

SİNGÜLER HOMOLOJİ TEORİ

Selim ÇETİN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Mart – 2010

SİNGÜLER HOMOLOJİ TEORİ

Selim ÇETİN

Dumlupınar Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd.DoçDr. Tufan Sait KUZPINARI

Mart 2010

KABUL ve ONAY SAYFASI

Selim ÇETİN'nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Singüler Homoloji Teori” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Yrd.DoçDr.

Üye : Yrd.DoçDr.

Üye : Yrd.DoçDr.

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun/...../..... gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Atalay KÜÇÜKBURSA

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

SİNGÜLER HOMOLOJİ TEORİ

Selim Çetin

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2010

Tez Danışmanı: YrdDoç.Dr.Tufan Sait Kuzpınarı

ÖZET

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezde kullanılacak olan ve tezin kolay anlaşılmasını sağlayacak bazı matematiksel tanımlar, lema ve denklem yer almaktadır. İkinci bölümde yine tezde kullanılacak olan simpleksler, simpleksel kompleks, yönlü simpleksler, sınır operatörü, sınır gruplarını, zincirlerin oluşturduğu serbest abelyan gruplarının devir grubunu ve buradan da n -homoloji gruplarını tanımladık.

Üçüncü bölümde ise homeomorfik iki uzayın gruplarının izomorf olacağı kaidesiyle homoloji teorisinin bazı ortaya çıkan teoremler ve lemmalarını verip örnekledik. Son bölümde bu homolojik özellikleri (homoloji gruplarının özelliğini) cebirde uyguladık.

Genel olarak tezde euler' in yüzeyler için karakteristik denkleminde yararlanmak için verilen yüzeye homeomorfik olmasını istediğimiz simpleksleri inşa ettik. Dolayısıyla her bir objenin kenar, köşe ve yüzlerin sayısını hesaplayıp objeleri abelyan grup yapısına atamayı mümkün kıldık.

Anahtar Kelimeler : Simpleksler, Simpleksel Kompleksler, Yönlü Simpleks, Zincir, Devir ve Sınır Grup, Sınır Operatörü, Homoloji Grup, Üçgenleştirme, Homolojik Cebir, Bağlı Homoloji, Bir Çiftin Tam Homoloji Dizisi.

SINGULAR HOMOLOGY THEORY

Selim Çetin

Mathematics, M.S.Thesis, 2010

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Tufan Sait Kuzpınarı

SUMMARY

This thesis consists of 4 chapters. In the first chapter, mathematical definitions, lemma and equations which will be used in the thesis and will ease the understanding take place. In the second chapter, we made the definitions of simplexes, simplicial complexes, oriented simplexes, boundary operator, chain groups, cycle group and boundary group, and hence homology groups which will be used in the thesis again.

In the third chapter, with the formula of the fact that the groups of two spaces are isomorphic, we gave and exemplified the theories and lemma of homology theory. In the last chapter, we aplicate these homological properties (properties of homology goups) on the algebra.

In general, in the thesis, to benefit from the Euler characteristic equation of surfaces, we constructed the desired simplexes to make the surface of the house to homeomorphic. So, by computing the numbers of edges, vertices, faces. We enabled the objects to link to abelian groups.

Keywords: Simplexes, Simplicial Complexes, Oriented Simplexes, Boundary Operator, Chain Groups, Cycle Group and Boundary Group, Homology Group, Triangulation, Homolglcal Algebra, Relative Homolgy, The Exact Homolgy Sequence of a Pair.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken ve yüksek lisansım boyunca beni sabırla dinleyip hiçbir yardımı esirgemeyen dahası matematiğin bir bilim dalı olmasından ziyade insanların hobi olarak da yapabileceği uğraş olduğunu öğreten değerli danışmam hocam

YrdDoç.Dr.Tufan Sait Kuzpınarı’na

ayrıca aileme , dostum Ertan Sarı ve emeği geçen herkese sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
TEŞEKKÜR.....	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IX
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL NOTASYONLAR.....	3
2.2. Simplekslerin yönlendirilmesi	8
2.3. Zincirler Devirler ve Sınırlar.....	10
2.4. Homoloji gruplarının hesaplanması.....	16
3. SİNGÜLER HOMOLOJİ TEORİ.....	20
4. HOMOLOJİK CEBİR.....	
4.1. Zincir yapıları ve dönüşümler	60
60	
4.2. Bağlı homoloji	63
4.3. Bir çiftin tam homoloji dizisi.....	68
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	72

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler Açıklama

$\mathbb{Z}$ Tam sayılar kümesi

$\mathbb{R}^n$ n boyutlu reel uzay

∂ Sınır operatörü

E^n n boyutlu öklid uzay

Kısaltmalar Açıklama

$\text{gör}(f)$ f 'in görüntü grubu

$\text{çek}(f)$ f 'in çekirdeği

1.GİRİŞ

Bu kısımda tezin içinde geçen bazı kavramların tanımları verilip anlaşılmayı kolaylaştırmak için tanımlar örneklerle desteklenecektir. Her ne kadar bu kavramlar çoğu kişi tarafından bilinse de biz hatırlatma amaçlı bu kavramları kısa kısa vereceğiz.

1.1.Tanım: A bir cümle olmak üzere $g : A \longrightarrow A$ fonksiyonu birebir ve örten ise g fonksiyonuna A nın bir permütasyonu denir. N elemanlı bir küme kendisi üzerine tüm birebir fonksiyonları bileşke işlemi altında bir grup oluşturur. Bu gruba permütasyon grubu denir. N elemanlı bir kümenin $n!$ tane permütasyonu olacağı açıktır.

1.2.Tanım: A kümesi sonlu ve g , A üzerinde tanımlı bir permütasyon olsun. $a \in A$ için $g^k(a) = a$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $(a, g(a), g^2(a), \dots, g^{k-1}(a))$ şeklinde tanımlanan k -lıya bir k -devir denir.

Bunu bir örnekle açıklayacak olursak $A = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ permütasyonlarının devirsel gösterimi}$$

$$g_1^0(1)=1, \quad g_1^1(1)=2, \quad g_1^2(1)=g_1(g_1(1))=g_1(2)=3, \quad g_1^3(1)=g_1(g_1^2(1))=g_1(3)=4, \quad g_1^4(1)=$$

$$g_1(g_1^3(1))=g_1(4)=1 \text{ olup } g_1=(1,2,3,4) \text{ ve benzer olarak } g_2=(1,3)(2,4) \text{ dır.}$$

1.3.Tanım: Uzunluğu iki olan devire transpozisyon denir.

Bir başka deyişle bir transpozisyon herhangi iki sayının yerlerini değiştirir, diğerlerini sabit bırakır. Buna göre bir transpozisyon ; $A = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $a, b \in A$ için $g(a)=b$ ve $g(b)=a$; $a, b \neq c$ için $g(c)=c$ şartını sağlar.

