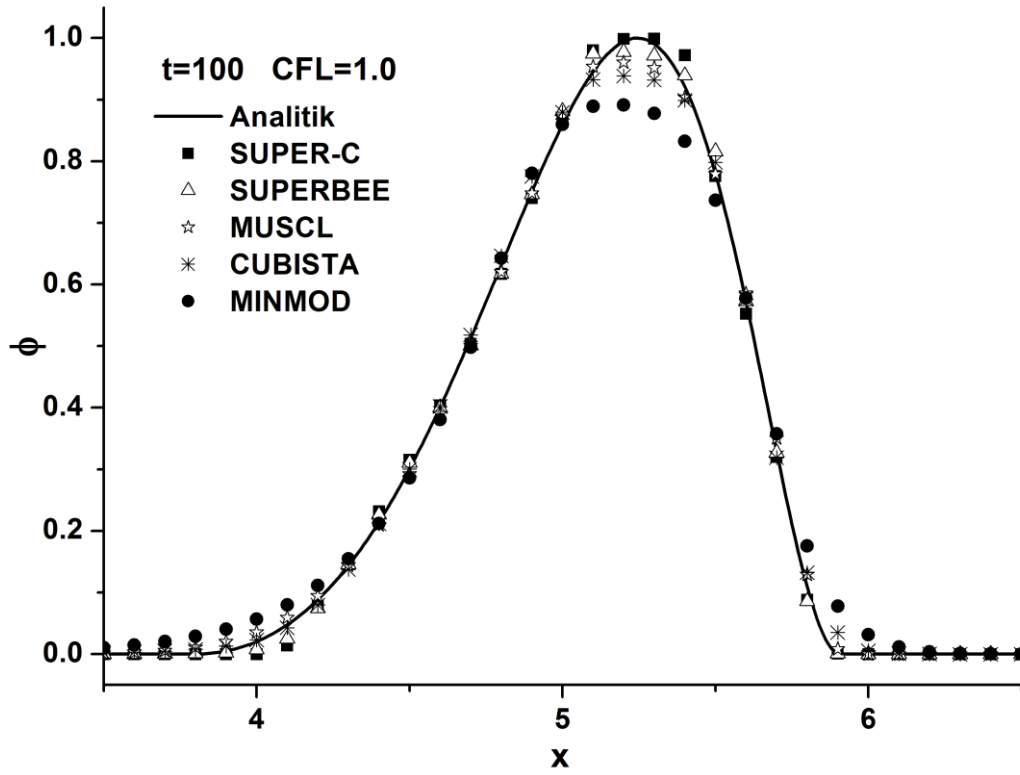
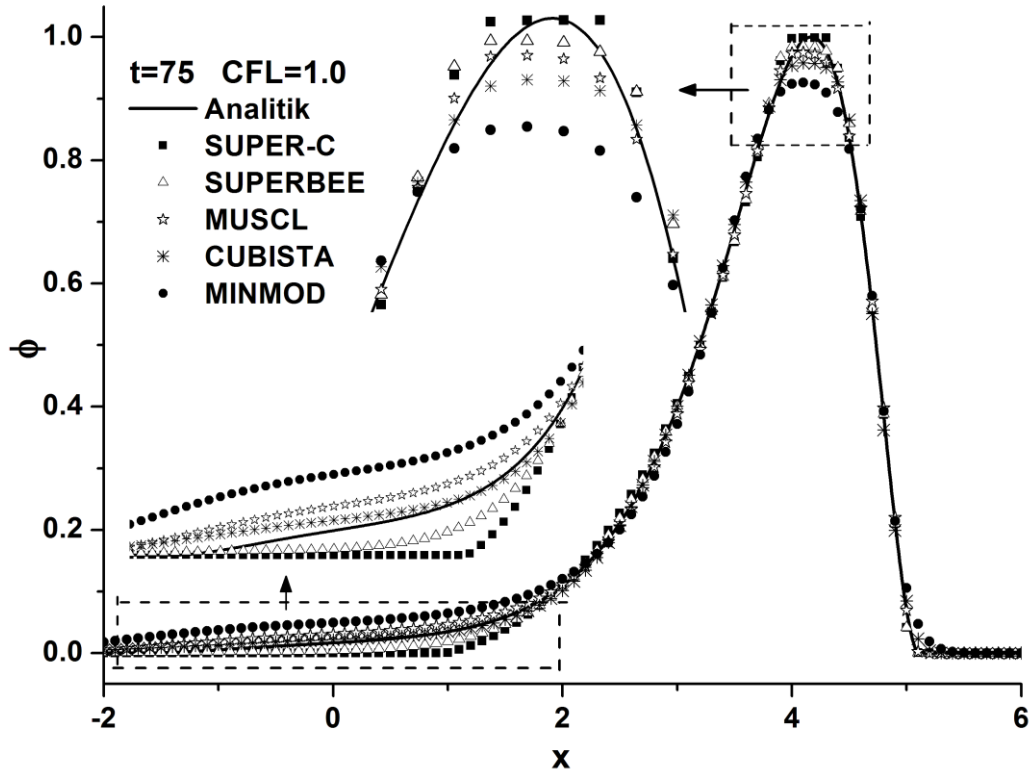
t=75	CFL=1.0				CFL=0.75				CFL=0.5				CFL=0.25				CFL=0.1			
	1	KOREN	0.3208	1	KOREN	0.3208	1	KOREN	0.3340	1	KOREN	0.3410	1	KOREN	0.3410	1	KOREN	0.3450		
	2	WACEB	0.3739	2	WACEB	0.3739	2	WACEB	0.3622	2	WACEB	0.3568	2	WACEB	0.3568	2	WACEB	0.3536		
	3	CUBISTA	0.6137	3	CUBISTA	0.6137	3	CUBISTA	0.6181	3	CUBISTA	0.6203	3	CUBISTA	0.6203	3	CUBISTA	0.6214		
	4	SUPERBEE	0.6549	4	SUPERBEE	0.6549	4	SUPERBEE	0.6608	4	SUPERBEE	0.6633	4	SUPERBEE	0.6633	4	SUPERBEE	0.6653		
	5	MUSCL	0.7506	5	MUSCL	0.7506	5	MUSCL	0.7843	5	MUSCL	0.8016	5	MUSCL	0.8016	5	MUSCL	0.8118		
	6	SUPERC	0.9153	6	SUPERC	0.9153	6	SUPERC	0.9244	6	SUPERC	0.9279	6	SUPERC	0.9279	6	SUPERC	0.9331		
	7	CLAM	1.0996	7	CLAM	1.0996	7	CLAM	1.1333	7	CLAM	1.1508	7	CLAM	1.1508	7	CLAM	1.1614		
	8	UMIST	1.3886	8	UMIST	1.3886	8	UMIST	1.4280	8	UMIST	1.4477	8	UMIST	1.4477	8	UMIST	1.4592		
	9	MINMOD	2.0079	9	MINMOD	2.0079	9	MINMOD	2.0487	9	MINMOD	2.0702	9	MINMOD	2.0702	9	MINMOD	2.0830		
	10	OSHER	2.0474	10	OSHER	2.0474	10	OSHER	2.0838	10	OSHER	2.1015	10	OSHER	2.1015	10	OSHER	2.1123		
	t=100	CFL=1.0				CFL=0.75				CFL=0.5				CFL=0.25				CFL=0.1		
1		KOREN	0.1938	1	KOREN	0.1920	1	KOREN	0.1915	1	KOREN	0.1909	1	KOREN	0.1909	1	KOREN	0.1905		
2		SUPERBEE	0.2810	2	SUPERBEE	0.2832	2	SUPERBEE	0.2843	2	SUPERBEE	0.2849	2	SUPERBEE	0.2849	2	WACEB	0.2842		
3		WACEB	0.2959	3	WACEB	0.2923	3	WACEB	0.2896	3	WACEB	0.2864	3	WACEB	0.2864	3	SUPERBEE	0.2849		
4		MUSCL	0.2967	4	MUSCL	0.3026	4	MUSCL	0.3100	4	SUPERC	0.3149	4	SUPERC	0.3149	4	SUPERC	0.3173		
5		SUPERC	0.3050	5	SUPERC	0.3084	5	SUPERC	0.3116	5	MUSCL	0.3169	5	MUSCL	0.3169	5	MUSCL	0.3208		
6		CUBISTA	0.3701	6	CUBISTA	0.3706	6	CUBISTA	0.3713	6	CUBISTA	0.3722	6	CUBISTA	0.3722	6	CUBISTA	0.3727		
7		CLAM	0.4748	7	CLAM	0.4821	7	CLAM	0.4882	7	CLAM	0.4948	7	CLAM	0.4948	7	CLAM	0.4991		
8		UMIST	0.6172	8	UMIST	0.6257	8	UMIST	0.6344	8	UMIST	0.6429	8	UMIST	0.6429	8	UMIST	0.648		
9		OSHER	0.8656	9	OSHER	0.8751	9	OSHER	0.8829	9	OSHER	0.8911	9	OSHER	0.8911	9	OSHER	0.8962		
10		MINMOD	0.9725	10	MINMOD	0.9833	10	MINMOD	0.9927	10	MINMOD	1.0030	10	MINMOD	1.0030	10	MINMOD	1.0096		

Tablo 5.17 (Devam): Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

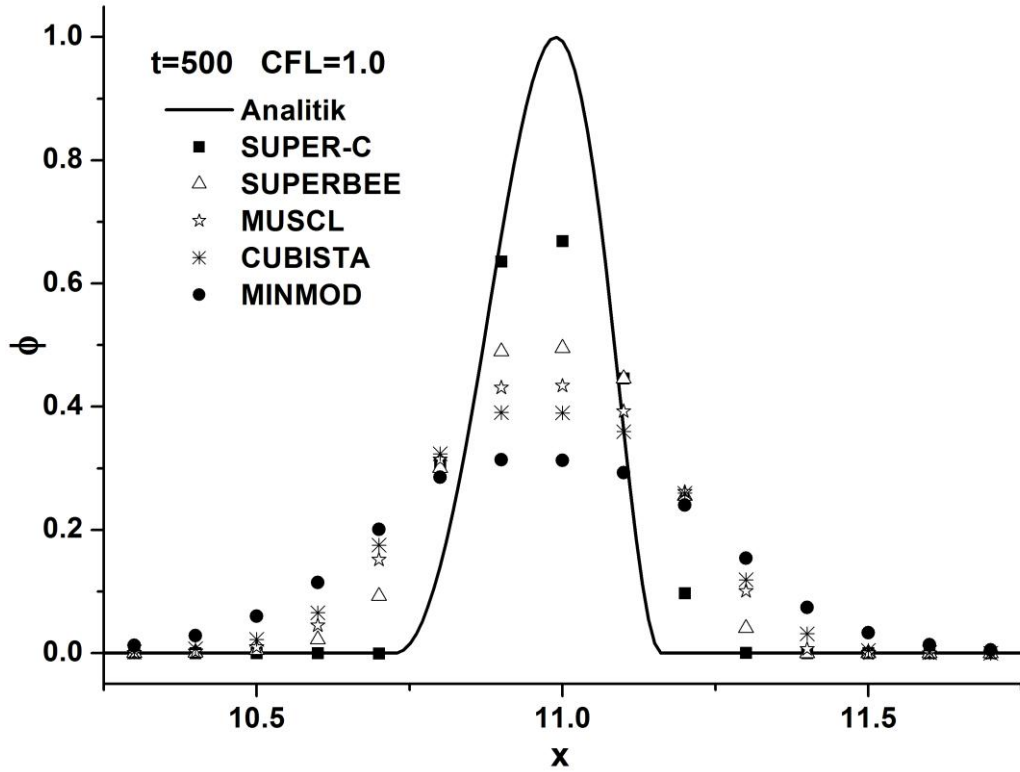
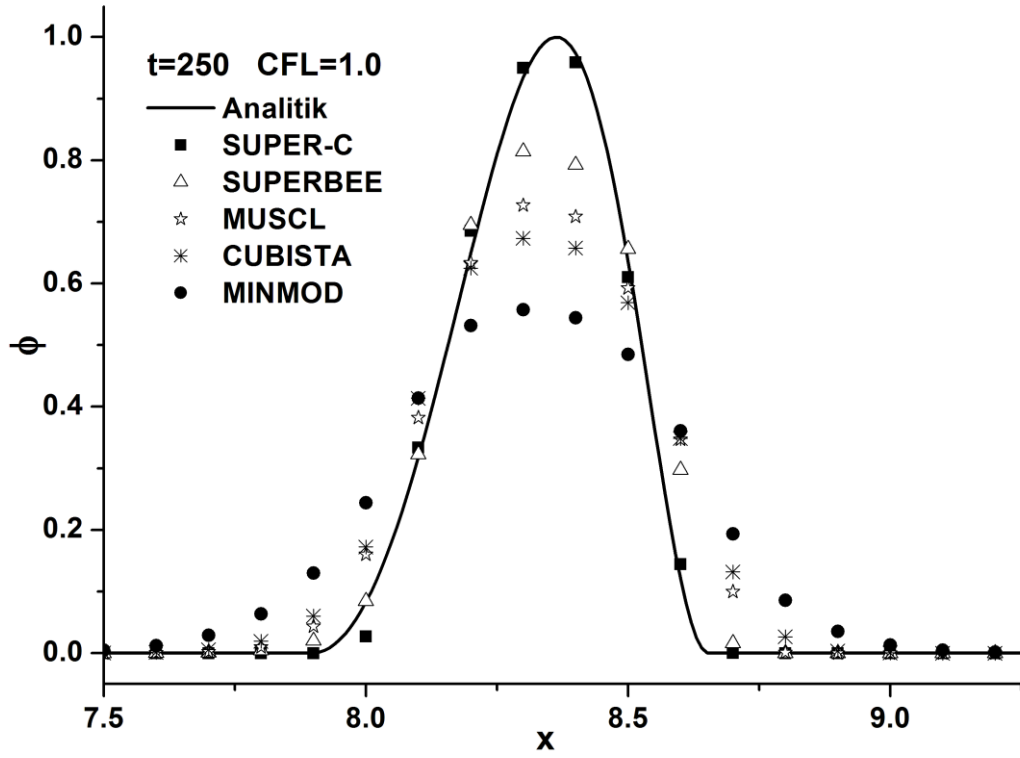
	CFL =1.0				CFL =0.75				CFL =0.5				CFL =0.25				CFL =0.1			
	1	SUPERC	0.1914	1	SUPERC	0.1877	1	SUPERC	0.1864	1	SUPERC	0.1835	1	SUPERC	0.1835	1	SUPERC	0.1821	1	SUPERC
	2	SUPERBEE	0.5924	2	SUPERBEE	0.5921	2	SUPERBEE	0.5901	2	SUPERBEE	0.5889	2	SUPERBEE	0.5889	2	SUPERBEE	0.5885	2	SUPERBEE
t=250	3	KOREN	1.0234	3	KOREN	1.0236	3	KOREN	1.0262	3	KOREN	1.0276	3	KOREN	1.0276	3	KOREN	1.0288	3	KOREN
	4	MUSCL	1.0578	4	MUSCL	1.0619	4	MUSCL	1.0670	4	MUSCL	1.0716	4	MUSCL	1.0716	4	MUSCL	1.0742	4	MUSCL
	5	WACEB	1.0781	5	WACEB	1.0778	5	WACEB	1.0799	5	WACEB	1.0808	5	WACEB	1.0808	5	WACEB	1.0808	5	WACEB
	6	CUBISTA	1.3327	6	CUBISTA	1.3353	6	CUBISTA	1.3386	6	CUBISTA	1.3415	6	CUBISTA	1.3415	6	CUBISTA	1.3431	6	CUBISTA
	7	CLAM	1.3985	7	CLAM	1.4029	7	CLAM	1.4083	7	CLAM	1.4132	7	CLAM	1.4132	7	CLAM	1.4160	7	CLAM
	8	UMIST	1.5609	8	UMIST	1.5660	8	UMIST	1.5721	8	UMIST	1.5777	8	UMIST	1.5777	8	UMIST	1.5809	8	UMIST
	9	OSHER	1.7723	9	OSHER	1.7774	9	OSHER	1.7848	9	OSHER	1.7910	9	OSHER	1.7910	9	OSHER	1.7943	9	OSHER
	10	MINMOD	2.1495	10	MINMOD	2.1550	10	MINMOD	2.1611	10	MINMOD	2.1669	10	MINMOD	2.1669	10	MINMOD	2.1702	10	MINMOD
	CFL =1.0				CFL =0.75				CFL =0.5				CFL =0.25				CFL =0.1			
t=500	1	SUPERC	0.7141	1	SUPERC	0.7171	1	SUPERC	0.7149	1	SUPERC	0.7149	1	SUPERC	0.7149	1	SUPERC	0.7260	1	SUPERC
	2	SUPERBEE	1.3471	2	SUPERBEE	1.3511	2	SUPERBEE	1.3483	2	SUPERBEE	1.3489	2	SUPERBEE	1.3489	2	SUPERBEE	1.3499	2	SUPERBEE
	3	MUSCL	1.5887	3	MUSCL	1.5937	3	MUSCL	1.5912	3	MUSCL	1.5924	3	MUSCL	1.5924	3	MUSCL	1.5939	3	MUSCL
	4	KOREN	1.5925	4	KOREN	1.5972	4	KOREN	1.5943	4	KOREN	1.5951	4	KOREN	1.5951	4	KOREN	1.5964	4	KOREN
	5	WACEB	1.6224	5	WACEB	1.6270	5	WACEB	1.6239	5	WACEB	1.6246	5	WACEB	1.6246	5	WACEB	1.6258	5	WACEB
	6	CUBISTA	1.7642	6	CUBISTA	1.7644	6	CUBISTA	1.7666	6	CUBISTA	1.7678	6	CUBISTA	1.7678	6	CUBISTA	1.7679	6	CUBISTA
	7	CLAM	1.7760	7	CLAM	1.7748	7	CLAM	1.7795	7	CLAM	1.7812	7	CLAM	1.7812	7	CLAM	1.7816	7	CLAM
	8	UMIST	1.8470	8	UMIST	1.8460	8	UMIST	1.8510	8	UMIST	1.8530	8	UMIST	1.8530	8	UMIST	1.8535	8	UMIST
	9	OSHER	1.9569	9	OSHER	1.9556	9	OSHER	1.9610	9	OSHER	1.9630	9	OSHER	1.9630	9	OSHER	1.9636	9	OSHER
	10	MINMOD	2.2063	10	MINMOD	2.2050	10	MINMOD	2.2098	10	MINMOD	2.2116	10	MINMOD	2.2116	10	MINMOD	2.2121	10	MINMOD



Şekil 5.23: Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi



Şekil 5.23 (Devam): Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi



Şekil 5.23 (Devam): Sinüs-kare şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi

5.2.2.4. Üçgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması

Üçgen şeklinde skaler bir profilin farklı zaman ve farklı CFL sayıları için yapılan çözümlerinin hataları Tablo 5.18’de verilmiştir. Her bir zaman için seçilen yaklaşımların sonuçları Şekil 5.24’te karşılaştırılmıştır. $t=25$ anında skaler profilin sol ayağındaki çözümlerin birbirine yakın olduğu, en çok hatanın skalerin profil sağ ayağında ve tepesinde olduğu görülmektedir. Skaler profilin sağ ayağında SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarının kompresif, diğer yaklaşımların ise difüzif bir davranış gösterdiği görülmektedir. Skaler profilin bu bölgesini en iyi yakalayan yaklaşım MUSCL yaklaşımıdır. $t=25$ anında dahi hiçbir yaklaşım skaler profilin tepe noktasını yakalayamamaktadır. SUPER-C profilin tepe noktasını kırparak düzleştirmesine rağmen en az hata içeren yaklaşım olmaktadır. Bu yaklaşımı SUPERBEE ve MUSCL izlemektedir. En çok hata içeren yaklaşım MINMOD olmakta, bu yaklaşımı UMIST ve CUBISTA yaklaşımları takip etmektedir.

Şekil 5.24’ten görüleceği gibi $t=50$ anında bütün yaklaşımlar skaler profilin tepe noktasını keserek düzleştirmektedir. En az düzleştirme SUPER-C yaklaşımında olmakta, bu yaklaşım ile elde edilen skaler profilin maksimum değeri 0.96 olmaktadır. SUPERBEE yaklaşımındaki düzleştirme çok daha belirgindir. SUPERBEE yaklaşımı hata sıralamasında ancak 5. sırada olmaktadır. En çok yayılma ve en çok hata beklenildiği gibi MINMOD yaklaşımında olmaktadır.

$t=75$ anında yayılmanın çok olduğu skaler profil sol tarafında ve yüksek gradyenlerin olduğu tepe kısmında yaklaşımlar arasındaki fark, Şekil 5.24’te büyütülerek verilen kısımda görülebilir. Şekilden de görüleceği gibi SUPER-C skaler profilin sol ayağını biraz sıkıştırmakla beraber analitik çözüme en benzer sonucu veren yaklaşım olmaktadır. Hiçbir yaklaşım skaler profilin tepe bölgesindeki maksimum değeri yakalayamamaktadır. Yaklaşımların bu bölgedeki davranışları ve maksimum değeri $t=25$ ’deki ile hemen hemen aynıdır.

$t=100$ anında tekrar daralarak başlangıç anındaki formuna benzemeye başlayan skaler profilde, yaklaşımlar arasındaki farkın azaldığı görülmektedir. Şekil 5.24’ten

görülebileceği gibi SUPER-C yaklaşımı skaler profilin tepe noktasında hafif bir düzleştirme haricinde analitik çözümü (profili) oldukça iyi yakalamaktadır. Ayrıca şekilden skaler profilin ayak ve tepe bölgesi haricinde yaklaşımların birbirine yakın sonuçlar verdiği, MINMOD yaklaşımının ise aşırı difüzyif özelliği ile bu yaklaşımlardan ayrıldığı görülmektedir. $t=250$ ve $t=500$ anlarındaki skaler profiller incelendiğinde artan zamanla, yaklaşımlar ile elde edilen skaler profillerde maksimum değerlerin düşmeye başladığı görülmektedir. Bu anlarda yaklaşımların sıralamadaki yeri neredeyse aynı kalmaktadır. Bütün zamanlardaki hatalar incelendiğinde dikdörtgen skaler profilde olduğu gibi SUPER-C ile SUPERBEE yaklaşımlarının tüm zamanlarda en az hata içeren iki yaklaşım olduğu görülmektedir. Hata değerleri arasında çok küçük farklar olan KOREN, MUSCL ve WACEB bir grup, CUBISTA, CLAM ve UMIST ise başka bir grup oluşturarak bu yaklaşımları izlemektedir. En çok hata içeren yaklaşımlar ise MINMOD ve OSHER olmaktadır.

Yaklaşımların bütün skaler profillerdeki hataları incelendiğinde yaklaşımların yarı-elips ve sinüs-kare skaler profillerindeki sıralamasının zamanla değiştiği, dikdörtgen ve üçgen skaler profillerde ise sıralamadaki yerlerinin neredeyse değişmediği görülmektedir. Bütün skaler profillerin hatalarının sıralandığı Tablo 5.15 - Tablo 5.18 incelendiğinde, yaklaşımların $t=250$ ve $t=500$ anındaki sıralamasının bütün profillerde aynı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, $t \rightarrow \infty$ olduğunda bütün skaler profillerdeki sıralamaların aynı olacağı söylenebilir.

