

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DENGE NOKTASININ ASİMPTOTİK KARARLILIĞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Timur AYHAN
DANIŞMAN: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

VAN - 2010

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DENGE NOKTASININ ASİMPTOTİK KARARLILIĞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Timur AYHAN

VAN - 2010

KABUL ve ONAY SAYFASI

Pof. Dr. Cemil TUNÇ danışmanlığında, Timur AYHAN tarafından hazırlanan “*Denge Noktasının Asimptotik Kararlılığı Üzerine*” isimli bu çalışma 04 /01 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

İmza:

Üye: Doç. Dr. Hakkı DURU

İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Kamil AKBAYIR

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun/...../..... gün ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

ÖZET

DENGE NOKTASININ ASİMPTOTİK KARARLILIĞI ÜZERİNE

AYHAN, Timur

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

Ocak 2010, 65 sayfa

Bu çalışma, dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ ile ilgili bilgileri içermektedir.

Çalışmanın ikinci bölümünde ise diferansiyel denklemler ve tez konusu ile yakın ilgisi olduğu varsayılan bazı temel bilgiler ve ayrıca konu ile ilgili olarak örnekler verilmektedir.

Üçüncü bölümde ise belli türden otonom olmayan diferansiyel denklem sistemleri için bazı yeni kararlılık kriterleri ve zayıf asimptotik kararlılık kriterleri olduğu iddia edilen çalışmalar incelenmektedir.

Son bölümde ise yüksek basamaktan lineer olmayan diferansiyel denklemler için çözümlerin bazı davranışları ve Liapunov fonksiyonunun oluşturulması ile ilgili çalışmalar ele alınmaktadır.

Anahtar kelimeler: Kararlılık, Asimptotik kararlılık, Liapunov fonksiyonu, Lineer olmayan diferansiyel denklemler.

ABSTRACT

ON THE ASYMPTOTIC STABILITY OF EQUILIBRIUM POINT

AYHAN, Timur

Msc, Mathematics Science

Supervisor: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

January 2010, 65 pages

This work consists of four chapters. The first chapter includes information related to introduction and references.

In the second chapter of the thesis, it is given some basic information concerning to ordinary differential equations and subject of the thesis. It is also introduced some examples to illustrate the results investigated.

In the third chapter of the thesis, it is investigated some new stability criteria for solutions of some certain non-autonomous differential equations and, it is also studied some weaker asymptotic stability criteria which are claimed in the literature.

In the last chapter, it is studied some qualitative behaviors of nonlinear differential equations of higher order and we discuss some works in the literature on the construction of Liapunov functions for certain nonlinear differential equations of higher order.

Key words: Stability, Asymptotic stability, Liapunov functions, Nonlinear differential equations.

ÖN SÖZ

Bu çalışmayı benim için uygun gören ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Cemil TUNÇ' a ve yüksek lisans eğitimim için verdiği burs ile çalışmamı kolaylaştıran TÜBİTAK' a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Timur AYHAN

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. ÖN BİLGİLER	4
3. BELLİ TÜRDEN OTONOM OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN BAZI YENİ KARARLILIK KRİTERLERİ	26
4. YÜKSEK BASAMAKTAN LİNER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜMLERİN BAZI DAVRANIŞLARI VE LİAPUNOV FONKSİYONUNUN OLUŞTURULMASI	43
4.1. İkinci Basamaktan Lineer Olmayan Bir Diferansiyel Denklem İçin Bazı Sınırlılık Sonuçları	43
4.2. Büyük Ölçekli Sistemlerin Bir Sınıfı İçin Liapunov Fonksiyonları	47
4.3. Özel Durumlar İçin Asimptotik Kararlılık Sonuçları	48
4.4. Dördüncü Basamaktan Lineer olmayan Denklem Sistemlerinin Bir Sınıfı İçin Çözümlerin kararlılığı	55
KAYNAKLAR	63
ÖZ GEÇMİŞ	65

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

V : Liapunov fonksiyonu

R : Reel sayılar

ϕ : Hahn fonksiyonu

C^1 : Birinci mertebeden sürekli ve türevlenebilir fonksiyonların bir sınıfı

D : R^n deki açık bağlantılı bir cümle

ε : Epsilon

δ : Delta

Ω : R^n de orijini içinde bulunduran açık bağlantılı bir bölge

1.GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Adi Diferansiyel Denklemler Matematik Anabilim Dalının yanı sıra birçok Uygulamalı Bilim Dallarındaki uygulamalarda yaygın bir biçimde ortaya çıkan ve kullanılan denklem türleridir. Bu tezde, aşağıdaki literatür bildirişlerinde söz konusu olan diferansiyel denklemler için çözümlerin niteliksel davranışlarına ait bazı temel bilgilerin yanı sıra, literatürde bu denklemler için yapılan birtakım çalışmalara yer verilmektedir. Şöyle ki bu çalışmaların bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Jiang (2005),

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.1)$$

diferansiyel denklemini göz önüne aldı ve bu denklemin sıfır çözümünün asimptotik kararlılığını inceledi. Fakat daha sonra Gao ve Zhang (2008) yine (1.1) diferansiyel denklem sistemini yeniden ele aldı ve bu yazarlar Jiang (2005) tarafından elde edilen sonucun genelde doğru olmadığını örnek vererek gösterdi. Ayrıca Gao ve Zhang (2008), Jiang (2005) in elde ettiği sonucu daha az kısıtlayıcı şartlar altında ispatladı.

Antosiewicz (1954),

$$x'' + \phi(x, x')x' + h(x) = e(t) \quad (1.2)$$

denklemini ele aldı ve bu denklem için

$$V(x, y) = \sqrt{y^2 + 2H(x)} \quad (1.3)$$

Liapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin sınırlılığını inceledi.

Ayrıca, Antosiewicz (1954),

(1.2) denkleminin özel bir durumu olan

$$x'' + (f(x) + g(x)x')x' + h(x) = e(t) \quad (1.4)$$

denklemini göz önüne alıp bu denklem için

$$W(x, y) = \sqrt{y^2 + 2H^*(x)} \quad (1.5)$$

Liapunov fonksiyonu kullanarak çözümlerin sınırlılığını ispatladı.

Sinha (1980),

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n) + p_i(t)x_i + \sum_{j=1}^n e_{ij}h_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

diferansiyel denklem sistemi için bir Liapunov fonksiyonu inşa ederek bu diferansiyel denklem sisteminin çözümlerinin asimptotik kararlılığını inceledi.

Lu ve Liao (2000),

dördüncü basamaktan

$$\frac{d^4x}{dt^4} + A \frac{d^3x}{dt^3} + B \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + D \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x \right)^m = 0 \quad (1.7)$$

diferansiyel denklem sistemine denk olan

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \frac{dx_3}{dt} = x_4$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_4}{dt} &= -Ax_4 - Bx_3 - Cx_2 - D(x_3 + x_2 + x_1)^m \\ &= -g(x_1, x_2, x_3, x_4)\end{aligned}\tag{1.8}$$

diferansiyel denklem sistemi için integral metodu kullanarak

$$V = \frac{D}{m+1} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)^{m+1} + U(x_4, x_3, x_2)\tag{1.9}$$

Liapunov fonksiyonu oluşturdu ve bu fonksiyonu yardımıyla (1.7) denkleminin sıfır çözümünün kararlılığını gösterdi.

Ayrıca tez konusuyla ilgili olarak bazı temel bilgiler için Braun (1992), Rouch ve ark. (1977), Yoshizawa (1966,1975), Massera (1956), Barbasin ve Krasovskii (1952,1954), Bellman (1943), Hale (1980), Persidskii(1946), Siljak (1972), Walker (1965) ve Ignatyev (1997,1999,2002,2004,2005,2006), gibi kaynaklara da başvurulabilir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tez konusu ile yakın ilgisi olduğu varsayılan bazı temel bilgiler verilecektir. Ayrıca konu ile ilgili olarak örnekler verilecektir.

$$\begin{aligned} f &: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ (t, x) &\rightarrow f(t, x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ve sürekli olan f fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $\tau \in \mathbb{R}$ veya $\tau = -\infty$ için $I =]\tau, \infty[$ olup, ayrıca Ω ise \mathbb{R}^n de orijini içinde bulunduran açık bağlantılı bir bölgedir (Rouche ve ark., 1977).

Varsayalım ki her $t \in I$ için $f(t, 0) = 0$ dır. Bu durumda orijin

$$x' = f(t, x) \tag{2.1}$$

diferansiyel denklem sistemi için bir denge yada kritik nokta olur. Ayrıca $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ olup $x(t; t_0, x_0)$ gösterimi (t_0, x_0) noktasından geçen çözümü temsil etmektedir. f fonksiyonunun çözümlerin varlığını ve tekliğini garanti edecek şekilde yeterince düzgün bir fonksiyon olduğu kabul edilmektedir. Tanımdan dolayı $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$ dır. $x(\cdot; t_0, x_0)$ çözümünün tanımlı olduğu maksimum aralık $J^+(t_0, x_0)$ ya da J^+ veya $[t_0, w]$, ($w \neq \infty$), ile gösterilmektedir. $J^+ \subset [t_0, \infty[$ dır. $B_p = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < p\}$ olarak tanımlanmaktadır (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.1.

Eğer $(\forall \varepsilon > 0), (\forall t_0 \in I), (\exists \delta > 0), (\forall x_0 \in B_\delta), (\forall t \in J^+)$ için $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) diferansiyel denklemini sıfır çözümü kararlıdır denir. Yani $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in I$ verilsin. Bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $\forall x_0 \in B_\delta$ ve $t \in J^+$ için $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) denkleminin $x = 0$ çözümü kararlıdır denir (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.2.

Eğer $(\exists \varepsilon > 0), (\exists t_0 \in I), (\forall \delta > 0), (\exists x_0 \in B_\delta), (\exists t \in J^+)$ için $\|x(t; t_0, x_0)\| \geq \varepsilon$ oluyorsa (2.1) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümü kararsızdır denir. Yani $\varepsilon > 0, t_0 \in I$ ve her bir $\delta > 0$ için bir $x_0 \in B_\delta$ ve $t \in J^+$ vardır öyle ki $\|x(t; t_0, x_0)\| \geq \varepsilon$ oluyorsa (2.1) denkleminin $x = 0$ çözümü kararsızdır denir (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.3.

Eğer $(\forall \varepsilon > 0), (\forall t_0 \in I), (\exists \delta > 0), (\forall x_0 \in B_\delta), (\forall t \in J^+)$ için $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) diferansiyel denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır denir. Yani $\varepsilon > 0$ verilmek üzere $t_0 \in I$ verilsin. Bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı var öyle ki her $t_0 \in I$ ve $t \geq t_0$ için $\|x_0\| < \delta$ olduğunda $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) denkleminin $x = 0$ çözümü düzgün kararlıdır denir (Rouche ve ark., 1977).

Örnek 2.4.

$$x' = -\frac{x}{1+t}$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin t_0 dan geçen çözümü olarak

$$x = \frac{1+t_0}{1+t} x_0, (|x_0| \leq 1)$$

elde edilir. Böylece denklemin $x = 0$ çözümü düzgün kararlıdır. Fakat düzgün asimptotik kararlı değildir. Eğer $t \geq t_0 + T$ için $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ olmasını istiyorsak $T, (1+t_0) \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ den daha büyük olmalı (T. Yoshizawa, 1975).

Uyarı 2.5.

Yukarıdaki tanımlar dikkate alındığında. $J^+ = [t_0, \infty[$ nın olmadığı varsayıldı. Ayrıca bu çözümler Ω bölgesinin sınırına yaklaşamaz. Belirtelim ki kararsızlık

durumunda çözümler Ω bölgesinin sınırına yaklaşır (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.6.

Eğer $(\forall t_0 \in I), (\exists \eta > 0), (\forall \varepsilon > 0), (\forall x_0 \in B_\eta), (\exists \sigma > 0, t_0 + \sigma \in J^+)$
 $(\forall t \geq t_0 + \sigma, t \in J^+)$ için $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) denkleminin $x = 0$
çözümüne attractive denir. Yani her $t_0 \in I$ için bir $\eta = \eta(t_0)$ sayısı var, her $\varepsilon > 0$ ve her
 $\|x_0\| < \eta$ için bir $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon, x_0) > 0$ sayısı var öyle ki her $t \geq t_0 + \sigma$ için $t_0 + \sigma \in J^+$
ve $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) denkleminin $x = 0$ çözümüne çekici (attractive)
denir (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.7.

Eğer $(\forall t_0 \in I), (\exists \eta > 0), (\forall \varepsilon > 0), (\exists \sigma > 0), (\forall x_0 \in B_\eta) t_0 + \sigma \in J^+$ ve
 $(\forall t \geq t_0 + \sigma, t \in J^+)$ için $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) denkleminin $x = 0$
çözümüne eş çekici (attractive) denir. Yani her bir $t_0 \in I$ için bir $\eta = \eta(t_0)$ sayısı var
ve her bir $\varepsilon > 0$ için bir $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki her $t \geq t_0 + \sigma$ için
 $\|x_0\| < \eta$ olduğunda $t_0 + \sigma \in J^+$ için $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ olur (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.8.

Eğer $(\exists \eta > 0), (\forall \varepsilon > 0), (\exists \sigma > 0), (\forall x_0 \in B_\eta), (\forall t_0 \in I), t_0 + \sigma \in J^+$ ve
 $(\forall t \geq t_0 + \sigma, t \in J^+)$ için $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) denkleminin $x = 0$
çözümüne düzgün çekici (attractive) denir. Yani her $\eta > 0$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için bir
 $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Öyle ki her $t_0 \in I$ ve her $t \geq t_0 + \sigma$ için $\|x_0\| < \eta$
olduğunda $t_0 + \sigma \in J^+$ için $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ olur (Rouche ve ark., 1977).