1.4.Örnek: $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & d & a & b & e & f \end{pmatrix}$ olsun. Bu permütasyon $g=(a,c)(b,d)$ şeklinde gösterilebilir. $g(e)=e$ ve $g(f)=f$ olduğundan görüntüleri yine kendisi olan elemanlar devirlerde gösterilmezler.

1.5.Tanım: Eğer herhangi bir permütasyon tek sayıda transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa tek permütasyon ; çift sayıda transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa çift permütasyon denir.

$f = (1,8)(3,6,4)(5,7)$ permütasyonu $f = (1,8)(3,6,4)(5,7) = (1,8)(3,4)(3,6)(5,7)$ buda dört tane transpozisyonun çarpımı şeklinde olup çift permütasyon iken

$g = (1,4,5,6)(2,3,7)$ permütasyonu , $g = (1,4,5,6)(2,3,7) = (1,6)(1,5)(1,4)(2,7)(2,3)$ olup beş tane transpozisyonun çarpımı şeklinde yazılmış olup tek permütasyondur.

1.6.Tanım: $A = \{b_0, b_1, \dots, b_m\} = m$; $(m+1)$ tane $b_0, b_1, \dots, b_m$ noktalarından oluşmuş küme olmak üzere $b_0b_1, \dots, b_0b_m$ vektörleri doğrusal bağımsız ise A kümesine afin bağımsız küme denir.

1.7.Tanım: Simpleksin bulunduğu hiperdüzlemde bulunması gerekmeyen $n+1$ tane P_i noktası yardımıyla simpleksin bir x noktasını $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ biçiminde ifade etmeye yarayan λ_i sayılarına barisentrik koordinatlar denir. Burada $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ dir.

1.8.Heine-Borel Lemması: A kümesi E^n uzayının sınırlı alt kümesi ise bu kümenin açık kümelerden oluşan her sonsuz örtüsünden A kümesini örten sonlu sayıda kümeler (açık örtü) seçilebilir. Başka bir anlatımla, E^n uzayının her kapalı sınırlı alt kümesi kopmaktır.

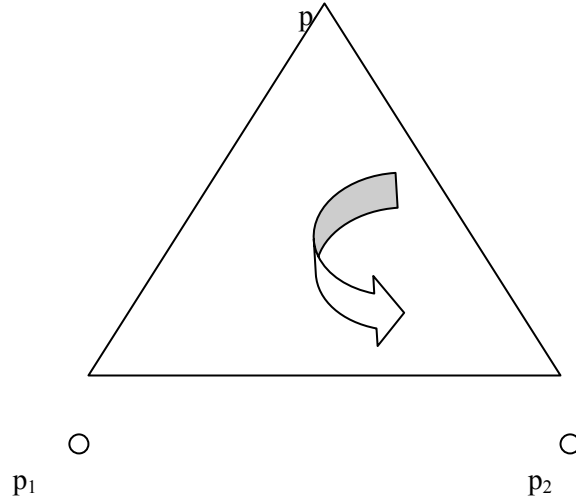
1.9Euler karakteristiği: Euler formülünün küreden farklı olan topolojik yüzeylere genişletilmiştir. Yüzey için bu formül;

“Köşelerin sayısı + Yüzlerin sayısı – Ayrıtların sayısı = Sabit sayı” dır.

2.TEMEL NOTASYONLAR

Öncelikle öklidyen 3-uzay $\mathbb{R}^3$ de $n=0,1,2$ ve 3 için yönlü n -simpleks tanımını inceleyeceğiz.

Yönlü 0-simpleks bir tek p noktasıdır. Yönlü 1-simpleks p_1 ve p_2 noktalarını birleştiren p_1p_2 doğru parçasıdır. Ve p_1 den p_2 ye hareket şeklinde görülür. Bu bağlamda $p_1p_2 \neq p_2p_1$ dir fakat aralarındaki benzerliği $p_1p_2 \neq -p_2p_1$ şeklinde göstereceğiz. Yönlü 2-simpleks



şekildeki gibi bir $p_1p_2p_3$ üçgensel bölgesi ile birlikte üçgen etrafında yönü belirli bir harekettir. Bu harekette sıralama önemlidir ve sıra $p_1p_2p_3$ şeklindedir. Bu sıralama yukarıdaki şekilde ok ile gösterilmiştir. Dikkat edileceği üzere $p_1p_2p_3$; $p_2p_3p_1$ ve $p_3p_1p_2$ sıralamalarıyla aynı olup $p_1p_3p_2$, $p_3p_2p_1$, $p_2p_1p_3$ sıralamalarının tersidir.

Bu durum $p_1p_2p_3 = p_2p_3p_1 = p_3p_1p_2 = -p_1p_3p_2 = -p_3p_2p_1 = -p_2p_1p_3$ şeklinde ifade edilir.

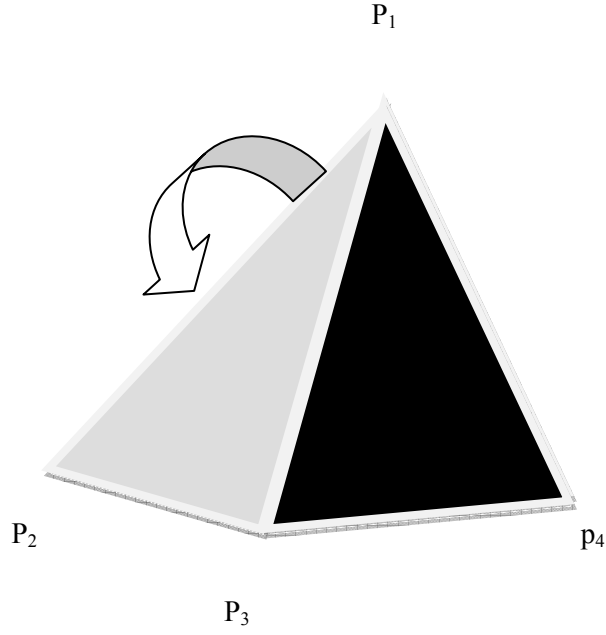
Dikkat edileceği üzere $p_ip_jp_k$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

permütasyonunun tek veya çift olması durumuna göre sırasıyla $p_1p_2p_3$ veya $-p_1p_2p_3$ yapısına eşittir.

Belirtmeliyiz ki $n=0,1,2$ için yönlü n -simpleks n boyutlu bir objedir.

Yönlü 3-simpleks köşelerinin sırası $p_1p_2p_3p_4$ olan dört köşeli tetrahedrondur(burada 3-simpleks tetrahedronun sınırladığı bölgenin tamamıdır).