Tablo 5.18: Üçgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

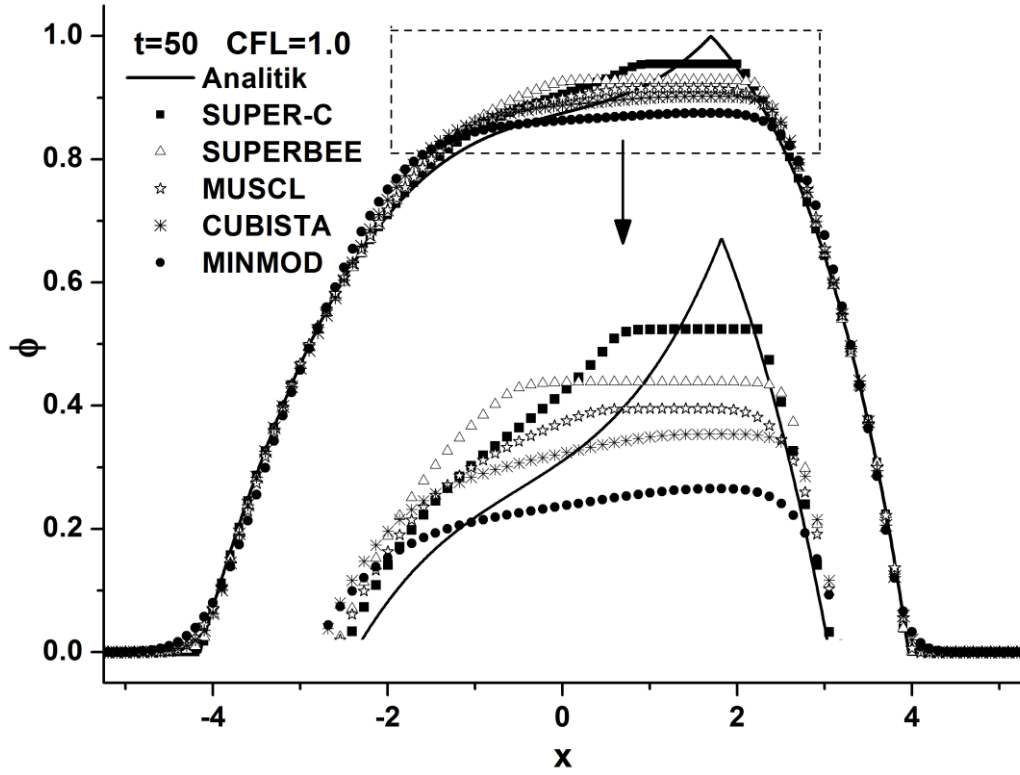
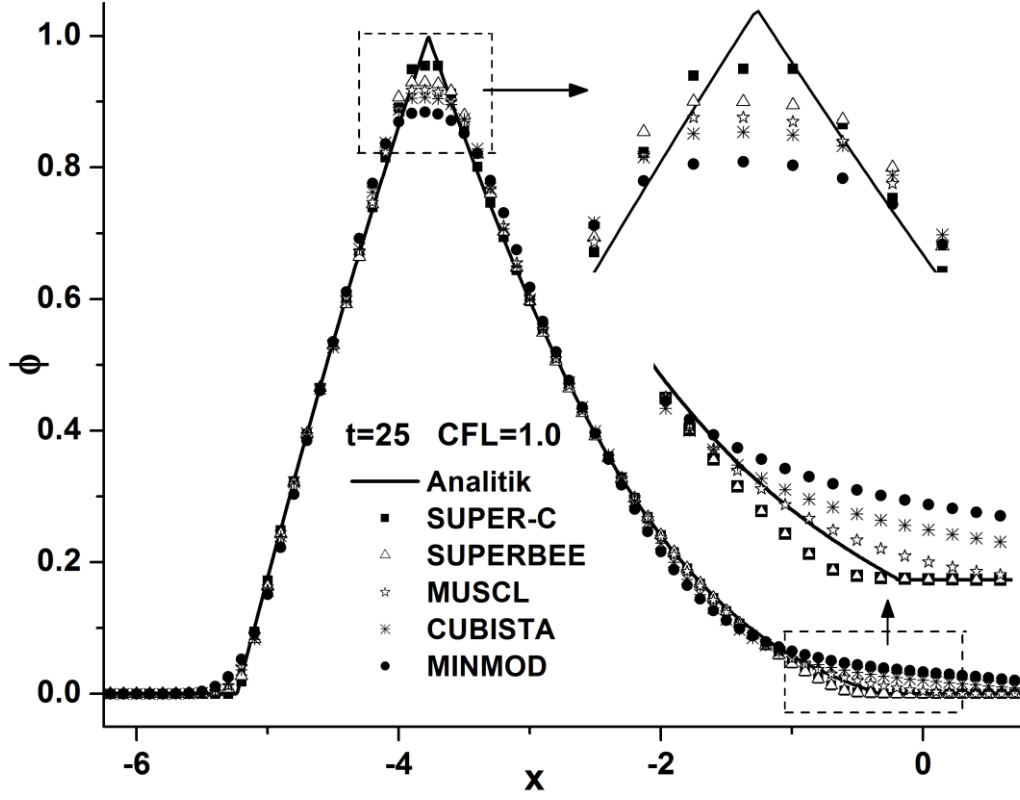
$t=25$	CFL =1.0			CFL =0.75			CFL =0.5			CFL =0.25			CFL =0.1		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	SUPERC	SUPERBEE	MUSCL	SUPERC	MUSCL	SUPERBEE	SUPERC	MUSCL	SUPERBEE	SUPERC	MUSCL	SUPERBEE	SUPERC	MUSCL	SUPERBEE
	0.3260	0.5163	0.5175	0.3235	0.5091	0.5162	0.3254	0.5040	0.5214	0.3248	0.4974	0.5245	0.3235	0.4930	0.5253
$t=50$	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
	KOREN	CLAM	OSHER	WACEB	CUBISTA	UMIST	MINMOD	KOREN	CLAM	WACEB	OSHER	CUBISTA	UMIST	MINMOD	MINMOD
	0.6716	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.6618	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
$t=50$	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
	KOREN	CLAM	OSHER	WACEB	CUBISTA	UMIST	MINMOD	KOREN	CLAM	WACEB	OSHER	CUBISTA	UMIST	MINMOD	MINMOD
	0.6716	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.6618	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731
	0.5175	0.7844	0.7869	0.8138	0.9380	0.9510	1.5432	0.5162	0.7739	0.7935	0.8068	0.9321	0.9475	1.5519	1.5731

Tablo 5.18 (Devam): Üçgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

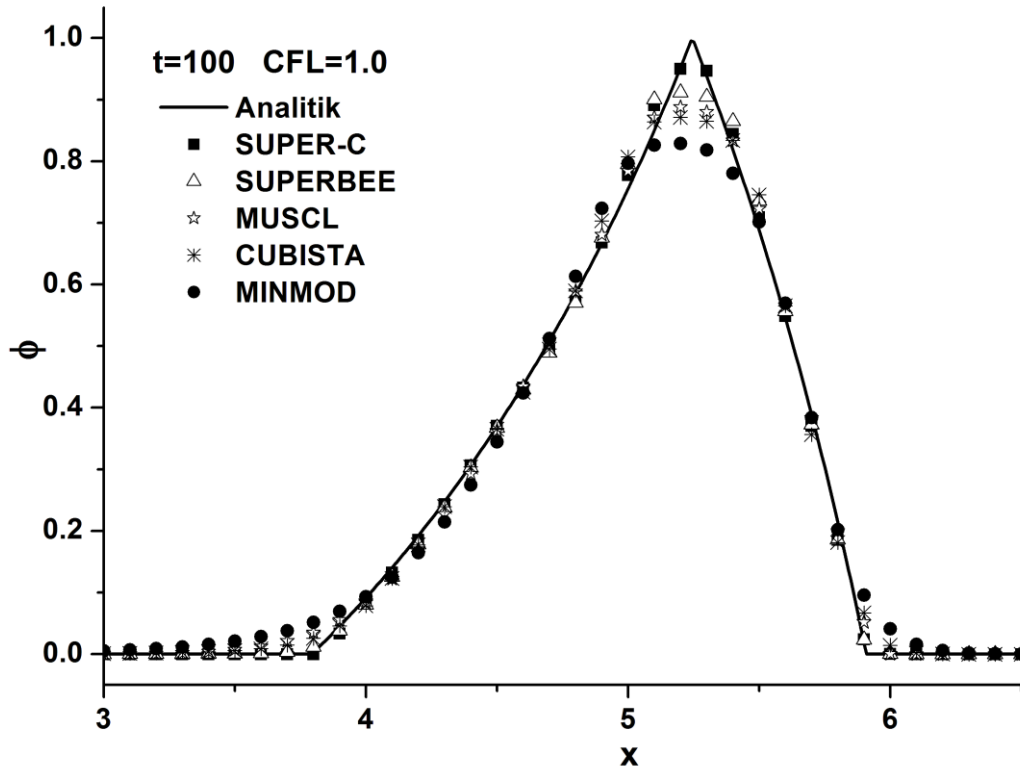
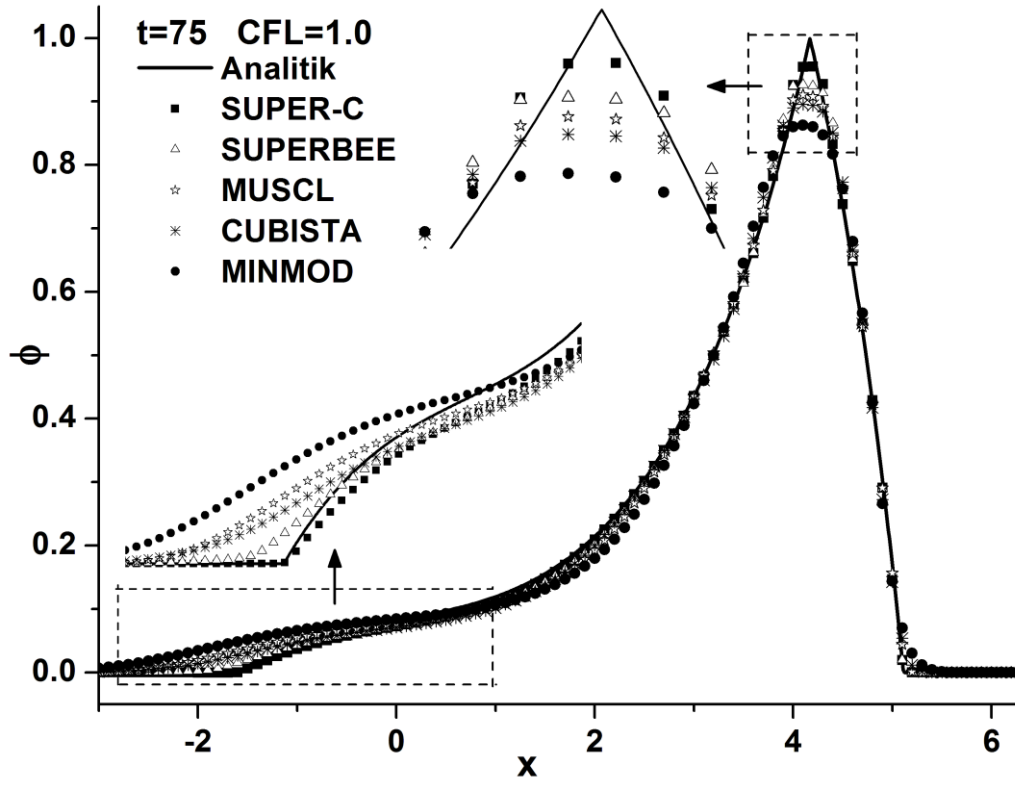
τ=75	CFL=1.0			CFL=0.75			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1		
	1	SUPERC	0.5424	1	SUPERC	0.5428	1	SUPERC	0.5497	1	SUPERC	0.5521	1	SUPERC	0.5529
	2	SUPERBEE	0.8264	2	SUPERBEE	0.8360	2	SUPERBEE	0.8355	2	SUPERBEE	0.8388	2	SUPERBEE	0.8398
	3	WACEB	0.9050	3	WACEB	0.9095	3	WACEB	0.9142	3	WACEB	0.9185	3	WACEB	0.9203
	4	KOREN	0.9204	4	KOREN	0.9259	4	KOREN	0.9309	4	KOREN	0.9360	4	KOREN	0.9383
	5	MUSCL	1.1057	5	MUSCL	1.1158	5	MUSCL	1.1223	5	MUSCL	1.1304	5	MUSCL	1.1345
	6	CUBISTA	1.1949	6	CUBISTA	1.2028	6	CUBISTA	1.2059	6	CUBISTA	1.2111	6	CUBISTA	1.2137
	7	CLAM	1.3959	7	CLAM	1.4065	7	CLAM	1.4121	7	CLAM	1.4200	7	CLAM	1.4242
	8	UMIST	1.5073	8	UMIST	1.5177	8	UMIST	1.5223	8	UMIST	1.5300	8	UMIST	1.5344
	9	OSHER	1.8094	9	OSHER	1.8137	9	OSHER	1.8251	9	OSHER	1.8327	9	OSHER	1.8355
	10	MINMOD	2.0054	10	MINMOD	2.0118	10	MINMOD	2.0279	10	MINMOD	2.0398	10	MINMOD	2.0451
	τ100	CFL=1.0			CFL=0.75			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1	
1		SUPERC	0.2524	1	SUPERC	0.2542	1	SUPERC	0.2504	1	SUPERC	0.2504	1	SUPERC	0.2515
2		SUPERBEE	0.4505	2	SUPERBEE	0.4515	2	SUPERBEE	0.4504	2	SUPERBEE	0.4504	2	SUPERBEE	0.4490
3		KOREN	0.4906	3	KOREN	0.4921	3	KOREN	0.4927	3	KOREN	0.4927	3	KOREN	0.4945
4		MUSCL	0.4972	4	MUSCL	0.5003	4	MUSCL	0.5019	4	MUSCL	0.5019	4	MUSCL	0.5058
5		WACEB	0.5312	5	WACEB	0.5321	5	WACEB	0.5325	5	WACEB	0.5331	5	WACEB	0.5334
6		CUBISTA	0.6355	6	CUBISTA	0.6372	6	CUBISTA	0.6381	6	CUBISTA	0.6381	6	CUBISTA	0.6401
7		CLAM	0.6381	7	CLAM	0.6413	7	CLAM	0.6424	7	CLAM	0.6424	7	CLAM	0.6476
8		UMIST	0.6902	8	UMIST	0.6936	8	UMIST	0.6988	8	UMIST	0.6988	8	UMIST	0.7063
9		OSHER	0.8544	9	OSHER	0.8604	9	OSHER	0.8669	9	OSHER	0.8669	9	OSHER	0.8762
10		MINMOD	1.0167	10	MINMOD	1.0232	10	MINMOD	1.0274	10	MINMOD	1.0274	10	MINMOD	1.0361

Tablo 5.18 (Devam): Üçgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemi için yaklaşımların hataları

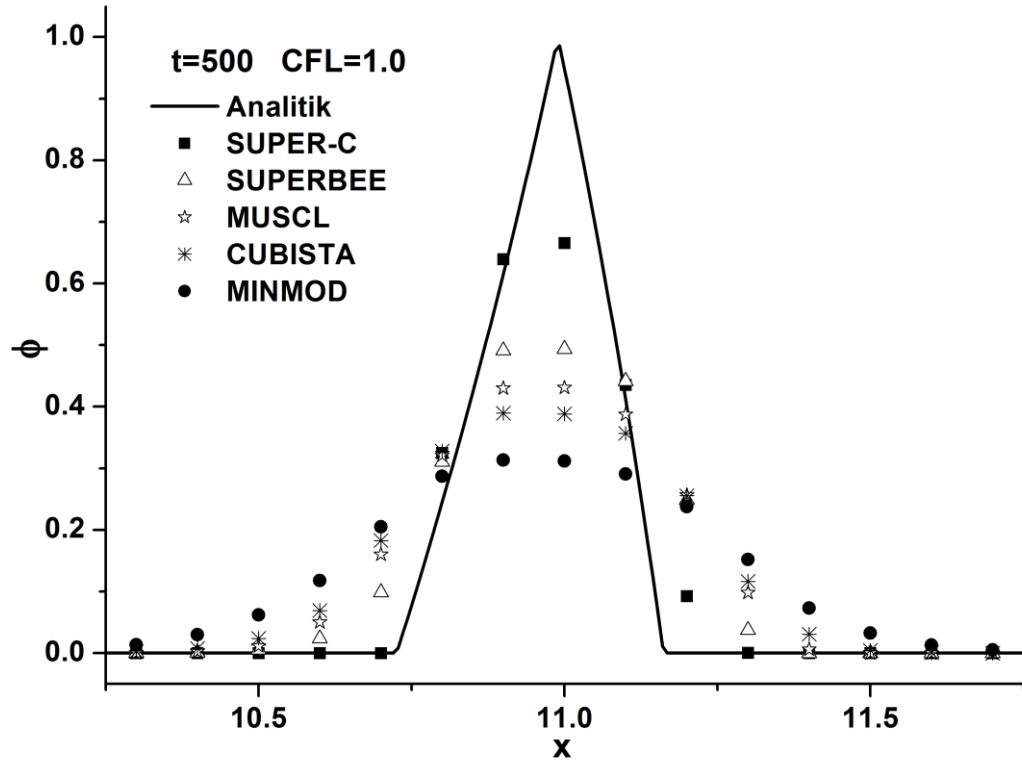
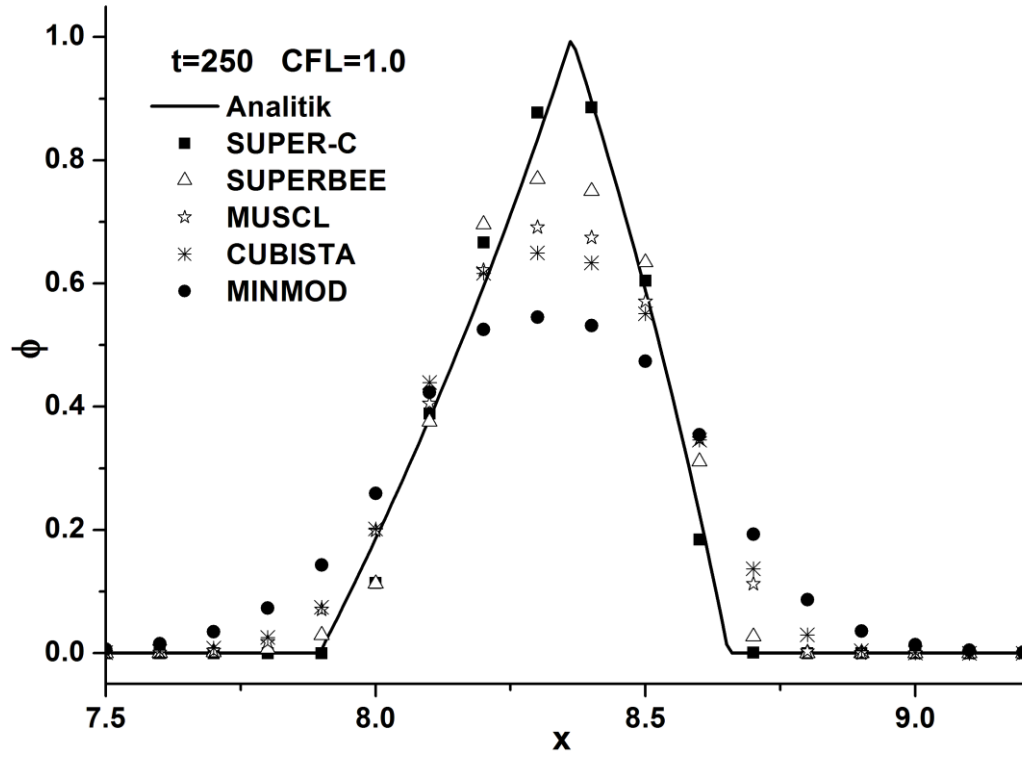
t=250	CFL=1.0				CFL=0.75				CFL=0.5				CFL=0.25				CFL=0.1			
	1	SUPERC	0.2687	1	SUPERC	0.2667	1	SUPERC	0.2662	1	SUPERC	0.2655	1	SUPERC	0.2655	1	SUPERC	0.2642		
	2	SUPERBEE	0.5803	2	SUPERBEE	0.5805	2	SUPERBEE	0.5821	2	SUPERBEE	0.5831	2	SUPERBEE	0.5831	2	SUPERBEE	0.5834		
	3	KOREN	0.7644	3	KOREN	0.7646	3	KOREN	0.7670	3	KOREN	0.7683	3	KOREN	0.7683	3	KOREN	0.7686		
	4	MUSCL	0.7714	4	MUSCL	0.7725	4	MUSCL	0.7761	4	MUSCL	0.7784	4	MUSCL	0.7784	4	MUSCL	0.7793		
	5	WACEB	0.8033	5	WACEB	0.8030	5	WACEB	0.8049	5	WACEB	0.8056	5	WACEB	0.8056	5	WACEB	0.8056		
	6	CUBISTA	0.9758	6	CUBISTA	0.9762	6	CUBISTA	0.9796	6	CUBISTA	0.9814	6	CUBISTA	0.9814	6	CUBISTA	0.9819		
	7	CLAM	1.0113	7	CLAM	1.0128	7	CLAM	1.0174	7	CLAM	1.0205	7	CLAM	1.0205	7	CLAM	1.0217		
	8	UMIST	1.1531	8	UMIST	1.1571	8	UMIST	1.1629	8	UMIST	1.1678	8	UMIST	1.1678	8	UMIST	1.1704		
	9	OSHER	1.3709	9	OSHER	1.3761	9	OSHER	1.3834	9	OSHER	1.3896	9	OSHER	1.3896	9	OSHER	1.3929		
	10	MINMOD	1.6900	10	MINMOD	1.6946	10	MINMOD	1.7007	10	MINMOD	1.7061	10	MINMOD	1.7061	10	MINMOD	1.7090		
	t=500	CFL=1.0				CFL=0.75				CFL=0.5				CFL=0.25				CFL=0.1		
1		SUPERC	0.5034	1	SUPERC	0.5010	1	SUPERC	0.5028	1	SUPERC	0.5036	1	SUPERC	0.5036	1	SUPERC	0.5060		
2		SUPERBEE	1.0907	2	SUPERBEE	1.0913	2	SUPERBEE	1.0916	2	SUPERBEE	1.0921	2	SUPERBEE	1.0921	2	SUPERBEE	1.0924		
3		MUSCL	1.3876	3	MUSCL	1.3855	3	MUSCL	1.3907	3	MUSCL	1.3922	3	MUSCL	1.3922	3	KOREN	1.3923		
4		KOREN	1.3895	4	KOREN	1.3868	4	KOREN	1.3915	4	KOREN	1.3925	4	KOREN	1.3925	4	MUSCL	1.3924		
5		WACEB	1.4315	5	WACEB	1.4287	5	WACEB	1.4332	5	WACEB	1.4340	5	WACEB	1.4340	5	WACEB	1.4337		
6		CUBISTA	1.6168	6	CUBISTA	1.6142	6	CUBISTA	1.6191	6	CUBISTA	1.6203	6	CUBISTA	1.6203	6	CUBISTA	1.6202		
7		CLAM	1.6313	7	CLAM	1.6292	7	CLAM	1.6346	7	CLAM	1.6363	7	CLAM	1.6363	7	CLAM	1.6365		
8		UMIST	1.7033	8	UMIST	1.7014	8	UMIST	1.7072	8	UMIST	1.7091	8	UMIST	1.7091	8	UMIST	1.7095		
9		OSHER	1.8074	9	OSHER	1.8052	9	OSHER	1.8113	9	OSHER	1.8133	9	OSHER	1.8133	9	OSHER	1.8136		
10		MINMOD	2.0555	10	MINMOD	2.0533	10	MINMOD	2.0590	10	MINMOD	2.0607	10	MINMOD	2.0607	10	MINMOD	2.0610		



Şekil 5.24: Üçgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi



Şekil 5.24 (Devam): Üçgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi



Şekil 5.24 (Devam): Üçgen şeklinde skaler bir profilin değişken bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde profil şeklinin zamanla değişimi

5.3. Viskoz Olmayan Burgers Denklemi

Bu bölümde 1 boyutlu viskoz olmayan Burgers denklemi çözülmüştür. Viskoz terimlerin ihmal edildiği bu denklem 1 boyutlu bir akış için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.13)$$

Denklemden de görülebileceği gibi, daha önceki problemlerde ϕ gibi skaler bir değişken taşınırken, bu problemde taşınan hızdır. Lineer olmayan bu denklem akışkanlar mekaniğinde şok dalgaları gibi süreksizliklerin olabileceği akışlarda, kimyasal reaksiyonlarda, trafikte vb. birçok yerde kullanılmaktadır.

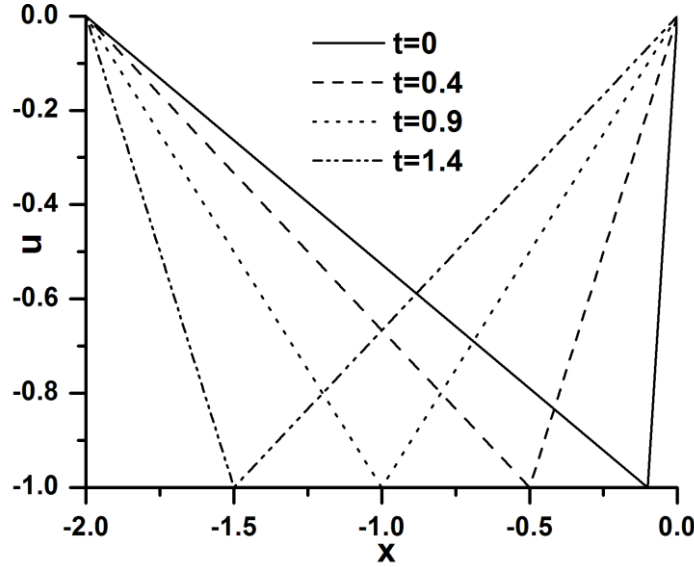
Bu problemde çözüm bölgesi $-2 \leq x \leq 0$ olan testere dişi şeklinde bir dalganın zamanla değişimi incelenmiştir. Problemin analitik çözümü aşağıdaki gibidir [110]:

$$\begin{aligned} t \leq -x \text{ ise } u &= \frac{x+2}{t-2} \\ \text{Değil ise } u &= \frac{x}{t} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Yukarıdaki denklemde $t=0.1$ alınarak başlangıç anındaki hız profili elde edilmiş ve bu profilin $t=0.4$, $t=0.9$ ve $t=1.4$ anlarındaki değişimi incelenmiştir. Başlangıç anı ve farklı zamanlardaki hız profili Şekil 5.25'te gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi hızın minimum değeri -1'dir. Bu hız profili iki doğru parçasından oluşmaktadır. Mutlak maksimum hız 1 olup, CFL sayısı hesaplanırken bu değer referans olarak alınmıştır. Dolayısıyla bu bölümde verilen tüm CFL sayıları maksimum CFL sayılarıdır. $-2 \leq x \leq 0$ ile sınırlanan çözüm bölgesi içerisinde sağdan sola doğru ilerleyen hız profilinin farklı zamanlardaki formu, Şekil 5.25'te görülmektedir.

CLAM, CUBISTA, KOREN, MINMOD, MUSCL, OSHER, SUPERBEE, SUPER-C, UMIST ve WACEB yaklaşımları kullanılarak, $t=0.4$, $t=0.9$ ve $t=1.4$ anlarındaki çözümler elde edilmiştir. Her bir zamanda 1.0, 0.75, 0.5, 0.25 ve 0.1 olmak üzere beş farklı CFL sayısı için çözümler tekrarlanmış, Denklem (5.4)'te tanımlanan hata

tanımına göre hatalar hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 5.19’da verilmiştir. Ayrıca CUBISTA, MINMOND, MUSCL, SUPERBEE ve SUPER-C yaklaşımları ile elde edilen çözümler farklı zaman ve farklı CFL sayıları için, analitik çözümle beraber ilgili şekillerde verilmiştir.



Şekil 5.25: Genişleyen bir şok dalgasının farklı zamanlardaki görünümü

Şekil 5.26’da yaklaşımların $t=0.4$ anındaki çözümleri farklı CFL sayıları için verilmiştir. Şekil 5.26’dan görülebileceği gibi, yaklaşımlar dalganın sol tarafını oldukça iyi çözmektedir. Bu kısımlarda yaklaşımlar arasında fark neredeyse yoktur. Dalganın sağ tarafında ise çok az sayıda nokta olması sebebiyle bütün CFL sayılarında analitik çözümden sapmalar görülmektedir. Analitik çözümden en çok sapma ise hız profilinin tepe kısmında görülmektedir. CFL=1.0 için yapılan çözümlerde dalganın sağ tarafında çözümde bir dalgalanma oluşmaktadır. Bu durum Şekil 5.26’da açıkça görülmektedir. Dolayısıyla, bütün yaklaşımlarda en büyük hata CFL=1.0 olan çözümlerde olmaktadır. CFL=1.0 için çözümlerde en az hata SUPER-C, en çok hata OSHER yaklaşımında olmaktadır.