Uyarı 2.9.

Eş çekicilik (attractive) tanımını dikkate aldığımızda B_η içinde başlayan bütün
çözümler $t \rightarrow \infty$ için orijine yaklaşır. Eş attractive durumunda çözümler $x_0 \in B_\eta$ göre

düzgün olarak sifıra gider. Oysaki düzgün çekicilik (attractive) durumunda çözümler $x_0 \in B_\eta$ ve $t_0 \in I$ ya göre düzgün olarak sifıra gider (Rouche ve ark., 1977).

Örnek 2.10.

$$x' = f(t, x) \quad (x, t \in \mathfrak{R})$$

denkleminin için orijinin çekiciliği (attractivi) eş çekiciliği gerektirir (Rouche ve ark., 1977).

Örnek 2.11.

$$x' = f(t, x)$$

denkleminin için orijinin eş çekiciliği (attractivi), kararlılığı gerektirir. t_0 anında orijinin çekiciliği (attractivi) cümlesi aşağıdaki gibidir (Rouche ve ark., 1977).

$$A(t_0) = \{x_0 \in \Omega: x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\} \text{ dir.}$$

Eğer $A(t_0)$ t_0 a bağlı değilse çekicilik (attractivi) bölgesi düzgündür denir. Dahası eğer her t_0 için $\Omega = \mathbb{R}^n = A(t_0)$ ise orijinin çekiciliği (attractivi) global çekiciliktir. (Rouche ve ark., 1977).

Eğer herhangi bir $\eta > 0$, $t_0 \in I$ ve $x_0 \in B_\eta$ için $t \rightarrow \infty$ iken x_0 ve t_0 'a göre düzgün olarak $x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0$ oluyorsa o zaman buna orijin düzgün çekiciliği denir (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.12.

Eğer (2.1) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümü kararlı ve çekici ise (2.1) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.13.

Eğer (2.1) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümü kararlı ve eş çekici (attractiv) ise (2.1) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümü eş asimptotik kararlıdır (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.14.

Eğer (2.1) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümü düzgün kararlı ve düzgün çekici (2.1) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.15.

Eğer (2.1) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümü kararlı ve global çekici ise (2.1) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümü global asimptotik kararlıdır (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.16.

Eğer (2.1) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümü düzgün kararlı ve düzgün global çekici (attractiv) ise (2.1) diferansiyel denkleminin $x = 0$ daki çözümü düzgün global asimptotik kararlıdır (Rouche ve ark., 1977).

Örnek 2.17.

$$x' = -x \quad [x \in \mathbb{R}]$$

denklemini için $x = 0$ çözümü global asimptotik kararlıdır (Rouche ve ark., 1977).

Örnek 2.18.

$x \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için

$$x' = -\frac{x}{t} \quad -1 \leq xt \leq 1$$

$$x' = -\frac{x}{t} - \frac{2}{t^2} \quad 1 < xt$$

$$x' = \frac{x}{t} + \frac{2}{t^2} \quad xt < -1$$

ile tanımlı diferansiyel denklemlerini göz önüne alalım. Bu denklemlerin $x = 0$ çözümü eş asimptotik kararlıdır. Fakat düzgün ve global asimptotik kararlı değildir. (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.19.

Bir $\lambda > 0$ var ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki (2.1) denkleminin herhangi bir $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ çözümü için $t \geq t_0$ ve $\|x(t_1)\| < \delta$ iken $t \geq t_1$ için $\|x(t_1)\| < \varepsilon \exp[-\lambda(t - t_1)]$ oluyorsa (2.1) denkleminin sıfır çözümü üstel anlamda asimptotik kararlıdır denir.

Yukarıda verilen kararlılık tanımları arasındaki bağıntılar aşağıdaki teorem ile ifade edilmektedir.

Teorem 2.20.

(i) Üstel asimptotik kararlılık \rightarrow düzgün asimptotik kararlılık \rightarrow düzgün kararlılık \rightarrow kararlılık,

(ii) Üstel asimptotik kararlılık \rightarrow düzgün asimptotik kararlılık \rightarrow eş asimptotik kararlılık \rightarrow asimptotik kararlılık \rightarrow kararlılık (J. L. Massera, 1956).

Teorem 2.21.

(2.1) deki $f(t, x)$ fonksiyonu t den bağımsız veya t ye göre periyodik olsun. Bu takdirde orijinin kararlılığı, düzgün kararlı ve asimptotik kararlı ise orijin düzgün asimptotik kararlıdır (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.22.

$\alpha(0) = 0$ olmak üzere $\alpha : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ tanımlı sürekli ve artan bir fonksiyon olsun. Bu tür bir fonksiyona Hahn anlamında \mathfrak{R} sınıfında bir fonksiyon adı verilir ve $\alpha \in \mathfrak{R}$ olarak yazılır (Rouche ve ark., 1977).

Örnek 2.23.

$$f : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$$

$$f(x) = x^2$$

ve

$$f : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$$

$$f(x) = x$$

fonksiyonları $\mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ sürekli ve artan olduğu için Hahn anlamında \mathfrak{R} sınıfında bir fonksiyondur .

Teorem 2.24.

$V \in C^1$ olmak üzere eğer bir $V : I \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ fonksiyonu var öyle ki $a \in \mathfrak{R}$ (a bir Hahn fonksiyonudur) ve her bir $(t, x) \in I \times \Omega$ için

$$(i) V(t, x) \geq a(\|x\|); V(t, 0) = 0$$

$$(ii) V'(t, x) \leq 0$$

ise (2.1) denkleminin $x = 0$ çözümü kararlıdır. Burada C^1 , $I \times \Omega$ de tanımlı ve birinci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların bir sınıfını temsil etmektedir (Rouche ve ark., 1977).

İspat. $t_0 \in I$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. V fonksiyonu sürekli ve $V(t, 0) = 0$ olduğu için bir $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ vardır öyle ki her $x_0 \in B_\delta$ için $V(t_0, x_0) < a(\varepsilon)$ dır. $x(t; t_0, x_0)$ ın yerine $x(t)$ yazalım. Ve (ii) şartını kullanalım. Her $x_0 \in B_\delta$ ve her $t \in J^+$ için

$$a(\|x\|) \leq V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) < a(\varepsilon)$$

$a \in \mathbb{R}$ olduğu için $\|x\| < \varepsilon$ elde edilir.

Şimdi $m > 0, n > 0$ iki tamsayılar olmak üzere

$$f: I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g: I \times \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

şeklinde tanımlı sürekli iki fonksiyonu göz önüne alalım.

$$f(t, 0, 0) = 0$$

$$g(t, 0, 0) = 0$$

olduğunu varsayalım. Ayrıca f ve g fonksiyonlarının $I \times \Omega \times \mathbb{R}^m$ bölgesinde

$$x' = f(t, x, y)$$

$$y' = g(t, x, y)$$

(2.2)

diferansiyel denklem sisteminin çözümlerinin varlığını ve tekliğini garanti edecek şekilde yeterince düzgün oldukları kabul edilmektedir (Rouche ve ark., 1977).

Tanım 2.25.

Eğer $(\forall \varepsilon > 0), (\forall t_0 \in I), (\exists \delta > 0), (\forall z_0 \in B_\delta), (\forall t \in J^+)$ için $\|x(t; t_0, z_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.2) diferansiyel denkleminin $z = 0$ çözümü x e göre karardır. Yani $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in I$ olmak üzere bir $\delta > 0$ sayısı var öyle ki her $z_0 \in B_\delta$ ve $t \in J^+$ için $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.2) diferansiyel denkleminin $z = 0$ çözümü x e göre karardır denir (Rouche ve ark., 1977).

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \quad (2.3)$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada x bileşeni n -boyutlu bir vektör ve $F(t, x)$ fonksiyonunun $I \times D$ üzerinde (t, x) e göre sürekli bir fonksiyon olduğu varsayılmaktadır. D, R^n deki açık bağlantılı bir cümle, $I = [0, \infty)$ ve C (2.3) diferansiyel denklem sisteminin D bölgesinde kalan çözümlerin bir çözümü olsun. $x_0(t)$ C nin bir elemanı olsun.

$$x = y + x_0(t)$$

yazalım. Her iki tarafın t ye göre türevi alındığında $x' = y' + x_0'(t)$ olması nedeni ile (2.3) diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y + x_0(t)) - F(t, x_0(t)) \quad (2.4)$$

sistemine dönüşür (T. Yoshizawa, 1975).

$$G(t, y) = F(t, y + x_0(t)) - F(t, x_0(t))$$

olsun. $G(t, 0) \equiv 0$ olduğu açıktır. Ayrıca kolaylıkla görülebilir ki (2.4) sisteminin sıfır çözümü (2.3) sisteminin $x_0(t)$ çözümüne karşılık gelir. Bu nedenle $x_0(t)$ çözümü kararlılığı yerine (2.4) sisteminin $y(t) \equiv 0$ çözümünün kararlılığını incelemek yeterlidir. Genelliği bozmaksızın $F(t, 0) \equiv 0$ ve D nin $\|x\| < H$ ($H > 0$), olacak şekilde

bir bölge olduğu vasayılabilir. Bu nedenle uygulamada her hangi bir çözümün kararlılığını incelemek yerine sıfır çözümünün kararlılığını inceleme yoluna gidilir. Çünkü yukarıda da görüldüğü üzere sıfırdan farklı her çözüm uygun bir dönüşüm yardımıyla sıfır çözümüne indirgenebilir (T.yoshizawa, 1975).

Tanım 2.26.

Her $t_0 \in I$ ve $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki her $t \geq t_0$ için $\|x\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ iken $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü kararlıdır denir (T. Yoshizawa, 1975).

Örnek 2.27.

$$x' = f(x)$$

$$x(0) = 1$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Burada

$$f(x) = \begin{cases} -x & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$$

olup denklemi çözersek

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$x = e^{-t}$$

elde edilir. Bu da çözümün kararlı olduğunu gösterir. Fakat çözüm düzgün kararlı değildir (T.yoshizawa, 1975).

Tanım 2.28.

Eğer Tanım 2.26 daki δ , t_0 dan bağımsız yani yalnız $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

ise bu takdirde (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümüne düzgün kararlıdır denir (T. Yoshizawa, 1975).

Tanım 2.29.

(2.3) denklemin $x = 0$ çözümü kararlı ve bir $\delta_0(t_0) > 0$ sayısı var öyle ki $\|x_0\| < \delta_0(t_0)$ iken $t \rightarrow \infty$ için $x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0$ oluyorsa (2.3) denklemin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır denir (T. Yoshizawa, 1975).

Örnek 2.30.

$$r' = r \frac{g'(t, \theta)}{g(t, \theta)}, \quad \theta' = 0 \quad (2.5)$$

kutupsal koordinatlarda verilen ikinci mertebeden denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $g'(t, \theta)$, $g(t, \theta)$ nin t ye göre türevidir.

$$g(t, \theta) = \frac{\sin^4 \theta}{\sin^4 \theta + (1 - t \sin^2 \theta)^2} + \frac{1}{1 + \sin^4 \theta} \cdot \frac{1}{1 + t^2}$$

(2.5) denkleminin çözümü $t = t_0$ da $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ sağlar. Bu takdirde

$$r = r_0 \frac{g(t, \theta_0)}{g(t_0, \theta_0)}, \quad \theta = \theta_0$$

olur. Eğer $\theta_0 = k\pi$ olursa çözüm olarak

$$r = r_0 \frac{1 + t_0^2}{1 + t^2}, \quad \theta = k\pi$$

elde edilir. Eğer $\theta_0 \neq k\pi$ olursa çözüm olarak

$$\tau = \frac{1}{\sin^2 \theta_0}$$

$$\begin{cases} r = r_0 \frac{1}{g(t_0, \theta_0)} \left\{ \frac{1}{1 + (\tau - t)^2} + \frac{1}{1 + \tau^2} \cdot \frac{1}{1 + t^2} \right\} \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

elde edilir. Buradan açıkça $t \rightarrow \infty$ için $r \rightarrow 0$ olduğu görülebilir. Böylece $r = 0$ çözümünün asimptotik kararlı olduğu görülür. Eğer θ_0 $k\pi$ ye çok yakın alınır ve $t_0 = 0$ alınırsa (2.6) denkleminin çözümü $t = \tau$ için $r > r_0$ değerini alır. Bundan dolayı denklemin çözümü equ-asimptotik kararlı değildir (T. Yoshizawa, 1975).

Tanım 2.31.

Her $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in I$ için bir $\delta_0(t_0) > 0$ ve bir $T(t_0, \varepsilon) > 0$ sayısı var öyle ki $\|x_0\| < \delta_0(t_0)$ iken her $t \geq t_0 + T(t_0, \varepsilon)$ için $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.3) denklemin $x = 0$ çözümü yarı-eş asimptotik kararlıdır denir (T. Yoshizawa, 1975).

Tanım 2.32.

Eğer (2.3) denklemin $x = 0$ çözümü kararlı ve yarı-eş asimptotik kararlı ise bu takdirde (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü eş asimptotik kararlıdır (T. Yoshizawa, 1975).

Tanım 2.33.

Eğer Tanım 2.31 deki δ_0 ve T , t_0 dan bağımsız ise bu takdirde (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü yarı düzgün asimptotik kararlıdır denir (T. Yoshizawa, 1975).

Tanım 2.34.

(2.3) denklemin $x = 0$ çözümü düzgün kararlı ve yarı düzgün asimptotik kararlı

ise bu takdirde (2.3) denklemin $x = 0$ çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (T. Yoshizawa, 1975).

Tanım 2.35.

Verilen bir $\lambda > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var öyle ki $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ iken her $t \geq t_0$ için;

$$\|x(t; x_0, t_0)\| \leq \varepsilon \exp[-\lambda(t - t_0)]$$

oluyorsa (2.3) denklemin $x = 0$ çözümü üstel (exponential) asimptotik kararlıdır denir (T. Yoshizawa, 1975).