Yönlendirme 2-simplekste olduğu gibidir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & r & s \end{pmatrix}$$

Permütasyonunun çift veya tek olması durumuna göre

$$p_1p_2p_3p_4 = - p_ip_jp_rp_s \text{ dir.}$$

Benzer tanımlar $n>3$ için yapılabilir fakat görselleştiremediğimiz için $n>3$ için tanımları vermeyeceğiz. Şimdiye kadar verdiğimiz simplekslerin tamamı yönlü yani köşelerinin yazımındaki sıralanışa göre farklılıklar gösterir, köşeler aynı olmasına rağmen sıralamaya göre yönlü simpleksler farklı olabilir. Bundan sonraki tüm simpleksler yönlü olacaktır.

Şimdi $n=1,2,3$ için bir n -simpleksin sınır tanımını vereceğiz. Bir 0-simpleksin sınırı boş simpleks olup bu durum

$$“\partial_0(p)=0”$$

Şeklinde gösterilecektir.

p_1p_2 1-simpleksnin sınırı

$$“\partial_1(p_1p_2)=p_2-p_1”$$

Şeklinde, $p_1p_2p_3$ 2-simpleksinin sınırı

$$“\partial_2(p_1p_2p_3)=p_2p_3-p_1p_3+p_1p_2”$$

Ve benzer şekilde $p_1p_2p_3p_4$ 3-simpleksinin sınırı ise

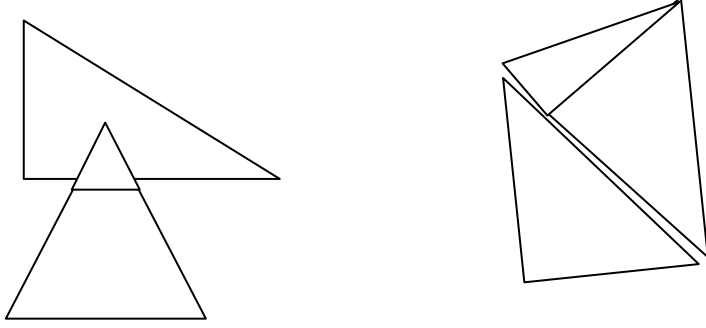
$$“\partial_3(p_1p_2p_3p_4)=p_2p_3p_4-p_1p_3p_4+p_1p_2p_4-p_1p_2p_3”$$

Şeklinde ifade edilir. Sınır tanımlarında toplamı oluşturan her bir bileşene simpleksin yüzeyi (face) denir. Mesela $p_2p_3p_4$, $p_1p_2p_3p_4$ simpleksinin bir yüzeyi olup $p_1p_3p_4$ bir yüzey değildir. Ne var ki $p_1p_4p_3=-p_1p_3p_4$, $p_1p_2p_3p_4$ simpleksinin bir yüzeyidir.

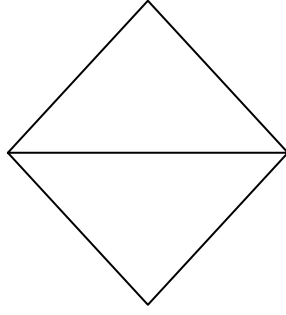
Şimdi yukarıda şekli verilen tetrahedronu düşünelim. Bu tetrahedronun dış yüzünde (surface) , bazı 0-simpleksler (köşeler) , 1-simpleksler (kenarlar) , bazı 2-simpleksler (içi dolu üçgenler) vardır. genel bir ifadeyle bir uzayın tam olarak simplekslere bölünebilmesi için aşağıdakilerin doğru olması gerekir.

- a- Uzaydaki her bir nokta en az bir simpleks içinde olmalı
- b- Uzaydaki her bir nokta sonlu sayıda simpleks içinde olabilir
- c- İki farklı simpleksin ya ortak noktaları yoktur, ya da ortak noktaları birbirinin yüzeyidir.

Örneğin



Uzayları üçüncü şartı sağlamamaktadır. Fakat



Uzayı üçüncü şartı sağlamaktadır.

Verilen üç şarta uygun biçimde simplekslere ayrılabilen bir uzaya simpleksel kompleks denir.

Şimdi buraya kadar sezgisel olarak anlatmaya çalıştığımız yönlü simpleksler ve yönlü simplekslerin sınırı ve simpleksel kompleks tanımlarını ve bunlarla ilgili bazı örnekleri verelim.

2.1.1.Tanım: $A \subseteq \mathbb{R}^k$ olsun. $0 \leq t_i$,

$$t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$$

olmak üzere herhangi bir $a \in A$ noktası, bazı $a_0, a_1, \dots, a_n \in A$ için

$$a = t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_n a_n$$

biçiminde bir tek yazılabiliyorsa A alt kümesine bir n -simpleks denir. Bu durumda A simpleksi $a_0, a_1, \dots, a_n$ tarafından geriliyor denir ve

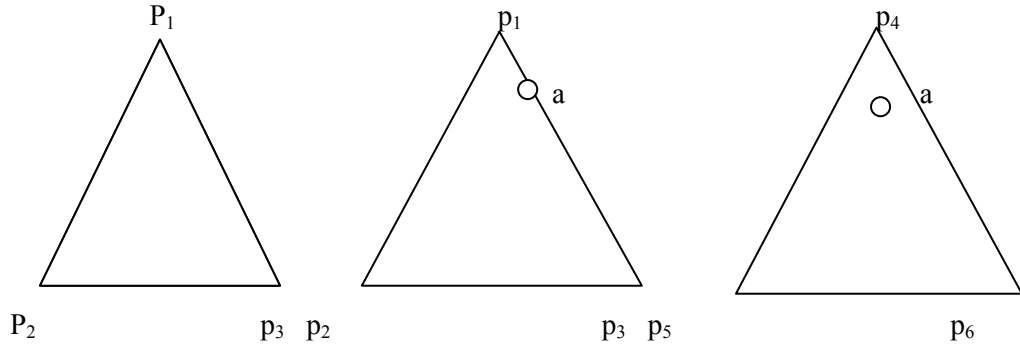
$t_0, t_1, \dots, t_n$ sayılarına $a = t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_n a_n$ noktasının barisentrik koordinatları denir. $a_0, a_1, \dots, a_n$ noktalarına ise A nın köşeleri (vertices) denir.

Kısaca simpleks tanımını şu şekilde yapabiliriz.