CFL=0.75 alınarak yapılan çözümlerde dalganın sağ tarafında görülen dalgalanmanın kaybolduğu ve bütün yaklaşımların hata değerlerinde yaklaşık %40 oranında bir azalmanın olduğu görülmektedir. Bununla beraber, dalganın sol tarafındaki çözümlerin hata değerlerindeki artış göze çarpmaktadır. Şekil üzerinde büyütülerek

gösterilen kısımdan görülebileceği gibi dalganın tepe bölgesindeki hız profilini en iyi SUPER-C yaklaşımı çözmektedir.

Şekil 5.26'da $CFL=0.75$ ve $CFL=0.5$ için verilen çözümler incelendiğinde, $CFL=0.75$ 'te dalganın sol tarafında artan hataların $CFL=0.5$ için yapılan çözümlerde tekrar azaldığı görülmektedir. Öte yandan, hız profilinin tepe bölgesindeki maksimum hataların $CFL=0.5$ 'te arttığı görülmektedir. Toplam hata miktarı ise $CFL=0.5$ için yapılan çözümlerde daha küçüktür.

Genel olarak küçülen CFL sayıları ile toplam hatada azalma görülmektedir. Ancak Tablo 5.19'dan da görülebileceği gibi 0.25'ten daha küçük seçilen CFL sayılarında CUBISTA, MINMOD, SUPERBEE, SUPER-C ve WACEB yaklaşımları ile yapılan çözümlerde hata değerlerinde bir artış görülmektedir. Bu yaklaşımlardaki en küçük hata değeri $CFL=0.25$, diğer yaklaşımlarda ise $CFL=0.1$ için yapılan çözümlerde görülmektedir. MINMOD yaklaşımı kullanılarak $CFL=0.25$ ve $CFL=0.1$ için yapılan çözümler incelendiğinde, hız profilinin tepe bölgesindeki maksimum değerinin diğer yaklaşımların aksine $CFL=0.1$ için daha küçük olduğu, dolayısıyla toplam hata miktarının bu CFL sayısında daha büyük olduğu görülmektedir.

$t=0.4$ anında yaklaşımların sıralamadaki yeri incelendiğinde bütün CFL sayılarında SUPER-C'nin en az hata içeren ve sıralamada yeri değişmeyen tek yaklaşım olduğu görülmektedir. Bu yaklaşımı takip eden SUPERBEE yaklaşımı $CFL=0.1$ için yapılan çözümlerde MUSCL ve KOREN yaklaşımlarının gerisine düşmektedir. $CFL \geq 0.25$ için sıralamadaki yeri 4. ile 5. arasında değişen MUSCL yaklaşımı, $CFL=0.1$ için SUPER-C yaklaşımından sonra analitik çözüme en yakın sonucu veren yaklaşım olmaktadır. $CFL=1.0$ 'de OSHER ve MINMOD yaklaşımlarından sonra en çok hata içeren yaklaşım olan KOREN ise küçülen CFL sayısı ile sıralamadaki yeri değişerek üst sıralara çıkmakta ve $CFL=0.1$ için yapılan çözümlerde SUPER-C ve MUSCL yaklaşımlarından sonra 4. sırada olmaktadır. $CFL=0.1$ için sıralamada 5. sırada olan WACEB yaklaşımı diğer bütün CFL sayılarında sıralamada SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarından sonra gelmektedir. CUBISTA yaklaşımı büyük CFL sayılarında üst sıralarda yer alırken, $CFL=0.1$ için yapılan çözümlerde MINMOD yaklaşımından sonra en çok hata içeren yaklaşım olmaktadır. CLAM ve UMIST

yaklaşımları bütün CFL sayılarında birbirine yakın hata içermekte ve sıralamada son sıralarda olmaktadır.

$t=0.9$ anında farklı CFL sayıları için yapılan çözümler Şekil 5.27’de verilmiştir. Şekil 5.27 incelendiğinde, $t=0.4$ anında $CFL=1.0$ için yapılan çözümlerde hız profilinin sağ tarafında görülen dalgalanmanın bu zamanda da olduğu görülmektedir. $t=0.9$ anında toplam hata miktarları $t=0.4$ anındaki hatalar ile karşılaştırıldığında, bütün yaklaşımlar ile elde edilen maksimum hız değerlerinde bir azalma olduğu, dolayısıyla bütün yaklaşımların hata miktarlarında bir artma olduğu görülmektedir. Tablo 5.19’da $t=0.9$ anında yaklaşımların farklı CFL sayılarındaki toplam hataları incelendiğinde, CUBISTA ve MINMOD yaklaşımlarının $CFL=0.25$ için, diğer yaklaşımların ise $CFL=0.1$ için yapılan çözümlerde minimum hata içerdiği görülmektedir. Şekil 5.27’de görüldüğü gibi MINMOD haricindeki bütün yaklaşımlar küçülen CFL sayıları ile hız profilinin tepe noktasını daha iyi yakalamaktadır. $t=0.9$ anında yaklaşımların farklı CFL sayılarında hata sıralamasındaki yeri incelendiğinde, bütün CFL sayılarında ilk iki sırada sırasıyla SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarının yer aldığı görülmektedir. Sıralamada son iki sıradaki yaklaşım CFL sayısına bağlı olarak birbiriyle yer değiştiren MINMOD ile OSHER yaklaşımlarıdır.

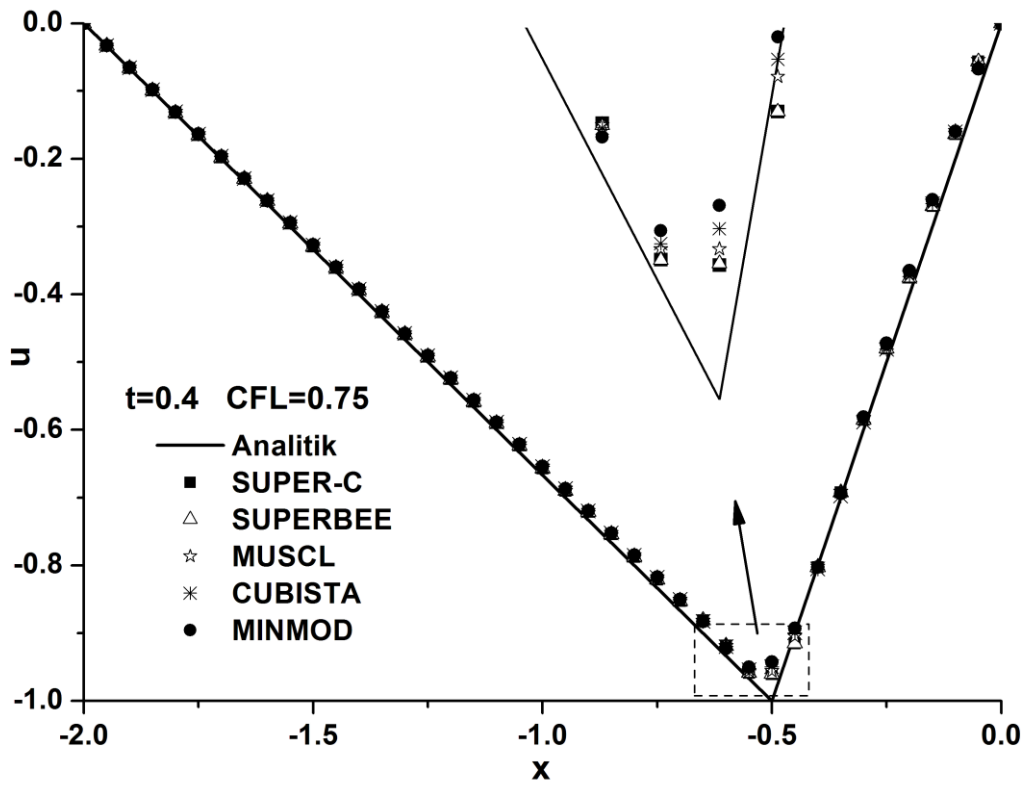
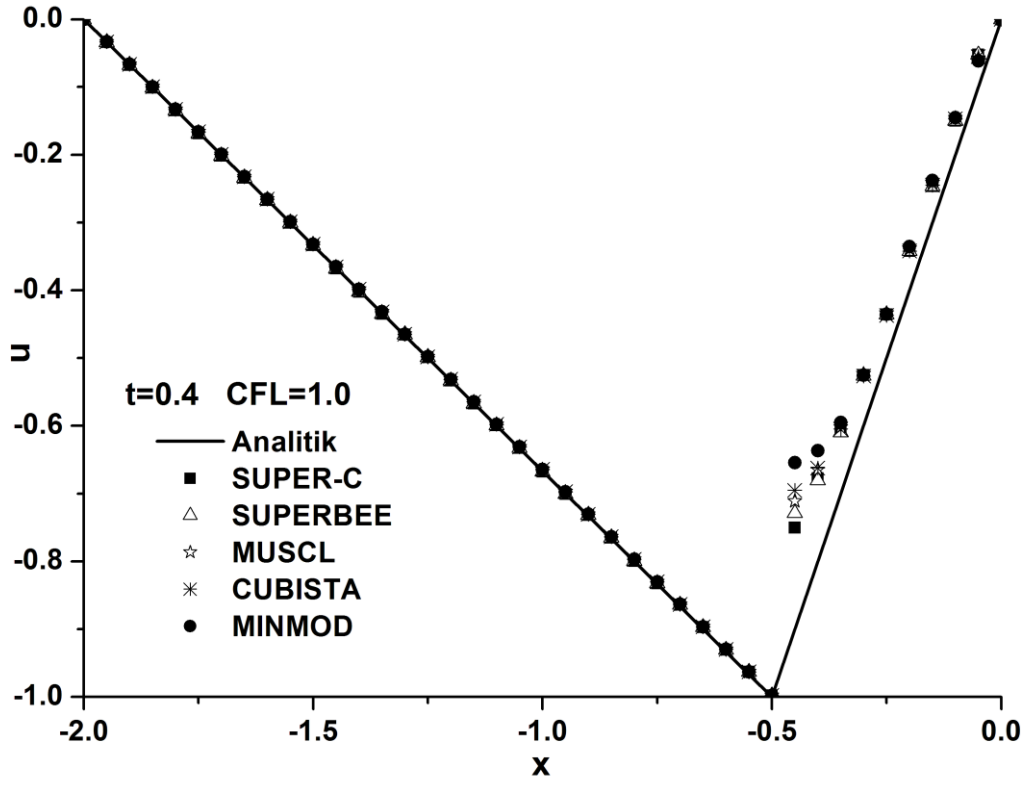
$t=1.4$ anında yapılan çözümler Şekil 5.28’de verilmiştir. Şekil 5.28 incelendiğinde bütün yaklaşımların $CFL=1.0$ için yapılan çözümlerinde hız profilinin sağ tarafında görülen dalgalanmanın bu anda biraz sönümlendiği görülmektedir. $CFL=0.75$ için bu dalgalanma tamamen kaybolmakta, hız profilinin sağ ve sol taraflarında analitik çözümden sapmalar görülmektedir. $CFL=0.5$ alınarak yapılan çözümlerde hız profilinin sol tarafındaki hatalar azalmaktadır. CFL sayısının azalması ile hız profilinin sol tarafındaki hataların yanı sıra sağ tarafındaki hatalarda da azalmalar görülmektedir. Bütün CFL sayılarında maksimum hatanın görüldüğü hız profilinin tepe bölgesinde analitik çözüme en yakın sonucu bütün CFL sayılarında en az hata içeren yaklaşım olan SUPER-C vermektedir. Tepe bölgesinde SUPER-C ile diğer yaklaşımlar arasındaki fark küçük CFL sayılarında daha belirgin olmaktadır. Bu yaklaşımı yine bütün CFL sayılarında SUPERBEE takip etmektedir. En çok hata

içeren yaklaşımlar ise MINMOD ve OSHER'dir. Yaklaşımların sıralamadaki yeri $t=0.9$ anındaki ile neredeyse aynıdır.

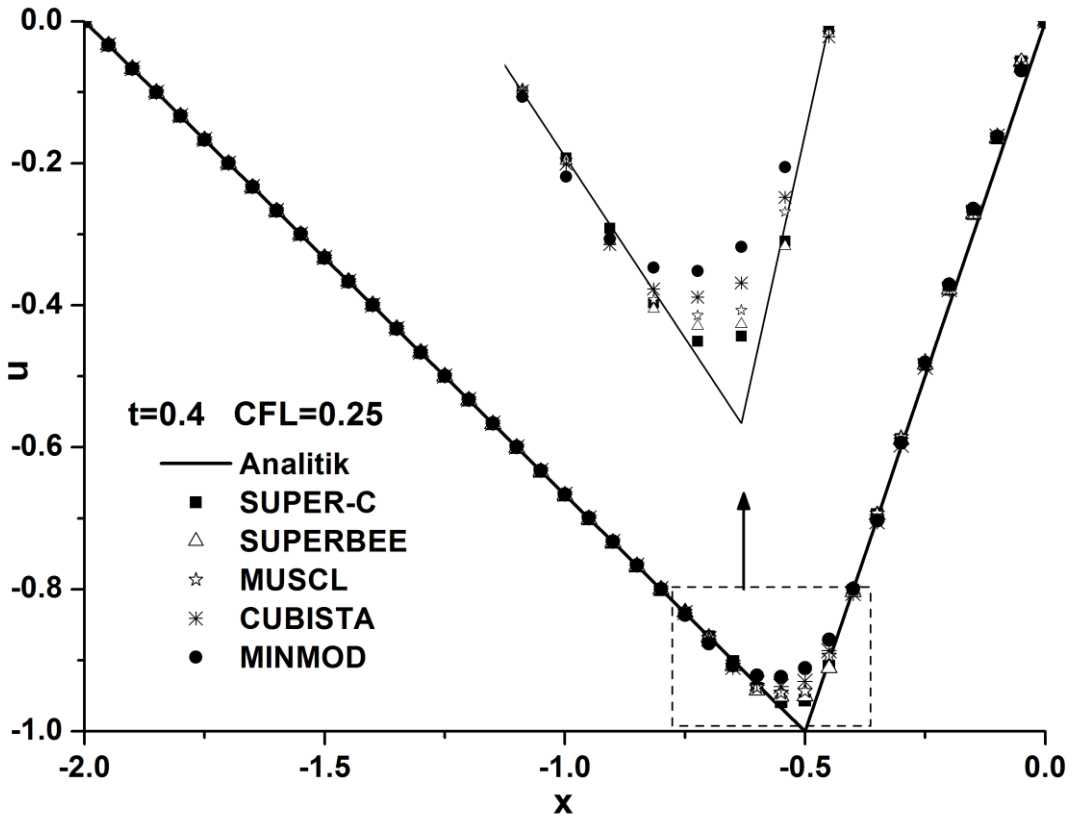
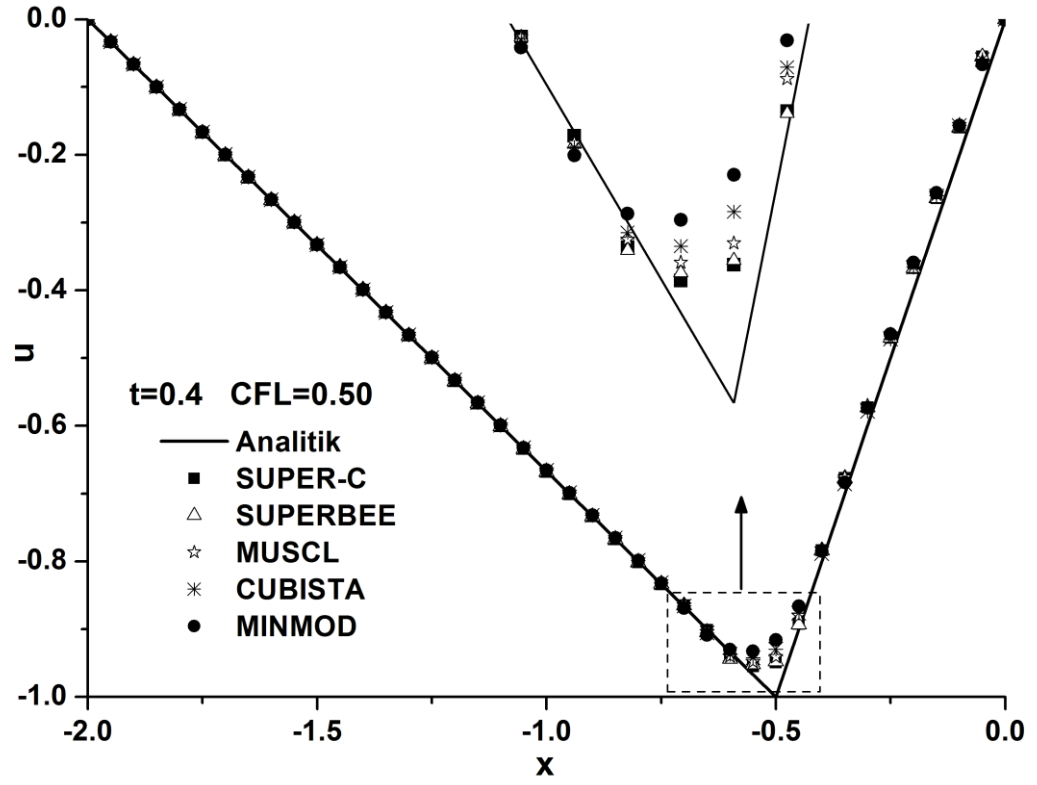
Yaklaşımların aynı CFL sayıları kullanılarak farklı zamanlardaki hataları incelendiğinde artan zamanla hatalardaki artışın büyük CFL sayılarında daha yüksek olduğu görülmektedir. Örneğin $t=0.4$ ve $t=1.4$ anındaki hatalar karşılaştırıldığında $CFL=1.0$ için hata miktarındaki en büyük artışın %148 ile OSHER yaklaşımında, en düşük artışın %75 ile KOREN yaklaşımında olduğu görülmektedir. Öte yandan, yaklaşımların $CFL=0.75$, 0.5 ve 0.25 alınarak yapılan çözümlerdeki hata artışı karşılaştırıldığında, yaklaşımların hata miktarlarındaki artışı arasında çok ciddi bir fark görülmemektedir. $CFL=0.1$ alınarak yapılan çözümlerde ise OSHER yaklaşımındaki hata artışı %56, SUPER-C yaklaşımındaki hata artışı %9 civarında olmaktadır. SUPER-C'den sonra en az hata artışı %25 ile SUPERBEE yaklaşımında olmaktadır. Dolayısıyla, küçük CFL sayıları seçilerek SUPER-C yaklaşımı ile yapılan çözümlerdeki hata artışının çok az olduğu söylenebilir.

Tablo 5.19: Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için yaklaşımların hataları

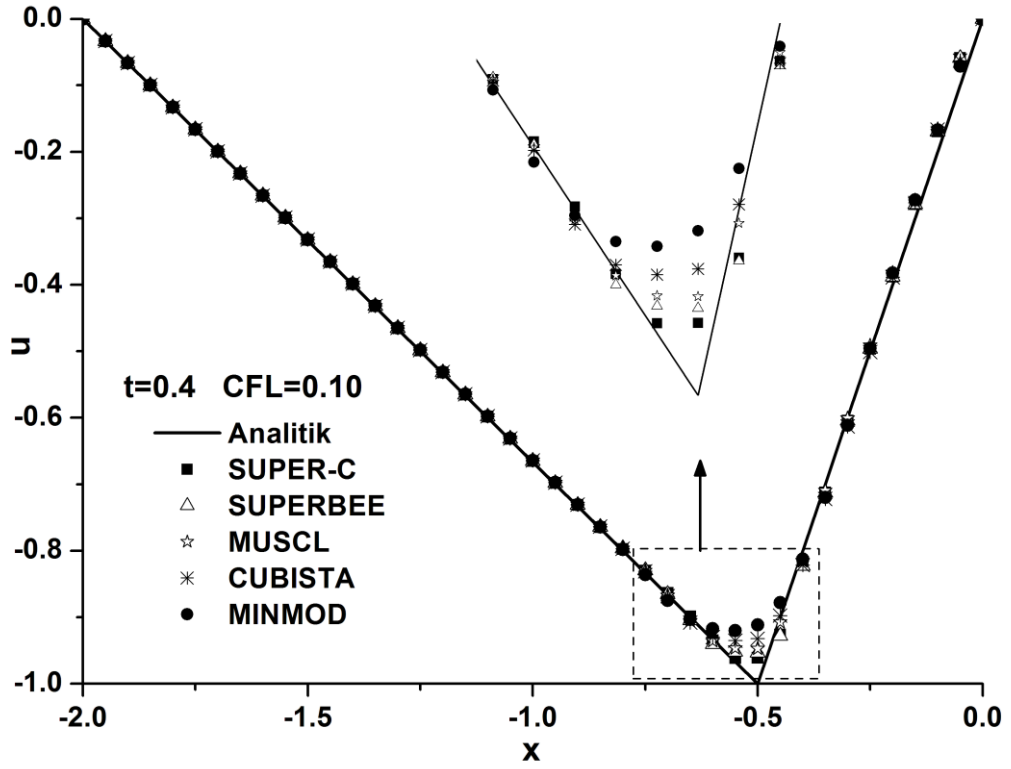
t=0.4	CFL=1.0			CFL=0.75			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1		
	1	SUPERC	0.7505	1	SUPERC	0.4550	1	SUPERC	0.3478	1	SUPERC	0.2437	1	SUPERC	0.2544
	2	SUPERBEE	0.7660	2	SUPERBEE	0.4551	2	SUPERBEE	0.3554	2	SUPERBEE	0.2725	2	MUSCL	0.2777
	3	WACEB	0.8132	3	WACEB	0.4938	3	WACEB	0.3830	3	WACEB	0.2849	3	KOREN	0.2836
	4	MUSCL	0.8417	4	CUBISTA	0.4955	4	CUBISTA	0.3845	4	KOREN	0.2906	4	SUPERBEE	0.2859
	5	CUBISTA	0.8437	5	MUSCL	0.5128	5	MUSCL	0.4020	5	MUSCL	0.2906	5	WACEB	0.2957
	6	CLAM	0.8695	6	CLAM	0.5170	6	CLAM	0.4086	6	CUBISTA	0.2962	6	CLAM	0.3034
	7	UMIST	0.8788	7	UMIST	0.5194	7	KOREN	0.4099	7	CLAM	0.3057	7	OSHER	0.3038
	8	KOREN	0.9291	8	KOREN	0.5195	8	UMIST	0.4190	8	UMIST	0.3146	8	UMIST	0.3050
	9	MINMOD	0.9317	9	MINMOD	0.5348	9	OSHER	0.4389	9	OSHER	0.3334	9	CUBISTA	0.3175
10	OSHER	0.9320	10	OSHER	0.5530	10	MINMOD	0.4430	10	MINMOD	0.3637	10	MINMOD	0.3781	
t=0.9	CFL=1.0			CFL=0.75			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1		
	1	SUPERC	1.1285	1	SUPERC	0.6521	1	SUPERC	0.4403	1	SUPERC	0.2732	1	SUPERC	0.2573
	2	SUPERBEE	1.2194	2	SUPERBEE	0.6541	2	SUPERBEE	0.4653	2	SUPERBEE	0.3352	2	SUPERBEE	0.3190
	3	WACEB	1.2825	3	WACEB	0.7101	3	WACEB	0.5096	3	WACEB	0.3634	3	MUSCL	0.3354
	4	KOREN	1.3191	4	CUBISTA	0.7145	4	CUBISTA	0.5172	4	KOREN	0.3657	4	KOREN	0.3453
	5	MUSCL	1.3576	5	MUSCL	0.7268	5	KOREN	0.5246	5	MUSCL	0.3760	5	WACEB	0.3608
	6	CUBISTA	1.4259	6	KOREN	0.7327	6	MUSCL	0.5325	6	CUBISTA	0.3824	6	UMIST	0.3786
	7	UMIST	1.4476	7	CLAM	0.7369	7	CLAM	0.5456	7	CLAM	0.4016	7	CLAM	0.3790
	8	CLAM	1.4602	8	UMIST	0.7389	8	UMIST	0.5561	8	UMIST	0.4107	8	CUBISTA	0.3876
	9	MINMOD	1.6570	9	MINMOD	0.7574	9	MINMOD	0.5850	9	OSHER	0.4549	9	OSHER	0.3927
10	OSHER	1.6851	10	OSHER	0.7608	10	OSHER	0.5917	10	MINMOD	0.4811	10	MINMOD	0.4879	
t=1.4	CFL=1.0			CFL=0.75			CFL=0.5			CFL=0.25			CFL=0.1		
	1	SUPERC	1.4406	1	SUPERC	0.8036	1	SUPERC	0.5564	1	SUPERC	0.336	1	SUPERC	0.2781
	2	SUPERBEE	1.6116	2	SUPERBEE	0.8040	2	SUPERBEE	0.5690	2	SUPERBEE	0.4021	2	SUPERBEE	0.3580
	3	KOREN	1.6259	3	WACEB	0.8642	3	WACEB	0.6189	3	WACEB	0.4153	3	MUSCL	0.3678
	4	WACEB	1.6511	4	CUBISTA	0.8645	4	CUBISTA	0.6201	4	KOREN	0.4201	4	KOREN	0.3795
	5	MUSCL	1.7641	5	MUSCL	0.8895	5	KOREN	0.6399	5	MUSCL	0.4327	5	WACEB	0.3959
	6	UMIST	1.8878	6	KOREN	0.8905	6	MUSCL	0.6433	6	CUBISTA	0.4472	6	CLAM	0.4365
	7	CUBISTA	1.9014	7	CLAM	0.8928	7	CLAM	0.6488	7	CLAM	0.4683	7	CUBISTA	0.4418
	8	CLAM	1.9289	8	UMIST	0.903	8	UMIST	0.6631	8	UMIST	0.4837	8	UMIST	0.4440
	9	MINMOD	2.2484	9	MINMOD	0.9174	9	MINMOD	0.6975	9	OSHER	0.5482	9	OSHER	0.4739
10	OSHER	2.3109	10	OSHER	0.9353	10	OSHER	0.7044	10	MINMOD	0.5739	10	MINMOD	0.5773	