Bu tanımların eşdeğer olmadığı örnekler üzerinde gösterilebilir.

Örnek 2.36.

$$\begin{aligned} x' &= -[13 + 12 \sin \log(t + 1) + 12t(t + 1)^{-1} + \cos \log(t + 1)]x \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Bu başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\int \frac{dx}{x} = \int -[13 + 12 \sin \log(t + 1) + 12t(t + 1)^{-1} \cos \log(t + 1)]dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -[13 + 12 \sin \log(t + 1) + 12t(t + 1)^{-1} \cos \log(t + 1)]dt$$

$$\ln x = - \left[13 \int dt + \int \frac{d(12 \sin \log(t + 1) t)}{dt} dt \right]$$

$$x = x(0) \exp\{-[13 + 12 \sin \log(t + 1)]t\}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $|x| \leq |x(0)|e^{-t}$ yazılabilir. Bu ise (2.3) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümünün eş asimptotik kararlı olduğunu gösterir (J. L. Massera, 1956).

Ancak

$$t_n = \exp\left[(4n + 1)\frac{\pi}{2}\right] - 1 \text{ ve } t'_n = \exp\left[(4n + 3)\frac{\pi}{2}\right] - 1$$

olarak alındığında

$$\frac{x'_n}{x_n} = \exp(-t'_n + 25t_n) = \exp\left\{\left[(25 - e^\pi) \exp(4n + 1)\frac{\pi}{2}\right] - 24\right\}$$

olarak elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için $\frac{x'_n}{x_n} \rightarrow \infty$ olur. Çünkü $25 > e^\pi$ dir. Buna bağlı olarak $x = 0$ çözümünün düzgün kararlı olmadığı görülür. Yani $x = 0$ çözümünün eş asimptotik kararlı olması çözümün düzgün kararlı olmasını gerektirmez.

Örnek 2.37.

$$x' = (6t \sin t - 2t)x$$

$$x(0) = x_0$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Bu problemin çözümü olarak

$$\int \frac{dx}{x} = \int (6t \sin t) dt - 2 \int t dt$$

$$t = u \text{ ise } dt = du$$

$\sin t = dv$ ise $v = -\cos t$, dönüşümü yapılırsa

$$\int 6t \sin t dt = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int 6t \sin t dt = -t \cos t + \int \cos t dt$$

$$\int 6t \sin t \, dt = 6 \sin t - 6t \cos t$$

çözümü elde edilir. Bu çözüm denkleme yerine yazılırsa

$$x = x(0) \exp(6 \sin t - 6t \cos t - t^2)$$

denklemi elde edilir.

Eğer $T > 6$, $t \geq t_0 + T$ ve $t_0 \geq 0$ ise

$$\begin{aligned} \frac{x}{x_0} &= \exp(6t \sin t - 6t \cos t - t^2 - 6 \sin t_0 + 6t_0 \cos t_0 + t_0^2) \\ &\leq \exp[(12 + (t + t_0)(6 - t + t_0))] \\ &\leq \exp[(12 + T(6 - T))] < \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece söz konusu denklemin $x = 0$ çözümü yarı asimptotik kararlı olur.

Ancak $t_n = n\pi$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} &= \exp(12n\pi + 4n^2\pi^2 + 6(2n + 1)\pi - (2n + 1)^2\pi^2) \\ &= \exp[(4n + 1)\pi(6 - \pi)] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $n \rightarrow \infty$ Olduğu zaman $\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} \rightarrow \infty$ olur. Bu ise söz konusu denklemin $x = 0$ çözümünün düzgün kararlı olmadığını gösterir. Yani $x = 0$ çözümünün yarı asimptotik kararlı olması çözümün düzgün kararlı olmasını gerektirmez (J. L. Massera, 1956).

Örnek 2.38.

$$x' = -x^3$$

$$x(0) = x_0$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Bu problemin (t_0, x_0) a göre çözümü olarak

$$\frac{dx}{dt} = -x^3$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x^3} = - \int_{t_0}^t dt$$

$$-\frac{1}{2x^2} \Big|_{x_0}^x = -t \Big|_{t_0}^t$$

$$x = x_0 [1 + 2x_0^2(t - t_0)]^{-\frac{1}{2}}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece denklemin $x = 0$ çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğu kolay bir şekilde görülür. Fakat bu çözüm exponential asimptotik kararlı değildir (J. L. Massera, 1956).

Şimdi yukarıda verilen (2.1) diferansiyel denklem sisteminin özel bir durumu olan

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{2.7}$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $A(t)$, I üzerinde tanımlı $n \times n$ mertebeden sürekli bir matris fonksiyonudur. $x(t)$ (2.7) denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olsun. O zaman (2.7) denklem sisteminin (t_0, x_0) noktasından geçen çözümü $x(t; x_0, t_0) = X(t).X^{-1}(t_0)x_0$ biçiminde olur (T. Yoshizawa, 1966).

Teorem 2.39.

(2.7) denklem sisteminin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlı ise bu takdirde bu çözüm aynı zamanda eş asimptotik kararlıdır (T. Yoshizawa, 1966).

İspat. Asimptotik kararlılık $t \rightarrow \infty$ iken $x(t)$ nin tüm elemanlarını sifira gitmesini gerektirir. Çözüm asimptotik kararlı olduğundan asimptotik kararlılığın tanımı dikkate alındığında $\varepsilon > 0$ ve $\delta_0 > 0$ olmak üzere bir $T_0(t_0, \varepsilon) > 0$ sayısı var öyleki

$$T \geq T_0(t_0, \varepsilon) \text{ ve } \|X(t).X^{-1}(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{\delta_0}$$

yazılabilir. Burada ε ve δ_0 birer sabittir. Bundan dolayı eğer $\|x_0\| < \delta_0$ iken her $t \geq t_0 + T(t_0 + \varepsilon)$ için

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \|X(t).X^{-1}(t_0)\| \|x_0\| < \varepsilon$$

bu da (2.7) denklem sisteminin $x = 0$ çözümü eş asimptotik kararlı olduğunu gösterir (T. Yoshizawa 1966).

Teorem 2.40.

(2.7) denklem sisteminin $x = 0$ çözümü düzgün kararlı ise bu takdirde bu çözüm aynı zamanda üstel asimptotik kararlıdır (T. Yoshizawa, 1966).

İspat: $cX(t).X^{-1}(t_0)$ sabit bir t_0 için bir matris çözümdür. Burada $c > 0$ bir sabittir. Düzgün kararlılık tanımından yeterince küçük bir c için $\|cX(t).X^{-1}(t_0)\| < 1$ yazılabilir. Bu ise bir $N \geq 1$ sayısının varlığını gerektirir. Öyle ki her $t \geq t_0 \geq 0$ için $\|X(t).X^{-1}(t_0)\| < N$ dir. Çünkü $x = 0$ çözümü yarı düzgün asimptotik kararlıdır.

Bir $T > 0$ sayısı var öyle ki her $t \geq t_0 + T$ için $\|X(t).X^{-1}(t_0)\| < \frac{1}{2}$ dir. Bu yüzden $t \geq t_0 + kT$ için

$$\|X(t).X^{-1}(t_0)\| < 2^{-kN}$$

olup, buradan

$$\|X(t).X^{-1}(t_0)\| < 2Ne^{-\lambda(t-t_0)}$$

elde edilir. Burada $k > 0$ ve $\lambda = \frac{\log 2}{T}$ dir. Bu da her $t \geq t_0 \geq 0$ için

$$\|x(t; x_0, t_0)\| = \|X(t).X^{-1}(t_0)x_0\| < 2Ne^{-\lambda(t-t_0)}\|x_0\|$$

olmasını gerektirir. Bundan dolayı (2.7) denklem sisteminin $x = 0$ çözümü üstel asimptotik kararlıdır (T. Yoshizawa, 1966).

Teorem 2.41.

Eğer (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü kararlı ise bu takdirde bu çözüm aynı zamanda düzgün kararlıdır (T. Yoshizawa, 1966).

İspat. (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü kararlılığında herhangi bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta_1(w, \varepsilon) > 0$ sayısı var öyle ki $\|x_0\| < \delta_1(w, \varepsilon)$ iken her $t \geq w$ için $\|x(t; x_0, w)\| < \varepsilon$ olur. Çünkü $x = 0$ çözümünün kararlılığı $x = 0$ çözümünün tekliliğini gösterir. Eğer $t_0 \in [0, w)$ ve $\|x_0\| < \delta$ ise $\|x(w; x_0, t_0)\| < \delta_1$ olacak şekilde bir $\delta(\delta_1) > 0$ vardır. Böylece eğer $t_0 \in [0, w)$ ve $\|x_0\| < \delta$ ise her $t \geq t_0$ için $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$ olur. $F(t, x)$ in frekansları $x(t; x_0, t_0)$ çözümünün hareketlerini takip eder öyle ki $kw \leq t_0 < (k+1)w$, ($k = 1, 2, \dots$) $x(t; x_0, t_0 - kw)$ çözümünün aynısıdır. Bundan dolayı eğer $t_0 \in I$ ve $\|x_0\| < \delta$ ise her $t \geq t_0$ için $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$ olur. Burada açıkça δ sadece ε 'a bağlıdır. Bu da (2.1) denkleminin $x = 0$ çözümünün düzgün kararlı olduğunu ispatlar (T. Yoshizawa, 1966).

Teorem 2.42.

Eğer (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlı ise aynı zamanda düzgün asimptotik kararlıdır (T. Yoshizawa, 1966).

İspat. Öncelikle $x = 0$ çözümünün eş asimptotik kararlı olduğunu ispatlayalım. Varsayalım ki bu doğru değil. Çünkü $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır. $\delta_0(t_0) > 0$ sayısı var öyle ki $\|x_0\| < \delta_0(t_0)$ olması $t \rightarrow \infty$ iken $\|x(t; x_0, t_0)\| \rightarrow 0$ olmasını gerektirir. Hipotezimize göre bir $t_0 \in I$ ve $\varepsilon > 0$ için $\{x_k\}, \{\tau_k\}$ dizileri var öyle ki $\|x_k\| \leq \delta_0(t_0)$ olup $k \rightarrow \infty$ ve $\|x(\tau_k; x_k, t_0)\| \geq \varepsilon$ iken $\tau_k \rightarrow \infty$ olur. $x_0, \{x_k\}$ dizileri kümesinde bir nokta olsun. O zaman $\|x_0\| \leq \delta_0(t_0)$ olur. Sınırlı herhangi bir süre içinde $\{x(t; x_k, t_0)\}$ dizisi düzgün sınırlı ve eşit olarak süreklidir. Böylece herhangi bir süre içinde $x(t; x_0, t_0)$ çözümüne yakınsayan bir alt dizi vardır. $\{x(t; x_k, t_0)\}$ ile alt diziyi tekrar göstereceğiz. Çünkü $\|x_0\| \leq \delta_0(t_0)$ olup $t \rightarrow \infty$ iken $x(t; x_0, t_0) \rightarrow 0$ dır. Bundan dolayı yeterince büyük m ($m > 0$, olup bir tamsayıdır) ve uygun $\eta > 0$ için $\|x(mw; x_0, t_0)\| < \eta$ elde ederiz. Çünkü $\{x(t; x_k, t_0)\}, x(t; x_0, t_0)$ a düzgün yakınsar. k yeterince büyük olup $\|x(mw; x_k, t_0)\| < \eta$ olur ve ayrıca $\tau_k > mw$ için $\|x(\tau_k; x_k, t_0)\| \geq \varepsilon$ olur. Böylece $x(t; x(mw; x_k, t_0), 0)$ olacak şekilde bir çözüm var öyle ki $\|x(\tau_k - mw; x(mw; x_k, t_0), 0)\| \geq \varepsilon$ olur. Bu da $x = 0$ çözümünün kararlılığı ile çelişir. Bundan dolayı (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü eş asimptotik kararlıdır (T. Yoshizawa, 1966).

Teorem 2.43.

$\infty > t \geq 0$ üzerinde tanımlı bir $V(t, x)$ Liapunov fonksiyonunun var olduğunu varsayalım. Buna göre aşağıdaki şartlar sağlanır.

(i) $V(t, 0) = 0$

(ii) $\alpha(\|x\|) \leq V(t, x), \alpha(r) \in CIP$

(iii) $V'(t, x) \leq 0,$

olduğu takdirde (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü kararlıdır (T. yoshizawa, 1966).

İspat: Herhangi bir $\varepsilon > 0, \varepsilon < H$ ye uygun $t \in I$ ve x için $\alpha(\varepsilon) \leq V(t, x)$ alalım. Öyle ki $\|x\| = \varepsilon$ sabit bir $t_0 \in I$ için bir $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ sayısı seçebiliriz. Öyle ki $\|x_0\| < \delta$ iken $V(t_0, x_0) < \alpha(\varepsilon)$ olur. Çünkü $V(t, 0) = 0$ ve $V(t, x)$ süreklidir. $x(t; x_0, t_0)$ in (2.1)

denklemin bir çözümü olduğu varsayalım öyle ki $\|x_0\| < \delta$ iken bazı t_1 ler için $\|x(t; x_0, t_0)\| = \varepsilon$ olur. (iii) Şartından dolayı $V(t_1, x(t_1; x_0, t_0)) \leq V(t_0, x_0)$ yazılabilir. Bundan dolayı $\alpha(\varepsilon) < V(t_1, x(t_1; x_0, t_0)) \leq V(t_0, x_0) < \alpha(\varepsilon)$ olur. Bu da bir çelişkidir. Böylece eğer her $\|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ ise her $t \geq t_0$ için $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$ olur. Yani (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü kararlıdır (T. Yoshizawa, 1966).