2.1.2 Tanım: $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ noktaları afin anlamında lineer bağımsız olsun.

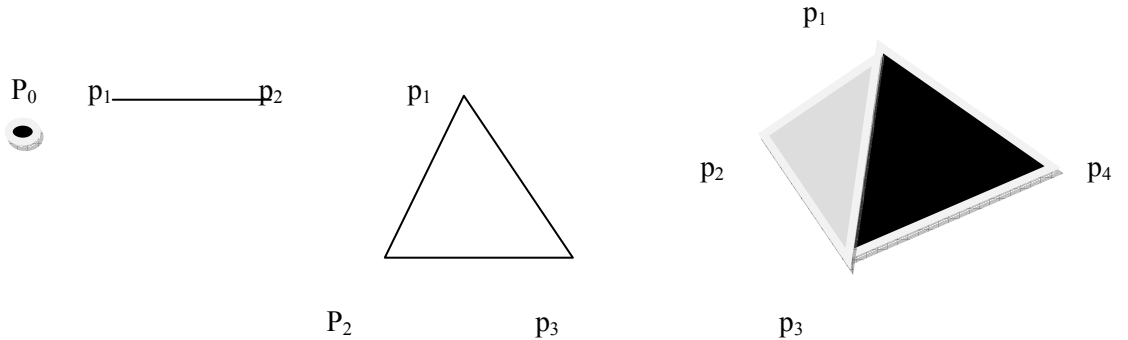
$\text{conv} \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ konveks çatısına, köşeleri $a_0, a_1, \dots, a_n$ olan n -simpleks denir.

Her simpleks kapalı ve sınırlı olup Heine-Borel lemması gereğince kompakttır.



$p_1 p_2 p_3$ bir simpleks olup $p_1 p_2 p_3 - \{a\}$ ve $p_4 p_5 p_6 - \{a\}$ kümeleri konveks değildir, yani simpleks değildir.

$\mathbb{R}^3$ de temel simpleksler olan 0,1,2,3-simpleksleri



şeklinde resmedebiliriz.

2.2.Simplekslerin yönlendirilmesi

Bu kısım [Bozüyük] den alınmıştır. Bir m-simpleks $p_0, p_1, \dots, p_m$ noktaları ile belirlenir. Verilen simpleks tanımına göre bu noktaların sıralaması önemli değildir. Fakat bazı özel amaçlar için köşelerin sırasını dikkate almak gerekir.

Bu amaçlar nelerdir?

$p_0, p_1, \dots, p_m$ noktaları ile elde edilen m-simpleksi σ^m ile gösterelim. σ^m nin bir permütasyonu, basitçe köşelerinin sıralamasının bir permütasyonudur. Bundan dolayı σ^m nin $(m+1)!$ mümkün permütasyonu vardır. iki permütasyonun ikisi de çift veya ikisi de tek ise bu iki permütasyon birbirine denktir denir, aksi halde yani biri tek diğeri çift permütasyon ise bu iki permütasyon birbirinin zıt işaretlisidir denir.

Bu σ^m nin permütasyonları kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturur ve bu kümenin permütasyonların tek veya çift olması bağıntısına göre iki denklik sınıfı oluşur. Bu sınıflara σ^m in yönlendirmeleri denir. Verilen bir m-simpleks bu yönlendirmelerden biri ile bir yönlendirilmiş m-simpleks olur. yani her bir m-simpleks yardımıyla iki tane yönlendirilmiş m-simpleks elde edilir.

2.2.1Tanım: A bir n simpleks ve $a_0, a_1, \dots, a_n$ bu simpleksin köşeleri olsun.

$\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ nin bir alt kümesi $\{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ tarafından gerilen simplekse, A nın k boyutlu bir yüzü (face) denir.

Örneğin A nın köşeleri A nın 0 boyutlu yüzleridir.

1 boyutlu yüzlere verilen simpleksin kenarı (edge) denir.

N boyutlu simpleksin $(n-1)$ boyutlu yüzüne verilen simpleksin **facet** i denir.

Farklı bir anlatımla n-simpleksin yüzü; $k \leq n$ olmak üzere bu simpleksin alt kümesi olan k boyutlu simpleksler olarak tanımlanabilir.

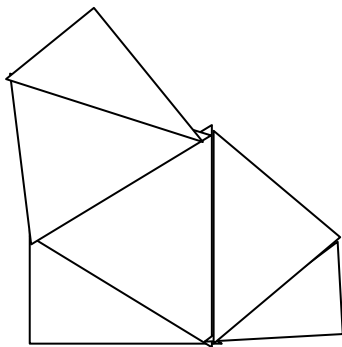
2.2.2.Tanım: A bir n-simpleks olsun boyutu n den küçük olan tüm yüzlerin birleşimine A nın sınırı denir ve $\partial(A)$ şeklinde gösterilir.

Bir simpleksin sınırının tüm facelerinin birleşiminden meydana geldiğini görmek kolaydır yani bir başka deyişle bir simpleksin içinde bulunan simpleksin boyutundan bir eksik boyutlu yüzlerin bileşkesi simpleksin sınırını verir.

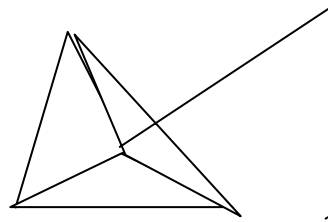
2.2.3.Tanım: Sonlu bir m için $K = \{ \sigma^m \subseteq \mathbb{R}^m \mid m=1,2,...,p \}$ ailesi $\mathbb{R}^m$ deki bazı m-simplekslerin bir sonlu ailesi olsun. Eğer her $\sigma_i, \sigma_j \in K$ için

Sim1: $\sigma_i \cap \sigma_j, \sigma_i$ nin hem de σ_j nin bir yüzü,

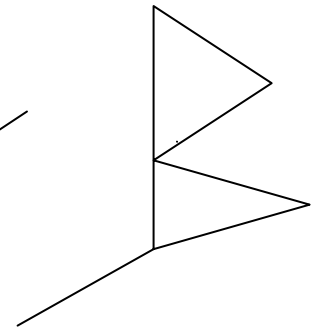
Sim2: K deki bir simpleksin her yüzü yine K da bir simpleks ise K ya simpleksel kompleks denir.



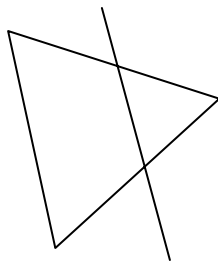
(a)



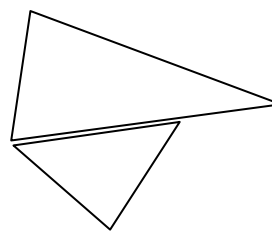
(b)



(c)



(d)



(e)

(a), (b), (c) birer simpleksel kompleks olup (d) ve (e) sim1 şartını sağlamadığından simpleksel kompleks değildir.

2.3.Zincirler, Devirler ve Sınırlar

Bu kısım ile beraber amaçladığımız hedefe doğru yaklaşılmaya başlayacağız. Yani belli şartları sağlayan bir topolojik uzaya karşılık bazı grup yapıları elde edilecek.

2.3.1.Tanım: K bir simpleksel kompleks olsun. K nın n -simplekslerinin kümesi tarafından üretilen serbest abel grubuna K nın n zincirlerinin oluşturduğu grup denir ve $C_n(K)$ ile gösterilir.

