

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MERKEZLEYEN YAKIN HALKALAR ÜZERİNDE MATRİS YAKIN
HALKALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mustafa TAŞ
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Necat GÖRENTAŞ

VAN - 2009

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MERKEZLEYEN YAKIN HALKALAR ÜZERİNDE MATRİS YAKIN
HALKALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mustafa TAŞ

VAN - 2009

KABUL ve ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Necat GÖRENTAŞ danışmanlığında, Mustafa TAŞ tarafından hazırlanan “*Merkezleyen Yakın Halkalar Üzerinde Matris Yakın Halkaları*” isimli bu çalışma/....../2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan:..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’ nun/...../..... gün ve.....
.....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

MERKEZLEYEN YAKIN HALKALAR ÜZERİNDE MATRİS YAKIN HALKALARI

TAŞ, Mustafa

Yüksek Lisans Tezi , Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necat GÖRENTAŞ

Eylül 2009, 57 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm ve ikinci bölümlerde çalışma ile ilgili literatür ve bu çalışmada kullanılacak temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde; genelleştirilen matris yakın halkalarında, matris yakın halkalarının idealleri arasındaki benzerlik ilişkileri verilmiştir. Halkalardan farklı olarak temel yakın halkadan matris yakın halkasına ideal genişletmenin aynı sonuçları vermediği söylenebilir. Bu çalışmada, temel yakın halka, merkezleyen yakın halkaların özel bir örneği olması durumunda ideal benzerliğinin bire bir aynı olduğu gösterilmiştir. Dördüncü bölümde; merkezleyen yakın halkalar ile matris yakın halkaları arasındaki eşitlik koşulları ve devirli p -gruplarının otomorfizmleri üzerinde çalışılmıştır.

Anahtar kelimeler: Halka, İdeal, Matris yakın halkası, Merkezleyen yakın halka, Modül, İzomorf halkalar.

ABSTRACT

MATRIX NEAR-RINGS OVER CENTRALIZER NEAR-RINGS

TAŞ, Mustafa

Msc, Mathematics Science

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Necat GÖRENTAŞ

September 2009, 57 pages

This thesis consists of four parts. In the first and second parts, writings in purpose or verse and constitutive information are being given. In the third part comparisons between generalized matrix near ring and ideals of matrix near rings and could be seen. It is stated that the results of ideal expeditions of matrix near rings and central near rings are different according to rings. It will be expressed that ideal similarity is the same when basic near ring is a special example of centralizer near rings. In the fourth part, the equivalent conditions between matrix near-rings and automorfizms of cyclic p-groups will be studied.

Key words: Centralizer near-rings, Ideal, Matrix Near-Rings, Modulus, Ring.

ÖN SÖZ

Merkezleyen yakın halkaları ve genelleştirilen matris yakın halkaları ilginç ve incelemeye değer cebir konularıdır. Bu çalışmada merkezleyen temel yakın halkaların idealleri ile matris yakın halkaların idealleri bire bir olmadığı ifade edilmiştir. Ayrıca burada merkezleyen yakın halkalarının ideallerinin yararlı bir betimlemesi yapılmaktadır. Çalışma boyunca merkezleyen yakın halkalar üzerine matris yakın halkaları ile ilgili yapılan çalışmalara yönelik görülmeye değer bazı sonuçlar verilmiştir.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Necat GÖRENTAŞ'a teşekkür eder saygılarımı sunarım. Ayrıca, yaptığım tüm çalışmalarda maddi ve manevi desteğini esirgemeyen ve teşvik eden değerli ağabeyim Zeki TAŞ'a teşekkür eder, 1992 de kaybettim ve okumam için her türlü fedakârlığı yapan sevgili annemi rahmetle anıyorum.

Mustafa TAŞ

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. ÖN BİLGİLER	3
3. MERKEZLEYEN YAKIN HALKALAR ÜZERİNDE MATRİS YAKIN HALKALARI	15
3.1. $M_A(G)$ Merkezleyen Yakın Halka	15
3.2. Matris Yakın Halkaları	19
3.3. $M_A(G)$ 'nin ve $Mat_n(M_A(G); G)$ 'nin İdealleri	24
4. MERKEZLEYEN YAKIN HALKALAR, MATRİS YAKIN HALKALARI ve DEVİRLİ p-GRUPLARI	34
4.1 Temel Sonuçlar	34
4.2 p Tek Sayı İken Bir Devirli G p-Grubu	40
4.3 Temel Teorem	45
KAYNAKLAR	48
ÖZ GEÇMİŞ	49

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

G	: Grup
G^m	: m defa G nin direkt toplamı
R	: Halka
I	: İdeal
C	: Cisim
$M_n(R)$	: R yakın halkası üzerinde tanımlı $n \times n$ matris yakın halkası
$M_s(G)$	: (S, G) çifti ile belirlenen merkezleyen yakın halkası
$M_n(R, G)$	Genelleştirilmiş $n \times n$ matris yakın halkası
$M_m(M_A(G); G)$	$M_A(G)$ 'nin G üstündeki $n \times n$ mertebeden genelleştirilmiş matris yakın halkası
$M_A(G^m)$	Merkezleyen matris yakın halkası
f_{ij}	$G^m \rightarrow G^{m'} e$ tanımlı fonksiyon
f_{ij}^r	i. satır, j. sütunun terimin r ile çarpımı
f_{ij}^1	Matris yakın halkasında matris birimi

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Bu çalışmada merkezleyen yakın halkalar ve matris yakın halkaları ile ilgili kavramlar üzerinde durulmuştur. Merkezleyen yakın halkaların bir grup üzerindeki etkilerine bakılarak n . mertebeden genelleştirilmiş matris yakın halkalarının idealleri arasındaki benzerlikler ve ilişkiler irdelenmiştir.

G sonlu bir grup ve A , G nin otomorfizmlerinin bir grubu olmak üzere m . mertebeden matris yakın halkası; $m \geq 2$ için merkezleyen yakın halkanın alt yakın halkası olduğu Smith ve Van Wyk'da (2005) gösterilmiştir. Sonlu bir G grubu ve $\text{Aut}(G)$ nin bir alt grubu için $M_A(G)$, A ve G ile tanımlanan merkezleyen yakın halkayı göstersin. $M_A(G)$ ve genelleştirilmiş matris yakın halka $\text{Mat}_m(M_A(G); G)$ ile ilgili gerekli özellikler Smith ve van Wyk (2000) makalesinde verilmiştir. Ayrıca $\text{Mat}_m(M_A(G); G) = M_A(G^m)$ eşitliği durumu Smith ve van Wyk (2005) makalesinde incelenmiştir.

Bu konuda yapılan çalışmalardan Meldrum ve Van der Walt (1986) ile Smith (1996) tarafından genelleştirilen matris yakın halkalar incelenmiş, temel yakın halkaların idealleri ile matris yakın halkaların idealleri arasındaki benzerlikleri incelenmiştir. Genellikle temel yakın halkanın bir ideali matris yakın halkasının birçok idealine uygundur. Meldrum ve Meyer'de (1996), merkezleyen temel yakın halka idealleri ile matris yakın halkaların idealleri arasındaki benzerliğin bire bir olmadığı gösterilmiştir. Van der Walt (1987) matris yakın halkaları ile yakın halka ve idealleri incelenmiştir. Smith ve Van Wyk'da (1996; 2000; 2005), merkezleyen yakın halka, genelleştirilmiş matris yakın halkaları ile ilgili özellikler ve idealler incelenmiştir. Ayrıca merkezleyen yakın halkalar ve matris yakın halkaları arasındaki ilişki araştırılmıştır. Pilz'de (1983), yakın halka Meldrum'da (1985), gruplar ve yakın halkalar üzerinde çeşitli uygulamalar incelenmiştir. Van der Walt (1987), matris yakın halkalarının asalılık durumlarına bakmıştır. Smith'de (1995), merkezleyen yakın halkalar ile çeşitli halkalar üzerindeki izomorfizmler incelemiştir. Bagley (1996), yakın halkalar ve idealler üzerindeki çalışmalar yapılmıştır. Smith (1996), merkezleyen yakın halkaları ile matris yakın halka izomorfizmlerini incelenmiştir. Van der Walt (1987), matris yakın halkaların radikalleri üzerindeki çalışmayı ele almıştır. Ayrıca Dummit ve

Foote'dan (1999) yararlanılarak Oswald ve ark.'da (2001) bir merkezleyen yakın halkanın ne zaman bir matris yakın halkasına izomorf olduğu araştırılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir. Ayrıca aksi belirtilmedikçe bu bölümün hazırlanmasından Pilz (1983), Meldrum ve Van der Walt (1986) ile Smith (1996) temel kaynak olarak alınmıştır.

Tanım 2.1. (Grup)

$G \neq \emptyset$ bir küme ve $*$, G üzerinde bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı, aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

$$G1: \forall a, b \in G \text{ için } a * b \in G ,$$

$$G2: \forall a, b, c \in G \text{ için}$$

$$a * (b * c) = (a * b) * c ,$$

$$G3: \forall a \in G \text{ için}$$

$$a * e = e * a = a$$

olacak biçimde $\exists e \in G$ vardır.

$$G4: \forall a \in G \text{ için}$$

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ vardır.

Yukarıdaki özelliklere ek olarak $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ ise $(G,*)$ grubuna bir abelyan (değişmeli) grup denir.

Tanım 2.2.

(i) $(G,*)$ bir grup ve $H \subseteq G$ olsun. $(H,*)$ çifti bir grup teşkil ediyorsa H 'ye G 'nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

(ii) G kümesi $\{a\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise G ile üretilen alt grup $\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$ olacaktır. Bu alt gruba a ile üretilen devirli (cyclic) alt grup denir. Örneğin, $(\mathbb{Z}, +)$, 1 ile üretilmiş sonsuz devirli gruptur. $(\mathbb{Z}_n, +)$, $\bar{1}$ ile üretilmiş n inci mertebeden devirli gruptur. $G = \{1, -1, i, -i\}$ olmak üzere 4 üncü mertebeden bir devirli gruptur. $\langle i \rangle = G$ ve $\langle -i \rangle = G$ dir.

Tanım 2.3. (Halka)

$R \neq \emptyset$ bir küme ve R 'de tanımlı $(+)$ ve $(\bullet)$ ile gösterilen iki işlem tanımlanmış olsun.

(i) $(R, +)$ bir değişmeli grup

(ii) $(R, \bullet)$ işleminin birleşme özelliği var

(iii) $\forall a, b, c \in R$ için

$$a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$$

ve

$$(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c)$$

ise $(R, +, \bullet)$ sistemine bir halka denir. Eğer

(iv) $\forall a, b \in R$ için

$$a \bullet b = b \bullet a$$

ise bu halkaya komutatif (değişmeli) halka denir. Eğer

(v) $\forall a \in R$ için

$$a \bullet e = e \bullet a = a$$

olacak şekilde $\exists e \in R$ varsa bu halkaya birimli halka denir.

Tanım 2.4.

$(R, +, \bullet)$ ve $(H, \oplus, \circ)$ birer halka olsun. Bir $f : R \rightarrow H$ fonksiyonu $\forall a, b \in R$ için

(i) $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$

(ii) $f(a \bullet b) = f(a) \circ f(b)$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna bir halka homomorfizması denir. Eğer f 1-1 ise f 'ye bir monomorfizma, eğer f üzerine ise f 'ye bir epimorfizma, eğer f 1-1 ve üzerine ise f 'ye bir izomorfizma denir. Burada $R = H$ alınırsa f fonksiyonuna halka endomorfizmi denir ve $EndR$ ile gösterilir. $R = H$ olduğunda f bir izomorfizma ise f 'ye halka otomorfizmi denir.

Tanım 2.5

(a) (**İdeal**) N bir halka olsun. N 'nin boş olmayan bir I alt kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa I 'ya N 'nin bir ideali denir.

$$(i) \forall x, y \in I \text{ için } x - y \in I$$

$$(ii) \forall x \in I \text{ ve } \forall r \in N \text{ için } rx \in I$$

$$(iii) \forall x \in I \text{ ve } \forall r \in N \text{ için } xr \in I$$

Eğer (i), (ii) şartları sağlanıyorsa I 'ya bir sol ideal, (i), (iii) şartları sağlanıyorsa I 'ya bir sağ ideal, hem sağ hem de sol ideal olabiliyorsa I 'ya ideal denir. İdeal tanımından bir alt halka olduğu anlaşılır. Fakat her alt halka bir ideal olmayabilir.

(b) (**Sıfırlayıcı İdeal**) H bir değişmeli halka ve $K \subseteq H$ olsun. $K_0 = \{a \in H : \forall x \in K \text{ için } ax = 0\}$ kümesi H 'nin bir idealidir. K_0 a R 'nin sıfırlayıcı (annihilator) ideal denir ve $K_0 = A_{nn}(K)$ şeklinde yazılır. $x \in H$ ise $\{x\}$ in sıfırlayıcı ideali denir $A_{nn}(x)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.

R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Yukarıdaki (a) ya göre R üzerinde,

$$\mathbf{M}_2(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

2×2 matrisler kümesi, matrisler arasında tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halka oluşturur. $\mathbf{M}_2(R)$ nin

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} : a, c \in R \right\}$$

alt kümesinin bir alt halka ve bir sol ideal olduğu görülebilir. Fakat bir sağ ideal

değildir. Gerçekten bir $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_2(R)$ için

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay \\ cx & cy \end{bmatrix} \notin I.$$

Tanım 2.6 (Yakın halka)

Bir $N \neq \emptyset$ kümesi $+$ ve $\bullet$ ikili işlemlerine göre aşağıdaki şartları sağlıyorsa $N = (N, +, \bullet)$ 'ye bir yakın halka denir.

- (i) $(N, +)$ abelyan olması gerekmeyen bir grup
- (ii) $(N, \bullet)$ bir yarı grup
- (iii) Eğer $r_1, r_2, r_3 \in N$ için

$$r_1 \bullet (r_2 + r_3) = r_1 \bullet r_2 + r_1 \bullet r_3$$

biçiminde soldan dağılma özelliği varsa N 'ye bir sol yakın halka denir. Şayet $r_1, r_2, r_3 \in N$ için

$$(r_1 + r_2) \bullet r_3 = r_1 \bullet r_3 + r_2 \bullet r_3$$

biçiminde sağdan dağılma özelliği varsa N 'ye bir sağ yakın halka denir.

Örnek 2.2

$(G, +)$ bir grup ve "0" bu grubun etkisiz elemanını gösterebilir. Bu durumda, fonksiyonlarda toplama $(+)$ ve bileşke $(\circ)$ işlemleri altında aşağıdakiler birer yakın-halkadır.

- (i) $M(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ bir fonksiyon}\}$
- (ii) $M_0(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f(o) = o\}$
- (iii) $M_c(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ sabit}\}$
- (iv) $M_c^0(G) = \{f_\gamma : G \rightarrow G \mid \gamma \in G \text{ ve } M_c^0(G) = f_\gamma(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta = 0 \\ \gamma, & \delta \neq 0 \end{cases}\}$
- (v) $R[x] = \{f : f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, n \in N, x \text{ bir değişken, } a_i \in R\}$

Örnek 2.3

Her grup için bir yakın-halka elde edilebilir. Gerçekten, eğer $(N, +)$ grubu üzerinde ikinci işlem, $\forall x, y \in N$ için, $xy = 0$ ile tanımlanırsa, $(N, +, \cdot)$ bir yakın-halkadır.