Teorem 2.44.

Eğer Teorem 2.43 deki (ii) şartı yerine (ii)' şartı yani $\alpha(\|x\|) \leq V(t, x) \leq b(\|x\|)$ alınırsa (2.1) denkleminin $x = 0$ çözümü düzgün kararlı olur. (T. Yoshizawa, 1966).

Örnek 2.45.

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0$$

Lienard denklemini göz önüne alalım. Burada $f(x)$ ve $g(x)$ $x \in \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlardır.

Varsayalım ki

(i) $x \neq 0$ için, $g(x)F(x) > 0$, burada

$$F(x) = \int_0^x f(u)du$$

(ii) $x \neq 0$ için, $xg(x) > 0$

(iii) $x \rightarrow \infty$ için, $G(x) = \int_0^x g(u)du \rightarrow \infty$

$$x' = y - F(x),$$

$$y' = -g(x) \tag{2.8}$$

bir eşdeğer denklemini ve $V(x, y) = G(x) + \frac{y^2}{2}$ Liapunov fonksiyonu göz önüne alalım.

V nin Teorem 2.44 deki (ii)' şartını sağladığı açık bir şekilde görülüyor.

$$\begin{aligned}
V'(x, y) &= x'G(x)' + \frac{2yy'}{2} \\
&= g(x)(y - F(x)) + y(-g(x)) \\
&= -g(x)F(x) \leq 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece Teorem 2.44 e göre (2.8) denkleminin $x = 0, y = 0$ çözümü düzgün kararlıdır denir (T. Yoshizawa, 1975).

Teorem 2.46.

Teorem 2.43 deki aynı şartları ve $b(\delta) < \alpha(\varepsilon)$ olsun diye bir $\delta(\varepsilon) > 0$ seçiyoruz. Eğer $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ ve $t_0 \in I$ ise her $t \geq t_0$ için $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$ olduğu ispatlanabilir. Bu da (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümünün düzgün kararlı olduğunu gösterir (T. Yoshizawa, 1966).

Teorem 2.47.

Teorem 2.44 deki aynı varsayımlar altında eğer $V'(t, x) \leq -c(x)$ ise (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü düzgün asimptotik kararlıdır. Burada $c(r), [0, H]$ aralığı üzerinde sürekli ve pozitif tanımlıdır (T. Yoshizawa, 1966).

İspat: Teorem 2.44 e göre (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü düzgün kararlı olup bundan dolayı bir $\delta_0 > 0$ sayısı var öyle ki eğer $t_0 \in I$ ve $\|x_0\| < \delta_0$ ise her $t \geq t_0$ için $\|x(t; x_0, t_0)\| < H$ olur. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var öyle ki eğer $t_0 \in I$ ve $\|x_0\| < \delta$ ise her $t \geq t_0$ için $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$ olur. $t_0 \in I$ ve $\|x_0\| < \delta_0$ iken (2.3) denkleminin her $x(t; t_0, x_0)$ çözümü için şu gösterilecek öyle ki $t_0 \in I$ ve $\|x_0\| < \delta_0$ iken her t için $\|x(t; x_0, t_0)\| < \delta(\varepsilon)$.

Varsayalım ki her $t \geq t_0$ için $\delta(\varepsilon) < \|x(t; x_0, t_0)\| < H$ dir. Çünkü bir $\gamma > 0$ sayısı var öyle ki $\delta \leq \|x\| < H$ üzerinde $V'(t, x) \leq -\gamma$ dir.

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x(t_0; x_0, t_0)) - \gamma(t - t_0) \quad (2.9)$$

denklemini yazabiliriz.

Eğer $t > t_0 + T$ ve $T = \frac{b(\delta_0) - a(\delta)}{\gamma}$ ise $V(t_0, x_0) - \gamma(t - t_0) < a(\delta)$ olur. Çünkü $V(t_0, x_0) < b(\delta_0)$ dır. (2.9) denklemine göre $V(t, x(t; x_0, t_0)) < a(\delta)$ dir ki buda $V(t, x(t; x_0, t_0)) \geq a(\delta)$ ile çelişir. Böylece bazı t_1 ler için $t_0 \leq t_1 \leq t_0 + T$ öyle ki $\|x(t_1; x_0, t_0)\| < \delta(\varepsilon)$ olmalıdır. Bundan dolayı eğer $t \geq t_0 + T$ ise $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$ olur. Burada açık bir şekilde T 'nin sadece ε a bağlı olduğu görülebilir. Bu da (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümünün yarı düzgün asimptotik kararlı olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış oldu (T. Yoshizawa, 1966).

3. BELLİ TÜRDEN OTONOM OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN BAZI YENİ KARARLILIK KRİTERLERİ

Bu bölümde Jiang (2005) ve Gao ve Zhang (2008) tarafından verilen ve zayıf asimptotik kararlılık kriterleri olduğu iddia edilen çalışmalar incelenecektir.

Otonom olmayan

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (3.1)$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $x \in B_H$, $B_H = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq H\}$, $f: [0, +\infty) \times B_H \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(t, 0) \equiv 0$ (H , bir pozitif tamsayı) şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca f fonksiyonu (3.1) denkleme ait Cauchy probleminin çözümlerinin varlığını ve tekliğini garanti edecek şekilde düzgün bir fonksiyondur. Hale (1980) ve Yoshizawa (1975) çalışmalarında görüldüğü gibi (3.1) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlılığının klasik kriteri şu şekilde belirlenmektedir:

(i) $V(t, x)$ pozitif tanımlıdır.

$$(ii) \frac{d}{dt} V(t, x) < 0$$

olur. Bu türev (3.1) diferansiyel sistemi boyunca aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x) \end{aligned}$$

Uygulamalarda bazen V pozitif tanımlı ve $\frac{dV}{dt}$ ise negatif yarı tanımlı olacak şekilde bir $V(t, x)$ fonksiyonu oluşturulmaktadır. Bu durumda $\frac{dV}{dt}$ nin negatif tanımlılığı garanti edilmemektedir. Böyle bir durumun ortaya çıkması halinde yani $\frac{dV}{dt} \leq 0$ olması durumunda Barbashin ve Krasovskii (1952) otonom ve periyodiklik durumlar için bir asimptotik kararlılık kriteri verdi. Bu sonuçlar Rouche (1977) çalışmasında bulunabilir. Ignatyev (1997) çalışmasında Barbashin ve Krasovskii'nin kriterlerini periyodik sistemler için genelleştirdi. Daha sonradan ise bu asimptotik kararlılık kriterleri birçok diferansiyel denklem sistemi için Ignatyev (1997) ve Jiang (2005) çalışmalarında yeniden geliştirildi. Bu ilginç sonuçların biri Jiang (2005) çalışmasındaki teorem 1 de verilen zayıf asimptotik kriterleridir. Bu kriterler aşağıdaki teoremden belirlenmektedir:

Teorem 3.1.

Yukarıdaki kabuller altında (3.1) diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Buna ilaveten $[0, +\infty) \times B_H$ bölgesi üzerinde $f(t, x)$ nin C^{m+p-1} de bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Öyle ki C^{m+p} de bir $V(t, x): [0, +\infty) \times B_H \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu var ve bu fonksiyon için aşağıdaki şartlar sağlanmaktadır:

(i) $a(\|x\|) \leq V(t, x) \leq b(\|x\|)$, ($a, b \in K, K$ bir Hahn fonksiyonlar sınıfıdır.)

(ii)
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} |f(t, x)| \right)$$

olmak üzere

$$\frac{dV}{dt} \leq 0$$

olur.

(iii)
$$\frac{d^{k+1}V}{dt^{k+1}} = \frac{\partial \left(\frac{d^k V}{dt^k} \right)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \left(\frac{d^k V}{dt^k} \right)}{\partial x} |f(t, x)| \right), \quad (k = 1, 2, \dots, m,)$$

olmak üzere

$$\frac{d^{m+1}V}{dt^{m+1}}$$

sınırlıdır.

(iv) $c \in K$ olmak üzere

$$U(t, x) = - \left(\left| \frac{dV}{dt} \right| + \left| \frac{d^2V}{dt^2} \right| + \dots + \left| \frac{d^mV}{dt^m} \right| + \left| \frac{d^{m+p}V}{dt^{m+p}} \right| \right) \leq -c(\|x\|)$$

olur. Bu takdirde (3.1) diferansiyel denklem sisteminin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır (L. Jiang, 2005).

Lemma 3.2.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde bir C^m fonksiyonu verilsin. Eğer $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ mevcut ise, bu takdirde $k \rightarrow \infty$ için $y_k \rightarrow \infty$ olmak kaydıyla her y_k dizisi ve $k \rightarrow \infty$ için $x_k - y_k \rightarrow 0$ olmak üzere bir x_k dizisi vardır öyle ki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)^{(r)} = 0, 1 \leq r \leq m \quad (3.2)$$

olur (L. Jiang, 2005).

İspat. Bu sonucun doğru olmadığını varsayalım o halde $\alpha > 0$ ve $\delta > 0$ sayıları var öyle ki keyfi bir $X > 0$ sayısı için bir $y_N > X$ sayısı var öyle ki her $x \in [y_N, y_N + \delta]$ için $|f^{(r)}(x)| > \alpha$ dir.

$$x \in \left[y_N, y_N + \frac{1}{4} \delta \right] \text{ için}$$

$$|f^{(r-1)}(x)| > \frac{1}{4} \delta \alpha$$

veya

$$x \in \left[y_N + \frac{3}{4} \delta, y_N + \delta \right] \text{ için}$$

$$|f^{(r-1)}(x)| > \frac{1}{4} \delta \alpha$$

eğer

$$x \in \left[y_N + \frac{3}{4} \delta, y_N + \delta \right] \text{ için}$$

$$f^{(r)}(x) < -\alpha \text{ ve } f^{(r-1)}\left(y_N + \frac{1}{2} \delta\right) \leq 0$$

ise o zaman ikinci eşitsizlik alınır. Bunun üzerine şunu yazabiliriz:

$$\text{Bir } \left[y, y + \frac{1}{4^{r-1}} \delta \right] \subset [y_N, y_N + \delta] \text{ aralığı var öyle ki } x \in \left[y, y + \frac{1}{4^{r-1}} \delta \right] \text{ için}$$

$$|f'(x)| > \frac{\delta^{r-1} \alpha}{4^{1+2+\dots+(r-1)}} \text{ dir.}$$

Buradan,

$$\left| f\left(y + \frac{1}{4^{r-1}} \delta\right) - f(y) \right| > \frac{\delta^r \alpha}{4^{(r+2)(r-1)/2}} \quad (3.3)$$

eşitsizliği yazılabilir. X keyfi bir sayı ve $y > X$ dir. Buradan (3.3) eşitsizliğinin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

varlığıyla çeliştiğini görebiliriz. Böylece Lemma 3.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

Gao ve Zhang (2008) yukarıda Jiang (2005) tarafından verilen Lemma 3.2 nin $m \geq 2$ için doğru olmadığını aşağıdaki örnek yardımıyla gösterdi:

Örnek 3.3.

C^∞ sınıfından olan

$$f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x}, \quad x \in (0, \infty)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$-1 \leq \cos(x^2) \leq 1 \text{ olup buradan}$$

$$-1/x \leq \cos(x^2)/x \leq 1/x \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = \lim_{x \rightarrow \infty} -1/x = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x^2)/x = 0 \text{ olur.}$$

O halde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x^2)/x = 0$$

olacağı açıkça görülebilir. Bu fonksiyonun sırasıyla 1. ve 2. mertebeden türevleri alındığında

$$f'(x) = -2\sin(x^2) - \frac{1}{x^2} \cos(x^2) \quad (3.4)$$

$$f''(x) = -4x \cos(x^2) + \frac{2}{x} \sin(x^2) + \frac{2}{x^3} \cos(x^2) \quad (3.5)$$

olduğu görülür.

Genel terimi $y_n = (n\pi)^{1/2}$, $n = 1, 2, \dots$, olan $y_n = \sqrt{n\pi}$ dizisini göz önüne alalım. Bu dizi için $n \rightarrow \infty$ olması durumunda $y_n \rightarrow +\infty$ olacağı açıktır. Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(y_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi) / n\pi = 0$$

olduğu açıktır. Ancak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f''(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -4(n\pi)^{1/2} + \frac{2}{(n\pi)^{3/2}} \right\} \cos(n\pi)$$

yazılabilir. Bu limitin $n \rightarrow \infty$ için ıraksak olduğu açıktır. $x_n - y_n \rightarrow 0$ olmak üzere her (x_n) dizisi bir (x_{n_k}) alt dizisi ihtiva eder öyle ki $f'(x_{n_k})$ ve $f''(x_{n_k})$ dizilerinden biri sıfıra yakınsamaz buda (3.2) ile çelişir.

Şimdi tersine kabul edelim ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f''(x_n) = 0. \quad (3.6)$$

$n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow +\infty$ olduğu açıktır.

Keyfi küçükükte bir $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ sayısı için bir $N > 0$ tamsayısı vardır öyle ki

$$\forall n > N \text{ için } x_n > \frac{1}{\varepsilon^2} \text{ dir.} \quad (3.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(y_n) = 0$$

ifadesinde limit tanımından ötürü N yeterince büyük tamsayısını seçebiliriz. Öyle ki her $n > N$ için $|f'(x_n)| < \varepsilon$ olur.

$$f'(x) = -2 \sin(x^2) - \frac{1}{x^2} \cos(x^2)$$

den şunu görebiliriz:

$$|\sin(x_n^2)| < \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \left| \frac{1}{x_n^2} \cos(x_n^2) \right| \right) < \varepsilon \quad (3.8)$$

olur. Böylece

$$f''(x) = -4x \cos(x^2) + \frac{2}{x} \sin(x^2) + \frac{2}{x^3} \cos(x^2) \text{ den}$$

$$\begin{aligned} |f''(x_n)| &\geq |4x_n \cos(x_n^2) + \frac{2}{x_n} \sin(x_n^2) + \frac{2}{x_n^3} \cos(x_n^2)| \\ &\geq 8(1 - \sin^2(x_n^2)) - 2\varepsilon^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{|x_n|^3} > 8(1 - \varepsilon^2) - 1 - \varepsilon > 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

olur. Bu ifade (3.5), (3.7) ve (3.8) den elde edildi.