Tanımdan anlaşılacağı üzere $C_n(K)$ nın her bir elemanı; σ_i , K nın bir n -simpleksi ve $k_i \in \mathbb{Z}$ $i=1,2,3,...,p$ olmak üzere $\sum k_i \sigma_i$ şeklinde bir sonlu toplam biçiminde ifade edilir. Burada toplama giren her bileşene bir n -zincir denir.

2.3.2.Örnek: K $p_1 p_2 p_3 p_4$ tetrahedronunun dış yüzeyinden oluşan simpleksel kompleks olsun. bu durumda $C_2(K)$ da ki bir eleman $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$k_1 p_1 p_2 p_3 + k_2 p_1 p_2 p_4 + k_3 p_1 p_3 p_4 + k_4 p_2 p_3 p_4$$

formunda olup $C_1(K)$ da ki bir eleman $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$k_1 p_1 p_2 + k_2 p_1 p_3 + k_3 p_1 p_4 + k_4 p_2 p_3 p_4 + k_5 p_2 p_4 + k_6 p_3 p_4$$

formunda olup benzer şekilde $C_0(K)$ da ki bir eleman $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 + k_4 p_4$$

formunda ifade edilir.

Şimdi elde ettiğimiz $C_n(K)$ grubuyla ilgili bazı özelliklerden bahsedelim.

K bir simpleksel kompleks ve K nın n -simpleksleri $i=1,2,3,...,k$ için σ_i olsun. $m_i, z_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sum m_i \sigma_i, \sum z_i \sigma_i \in C_n(K)$ için

$$\sum m_i \sigma_i + \sum z_i \sigma_i = \sum (m_i + z_i) \sigma_i$$

Şeklindedir. Tam sayılarda toplama işleminin kapalılık, birleşme ve değişme özelliği olduğundan $C_n(K)$ üzerinde yukarıda tanımlanan işlemin de benzer özellikleri vardır. $i=1,2,\dots,k$ için $t_i=0$ olmak üzere $\sum t_i \sigma_i$, $C_n(K)$ nin birim elemanı olup $\sum m_i \sigma_i$ elemanının tersi $\sum (-m_i) \sigma_i$ biçiminde tanımlanır.

Şimdi bir K simpleksel kompleksi yardımıyla tanımlanan $C_n(K)$ grupları arasındaki özel bir homeomorfizmayı tanımlayacağız.

X ve Y , $F(X)$ ve $F(Y)$ serbest abel gruplarının üreteç kümeleri olsun.

$$F: X \longrightarrow Y$$

fonksiyonu yardımıyla $F(X)$ den $F(Y)$ ye bir homeomorfizma tanımlanır ve bu tanımlama tek türlü yapılabilir. Bir I indis kümesi için $x_i \in X$ ve $m_i \in \mathbb{Z}$ olsun. $\sum m_i x_i \in F(X)$ olup

$f(\sum m_i x_i) = \sum m_i f(x_i)$ şeklinde tanımlansın. Bu tanımlama ile birlikte f , $F(X)$ ten $F(Y)$ ye bir homeomorfizmadır. Gerçekten $m_i, z_i \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} f(\sum m_i x_i + \sum z_i x_i) &= f(\sum (m_i + z_i) x_i) \\ &= \sum (m_i + z_i) f(x_i) \\ &= \sum m_i f(x_i) + \sum z_i f(x_i) \\ &= f(\sum m_i x_i) + f(\sum z_i x_i) \end{aligned}$$

dir. Şimdi bu bilginin ışığı altında aşağıdaki tanıımı verebiliriz.

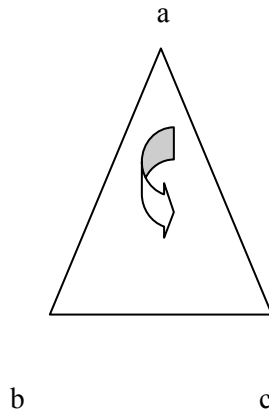
2.3.3.Tanım: K bir simpleksel kompleks olsun. ∂_n sınır dönüşümü $C_n(K)$ dan $C_{n-1}(K)$ ya bir grup homeomorfizmasıdır. Bu dönüşüme sınır homeomorfizması (boundary homomorphism) denir, ve $\sum m_i k_i \in C_n(K)$ için

$$\partial_n(\sum m_i k_i) = \sum m_i \partial_n(k_i)$$

Şeklinde tanımlanır.

Burada elbette ∂_0 sınır dönüşümü için $C_{-1}(K)$ yı tanımlamak gerekir. $C_{-1}(K)$ bundan böyle tek elemanlı $\{0\}$ aşikâr grubu olarak alınacaktır.

2.3.4.Örnek: K simpleksel kompleksini



şeklinde resmedelim.

$\xi = 2ab + 3bc + 4ca$ şeklinde tanımlansın ($\xi \in C_2(K)$ dır).

$$\begin{aligned}
 \partial_2(\xi) &= \partial_2(2ab + 3bc + 4ca) \\
 &= 2\partial_2(ab) + 3\partial_2(bc) + 4\partial_2(ca) \\
 &= 2(b-a) + 3(c-b) + 4(a-c) \\
 &= 2a + (-1)b + (-1)c \\
 &= 2a - b - c
 \end{aligned}$$

Olur.

Şimdide sınır homeomorfizminin çekirdeği(kernel) ve görüntü(image) kümelerini araştırıp aralarındaki ilişkiye değineceğiz.

2.3.5.Tanım: $\partial_n: C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$ sınır homeomorfizmasının çekirdeğinin elemanlarına n-devir(n-cycle), $\text{çek}(\partial_n)$ ye ise n-devirler grubu denir ve bu grup $Z_n(K)$ ile gösterilir.

2.3.6.Örnek: Son örnekteki K kompleksini ele alalım.

$$\lambda = ab + ca + bc \in C_1(K) \text{ dir.}$$

$$\partial_1(\lambda) = \partial_1(ab + ca + bc)$$

$$= \partial_1(ab) + \partial_1(ca) + \partial_1(bc)$$

$$= (b-a) + (a-c) + (c-b)$$

$$= 0$$

Olduğundan $\lambda \in \text{çek}(\partial_1) = Z_1(K)$ olup λ bir 1-devirdir. Fakat

$t = 2ab + bc + ca$ olarak alırsak

$$\partial_1(t) = \partial_1(2ab + bc + ca)$$

$$= 2\partial_1(ab) + \partial_1(bc) + \partial_1(ca)$$

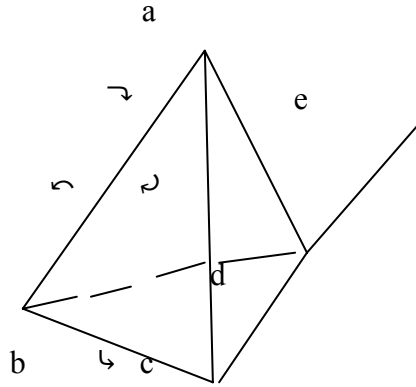
$$= 2(b-a) + (c-b) + (a-c)$$

$$= b-a \neq 0$$

olup $t \notin Z_1(K)$ dır.