Örnek 2.4.

$M_{\text{int}}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ integralli} \}$ kümesi yukarıdaki işlemler altında bir yakın halka değildir; örneğin $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ için $(g \circ f)(x) = e^{2x} \in M_{\text{int}}(\mathbb{R})$ fakat $(f \circ g)(x) = e^{x^2} \notin M_{\text{int}}(\mathbb{R})$ 'dir. Her halka bir yakın halkadır.

Örnek 2.5.

Herhangi bir $(G, +)$ grubunda $\forall a, b \in G$ için $a * b = a$ olarak tanımlandığında bir $(G, +, *)$ sağ yakın halka, $a * b = b$ olarak tanımlandığında bir $(G, +, *)$ sol yakın halka elde edilir. Yani her grup bir yakın halka yapılabilir.

Özellikler 2.1

N bir sağ yakın halka ise aşağıdaki özellikler vardır.

- a) $\forall x \in N$ için $0x = 0$ dır.
- b) $\forall x, y \in N$ için, $(-x)y = -xy$ dir.

İspat: a) $\forall x \in N$ için, sağdan dağılma özelliğinden,

$$0x = (0+0)x = 0x+0x$$

ve dolayısıyla $0x = 0$ bulunur.

b) $\forall x, y \in N$ için, yine sağdan dağılma özelliği kullanılarak,

$$(-x)y = (0-x)y = 0y - xy = 0 - xy = -xy$$

elde edilir.

Not 2.1.

Bir N yakın- halkasında, her zaman , $\forall x, y \in N$ için, $0x=0$ ve $x(-y)= -xy$ sağlanmayabilir. Mesela, Örnek 2.2 (i)' de tanımlanan $M(G)$ yakın- halkasında, $f, g \in M(G)$ için, $f \circ 0 = 0$ olması f 'nin orijinden geçmesiyle ve $f \circ (-g) = -(f \circ g)$ olması ise f 'nin tek fonksiyon olması ile mümkündür.

Tanım 2.7.

Değişmeli birimli bir R halkasının bir P ideali verilsin. $P \neq R$ ve $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ ise P 'ye R 'nin asal ideali denir.

Tanım 2.8.

R değişmeli birimli bir halka ve $r \in R$ olsun. Eğer $r^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa r 'ye nilpotent eleman denir.

Tanım 2.9 (Cisim)

(i) Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanı aritmetik birim ise yani ters elemana sahipse bu halkaya cisim denir ve C ile gösterilir.

(ii) R bir halka ve $x \in R$ olsun. x in R de çarpmaya göre tersi varsa x e R de aritmetik birim denir.

Tanım 2.10 (Modül)

R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R üzerinde bir $(G, +)$ abelyan grubu için bir $f : R \times G \rightarrow G$ dış işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa R ye G üzerinde bir modül denir ve R – modül ile gösterilir. Her $r, r_1, r_2 \in R$ ve $g, g_1, g_2 \in G$ için

$$(i) \quad r(g_1 + g_2) = rg_1 + rg_2$$

$$(ii) \quad (r_1 + r_2)g = r_1g + r_2g$$

$$(iii) \quad (r_1r_2)g = r_1(r_2g)$$

$$(iv) \quad 1_R g = g$$

Eğer R halkası değişmeli değilse halkanın elemanına göre sağdaysa sağ modül soldaysa sol modül denir. M bir sağ R modül, $M' \subseteq M$ bir alt grup olsun. Eğer $\forall x \in M', a \in R$ için $xa \in M'$ ise M' ye M nin bir alt modülü denir. Eğer M bir

sağ R modül ise $\text{Sif}_R(M) = \{r \in R : Mr = 0\} \subset R$, R nin bir sağ ideali olup bu ideale M nin sağ sıfırlayanı (annihilator) denir.

Tanım 2.11.

M bir sol R -modül olsun. Eğer $\text{sif}_R(M) = 0$ ise M 'ye faithful (sadık) sol R -modül denir.

Tanım 2.12.

G bir grup ve $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Eğer bir $G \times X \rightarrow X$ fonksiyonu var ve $(g,x) \rightarrow g(x) \in X$
 $\forall g_1, g_2 \in G, x \in X$ için $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ ve $1_G x = x$ ise G grubu X kümesine etkir denir.

Örnek 2.6.

G bir grup ve $X = G$ olsun. $G \times G \rightarrow G$ G nin G üzerine bir grup etkisidir.
 $(g,x) \rightarrow gx = g x g^{-1}$

Gerçekten $g, h, x \in G$ için

$$(gh)x = (gh)x(gh)^{-1} = ghxh^{-1}g^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = g(hx)$$

olur.

Tanım 2.13.

$(G_1, \cdot)$, $(G_2, *)$ iki grup olsun. Eğer her $G_1 \times G_2 \rightarrow G_2$ fonksiyonu $g_1, g'_1 \in G_1$
 $(g,x) \rightarrow gx \in G_2$

ve $g_2, g'_2 \in G_2$ için

$$(i) (g_1 g'_1)g_2 = g_1(g'_1 g_2)$$

$$(ii) g_1(g_2 * g'_2) = (g_1 g_2) * (g_1 g'_2)$$

$$(iii) 1_G g'_2 = g'_2, \forall g'_2 \in G_2$$

şartlarını sağlarsa G_1 grubu G_2 grubuna etkir denir.

Bir G grubu bir X kümesine etkisin. $\forall x \in X$ için $\bar{x} = \{gx : g \in G\} \subset X$ alt kümesine x in bu etki altındaki yörüngesi (denklik sınıfı) denir.

Tanım 2.14. (Sıfır simetrik yakın halka)

N bir yakın halka olsun. $\forall a \in N$ için $0a = a0 = 0$ ise N 'ye sıfır (zero) simetrik yakın halka denir. Eğer $\forall a \in N$ için $ai = ia = a$ olacak şekilde bir $i \in N$ elemanı varsa N ye birimli yakın halka denir.

Örnek 2.7.

$T = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(0) = 0\}$ sıfır simetrik yakın halkadır. Buna göre $0 : \mathbb{R} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \mathbb{R}$ için

$$(0f)(x) = 0(f(x)) = 0 \Rightarrow 0f = 0$$

$$(f0)(x) = f(0(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f0 = 0$$

yazılabilir.

Tanım 2.15 (Alt yakın halka)

R bir yakın halka S 'de onun bir alt grubu iken $SS \subseteq S$ oluyorsa S 'ye R 'nin bir alt yakın halkası denir ve $S \leq R$ ile gösterilir.

Örnek 2.8.

$(G, +)$ bir grup olsun. Örnek 2.2 (i) gereğince $M(G)$ bir yakın halka iken yine Örnek 2.2(ii) gereğince $M_0(G)$, $M(G)$ 'nin bir alt yakın halkasıdır.

Tanım 2.16 (Basit yakın halka)

Bir yakın halka, kendisinden ve sıfırdan farklı has ideallere sahip değilse basit yakın halkadır denir.

Tanım 2.17 (Yakın halkada ideal)

N bir yakın halka ve I , $(N, +)$ 'nin normal alt grubu olsun. Eğer I aşağıdaki koşulları sağlıyorsa N 'nin bir idealidir denir.

(i) $I.N \subseteq I$ ($\forall i \in I, \forall n \in N$ için $in \in I$)

(ii) Her $n, n' \in N$ ve her $\iota \in I$ için $n(n' + \iota) - nn' \in I$

Yalnızca (i) koşulunu sağlayan I 'ya bir sağ ideal, (ii) koşulunu sağlayan I 'ya da bir sol ideal denir ve $I \triangleleft N$ ile gösterilir.

Tanım 2.18

i) $(N, \oplus, *)$ ve $(M, +, \cdot)$ iki yakın halka olsun. $\forall x, y \in N$ için $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$ ve $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ olacak şekilde bir $f: N \rightarrow M$ dönüşümünü bir yakın halka homomorfizmi denir.

ii) N bir yakın halka ve G bir N -grup olsun. Eğer G 'nin bir A normal alt grubu $\forall x \in G, \forall y \in A$ ve $\forall n \in N$ için $n(x - y) - nx \in A$ ise A 'ya G 'nin bir ideali denir.

iii) $(G, +)$ bir grup ve N bir yakın halka olsun. $\mu: N \times G \rightarrow G$ verilsin. Eğer $(n, g) \rightarrow ng$ $\forall x, y \in N$ ve $\forall g \in G$ için $(x - y)g = xg - yg$ ve $(xy)g = x(yg)$ şartları sağlanıyorsa, (G, μ) ikilisine bir N -grup, yani N üzerinde yakın modül denir ve kısaca N^G ile gösterilir. Eğer N , birimi 1 olan birimli bir yakın halka ise $\forall g \in G$ için $1g = g$ şartını sağlayan G N -grubuna bir üniter grup denir.

Örnek 2.9.

N bir yakın halka olsun. $\mu: N \times N \rightarrow N$ altında $(N, +)$ bir N -gruptur. Bu grup kısaca N^N ile gösterilir.

Tanım 2.19. (Matris yakın halkası)

Herhangi bir halka üzerindeki matrislerle çok benzerlik göstermesine rağmen elemanları matris ya da halkanın endomorfizmleri olmayıp sadece endomorfizm yakın halkalarının elemanları olan bu tip yakın halkalara bir matris yakın halkası denir.

Tanım 2.20.

G bir grup ve $A, \text{Aut}(G)$ için bir alt grup olsun. Herhangi bir $v \in G$ için $\{\alpha \in A : \alpha v = v\}$ kümesine v nin stabilizeri denir ve $\text{stab}(v)$ ile gösterilir. $\text{stab}(v)$, A nin bir alt grubudur. Sonlu bir G grubu ve $A, \text{Aut}(G)$ nin bir alt grubu olsun. $M_n(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f(0) = 0 \text{ ve } \forall \alpha \in A, v \in G, f(\alpha v) = \alpha f(v)\}$ kümesi fonksiyon toplama ve bileşke işlemi altında yakın halkadır. Bu halkaya (A, G) çifti tarafından belirlenen merkezleyen yakın halka denir. Özel olarak $A = \{1\}$ için $M_A(G)$ yakın halkası, $M_0(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.21.

G sonlu bir grup ; A, G nin otomorfizmlerinin bir alt grubu olsun. Eğer $1 \neq \alpha \in A, 0 \neq v \in G$ için $\alpha(v) \neq v$ ise A grubuna fixed point free (sabit noktasız) denir.

Tanım 2.22.

$(R, +, \bullet)$, 1 birimine sahip herhangi bir sağ yakın halka olursa R^n ile n tane $(R, +)$ 'nin direkt toplamı gösterilir. Bu aslında doğrudan çarpımdır, zira $(R, +)$ abelyan olmasa da toplamsal yazılabilir. R^n nin elemanları genellikle i . yerde 1 ve diğer yerlerde 0 iken ε_i ile gösterilmektedir. Diğer yandan $\iota_j(1) = \varepsilon_j$ ve $\pi_j(\varepsilon_j) = 1$ olmak üzere ι_j j . koordinat fonksiyonunu ve π_j ise izdüşüm fonksiyonunu gösterir. Yakın halkalara yönelik verilen $n \times n$ matrisleri R^n den R^n ye fonksiyonlardır. Buna göre halka için (i, j) 'de r ve diğer yerlerde 0 olan matrislere karşılık gelen $f_{ij}^r : R^n \rightarrow R^n$ fonksiyonları söz konusudur. Bilindiği üzere $(R, +)$ 'nin kendisine olan tüm dönüşümlerinin varlığı ; $\mathbb{M}(R)$ yakın halkasına R yakın halkasının standart gömülümü, her $r \in R$ ve her $s \in R$ için $f^r(s) = rs$ biçiminde tanımlı bir $f^r : R \rightarrow R$ fonksiyonu ile sağladığında ancak mümkündür. Ayrıca $1 \leq i, j \leq n$ ve tüm $r \in R$ 'ler için $f_{ij}^r = \iota_j f^r \pi_j$ ile $f_{ij}^r : R^n \rightarrow R^n$ yazılabilir. Bazen f_{ij}^r yerine $[r; i, j]$ kullanılır.

$\mathbb{M}_n(R)$ ile gösterilen R 'deki $n \times n$ matrislerinin yakın halkası $\{f_{ij}^r : r \in R, 1 \leq i, j \leq n\}$ kümesince gerilen $\mathbb{M}(R^n)$ 'nin alt yakın halkasıdır denir. Buna göre $\mathbb{M}_n(R)$ 'nin elemanları R üzerindeki $n \times n$ matrisleri olarak ifade edilebilir.

Matrisleri genellikle büyük harflerle gösterilen matris yakın halkalarında matris birimleri $E_{ij} = f_{ij}^1$, $1 \leq i, j \leq n$ matrisleridir. I birim matrisi $I = E_{11} + E_{22} + \dots + E_{nn}$ diye tanımlanır. Bir A matrisinin i . satırı $\pi_i A : R^n \rightarrow R$ fonksiyonu olup $A(i)$ ile gösterilir. Buradan da $A = \sum_{i=1}^n \iota_i A(i)$ yazılabilir. Sağ yakın halka durumunda genel matrislerin sütun kavramı kullanılışlı olmasa da sol yakın halkalar için bunun tersi söz konusudur.

Matrislerin birbiriyle çarpımı yan yana alınarak gösterilir. Bir A matrisinin sol taraftan bir $r \in R$ ile skaler çarpımı $rA = \sum_{i=1}^n \iota_i f^r A(i)$ şeklindedir. Eğer r sıfır simetrik değilse rE_{ij} 'nin f_{ij}^r ile aynı olmadığı görülür. Sağdan skaler ile çarpma ise $A_r = A(f_{11}^r + f_{22}^r + \dots + f_{nn}^r)$ olarak tanımlanır. Burada $E_{ij}r = f_{ij}^r$ alınır.

Tanım 2.23.

R sıfır simetrik ve birimli bir yakın halka ve $n > 1$ bir tamsayı olsun. Eğer $K = \{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \subset R$ kümesi aşağıdaki şartları sağlarsa bu kümeye $n \times n$ matris birimleri kümesi denir.

$$(i) \sum_{i=1}^n e_{ij} = 1$$

$$(ii) e_{ij}e_{ke} = \delta_{jk}e_{ie} ; \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$$

$$(iii) \forall e_{ij} \ R \text{ de dağılımlı elemandır.}$$

Tanım 2.24.

Yukarıdaki tanım gereğince $E_{11}r_1 + E_{22}r_2 + \dots + E_{nn}r_n$ biçimindeki bir matrise köşegen matris denir. Eğer $r_1 = r_2 = \dots = r_n$ olursa yani I_r biçiminde olursa bir skaler matris denir.

Bir A matrisinin devriği A^T ile gösterilir. Buna göre R^n nin elemanlarını sütun vektörleri olarak düşünmek daha uygun olur.

Tanım 2.25.

N bir sağ yakın halka olsun. Eğer

$$N_d = \{d \in N : \forall r, r' \in N \text{ için } d(r + r') = dr + dr'\}$$

olacak şekilde $N = N_d$ eşitliği yazılabiliyorsa N 'ye dağılımlı (disributive) yakın halka denir.

Tanım 2.26.

$(R, +)$ bir toplamsal grup olsun. $x, b \in R$ ve $\alpha \in \text{End}(R)$ için $\alpha: R \rightarrow R$
 $x \rightarrow \alpha x + b$

tipinden her R dönüşümüne affine (afin) dönüşümü denir. G 'den G 'ye sabit fonksiyonlar ve G 'nin endomorfizmleri tarafından oluşturulan afin dönüşümlerinin genelleştirilmelerine bir afin yakın halka denir ve $\mathbb{M}_{\text{aff}}(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.27.