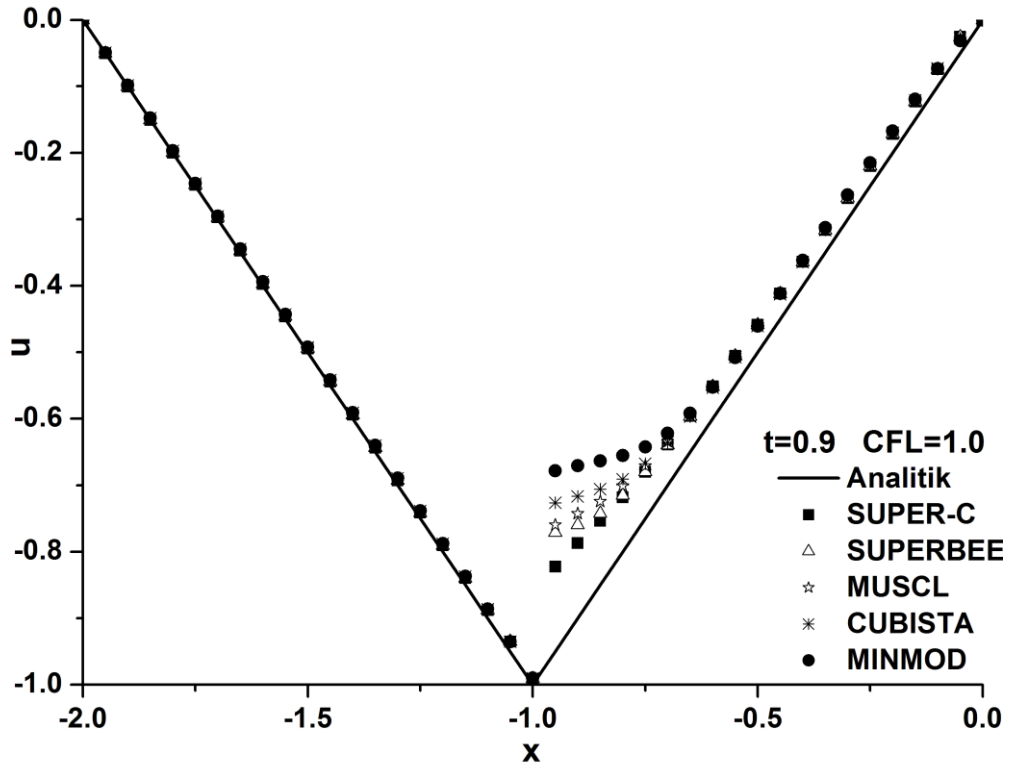
Şekil 5.26: Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=0.4$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümü



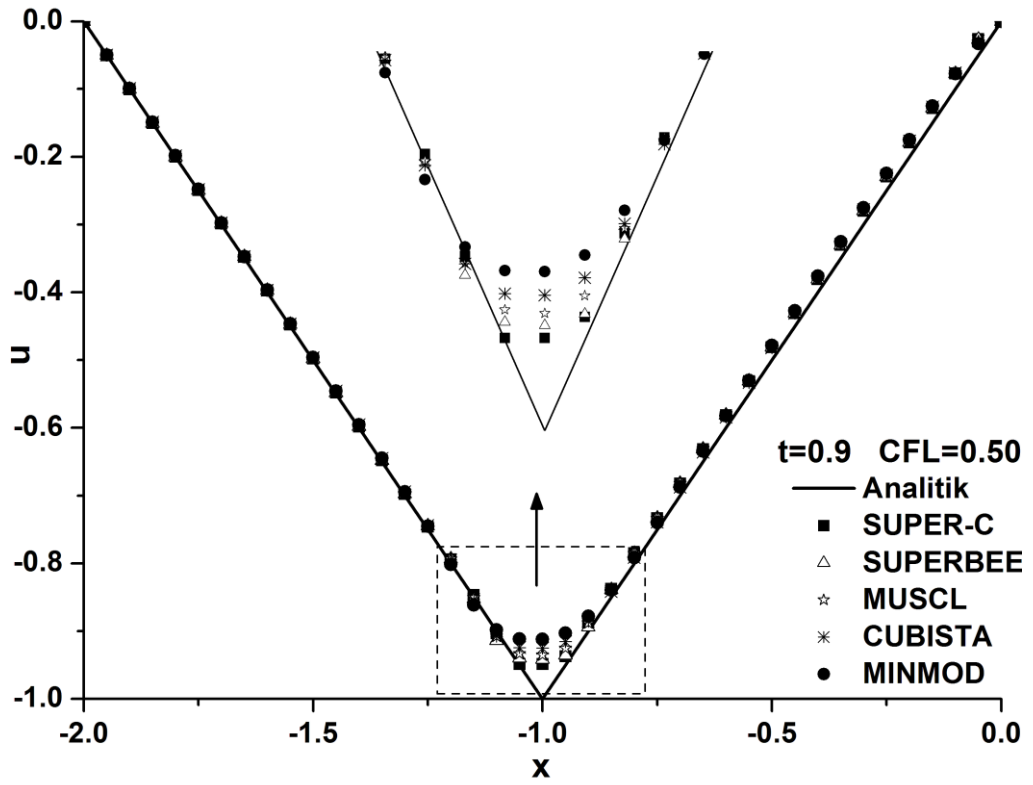
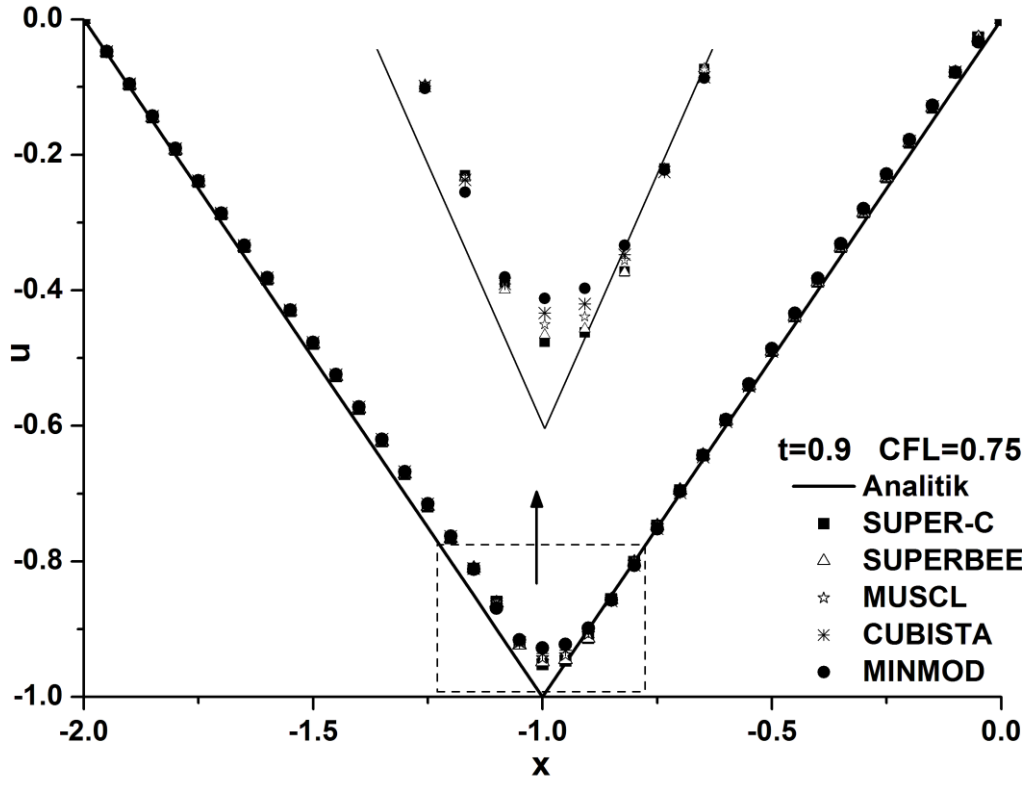
Şekil 5.26 (Devamı): Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=0.4$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümü



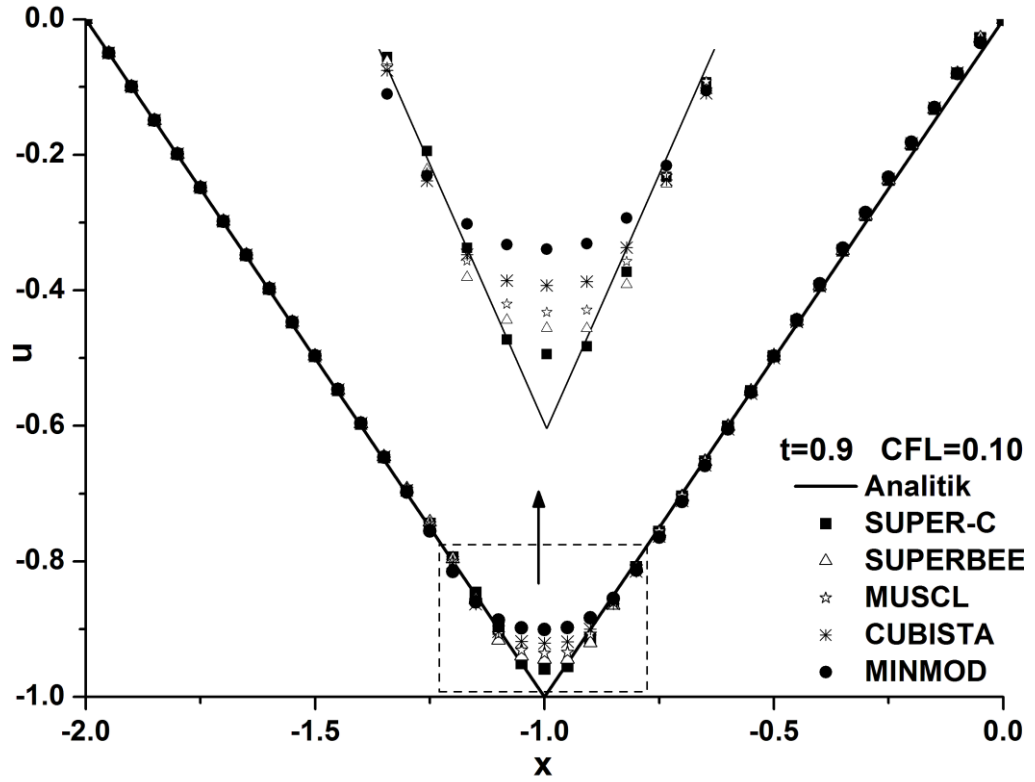
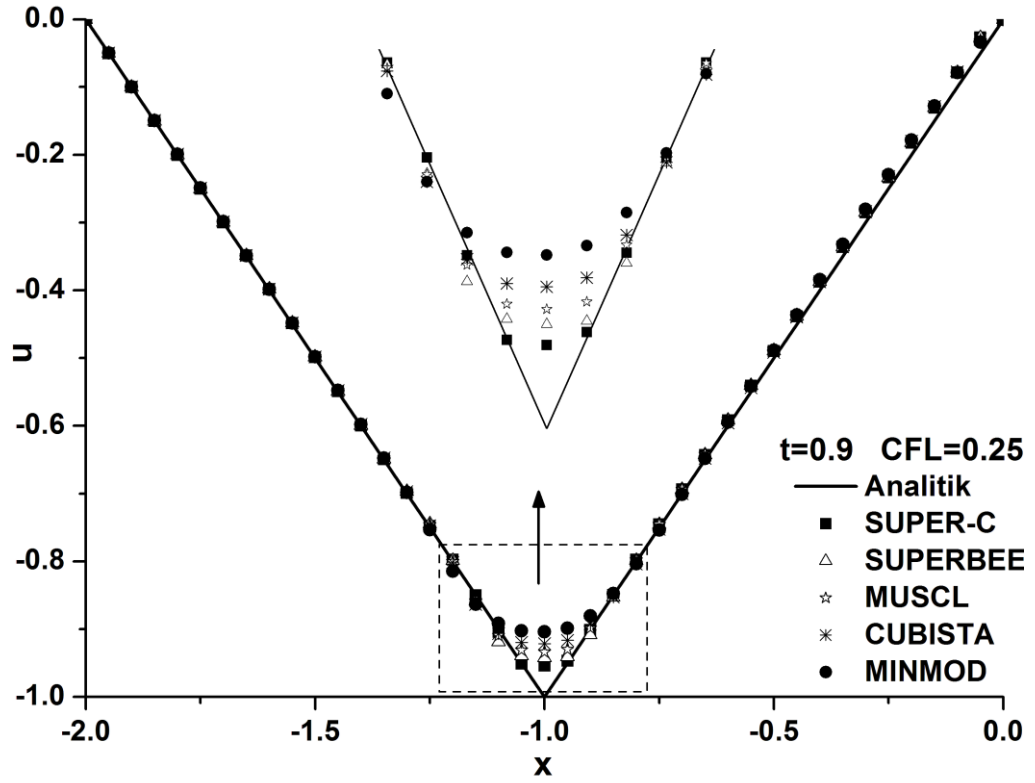
Şekil 5.26 (Devamı): Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=0.4$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümü



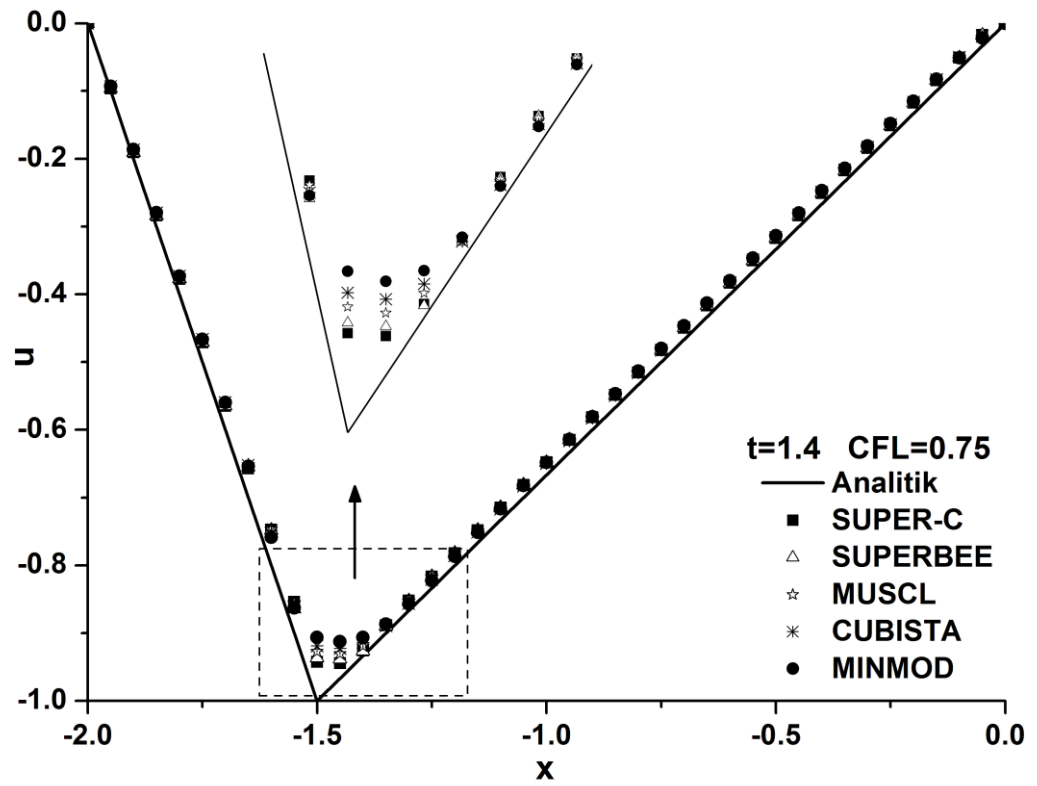
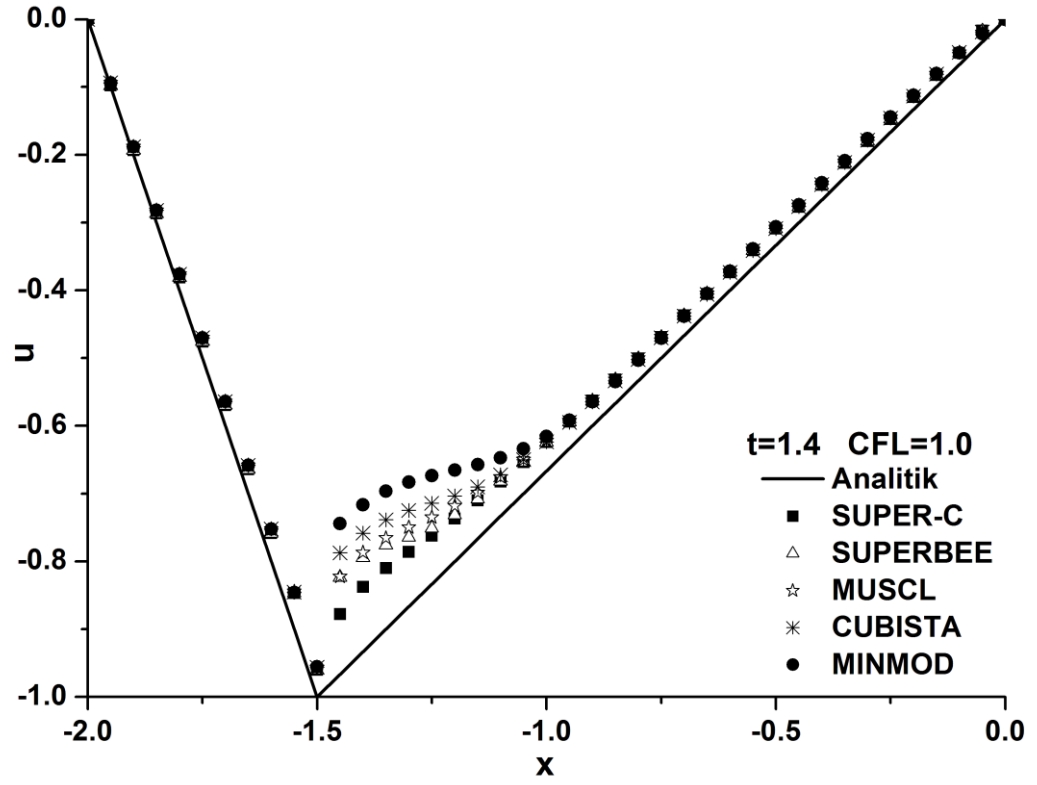
Şekil 5.27: Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=0.9$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümü



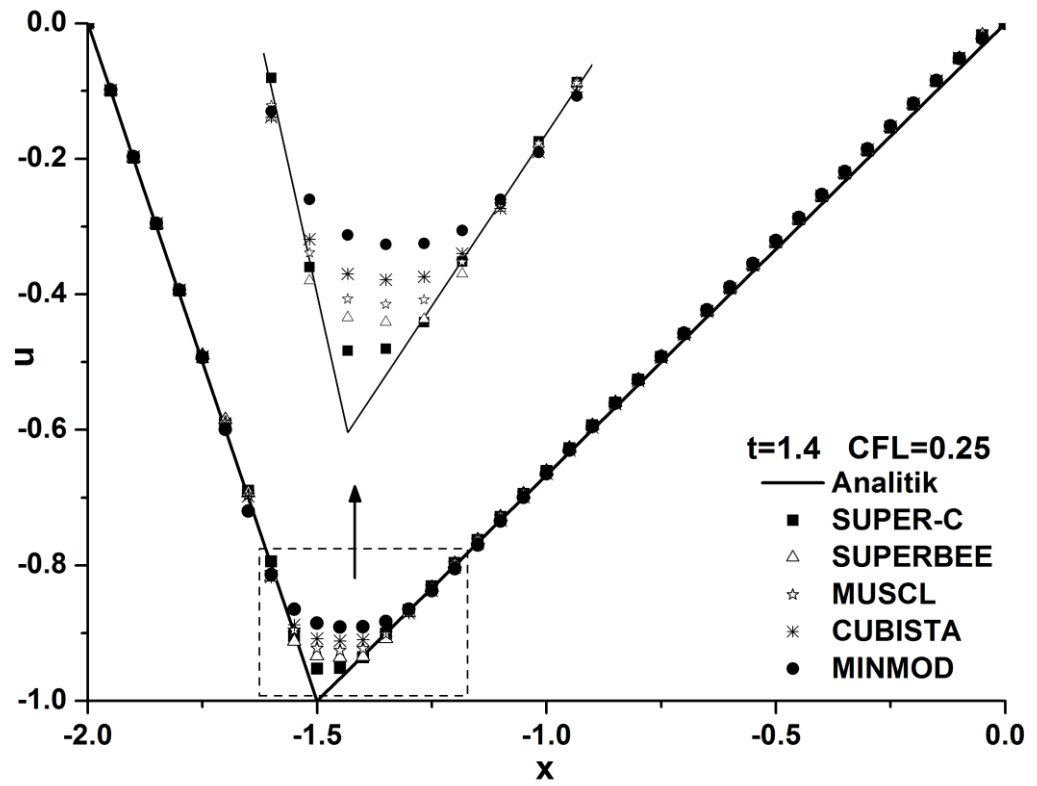
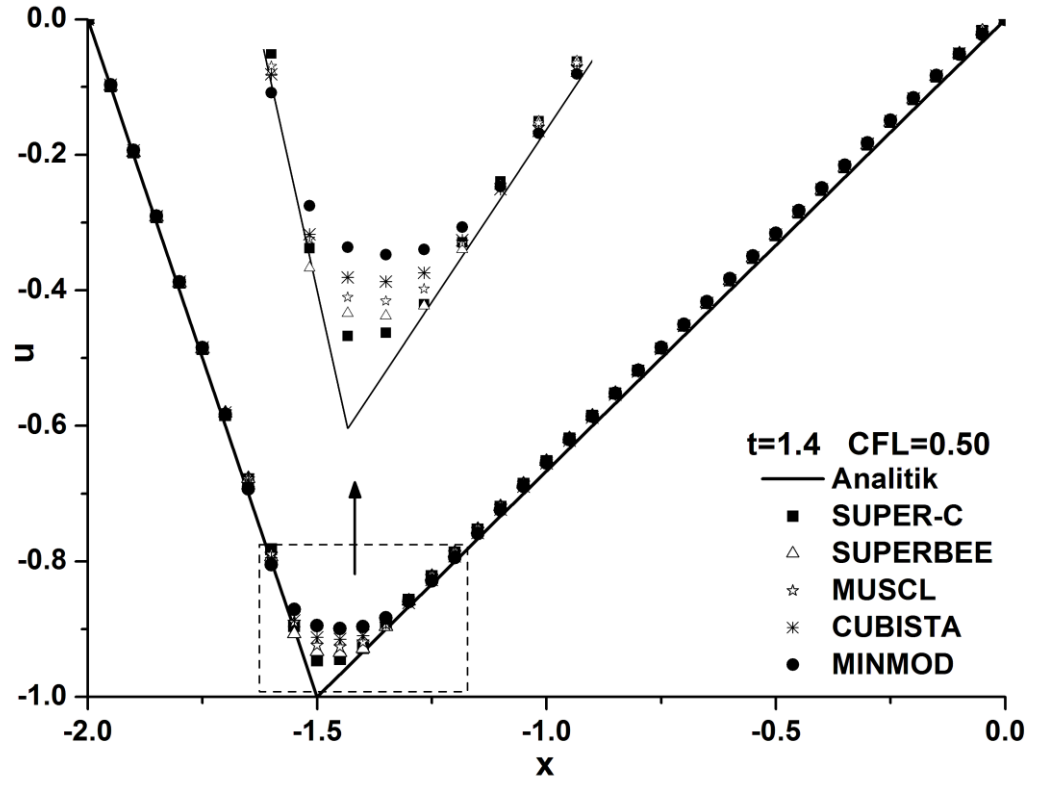
Şekil 5.27 (Devamı): Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=0.9$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümü



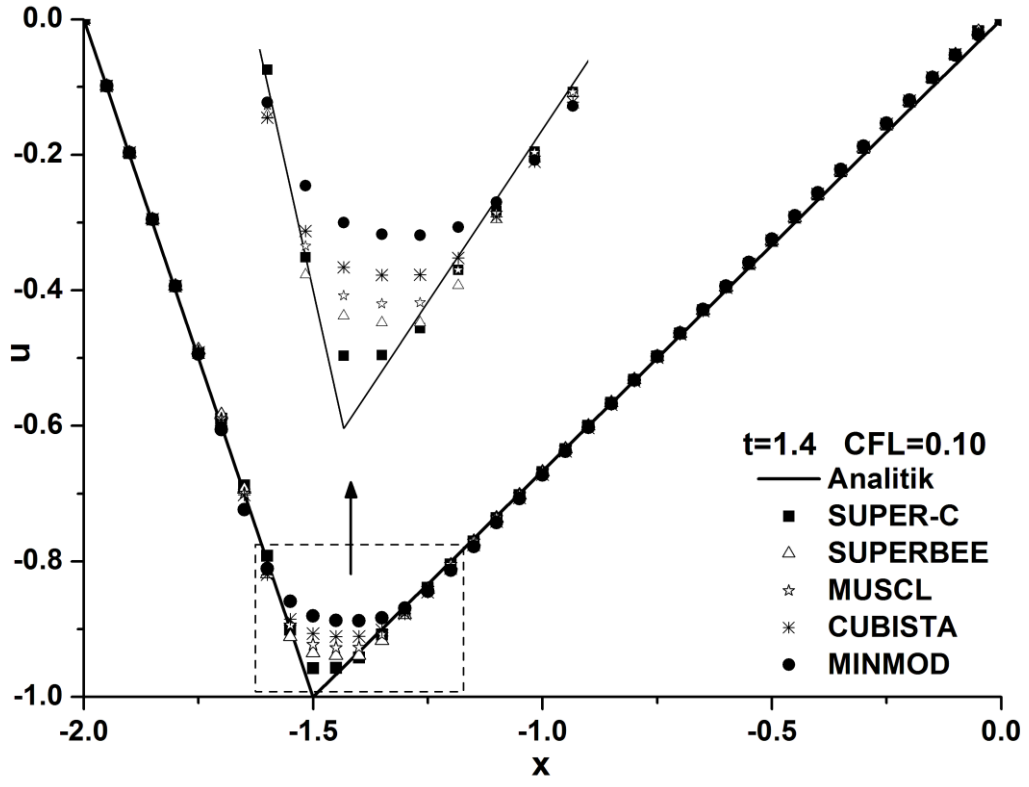
Şekil 5.27 (Devamı): Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=0.9$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümleri



Şekil 5.28: Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=1.4$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümü



Şekil 5.28 (Devamı): Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=1.4$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümü

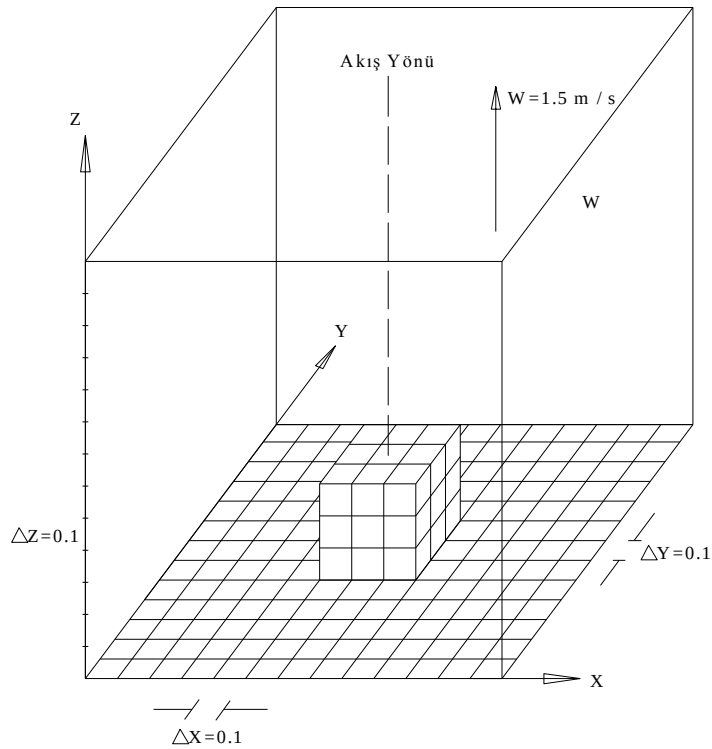


Şekil 5.28 (Devamı): Viskoz olmayan bir boyutlu Burgers denklemi problemi için $t=1.4$ anında farklı yaklaşımlar ile elde edilen çözümü

5.4. Skaler Bir Büyüklüğün Üç Boyutlu Akış Alanı İçerisinde Konveksiyon-Difüzyon ile Taşınması

Bu bölümde, uzayda başlangıç anında küp şeklinde yer kaplayan ϕ gibi bir skalerin sabit bir hız alanı içerisinde konveksiyon ile taşınması ve bu esnada difüzyon ile yayılması problemi 3 boyutlu ve zamana bağlı olarak çözülmüştür. Daha önce çözülen problemlerden farklı olarak bu problemde difüzyon da dikkate alınmış, ayrıca problem üç boyutlu olarak ele alınmıştır.