Lemma 3.4.

Eğer C^{m+1} ($m \geq 1$) sınıfından bir $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

(i) f^m fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığı üzerinde düzgün süreklidir.

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ limiti vardır.

şartlarını sağlarsa ozaman $k \rightarrow \infty$ için $t_k \rightarrow \infty$ olan bir t_k dizisi vardır öyle ki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{|f'(t_k)| + |f''(t_k)| + \dots + |f^m(t_k)| + |f^{m+1}(t_k)|\} = 0 \text{ dır (L. Jiang, 2005).}$$

3.1. Zayıf Asimptotik Kararlılık Kriteri

Rouche (1977) ve Ignatyev (2004) çalışmalarında gösterildiği gibi Hahn fonksiyonları $\phi(0) = 0$ olmak üzere $\phi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ şeklinde tanımlanan sürekli ve monoton artan fonksiyonların bir sınıfıdır (L. Jiang, 2005).

Teorem 3.1.1.

(3.1) diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $x \in B_H$, $B_H = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq H\}$, $f: [0, +\infty) \times B_H \rightarrow \mathbb{R}^n$ tanımlı ve $f \in C^m$ ($m \geq 1$), $t \geq 0$ için $f(t, 0) = 0$ özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur. Kabul edelim ki bir $V(t, x): [0, +\infty) \times B_H \rightarrow \mathbb{R}$, $V \in C^{m+1}$ fonksiyonu var öyleki Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlamaktadır.

(i) ϕ bir Hahn fonksiyonu olmak üzere $V(t, 0) = 0$ ve $\phi(\|x\|) \leq V(t, x)$

(ii) $\frac{dV}{dt} \leq 0$, burada $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x)$

(iii) $\frac{d^{m+1}V}{dt^{m+1}}$

türevi $[0, +\infty) \times B_H$ bölgesi üzerinde sınırlıdır. Burada

$$\frac{d^{r+1}V}{dt^{r+1}} = \frac{\partial \left(\frac{d^r V}{dt^r} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{d^r V}{dt^r} \right)}{\partial x} \cdot f(t, x), \quad (r = 1, 2, \dots, m) \text{ dir.}$$

(iv) ψ bir Hahn fonksiyonu olmak üzere

$$U(t, x) = - \left(\left| \frac{dV}{dt} \right| + \left| \frac{d^2V}{dt^2} \right| + \dots + \left| \frac{d^{m+1}V}{dt^{m+1}} \right| \right) \leq -\psi(\|x\|)$$

olur. Bu takdirde (3.1) diferansiyel denklem sisteminin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır (Gao ve Zhang, 2008).

İspat. Hale (1980) Teorem 10.3.1 ve Yoshizawa (1975) Teorem 2.6.2 göz önüne alındığında (i) ve (ii) şartları nedeniyle (3.1) deki diferansiyel denklem sisteminin $x = 0$ çözümünün kararlı olduğu görülür. Sıfır çözümünün kararlılık tanımı göz önüne alındığında $t_0 > 0$ ve $h \in (0, H)$ olmak üzere bir $\delta = \delta(t_0, h) > 0$ sayısı vardır öyle ki (3.1) denkleminin $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümü için $\|x(t_0)\| < \delta$ iken $\|x(t)\| < h$ olur.

$$\|x(t_0)\| < \delta \text{ iken } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

olduğunun gösterilmesi gerekir.

$$v(t) = V(t, x(t))$$

olsun. Teoremin (i) şartından dolayı $v(t) \geq 0$ olduğu açıktır. Teorem 3.1 in (ii) şartından $v(t)$ nin monoton olarak artmayan bir fonksiyon olduğu söylenebilir. Bu nedenle $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ mevcuttur. Teorem 3.1 in (iii) şartından $v^{m+1}(t)$ nin sınırlı olduğu bilinmektedir. Bu şart $v^m(t)$ nin düzgün sürekliliğini gerektirir. Lemma 3.4 ü göz önüne alındığında yukarıdaki bilgiler ışığında $k \rightarrow \infty$ için $t_k \rightarrow \infty$ olmak üzere bir (t_k) dizisi var öyle ki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{|v'(t_k)| + |v''(t_k)| + \dots + |v^m(t_k)| + |v^{m+1}(t_k)|\} = 0$$

olur. Bu nedenle

$$U(t, x(t_k)) = -\{|v'(t_k)| + |v''(t_k)| + \dots + |v^m(t_k)| + |v^{m+1}(t_k)|\}$$

olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U(t, x(t_k)) = 0$$

olur. (iv) şartından dolayı

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = 0$$

olduğu yazılabilir. Şimdi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $0 < c < h$ ve $\ell \rightarrow \infty$ için $\tau_\ell \rightarrow \infty$ olmak üzere $\|x(\tau_\ell)\| \geq c$ dir. ($\ell = 1, 2, \dots$). Öte yandan $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = 0$ olması nedeniyle bir "k" tam sayısı var öyle ki "V" sürekli ve $V(t, 0) = 0$ olduğundan her $t \geq t_k$ için $V(t, x(t)) < \frac{v}{2}$ olur. Açıkça yeterince büyük "ℓ" ler için $\tau_\ell > t_k'$ olması $V(\tau_\ell, x(\tau_\ell)) < \frac{v}{2}$ olmasını gerektirir. Bu ise

$$V(\tau_\ell, x(\tau_\ell)) \geq \phi(\|x(\tau_\ell)\|) > 0$$

ile çelişir. Böylece $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ olduğu ispatlanmış oldu.

Örnek 3.1.2.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sin y - h(t)x, \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada

$$h = 2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

dir. Jiang'ın bu problem için iddiası bir $c \in K$ Hahn fonksiyonu var öyle ki

$$-\left(\left|\frac{dV}{dt}\right| + \left|\frac{d^2V}{dt^2}\right| + \left|\frac{d^3V}{dt^3}\right| + \left|\frac{d^4V}{dt^4}\right|\right) \leq -c(x^2 + y^2)$$

bununla beraber $x = 0$ $t = (4k - 1)^2$ ($k = 1, 2, \dots, n, \dots$) olduğunda olması halinde $h(t) = h'(t) = 0$ olduğu açıktır. Bu nedenle $\forall y \neq 0$ için

$$-\left(\left|\frac{dV}{dt}\right| + \left|\frac{d^2V}{dt^2}\right| + \left|\frac{d^3V}{dt^3}\right| + \left|\frac{d^4V}{dt^4}\right|\right) = 0$$

dir (Gao ve Zhang, 2008).

Gerçekten Jiang (2005) V fonksiyonunu aşağıdaki gibi seçti.

$$V = \frac{x^2}{2} + (1 - \cos y)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= x(-\sin y - h(t)x) + x \sin y$$

$$= -h(t)x^2 - x \sin y + x \sin y$$

$$\frac{dV}{dt} = -h(t)x^2 \leq 0$$

olup t ye göre türev alınırsa

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -2xx'h - h'x^2$$

$$= -2x(-\sin y - hx)h - h'x^2$$

$$= 2xhsiny + 2h^2x^2 - h'x^2$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -h'x^2 + hf_1(t, x, y)$$

olarak elde edilir. Eğer bu denklemin t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^3V}{dt^3} &= 2x'hsiny + 2xh'siny + 2xhy' \cos y + 4hh'x^2 + 4xx'h^2 - h''x^2 \\ &- 2xx'h' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2(-siny - hx)hsiny + 2xh'siny + 2xh \cos y (x) + 4hh'x^2 \\ &+ 4xh^2(-siny - hx) - h''x^2 - 2xh'(-siny - hx) \end{aligned}$$

$$= (4h' - 6h^2)x \sin y - 2h \sin^2 y + (2h \cos y - 4h^3 + 6hh' - h'')x^2$$

$$\frac{d^3V}{dt^3} = -2h \sin^2 y + xf_2(t, x, y)$$

eğer bu denklemin t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d^4V}{dt^4} = 4h''x \sin y + 4h'x' \sin y + 4h'x'y' \cos y - 12hh'x \sin y$$

$$-6h^2x' \sin y - 6h^2xy' \cos y - 2h' \sin^2 y - 4hy' \sin y \cos^2 y + 4xx'h \cos y$$

$$+ 2h'x^2 \cos y - 2x^2hy' \sin y - 8xx'h^3 - 12x^2h^2h' + 12xx'hh' + 6(h')^2x^2 + 6hh''x^2$$

$$- 2xx'h'' - h'''x^2$$

$$= 4h''x \sin y + 4h' \sin y(-siny - hx) + 4h' \cos y(-siny - hx)x$$

$$-12hh'x \sin y - 6h^2 \sin y (-\sin y - hx) - 6h^2x(x) \cos y - 2h' \sin^2 y$$

$$-4hx \sin y \cos^2 y + 4xh \cos y (-\sin y - hx) + 2h'x^2 \cos y - 2x^3h \sin y$$

$$-8xh^3(-\sin y - hx) - 12x^2h^2h' + 12xhh'(-\sin y - hx) + 6(h')^2x^2$$

$$+6hh''x^2 - 2xh''(-\sin y - hx) - h'''x^2$$

$$\frac{d^4V}{dt^4} = -6h' \sin^2 y + 6h^2 \sin^2 y + xf_3(t, x, y)$$

olarak elde edilir (L. Jiang, 2005).

Böylece Yukarıdaki ifadeler Jiang (2005) tarafından ispatlanan teoremlerin hatalı olduğunu göstermektedir.

Şimdi

$$\frac{dx}{dt} = y - (1 - \cos t)h(t)x^3 \quad \frac{dy}{dt} = -x - (1 - \cos t)h(t)y^3 \quad (3.1.2)$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada

$$h(t) = \frac{(\tan ht + \sec ht)}{2}$$

dir.

$$V(t, x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım $V(t, 0, 0) = 0$ ve $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ için $V(t, x, y) > 0$ olduğu açıktır. Şimdi verilen Hahn fonksiyonunun inceleme altındaki sistem boyunca türevini alalım.

$$V'(t, x, y) = \frac{2xx' + 2yy'}{2}$$

$$V'(t, x, y) = x(y - (1 - \cos t)h(t)x^3) + y(-x - (1 - \cos t)h(t)y^3)$$

$$V'(t, x, y) = xy - x^4h(t)(1 - \cos t) - xy - y^4h(t)(1 - \cos t)$$

$$V'(t, x, y) = -h(t)(1 - \cos t)(x^4 + y^4)$$

olup $V'(t, x, y) \leq 0$ olduğu kolayca görülebilir. Bu da denklemin sıfır çözümünün kararlı olduğunu gösterir.

$$\frac{d^2V}{dt^2} = - \left[(1 - \cos t)'h(t)(x^4 + y^4) + (h(t)(x^4 + y^4))'(1 - \cos t) \right]$$

$$= - \left[\sin t h(t)(x^4 + y^4) + \left(h'(t)(x^4 + y^4) + (4x^3x' + 4y^3y')h(t) \right) (1 - \cos t) \right]$$

$$= -\sin t h(t)(x^4 + y^4) - h'(t)(x^4 + y^4)(1 - \cos t)$$

$$- (4x^3(y - (1 - \cos t)h(t)x^3) + 4y^3(-x - (1 - \cos t)h(t)y^3))h(t)(1 - \cos t)$$

$$= -\sin t h(t)(x^4 + y^4) - h'(t)(x^4 + y^4)(1 - \cos t) - 4x^3y h(t)(1 - \cos t)$$

$$+ 4x^6h^2(t)(1 - \cos t)^2 + 4y^3x h(t)(1 - \cos t) + 4y^6h^2(t)(1 - \cos t)^2$$

$$= -\sin t h(t)(x^4 + y^4) - h'(t)(x^4 + y^4)(1 - \cos t)$$

$$- 4xyh(1 - \cos t)(x^2 - y^2) + 4h^2(t)(1 - \cos t)^2(x^6 + y^6)$$

$$\begin{aligned}
&= -\sin t h(t)(x^4 + y^4) \\
&-(1 - \cos t) \left(h'(t)(x^4 + y^4) + 4xyh(x^2 - y^2) - 4h^2(t)(1 - \cos t)(x^6 + y^6) \right) \\
&= -h(t)\sin t(x^4 + y^4) - (1 - \cos t)\mathcal{L}(t, x, y) \\
&\frac{d^3V}{dt^3} = -h'(t)\sin t(x^4 + y^4) - h(t)\cos t(x^4 + y^4) \\
&-h(t)\sin t(4x^3x' + 4y^3y') - (1 - \cos t)'\mathcal{L}(t, x, y) - (1 - \cos t)\mathcal{L}'(t, x, y) \\
&= -h'(t)\sin t(x^4 + y^4) - h(t)\cos t(x^4 + y^4) - \\
&h(t)\sin t(4x^3(y - (1 - \cos t)h(t)x^3) + 4y^3(-x - (1 - \cos t)h(t)y^3)) - \\
&\sin t\mathcal{L}(t, x, y) - (1 - \cos t)\mathcal{L}'(t, x, y) \\
&= -h'(t)\sin t(x^4 + y^4) - h(t)\cos t(x^4 + y^4) - \\
&h(t)\sin t(4x^3y - 4x^6h(t)(1 - \cos t) - 4y^3x - 4y^6h(t)(1 - \cos t)) - \\
&\sin t\mathcal{L}(t, x, y) - (1 - \cos t)\mathcal{L}'(t, x, y) \\
&= -h'(t)\sin t(x^4 + y^4) - h(t)\cos t(x^4 + y^4) - 4x^3y h(t)\sin t + \\
&4x^6h^2(t)\sin t(1 - \cos t) + 4y^3x h(t)\sin t + \\
&4y^6h^2(t)\sin t(1 - \cos t) - \sin t\mathcal{L}(t, x, y) - (1 - \cos t)\mathcal{L}'(t, x, y) \\
&= -h'(t)\sin t(x^4 + y^4) - h(t)\cos t(x^4 + y^4) - 4xy h(t)\sin t(x^2 - y^2) + \\
&4h^2(t)\sin t(1 - \cos t)(x^6 + y^6) - \sin t\mathcal{L}(t, x, y) - (1 - \cos t)\mathcal{L}'(t, x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -h(t) \cos t (x^4 + y^4) - \sin t \mathcal{L}(t, x, y) - (1 - \cos t) \mathcal{L}'(t, x, y) - \\
&\sin t \left(h'(t)(x^4 + y^4) + 4xyh(x^2 - y^2) - 4h^2(t)(1 - \cos t)(x^6 + y^6) \right) \\
\frac{d^3V}{dt^3} &= -h(t) \cos t (x^4 + y^4) - 2 \sin t \mathcal{L}(t, x, y) - (1 - \cos t) \mathcal{L}'(t, x, y)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$(t, x, y) \in [0, +\infty) \times B_H$, $H < 1$ için