R bir yakın halka; I , R 'nin bir ideali olsun. Eğer $a \in I$ yada $b \in I$ 'dan biri gerektirecek biçimde $ab \in I$ koşulu sağlanıyorsa I 'ya R yakın halkasının bir asal ideali denir.

Lemma 2.1 (Betsch Lemma)

A , G grubunun otomorfizmlerinin bir grubu ve $x, y \in G$ olsun. $f(x) = y$ olacak biçimde bir $f \in M_A(G)$ fonksiyonunun var olması için gerek ve yeter koşul $\text{stab}(x) \subseteq \text{stab}(y)$ olmasıdır.

3. MERKEZLEYEN YAKIN HALKALAR ÜZERİNE MATRİS YAKIN HALKALARI

Bu bölümde; sonlu bir G grubu ve $\text{Aut}(G)$ 'nin A alt grubu için $M_A(G)$ A ve G tarafından belirlenen merkezleyen yakın halka olsun. G grubu bir $M_A(G)$ modülüdür. $M_A(G)$ 'nin G üstündeki etkisi kullanılarak bir $n \times n$ mertebeden genelleştirilmiş $\text{Mat}_n(M_A(G); G)$ matris yakın halkası elde edilir. Burada $M_A(G)$ 'nin idealleri ile $\text{Mat}_n(M_A(G); G)$ 'nin idealleri arasındaki benzerlik incelenecektir. Ayrıca burada Smith ve Van Wyk (2000) çalışmasından hareketle görülmüştür ki, eğer $M_A(G)$ 'nin her ideali bir sıfırlayıcı (annihilator) ideal ise, o zaman $M_A(G)$ ile $\text{Mat}_n(M_A(G); G)$ 'nin idealleri arasında bire bir bir ilgi var demektir. Bu bölüm için aksi belirtilmedikçe Smith ve Van Wyk (2000) temel kaynak olarak alınmıştır.

3.1. $M_A(G)$ Merkezleyen Yakın Halka

G sonlu bir grup ve A , $\text{Aut}(G)$ 'nin bir alt grubu olsun. A 'nın G üzerindeki etkisi G yi A 'nın yörüngelerine böler. $a \in G$ nin A yörüngesi $\theta(a) = \{\alpha(a) \mid \alpha \in A\}$ 'dir ve α , $\theta(a)$ nin yörünge gösterimi olarak ifade edilir. $\forall a \in G$ 'nin karşılığı olarak A 'nın bir alt grubu olan a nin stabilizeri $\text{stab}(a) = \{\alpha \in A \mid \alpha(a) = a\}$ olarak yazılır. Eğer x ve y , G 'nin aynı A yörüngesinde ise, o zaman $\text{stab}(x)$ ve $\text{stab}(y)$, A 'nın ortak alt grupları olduğunu doğrulamak kolaydır. Eğer A değişmeli ise veya A 'nın her stabilizer alt grubu A 'nın normal bir alt grubu ise, aynı A -yörüngesindeki herhangi iki eleman aynı stabilizer alt gruba sahip olur.

G 'nin tüm sıfır olmayan A -yörüngelerinin kümesinde doğal bir denklik bağıntısı vardır. Eğer $\theta(a)$ ve $\theta(b)$ yörüngeleri veriliyor ise, $\text{stab}(x) = \text{stab}(y)$ olacak şekilde $x \in \theta(a)$ ve $y \in \theta(b)$ iken $\theta(a)$ ve $\theta(b)$ ikilisi denk olarak ifade edilebilir.

$[\theta(a)]$ ile $\theta(a)$ 'nın denklik sınıfı gösterilecektir. G 'nin birim elemanını içeren A -yörüngesi kendi sınıfında gösterilecektir. G ve A ile belirlenen merkezleyen yakın halka ise,

$$M_A(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f(0) = 0, f\alpha = \alpha f \text{ ve } \forall \alpha \in A\}$$

olur. Bu merkezleyen halka, fonksiyon toplama ya da bileşke işlemi altında bir (sağ) yakın halkadır. $M_A(G)$ elemanlarını oluşturmak kolaydır. G 'nin her sıfır olmayan A -yörüngesinden bir eleman seçelim ve $a, b, \dots$ diyelim. $stab(a) \subseteq stab(f(a))$, $stab(b) \subseteq stab(f(b))$ şartıyla f her yörünge üzerinde keyfi tanımlanabilir. O zaman her $\alpha \in A$ için $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ ve her $\alpha \in A$ için $f(\alpha b) = \alpha f(b)$ vb. için tanımlayarak f G nin bütününe genişletilebilir. G üzerinde bu yolla oluşturulan bir fonksiyonun $M_A(G)$ ye ait olduğunu ve $M_A(G)$ nin her elemanının bu şekilde elde edilebildiği ispatlanabilir. Ardından ihtiyaç duyulan şey $M_A(G)$ nin ideallerin iki taraflı tanımlanmasıdır. I 'nin $M_A(G)$ 'nin bir ideali olduğunu ve $[\theta(a)]$, $[\theta(b)]$, ...'nin G 'nin A -yörüngelerinin denklik sınıfları olduğunu varsayalım. $M_A(G) \equiv \{r(a) \mid r \in M_A(G)\}$ kümesi, G nin bir $M_A(G)$ invaryant alt grubu olup H_a ile gösterilir. $I_a \equiv \{i(a) \mid i \in I\}$ H_a 'nın bir alt grubu olup L_a ile gösterilir. G 'nin benzer alt grup çiftleri, G 'nin A -yörüngelerinin başka denklik sınıflarının her birini sağlamaktadır.

Önerme 3.1.1.

I , $M_A(G)$ 'nin bir ideali ve $[\theta(a)]$, G 'nin A -yörüngelerinin bir denklik sınıfı olsun. O zaman L_a , H_a 'nın $M_A(G)$ alt modülüdür.

İspat: İlk olarak La 'nın, Ha 'nın bir normal alt grubu olduğu gösterilecektir. $x \in Ha$ ve $y \in Ia$ verilsin. O zaman $r(a)=x$ ve $i(a)=y$ olacak şekilde $r \in M_A(G)$ ve $i \in I$ vardır. $-r+i+r \in I$ olduğundan

$$-x+y+x=-r(a)+i(a)+r(a)=(-r+i+r)(a) \in La$$

elde edilebilir.

$f \in M_A(G)$, $x=r(a) \in Ha$ ve $y=i(a) \in La$ olsun. O zaman $f(r+i)-fr$ I 'ya ait olduğundan dolayı $f(x+y)-f(x)=f(r(a)+i(a))-f(r(a))=(f(r+i)-fr)(a)$ La 'nın bir elemanı olur.

$M_A(G)$ 'nin I ideali ile ortak olarak; G 'nin $M_A(G)$ alt gruplarının (Ha, La) , (Hb, Lb) , ... çiftleri elde edilebilir. Bunlar A -yörüngelerinin $[\theta(a)]$, $[\theta(b)]$, ... denklik sınıflarına uygun biçimdedir. Ayrıca La , Ha 'nın alt modülü, Lb Hb 'nin alt modülüdür, vb. Ha , Hb , vb. gruplar I idealinden bağımsızdır. Keyfi olarak La , Lb , ... alt modülleri önerilip $I = \{r \in M_A(G) \mid r(Ha) \subseteq La, r(Hb) \subseteq Lb, \dots\}$ biçiminde $M_A(G)$ 'nin I ideali oluşturulabilir. (Ha, La) , (Hb, Lb) , ... çiftleri arasındaki benzerlik ile $M_A(G)$ 'nin birleşmeli I idealleri bire bir değildir. Örneğin, eğer G bir a üreteçli devirli $M_A(G)$ modülü ise, o zaman $G=Ha$ olur. Ha 'nın bir alt modülü $La=\{0\}$ olur ve $(Ha, \{0\})$ çifti diğer çiftlere bakılmaksızın $M_A(G)$ 'nin $I=\{0\}$ idealini belirler. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Önerme 3.1.2.

$M_A(G)$ G 'nin birleşmeli $Ha, Hb, \dots$ alt grupları ile birlikte bir merkezleyen yakın halka olsun. Eğer I ve J , $Ia=Ja$, $Ib=Jb$, ... olacak şekilde $M_A(G)$ 'nin idealleri ise, o zaman $I=J$ olur.

İspat: $\text{stab}(x) \subseteq \text{stab}(y)$ ile birlikte $x, y \in G$ için u_{yx} , $M_A(G)$ de x 'i y 'ye ve $\theta(x)$ 'i $\theta(y)$ 'ye götüren bir fonksiyon ve $\theta(x)$ 'in 0 (sıfır) olsun. $[\theta(a)]$, $[\theta(b)]$, ... G nin A -yörüngelerinin denklik sınıflarını gösterebilirsin. $[\theta(a)]$ içinde bütün i 'ler için

$stab(a_i) = stab(a)$ olacak biçimde $a = a_1, a_2, \dots$ yörünge gösterimleri seçilebilir. Diğer sınıflar için benzer şekilde devam edilebilir.

I 'nin $La=Ia, Lb=Ib, vb$ ile birlikte $M_A(G)$ 'nin bir ideali olsun. Eğer $x \in La$ ise o zaman $i(a)=x$ olacak biçimde $i \in I$ vardır. I bir ideal olduğundan $iu_{aa} = u_{xa}$ fonksiyonlarını içerir. Her j için $I, u_{xa}u_{aa_j} = u_{xa_j}$ yi içerir. Benzer bir sonuç diğer denklik sınıflarında sağlanır.

Şimdi $J, Ja=La, Jb=Lb vb.$ olacak şekilde $M_A(G)$ nin bir ideali olsun ve f, J içinde verilsin. O zaman f tüm $a_1, a_2, \dots b_1, b_2, \dots vb.$ yörünge gösterimlerinin tam kümesi üzerindeki değerleri tarafından belirlenir. $x_1 = f(a_1), x_2 = f(a_2), \dots y_1 = f(b_1), y_2 = f(b_2), \dots vb.$ olsun. O zaman her x_i, La 'ya ve her y_i, Lb ye ait olur, $vb. f = u_{x_1a_1} + u_{x_2a_2} + \dots + u_{y_1b_1} + u_{y_2b_2} + \dots$ elde edilir. Toplanılanların her biri I 'a aittir, bu yüzden f I 'ya aittir. Bu da $J \subseteq I$ yı gösterir. Simetri ile $J \subseteq I$ olur. Bu yüzden $J = I$ dır.

Sonuç 3.1.1.

$M_A(G)$, G nin birleşmeli $Ha, Hb, \dots$ alt grupları ile birlikte bir merkezleyen yakın halka olsun. $I, I(Ha) \equiv La, I(Hb) \equiv Lb, \dots$ ile birlikte $M_A(G)$ 'nin bir ideali olsun, o zaman,

$$I = \{ r \in M_A(G) \mid r(Ha) \subseteq La; r(Hb) \subseteq Lb, \dots \}$$

olur.

İspat: $Ja=La, Jb=Lb \dots$ olacak biçimde

$$J = \{ r \in M_A(G) \mid r(Ha) \subseteq La; r(Hb) \subseteq Lb, \dots \}$$

$M_A(G)$ 'nin bir idealidir. Önerme 3.1.2 vasıtasıyla; $Ia=La, Ib=Lb, \dots$, olduğundan $I=J$ elde edilir.

3.2. Matris Yakın Halkaları

R birimli sıfır simetrik yakın halka ve G bir birebir sol R -modülü, n pozitif bir tamsayı ve G^n , G nin n defa direkt toplamı yani $G^n = G \oplus G \oplus \dots \oplus G$ olsun. G üzerinde tüm sıfırı koruyan fonksiyonların yakın halkası $M_0(G)$ ile gösterilecektir. Burada $M_0(G^n)$ yakın halkasındaki bazı özel fonksiyonlar ifade edilecektir. $1 \leq i, j \leq n$ ve $r \in R$ için $f_{ij}^r : G^n \rightarrow G^n$, $f_{ij}^r(v_1, \dots, v_n) = (0, \dots, rv_j, 0, \dots, 0)$ ile tanımlanır. rv_j , i 'nci konumundadır. Smith'de (1996) olduğu gibi $\{f_{ij}^r \mid 1 \leq i, j \leq n, r \in R\}$ tarafından üretilen $M_0(G^n)$ nin alt yakın halkası G tarafından belirlenen R üzerine $n \times n$ matris yakın halkası olur. f_{ij}^r özel matrisleri temel (elementer) matrisler olarak ifade edilir. Bu matris yakın halkası

$$Mat_n(R; G) = \langle f_{ij}^r \mid r \in R, 1 \leq i, j \leq n \rangle = \left\{ \sum_{\text{sonlu}} \lambda_{ij} f_{ij}^r \mid r \in R, 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

ile gösterilecek ve hatadan kaçınmak için bundan böyle $n \geq 2$ olarak kabul edilecektir. Eğer $G = {}_R R$ ise o zaman Meldrum ve Van der Walt (1986) gereğince $Mat_n(R; {}_R R)$ matris yakın halkası olur ve bu yakın halka basitçe $Mat_n(R)$ ile gösterilecektir.

R idealleri ile $Mat_n(R)$ idealleri arasındaki benzerlik üzerine yoğunlaşılacaktır. Meldrum ve Van der Walt (1986) öncü çalışmasında

$$I^+ = id \langle f_{ij}^r \mid 1 \leq i, j \leq n, r \in I \rangle,$$

$$I^* = \{ A \in Mat_n(R) \mid A(v) \in I^n \forall v \in R^n \}$$

iken $Mat_n(R)$ nin I^+ ve I^* idealleri ile R 'nin I idealleri birleştirilmiştir. Burada R yakın halkasının bir S alt grubu için ; $id \langle S \rangle$ S tarafından üretilen R idealini gösterir. Meldrum ve Meyer (1996) için halka durumundakinden farklı olarak I^+ ile I^* ideallerinin genelde farklı olduğu gösterilmiştir. $I^+ \subseteq I^*$ olduğu açıktır. Ayrıca, birçok ara ideal yani $I^+ \subset J \subset I^*$ olacak şekilde $Mat_n(R)$ nin J idealleri var olabilir. Bu $I^* = I^+$ ve $I^+ = I$ eşlemeleri R idealleri ile $Mat_n(R)$ nin idealleri arasında birebir bir

ilişki oluşturduğu halka durumundakine zıt bir durum olur. Bu çalışmanın öncelikli amacı $Mat_n(R;G)$ nin ideallerinin halka durumundayken R nin ideallerine birebir bir eşlemeye sahip olacak biçimde G faithful modülleri ile R yakın halkalarının mevcut olabildiğini göstermektir.

Bu durumda R , bir merkezleyen $M_A(G)$ yakın halkası olarak özelleşecektir. Dikkat edilirse G , faithful $M_A(G)$ modülüdür. Eğer G devirli (monojen) bir $M_A(G)$ modül ise o zaman $Mat_n(M_A(G);G)$, $Mat_n(M_A(G))$ e izomorftur. Smith'de (1996) bu yüzden $Mat_n(M_A(G);G)$ nin idealleri $Mat_n(M_A(G))$ nin ideallerine benzerdir. G modülü üzerindeki etkileri yardımıyla $Mat_n(M_A(G);G)$ nin ideallerini 'bilmek' için, $Mat_n(M_A(G);G)$ ile $Mat_n(M_A(G))$ nin izomorfizmlerine bakılabilir.