Şekil 5.29’da görüldüğü gibi başlangıçta ($t = 0$ anında) boyutları L_x , L_y ve L_z , merkez koordinatları x_0 , y_0 ve z_0 , değeri ϕ_0 olan skaler bir alan, bir akış alanı içerisinde bulunmaktadır. Diğer tüm noktalarda ise skalerin değeri sıfırdır.



Şekil 5.29: Üç boyutlu zamandan bağımsız problemin geometrisi

Akışın yz-ekseni ile yaptığı açının $\theta=90^\circ$, 45° ve 22.5° olmak üzere üç farklı akış açısı ve hücresel Peclet sayısının $Pe_\Delta=10$, 100 ve 1000 olması durumu için çözümler yapılmıştır. Problemin analitik ve yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar kullanılarak elde edilen sayısal çözümü aşağıda verilmiştir.

5.4.1. Problemin analitik çözümü

Bu problemin analitik çözümü, tek boyutlu olarak Crank tarafından verilmiştir. Üç boyutlu çözüm ise Arampatzis ve diğ. [111] tarafından geliştirilmiştir.

$$\phi = \frac{\phi_o}{8} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\frac{L_x}{2} - X}{2\sqrt{\frac{\Gamma t}{\rho}}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\frac{L_x}{2} + X}{2\sqrt{\frac{\Gamma t}{\rho}}} \right) \right] \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\frac{L_y}{2} - Y}{2\sqrt{\frac{\Gamma t}{\rho}}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\frac{L_y}{2} + Y}{2\sqrt{\frac{\Gamma t}{\rho}}} \right) \right] \times \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\frac{L_z}{2} - Z}{2\sqrt{\frac{\Gamma t}{\rho}}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\frac{L_z}{2} + Z}{2\sqrt{\frac{\Gamma t}{\rho}}} \right) \right] \quad (5.15)$$

Burada $X = x - x_o - ut$, $Y = y - y_o - vt$ ve $Z = z - z_o - wt$ olup skalerin merkezinden olan mesafedir.

Skaler büyüklük, mesafe ve zamanın boyutsuzlaştırılması ve boyutsuzlaştırma işleminde kullanılan büyüklükler aşağıda sırasıyla gösterilmiştir.

$$\Phi = \frac{\phi}{\phi_o} \quad (5.16)$$

$$L = \frac{l - l_o - Vt}{\Delta x} \quad (5.17)$$

$$T = \frac{Vt}{\Delta x} \quad (5.18)$$

Burada $l_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}$, $l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ve $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ ’dir. Bütün durumlarda boyutsuz zaman $T=6$ olarak alınmıştır. Küp şeklindeki skaler büyüklüğün boyutları $L_x=3\Delta x$, $L_y=3\Delta y$ ve $L_z=3\Delta z$ ’dir. Diğer parametreler $\phi=1$, $\rho=1$ ve $V=1.5$ olarak alınmıştır. Difüzyon katsayısı, Γ ise hücresel Peclet sayısına bağlı olarak aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$Pe_{\Delta} = \frac{\rho V \Delta x}{\Gamma} \quad (5.19)$$

5.4.2. Yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar kullanılarak elde edilen çözümler

Problem akışın yz-ekseni ile yaptığı açının $\theta=90^\circ$, 45° ve 22.5° olması ve hücresel Peclet sayısının $Pe_{\Delta}=10$, 100 ve 1000 olması durumu için yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar ile çözülmüştür. Bölüm 5.1-5.3'te çözülen tüm problemlerde monotonik sonuç veren CLAM, CUBISTA, KOREN, MINMOD, MUSCL, OSHER, SUPERBEE, SUPER-C, UMIST ve WACEB yaklaşımları ile çözümler yapılmıştır. Belirtik (explicit) yöntemle çözülen yaklaşımlarda en büyük zaman adımı aşağıdaki bağıntı ile belirlenmiştir:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\left(\frac{u}{\Delta x} + \frac{v}{\Delta y} + \frac{w}{\Delta z} + \frac{2\Gamma}{\Delta x^2} + \frac{2\Gamma}{\Delta y^2} + \frac{2\Gamma}{\Delta z^2}\right)} \quad (5.20)$$

En küçük zaman adımı; akış açısına bağlı olarak değişen akış hızı ve difüzyon katsayısına bağlı olarak değişmektedir. Bütün akış açısı ve Peclet sayılarında $\Delta t=0.025$ ve $\Delta t=0.01$ olmak üzere iki farklı zaman adımı için çözümler yapılmış, yaklaşımların hataları Denklem (5.4)'e göre hesaplanarak Tablo 5.20-Tablo 5.22'de karşılaştırılmıştır. Ayrıca, tüm durumlarda skalerin merkezinden geçen akış çizgisi boyunca boyutsuzlaştırılmış skalerin değeri Şekil 5.30-Şekil 5.38'de gösterilmiştir.

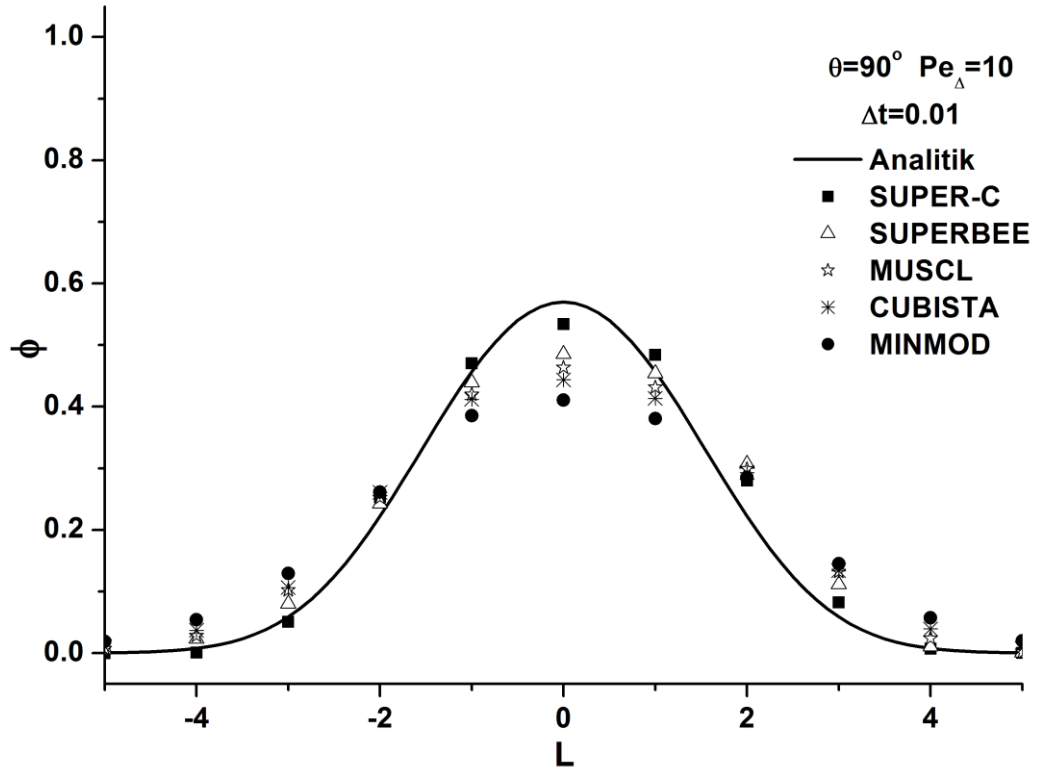
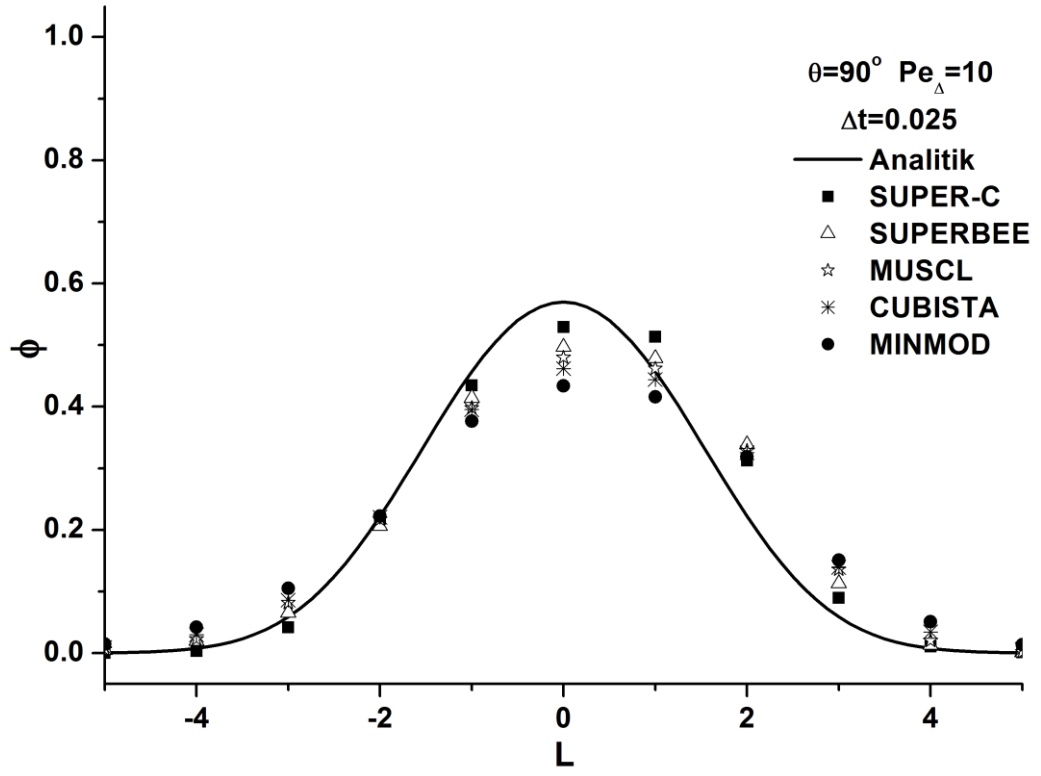
Akışın sayısal ağa paralel olması ($\theta=90^\circ$) durumunda farklı Peclet sayıları ve zaman adımları için yaklaşımların hataları Tablo 5.20'de verilmiştir. Tablo 5.20'de verilen yaklaşımların hataları incelendiğinde, yaklaşımların bir kaç gruba ayrılabilceği görülmektedir. Tüm Peclet sayıları ve zaman adımlarında SUPER-C ve SUPERBEE en az hata içeren yaklaşımlar olmakta, bu yaklaşımları KOREN, MUSCL ve WACEB izlemektedir. Bu yaklaşımlar arasındaki fark çok azdır. Bir başka grup olan CUBISTA, CLAM ve UMIST yaklaşımlarındaki hata sırasıyla artmaya devam etmektedir. En çok hata içeren yaklaşımlar sırasıyla MINMOD ve OSHER olmaktadır. Bu sıralamanın neredeyse bütün durumlarda aynı olduğu görülmektedir.

Tablo 5.20: Yaklaşımların farklı Peclet sayıları ve farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=90^\circ$

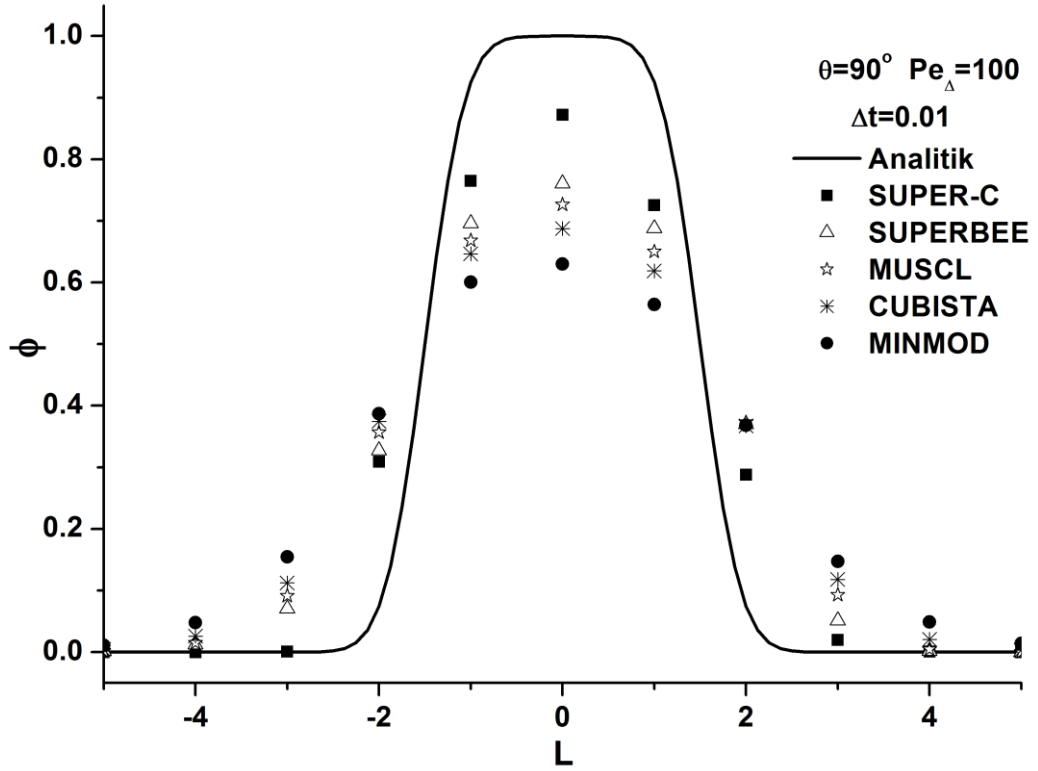
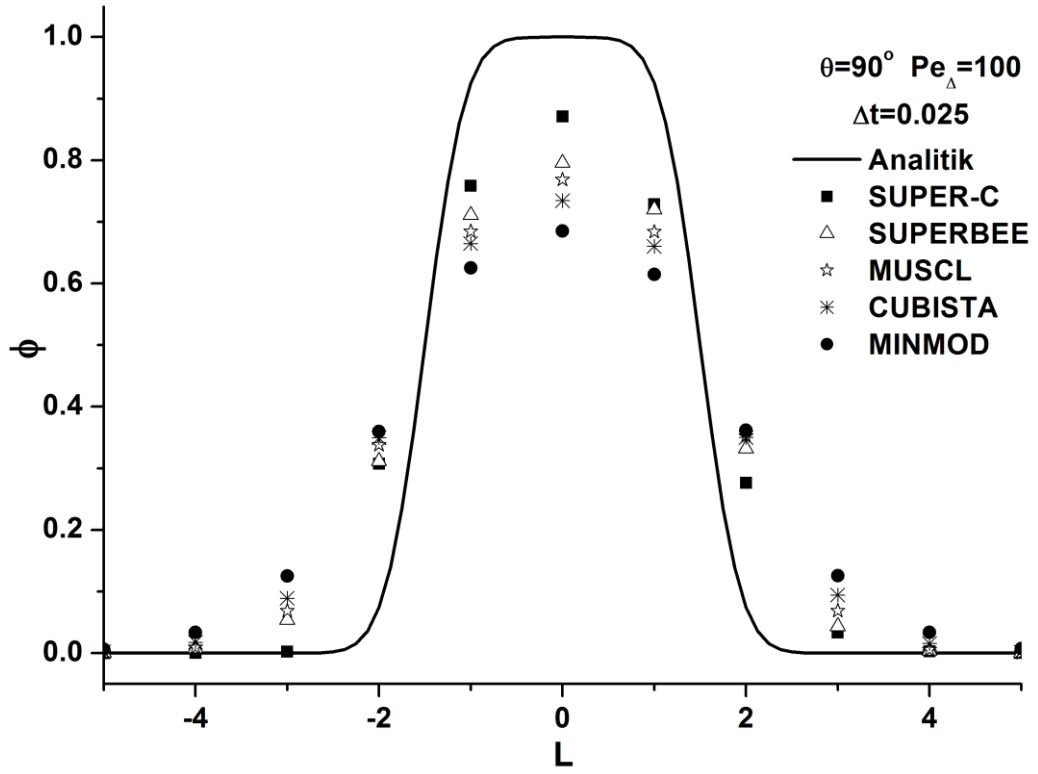
Pe _Δ =10						
Δt=0.025				Δt=0.01		
1	SUPERC	3.8014		1	SUPERC	3.2522
2	SUPERBEE	4.8472		2	SUPERBEE	4.6468
3	KOREN	5.6394		3	MUSCL	6.1016
4	MUSCL	5.6628		4	KOREN	6.1523
5	WACEB	5.6984		5	WACEB	6.3089
6	CLAM	6.3845		6	CUBISTA	7.2551
7	CUBISTA	6.3929		7	CLAM	7.2617
8	UMIST	6.5190		8	UMIST	7.5041
9	OSHER	7.2172		9	OSHER	7.9596
10	MINMOD	8.1630		10	MINMOD	9.5319
Pe _Δ =100						
Δt=0.025				Δt=0.01		
1	SUPERC	8.7255		1	SUPERC	8.6280
2	SUPERBEE	11.1495		2	SUPERBEE	12.5559
3	MUSCL	12.7339		3	MUSCL	14.3571
4	KOREN	12.9348		4	KOREN	14.4830
5	WACEB	13.1023		5	WACEB	14.7132
6	CLAM	14.0507		6	CLAM	15.9298
7	CUBISTA	14.1355		7	CUBISTA	16.0212
8	UMIST	14.2054		8	UMIST	16.1506
9	OSHER	14.6315		9	OSHER	16.7716
10	MINMOD	16.5497		10	MINMOD	18.8741
Pe _Δ =1000						
Δt=0.025				Δt=0.01		
1	SUPERC	8.4137		1	SUPERC	8.3071
2	SUPERBEE	10.5904		2	SUPERBEE	12.1389
3	MUSCL	12.2427		3	MUSCL	13.9555
4	KOREN	12.4735		4	KOREN	14.0924
5	WACEB	12.6754		5	WACEB	14.3341
6	CLAM	13.6000		6	CLAM	15.5736
7	CUBISTA	13.6786		7	CUBISTA	15.6779
8	UMIST	13.7552		8	UMIST	15.7910
9	OSHER	14.1726		9	OSHER	16.4328
10	MINMOD	16.1724		10	MINMOD	18.6025

Tablo 5.20 incelendiğinde en az hatanın $Pe_{\Delta}=10$ için yapılan çözümlerde olduğu görülmektedir. Şekil 5.30'dan da görülebileceği gibi difüzyon nedeniyle analitik çözümdeki maksimum ϕ değeri 1'den 0.57'ye kadar inmiştir. Zaman adımının küçülmesi ile SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarındaki hata miktarında bir azalma, diğer tüm yaklaşımlarda ise bir artma görülmektedir. Dolayısıyla, küçük zaman adımı ($\Delta t=0.01$) kullanılması halinde SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarında skaler profilin tepe bölgesinde analitik çözüme doğru bir yükselme, diğer yaklaşımlarda ise bir çökme görülmektedir.

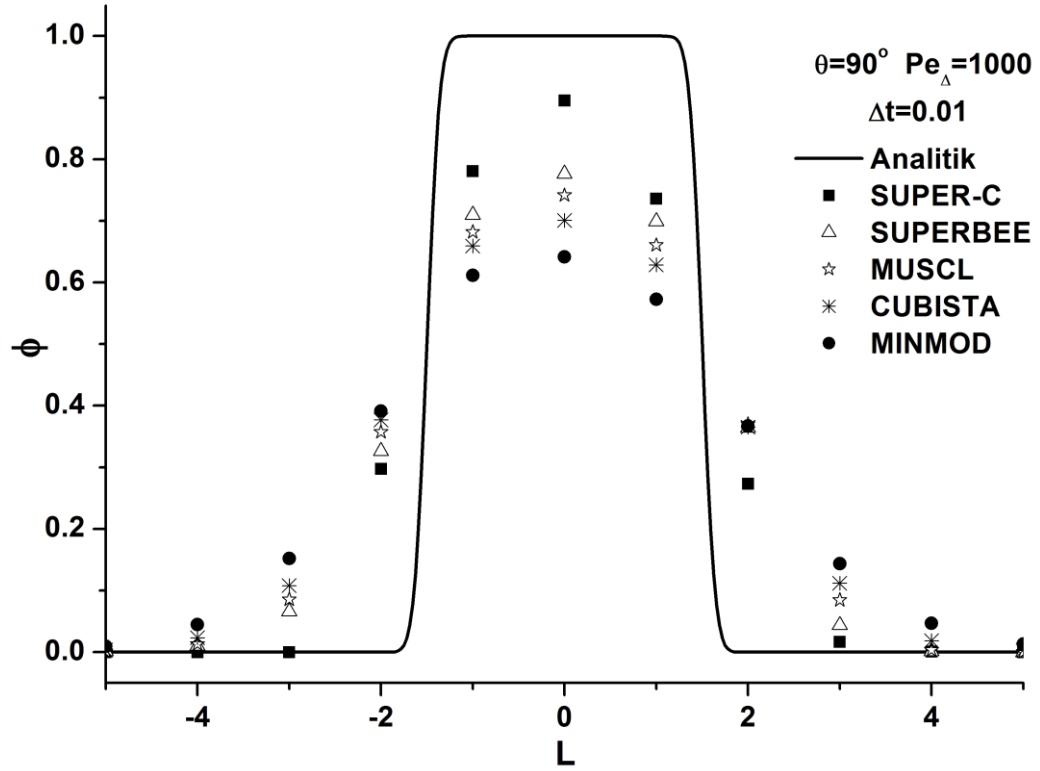
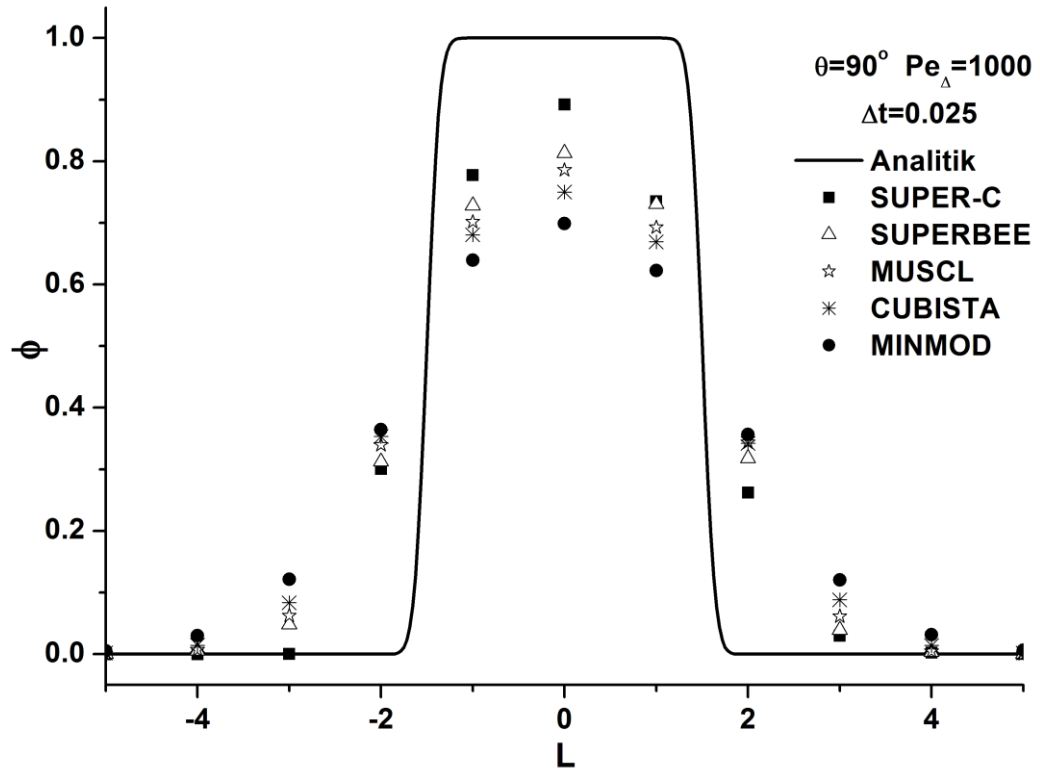
Tablo 5.20'de $Pe_{\Delta}=10$ ve $Pe_{\Delta}=100$ için yaklaşımların hataları incelendiğinde, hücresel Peclet sayısının artmasıyla bütün yaklaşımlardaki hataların ciddi oranda arttığı görülmektedir. Ancak $Pe_{\Delta}=1000$ için yaklaşımların hatalarındaki artış çok az olmaktadır. Bunun nedeni, belirli bir hücresel Peclet değerinden sonra difüzyon etkisinin fark edilmeyecek kadar az olmasıdır. Bu durum $Pe_{\Delta}=100$ için sonuçların verildiği Şekil 5.31 ile $Pe_{\Delta}=1000$ için sonuçların verildiği Şekil 5.32'den açıkça görülmektedir. Bahsi geçen şekiller incelendiğinde yaklaşımların maksimum hata değerinde de bir artma olduğu görülmektedir. Örneğin $\Delta t=0.01$ alınarak $Pe_{\Delta}=10$ için yapılan çözümlerde SUPER-C ve MINMOD yaklaşımlarındaki en büyük hata sırasıyla 0.035 ve 0.16 iken, aynı zaman adımı ve $Pe_{\Delta}=100$ için yapılan çözümlerde SUPER-C yaklaşımındaki maksimum hata 0.12, MINMOD yaklaşımında ise 0.36 olmaktadır.