2.3.7.Tanım: $\partial_n: C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$ sınır homeomorfizması olmak üzere $\partial_n(C_n(K))$ ya $(n-1)$ -sınırların oluşturduğu grup denir ve bu grup $B_{n-1}(K)$ ile gösterilir.

2.3.8.Örnek: Y simpleksel kompleksini



şeklinde resmedelim.

$x = (abc + adc + abd + bcd) \in C_2(K)$ olsun.

$$\partial_2(x) = \partial_2(abc + adc + abd + bcd)$$

$$= \partial_2(abc) + \partial_2(adc) + \partial_2(abd) + \partial_2(bcd)$$

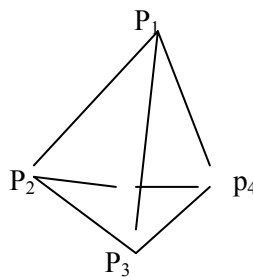
$$= ab + bc + ca + ad + dc + ca + ab + bd + da + bc + cd + db$$

$$= 2ab + 2bc + 2ca$$

$$= 2(ab + bc + ca)$$

olup bu ifade 1-sınırdır ve $B_1(Y)$ nin elemanıdır.

2.3.9.Örnek: S kompleksi; yönlendirmesi tetrahedronun dışından bakıldığında her üçgende saat hareketi yönünde olması şartıyla



tetrahedronunun yüzeyi olsun. Şimdi $n=0,1,2$ için $Z_n(S)$ ve $B_n(S)$ gruplarını hesaplayalım.

Öncelikle $C_3(S)=0$ olduğundan $B_2(S)=\partial_3(C_3(S))=0$ dır.

$C_1(S)=0$ olduğundan

$Z_0(S)=\ker(\partial_0)=C_0(S)$ dir

Böylece $Z_0(S)$ p_1, p_2, p_3 ve p_4 üreteçleri üzerinde tanımlanan serbest abel gruptur. Bir grubun homeomorfizma altındaki görüntüsü bu grubun üreteçlerinin homeomorfizma altındaki görüntülerinin ürettiği gruptur.

Böylece $C_1(S)$; p_1p_2 , p_1p_3 , p_1p_4 , p_2p_3 , p_2p_4 ve p_3p_4 tarafından üretildiğinden $B_0(S)$ yani 0-sınırlar grubu p_2p_1 , p_3p_1 , p_4p_1 , p_3p_2 , p_4p_2 , p_4p_3 tarafından üretilir.

Ne var ki; $B_0(S)$, bu üreteçler üzerinde serbest abelyan değildir. Örneğin, $p_3p_2 = (p_3p_1) \cdot (p_2p_1)$ dir. kolayca görüleceği üzere $B_0(S)$ grubu p_2p_1 , p_3p_1 ve p_4p_1 üzerinde serbest abel gruptur. (dikkat edileceği üzere, p_3p_2 , p_4p_2 , p_4p_3 elemanları $B_0(S)$ nin üreteçleri tarafından üretilir.)

Şimdi $Z_1(S)$ yi hesaplayalım. $C_1(S)$ deki bir c elemanı, $p_i p_j$ kenarlarının integral katlarının normal toplamı biçimindedir. $Z_1(S)$ nin üreteçleri

$$Z_1 = p_2p_3 + p_3p_4 + p_4p_2$$

$$Z_2 = p_1p_4 + p_4p_3 + p_3p_1$$

$$Z_3 = p_1p_2 + p_2p_4 + p_4p_1$$

$$Z_4 = p_1p_3 + p_3p_2 + p_2p_1 \text{ dir.}$$

Benzer hesaplamalarla

$$Z_1(S) = B_1(S)$$

olup $Z_2(S)$ nin üreteçleri

$$p_2p_3p_4 + p_3p_1p_4 + p_1p_2p_4 + p_2p_1p_3 \quad \text{olur.}$$

2.4. Homoloji Gruplarının Hesaplanması

2.4.1. Teorem: X bir simpleksel kompleks ve $n=0,1,2,3$ için $C_n(X)$, X in n -zincirleri olsun. her $c \in C_n(X)$ için $\partial_{n-1}\partial_n(c) = 0$ dır.

İspat: Homeomorfizmalar üreteçler yardımıyla tanımlandığından üreteçler için verilen ifadenin doğru olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} \partial_1\partial_2(p_1p_2p_3) &= \partial_1(p_2p_3 + p_3p_1 + p_1p_2) \\ &= (p_3 - p_2) + (p_1 - p_3) + (p_2 - p_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2.4.2. Sonuç: $n=0,1,2,3$ için $Z_n(X) \supseteq B_n(X)$ tir.

$b \in B_n(X)$ olsun. $\partial_{n+1}(c) = b$ olacak biçimde $c \in C_{n+1}(X)$ vardır.

$\partial_{n-1}\partial_n(c) = 0$ olduğundan $\partial_n(b) = 0$ olup $b \in \ker \partial_n = Z_n(X)$ tir.

2.4.3. Tanım: X bir simpleksel kompleks olsun. $H_n = Z_n/B_n$ bölüm grubuna X in n boyutlu homoloji grubu denir.

2.4.4. Örnek: S tetrahedron yüzeyini oluşturan simpleksel kompleks olsun.

$C_3(S) = 0$ olduğundan $Z_3(S)$ ve $B_3(S)$ ile aynıdır. Dolayısıyla $H_3(S) = 0$ olur.

$C_2(S)$ sonsuz devirli (yani $\mathbb{Z}$ ye izomorf) ve $B_2(S) = 0$ olduğundan $H_2(S) \simeq \mathbb{Z}$ dir.

$Z_1(S) = B_1(S)$ olduğundan $Z_1(S)/B_1(S)$ grubu aşıkâr grup olduğundan $H_1(S) = 0$ dir.

Benzer hesaplamalarla $H_0(S) \simeq \mathbb{Z}$ dir.

2.4.5.Örnek: $M = \{ p_0 \}$ olsun. 0-zincir $C_0(M) = \{ ip_0 \mid i \in \mathbb{Z} \}$ dir. Kesinlikle $B_0(M) = \{0\}$ ve $C_0(M) = Z_0(M) \simeq \mathbb{Z}$ dir ($\partial_0 p_0 = 0$ ve p_0 hiçbir şeyin bir sınırı olamaz.). Dolayısıyla

$$H_0(M) = Z_0(M) / B_0(M) \simeq \mathbb{Z} \text{ dir.}$$

2.4.6.Örnek: $L = \{ p_0, p_1 \}$ iki 0-simpleksten meydana gelen bir simplisel kompleks olsun. 0-zincir $C_0(L) = \{ ip_0 + jp_1 \mid i, j \in \mathbb{Z} \}$ dir. Kesinlikle $B_0(L) = \{0\}$ ve $C_0(L) = Z_0(L) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dir. Dolayısıyla $H_0(L) = Z_0(L) / B_0(L) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dir.