Şimdi, G nin bir devirli $M_A(G)$ -modül olduğunu kabul edelim $a \in G$ bir a üretic yani $M_A(G)a = G$ olsun. $\varphi(r) = r(a)$ ile $\varphi: M_A(G) \rightarrow G$ yi tanımlayalım. φ nin bir örten $M_A(G)$ -modül homomorfizmi olduğunu doğrulamak kolaydır. $r = (r_1, \dots, r_n)$ iken $\Upsilon(r_1, \dots, r_n) = (r_1(a), \dots, r_n(a))$ yi ya da kısaca $\Upsilon(r) = r(a)$ yi tanımlayarak φ homomorfizmi $\Upsilon: M_A(G)^n \rightarrow G^n$ ye genişletilebilir. Açıkçası, $M_A(G)^n$ nin normal bir $Ker\Upsilon = \{(r_1, \dots, r_n) | r_1(a) = \dots = r_n(a) = 0\}$ alt grubu ile birlikte Υ dönüşümü bir grup homomorfizmidir.

Lemma 3.2.1.

$Ker\Upsilon$, $M_A(G)^n$ in bir $Mat_n(M_A(G))$ alt modülüdür.

İspat: A , $Mat_n(M_A(G))$ de bir matris ve $r \in Ker\Upsilon$ olsun. Ar nin $Ker\Upsilon$ de olduğunu göstermek gerekmektedir. Bu da A nın değeri olan $w(A)$ üzerinde tümevarım ile yapılabilir. Hatırlanacağı üzere bir A matrisinin değeri Meldrum ve Van der Walt (1996) gereğince A yi üretmek üzere gereken en düşük elementer matris sayısı

olduğudur. Eğer $w(A)=1$ ise A , f_{ij}^s elementer matrisidir. Bu durumda $Ar \in \text{Ker } \Upsilon$ olduğu açıktır. Sonucun k dan daha düşük değere sahip bütün matrisler için doğru olsun ve A bir k değerli matris olsun. O zaman $w(B) < k$ ve $w(C) < k$ iken ya $A=B+C$ ya da $A=BC$ olur. Her iki durumda da tümevarım hipotezi $Ar \in \text{Ker } \Upsilon$ yi gerektirir.

Eğer $A \in \text{Mat}_n(M_A(G))$, $s \in M_A(G)^n$ ve $r \in \text{Ker } \Upsilon$ ise, o zaman $A(s+r)-A(s)$, $\text{Ker } \Upsilon$ ye aittir. Yine $w(A)$ daki tümevarım kullanılır. Eğer $A = f_{ij}^t$ ise o zaman $\text{Ker } \varphi$ 'nin bir elemanı olan $A(s+r)-A(s)$ nin i girdisi $t(s_j+r_j)-t(s_j)$ olur. $A(s+r)-A(s)$ 'nin diğer tüm girdileri 0'dır. Böylece A 'nın değeri 1 olduğunda $A(s+r)-A(s)$, $\text{Ker } \Upsilon$ ye ait olur. Bu sonucun k 'dan daha düşük değere sahip bütün matrisler için doğru olduğunu ve A 'nın k değerine sahip olduğunu farz edelim. $w(B) < k$ ve $w(C) < k$ durumunda $A=B+C$ ise, o zaman

$$A(s+r)-A(s)=(B+C)(s+r)-(B+C)s=B(s+r)+C(s+r)-Cs-Bs$$

olup bu durum, $C(s+r)-Cs \in \text{Ker } \Upsilon$, $B(s+r)-Bs \in \text{Ker } \Upsilon$ ile $\text{Ker } \Upsilon$ normal bir alt grup olduğundan $\text{Ker } \Upsilon$ 'de söz konusudur. $w(B) < k$ ve $w(C) < k$ durumunda $A=BC$ ise, bazı $r' \in \text{Ker } \Upsilon$ ler için $C(s+r)-Cs \in \text{Ker } \Upsilon$ olduğu ve $\text{Ker } \Upsilon$ 'nin normal bir alt grup olduğu gerçeği kullanılarak $A(s+r)-As=BC(s+r)-BCs=B(Cs+r')-B(Cs) \in \text{Ker } \Upsilon$ olduğu elde edilir.

Teorem 3.2.1.

G devirli bir $M_A(G)$ -modülü olsun. Bu durumda bütün n 'ler için $\text{Mat}_n(M_A(G); G)$, $\text{Mat}_n(M_A(G))$ 'ye izomorftur (Smith, 1996).

İspat: $r=(r_1, \dots, r_n) \in M_A(G)^n$, $v \in G$ için $r(v)=(r_1(v), \dots, r_n(v))$ G^n 'in bir elemanı olsun. $a \in G$, G 'nin bir üretici olsun. Bu durumda $M_A(G)a = G$ dir. Bazı $r \in M_A(G)$ ler için G nin her elemanı $r(a)$ formunda olduğundan bazı $r \in M_A(G)^n$ ler için G^n in her elemanı $r(a)$ formuna sahiptir. $\Phi: \text{Mat}_n(M_A(G)) \rightarrow \text{Mat}_n(M_A(G); G)$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$A \in Mat_n(M_A(G))$ için, $\overline{A}(r(a))=s(a) \Leftrightarrow A(r)=s$ olacak biçimde $\Phi(A)=\overline{A}$ verilsin. İlk olarak Φ nin iyi tanımlı olduğu gösterilir. Eğer $r(a)=t(a)$ ise $(r-t)(a)=0$ dir. Bu durumda $r-t \in Ker\Upsilon$ dir ve $r=t+k$ olacak şekilde $k \in Ker\Upsilon$ mevcuttur. $Ker\Upsilon$, $Mat_n(M_A(G))$ nin bir alt modülü olduğundan $Ker\Upsilon$ deki bazı k' ler için $Ar=A(t+k)=At+k'$ elde edilir. Bu da $\overline{A}r(a)=(At+k')(a)=\overline{A}t(a)$ olmayı gerektirir.

Daha sonra Φ nin bir yakın halka homomorfizması olduğu gösterilir. A ve B, $Mat_n(M_A(G))$ de matrisler olsun. Bu durumda sadece $(A+B)r=s \Leftrightarrow (\overline{A+B})r(a)=s(a)$ ve $(A+B)r=Ar+Br=s$ olduğundan $\overline{A}r(a)+\overline{B}r(a)=s(a)$ görülür, böylece $(\overline{A}+\overline{B})r(a)=s(a)$ dir. Bu $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$ olduğu anlamına gelir.

Benzer bir şekilde, $ABr=s \Leftrightarrow \overline{AB}r(a)=s(a)$ dir. $s=ABr=A(Br)$ olduğu için $\overline{A}(\overline{B}r(a))=s(a)$ elde edilir. Bu da $\overline{AB}=\overline{A}\overline{B}$ olduğu anlamına gelir.

Φ üzerinedir, çünkü $Mat_n(M_A(G))$ için bir f_{ij}^x üreticinin $\Phi(f_{ij}^x)$ görüntüsü, $Mat_n(M_A(G);G)$ için f_{ij}^x 'nin üretici olur.

Şimdi Φ 'nin bire bir olduğu gösterilsin. Bunu yapmak için, $Ker\Phi=\{0\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Φ 'nin çekirdeği $Mat_n(M_A(G))$ 'nin bir idealidir. Meldrum ve Van der Walt'da (1996) gösterildiği üzere I , $Mat_n(M_A(G))$ 'nin sıfırdan farklı bir ideali ise o zaman bazı sıfırdan farklı $r \in M_A(G)$ ler için I , f_{11}^r formunun sıfırdan farklı bir matrisini içermelidir. Bu durumda eğer $Ker\Phi$ sıfırdan farklı ise, o zaman böyle bir f_{11}^r matrisini içerir. Bu da G^n üzerinden sıfır fonksiyonu olan $\Phi(f_{ij}^r)=0$ olduğu anlamına gelir. Ancak yukarıdaki gibi $\phi(f_{11}^r)=f_{11}^r$ ve $f_{11}^r=0$ olur. Bu bütün $s \in M_A(G)$ ler için $r(s(a))=0$ olmayı gerektirir ve bu durumda a , G yi ürettiğinden $r=0$ olur.

Önerme 3.2.1.

Eğer $Aw=v$ ile $A \in Mat_n(M_A(G))$ ise o zaman her bir $x \in G$ için $\overline{A}w(x)=v(x)$ olur.

İspat: $w(A)$ üzerinde tümevarımı kullanılsın. $w(A)=1$ ise o zaman bazı $1 \leq i, j \leq n$ ve $r \in M_A(G)$ ler için $A = f_{ij}^r$ dir. $x \in G$ ise a , G nin bir üretici olduğu durumda bazı $s \in M_A(G)$ ler için $x = s(a)$ dır. j . elemanıylayla $g \in M_A(G)$ girdili $w \in M_A(G)^n$ ise, v nin i . girdisi rg ve diğer tüm girdiler 0 olduğu durumlarda $f_{ij}^r(w) = v$ olur. Φ nin tanımıyla, $f_{ij}^r = \Phi(f_{ij}^r)$ ve $f_{ij}^r(w(x)) = f_{ij}^r(w(s(a))) = v(s(a)) = v(x)$ dir ve sonuç $wA=1$ olduğu zaman doğrudur.

Şimdi bu sonucun, değeri k 'dan küçük olan $Mat_n(M_A(G))$ 'deki bütün matrisler için doğru olduğu varsayılınsın. A , k değerli $Mat_n(M_A(G))$ 'deki bir matris olsun. Bu durumda iki ihtimal vardır.

1. B ve C 'nin k 'dan daha küçük değerli $Mat_n(M_A(G))$ 'de matrisler olması durumunda $A=B+C$ dir. Bu durumda elde ettiğimiz sonuç hipotezi hem B 'ye hem de C 'ye uygulanır. Böylece

$$\overline{A}(w(x)) = \overline{B}(w(x)) + \overline{C}(w(x)) = (Bw)(x) + (Cw)(x) = (B + C)w(x) = Aw(x)$$

olur.

2. B ve C 'nin k 'dan daha küçük değerli $Mat_n(M_A(G))$ 'de matrisler olması durumunda $A=BC$ dir. Yine,

$$\overline{A}(w(x)) = \overline{BC}(w(x)) = \overline{B}(\overline{C}(w(x))) = (B(Cw))(x) = (BC(w(x))) = Aw(x)$$

elde etmek için B ve C üzerinde sonuç hipotezi kullanılır.

Şimdi $a \in G$ üreticiyle G , devirli bir $M_A(G)$ modül olduğu zaman $\Phi: A \rightarrow \overline{A}$ diye $Mat_n(M_A(G))$ ve $Mat_n(M_A(G); G)$ arasında bir izomorfizm kurulabildiğine bakalım. Bu izomorfizm vasıtasıyla $Mat_n(M_A(G))$ 'nin J ideali $Mat_n(M_A(G); G)$ 'nin bir $\Phi(J) = \overline{J}$ idealine benzerdir. Hatırlanacağı üzere; $M_A(G)$ 'nin bir I ideali,

$$I^* = \{A \mid Av \in I^n \forall v \in M_A(G)^n\}$$

ve

$$I^+ = id \langle \{f_{ij}^r \mid r \in I\} \rangle$$

olacak biçimde doğal olarak $Mat_n(M_A(G))$ nin iki idealine benzerdir.

Bir sonraki amaç, $Mat_n(M_A(G);G)$ 'nin bir birine karşılık gelen $\bar{I}^*$ ve $\bar{I}^+$ ideallerinin daha açık bir açıklamasını elde etmektir.

$$\bar{I}^* = \{ \bar{A} \mid \text{her bir } v \in M_A(G)^n \text{ ve bazı } w \in I^n \text{ ler için } \bar{A}v(a) = w(a) \} ,$$

$\bar{I}^+ = id \langle \{ \Phi(f_{ij}^r) \mid r \in I \} \rangle$ olduğu bilinmektedir. $\bar{I}^+$ 'nin bu tanımı önemlidir ama $\bar{I}^*$ 'in tanımı geliştirilmeye ihtiyaç vardır.

Önerme 3.2.2.

$$\bar{I}^+ = \{ \bar{A} \mid \bar{A}(H_c^n) \subseteq L_c^n \forall [\theta(c)] \} \text{ olur.}$$

İspat: $h \in H_c^n$ 'yi seçelim. H_c, c üreteçli devirli bir $M_A(G)$ modülü olduğundan, $v(c)=h$ olacak şekilde $v \in M_A(G)^n$ vardır. $\bar{A}, \bar{I}^*$ 'da olsun. Bu durumda $\bar{A}, \bar{I}^*$ 'a ait olur ve $\bar{A}v \in I^n$ 'dir. Böylece $\bar{A}h = \bar{A}v(c) \in L_c^n$ dir. Tam tersine, $\bar{A}$ her $[\theta(c)]$ sınıfı için $\bar{A}(H_c^n) \subseteq L_c^n$ olacak şekilde verilsin. $v \in M_A(G)^n$ için, $\bar{A}v=w$ olsun. Önerme 3.2.1 den, her bir $x \in G$ için $\bar{A}v(x) = w(x)$ dir. Özellikle, $x \in H_c$ 'nin içindeyse $v(x) \in H_c^n$ dir. Bu da $\bar{A}v(x) = w(x)$ in L_c^n nin içinde olduğu anlamına gelir. Bu durumda $w(x)$ 'in her bileşeni L_c 'ye aittir. Yukarıdakiler her bir $[\theta(c)]$ sınıfı için ve her $x \in G$ için doğru olduğundan w, I^n 'ye aittir. Bu da $\bar{A} \in \bar{I}^*$ ve aynı şekilde $\bar{A} \in \bar{I}^+$ olduğu anlamına gelir.

3.3. $M_A(G)$ 'nin ve $Mat_n(M_A(G);G)$ 'nin İdealleri

G devirli bir $M_A(G)$ modülü olduğu varsayımı göz ardı edilsin. Aynı zamanda $Mat_n(M_A(G);G)$ 'deki tüm matrisler için bu varsayımı bir tarafa bırakalım. $I, M_A(G)$ 'nin bir ideali olsun. I ideali ile birleşimli $I(Ha)=La, I(Hb)=Lb, \dots$ yi $[\theta(a)], [\theta(b)], \dots$ biçiminde A denklik sınıfları ile birleştirilmesi durumunda G 'nin $M_A(G)$ alt gruplarının $(Ha, La), (Hb, Lb), \dots$ çiftleri elde edilebilir. Devirli durumlar ile hareket

ederek I , $Mat_n(M_A(G);G)$ 'nin iki idealine yani $I^+ = id \langle \{f_{ij}^r \mid r \in I\} \rangle$ ve $I^* = \{A \in Mat_n(M_A(G);G) \mid A(H_c^n) \subseteq L_c^n \forall [\theta(c)]\}$ ye karşılık gelir.