$$\mathcal{L}(t, x, y) = 4xyh(x^2 - y^2) - 4h^2(t)(1 - \cos t)(x^6 + y^6) + h'(t)(x^4 + y^4) \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(t, x, y)| &\leq |4xyh(x^2 - y^2)| + |4h^2(t)(1 - \cos t)(x^6 + y^6)| + |h'(t)(x^4 + y^4)| \\
&\leq 2(x^2 + y^2)|x^2 - y^2| + 10(x^4 + y^4) \\
&\leq 12(x^4 + y^4) \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

benzer şekilde

$$\left| \frac{d^3V}{dt^3} \right| < 800(x^4 + y^4)$$

olarak elde edebiliriz. Buda $\frac{d^3V}{dt^3}$ ün $[0, +\infty) \times B_H$ kümesi üzerinde sınırlı olduğunu gösterir. Böylece Teorem 3.1.1 in üçüncü şartı da sağlanır.

Yeterince küçük bir ε sayısı alalım ($\varepsilon = 10^{-3}$). Her $t \in [2k\pi - \varepsilon, 2k\pi + \varepsilon]$ için $k = 0, 1, \dots$

$$\left| \frac{d^3V}{dt^3} \right| = \left| -h(t) \cos t (x^4 + y^4) - 2 \sin t \mathcal{L}(t, x, y) - (1 - \cos t) \mathcal{L}'(t, x, y) \right|$$

$$\geq |h(t) \cos t (x^4 + y^4)| - 2|\sin t \mathcal{L}(t, x, y)| - |(1 - \cos t) \mathcal{L}'(t, x, y)|$$

$$\geq \frac{1}{4}(x^4 + y^4) \geq \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2$$

öte yandan her $t \in [2(k+1)\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon]$ için $k = 0, 1, \dots$

$$\left| \frac{dV}{dt} \right| = (1 - \cos t)h(t)(x^4 + y^4) > \left(\frac{1 - \cos \varepsilon}{4} \right) (x^4 + y^4)$$

buradan

$$\left| \frac{dV}{dt} \right| \geq \left(\frac{1 - \cos \varepsilon}{8} \right) (x^2 + y^2)^2$$

olur.

$t > 0$ için

$$\left| \frac{dV}{dt} \right| + \left| \frac{d^2V}{dt^2} \right| + \left| \frac{d^3V}{dt^3} \right| \geq \left| \frac{d^3V}{dt^3} \right| + \left| \frac{dV}{dt} \right| \geq \left(\frac{1 - \cos \varepsilon}{8} \right) (x^2 + y^2)^2 = \psi((x^2 + y^2))^{\frac{1}{2}}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\psi(\xi) = \frac{(1 - \cos \varepsilon)\xi^4}{8}$$

bir Hahn fonksiyonudur. Böylece Teorem 3.1.1 in dört şartının tamamı sağlandı. Bu takdirde denklemin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır (Gao ve Zhang, 2008).

4. YÜKSEK BASAMAKTAN LİNER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜMLERİN BAZI DAVRANIŞLARI VE LIAPUNOV FONKSİYONUNUN OLUŞTURULMASI

Bu bölümde sırasıyla Antosiewicz (1954), Sinha (1980) ,Lu ve Liao (2000) tarafından verilen sonuçlar sırasıyla verilecektir.

4.1. İkinci Basamaktan Lineer Olmayan Bir Diferansiyel Denklem İçin Bazı Sınırlılık Sonuçları

$$x'' + \phi(x, x')x' + h(x) = e(t) \quad (4.1.1)$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $\phi(x, x')$ ve $h(x)$ fonksiyonları bağlı buldukları değişkenlere göre yeterince düzgün fonksiyonlardır. $e(t)$ ise her $t \geq 0$ için sürekli bir fonksiyondur. Bu fonksiyonların söz konusu denklemin çözümlerinin varlığını ve tekliğini sağlayacak şekilde verildikleri varsayılmaktadır. Bu türden diferansiyel denklemler daha önceden bir çok araştırmacı tarafından çalışıldı.

Teorem 4.1.1.

Her x, x' için $\phi(x, x') \geq 0$; her $x \neq 0$ için $H(x) = \int_0^x h(u)du > 0$; $|x| \rightarrow \infty$ için $H(x) \rightarrow \infty$ ve $\int_0^\infty |e(t)|dt < \infty$ olsun. Bu takdirde $t \rightarrow \infty$ için $|x(t)| < C_1$ ve $|x'(t)| < C_2$ olur. ($C_i = C_i(x_0, x'_0)$), x_0, x'_0 değerleri başlangıç değerleridir (H. A. Antosiewicz, 1954).

İspat. (4.1.1) denklemini aşağıdaki sistem gibi ifade edilebilir:

$$x' = y, \quad y' = -\phi(x, x')y - h(x) + e(t) \quad (4.1.2)$$

$$V(x, y) = \sqrt{y^2 + 2H(x)} \quad (4.1.3)$$

Liapunov fonksiyonunu göz önüne alalım. Açıkça her $(x, y) \neq (0,0)$ için $V(x, y) > 0$ olur. Ayrıca $|x| \rightarrow \infty$ için $H(x) \rightarrow \infty$ olur. $V(x, y) < C$ olması $|x| < C_1$, $|y| < C_2$ olmasını gerektirir. Şimdi $t \rightarrow \infty$ için $V(x, y)$ in (4.1.2) denkleminde ait tüm yörüngelerinde sınırlı kaldığını göstermemiz gerekir. (4.1.2) denkleminin yörüngesi boyunca

$$V(x, y) \frac{dV(x, y)}{dt} = -y^2 \phi(x, x') + ye(t) \quad (4.1.4)$$

denklemini bulmak istiyoruz. Bu yüzden her x, y için $\phi(x, x') \geq 0$ eşitsizliğini kullanarak

$$V(x, y) \frac{dV(x, y)}{dt} \leq |y| |e(t)| \leq (|y| + \sqrt{2H(x)}) |e(t)| \quad (4.1.5)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $|y| + \sqrt{2H(x)} \leq \sqrt{2}V(x, y)$ olup, Couchy eşitsizliğinden,

$$\frac{dV(x, y)}{dt} \leq \sqrt{2} |e(t)| \quad (4.1.6)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer bu eşitsizliğin $[t_0, t]$ boyunca integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$V(x, y) - V(x_0, y_0) \leq \sqrt{2} \int_{t_0}^t |e(s)| ds \leq \sqrt{2} \int_0^t |e(s)| ds \quad (4.1.7)$$

Burada (x_0, y_0) $t = t_0 \geq 0$ da başlayan belirli yörüngede göz önüne alınan noktalarıdır. Çünkü hipoteze göre (4.1.7) nin integrali $t \rightarrow \infty$ için yakınsaktır. (4.1.7) eşitsizliğinden her $t \geq t_0 \geq 0$ için $V(x, y) < C$ sonucunu alırız. Açıkça Teorem 4.1.1 in varsayımlarına göre $\phi(x, x')$ x' de lineer olduğunda her x, x' için $\phi(x, x') \geq 0$ sağlanamaz. Böylece

$$x'' + (f(x) + g(x)x')x' + h(x) = e(t) \quad (4.1.8)$$

denklemini (4.1.1) denkleminin özel bir durumu olarak göz önüne alınmalıdır.

$$x' = \frac{(y - b(x))}{\alpha(x)}, y' = \alpha(x)(h(x) - e(x)) \quad (4.1.9)$$

sistemi ile (4.1.8) in yerine uygun denklemini bulacağız. Burada

$$\alpha(x) = \exp\left(\int_0^x g(u)du\right), b(x) = \int_0^x \alpha(u)f(u)du \quad (4.1.10)$$

bu yer değiştirme (ilk olarak Antosiewicz (1954) de tanımlanan), Lienard genelinde iyi bilinen bir yer değiştirmedir. Belli ki (4.1.9) un bir yörüngesi (4.1.8) in tek bir çözümüne uygundur.

Teorem 4.1.2.

Eğer her x , $b(x)h(x) \geq 0$ için $\alpha(x) \leq \beta$ ($\beta \geq 1$) ve her $x \neq 0$, $|x|$ ile $H^*(x) \rightarrow \infty$ ve $\int_0^\infty |e(t)|dt < \infty$ için $H^*(x) = \int_0^x \alpha^2(u)h(u)du > 0$ ise o zaman (4.1.8) in her çözümü $t \rightarrow \infty$ için $|x(t)| < C_1$ ve $|x'(t)| < C_2$ sağlar (H. A. Antosiewicz, 1954).

Teorem 4.1.2 nin ispatı Teorem 4.1.1 in ispatına çok benzer olup $t \rightarrow \infty$ için $|x(t)| < C_1$ ve $|x'(t)| < C_2$ sağlar.

$$W(x, y) = \sqrt{y^2 + 2H^*(x)} \quad (4.1.11)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $W(x, y)$ in yukarıdaki $V(x, y)$ fonksiyonu ile aynı özelliklere sahip olduğu açık bir şekilde görünüyor. $t \rightarrow \infty$ için (4.1.9) un her yörüngesinde sınırlı kalır. Böylece

$$W(x, y) = \frac{dW(x, y)}{dt} = -\alpha(x)b(x)h(x) + \alpha(x)ye(t) \quad (4.1.12)$$

denklemini yazabiliriz.

$$W(x, y) \leq \frac{dW(x, y)}{dt} \leq \alpha(x)|y||e(t)| \leq \beta \left(|y| + \sqrt{2H^*(x)} \right) |e(t)| \quad (4.1.13)$$

olup buradan öncekilere benzer olarak

$$\frac{dW(x, y)}{dt} \leq \sqrt{2}|e(t)| \quad (4.1.14)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer bu eşitsizliğin $[t_0, t]$ boyunca integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$W(x, y) - W(x_0, y_0) \leq \beta\sqrt{2} \int_{t_0}^t |e(s)| ds \leq \beta\sqrt{2} \int_0^t |e(s)| ds \quad (4.1.15)$$

bu eşitsizlik ise hipotezimizden dolayı her $t \geq t_0 \geq 0$ için $W(x, y) < C$ olmasını gerektirir.

$$x'' + f(x)x' + h(x) = e(t) \quad (4.1.16)$$

denklemini (4.1.1) ve (4.1.8) denklemlerinin özel bir durumudur. Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2 aşağıdaki hipotezlere uyum sağlar.

Eğer her x için ya $f(x) \geq 0$ ya da $x \neq 0$ için $h(x) \int_0^x f(u) du \geq 0$ ve her $x \neq 0$, $H(x) \rightarrow \infty$ ile $|x|$ ve $\int_0^\infty |e(t)| dt < \infty$ için $H(x) = \int_0^x f(u) du > 0$ olursa o zaman (4.1.16) denkleminin $t \rightarrow \infty$ için her çözümü $|x(t)| < C_1$ ve $|x'(t)| < C_2$ sağlar.

Eğer $e(t) \equiv 0$ olursa yukarıdaki sonuçlar denklemlerin sırasıyla $x(t) = 0$ ve $x'(t) = 0$ çözümlerinin Liapunov kararlılığını gerektirir.

4.2. Büyük Ölçekli Sistemlerin Bir Sınıfı İçin Liapunov Fonksiyonları

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n) + p_i(t)x_i + \sum_{j=1}^n e_{ij}h_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2.1)$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $p_i(t)$ ve $h_{ij}(t)$ tüm $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, n$ için sınırlı sürekli fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar aşağıdaki şartları sağlamaktadır:

$$(i) \forall i \text{ için } p_i(t) \neq 0$$

$$(ii) 2 \int_0^t p_i(s)ds = R_i(t) + Q_i(t)$$

$\forall i$ için $|Q_i(t)| < C_i$, C_i ler sabitler, $R_i(t) < 0$ veya $R_i(t) > 0$ dir.

$R_i(t) < 0$ veya $R_i(t) > 0$ olması (4.2.1) sisteminin asimptotik kararlı veya kararsız olmasına bağlıdır.