Şekil 5.30: Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümlerle karşılaştırılması. $\theta=90^\circ$, $Pe_\Delta=10$



Şekil 5.31: Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=90^\circ$, $Pe_\Delta=100$



Şekil 5.32: Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=90^\circ$, $Pe_\Delta=1000$

Akış açısının $\theta=45^\circ$ olması durumunda yaklaşımların farklı hücresel Peclet sayıları için hata değerleri Tablo 5.21’de verilmiştir. Tablo 5.21 incelendiğinde yaklaşımların hatalarının akışın sayısal ağı paralel olduğu duruma göre arttığı ve sıralamadaki yerlerinin değiştiği görülmektedir.

$Pe=10$ için yapılan çözümlerde sıralamada ilk beşte yer alan yaklaşımların sıralamadaki yeri değişmekte, diğer yaklaşımların sıralamadaki yerinin akışın sayısal ağı dik olduğu durum ile aynı olduğu görülmektedir. $\Delta t=0.025$ olması halinde analitik çözüme en yakın sonucu WACEB yaklaşımı vermekte, bu yaklaşımı KOREN, SUPERBEE, MUSCL ile $\theta=90^\circ$ olması halinde en az hata içeren SUPER-C takip etmektedir. $\Delta t=0.01$ seçilmesi halinde ise SUPER-C yaklaşımı sıralamada ilk sırada yer almaktadır.

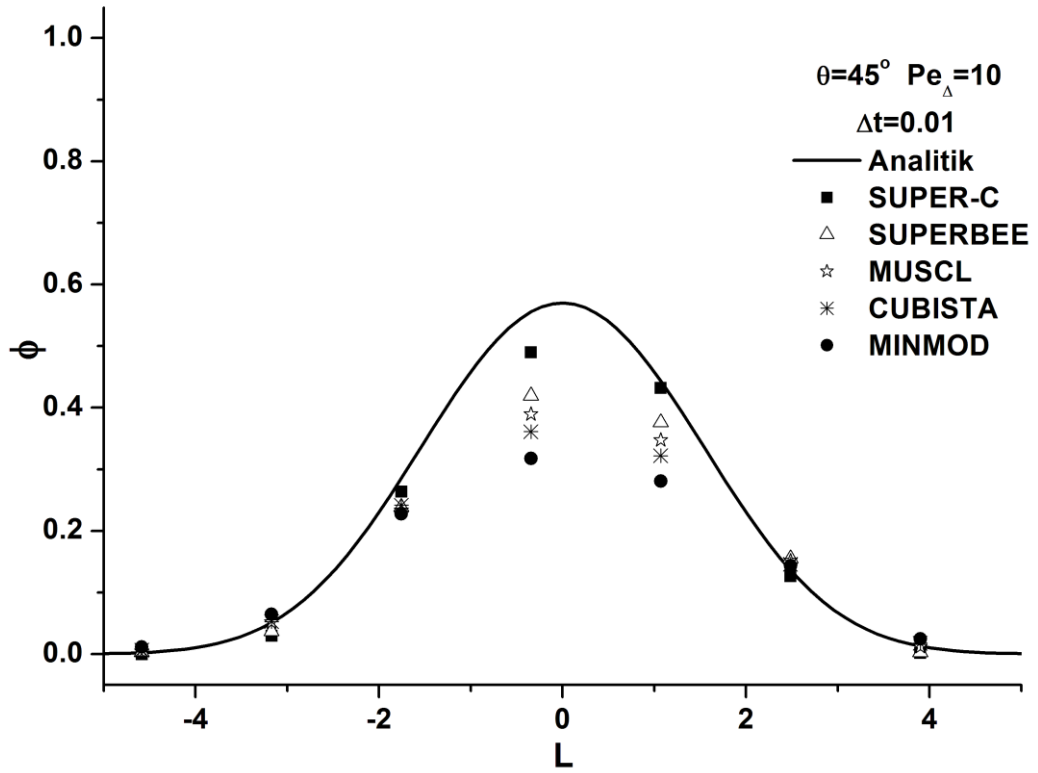
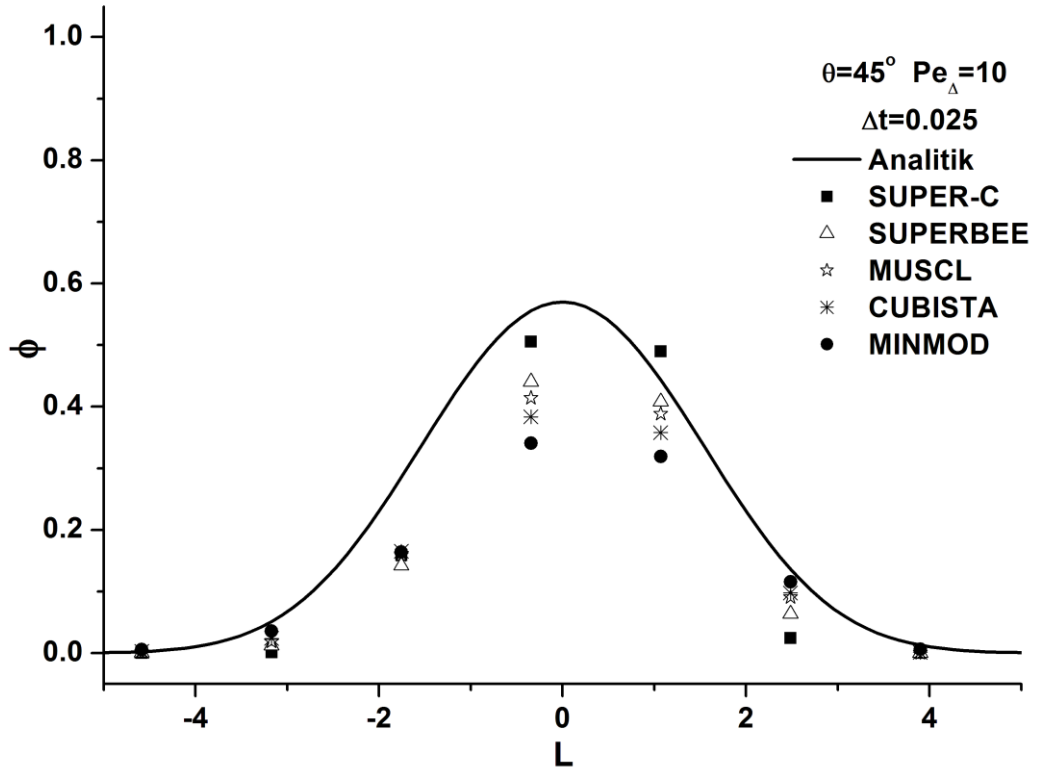
$Pe_\Delta=100$ olması halinde analitik çözüme en yakın sonuç veren yaklaşımın SUPER-C olduğu görülmektedir. Şekil 5.34 incelendiğinde SUPER-C yaklaşımının skaler profilin tepe noktasını oldukça iyi yakaladığı ancak profilin sol tarafında undershoot (sınıraltı) yaptığı görülmektedir. $\Delta t=0.01$ alınması halinde SUPER-C ve SUPERBEE haricindeki tüm yaklaşımlarda hataların arttığı görülmektedir. Öte yandan, SUPER-C yaklaşımı ile elde edilen çözümde hâlâ overshoot (sınırustü) görülmektedir. Bu durumda monotonik sonuç veren yaklaşımlardan analitik çözüme en yakın sonucu veren yaklaşım SUPERBEE olmaktadır. Bu yaklaşımı hata değerlerinde çok az fark bulunan KOREN, MUSCL ve WACEB yaklaşımları takip etmektedir. Şekil 5.34’ten de görülebileceği gibi bütün yaklaşımlar skaler profilin tepe noktası haricinde birbirine yakın sonuç vermektedir. Bu bölgede difüzyif bir davranış gösteren MINMOD yaklaşımı en çok hata içeren yaklaşımdır.

$Pe_\Delta=1000$ için sonuçların verildiği Şekil 5.35 incelendiğinde, SUPER-C yaklaşımının yine undershoot (sınıraltı) yaptığı görülmektedir. Undershoot (sınıraltı) mertebesi artan hücresel Peclet sayısı ve zaman adımı ile iyice belirginleşmektedir. $Pe_\Delta=100$ için yapılan çözümde farklı olarak, küçülen zaman adımında SUPERBEE ile elde edilen çözümdeki hatanın diğer yaklaşımlarda olduğu gibi arttığı görülmektedir. $Pe_\Delta=1000$ için yapılan çözümlerdeki yaklaşımların davranışı ve sıralamadaki yeri $Pe_\Delta=100$ için yapılan çözümler ile neredeyse aynıdır.

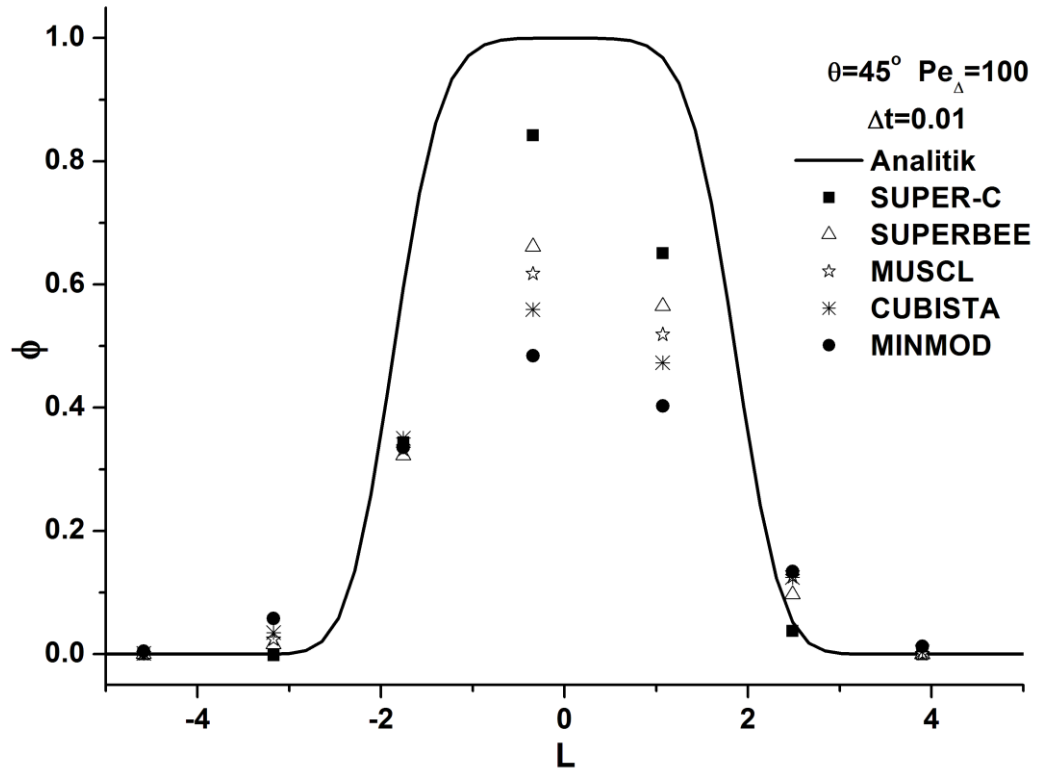
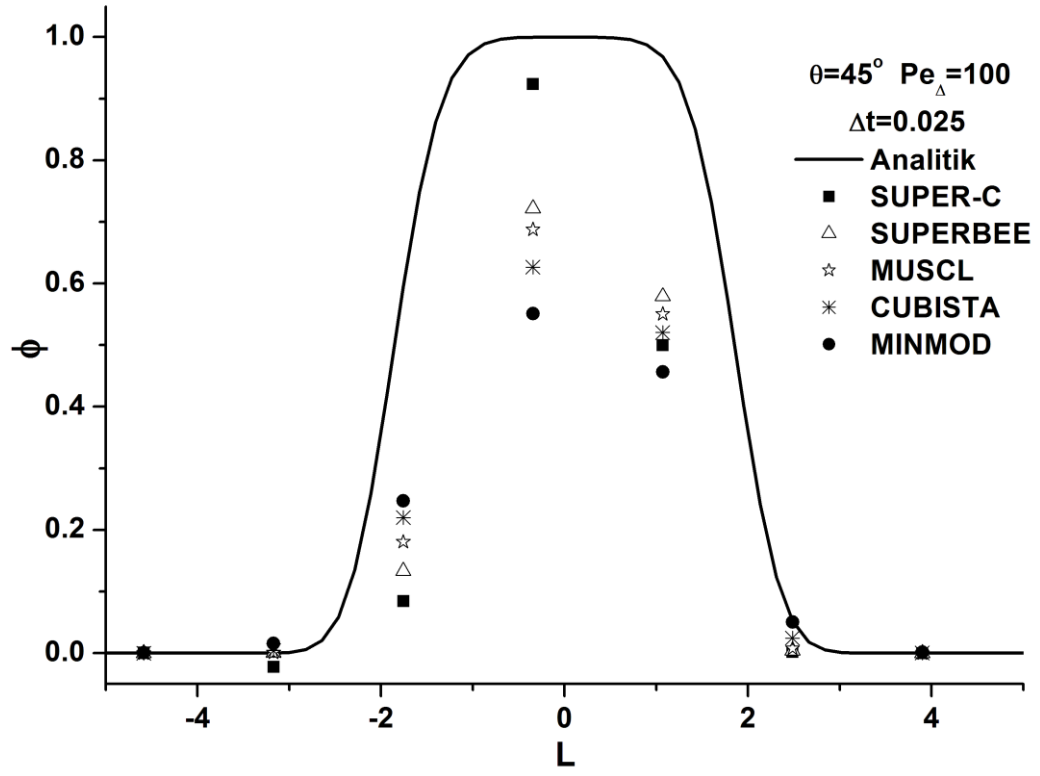
Tablo 5.21: Yaklaşımların farklı Peclet sayıları ve farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=45^\circ$

Pe_A=10					
Δt=0.025			Δt=0.01		
1	WACEB	9.8885	1	SUPERC	4.7692
2	KOREN	9.9259	2	SUPERBEE	6.2952
3	SUPERBEE	9.9908	3	KOREN	7.2267
4	MUSCL	10.0004	4	MUSCL	7.2928
5	SUPERC	10.2181	5	WACEB	7.3457
6	CUBISTA	10.3299	6	CUBISTA	8.5698
7	CLAM	10.3543	7	CLAM	8.6284
8	UMIST	10.3712	8	UMIST	8.9184
9	OSHER	11.2791	9	OSHER	9.7282
10	MINMOD	11.5213	10	MINMOD	11.4058
Pe_A=100					
Δt=0.025			Δt=0.01		
1	SUPERC*	14.3033	1	SUPERC*	10.6949
2	SUPERBEE	16.7759	2	SUPERBEE	16.4415
3	MUSCL	17.535	3	KOREN	18.2625
4	KOREN	17.6327	4	MUSCL	18.2686
5	WACEB	17.7311	5	WACEB	18.4069
6	UMIST	18.6066	6	CUBISTA	19.9662
7	CLAM	18.6838	7	CLAM	19.989
8	CUBISTA	18.8688	8	UMIST	20.2171
9	OSHER	19.7216	9	OSHER	21.4283
10	MINMOD	21.2582	10	MINMOD	23.0584
Pe_A=1000					
Δt=0.025			Δt=0.01		
1	SUPERC*	19.1344	1	SUPERC*	17.7562
2	SUPERBEE	22.3046	2	SUPERBEE	23.7897
3	MUSCL	23.6114	3	KOREN	25.6439
4	KOREN	23.7604	4	MUSCL	25.6505
5	WACEB	23.9184	5	WACEB	25.7957
6	UMIST	25.2225	6	CUBISTA	27.4161
7	CLAM	25.2254	7	CLAM	27.4351
8	CUBISTA	25.3544	8	UMIST	27.6607
9	OSHER	26.6008	9	OSHER	28.9353
10	MINMOD	28.3402	10	MINMOD	30.601

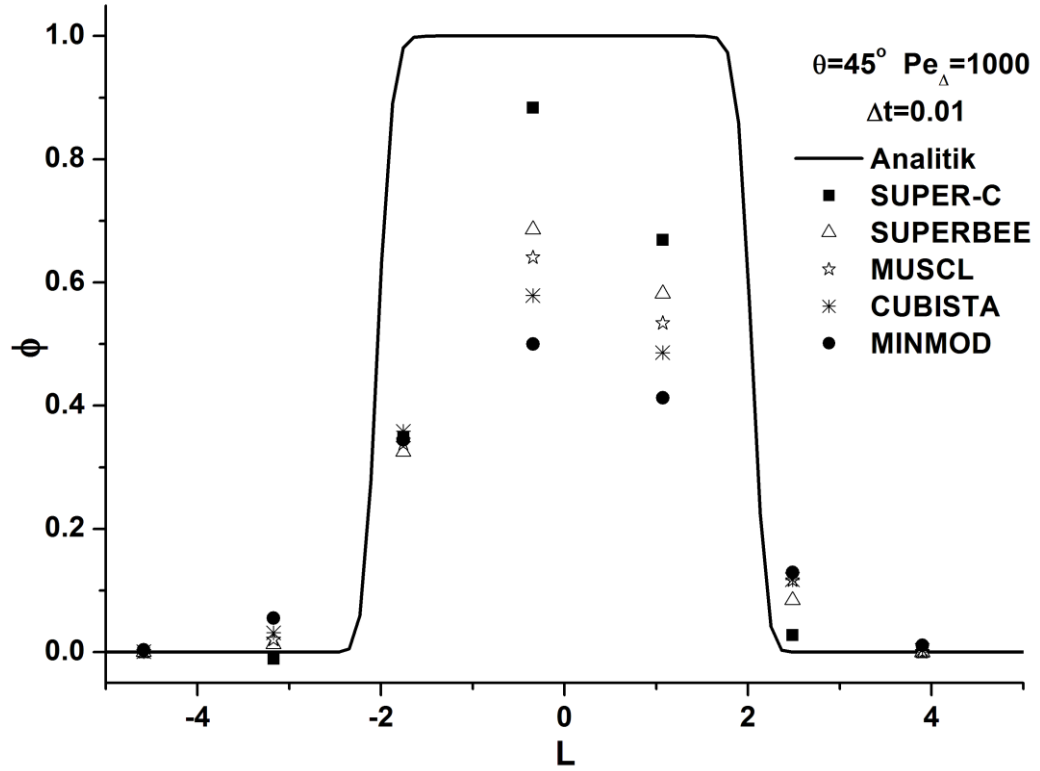
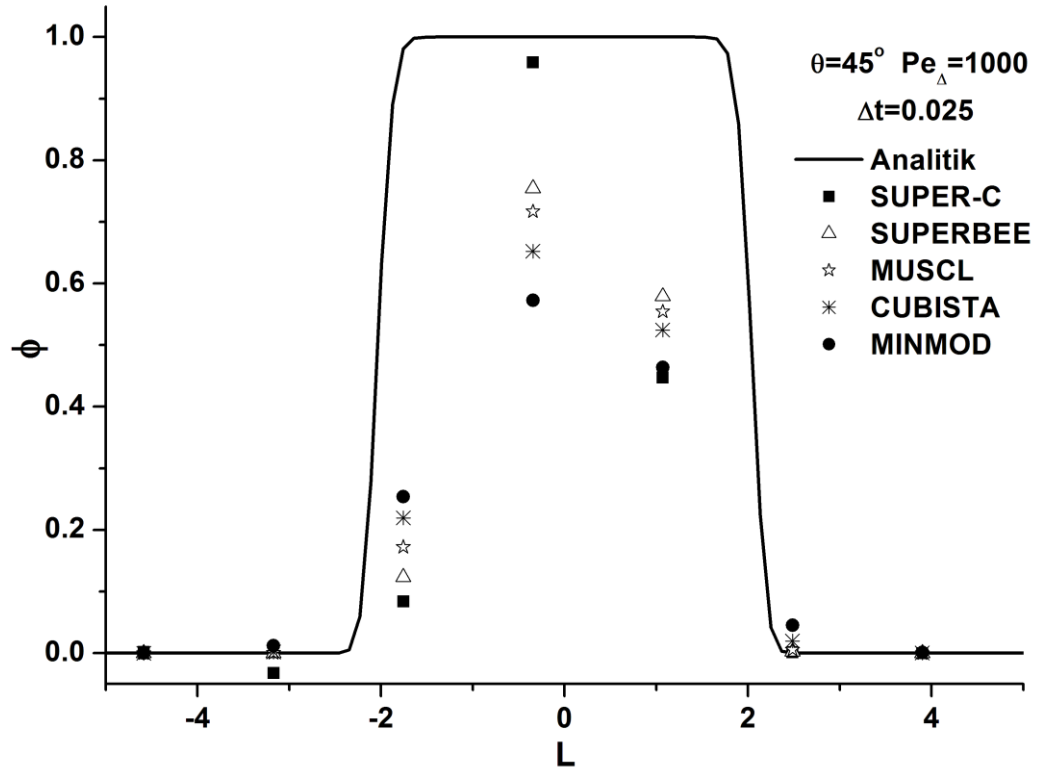
* Undershoot (sınırlı) yapan yaklaşımlar



Şekil 5.33: Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=45^\circ$, $Pe_\Delta=10$



Şekil 5.34: Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=45^\circ$, $Pe_\Delta=100$



Şekil 5.35: Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=45^\circ$, $Pe_\Delta=1000$

Akış açısının $\theta=22.5^\circ$ olması durumunda yaklaşımların farklı hücresel Peclet sayıları için hata değerleri Tablo 5.22’de verilmiştir. Farklı akış açılarındaki hataların verildiği Tablo 5.20-Tablo 5.22 incelendiğinde, $\theta=22.5^\circ$ olması halinde yaklaşımların hatalarının $\theta=45^\circ$ ’deki duruma göre daha az, akışın sayısal ağa paralel olduğu ($\theta=90^\circ$) duruma göre ise daha çok olduğu görülmektedir. Yani tüm yaklaşımlarda maksimum hata $\theta=45^\circ$, minimum hata ise $\theta=90^\circ$ olması halinde meydana gelmektedir.

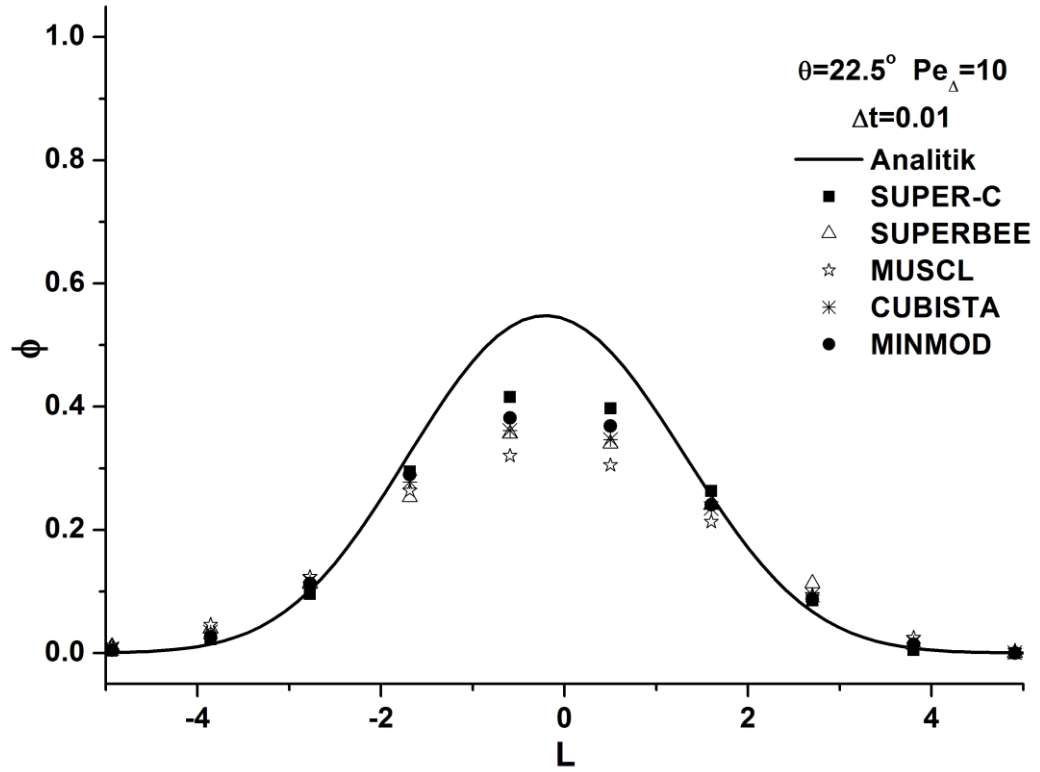
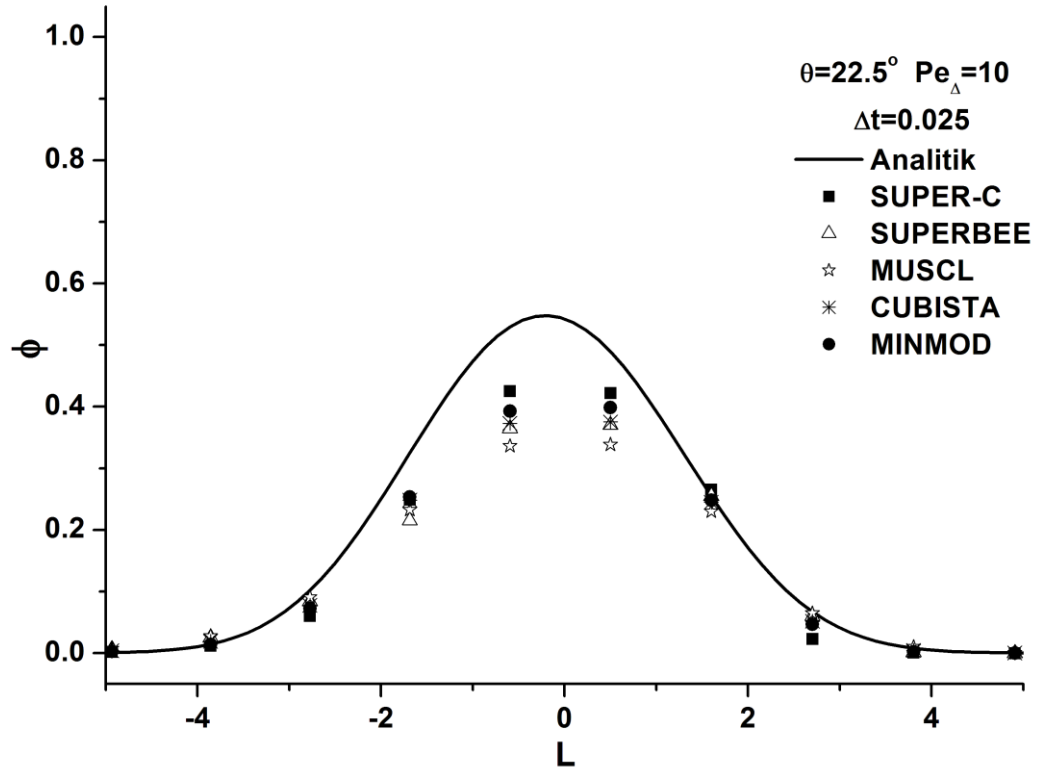
Tablo 5.22 incelendiğinde $Pe_\Delta=10$ için yapılan çözümlerde her iki zaman adımında da SUPER-C’nin en az hata içeren yaklaşım olduğu görülmektedir. Zaman adımının küçük seçilmesiyle MINMOD haricindeki bütün yaklaşımların hata değerlerinde azalma olmaktadır. En ciddi azalma SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımlarında görülmektedir. Bu durum Şekil 5.36’da görülebilir.