I^* 'ın $Mat_n(M_A(G);G)$ 'nin bir ideali olduğunu kontrol etmek gerekir. $A \in I^*$, $B, C \in Mat_n(M_A(G);G)$ ve $h \in H_c^n$ olsun. $(B(A+C)-BC)h$ nin, L_c^n 'ye ait olsun. Bunun için $w(B)$ üzerinde tümevarımı kullanılsın. $w(B)=1$ ise B bir f_{ij}^r elementer matrisidir ve Ah (L_c 'nin bir elemanı) 'nın j . girdisi olan x_j ve Ch (H_c 'nin bir elemanı) 'nın j . girdisi olan h_j ile v 'nin i . girdisi $r(x_j + h_j) - r(h_j)$ olduğu durumlarda $(B(A+C)-BC)h = B(Ah+Ch) - BCh = v$ dir. v nin diğer bütün girdileri 0 dır. L_c , H_c nin $M_A(G)$ alt modülü olduğundan $v \in L_c^n$ 'dir. Sonucun k 'dan küçük değerli bütün matrisler için doğru olsun ve B , $w(B)=k$ lı bir matris olsun. Bu durumda D ve E , $w(D)<k$ ve $w(E)<k$ olacak şekilde matrisler olduğunda ya $B=D+E$ ya da $B=DE$ 'dir. Her iki durumda da sonuçta çıkan hipotezimizi kullanarak $(B(A+C)-BC)h \in L_c^n$ 'yi görmek oldukça kolaydır. Bir ideal için diğer aksiyomların kontrol edilmesi kolaydır. $I^+ \subseteq I^*$ olduğu bellidir.

Önerme 3.3.1.

$M_A(G)$ nin idealleri kümesinden $Mat_n(M_A(G);G)$ nin idealleri kümesine kadar olan $I \rightarrow I^+$ ve $I \rightarrow I^*$ dönüşümleri hem birebir hem de (order preserving) sıra korumalıdır.

İspat: $I \neq J$ olacak şekilde I ve J , $M_A(G)$ 'nin idealleri olsun. Eğer $I \subseteq J$ ise $I^+ \subseteq J^+$ ve $I^* \subseteq J^*$ olduğu açıktır. Böyle dönüşümler sıra korumalıdır. $r \in J \setminus I$ olarak kabul edilir. O zaman $f_{11}^r \in J^+$ ve bu yüzden $f_{11}^r \in J^*$ olur. r , I ya ait olmadığı için $r(x) \notin L_a$ olacak şekilde (H_a, L_a) çifti ve $x \in H_a$ vardır. Bunun anlamı $f_{11}^r(x, 0, \dots, 0) = (r(x), 0, \dots, 0)$, L_a^n içinde değildir. Bu yüzden f_{11}^r I^* 'a ait değildir ve bu nedenle f_{11}^r 'de I^+ 'ya ait değildir. Bu $I^* \neq J^*$ ve $I^+ \neq J^+$ yı gösterir.

Önerme 3.3.2.

J , $Mat_n(M_A(G); G)$ 'nin bir ideali olsun. O zaman $I^+ \subseteq J \subseteq I^*$ olacak şekilde $M_A(G)$ 'nin bir I ideali vardır, üstelik bu I ideal tektir.

İspat: $I = \{r \in M_A(G) \mid f_{11}^r \in J\}$ olsun. I 'nin $M_A(G)$ 'nin bir ideali olduğunu doğrulamak kolaydır. Açıkça $I^+ \subseteq J$ dir.

$A \in J$ fakat $A \notin I^*$ olarak farz edelim. O zaman $A(H_a^n)$, L_a^n 'nin bir alt kümesi olmayacak şekilde I ile birleşmeli G 'nin $M_A(G)$ alt gruplarının bir (H_a, L_a) çifti var demektir. Bu yüzden $Av \notin L_a^n$ olacak şekilde $v = (v_1, \dots, v_n) \in H_a^n$ vardır. Bazı $w_i \notin L_a$ lar ile $Av = w = (w_1, \dots, w_m)$ verilsin. H_a , a üreteçli devirli olduğundan, her v_j için $v_j = r_j(a)$ olacak şekilde $r_j \in M_A(G)$ mevcuttur. $B \equiv f_{1i}^1 A (f_{1i}^{r_1} + \dots + f_{ni}^m)$ matrisi J 'ye aittir ve

$$B(0, \dots, 0, a, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, w_i, 0, \dots, 0)$$

olur. İspatları gerçekte genelleştirilmiş matris yakın halkaları için aynı olan Meldrum ve Van der Walt (1996) deki Sonuç 3.8 ve Lemma 3.7'yi kullanarak, $r(a) = w_i$ 'li bazı $r \in M_A(G)$ ler için $B = f_{ii}^r$ elde edilir. Bu yüzden r , I 'nin içinde değildir. Bununla birlikte $f_{1i}^1 B f_{i1}^1 = f_{11}^r$, J 'ye aittir ve bu yüzden $r \in I$ olur. Bu çelişki $J \subseteq I^*$ olduğunu gösterir.

$K^+ \subseteq J \subseteq K^*$ olacak biçimde K 'nin $M_A(G)$ 'nin bir ideali olduğunu farz edelim. Eğer $s \in K$ ise, o zaman $f_{11}^s \in J$ olur. Bu da $s \in I$ ve $K \subseteq I$ 'yı gerektirir. $r \in I \setminus K$ olduğu varsayılır. r , K 'nin içinde olmadığı için K ile birleşmeli $M_A(G)$ alt gruplarının bir (H_c, L_c) çifti, $r(H_c)$, L_c 'nin bir alt kümesi olmayacak biçimde vardır. $f_{11}^r(H_c^n)$ 'li $f_{11}^r \in J$ elemanı, L_c 'nin bir alt kümesi olmayacak biçimde elde edilir. Bunun anlamı f_{11}^r 'nin K^* içinde olmadığı ve J 'nin K^* 'nin bir alt küme olmadığıdır. Bu yüzden $K=I$ ve I tek olur.

Her bir $[\theta(c)]$ denklik sınıfı için $L_c = H_c$ veya $L_c = \{0\}$ olacak biçimde Γ 'yı $M_A(G)$ 'nin bir ideali olsun. Bu her $\theta(c)$ yörüngesi için $I(\theta(c)) = \{0\}$ olduğunu veya Γ 'nın u_c idempotent fonksiyonunu, birimi $\theta(c)$ üzerinde ve sıfırı $G \setminus \theta(c)$ üzerinde olacak şekilde içerdiğini belirtir. Aynı şekilde her $\theta(c)$ yörüngesi için ya $I, \theta(c)$ 'yi sıfırlar; ya da $I, \theta(c)$ üzerinde keyfi olarak etki yapar, böyle bir ideal bir sıfırlayıcı (annihilator) ideal olarak ifade edilir.

$I, M_A(G)$ 'nin bir sıfırlayıcı ideali olsun. $K = \{v \in G \mid i(v) = 0, \forall i \in I\}$, I tarafından yok edilmiş G deki elemanların kümesi olsun. I bir ideal olduğu için $K, M_A(G)$ -invariant olur. K kümesi de A -invariant olur.

Asıl amaç, eğer I bir sıfırlayıcı ideal ise o zaman $I^+ = I^*$ olduğunu göstermektir.

$r', r \in M_A(G)$ için K üzerinde r ile uyumlu olan $M_A(G)$ de bir fonksiyon ve $G \setminus K$ üzerinde bir sıfır ve $r^+, G \setminus K$ üzerinde r ile uyumlu olan $M_A(G)$ de bir fonksiyon ve K üzerinde bir sıfır iken $r = r^+ + r'$ ayrışım elde edilebilir. Her $1 \leq i, j \leq n$, $f_{ij}^r = f_{ij}^{r^+} + f_{ij}^{r'}$ için ve $f_{ij}^{r^+} \subseteq I^+$ iken $r = r^+ + r' = r' + r^+$ elde edilir.

Herhangi $A \in \text{Mat}_n(M_A(G); G)$ matrisi f_{ij}^r üreteçleri içinde bir ifadedir. Her $f_{ij}^r, f_{ij}^{r^+} + f_{ij}^{r'}$ yazılsın ve her $f_{ij}^{r^+}$ 'nın I^+ 'ya ait olduğu varsayılınsın. I^+ idealinin modülü için; $A - A', I^+$ da ve $r', G \setminus K$ da sıfır iken $A'; f_{ij}^{r'}$ matrislerinde bir gösterim olacak şekilde bir A' matrisi elde edilir.

Şimdi A, I^* içinde olsun. Yukarıdan itibaren $A = A' + A^+$ olacak şekilde bir $A' \in I^+ \subseteq I^*$ matrisi vardır ve $r(G \setminus K) = \{0\}$ iken A', f_{ij}^r formunun elementer matrisleri tarafından üretilir. A, I^* 'nin içinde olduğu için A', I^* nin içinde olur. A' nün üreteçlerinin yapısı gereği tüm $v \in (G \setminus K)^n$ ler için $A'(v) = 0$ elde edilir. A', I^* 'ya ait olduğu için tüm $v \in K^n$ ler için $A'(v) = 0$ dır. Bir sonraki önermede $A' = 0$ ilişkisinin kurulması gerekmektedir. Bu $A \in I^+$ ile buradan $I^+ = I^*$ olmayı gerektirir.

Sonuç 3.3.1.

Eğer $M_A(G)$ 'nin her ideali bir sıfırlayıcı ideal ise o zaman $I \rightarrow I^* = I^+$ ile verilen $M_A(G)$ idealleri ile $Mat_n(M_A(G); G)$ idealleri arasında bire bir bir ilişki vardır.

Şimdi tüm idealleri sıfırlayıcı ideal olan merkezleyen yakın halkaları gösterilecektir. G bir sonlu grup ve A , $Aut(G)$ 'nin bir alt grubu olsun. S_1 A 'nın stabilizer alt gruplarının kümesini yani $S_1 = \{ \text{stab}(a) \mid a \in G \}$ 'yi gösterebilir. Herhangi pozitif k tamsayısı için A , G^k üzerinde çift yönlü etkilendir. S_k , G^k üstünde etki yapan A 'nın stabilizer alt gruplarının bir kümesi yani $S_k = \{ \text{stab}(a) \mid a \in G^k \}$ olsun. Açıkça $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \dots$ olur.

Önerme 3.3.3.

G bir sonlu grup ve A , $Aut(G)$ 'nin bir alt grubu olsun.

(i) Eğer S_1 küme kesişimi altında kapalı ise, o zaman $M_A(G^2)$ 'nin her ideali bir sıfırlayıcı ideal olur.

(ii) S_1 'in küme kesişimi altında kapalı olmadığını varsayalım. O zaman S_k küme kesişimi altında kapalı olacak şekilde bir pozitif k tamsayısı vardır. Üstelik $M_A(G^{k+1})$ 'nin her ideali bir sıfırlayıcı idealdir.

İspat: (i) $(a,b) \in G^2$ seçilsin. Yalnızca $H_{(a,b)}$ 'nin $M_A(G^2)$ -alt modüllerinin $H_{(a,b)}$ ve $\{(0,0)\}$ olduğu görülebilir. S küme kesişimi altında kapalı olduğu için $\text{stab}(c) = \text{stab}(a) \cap \text{stab}(b) = \text{stab}(a,b)$ olacak şekilde $c \in G$ vardır. Bu yüzden $\text{stab}(c,0) = \text{stab}(a,b)$ ve $H_{(a,b)} = H_{(c,0)}$ 'dir.

L 'nin, $H_{(c,0)}$ 'ın bir sıfır olmayan $M_A(G^2)$ alt modülü olduğunu varsayalım. O zaman L , $x \neq 0$ iken, $(0,x)$ formunun bir elemanını içerir. Her $r \in M_A(G^2)$ için $r((c,0) + (0,x)) - r(c,0) \in L$ 'dir. Dikkat edilirse (c,x) ve $(c,0)$, G^2 'nin farklı A yörüngelerinde yer almaktadırlar. Bu yüzden $(c,0)$ yörüngesinde birimli ve başka yerde

sıfır olan $M_A(G^2)$ içinde bir e fonksiyonu vardır. $e(c,x)-e(c,0)=-(c,0) \in L$ elde edilir. Bu yüzden $(c,0) \in L$ ve $L=H_{(c,0)}=H_{(a,b)}$ olur. Bunun anlamı $H_{(a,b)}$ 'nin $M_A(G^2)$ -basit olduğu ve $M_A(G^2)$ 'nin her idealinin bir sıfırlayıcı ideal olduğudur.

(ii) A sonlu olduğu için A 'nın sadece sonlu çoklukta alt grubu vardır. $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots$, olduğu için, $S_k = S_{k+1}$ olacak şekilde k mevcuttur. Şimdi tüm $m \geq k$ lar için $S_m = S_k$ olduğuna bakılacaktır. $a = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) \in G^{k+2}$ olsun. O zaman $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$ ve $(0, \dots, 0, \cap a_{k+2})$, G^{k+1} 'in içinde iken

$$\text{stab}(a) = \text{stab}(a_1, \dots, a_{k+1}) \cap \text{stab}(0, \dots, 0, a_{k+2})$$

olur. $S_k = S_{k+1}$ olduğundan $\text{stab}(b) = \text{stab}(a_1, \dots, a_{k+1})$ olacak şekilde $b \in G^k$ vardır. Bu yüzden $\text{stab}(b, a_{k+2}) = \text{stab}(a)$ ile $(b, a_{k+2}) \in G^{k+1}$ ifade edilebilir. Bu gösterir ki, $\text{stab}(a) \in S_{k+1}$ 'dir ve böylece $S_{k+2} = S_{k+1}$ dir. Devamında her $m \geq k$ için $S_m = S_k$ sonucuna varılır. Eğer $a, b \in G^k$ ise, o zaman $(a, b) \in G^{2k}$ ve $\text{stab}(a, b) = \text{stab}(a) \cap \text{stab}(b) \in S_{2k} = S_k$ olur. Bu yüzden S_k kesişim altında kapalıdır. Benzer yollarla, $M_A(G^{k+2})$ 'nin tüm ideallerinin sıfırlayıcı idealler olduğu görülür. I , $M_A(G)$ 'nin bir sıfırlayıcı ideali değilse, o zaman I^+ nin I^* ya denk olmasının gerekmediğini görmek için bir örnek verilebilir:

Örnek 3.3.1.

$G = \{0, a, 2a, 3a\}$ 4. mertebeden (toplamsal) devirli grup ve $\sigma(x) = -x$ iken $A = \text{Aut}(G) = (i, \sigma)$ olsun. G 'nin A -yörüngeleri $\{a, 3a\}$, $\{2a\}$ ve $\{0\}$ 'dir. $L_a \equiv \{2a, 0\}$ 'in $G = H_a$ 'nın bir $M_A(G)$ alt modülü olduğu doğrulanabilir. Böylece $M_A(G)$ yakın halkası, $I = \{r \in M_A(G) \mid r(G) \subseteq L_a, r(L_a) = \{0\}\}$ biçiminde sıfırlayıcı olmayan bir I idealine sahip olur.

Görülür ki $\text{Mat}_n(M_A(G); G)$ içinde I^+ , I^* 'in bir has alt kümesidir.

Devamında $L_a = L$ olduğu görülebilir.

Lemma 3.3.1.

Eğer $r \in M_A(G)$ ise o zaman her $x \in G$ ve $h, k \in L$ için,

$$r(x+h) - r(x) = r(x+h+k) - r(x+k)$$

olur.

İspat: Eğer $h=0$ veya $k=0$ ise, sonuç basitçe doğru olur. $L = \{2a, 0\}$ olduğu için, $h=k=2a$ durumuyla karşı karşıya kalınır. Bu durumda $r(x+h) - r(x)$, L içinde olduğundan

$$\begin{aligned} r(x+h+k) - r(x+k) &= r(x+h+h) - r(x+h) \\ &= r(x) - r(x+h) \\ &= -(r(x+h) - r(x)) \\ &= r(x+h) - r(x) \end{aligned}$$

olur.