(iii) $f_i(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonları bileşenlerine göre birinci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca,

$$f_1(0, x_2, \dots, x_n) = 0; f_2(x_1, 0, \dots, x_n) = 0, \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = 0 \text{ dir.}$$

Yukarıdaki (4.2.1) sistemi açık biçimde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) + p_1(t)x_1 + \sum_{j=1}^n e_{1j}h_{1j}(t)x_j$$

$$x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) + p_1(t)x_1 + e_{11}h_{11}(t)x_1 + e_{12}h_{12}(t)x_2 + \dots + e_{1n}h_{1n}(t)x_n$$

$$\begin{aligned}
x_2' &= f_2(x_1, \dots, x_n) + p_2(t)x_2 + \sum_{j=1}^n e_{2j}h_{2j}(t)x_j \\
&= f_2(x_1, \dots, x_n) + p_2(t)x_2 + e_{21}h_{21}(t)x_1 + e_{22}h_{22}(t)x_2 + \dots + e_{2n}h_{2n}(t)x_n \\
&\vdots \\
x_n' &= f_n(x_1, \dots, x_n) + p_n(t)x_n + e_{n1}h_{n1}(t)x_1 + e_{n2}h_{n2}(t)x_2 + \dots + e_{nn}h_{nn}(t)x_n
\end{aligned}$$

4.3. Özel Durumlar İçin Asimptotik Kararlılık Sonuçları

$$v_i(x_i, t) = A_i(t)x_i^2 \quad (4.3.1)$$

Liapunov fonksiyonunu göz önüne alalım. $A_i(t)$ katsayıları birinci mertebeden sürekli türevlenebilir. (4.3.1) ile verilen Liapunov fonksiyonunun bu sistem boyunca t bağımsız değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
V_i'(x_i, t) &= \frac{dA_i(t)}{dt}x_i^2 + A_i(t) \cdot 2x_i \cdot \frac{dx_i}{dt} \\
&= \frac{dA_i(t)}{dt}x_i^2 + A_i(t) \cdot 2x_i \left(f_i(x_1, \dots, x_n) + p_i(t)x_i + \sum_{j=1}^n e_{ij}h_{ij}(t)x_j \right) \\
V_i'(x_i, t) &= \left(\frac{dA_i(t)}{dt} + 2p_iA_i(t) \right) \cdot x_i^2 + 2A_i(t) \cdot x_i f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (4.3.2)
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

$$\frac{dA_i(t)}{dt} + 2p_i(t)A_i(t) = B_i(t) \quad (4.3.3)$$

burada $A_i(t)$ ve $B_i(t)$ bilinmeyenlerdir. Daha sonradan belirlenecektir.

(4.3.3) diferansiyel denklemini çözdüğümüzde

$$A_i(t) = \left[A_i(0) + \int_0^t B_i(\tau) e^{2 \int b p_i(s) ds} d\tau \right] e^{-2 \int b p_i(s) ds}$$

burada (ii) şartından dolayı

$$A_i(t) = \left[A_i(0) + \int_0^t B_i(\tau) e^{R_i(\tau) + Q_i(\tau)} d\tau \right] \cdot e^{-R_i(\tau) - Q_i(\tau)} \quad (4.3.4)$$

elde edilir.

Şimdi

$$B_i(\tau) = b_i e^{-Q_i(\tau)} R_i'(\tau) \quad (4.3.5)$$

eşitliğini göz önüne alalım, $b_i > 0$ dır. Bu ifadeyi (4.3.4) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} A_i(t) &= \left[A_i(0) + \int_0^t b_i e^{-Q_i(\tau)} R_i'(\tau) e^{R_i(\tau) + Q_i(\tau)} d\tau \right] \cdot e^{-R_i(t) - Q_i(t)} \\ &= \left[A_i(0) + \int_0^t b_i e^{R_i(\tau)} R_i'(\tau) d\tau \right] \cdot e^{-R_i(t) - Q_i(t)} \\ &= [A_i(0) - b_i e^{R_i(0)} + b_i e^{R_i(t)}] \cdot e^{-R_i(t) - Q_i(t)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$A_i(0) = b_i e^{R_i(0)} \quad (4.3.6)$$

olmak üzere

$$A_i(t) = b_i e^{-Q_i(t)} \quad (4.3.7)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (4.3.1) ile verilen Liapunov fonksiyonu

$$V(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{i=1}^n b_i e^{-Q_i(t)} x_i^2 \quad (4.3.8)$$

halini alır. Bu fonksiyon ise pozitif tanımlıdır. Çünkü

$$V(0, 0, \dots, 0, t) = 0$$

b_i 'ler pozitif sabitler olup $|Q_i(t)| < C_i$ ve $b_i e^{-Q_i(t)}$ sınırlıdır. (4.3.8) denkleminin türevi alındığında:

$$\begin{aligned} V'(x_1, \dots, x_n, t) &= -b_1 Q_1'(t) e^{-Q_1(t)} x_1^2 - b_2 Q_2'(t) e^{-Q_2(t)} x_2^2 + \dots \\ &+ b_n Q_n'(t) e^{-Q_n(t)} x_n^2 + 2b_1 e^{-Q_1(t)} x_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + 2b_2 e^{-Q_2(t)} x_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots \\ &+ 2b_n e^{-Q_n(t)} x_n \cdot \frac{dx_n}{dt} \end{aligned}$$

ayrıca,

$$2 \int_0^t p_i(s) ds = R_i(t) + Q_i(t)$$

olup

$$Q_i'(t) = 2p_i(t) - R_i'(t) \text{ dir.}$$

Böylece

$$V'(x_1, \dots, x_n, t) = b_1 e^{-Q_1(t)} R_1'(t) x_1^2 + b_2 e^{-Q_2(t)} R_2'(t) x_2^2 + \dots +$$

$$\begin{aligned}
& b_n e^{-Q_n(t)} R'_n(t) x_n^2 - 2b_1 e^{-Q_1(t)} x_1^2 p_1 - 2b_2 e^{-Q_2(t)} x_2^2 p_2 - \dots - \\
& 2b_n e^{-Q_n(t)} x_n^2 p_n + 2b_1 e^{-Q_1(t)} x_1 (f_1 + p_1 x_1) + 2b_2 e^{-Q_2(t)} x_2 (f_2 + p_2 x_2) + \dots + \\
& 2b_n e^{-Q_n(t)} x_n (f_n + p_n x_n) \\
& = b_1 e^{-Q_1(t)} R'_1(t) x_1^2 + b_2 e^{-Q_2(t)} R'_2(t) x_2^2 + \dots + b_n e^{-Q_n(t)} R'_n(t) x_n^2 \\
& + 2b_1 e^{-Q_1(t)} x_1 \cdot f_1 + 2b_2 e^{-Q_2(t)} x_2 \cdot f_2 + \dots + 2b_n e^{-Q_n(t)} x_n \cdot f_n \tag{4.3.9}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

(4.3.9) denklemi sonuç olarak (iii) şartından dolayı aşağıdaki gibi kullanılır. Eğer $\forall i$ için $R_i(t) < 0$ ve $|Q_i(t)| < C_i$ olup orijinin bir komşuluğunda

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} < 0, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} < 0$$

ise açıkça

$$V'(x_1, \dots, x_n, t) < 0$$

dir.

Uyarı 4.3.1.

Eğer $\forall i$ için $R_i(t) > 0$ ve $|Q_i(t)| < C_1$ ve ayrıca eğer orijinin bir komşuluğunda

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \geq 0, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \geq 0 \text{ ise}$$

$$V'(x_1, \dots, x_n, t) > 0 \text{ dir.}$$

Buda orijinin kararsızlığını gösterir. Eğer $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ orijinin bir komşuluğunda pozitif ve negatif değerleri alabiliyorsa sistem kararlı ya da kararsız olabilir.

Bir önceki sonuçlar aşağıdaki teoremle ifade edilmektedir:

Teorem 4.3.2.

Varsayalım ki yukarıda verilen (i), (ii) ve (iii) şartları sağlanmaktadır. Eğer $\forall i$ için $R_i(t) < 0$, $|Q_i(t)| < C_1$ ve orjinin bir komşuluğunda

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \leq 0, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \leq 0$$

oluyorsa bu takdirde

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n) + p_i(t) x_i \quad (4.3.10)$$

sistemi asimptotik kararlıdır (A. S. C. Sinha, 1980).

Şimdi ise

$$x' = f(x, y) + p_1(t)x + r(t)y,$$

$$y' = g(x, y) + s(t)x + p_2(t)y \quad (4.3.11)$$

sistemini göz önüne alalım. Bu sistem (4.2.1) sisteminin bir alt sistemidir. Kabul edelim ki (i), (ii) ve (iii) şartları sağlanmaktadır ve ayrıca sınırlı fonksiyonlardır.

Bu sistem için Liapunov fonksiyon olarak

$$V(x, y, t) = b_1 e^{-Q_1(t)} x^2 + b_2 e^{-Q_2(t)} y^2 \quad (4.3.12)$$

fonksiyonu göz önüne alınmaktadır. Burada

$$2 \int_0^t p_1(s) ds = R_1(t) + Q_1(t)$$

$$2 \int_0^t p_2(s) ds = R_2(t) + Q_2(t)$$

dir.

Yukarıdaki Liapunov fonksiyonunun (4.2.1) sistemi boyunca t'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} V'(x, y, t) &= -b_1 Q_1'(t) e^{-Q_1(t)} x^2 - b_2 Q_2'(t) e^{-Q_2(t)} y^2 + 2b_1 e^{-Q_1(t)} x x' \\ &+ 2b_2 e^{-Q_2(t)} y y' \\ &= b_1 R_1'(t) e^{-Q_1(t)} x^2 + b_2 R_2'(t) e^{-Q_2(t)} y^2 + 2b_1 e^{-Q_1(t)} x (f(x, y) + p_1(t)x + r(t)y) \\ &+ 2b_2 e^{-Q_2(t)} y (g(x, y) + s(t)x + p_2(t)y) \\ &= b_1 R_1'(t) e^{-Q_1(t)} x^2 + b_2 R_2'(t) e^{-Q_2(t)} y^2 + 2[r(t)b_1 e^{-Q_1(t)} + s(t)b_2 e^{-Q_2(t)}] xy \\ &+ 2b_1 e^{-Q_1(t)} f(x, y)x + 2b_2 e^{-Q_2(t)} g(x, y)y \\ V'(x, y, t) &= 2b_1 e^{-Q_1(t)} f(x, y)x + 2b_2 e^{-Q_2(t)} g(x, y)y - W_1 \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} W_1 &= -b_1 R_1'(t) e^{-Q_1(t)} x^2 - 2[r(t)b_1 e^{-Q_1(t)} + s(t)b_2 e^{-Q_2(t)}] xy \\ &- b_2 R_2'(t) e^{-Q_2(t)} y^2 \end{aligned}$$

W_1 bir kare form belirtir ve bu kare form aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$W_1 = [x, y] \begin{bmatrix} -b_1 R_1'(t) e^{-Q_1(t)} & -r(t) b_1 e^{-Q_1(t)} + s(t) b_2 e^{-Q_2(t)} \\ -r(t) b_1 e^{-Q_1(t)} + s(t) b_2 e^{-Q_2(t)} & -b_2 R_2'(t) e^{-Q_2(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Teorem 4.3.3

Eğer aşağıdaki şartlar sağlanır ve $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} < 0$ oluyorsa o zaman her (t) için $V' < 0$ dır (A. S. C. Sinha, 1980).

$$(i) -b_1 e^{-Q_1(t)} |R_1'(t)| > 0$$

$$(ii) b_1 b_2 e^{-Q_1(t)-Q_2(t)} R_1'(t) R_2'(t) - K^2(t) > 0$$

burada

$$K(t) = r(t) b_1 e^{-Q_1(t)} + s(t) b_2 e^{-Q_2(t)} \text{ dir.}$$

Böylece teorem yardımıyla W_1 in pozitif tanımlı olduğunu söyleyebiliriz. Yani $W_1 \geq 0$ olduğu sonucunu elde edebiliriz.

$$\frac{d}{dx} V(x, y, t) \leq 2b_1 e^{-Q_1(t)} f(x, y) x + 2b_2 e^{-Q_2(t)} g(x, y) y$$

$$\frac{d}{dx} V(x, y, t) \leq W_2$$

olup

$$W_2 = 2b_1 e^{-Q_1(t)} f(x, y) x + 2b_2 e^{-Q_2(t)} g(x, y) y \text{ dir.}$$

Şu gerçeikle $f(0, y) = 0$, $g(x, 0) = 0$ ve türev için genelleştirilmiş ortalama değer teoreminden

$$W_2 = 2b_1 e^{-Q_1(t)} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} x^2 + 2b_2 e^{-Q_2(t)} \frac{g(x,y) - g(x,0)}{y} y^2$$

$$= 2b_1 e^{-Q_1(t)} f_x(\theta_1 x, y) x^2 + 2b_2 e^{-Q_2(t)} g_x(x, \theta_2 y) y^2,$$

$$0 \leq \theta_1 \leq 1, 0 \leq \theta_2 \leq 1$$

$f_x(x, y) \leq 0$ ve $g_x(x, y) \leq 0$ varsayımlarını kullanırsak $W_2 \leq 0$ olduğunu görebiliriz.

Bu gerçeyle aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\frac{d}{dx} V(x, y, t) \leq 0$$

yani $V'(x, y, t) \leq 0$ dır.

4.4. Dördüncü Basamaktan Lineer olmayan Denklem Sistemlerinin Bir Sınıfı İçin Çözümlerin Kararlılığı

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + A \frac{d^3 x}{dt^3} + B \frac{d^2 x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + D \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x \right)^m = 0 \quad (4.4.1)$$

denklem sistemini göz önüne alalım. Burada A,B,C ve D sayıları reel sabit sayılar ve $m > 1$ olup bir tek sayıdır. (4.4.1) denklem sistemi aşağıdaki denklem sistemine denktir.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \frac{dx_3}{dt} = x_4$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -Ax_4 - Bx_3 - Cx_2 - D(x_3 + x_2 + x_1)^m$$

$$= -g(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (4.4.2)$$

Lineer olmayan otonom sistemi için genel Liapunov fonksiyonunun integral metodu yoluyla aşağıdaki adımları kullanarak bir Liapunov fonksiyonu oluşturacağız.