$Pe_\Delta=100$ olması halinde analitik çözüme en yakın sonuç veren yaklaşımın SUPER-C olduğu görülmektedir. Ancak Şekil 5.37’de görülmemesine rağmen bu yaklaşım çözümde undershoot (sınırlı) yapmaktadır. Çözümde undershoot (sınırlı) veya overshoot (sınırlı) yapmadan analitik çözüme en yakın sonucu SUPERBEE yaklaşımı vermekte, bu yaklaşımı MUSCL ve KOREN yaklaşımları takip etmektedir. Daha önceki durumlarda olduğu gibi en çok hata difüzyif bir davranış gösteren MINMOD yaklaşımında görülmektedir. $Pe_\Delta=1000$ için yapılan çözümlerde yaklaşımların davranışları $Pe_\Delta=100$ ’deki durum ile benzerdir.

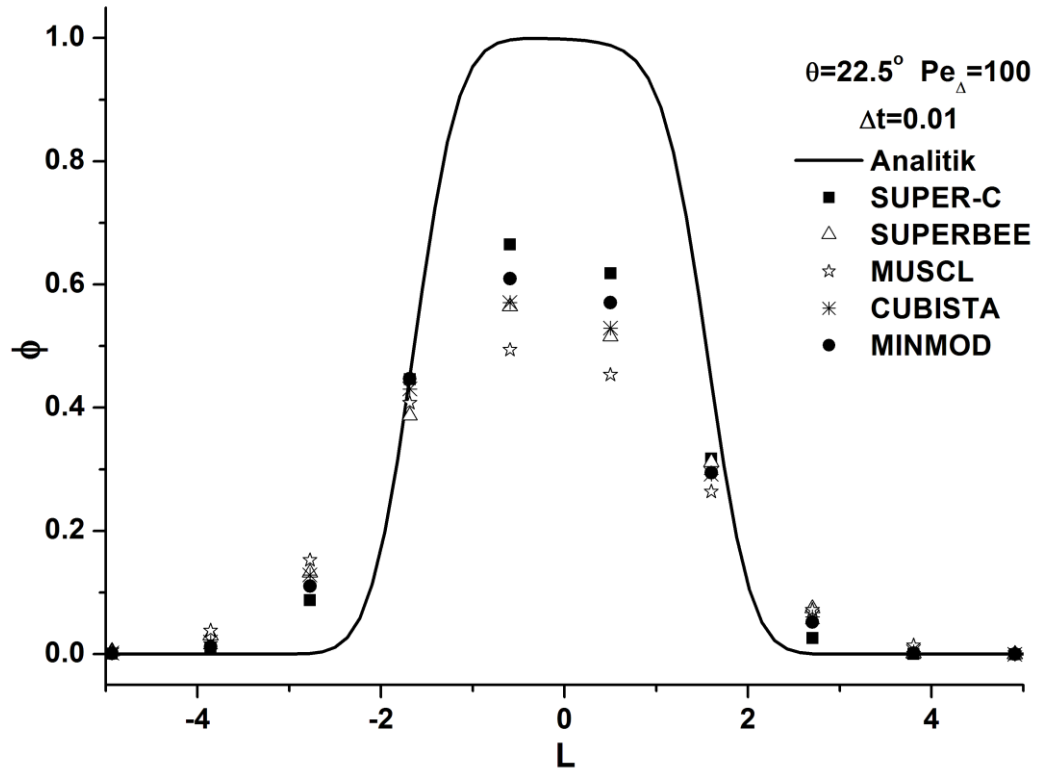
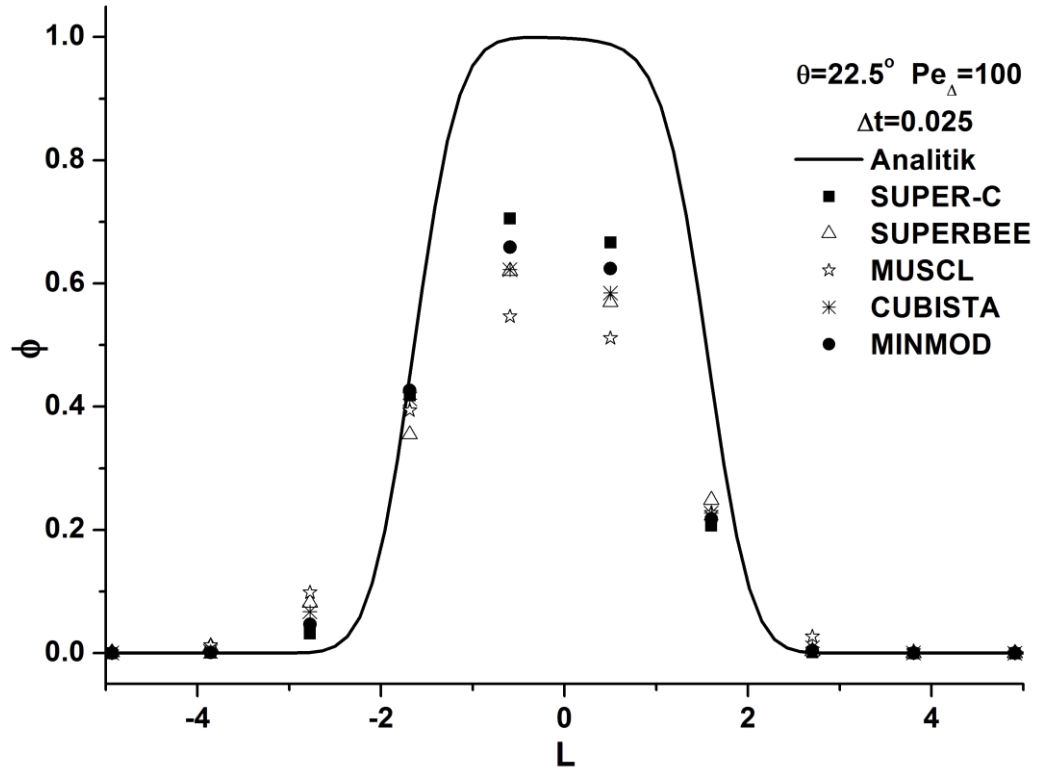
Tablo 5.22: Yaklaşımların farklı Peclet sayıları ve farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=22.5^\circ$

Pe _Λ =10						
Δt=0.025				Δt=0.01		
1	SUPERC	7.5696		1	SUPERC	3.9459
2	SUPERBEE	8.1896		2	SUPERBEE	5.6298
3	KOREN	8.3179		3	KOREN	6.8558
4	WACEB	8.3182		4	MUSCL	6.8987
5	MUSCL	8.3726		5	WACEB	6.976
6	CUBISTA	8.8854		6	CUBISTA	8.1075
7	CLAM	8.9079		7	CLAM	8.1868
8	UMIST	8.9601		8	UMIST	8.4415
9	OSHER	9.8472		9	OSHER	9.1857
10	MINMOD	10.4146		10	MINMOD	10.824
Pe _Λ =100						
Δt=0.025				Δt=0.01		
1	SUPERC*	11.6142		1	SUPERC*	8.4263
2	SUPERBEE	13.0946		2	SUPERBEE	12.3908
3	MUSCL	13.9517		3	KOREN	14.2123
4	KOREN	14.0594		4	MUSCL	14.2242
5	WACEB	14.2094		5	WACEB	14.3837
6	CLAM	15.1317		6	CUBISTA	15.9020
7	UMIST	15.1521		7	CLAM	15.9927
8	CUBISTA	15.2774		8	UMIST	16.2815
9	OSHER	16.1393		9	OSHER	17.4374
10	MINMOD	17.7781		10	MINMOD	19.3674
Pe _Λ =1000						
Δt=0.025				Δt=0.01		
1	SUPERC*	15.0891		1	SUPERC*	13.1985
2	SUPERBEE	16.6260		2	SUPERBEE	17.3617
3	MUSCL	17.8774		3	MUSCL	19.1966
4	KOREN	18.1066		4	KOREN	19.2814
5	WACEB	18.3208		5	WACEB	19.4900
6	CLAM	19.3098		6	CLAM	20.9054
7	UMIST	19.3721		7	CUBISTA	20.9060
8	CUBISTA	19.4506		8	UMIST	21.1362
9	OSHER	19.8774		9	OSHER	21.8565
10	MINMOD	22.0284		10	MINMOD	23.9476

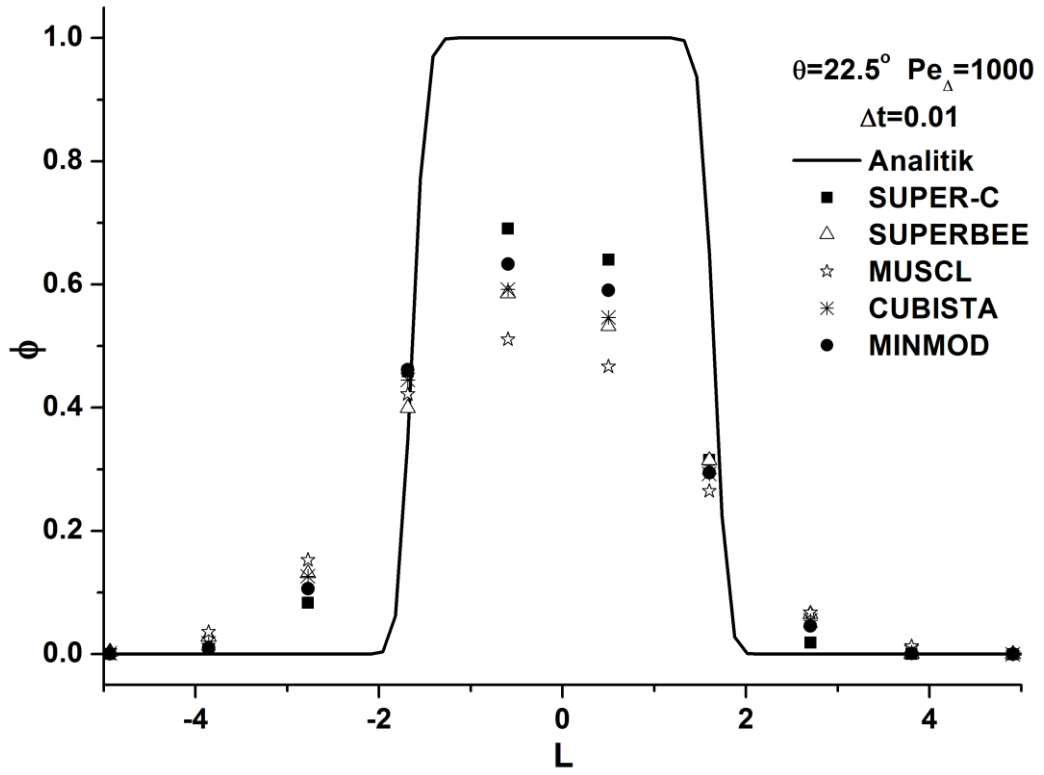
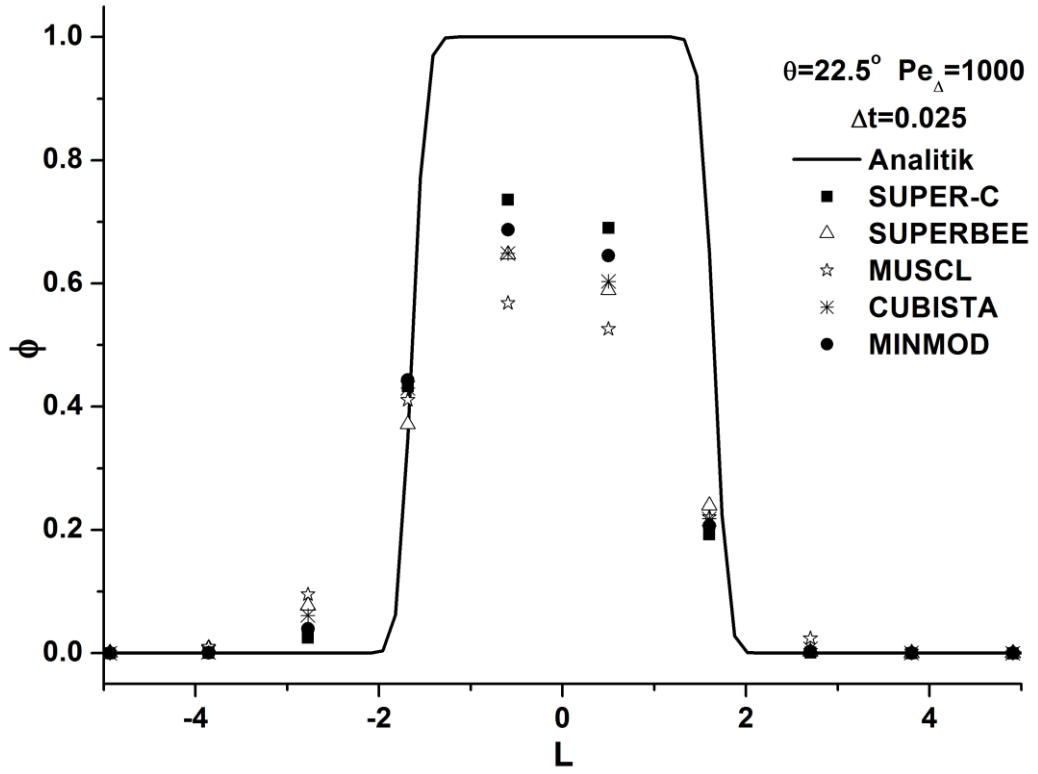
* Undershoot (sınırlı) yapan yaklaşımlar



Şekil 5.36: Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=22.5^\circ$, $Pe_\Delta=10$



Şekil 5.37: Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=22.5^\circ$, $Pe_\Delta=100$



Şekil 5.38: Yaklaşımların farklı zaman adımları ile elde edilen çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması. $\theta=22.5^\circ$, $Pe_\Delta=1000$

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Konveksiyon terimlerinin ayırıklaştırılmasında kullanılan yaklaşımların incelendiği bu çalışma esas olarak iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda (Bölüm 2 ve Bölüm 3) ikinci mertebeden klasik ayırıklaştırma yaklaşımları, ikinci kısımda (Bölüm 4 ve Bölüm 5) ise sınırlandırılmış yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar incelenmiştir. Bu bölümde öncelikle çeşitli problemler çözülerek elde edilen sonuçlar sunulmuş, daha sonra bu sonuçlar ışığında yapılan öneriler verilmiştir.

6.1. Sonuçlar

İlk kısmında ikinci mertebeden klasik ayırıklaştırma yaklaşımlarının karşılaştırıldığı bu çalışmada 3 yeni yaklaşım önerilmiştir. Bu yaklaşımlar farklı bir yorum getirilerek tekrar incelenen ikinci mertebeden upwind (SOU) yaklaşımı, Fromm yaklaşımı ve bu iki yaklaşımın karışımı olan Karma yaklaşımıdır. Bu üç yaklaşım, literatürde önerilen ikinci mertebeden upwind yaklaşımı ve iki adet ticari programdaki (PP1 ve PP2) ikinci mertebeden upwind yaklaşımları ile karşılaştırılmıştır. Bahsi geçen altı yaklaşımı karşılaştırmak amacıyla üç farklı problem çözülmüştür: a) Hareketin nedeninin viskoz kuvvetler olduğu bir kenarı hareketli dikdörtgen oyuktaki akış problemi b) Hareketin nedeninin kaynak terimler olduğu dikdörtgen bir oyuktaki doğal konveksiyon problemi c) Hareketin nedeninin konveksiyon terimler olduğu geriye bakan bir basamak arkasındaki akış problemi.

Bir kenarı hareketli dikdörtgen oyuktaki akış probleminde 100, 400 ve 1000 olmak üzere üç farklı Reynolds sayısı ve 11x11, 21x21, 41x41 ve 81x81 olmak üzere dört farklı ağ sıklığı için çözümler yapılmıştır. Dikdörtgen bir oyuktaki doğal konveksiyon probleminde 10^4 , 10^5 ve 10^6 olmak üzere üç farklı Rayleigh sayısı ve 11x11, 21x21, 41x41 ve 81x81 olmak üzere dört farklı ağ sıklığı için çözümler yapılmıştır. Geriye bakan bir basamak arkasındaki akış probleminde ise 100, 400 ve 600 olmak üzere üç farklı Reynolds sayısı ve 201x11, 401x21 ve 801x41 olmak

üzere üç farklı ağ sıklığı için çözümler yapılmıştır. Çözümler sonucunda elde edilen bulgular aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- Viskoz kuvvetlerin etkili olduğu (küçük Reynolds veya küçük Rayleigh sayılarında) akışlarda bütün yaklaşımlar neredeyse aynı sonucu vermektedir. Ancak seyrek ağlarda yaklaşımlar arasında farklılık görülmekte ve test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu bu çalışmada farklı bir yorum getirilen SOU yaklaşımı vermektedir.
- Bu çalışmada tavsiye edilen SOU yaklaşımı ile Shyy tarafından önerilen SOU yaklaşımı arasında sık ağlarda bir fark olmamakta, seyrek ağlarda bu çalışmada önerilen SOU yaklaşımı daha iyi sonuç vermektedir.
- Ağdan bağımsız sonuçlar elde etmek için ticari programlar SOU, Fromm, Karma ve Shyy yaklaşımlarına göre daha sık bir ağı gereksinim duymaktadır.
- Özellikle cidara yakın bölgelerde ticari programlardaki hata büyüktür.
- Viskoz kuvvetlerin etkisinin azalması (Reynolds veya Rayleigh sayılarının artması) ile yaklaşımlar arasındaki fark özellikle seyrek ağlarda belirginleşmektedir. Bu durumda da test problemi (benchmark) sonuçlarına en yakın sonucu bu çalışmada önerilen SOU yaklaşımı vermektedir.

Çalışmanın ikinci kısmında incelenen sınırlandırılmış yüksek çözünürlüklü yaklaşımlar belirtik (explicit) yöntem kullanılarak dört farklı test problemine uygulanarak karşılaştırılmıştır.

Birinci problemde CLAM, COPLA, CUBISTA, EULER- HOAB- H-QUICK, KOREN, MINMOD, MUSCL, OSHER, OSPRE, SECBC, SHARP, SMART, SMARTER, STOIC, SUPERBEE, SUPER-C, UMIST, VONOS ve WACEB olmak toplam 21 yüksek çözünürlüklü yaklaşım incelenmiştir. Bu yaklaşımlar dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklindeki skaler profillerin bir boyutlu sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması problemine uygulanmıştır. Bu problemde yaklaşımların skaler profilleri undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapmadan çözüp çözemeyeceğini test etmek için CFL=0.98, 0.5, 0.25, 0.1 ve 0.05 olmak üzere beş farklı CFL sayısı alınarak boyutsuz zamanın 50, 100 ve 250 olması

durumu için çözümler yapılmıştır. Bundan sonraki problemlerde, bu problemde undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapan COPLA, EULER, HOAB, H-QUICK, OSPRE, SECBC, SHARP, SMART, SMARTER, STOIC ve VONOS yaklaşımları çıkarılmış, tüm CFL sayılarında monotonik sonuç veren CLAM, CUBISTA, KOREN, MINMOD, MUSCL, OSHER, SUPERBEE, SUPER-C, UMIST ve WACEB yaklaşımları ile çözümler yapılmıştır. İkinci problemde de dikdörtgen, yarı-elips, sinüs-kare ve üçgen şeklinde ϕ gibi bir skalerin konveksiyon ile taşınması incelenmiştir. Ancak bu problemde sabit hız alanı yerine değişken bir hız alanı kullanılmıştır. Dolayısıyla, skaler profillerin her bir noktasındaki taşınma hızı mekâna bağlı olarak değişmektedir. Hız alanına bağlı olarak skaler profil genişliğinde bir genişleme/daralma, ayrıca dikdörtgen haricindeki skaler profillerin şeklinde değişimler olmakta ve profildeki simetri kaybolmaktadır. Hızların skaler profil boyunca değişmesinden dolayı, CFL sayısı hesaplarında maksimum hız referans olarak alınmıştır. Maksimum CFL sayısının 1.0, 0.75, 0.5, 0.25 ve 0.1 olmak üzere beş farklı değeri ve 25, 50, 75, 100, 250 ve 500 olmak üzere 6 farklı zaman için çözümler yapılmıştır. Üçüncü problemde, viskoz olmayan Burgers denklemi çözülmüştür. Bu problemde testere dişi şeklindeki bir dalganın $t=0.1$ anındaki değeri başlangıç şartı olarak alınıp, maksimum CFL sayısının 1.0, 0.75, 0.5, 0.25 ve 0.1 olmak üzere beş farklı değeri ve 0.4, 0.9 ve 1.4 olmak üzere 3 farklı zaman için çözümler yapılmıştır. İlk üç problem sonucunda elde edilen bulgular aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- Karakteristik eğrileri birbirlerine yakın olan yaklaşımlar genel olarak benzer davranışlar göstermektedir.
- OSPRE ve SMARTER yaklaşımları dikdörtgen ve yarı-elips skaler profillerde, COPLA yaklaşımı dikdörtgen, yarı-elips ve sinüs-kare skaler profillerde, EULER, HOAB, H-QUICK, SECBC, SHARP, SMART, STOIC ve VONOS yaklaşımları ise bütün skaler profillerde undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapmaktadır. CFL sayısının küçülmesi ile bu yaklaşımlar monotonik sonuç verebilmektedir. Yaklaşımların monotonik sonuç verdiği CFL sayısı yaklaşımdan yaklaşıma ve profilden profile değişmektedir. Örneğin dikdörtgen skaler profilin sabit bir hız alanı içerisinde konveksiyon ile taşınması probleminde EULER ve VONOS yaklaşımları için $CFL \leq 0.1$, HOAB yaklaşımı için $CFL \leq 0.25$, COPLA, H-

QUICK, OSPRE, SECBC, SMART, SMARTER ve STOIC yaklaşımlarında ise $CFL \leq 0.5$ olması halinde bu sorun ortadan kalkmaktadır. SHARP yaklaşımı ise bütün CFL sayılarında monotonik olmayan sonuçlar vermektedir. Bu yaklaşımlardan HOAB, VONOS, STOIC, SMART ve COPLA yaklaşımları küçük CFL sayılarında çözümde undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapmamakta ve en az hata içeren yaklaşımlar arasında olmaktadır. Ancak bu yaklaşımlar tüm CFL sayılarında monotonik sonuç veren yaklaşımlar arasında olmadığından değerlendirmede üzerinde durulmamıştır. CLAM, CUBISTA, KOREN, MINMOD, MUSCL, OSHER, SUPERBEE, SUPER-C, UMIST ve WACEB yaklaşımları ise bütün CFL sayılarında monotonik sonuçlar vermiştir.

- Kompresif yaklaşımlar olarak adlandırılan, karakteristik eğrileri NVD üst limitine yakın olan SUPER-C, SUPERBEE, HOAB gibi yaklaşımlar keskin gradyenlerin olduğu bölgeleri oldukça iyi çözmekte ancak gradyenin küçük olduğu skaler profillerde (örneğin yarı-elips, sinüs-kare skaler profiller) dikleştirme/kırpma problemine sebep olmaktadır. Bu skaler profilleri sanki keskin bir gradyen değişimi varmış gibi çözmekte ve özellikle küçük CFL sayılarında skaler profilde basamaklı bir yapı oluşturmaktadır.
- Difüzif yaklaşımlar olarak adlandırılan, karakteristik eğrileri NVD alt limitine yakın olan MINMOD, CLAM gibi yaklaşımlar aşırı yapay difüzyon içermekte, dolayısıyla keskin gradyenleri yakalamakta başarılı olamamaktadır.
- Yaklaşımların sıralamadaki yeri skaler profile, CFL sayısına ve zamana bağlı olarak değişmektedir.
- Genel olarak CFL sayının azalması ile hata miktarı birçok yaklaşımda artarken, kompresif yaklaşımlarda azalmaktadır. Bu nedenle küçük CFL sayılarında kompresif yaklaşımlar ile difüzif yaklaşımlar arasındaki fark büyümektedir. Hata miktarında en çok azalma SUPER-C yaklaşımında görülmektedir. Küçük CFL sayılarında en az hata içeren yaklaşımlar arasında yer alan SUPER-C, SUPERBEE, HOAB, VONOS, STOIC gibi yaklaşımların hepsinin karakteristik eğrilerinin NVD iç bölgesinde üst limite yakın olan yaklaşımlardır. CFL sayısının azalmasıyla en çok yayılma, karakteristik eğrisi NVD alt limitine en yakın olan MINMOD yaklaşımında görülmektedir.