Lemma 3.3.2.

Her $r \in M_A(G)$, $x \in G^n$ ve $h, k \in L^n$ için $1 \leq i, j \leq n$ iken

$$f_{ij}^r(x+h) - f_{ij}^r(x) = f_{ij}^r(x+h+k) - f_{ij}^r(x+k)$$

olur.

İspat: Lemma 3.3.1. ile elde edilmesi açıktır.

Lemma 3.3.3.

Her $A \in Mat_n(M_A(G); G)$, $x \in G^n$ ve $h, k \in L^n$ için

$$A(x+h) - A(x) = A(x+h+k) - A(x+k)$$

elde edilir.

İspat: A'nın değeri üzerinden tümevarım kullanılabilir. Eğer $w(A)=1$ ise Lemma 3.3.2. kullanılır. Değerleri k'dan küçük olan matrisler için sonuçların doğru olduğunu ve A'nın, değeri k olan bir matris olsun. B ve C'nin k'dan küçük değerlere sahip iken, eğer $A=B+C$ ise A'nın istenilen özelliğe sahip olduğu açıktır. B ve C'nin k'dan küçük değerlere sahip iken $A=BC$ olsun. L^n , G^n 'nin bir $Mat_n(M_A(G);G)$ alt modülü olduğundan, herhangi bir D matrisi ile bazı $h' \in L^n$ ler için $D(x+h)=D(x)+h'$ elde edilir. Bu yüzden B ve C üstünde tümevarım hipotezini kullanarak

$$\begin{aligned}
 A(x+h+k) - A(x+k) &= BC(x+h+k) - BC(x+k) \\
 &= B(C(x+k)+h') - B(C(x+k)) \\
 &= B(C(x)+k'+h') - B(C(x)+k') \\
 &= B(C(x)+h') - B(C(x)) \\
 &= BC(x+h) - BC(x)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.3.4.

Her $r \in I$, tüm $x \in G^n$ ve $h \in L^n$ ler için $f_{ij}^r(x+h) = f_{ij}^r(x)$ dir.

İspat: r, I'nın içinde olduğundan, her y için $r(y) \in L = \{2a, 0\}$ olur. Eğer $x \in G$, L içinde değilse o zaman her $h \in L$ için x ve x+h'nin ikisi de $\{a, 3a\}$ yörüngesindedir. Bunun anlamı $r(x+h) = r(x)$ olduğudur. Eğer $x \in I$ ise o zaman her $h \in L$ için $r(x+h) = r(x) = 0$ olur. Böylece her $r \in I$, $x \in G$ ve $h \in L$ için $r(x+h) = r(x)$ elde edilir.

Lemma 3.3.5.

A, I^+ içinde bir matris olsun. O zaman tüm $x \in G^n$ ve $h \in L^n$ için,

$$A(x+h) = A(x). \quad (3.1)$$

4. MERKEZLEYEN YAKIN HALKALAR, MATRİS YAKIN HALKALARI ve DEVİRLİ P-GRUPLARI

Eğer her $m \geq 2$ için G sonlu bir grup ve A , G nin otomorfizmlerinin bir grubu olursa $M_m(M_A(G);G)$ matris yakın halkasının $M_A(G^m)$ merkezleyen yakın halkasının alt yakın halkası olduğu belirtilecek, $M_m(M_A(G);G) : M_A(G^m)$ in bir has alt yakın halkası olması halinde ve eğer A ile G abelyan olursa $M_m(M_A(G);G) = M_A(G^m)$ eşitliğinin sağlanmasını gerektiren koşullar ayrıca verilecektir. G bir devirli p - grubunun otomorfizmlerinin her A grubu için ya G nin tüm sıfırdan farklı yörüngelerinin tek tipten olduğu ya da p tek iken G nin yörüngelerinin hiç birinin tek tipten olmadığı veyahut üçüncü bir olasılıkla $p=2$ iken yani özellikle G nin yörüngelerinden birinin tek tipten olduğu gösterilecektir. Bu bölüm için aksi belirtilmedikçe Smith ve Van Wyk (2005) temel kaynak olarak alınmıştır.

G sonlu bir grup olup toplamsal fakat abelyan olması gerekmez. A , G nin otomorfizmlerinin bir alt grubu yani G nin $\text{Aut}G$ otomorfizmleri grubunun bir alt grubu olsun. (A,G) çifti ile belirlenen $M_A(G) = \{ f : G \rightarrow G \mid f(\alpha v) = \alpha f(v), \forall \alpha \in A, v \in G, f(0) = 0 \}$ merkezleyen yakın halkası elde edilir. $M_A(G)$, fonksiyon toplama ve bileşke işlemi altında bir yakın halka oluşturur. $m \geq 2$ için G^m ifadesi $G \oplus G \oplus \dots \oplus G$ biçiminde, G nin m tane direkt toplamını gösterebilir. G^m nin elemanlarını $(v_1, \dots, v_m)$ olarak yazarak G otomorfizmlerinin bir A grubu G^m otomorfizmlerinin bir $\bar{A}$ grubuna kadar genişletilebilir:

Eğer $\alpha \in A$ ve $(v_1, \dots, v_m) \in G^m$ olursa o zaman $\bar{\alpha}(v_1, \dots, v_m) := (\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_m))$ olur. Bununla birlikte G nin otomorfizmlerinin A grubuna karşılık gelen G^m otomorfizmlerinin $\bar{A}$ grubundan ayırt edilemez. Bu yüzden G nin otomorfizmlerinin A grubunu vermekle G^m otomorfizmlerinin genişletilmiş A grubu yazılır ve böylece $M_A(G^m)$ merkezleyen yakın halkası elde edilebilir.

$M_A(G^m)$ yakın halkası elementer matrisler olarak adlandırılan özel elemanlar içerir. Her $r \in M_A(G)$ ve $1 \leq i, j \leq m$ için elementer f_{ij}^r matrisi, rv_j i. inci yeri ifade

etmek üzere $f_{ij}^r : (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (0, 0, 0, \dots, rv_j, 0, \dots, 0)$ olarak tanımlanan $f_{ij}^r : G^m \rightarrow G^m$ fonksiyonudur. Her elementer f_{ij}^r matrisi, $M_A(G^m)$ nin bir elemanı olduğu kolayca görülebilir. $M_A(G)$ üzerine $m \times m$ mertebeden matris yakın halkası, $\{ f_{ij}^r \mid r \in M_A(G), 1 \leq i, j \leq m \}$ elementer matrislerinin kümesi tarafından üretilen $M_A(G^m)$ nin alt yakın halkası olarak ifade edilebilir. Bu matris yakın halkası $M_m(M_A(G); G)$ ile gösterilecektir. Bunun sonucunda $M_m(M_A(G); G) \subseteq M_A(G^m)$ elde edilir. Birinci olarak $M_m(M_A(G); G) = M_A(G^m)$ eşitliği olacak biçimde (A, G) çiftleri üzerinde bulunan genel problemler ve ikinci olarak $M_m(M_A(G); G) \subsetneq M_A(G^m)$ öz kapsamı olacak şekilde (A, G) çiftleri üzerinde bulunan genel problemler sağlanır ve bu problemler Smith ve Van Wyk'da (1996) başlamış, Oswald ve ark.'da (2001) devam ettirilmiştir. Buna göre aşağıdakiler bilinebilir:

(i) Eğer bir homomorfik görüntü olarak $M_A(G)$ sıfırdan farklı halkaya sahip ise Oswald ve ark.'da (2001) $M_m(M_A(G); G) \subsetneq M_A(G^m)$ dir.

(ii) Eğer G sıfırdan farklı bir has $M_A(G)$ alt modülüne sahip bir $M_A(G)$ invariant alt grubuna sahip ise Oswald ve ark.'da (2001) $M_m(M_A(G); G) \subsetneq M_A(G^m)$ dir.

(iii) Eğer A , G üzerinde fixed point free ve $M_A(G)$ halka değil ise Smith ve Van Wyk (1996) için Teorem 3.2.1 ye göre $M_m(M_A(G); G) = M_A(G^m)$ dir.

(iv) A , G ve $M_A(G)$ üzerinde aşağıdaki durumlar düşünülebilir:

I. $M_A(G)$ yukarıdaki (i) ile karşılaştırmalı biçimde homomorfik görüntü olarak sıfırdan farklı bir halkaya sahip değildir.

II. G yukarıdaki (ii) ile karşılaştırmalı biçimde sıfırdan farklı bir has $M_A(G)$ alt modülüne sahip olan bir $M_A(G)$ alt grubuna sahip değildir.

III. A ve G abelyandır.

IV. Tüm $v, w \in G$ için $stab_A(v) \cap stab_A(w) = stab_A(x)$ ile $x \in G$ vardır. $v \in G$ için $stab_A(v)$, A nın bir alt grubu olan $\{\alpha \in A \mid \alpha v = v\}$ v'nin stabilizeridir. Eğer karışıklık olmaz ise $stab_A(v)$ 'nin yerine $stab(v)$ yazılabilir.

V. Farz edelim ki $v_1, v_2, \dots, v_n, w$, $stab(v_1) \cap \dots \cap stab(v_n) = stab(w)$ ile G için de vardır. O zaman $stab(r_1 v_1 + \dots + r_n v_n) = stab(w)$ olacak şekilde en az bir r_i tersine sahip $r_1, \dots, r_n \in M_A(G)$ fonksiyonları vardır.

Eğer A , G ve $M_A(G)$, I-V durumlarını sağlarsa o zaman Oswald ve ark.'dan (2001) ve $M_m(M_A(G); G) = M_A(G^m)$ olur.

Bu bölümün amacı; $M_m(M_A(G); G) = M_A(G^m)$ için bir G devirli p -grubunun A otomorfizmlerinin gruplarını karakterize etmektir.

4.1. Temel Sonuçlar

$Aut(G)$ nin bir A alt grubunun bir G grubu üzerindeki etkisi G 'yi farklı A yörüngelerine ayırır. A yörüngeleri yerine yörüngeler yazılabilir. $v \in G$ için $\theta(v)$, v 'yi içeren bir yörünge yani $\theta(v) = \{\alpha v \mid \alpha \in A\}$ olsun.

Her zaman $\theta(0) = \{0\}$ sıfır yörüngesi elde edilebilir. Fakat dikkat edilmesi gereken sıfırdan farklı G yörüngelerinedir. $v \in \theta_1$ ve $w \in \theta_2$ ikilisi $stab(v) = stab(w)$ olacak şekilde var ise sıfırdan farklı iki θ_1 ve θ_2 biçimindeki G yörüngesi denktir diye ifade edilir. Her ne zaman G de sıfırdan farklı w , $stab(w) = stab(v)$ olacak şekilde bulunursa o zaman $w \in \theta(v)$ den hareketle sıfırdan farklı bir $\theta(v)$ yörüngesi tek tipten bir yörünge olarak ifade edilebilir. Bunun anlamı bir yörünge tek tiptir ancak ve ancak diğer bir yörüngeye denk değilse. $a \in G$ için $|a|$ a'nın mertebesini gösterebilir ve $U(a) = \{b \in G \mid |b| = |a|\}$ olsun. Dikkat edilirse, eğer A , $Aut(G)$ nin bir alt grubu ise o zaman $\theta(a) \subseteq U(a)$ dir. Çünkü bir otomorfizm bir elemanın mertebesini değişmez kılar. Dahası eğer G sonlu devirli ve $\theta(a)$ tek tipten bir yörünge ise o zaman $\theta(a) = U(a)$ dir.

Lemma 4.1.1.

G sonlu devirli bir grup; $a, b \in G$ ve A , $\text{Aut}(G)$ nin bir alt grubu olsun.

(i) Eğer $|b| = |a|$ ise o zaman, $\text{stab}(a) = \text{stab}(b)$ dir.

(ii) Eğer $\theta(a)$ tek tip bir yörünge ise, o zaman $\theta(a) = U(a)$ dir.

İspat: Sadece (i) nin ispatı verilebilir, çünkü (ii) direkt olarak (i)'den ve tek tip yörüngenin tanımından çıkar.

(i) Eğer $a, b \in G$ ve $|b| = |a|$ ise o zaman $b \in \langle a \rangle$, G 'nin tek devirli alt grubu a tarafından üretilir. Sonuç olarak tüm $x = \langle a \rangle$ lar için $\alpha(x) = x$ den $a \in \text{stab}(a)$ ise özellikle $\alpha(b) = b$ olduğu görülür. Bu sebeple $\text{stab}(a) \subseteq \text{stab}(b)$ dir. Benzer şekilde $\text{stab}(b) \subseteq \text{stab}(a)$ dir.

Her hangi S kümesi için, S nin kardinalitesi $|S|$ sembolü ile gösterilir. Eğer k ve l pozitif tam sayılar ise o zaman k ve l 'nin en büyük kardinalite derecesi, (k, l) ile gösterilir.

Eğer G bir devirli p -grubu ve $A = \text{Aut}(G)$ ise o zaman Önerme 4.1.1 de G 'nin her sıfırdan farklı yörüngesinin tek tipten olduğu gösterilecektir.

Lemma 4.1.2.

G sonlu devirli bir grup ve $|a| = |b|$ ile birlikte $a, b \in G$ verilsin. O zaman $\sigma(a) = b$ olacak şekilde $\sigma \in \text{Aut}(G)$ vardır.

İspat: $|G| = n$ ve $k > 1$ ile $|a| = |b| = k$ olduğu varsayılın. (Eğer $k=1$ ise o zaman ispat edecek bir şey yoktur). k , n 'yi böldüğü ve G , $|G| = n$ 'yi bölen her mertebeden bir tek alt gruba sahip olduğu için G , k mertebeli bir tek alt gruba sahiptir yani $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ dir. $b \in \langle a \rangle$ olduğu için $b = la$ ve $(k, l) = 1$ olacak şekilde l vardır. $p_1, p_2, \dots, p_s$, n 'yi bölen fakat l 'yi bölmeyen asal sayılar olsun. k 'yı bölen böyle asal sayıların var olduğu görülebilir. $r = p_1 p_2 \dots p_s k + l$ olsun.

$(r,n)=1$ olduğuna gösterilsin. p 'nin n 'yi bölen bir asal sayı olduğunu kabul edelim. Eğer p , l 'yi bölmezse, o zaman p , $p_1, p_2, \dots, p_s k$ yı bölemez. Bu yüzden p r 'ye bölünmez. Eğer p , l 'ye bölünmez ise, o zaman $1 \leq i < s$ biçimindeki i 'ler için $p = p_i$ 'dir. Dolayısıyla p , $p_1, p_2, \dots, p_s k$ 'ya bölünür ve bundan dolayı p , r 'ye bölünmez. Bu $(r,n)=1$ demektir.

$(r,n)=1$ olduğundan $v \in G$ için $\sigma_r(v) = rv$ tarafından tanımlanan $\sigma_r : G \rightarrow G$ fonksiyonu G 'nin bir otomorfizmidir.

Üstelik $|a| = k$ olduğu için $\sigma_r(a) = ra = (p_1 p_2 \dots p_s k + l)a = la = b$ elde edilir.

Önerme 4.1.1.

G 'nin devirli p -grubu ve $A = \text{Aut}(G)$ verilsin, o zaman G 'nin her sıfırdan farklı yörüngesi tek tiptir.