1.Adım

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = h_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_3$$

$$= \int Dm(x_3 + x_2 + x_1)^{m-1} dx_3 = D(x_3 + x_2 + x_1)^m$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = h_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int \frac{\partial}{\partial x_2} g(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_3$$

$$= \int [C + Dm(x_3 + x_2 + x_1)^{m-1}] dx_3 = Cx_3 + D(x_3 + x_2 + x_1)^m$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_3} = g(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ax_4 + Bx_3 + Cx_2 + D(x_3 + x_2 + x_1)^m$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_4} = x_4 + h_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= x_4 + \int \frac{\partial}{\partial x_4} g(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_3$$

$$= x_4 + \int A dx_3$$

$$= x_4 + Ax_3$$

burada H, h_i ($i = 1,2,3,4$) Jiang (2005) deki gibi tanımlanmaktadır.

2.Adım.

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial H}{\partial x_1} + f_1 = D(x_3 + x_2 + x_1)^m + f_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial H}{\partial x_2} + f_2 = Cx_3 + D(x_3 + x_2 + x_1)^m + f_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = \frac{\partial H}{\partial x_3} + f_3 = Ax_4 + Bx_3 + Cx_2 + D(x_3 + x_2 + x_1)^m + f_3$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_4} = \frac{\partial H}{\partial x_4} + f_4 = x_4 + Ax_3 + f_4$$

burada f_i ler bilinmeyen fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ bağıntısıyla belirlenecektir. V Jiang (2005) deki gibi tanımlanmaktadır.

3.Adım.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_2 &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_4} \cdot \frac{dx_4}{dt} \\ &= [D(x_3 + x_2 + x_1)^m + f_1]x_2 + [Cx_3 + D(x_3 + x_2 + x_1)^m + f_2]x_3 + \\ &\quad [Ax_4 + Bx_3 + Cx_2 + D(x_3 + x_2 + x_1)^m + f_3]x_4 \\ &\quad + [x_4 + Ax_3 + f_4][-Ax_4 - Bx_3 - Cx_2 - D(x_3 + x_2 + x_1)^m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, \quad f_2 = (B + C)x_2 + Ax_3 + x_4, \quad f_3 = Ax_2 + (A - 1)x_3 - (A - 1)x_4 \\ f_4 &= x_2 - (A - 1)x_3 \quad \text{olarak alınır} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_2 = -[Cx_2^2 + (B - C - A)x_3^2 + (A - 1)x_4^2] \quad (4.4.3)$$

denklemini elde ederiz.

4.Adım

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, 0, 0, 0) dx_1 + \int_0^{x_2} \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2, 0, 0) dx_2 + \\ &\int_0^{x_3} \frac{\partial V}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, 0) dx_3 + \int_0^{x_4} \frac{\partial V}{\partial x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_4 \\ &= \int_0^{x_1} Dx_1^m dx_1 + \int_0^{x_2} [D(x_1 + x_2)^m + (B + C)x_2] dx_2 \\ &+ \int_0^{x_3} [Bx_3 + Cx_2 + D(x_3 + x_2 + x_1)^m + Ax_2 + (A - 1)x_3] dx_3 \\ &+ \int_0^{x_4} [x_4 + Ax_3 + x_2 - (A - 1)x_3] dx_4 \\ &= \left[\frac{D}{m+1} x_1^{m+1} \right] \Big|_0^{x_1} + \left[\frac{D}{m+1} (x_1 + x_2)^{m+1} + \frac{1}{2} (B + C)x_2^2 \right] \Big|_0^{x_2} + \\ &\left[\frac{1}{2} Bx_3^2 + Cx_2x_3 + \frac{D}{m+1} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)^{m+1} + Ax_2x_3 + \frac{1}{2} (A - 1)x_3^2 \right] \Big|_0^{x_3} \\ &+ \left[\frac{1}{2} x_4^2 + Ax_3x_4 + x_2x_4 - (A - 1)x_3x_4 \right] \Big|_0^{x_4} \\ &= \frac{D}{m+1} \cdot x_1^{m+1} + \left[\frac{D}{m+1} \cdot (x_1 + x_2)^{m+1} + \frac{1}{2} (B + C)x_2^2 \right] - \left[\frac{D}{m+1} \cdot x_1^{m+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{2} B x_3^2 + C x_2 x_3 + \frac{D}{m+1} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)^{m+1} + A x_2 x_3 + \frac{1}{2} (A-1) x_3^2 \right] \\
& - \left[\frac{D}{m+1} \cdot (x_1 + x_2)^{m+1} \right] + \frac{1}{2} x_4^2 + A x_3 x_4 + x_2 x_4 - A x_3 x_4 + x_3 x_4 \\
& = \frac{D}{m+1} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)^{m+1} + \frac{1}{2} x_4^2 + \frac{1}{2} (A+B-1) x_3^2 + \frac{1}{2} (B+C) x_2^2 + x_4 x_3 \\
& + x_4 x_2 + (A+C) x_3 x_2
\end{aligned}$$

$$V = \frac{D}{m+1} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)^{m+1} + U(x_4, x_3, x_2) \quad (4.4.4)$$

burada

$$\begin{aligned}
U(x_4, x_3, x_2) &= \frac{1}{2} x_4^2 + \frac{1}{2} (A+B-1) x_3^2 + \frac{1}{2} (B+C) x_2^2 + x_4 x_3 \\
&+ x_4 x_2 + (A+C) x_3 x_2 \quad \text{dir.}
\end{aligned}$$

Teorem 4.4.1.

Eğer (4.4.1) denklemi aşağıdaki şartları sağlarsa o zaman bu denklemin sıfır çözümü kararlıdır (A. S. C. Sinha, 1980).

$$A \geq 1, \quad B \geq A + C, \quad C > 0, \quad D > 0$$

İspat. Öncelikle (4.4.4) denkleminde Liapunov fonksiyonun pozitif tanımlı olduğunu göstereceğiz.

$$\frac{D}{m+1} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)^{m+1} \geq 0$$

yalnızca

$$U(x_4, x_3, x_2) = \frac{1}{2}x_4^2 + \frac{1}{2}(A + B - 1)x_3^2 + \frac{1}{2}(B + C)x_2^2 +$$

$$x_4x_3 + x_4x_2 + (A + C)x_3x_2$$

için quadratic formun pozitif tanımlı olduğunu göstermeye ihtiyacımız var.

$$U(x_4, x_3, x_2) = \frac{1}{2}x_4^2 + \frac{1}{2}(A + B - 1)x_3^2 + \frac{1}{2}(B + C)x_2^2 +$$

$$x_4x_3 + x_4x_2 + (A + C)x_3x_2$$

denkleminin quadratic formunun katsayılar determinanı aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(A + B - 1) & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(A + C) & \frac{1}{2}(B + C) \end{vmatrix}$$

bu determinantın başlıca minörlerinin

$$\frac{1}{2} > 0, \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(A + B - 1) \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(A + B - 2) > 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(A + B - 1) & \frac{1}{2}(A + C) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(A + C) & \frac{1}{2}(B + C) \end{vmatrix} = \frac{1}{8}[(A + B - 2)(B + C - 1) - (A + C - 1)^2] > 0$$

olduğu kolayca görülüyor. Gerçekten $A \geq 1, B \geq A + C$ ve $C > 0$ dan $A + B - 2 \geq A + C - 1 \geq C > 0$ ve $B + C - 1 \geq A + C + C - 1 > A + C - 1 > 0$ eşitsizliklerini elde ederiz. Bundan dolayı

$$(A + B - 2)(B + C - 1) > (A + C - 1)^2$$

yazılır. Ayrıca

$$U(x_4, x_3, x_2) = \frac{1}{2}x_4^2 + \frac{1}{2}(A + B - 1)x_3^2 + \frac{1}{2}(B + C)x_2^2 + x_4x_3 + x_4x_2 + (A + C)x_3x_2$$

denkleminin quadratik formu pozitif tanımlıdır. Böylece (4.4.4) deki Liapunov fonksiyonunun da pozitif tanımlı olduğu söylenebilir.

Şimdi ise (4.4.2) denklemi boyunca $V(x_1, x_2, x_3, x_4)$ fonksiyonunun t ye göre türevinin negatif fonksiyon olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_2 &= D(x_1 + x_2 + x_3)^m(x'_3 + x'_2 + x'_1) + x_4x'_4 + (A + B - 1)x_3x'_3 + \\ &(B + C)x_2x'_2 + x'_4x_3 + x_4x'_3 + x'_4x_2 + x_4x'_2 + (A + C)(x'_3x_2 + x_3x'_2) \\ &= D(x_1 + x_2 + x_3)^m(x_4 + x_3 + x_2) + x'_4(x_4 + x_3 + x_2) + \\ &x'_3[(A + B - 1)x_3 + x_4 + (A + C)x_2] + x'_2[(B + C)x_2 + x_4 + (A + C)x_3] \\ &= D(x_1 + x_2 + x_3)^m(x_4 + x_3 + x_2) + \\ &[-Ax_4 - Bx_3 - Cx_2 - D(x_1 + x_2 + x_3)^m](x_4 + x_3 + x_2) \\ &+ x_4[(A + B - 1)x_3 + x_4 + (A + C)x_2] + x_3[(B + C)x_2 + x_4 + (A + C)x_3] \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_2 = -[Cx_2^2 + (B - C - A)x_3^2 + (A - 1)x_4^2]$$

teoremin şartlarından,

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_2 = -[Cx_2^2 + (B - C - A)x_3^2 + (A - 1)x_4^2]$$

fonksiyonunun negatif bir fonksiyon olduğunu kolayca görebiliriz. Sabit hareket üzerindeki Liapunov'un kararlılık teoreminden dolayı (4.4.2) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır. Böylece (4.4.1) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olduğu elde edilir.

KAYNAKLAR

- Antosiewicz, H. A., 1955. On non-linear differential equations of the second order with integrable forcing term. *J. London Math. Soc.*, **30**: 64-67.
- Barbasin, E. A., Krasovskii, N. N., 1954. On the existence of Lyapunov functions in the case of asymptotic stability in the large. (*Russian*) *Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh.*, **18**.
- Barbasin, E. A., Krasovskii, N. N., 1952. On stability of motion in the large. (*Russian*) *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, **86**: 453-456.
- Bellman, R., 1943. The stability of solutions of linear differential equations. *Duke Math. J.*, **10**: 643-647.
- Braun, M., 1993. Differential equations and their applications. *An introduction to applied mathematics. Fourth edition.*, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York.
- Gao, B., Zhang, W., 2008. A weaker criterion of asymptotic stability. *Comput. Math. Appl.*, no. 7, pp. 1693-1698.
- Hale, J. K., 1980. Ordinary differential equations. Second edition. *Robert E. Krieger Publishing Co., Inc.*, Huntington, N.Y.
- Ignatyev, A. O., 1997. On the stability of equilibrium for almost periodic systems. *Nonlinear Anal.*, **29**, no. 8, pp. 957-962.
- Ignatyev, A. O., 1999. On the asymptotic stability in functional-differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**, no. 6, pp. 1753-1760.
- Ignatyev, A. O., 2002. On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **268**, no. 2, pp. 615-628.
- Ignatyev, A. O., 2004. On the stability of the zero solution of an almost periodic system of finite-difference equations. (*Russian*) *Differ. Uravn.*, **40**(1): 105-110.
- Ignatyev, A. O., 2005. Investigation of stability using Lyapunov functions with constant signs. (*Russian*) *Ukr. Mat. Visn.*, **2**: 77-86

- Ignatyev, A. O., Oleksiy, A., 2006. On the stability in periodic and almost periodic difference systems. *J. Math. Anal. Appl.*, **313**, no. 2, pp. 678-688.
- Jiang, L., 2005. On the asymptotic stability of equilibrium. *J. Math. Anal. Appl.*, no. 2, pp. 378-383.
- Lu, D. Liao, Z., 2000. Stability of solution for a class of the fourth order nonlinear autonomous systems. *Differential equations and computational simulations.*, pp. 254-258.
- Massera, J. L., 1956. Contributions to stability theory. *Ann. of Math. (2)*, **64**: 182-206.
- Persidskii, K. P., 1946. On the theory of stability of solutions of differential equations. (*Russian*) *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, **1**: 250-255.
- Rouche, N., Habets, P., Laloy, M., 1977. Stability theory by Liapunov's direct method. *Applied Mathematical Sciences.*, vol. 22, Springer-Verlag, New York-Heidelberg.
- Siljak, D., 1972. Stability of large-scale systems under structural perturbations. *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernet. SMC-2.*, pp. 657-663.
- Sinha, A. S. C., 1980. Lyapunov functions for a class of large-scale systems. *Trans. Automat. Control.*, **25**, no. 3, pp. 558-560.
- Walker, J. A., Clark, L. G., 1965. An integral method of Liapunov function generation for nonlinear autonomous systems. *Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech.*, **32**: 569-575.
- Yoshizawa, T., 1966. Stability theory by Liapunov's second method. *Publications of the Mathematical Society of Japan.*, no. 9, The Mathematical Society of Japan, Tokyo.
- Yoshizawa, T., 1975. Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions. *Applied Mathematical Sciences.*, vol. 14, Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

ÖZ GEÇMİŞ

1984 yılında Adıyaman'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adıyaman'da tamamladı. 2002 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı ve 2007 yılında bölüm birincisi olarak bitirdi. Aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başlayarak TÜBİTAK'tan burs almaya hak kazandı. 2009 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nda Matematik Öğretmeni olarak çalışmaya başladı ve halen bu görevine devam etmektedir.