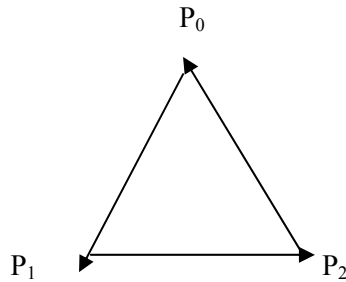
2.4.7.Örnek: $T = \{ p_0, p_1, p_0 p_1 \}$ olsun. Biz $C_0(T) = \{ ip_0 + jp_1 \mid i, j \in \mathbb{Z} \}$ dir. $C_1(T) = \{ kp_0 p_1 \mid k \in \mathbb{Z} \}$ sahibiz. $p_0 p_1$ T deki herhangi bir simpleksin sınırı olmadığı için kesinlikle $B_1(T) = \{0\}$ ve $H_1(T) = Z_1(T) / B_1(T) = Z_1(T)$ dir.

Eğer $z = mp_0 p_1 \in Z_1(T)$ ise $\partial_1 z = m \partial_1(p_0 p_1) = m \{ p_1 - p_0 \} = mp_1 - mp_0 = 0$ olur. Bu yüzden m yok edilebilir ve $Z_1(T) = 0$ dolayısıyla $H_1(T) = 0$ olur. $H_0(T)$ ye gelince biz $Z_0(T) = C_0(T) = \{ ip_0 + jp_1 \mid i, j \in \mathbb{Z} \}$ ve $B_0(T) = \text{görüntü } \partial_1 = \{ \partial_1 ip_0 p_1 \mid i \in \mathbb{Z} \} = \{ i(p_1 - p_0) \mid i \in \mathbb{Z} \}$

$F(ip_0 + jp_1) = i + j$ ile $f: Z_0(T) \longrightarrow \mathbb{Z}$ bir örten homeomorfizm tanımlayalım. O zaman biz $\text{çekirdek } f = f^{-1}(0) = B_0(T)$ buluruz.

Buradan $H_0(T) = Z_0(T) / B_0(T) \simeq \mathbb{Z}$ veya $H_0(T) = Z_0(M) / \text{çekirdek } f \simeq \mathbb{Z}$ buluruz.

2.4.8.Örnek: $K = \{ p_0, p_1, p_2, p_0 p_1, p_1 p_2, p_2 p_0 \}$ olsun.



Bu S^1 in üçgenleştirilmesidir. K nın içinde 2-simpleksler olmadığı için biz $B_1(K) = 0$ ve $H_1(K) = Z_1(K) / B_1(K) = Z_1(K)$ ya sahibiz. $z = ip_0 p_1 + jp_1 p_2 + kp_2 p_0 \in Z_1(K)$ $i, j, k \in \mathbb{Z}$ olsun.

$\partial_1 z = i(p_1 - p_0) + j(p_2 - p_1) + k(p_0 - p_2) = (k-i)p_0 + (i-j)p_1 + (j-k)p_2 = 0$ olması gerekir. Bu sadece $i=j=k$ olduğunda sağlanır. Bu yüzden biz

$$Z_1(K) = \{i\{p_0p_1 + p_1p_2 + p_2p_0\} \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

olduğunu buluruz bu $Z_1(K)$ nın $\mathbb{Z}$ ye izomorfik olduğunu ve $H_1(K) = Z_1(K) \simeq \mathbb{Z}$ olduğunu gösterir.

$H_0(K)$ yı hesaplayalım. Biz $Z_0(K) = C_0(K)$ ve

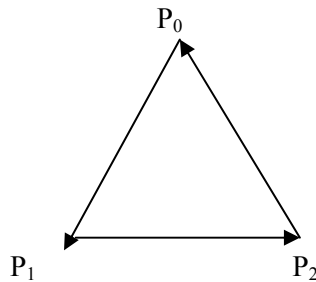
$$B_0(K) = \{\partial_1[lp_0p_1 + mp_1p_2 + np_2p_0] \mid l, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{(n-l)p_0 + (l-m)p_1 + (m-n)p_2 \mid l, m, n \in \mathbb{Z}\} \text{ ye sahibiz.}$$

$$F(ip_0 + jp_1 + kp_2) = i + j + k \text{ ile}$$

$f : Z_0(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ye bir örten homeomorfizm tanımlayalım. $\text{Çekf} = f^l(0) = B_0(K)$; $Z_0(K)/\text{Çekirdekf} \simeq \text{görüntüf} = \mathbb{Z}$ veya $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \simeq \mathbb{Z}$ olduğunu doğrulayalım. K , S^1 dairesinin bir üçgenleştirmesi olur ve $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \simeq \mathbb{Z}$ ve $H_1(K) = Z_1(K) \simeq \mathbb{Z}$ S^1 in homoloji gruplarıdır.

2.4.9.Örnek: $A = \{p_0, p_1, p_2, p_0p_1, p_1p_2, p_2p_0, p_0p_1p_2\}$ olsun.



0-simpleksler ve 1-simplekslerin yapısı $B_1(A) = 0$ ve $H_1(A) = Z_1(A)/B_1(A) = Z_1(A)$ ya sahibiz.

$z = ip_0p_1 + jp_1p_2 + kp_2p_0 \in Z_1(A)$ $i, j, k \in \mathbb{Z}$ olsun. $\partial_1 z = i(p_1 - p_0) + j(p_2 - p_1) + k(p_0 - p_2) = (k-i)p_0 + (i-j)p_1 + (j-k)p_2 = 0$ olması gerekir. Bu sadece $i=j=k$ olduğunda sağlanır. Bu yüzden biz

$$Z_1(A) = \{i\{p_0p_1 + p_1p_2 + p_2p_0\} \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

olduğunu buluruz bu $Z_1(A)$ nın $\mathbb{Z}$ ye izomorfik olduğunu ve $H_1(A) = Z_1(A) \simeq \mathbb{Z}$ olduğunu gösterir.