İspat: Lemma 4.1.2'ye göre belirli mertebeden tüm G elemanları bir yörüngeyi oluşturur. Dahası G , p^i , ($i=1,2,\dots,n$) mertebeden p^{i-1} elemanlarına sahip olduğundan tüm sıfırdan farklı yörüngeler farklı kardinalitelere sahiptir. Grup etkileri teorisine göre

$$|Stab(a)| = \frac{|A|}{|\theta(a)|} \quad (4.1)$$

elde edilir.

Bu nedenle, sıfır değeri olmayan farklı yörüngelerde elemanların stabilizerleri, farklı kardinal sayılarına sahiptir ve böylece tüm bu stabilizerler farklı olur. Sonuç olarak, G 'nin sıfır değeri olmayan her yörüngesi tek tiplidir.

Dikkat edilirse Önerme 4.1.1 genelde sonlu devirli gruplar için sağlamaz. Örneğin, eğer $v \in Z_6$ için $\sigma_5(v) = 5v$ olduğu yerde $G = Z_6$ ve $A = \text{Aut}(G) = \{\text{id}, \sigma_5\}$ ise o zaman $\theta(1) = \{1, 5\}$ ve $\theta(2) = \{2, 4\}$ ve böylece $\text{Stab}(1) = \{\text{id}\} = \text{Stab}(2)$ olduğu için $\theta(1)$ tek tipten değildir. Bu örnek ayrıca Lemma 4.1.1 (ii) de $\theta(1) = U(1)$ olduğu için tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Birinci kısımdaki (i)'ye bakılırsa, bir $M_A(G)$ merkezleyen yakın halkasının homomorfik bir görüntüsü olarak sıfır değeri olmayan bir halkaya sahip olup

olmadığına karar verilebileceğini düşündürmektedir. Smith (1995) ve Bagley (1996) göstermektedir ki eğer sıfır değeri olmayan bir R halkası $M_A(G)$ 'nin homomorfik bir görüntüsü ise o zaman R cisimlerin bir direkt toplamıdır. Bu sebeple $M_A(G)$ homomorfik görüntüsü olarak sıfırdan farklı bir halkaya sahip olması için gerek ve yeter şart $M_A(G)$ nin bir homomorfik görüntüsü olarak bir cisme sahip olmasıdır.

Önerme 4.1.2.

G sonlu bir grup ve A 'da $\text{Aut}(G)$ 'nin bir alt grubu olsun. Eğer $M_A(G)$ bir homomorfik görüntü olarak sıfır değeri olmayan halka ise, o zaman G tek tipten bir yörüngedir.

İspat: $\theta(v_1), \dots, \theta(v_t)$, G nin sıfırdan farklı yörüngeleri olsun. Her $\theta(v_i)$ ile birlikte $e_i : G \rightarrow G$ nin

$$e_i(x) = \begin{cases} x & , \text{ eğer } x \in \theta(v_i) \\ 0 & , \text{ diğer durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlandığı durumda birleşimli idempotent $e_i \in M_A(G)$ fonksiyonu elde edilir.

$M_A(G)$ 'nin bir homomorfik görüntüsü olarak, sıfırdan farklı bir halka olduğunu kabul edelim. O zaman, yukarıda belirtildiği gibi $M_A(G)$ bir homomorfik görüntüsü olarak bir F cismine sahiptir. $\psi : M_A(G) \rightarrow F$ nin örten bir homomorfizm olduğu farz edelim. $1 = e_1 + \dots + e_t$ ve $\psi(1) = 1$ olduğundan $\psi(e_1) = 1$ ve $1 \leq i \leq n$ iken bazı i 'ler için $\psi(e_i) \neq 0$ dır. Böylece $\psi(e_1) \in F$ idempotent olduğu için $\psi(e_i) = 1$ olur. Eğer $j \neq 1$ ise o zaman $0 = e_1 e_j$ ve böylece

$$\psi(e_j) = 1\psi(e_j) = \psi(e_1)\psi(e_j) = \psi(e_1 \cdot e_j) = \psi(0) = 0 \quad (4.2)$$

olur.

$\theta(v_1)$ 'in tek tip bir yörünge olduğu görülür. $\text{stab}(w) = \text{stab}(v_1)$ olacak şekilde G 'de $w \neq 0$ olsun. Bazı $j \neq 1$ için $w \in \theta(v_j)$ olduğunu kabul edelim. O zaman Betsch Lemması Meldrum (1985) ve Pliz (1983) ile $\theta(v_1)$ in sıfırı olan s ve $\theta(w)$ 'nin sıfırı

olan r ile beraber $r(w)=v_i$ ve $s(v_i)=w$ olacak şekilde r ve s fonksiyonlarını içerir. Bu $rs=e_1$ ve $sr=e_j$ olmayı gerektirir. Fakat daha sonra (4.2) ile birlikte,

$1 = \psi(e_1) = \psi(rs) = \psi(r)\psi(s) = \psi(s)\psi(r) = \psi(sr) = \psi(e_j) = 0$ dır. Bu çelişki; $j=1$ ve böylece $w \in \theta(v_1)$ olduğunu gösterir ve buradan $\theta(v_1)$ in tek tip yörünge olduğu sonucu çıkar.

Şimdi G 'nin A , $\text{Aut}(G)$ 'nin bazı alt grupları için tek tip yörüngeye sahip olduğunu farz edelim. Bu $M_A(G)$ nin homomorfik bir görüntüsü olarak sıfırdan farklı bir halkaya sahip oluşunu incelemeyi gerektirir. G 'nin devirli olduğu zaman Smith ve Van Wyk (2005) gereğince bunun cevabının “evet” olduğu görülecektir.

Sıfır olmayan $w \in G$ için $\text{Stab}(w) \supseteq \text{Stab}(v)$ her ne zaman olursa $\text{Stab}(w)=\text{Stab}(v)$ olduğu taktirde, G nin bir sıfır olmayan $\theta(v) \in G$ yörüngesine “minimal yörünge” denilir. Böylece $\theta(v)$ bir minimal yörünge olması için gerek ve yeter şart $\text{stab}(v)$ ' nin A 'nın bir $\theta(v)$ stabilizer alt grubu olarak maksimal olmasıdır.

ϕ Euler'in ϕ fonksiyonunu gösterebilirsin. Hatırlanacağı üzere eğer p bir asal sayı ise ve $l \geq 1$ ise o zaman $\phi(p^l) = p^l - p^{l-1}$ olur. Ayrıca eğer $p_1, p_2, \dots, p_s$ farklı asallar olursa o zaman $\phi(p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_s^{l_s}) = \phi(p_1^{l_1}) \phi(p_2^{l_2}) \dots \phi(p_s^{l_s})$ olur. Sonuç olarak, eğer $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ ise o zaman $l_1 > 1$ veya $s > 1$ yani $p_1 < p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_s^{l_s}$ iken

$$\phi(p_1) < \phi(p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_s^{l_s}) \quad (4.3)$$

olur.

Lemma 4.1.3.

G trivial olmayan sonlu devirli bir grup ve $A=\text{Aut}(G)$ olsun. O zaman G aynı zamanda minimal olan tek tip yörünge dir.

İspat: $s \geq 1$ iken $p_1 < p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_s^{l_s}$ ve $s > 1$ iken $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ nin ile $|G|$ nin asal ayrışımı verilsin .Eğer $k > 1$ için k , $|G|$ nin bir böleni ise o zaman k mertebeli G 'nin elemanlarının sayısı $\phi(k)$ dır. Üstelik eğer G 'de $|y|=k$ olacak şekilde y varsa o zaman Lemma 4.1.2 ile $|\theta(y)|=|U(y)|$ ve dolayısıyla $|\theta(y)|=\phi(k)$, böylece eğer G deki v , $|v|=p_1$ olacak şekilde ise o zaman $|w| \neq p_1$ ile birlikte G de herhangi sıfırdan farklı w için $p_1 < |w|$ elde edilir ve dolayısıyla (4.3)'den $|\theta(v)|=\phi(p_1) < \phi(|w|)=|\theta(w)|$ sonucuna ulaşılır. Bu nedenle (4.1) gerektirir ki, $\theta(v)$ tek tip bir yörüngedir ve ayrıca $\theta(v)$ minimal bir yörüngedir.

Teorem 4.1.1.

G sonlu devirli bir grup ve A , $\text{Aut}(G)$ 'nin alt grubu olsun. O zaman, $M_A(G)$ nin bir homomorfik görüntü olarak sıfırdan farklı bir halkaya sahip olması için gerek ve yeter koşul G nin tek tip bir yörüngeye sahip olmasıdır.

Birinci kısımdaki (ii) den, sıfırdan farklı bir has $M_A(G)$ alt modülüne sahip iken G 'nin bir $M_A(G)$ invaryant alt grubuna sahip olup olmadığının nasıl belirleneceği düşünülebilir.

Önerme 4.1.3.

G asal mertebeli bir devirli grubu olsun ve A , $\text{Aut}(G)$ nin bir alt grubu olsun. O zaman $M_m(M_A(G);G) = M_A(G^m)$ olması için gerek ve yeter koşul $A \trianglelefteq \text{Aut}(G)$ olmasıdır.

İspat: p asal ile $|G|=p$ olsun. G devirli olduğu için G 'nin otomorfizmlerinin her A grubu, G üzerinde sabit nokta olmadan etki eder. Eğer $A \trianglelefteq \text{Aut}(G)$ ise o zaman $M_A(G)$ bir halka değildir ve böylece birinci kısımda verilen (iii) den

$M_m(M_A(G);G) = M_A(G^m)$ olur. Eğer $A = \text{Aut}(G)$ ise o zaman $M_A(G)$ bir halkadır ve aslında $\text{GF}(p)$ cismi olur, böylece $M_m(M_A(G);G)$ bir halka olduğu için $M_m(M_A(G);G) \subseteq M_A(G^m)$ dir ama $M_A(G^m)$ bir halka değildir. Bundan böyle G , $n \geq 2$ iken p asal p^n mertebeli devirli olarak kabul edilebilir. Hatırlanacağı üzere G 'nin her otomorfizmi

$$v \in G \text{ için } (r,p)=1 \text{ iken } \sigma_r(v) = rv \quad (4.4)$$

formuna sahiptir.

Aşağıda verilen $\text{Aut}(G)$ için daha fazla bilgi Dummit ve Foote'de (1999) verilmektedir.

Lemma 4.1.4.

G , $n \geq 2$ iken p asal p^n mertebeli bir devirli grup olsun. O zaman

(i) $\text{Aut}(G)$, $p \neq 2$ iken $p^{n-1}(n-1)$ mertebeli devirli olur.

(ii) $\text{Aut}(G)$, 2 mertebeli devirli bir grubun direkt bir çarpımıdır ve $p=2$ iken 2^{n-2} mertebeli devirli gruptur.

4.2. p Tek Sayı İken Bir Devirli G p -Grubu

Bu kısımda $n \geq 2$ ve p tek sayı iken G devirli bir p -grubu olarak verilip Teorem 4.1.1 den başlayarak Teorem 4.2.1 ve ilk kısımda verilen I şartı sağlanacak biçimde $\text{Aut}(G)$ 'nin A alt grupları için ilk kısımda verilen II şartı sağlanacak biçimde $\text{Aut}(G)$ 'nin A alt grupları karakterize edilecektir. İlk olarak $\text{Aut}(G)$ 'nin alt gruplarının iç yapısını çalışmak için üç lemma kullanılacaktır. 4-1 de hatırlanacağı üzere, $a \in G$ için a gibi aynı mertebeli G 'nin elemanlarının kümesi $U(a)$ ile gösterilir.

Lemma 4.2.1.

$G := \langle x \rangle$, $n \geq 2$ iken bir p tek sayısı asal ve p^n mertebeli devirli bir grup olsun. O zaman

(i) $G = U(x) \cup U(px) \cup \dots \cup U(p^{n-1}x) \cup \{0\}$, ayrık birleşmeli;

(ii) $|U(p^i x)| = p^{n-i} - p^{n-i-1}(p-1)$, $i=0,1,\dots,n-1$;

(iii) B , p^{n-1} mertebeli devirli ve C $p-1$ mertebeli devirli iken $\text{Aut}(G) = B \times C$ ve $B = \{ \sigma_r \in \text{Aut}(G) \mid r \equiv 1 \pmod{p} \} = \text{stab}(p^{n-1}x)$;

(iv) Eğer $\sigma_r \in \text{Aut}(G)$ ise sabit noktasız olması için gerek ve yeter $\sigma_r \notin B$ olmasıdır.

(v) $\text{Stab}(v)$ G de her sıfırdan farklı v için B 'nin bir alt grubu olur.

(vi) $\text{Aut}(G)$ nin stabilizer alt grupları, $\text{stab}(x) = \{\text{id}\}$, $\text{stab}(px), \dots, \text{stab}(p^{n-1}x)$, $\text{stab}(p^n x) = \text{stab}(0) = \text{Aut}(G)$ dir ve bunlar alt grupların doğrudan artan bir zinciri formundadır.

(vii) $|\text{stab}(p^i(x))| = p^i$, $i=0,1,\dots,n-1$ dir.

İspat: (i) G nin her elemanının mertebesi p 'nin bir kuvvetidir.

(ii) $0 \leq i \leq n-1$ olsun. $|p^i x| = p^{n-i}$ olduğu için Lemma 4.1.3 deki gibi ϕ

Euler'in ϕ fonksiyonunu olmak üzere $|U(p^i x)| = \phi(p^{n-i}) = p^{n-i} - p^{n-i-1}$ yazılır.

(iii) İlk kısmı Lemma 4.1.4(i) dir. Daha sonra kolayca görülür ki,

$\{ \sigma_r \in \text{Aut}(G) \mid r \equiv 1 \pmod{p} \}$, $\text{Aut}(G)$ nin bir alt grubudur ve

$$\{ \sigma_r \in \text{Aut}(G) \mid r \equiv 1 \pmod{p} \} = \{ \sigma_{0,p+1}, \sigma_{1,p+1}, \dots, \sigma_{(p^{n-1}-1),p+1} \}$$

olur.

Böylece bu alt grup, p^{n-1} mertebeli $\text{Aut}(G)$ 'nin tek alt grubudur ve bu sebeple $B = \{ \sigma_r \in \text{Aut}(G) \mid r \equiv 1 \pmod{p} \}$ dir. Son olarak, eğer $\sigma_r \in \text{Aut}(G)$ ise; o zaman (iii) sağlanacak biçimde

$$\sigma_r \in \text{stab}(p^{n-1}x)$$

$$\Leftrightarrow rp^{n-1}x = p^{n-1}x$$

$$\Leftrightarrow (r-1)p^{n-1}x = 0$$

$$\Leftrightarrow p, r-1 \text{ 'i böler}$$

$$\Leftrightarrow r \equiv 1 \pmod{p}$$

olur.

(iv) $\sigma_r \in \text{Aut}(G)$ olsun ve bazı sıfırdan farklı $v \in G$ ler için $\sigma_r(v) = v$ verilsin. O zaman $rv = v$ ve böylece $(r-1)v = 0$ gerektirir ki; $p, r-1$ 'i böler yani $r \equiv 1 \pmod{p}$ dir. Bu yüzden, (iii) gereğince, $\sigma_r \in B$ olur.

Tersine, eğer $\sigma_r \in B$ ise, (iii) gereğince, $\sigma_r \in \text{stab}(p^{n-1}x)$ ve böylece σ_r sabit noktasız değildir.

(v) Bu (iv)'den direkt olarak görülür.