- CFL sayısının 1'e yakın olduğu durumlarda bütün yaklaşımların NVD iç bölgesinde karakteristik eğrileri birbirine yakın olduğundan yaklaşım hataları arasındaki fark küçüktür. Örneğin $CFL=0.98$ alınarak çözölen yarı-elips skaler profilinin sabit bir hız alanında konveksiyon ile taşınması probleminde sıralamada ilk sırada yer alan UMIST ile son sırada yer alan MINMOD yaklaşımları arasındaki hata $T=50$ anında %10'dan daha küçüktür.
- Küçük zamanlar ($T=50$) için yapılan çözümlerde özellikle CFL sayısının 1'e yakın seçilmesi halinde sıralamada ilk sırada yer alan yaklaşım profilden profile değişmektedir. Ancak yukarıda belirtildiği gibi çözümlerde yaklaşımlar arasındaki fark oldukça küçüktür.
- Genel olarak kompresif yaklaşımlar skaler profillerde çözüm başladıktan hemen sonra bir şekil almaktadır. Artan zamanla şekildeki bozulma çok az olmaktadır. Difüzyif yaklaşımlar ise özellikle değişken eğime sahip problemlerde küçük zamanlarda iyi sonuç vermekte fakat artan zamanla difüzyif davranış göstermeye devam ederek analitik çözümden uzaklaşmaktadır. Bu nedenle zamanın küçük olduğu durumlarda kompresif yaklaşımlar sıralamada geride kalabilmektedir. Ancak artan zamanla kompresif yaklaşımlardaki hata artışı, difüzyif yaklaşımlara göre çok daha azdır. Örneğin birinci problemde $T=50$ ile $T=250$ anındaki hatalar dikdörtgen skaler profil için karşılaştırıldığında hata artışının MINMOD yaklaşımında yaklaşık %76, MUSCL yaklaşımında %52, SUPERBEE yaklaşımında %7, SUPER-C yaklaşımında sadece %2 civarında olduğu görölmektedir. Yarı-elips probleminde ise hata artışı MINMOD, UMIST ve OSHER yaklaşımlarında %110'un üzerinde, CLAM, CUBISTA, WACEB, KOREN ve MUSCL yaklaşımlarında %50'nin üzerinde iken SUPERBEE ve SUPER-C yaklaşımlarındaki hata sırasıyla %8 ve %2'dir.
- Yeterince büyük zamanlarda yaklaşımlar dört gruba ayrılabilir. Neredeyse bütün skaler profil ve CFL sayılarında hata sıralamasında birinci ve ikinci sırada olan SUPER-C ve SUPERBEE yaklaşımları bir grup, sıralamadaki yeri 3 ila 5 arasında değişen MUSCL, KOREN ve WACEB yaklaşımları bir grup, 6 ila 8 arasında değişen CUBISTA, CLAM ve UMIST yaklaşımları bir grup ve hata sıralamasında en geride olan OSHER ve MINMOD yaklaşımları bir grup oluşturmaktadır.

Dördüncü problemde yaklaşımların akışın sayısal ağa paralel olmadığı, çok boyutlu problemlerdeki davranışını incelemek amacıyla başlangıç anında küp şeklinde yer kaplayan skaler bir büyüklüğün üç boyutlu bir akış alanı içerisinde konveksiyon ile taşınması ve bu esnada difüzyon ile yayılması problemi çözülmüştür. Akışın sayısal ağ ile yaptığı açının $\theta=90^\circ$, 45° ve 22.5° olmak üzere üç farklı değeri ve hücrel Peclet sayısının 10, 100 ve 1000 olması durumu için çözümler yapılmıştır. Ayrıca akış hızına ve difüzyon katsayısına bağlı olarak değişen farklı zaman adımları için çözümler tekrarlanmıştır. Çözümler sonucunda elde edilen sonuçlar aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- Yaklaşımların bu problemdeki davranışı genel olarak ilk üç problemdeki ile aynıdır. Ancak, bir boyutlu problemlerde hemen hemen bütün skaler profillerde analitik çözüme en yakın sonucu veren SUPER-C yaklaşımı bu problemde akışın sayısal ağa paralel olmadığı ($\theta=45^\circ$ ve $\theta=22.5^\circ$) güçlü konvektif akışlarda ($Pe_\Delta=100$, $Pe_\Delta=1000$) monotonik olmayan sonuçlar vermektedir. Hücrel Peclet sayısının 10 olduğu durumlarda ise çözümde undershoot (sınırlı) olmamaktadır. Artan Peclet sayısı ile undershootların (sınırlı) büyüklüğü artmaktadır.
- Tüm yaklaşımlarda en çok hata, akış ile sayısal ağ arasındaki açının $\theta=45^\circ$ olduğu durumda olmaktadır.
- Peclet sayısının artmasıyla yaklaşımlardaki hatalar artmaktadır. Ancak belli bir değerden sonraki Peclet sayıları için yapılan çözümlerde hatalardaki artış çok az olmaktadır.

6.2. Öneriler

Yukarıda sunulan sonuçlar ışığında varılan öneriler aşağıda sunulmuştur.

İlk kısımda yapılan çalışmalar sonucunda:

- Sirkülasyonlu akışlarda seyrek bir ağın kullanılması halinde bu çalışmada önerilen ikinci mertebeden upwind yaklaşımı kullanılmalıdır.

İkinci kısımda yapılan çalışmalar sonucunda:

- Belirtik (explicit) yöntem kullanılarak çözülen zamana bağlı olan problemlerde COPLA, EULER, HOAB, H-QUICK, OSPRE, SECBC, SHARP, SMART, SMARTER, STOIC ve VONOS yaklaşımları çözümde undershoot (sınıraltı) veya overshoot (sınırustü) yapabileceğinden kullanılmamalıdır.
- Akışın sayısal ağı paralel olmadığı durumlarda SUPER-C yaklaşımı monotonik olmayan bir davranış gösterdiğinden bu yaklaşım kullanılmamalıdır.
- Kompresif yaklaşımların özellikle düşük gradyenli skaler profillerde kırpma ve basamaklı yapı oluşturduğuna, difüzyif yaklaşımların ise aşırı difüzyon içerdiğine dikkat edilmelidir.
- Zamandan bağımsız çözümlerde karakteristik eğrisi NVD üst limitine yakın olan SUPERBEE, KOREN gibi yaklaşımlar kullanılmalıdır. Aşırı difüzyif bir davranış gösteren MINMOD ve OSHER gibi yaklaşımlar tercih edilmemelidir.
- Küçük CFL sayılarında kompresif yaklaşımlar kullanılmalıdır.

KAYNAKLAR

- [1] Waterson, N.P., "Development of a bounded higher-order convection scheme for general industrial applications", Project Report 1994-33, **von Karman Institute for Fluid Dynamics. Sint-Genesius-Rode, Belgium**, (1994).
- [2] Raithby, G.D., "Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 9, 153-164, (1976).
- [3] Patel, M.K., Markatos, N.C., Cross, M., "Method of reducing false-diffusion errors in convection-diffusion problems", Technical Note, **Appl. Math. Modelling**, Vol. 9, 302-306, (1985).
- [4] Sharif, M.A.R., "An evaluation of the bounded directional transportive upwind differencing scheme for convection-diffusion problems", **Numerical Heat Transfer, Part B**. Vol. 34, 201-219, (1993).
- [5] Sharif, M.A.R., Busnaia, A.A., "Evaluation and comparison of bounded techniques for convection-diffusion problems", **Journal of Fluids Engineering**, Vol. 115, 33-40, (1993).
- [6] Spalding, D.B., "A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol.4, 551-559, (1972).
- [7] Shyy, W., Thakur, S., Wright, J., "Second-order upwind and central difference schemes for recirculating flow computation", **AIAA Journal**, Vol.30, No.4, 923-932, (1992).
- [8] Fromm, J.E., "A method for reducing dispersion in convective difference schemes", **Journal of Computational Physics**, Vol. 3, 176-189, (1968).
- [9] Leonard, B.P., "A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic interpolation", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol.19, 59-98, (1979).
- [10] Leonard, B.P., "A stable, accurate, economical and comprehensible algorithm for navier-stokes and scalar transport equations", **Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow. Taylor C, Schrefler BA (eds) Proceedings of the Second International Conference, Venice, Italy**, 543-553, (1981).
- [11] Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow". **Hemisphere, New York**, (1980).

- [12] Beier, R.A., Ris, J., Baum, H.R., "Accuracy of finite-difference methods in recirculating flows", ***Numerical Heat Transfer***, Vol. 6 , 283-302, (1983).
- [13] Huang, P.G., Launder, B.E., Leschziner, M.A., "Discretization of nonlinear convection processes: A broad-range comparison of four schemes", ***Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering***, Vol. 48, 1-24, (1985).
- [14] Shyy, W., "A study of finite difference approximations to steady-state, convection-dominated flow problems", ***Journal of Computational Physics***, Vol. 57, 415-438, (1985).
- [15] Castro, I.P., Jones, J.M., "Studies in numerical computations of recirculating flows", ***International Journal for Numerical Methods in Fluids***, Vol.7, 793-823, (1987).
- [16] Tamamidis, P., Assanis, D.N., "Three-dimensional incompressible flow calculations with alternative discretization schemes", ***Numerical Heat Transfer, Part B***. Vol. 24, 57-76, (1993).
- [17] Aggarwal, S.K., "Numerical study of convection-diffusion-reaction equations for large Damkohler and cell Reynolds numbers", ***Numerical Heat Transfer***, Vol. 11 , 143-164, (1987).
- [18] Leonard, B.P., "Why you should not use 'hybrid', 'power-law' or related exponential schemes for convective modeling there are much better alternatives", ***International Journal for Numerical Methods in Engineering***, Vol. 20, 421-442, (1995).
- [19] Li, Z.Y., Tao, W.Q., "A new stability-guaranteed second-order difference scheme", ***Numerical Heat Transfer Part B***, Vol. 42, 349-365, (2002).
- [20] Gresho, P.M., Lee, R.L., "Don't suppress the wiggles-they are telling you something!", ***Computers & Fluids***, 9, 223-253, (1981).
- [21] Patankar, S.V., "Recent developments in computational heat transfer", ***Journal of Heat Transfer***, Vol.110, 1037-1045, (1988).
- [22] Leonard, B.P., "A survey of finite differences with upwinding for numerical modeling of the incompressible convection diffusion equation", ***Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow, Pineridge, Swansea, Wales***, Vol. 2, 1-35, (1981).
- [23] Leonard, B.P., "Simple high-accuracy resolution program for convective modeling of discontinuities", ***International Journal for Numerical Methods in Fluids***, Vol. 8, 1291- 1318, (1988).
- [24] Gaskell, P.H., Lau, A.K.C., "Curvature-Compansated convective transport: SMART, a new bounded-preserving transport algorithm", ***International Journal for Numerical Methods in Fluids***, Vol. 8, 617-641, (1988).

- [25] Sweby, P.K., “High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 21, 995- 1011, (1984).
- [26] Yu, B., Tao, W.-Q., Zhang, D.S., Wang, Q.W., “Discussion on numerical stability and boundedness of convective discretized scheme”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 40, 343-365, (2001).
- [27] Hou, P.L., Tao, W.Q., Yu, M.Z., “Refinement of the convective boundedness criteria of Gaskell and Lau”, *Engineering Computations*, 20, 1023-1043, (2003).
- [28] Wei, J.-J., Yu, B., Tao, W.-Q., Kawaguchi, Y., Wang, H.-S., “A new high-order accurate and bounded scheme for incompressible flow”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 43, 19-41, (2003).
- [29] Harten, A., “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, 357-393, (1983).
- [30] Lin, C.H., Lin, C.A., “Simple high-order bounded convection scheme to model discontinuities”, *AIAA Journal*, Vol. 35, No 3, 563-565, (1997).
- [31] Zhu, J., Rodi, W., “A low dispersion and bounded convective scheme”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 92, 87-96, (1991).
- [32] Papadikis, G., Bergeles, G., “A locally modified second order upwind scheme for convection terms discretization”, *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, 5, 49-62, (1995).
- [33] Zhu, J., “On the higher-order bounded discretization schemes for finite volume computations of incompressible flows”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 98, 345- 360, (1992).
- [34] Chakravarthy, S.R., Osher, S., “Numerical experiments with the Osher upwind scheme for the Euler equation”, *AIAA Journal*, Vol. 21, 1241-1248, (1983).
- [35] van Leer, B., “Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, 361-370, (1974).
- [36] Choi, S.K., Nam, H.Y., Cho, M., “A comparison of high-order convection schemes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 121, 281-301, (1995).
- [37] Pascau, A., Perez, C., “A well-behaved scheme to model strong convection in a general transport equation”, *Proceeding of the Eighth International Conference on*

Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Swansea, 8, 608-617, July (1993).

[38] Zhou, G., Davidson, L., Olsson, E., “Transonic inviscid/turbulent airfoil flow simulations using a pressure based method with high order schemes”, ***Lecture Notes in Physics***, 453, 372-378, (1995).

[39] Zijlema, M., “On the construction of a third-order accurate monotone convection scheme with application to turbulent flows in general domains”, ***International Journal of Numerical Methods in Fluids***, Vol.22, 619-641, (1996).

[40] van Leer, B., “Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection”, ***Journal of Computational Physics***, Vol. 23, 276-299, (1977).

[41] van Leer, B., “Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method”, ***Journal of Computational Physics***, 32, 101, (1979).

[42] Roe, P.L., “Characteristic-based schemes for the Euler equations”, ***Annual review of Fluid mechanics***, Vol. 18, 337-365, (1986).

[43] Leonard, B.P., “Locally modified QUICK scheme for highly convective 2-D and 3-D flows”, ***Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows, 15, Pineridge Press, Swansea, UK***, Vol. 5, Part 1, 35-47, (1987).

[44] Tao, W.Q., He, Y.L., Li, Z.Y., Qu, Z.G., “Some recent advances in finite-volume approach and their applications in the study of heat transfer enhancement”, ***International Journal of Thermal Sciences***, 44, 623-643, (2005)

[45] Leonard, B.P., “Beyond first-order upwinding the ULTRA-SHARP alternative for non-oscillatory steady-state simulation of convection”, ***International Journal for Numerical Methods in Engineering***, Vol.30, 729-766, (1990).

[46] Leonard, B.P., “The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection”, ***Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering***, Vol. 88, 17-74, (1991).

[47] Noll, B., “Evaluation of a bounded high-resolution scheme for combustion flow computations”, ***AIAA Journal***, Vol. 30, No. 1, 64-69, (1992).

[48] Leonard, B.P., MacVean, M.K., Lock, A.P., “Positivity-preserving numerical schemes for multidimensional advection”, ***Technical Memorandum TM-106055 ICOMP-93-05, NASA***, March (1993).

[49] Darwish, M.S., “A new high-resolution scheme based on the normalized variable formulation”, ***Numerical Heat Transfer, Part B***. Vol. 24, 353-371, (1993).

- [50] Lien, F.S., Leschzier, M.A., “Upstream monotonic interpolation for scalar transport with application to complex turbulent flows”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 19, 527-548, (1994).
- [51] Leonard, B.P., Lock, A.P., Macvean, M.K., “The NIRVANA scheme applied to one-dimensional advection”, *Int. J. Numer. Heat Fluid Flow*, Vol.5, 341-377, (1995).
- [52] Choi, S.K., Nam, H.Y., Cho M., “A high resolution and bounded convection scheme”, *KSME Journal*, 9, No. 2, 240-255. (1995).
- [53] Waterson, N.P., Deconinck, H., “A unified approach to the design and application of bounded higher-order convection schemes”, *Proceedings of the Ninth International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow. Atlanta, July, Pineridge Press, Swansea*, 203, (1995).
- [54] Leonard, B.P., Lock, A.P., Macvean, M.K., “Conservative Explicit unrestricted-time step multidimensional constancy-preserving advection schemes”, *Monthly Weather Review*, 124, 2588-2606, (1996).
- [55] Darwish, M., Moukalled, F., “A new approach for building bounded skew-upwind schemes”, *Comput. Methods appl. Mech. Eng.*, 129, 221-233, (1996).
- [56] Varonos, A., Bergeles, G., “Development and assessment of a variable-order non-oscillatory scheme for convection term discretization”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, 1-16, (1998).
- [57] Song, B., Liu, G.R., Lam, K.Y., Amano, R.S., “On a higher-order bounded discretization scheme”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 32, 881-897, (2000).
- [58] Alves, M.A., Oliveria, P.J., Pinho, F.T., “A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41, 47-75, (2003).
- [59] Wei, J.-J., Yu, B., Tao, W.-Q., Kawaguchi, Y., “A new general convective boundedness criterion”, *Numerical Heat Transfer, Part B*. Vol. 49, 585-598, (2006).
- [60] van Leer, B., “Towards the ultimate conservative difference scheme. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 23, 263-275, (1977).
- [61] Harten, A., “On a class of high resolution total-variation stable finite difference schemes”, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 21, 1-23, (1984).
- [62] Harten, A., “Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes, III”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 71, 231-303, (1987).

- [63] Li, Y., Rudman, M., “Assessment of higher-order upwind schemes incorporating FCT for convection-dominated problems”, ***Numerical Heat Transfer, Part B***, Vol. 27, 1-21, (1995).
- [64] Moukalled, F., Darwish, M., “A new family of streamline-based very high resolution schemes”, ***Numerical Heat Transfer***, 32,299-320, (1997).
- [65] Waterson, N.P., Deconinck, H., “Design principles for bounded higher-order convection schemes – a unified approach”, ***Journal of Computational Physics***, 224, 182-207, (2007).
- [66] Jin, W.W., Tao, W.Q., “Design of high order difference scheme and analysis of solution characteristics-part I: general formulation of high order difference schemes and analysis of convective stability”, ***Numerical Heat Transfer, Part B***, Vol. 52, 231-254, (2007).
- [67] Jin, W.W., Tao, W.Q., “Design of high order difference scheme and analysis of solution characteristics-part II: A kind of third-order difference scheme and new scheme design theory”, ***Numerical Heat Transfer, Part B***, Vol. 52, 255-279, (2007).
- [68] Darwish M., Moukalled, F., “Normalized variable and space formulation methodology for high-resolution schemes”, ***Numerical Heat Transfer, Part B***, Vol. 26, 79-96, (1994).
- [69] Darwish M., Moukalled, F., “The normalized weighting factor method: A novel technique for accelerating the convergence of high-resolution convective schemes”, ***Numerical Heat Transfer, Part B***, Vol. 30, No.2, 217-237, (1996).
- [70] Darwish M., Moukalled F., “An efficient very high-resolution scheme based on an adaptive-scheme strategy”, ***Numerical Heat Transfer, Part B***, Vol. 34, 191-213, (1998).
- [71] Darwish, M., Moukalled, F., “B-express: A new bounded extremum-preserving strategy for convective schemes”, ***Numerical Heat Transfer, Part B***, Vol. 37, 227-246, (2000).
- [72] Darwish, M., Moukalled, F., “The x-schemes: A new consistent high-resolution formulation based on the normalized variable methodology”, ***Comput. Methods Appl. Mech. Eng.***, 192, 1711-1730, (2003).
- [73] Arora, M., Roe, P.L., “A well-behaved TVD limiter for high-resolution calculations of unsteady flow”, ***Journal of Computational Physics***, Vol. 132, 3-11, (1997).
- [74] Kriventsev, V., Ninokata, H., “An effective locally exact finite-difference scheme for convection-diffusion problems”, ***Numerical Heat Transfer, Part B***, Vol. 36, 183-205, (1999).

- [75] Leonard, B.P., Niknafs, H. S., “Sharp monotonic resolution of discontinuities without clipping of narrow extrama”, **Computers & Fluids**, Vol. 19, 141-154, (1991).
- [76] Sakai, K., “New numerical schemes based on a criterion for constructing essentially stable and accurate numerical schemes for convection-dominated equations”, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 21, 1041-1048, (1995).
- [77] Alves, M.A., Pinho, F.T., Oliveria, P.J., “Effect of a high-resolution differencing scheme on finite-volume predictions of viscoelastic flows”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, 93, 287-314, (2000).
- [78] Zhu, J., “A low-diffusive and oscillation-free convection scheme”, **Communications in Applied Numerical Methods**, Vol. 7, 225-232, (1991).
- [79] Yeh, D., Yeh, G.T., “Computer evaluation of high order numerical schemes to solve advective transport problems”, **Computers & Fluids**, Vol. 8, 919-929, (1995).
- [80] Jasak, H., Weller, H.G., Gosman, A.D., “High resolution NVD differencing scheme for arbitrary unstructured meshes”, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Vol. 31, 431-449, (1999).
- [81] Darwish, M., Moukalled, F., “TVD schemes for unstructured grids”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 46, 599-611, (2003).
- [82] Lian, L., Liao, H., Qi, L., “An improved r-factor algorithm for TVD schemes”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 51, 610-617, (2008).
- [83] Versteeg, H.K., Malalasekera, W., “An introduction to Computational Fluid Dynamics: the Finite Volume Method”, **Logman Scientific & Technical**, (1995).
- [84] Khosla, P.K., Rubin, S.G., “A diagonally dominant second order accurate implicit scheme”, **Computers & Fluids**, Vol. 2, 207-209, (1974).
- [85] Warming, R.F., Beam, R.M., “Upwind second-order difference schemes and application in aerodynamic flows”, **AIAA Journal**, 14 (9), 1241, (1976).
- [86] Vanka, S.P., “Second-order upwind differencing in a recirculating flow”, **AIAA Journal**, Vol.25, No.11, 1435-1441, (1987).
- [87] Leonard, B.P., “The QUICK algorithm: a uniformly third-order finite difference method for highly convective flows”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol.19, 59, (1979).
- [88] Leonard, B.P., “Comparison of truncation error of finite-difference and finite-volume formulations of convection terms”, **Appl. Math. Modeling**, Vol. 18, 46-50, (1994).

- [89] Leonard, B.P., "Order of accuracy of QUICK and related convection-diffusion schemes", ***Appl. Math. Modeling***, Vol. 19, 640-653, (1995).
- [90] Hayase, T., Humprey, J.A.C., Grief, R., "A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures", ***Journal of Computational Physics***, Vol. 98, 108-118, (1992).
- [91] Ferziger, J.H., Peric, M., "Computational Methods for Fluid Dynamics". **Springer**, (1999).
- [92] Roache, A., "Flux-based modified method of characteristics", ***International Journal For Numerical Methods in Fluids***, 15, 1259-1275, (1992).
- [93] Degrez, G., "Introduction to CFD", Course Note 153, **Von Karman Institute for Fluid Dynamics. Sint-Genesius-Rode, Belgium**, (1998).
- [94] Leonard, B.P., "A consistency check for estimating truncation error due to upstream differencing", ***Applied Mathematical Modelling***, Vol. 2, 239-244, (1978).
- [95] Anderson, J.D., "Computational Fluid Dynamics: The basics with applications", International Editions, **McGraw-Hill, Inc., New York**, 236-237, (1995).
- [96] Tao, W.Q., Sparrow, E.M., "The transportive property and convective numerical stability of the steady-state convection-diffusion finite-difference equation", ***Numerical Heat Transfer***, Vol. 11, 491-497, (1987).
- [97] Van Doormaal, J.P., Raithby, G.D., "Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows", ***Numerical Heat Transfer***, 7, 147-163, (1984).
- [98] Ghia, U., Ghia, K.N., Shin, C.T., "High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method", ***Journal of Computational Physics***, 48, 387-411, (1982).
- [99] Schreiber, R., Keller, H.B., Driven cavity flows by efficient numerical techniques. ***Journal of Computational Physics***, 49, 310-333, (1983).
- [100] Koseff, J.R., Street, R.L., "Visualization studies of a shear driven three-dimensional recirculation flow", ***ASME Journal of Fluids Engineering***, 106, 21-29, (1984).
- [101] Bruneau, C.H., Saad, M., "The 2D lid-driven cavity problem revisited", ***Computers & Fluids***, 35, 326-348, (2006).
- [102] Davis, G.V., "Natural convection in a square cavity: A comparison exercise", ***International Journal for Numerical Methods in Fluids***, 3, 227-248, (1983).

- [103] Davis, G.V., “Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3, 249-264, (1983).
- [104] Hortman, M., Peric, M., “Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: Bench-mark solutions”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 11, 189-207, (1990).
- [105] Shyy, W., Madhukar, M. R., “Convection treatment for high Rayleigh number, laminar natural convection calculations”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol.22, 367-374, (1992).
- [106] Barakos, G., Mitsoulis, E., “Natural convection flow in a square cavity revisited: Laminar and turbulent models with wall functions”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18, 695-719, (1994).
- [107] Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C.F., Schönung, B., “Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow”. *Journal of Fluid Mechanics*, 127, 473-496, (1983)
- [108] Runchal, A.K., “CONDIF: A modified central-difference scheme for convective flows”, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 1593-1608, (1987).
- [109] Olver, P.J., 2007, *Applied Mathematics Lecture Notes*, [online], University of Minnesota, http://www.math.umn.edu/~olver/am_/npd.pdf (**Ziyaret tarihi: 16 Kasım 2009**).
- [110] Benton, E.R., Platzman, G.W., “A table of solutions of the one-dimensional burgers equation”, *Quarterly of Applied Mathematics*, 30, 195-212, (1972).
- [111] Arampatzis, G., Assimacopoulos, D., Mitsoulis, E., “Treatment of numerical diffusion in strong convective flows”. *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, 18, 313-331, (1994).

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Birecik'te doğdu. 1996'da başladığı Kocaeli Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümünden 2000 yılında mezun oldu. 2004'te Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisansını tamamladı. 2006-2007 eğitim döneminde von Karman Enstitüsü, Belçika'da "Diploma Course" programını bitirdi. 2001 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü Termodinamik ve Isı Tekniği A.B.D.'da Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.