(vi, vii) Lemma 4.2.1 (ii) ve Önerme 4.1.1 den görülür ki, $i=0,1,\dots,n-1$ için $\theta(p^i x) = U(p^i x)$ dir ve buradan (ii) gerektirir ki,

$$p^{n-i-1}(p-1) = |U(p^i x)| = |\theta(p^i x)| = \frac{|Aut(g)|}{|\text{stab}(p^i x)|} = \frac{p^{n-1}(p-1)}{|\text{stab}(p^i x)|}$$

Sonuç olarak $|\text{stab}(p^i x)| = p^i$ yazılır.

olur.

Lemma 4.2.2.

$G, n \geq 2$ iken p asal tek sayısı ile p^n mertebeli devirli bir grup olsun. A, Lemma 4.2.1 deki gibi B ve C li $\text{Aut}(G) = B \times C$ 'nin bir alt grubu verilsin. Eğer G'nin tek tip bir A- yörüngesine sahip ise, o zaman B'nin bir B' alt grubu, $A = B' \times C$ olacak şekilde vardır.

İspat: $G = \langle x \rangle$ olsun ve $0 \leq i \leq n-1$ iken G 'nin $\theta(p^i x)$ biçiminde tek tip bir A -yörüngesi mevcut olduğunu varsayalım. (4.1) ile, Lemma 4.1.1 (ii) ve Lemma 4.2.1 (ii) gereğince, $p-1, |A|$ yı bölmeyi gerektirecek şekilde

$$p^{n-i-1}(p-1)|\text{stab}_A(p^i x)| = |U(p^i x)| |\text{stab}_A(p^i x)| = |\theta(p^i x)| |\text{stab}_A(p^i x)| = |A|$$

olur. Bu yüzden Lemma 4.2.1 (iii) den görülür ki, $C \subseteq A$ dır ve böylece B 'nin bazı B' alt grupları için $A = B' \times C$ dir.

Lemma 4.2.3.

$G := \langle x \rangle$, $n \geq 2$ iken p asal tek sayısı ile p^n mertebeli devirli bir grup olsun. $\text{Aut}(G) = B' \times C'$, Lemma 4.2.1'de olduğu gibi B, C ile ve B, C nin alt grupları B' ve C' ile $\text{Aut}(G) = A \times B$ nin bir alt grubu verilsin. $0 \leq k \leq n-1$ iken $|B'| = p^k$, olsun. Bu durumda,

- (i) A nin stabilizer alt grupları, $\text{stab}_A(p^i x) = \text{stab}_{\text{Aut}(G)}(p^i x)$, $i = 0, 1, \dots, k$;
- (ii) $i = k, \dots, n-1$ için $\text{stab}_A(p^i x) = B'$;
- (iii) $k < n-1$ iken, $\theta(p^k x), \theta(p^{k+1} x), \dots, \theta(p^{n-1} x)$, A -yörüngelerinin hiçbiri tek tip değildir.

İspat: İlk olarak bilindiği gibi Lemma 4.2.1 (v-vii) gereğince ve $i=0, 1, \dots, n-1$ için,

$$\text{stab}_A(p^i x) = \text{stab}_{\text{Aut}(G)}(p^i x) \cap A = \text{stab}_A(p^i x) \cap B' \quad (4.5)$$

(i) B, p^{n-1} mertebeli devirli olduğu için B' nin p^k mertebeli B nin tek devirli alt grubu olduğu ve böylece $0 \leq i \leq k$ için, $\text{stab}_{\text{Aut}(G)}(p^i x)$ nin p^i mertebeli B' nün tek alt grubu olduğu Lemma 4.2.1 (v-vii) den görülür. Bu sebeple Pilz (1983) gereğince $\text{stab}_A(p^i x) = \text{stab}_{\text{Aut}(G)}(p^i x)$ dir.

(ii) (i) nin ispatındaki argümanlar gösteriyor ki $i=k, \dots, n-1$ iken $B' \subseteq \text{stab}_{\text{Aut}(G)}(p^i x)$ ve böylece Pilz'den (1983) görülür ki $\text{stab}_A(p^i x) = B'$ dir.

(iii) Eğer $k < n-1$ ise, o zaman (ii) gereğince B' gibi aynı stabilizerli sıfırdan farklı en az 2 yörünge mevcuttur.

Teorem 4.2.1.

G , $n \geq 2$ iken p asal tek sayısı ile p^n mertebeli devirli bir grup ve A , $\text{Aut}(G)$ 'nin bir alt grubu olsun. O zaman G nin tek tip bir A yörüngesi olması için gerek ve yeter koşul $A=\text{Aut}(G)$ olmasıdır.

İspat: Eğer $A=\text{Aut}(G)$ ise o zaman Önerme 4.1.1 gereğince, G nin her A yörüngesi tek tip olur.

Tersine G nin tek tip bir A yörüngesi olduğunu varsayalım. Lemma 4.1.1 gereğince $\text{Aut}(G)=B \times C$ ve B ile C , Lemma 4.1.2 deki gibi iken $A=B' \times C$ olacak şekilde B nin bir B' alt grubu vardır. $B' \subsetneq B$ olsun. O zaman $k < n-1$ iken $|B|=p^k$ ve böylece $|A|=p^k(p-1)$ olur.

$G = \langle x \rangle$ olsun. Lemma 4.2.1 (iii) gereğince, $\theta(p^k x), \theta(p^{k+1} x), \dots, \theta(p^{n-1} x)$ A -yörüngelerinin hiçbiri tek tip değildir ve böylece G 'nin tek tip bir A -yörüngesine sahip olduğu varsayıldığından dolayı, $0 \leq i < k$ biçiminde bazı i 'ler için $\theta(p^i x)$ in tek tip olduğu görülür. Bu yüzden Lemma 4.1.1 (ii), Lemma 4.2.1 (ii, iii) ve Lemma 4.2.3 (i) gereğince; $k=n-1$ olmayı gerektirecek biçimde

$$p^{n-i-1}(p-1) = |U(p^i x)| = |\theta(p^i x)| = \frac{|A|}{\text{stab}_A(p^i x)} = \frac{|A|}{\text{stab}_{\text{Aut}(G)}(p^i x)} = \frac{p^k(p-1)}{p^i} = p^{k-i}(p-1),$$

yazılır. Bu çelişki göstermektedir ki, $B'=B$ olur ve bundan hareketle $A=B \times C=\text{Aut}(G)$ sonucu çıkar.

Önerme 4.1.1 ve Teorem 4.2.1, p tek iken bir devirli p -grubunun tek tipten yörüngelere sahip olduğu üzerine aşağıda olası iki ihtimali ortaya çıkarır.

Sonuç 4.2.1.

p tek iken bir G devirli p -grubu ve $\text{Aut}(G)$ nin A bir alt grubu verilsin.

(i) Eğer $A=\text{Aut}(G)$ ise, o zaman G nin sıfırdan farklı A yörüngesi tek tiptir.

(ii) Eğer $A \not\subseteq \text{Aut}(G)$ ise, o zaman G , hiçbir tek tip A yörüngesi yoktur.

İspat: (i) Önerme 4.1.1'e bakılabilir.

(ii) Eğer $n \geq 2$ iken $|G| = p^n$ ise, o zaman Teorem 4.2.1 den sonuç çıkar.

Eğer $|G| = p$ ve $A \not\subseteq \text{Aut}(G)$ ise, o zaman $M_m(M_A(G); G) = M_A(G^m)$ olur ve böylece birinci kısımdaki (i) gerektirir ki; $M_A(G)$ homomorfik bir görüntü olarak sıfırdan farklı bir halkaya sahip olmaz. Bu yüzden, Teorem 4.1.1 gereğince G tek tip bir A - yörüngesine sahip değildir.

Şimdi birinci kısımdaki II. şartı üzerinde durulacaktır.

4.3. Temel Teorem

Üzerinde düşünülen asıl problem, G bir devirli p -grubu için G 'nin A otomorfizmlerinin grubunun $m \geq 2$ iken

$$M_m(M_A(G); G) = M_A(G^m)$$

özelliğine sahip olup olmadığıdır. Halihazırda görülür ki,

$$M_m(M_A(G); G) \subseteq M_A(G^m)$$

eşitliği her zaman sağlar. Eşitliği için diğer yol olarak; A , G ve $M_A(G)$ nin ilk kısımda verilen I-V koşullarını sağladığını göstermek yeterlidir.

Lemma 4.3.1.

G bir devirli p -grubu ve A , $\text{Aut}(G)$ nin bir alt grubu olsun. O zaman ilk kısımda verilen III-V koşulları sağlanır.

İspat: G devirli olduğundan III koşulu, $\text{Aut}(G)$ nin tüm A alt grupları için sağlanır. Dahası, G bir devirli p -grup olduğundan, A nin stabilizer alt grupları bir zincir formundadır yani eğer $v, w \in G$ ise $\text{stab}(v) \subseteq \text{stab}(w)$ veya $\text{stab}(w) \subseteq \text{stab}(v)$ olur ve böylece IV koşulu da sağlanır.

Sonuç olarak eğer $v_1, \dots, v_n, w$, $\text{stab}(v_1) \cap \dots \cap \text{stab}(v_n) = \text{stab}(w)$ iken G 'de olur ise o zaman A 'nın stabilizer alt gruplarının bir zincir oluşturduğu gerçeği gerektirir ki, bazı i , $1 \leq i \leq n$ için $\text{stab}(v_1) \cap \dots \cap \text{stab}(v_n) = \text{stab}(v_i)$ olur. $M_A(G)$ de $r_i := id$ ve $j \neq i$ iken $r_j := 0$ biçiminde fonksiyonlar düşünölsün. O zaman $\text{stab}(r_1 v_1 + \dots + r_n v_n) = \text{stab}(v_i) = \text{stab}(w)$ olur ve böylece V koşulu sağlanır.

Şimdi bu çalışmanın ana sonucu ifade edilebilir:

Teorem 4.3.1.

$G := \langle x \rangle$ p^n mertebeli bir devirli p -grubu ve A , G otomorfizmlerinin bir grubu ve $m \geq 2$ verilsin.

(i) Eğer $n=1$ ise; o zaman $M_m(M_A(G); G) = M_A(G^m)$ olması için gerek ve yeter koşul $A \subseteq \text{Aut}(G)$ olmasıdır.

(ii) Eğer $n \geq 2$ ve p tek ise o zaman $M_m(M_A(G); G) = M_A(G^m)$ olması için gerek ve yeter koşul p^{n-1} in, $|A|$ 'yı bölememesidir.

(iii) Eğer $n \geq 2$ ve $p=2$ ise o zaman aşağıdakiler denk olur:

(a) $M_m(M_A(G); G) = M_A(G^m)$;

(b) $\text{stab}(2^{n-2}x) = A$;

(c) $A \subseteq \{ \sigma_r \in \text{Aut}(G) \mid r \equiv 1 \pmod{4} \}$.

İspat: (i) Bu ispat Smith ve Van Wyk (2005) de açıktır.

(ii) p^{n-1} in $|A|$ yı bölemediği varsayölsün. O zaman Lemma 4.1.4 (i) gereğince, $A \subseteq \text{Aut}(G)$ ve böylece Teorem 4.2.1 gereğince, G tek tip bir A yörüngesine sahip olmaz. Bu yüzden, homomorfik bir görüntü olarak $M_A(G)$ sıfırdan farklı bir halkasına sahip değildir ve böylece ilk kısımdaki I şartı sağlanır. Daha sonra, G ilk kısımdaki II şartı sağlanmayı gerektirecek biçimde sıfırdan farklı bir has $M_A(G)$ alt modölüne sahip olan bir $M_A(G)$ alt grubuna sahip olmaz. İlk kısımdaki IV şartı gereğince, $M_m(M_A(G); G) = M_A(G^m)$ sonucu çıkar.

Tersine, eğer p^{n-1} , $|A|$ 'yı bölerse o zaman ilk kısımdaki (i) gereğince, $M_m(M_A(G);G) \subseteq M_A(G^m)$ olduğu görülür.

(iii) $(a) \Leftrightarrow (b)$; $\text{stab}(2^{n-2}x)=A$ olduğu varsayalım. O zaman G tek tip bir A -yörüngesine sahip olmaz. Bundan dolayı, öncelikle ilk paragrafında olduğu gibi, ilk kısımdaki I şartının sağlandığı ve ikinci olarak G 'nin sıfırdan farklı bir has $M_A(G)$ alt modülüne sahip olan bir $M_A(G)$ alt grubuna sahip olmadığı görülür ve böylece ilk kısımdaki II şartı sağlanır. (ii) nin ispatında olduğu gibi $M_m(M_A(G);G)=M_A(G^m)$ sonucu çıkar.

Daha sonra eğer $\text{stab}(2^{n-2}x) \subsetneq A$ ise o zaman G tek tip bir A yörüngesine sahiptir. Bundan dolayı $M_m(M_A(G);G)=M_A(G^m)$ yazılır.

$(b) \Leftrightarrow (c)$: $\text{stab}(2^{n-2}x)=A$ olması için gerek ve yeter şartın $A \subseteq \{ \sigma_r \in \text{Aut}(A) \mid r \equiv 1(\text{mod } 4) \}$ olduğu direkt olarak görülür.

KAYNAKLAR

- Bagley, S., 1996. *Polynomial Near-rings, Distributor and J_2 -ideals of Generalized Centralizer Near-rings*, Ph. D. Thesis, Texas A&M University.
- Dummit, D.S., Foote, R. M., 1999. *Abstract Algebra*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Meldrum, J. D. P., 1985. *Near-rings and Their Links with Groups*. Research Notes in Mathematics, 134. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA., 275.
- Meldrum, J. D. P., Meyer, J. H., 1996. Intermediate ideals in matrix near-rings. *Comm. Algebra*, **24**(5): 1601-1619.
- Meldrum, J. D. P., Van der Walt, A. P. J., 1986. Matrix near-rings. *Arch. Math. (Basel)* **47**(4): 312-319.
- Oswald, A., Smith, K. C., Van Wyk, L., 2001. When is a centralizer near-rings isomorphic to a matrix near-ring? II, *Proc. International Conference on Near-rings and Near fields (Stellenbosch, 1997)*, Y. Fong et al., eds., Kluwer, Dordrecht, 136-150s.
- Pilz, G., 1983. *Near-rings: The theory and its applications; second edition*. North-Holland Mathematics Studies, 23. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 470.
- Smith, K. C., 1995. Rings which are a homomorphic image of a Centralizer near-ring in: *Proc. International-Conference on Near-rings and Near-fields (Fredericton, 1993)*, Y. Fong et al, eds., Kluwer, Dordrecht, 257-270s.
- Smith, K. C., 1996. Generalized matrix near-rings. *Comm. Algebra*, **24**(6): 2065-2077.
- Smith, K. C., Van Wyk, L., 1996. When is a centralizer near-ring isomorphic to a matrix near-ring?, *Comm. Algebra*, **24**: 4549-4562.
- Smith, K. C., Van Wyk, L., 2000. Matrix Near-Rings Over Centralizer Near-rings, *Algebra Colloquium*, **7**(1): 5-16.
- Smith, K. C., Van Wyk, L., 2005. Centralizer Near-rings, Matrix Near-rings and Cyclic p-Groups., *Algebra Colloquium*, **12**(4): 567-584.
- Van der Walt, A. P. J., 1987. *Near-rings and Near-fields: On Two-Sided Ideals in Matrix Near-Rings*, ed. G. Betch, North-Holland, Amsterdam, 267-272s.