$H_0(A)$ yı hesaplayalım. $Z_0(A) = C_0(A)$ ve

$$B_0(A) = \{\partial_1[lp_0p_1 + mp_1p_2 + np_2p_0] \mid l, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{(n-l)p_0 + (l-m)p_1 + (m-n)p_2 \mid l, m, n \in \mathbb{Z}\} \text{ ye sahibiz.}$$

$$g(ip_0 + jp_1 + kp_2) = i + j + k \text{ ile}$$

$g: Z_0(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ye bir örten homeomorfizm tanımlayalım. Çekirdek $g = g^{-1}(0) = B_0(A)$; $Z_0(A)/\text{Çekirdek}g \simeq \text{görüntü}g = \mathbb{Z}$ veya $H_0(A) = Z_0(A)/B_0(A) \simeq \mathbb{Z}$ olduğunu doğrulayalım. A , S^1 dairelerinin bir üçgenleştirmesi olur ve $H_0(A) = Z_0(A)/B_0(A) \simeq \mathbb{Z}$ ve $H_1(A) = Z_1(A) \simeq \mathbb{Z}$ S^1 in homoloji gruplarıdır. Ayrıca A da 3-simpleks olmadığı için $B_2(A) = \{0\}$ dir. o zaman $H_2(A) = Z_2(A)/B_2(A) = Z_2(A)$ dir. $z = mp_0p_1p_2 \in Z_2(A)$ $m \in \mathbb{Z}$ olsun. $\partial_2 z = m\{(p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)\} = 0$ olduğu için m yok sayılmalı . dolayısıyla $Z_1(A) = \{0\}$ ve $Z_2(A) = H_2(A) = \{0\}$ dir.

3.SİNGÜLER HOMOLOJİ TEORİ

Bu kısım [James W. Vick] ten alınmıştır. Bu kısmın amacı keyfi bir topolojik uzayda singüler homoloji teoriyi sunmaktır. Homotopi değişmezliğinin bir ispatı ve takip eden tanımlar (Teorem 3.1.14 de) gerekli hesaplama sonucunda çıkan verilerle elde edilir. Homotopi değişmezliğinin ispatı onun karmaşık bölümleriyle kesintiye uğramaması için Ek 1 e ertelendi. Mayer- Vietoris dizisi bu teoremin acil bir sonucu olarak tanınmıştır ve o zaman kürelerin homoloji gruplarını hesaplamaya uygulandı. Bu sonuçlar klasik teoremlerin sayısının ispatına uygulandı: Bir diskin kendi sınırları üzerine geri dönüştürülemeyeceği, Brouwer 'in sabit nokta teoremi, eş boyutlu kürelerde vektör alanlarının olmayışı, Jordan- Brouwer ayırma teoremi ve bölgelerin değişmezliği üzerinde Brouwer teoremi.

Eğer x ve y R^n in noktaları ise $\{(1-t)x+ty|:0\leq t\leq 1\}$ olacak şekilde x den y ye bölümünü tanımlayalım. Eğer C de verilen x ve y için yukarıdaki x den y ye bölümü tamamıyla C de kalıyorsa, $C\subseteq R^n$ alt kümesi konvektir. Konveks kümelerin keyfi bir keşi siminde konveks olduğu belirtilmektedir. Eğer $A\subseteq R^n$ ise A yı içeren R^n deki tüm konveks kümelerin kesişimi A nın konveks gövdesi olur.

R^n de bir s p -simpleksi x_1, x_0, x_p, x_0 şeklinde bir lineer bağımsız küme oluşturan R^n de $\{x_0, \dots, x_p\}$ $(p+1)$ lisinin bir koleksiyonunun konveks gövdesi olur. Bunun x_0 noktasının gösteriminden bağımsız olduğu belirtilmelidir.

3.1.1.Önerme: $\{x_0, \dots, x_p\} \subseteq R^n$ olsun. O zaman aşağıdakiler eşittir.

(a) x_1, x_0, x_p, x_0 lineer bağımsızdırlar.

(b) eğer $\sum s_i f_i = \sum t_i x_i$ ve $\sum s_i = \sum t_i$ ise o zaman $i=0, \dots, p$ için $s_i = t_i$ dir.

İspat: (a) $\Leftrightarrow$ (b): eğer $\sum s_i x_i = \sum t_i x_i$ ve $\sum s_i = \sum t_i$ ise o zaman $0 = \sum_{i=0}^{i=p} (s_i - t_i) x_i$

$$= \sum_{i=0}^{i=p} (s_i - t_i) x_i - \left[\sum_{i=0}^{i=p} (s_i - t_i) \right] x_0 = \sum_{i=0}^{i=p} (s_i - t_i) (x_i - x_0)$$

$x_1, x_0, \dots, x_p, x_0$ lineer bağımsız olduğundan son ifade $i=1, \dots, p$ için $s_i = t_i$ olduğu anlamına gelir. Son olarak bu $\sum s_i = \sum t_i$ olduğu için $s_0 = t_0$ anlamına gelir.

(b) $\Leftrightarrow$ (a): eğer $\sum_{i=0}^{i=p} (t_i) (x_i - x_0) = 0$ ise o zaman $\sum_{i=0}^{i=p} t_i x_i = (\sum_{i=0}^{i=p} t_i) x_0$ ve (b) ile birlikte düşünülerek $t_1, t_2, \dots, t_n$ tümü sıfır olmalı. Bu lineer bağımsızlığı ispatlar.

s R^n de bir p -simpleksi olsun ve her bir i için $t_i \geq 0$ ve $\sum t_i = 1$ olmak üzere

$t_0 x_0 + t_1 x_1 + \dots + t_p x_p$ formunun tüm noktalarının kümesini düşünelim. Bunun $\{x_0, \dots, x_p\}$ kümesinin konveks gövdesi olduğu belirtilmeli ve dolayısıyla önerme 3.1.1 den biz aşağıdaki önermeye sahibiz.

3.1.2. Önerme: Eğer s p -simpleksi $\{x_0, \dots, x_p\}$ nin konveks gövdesi ise o zaman s in her noktası tüm i ler için $t_i \geq 0$ ve $\sum t_i = 1$ olmak üzere $\sum t_i x_i$ formunda bir tek belirgin gösterime sahiptir.

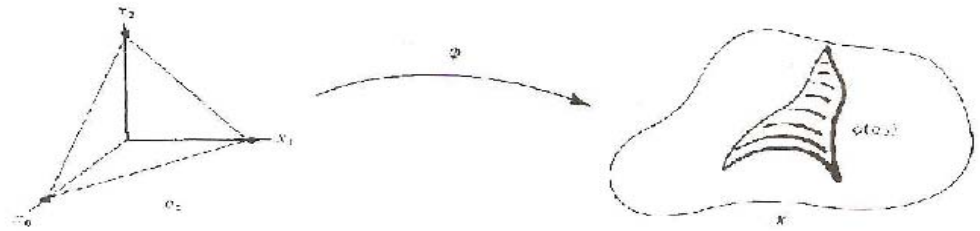
X_i noktaları s nin köşeleri olsun. Bu önerme t_i koordinatlarının uygun seçimiyle

$(t_0, t_1, \dots, t_p)$ $(p+1)$ lisi ile s nin noktaları arasında bir bağıntı kurabilmemize izin verir.

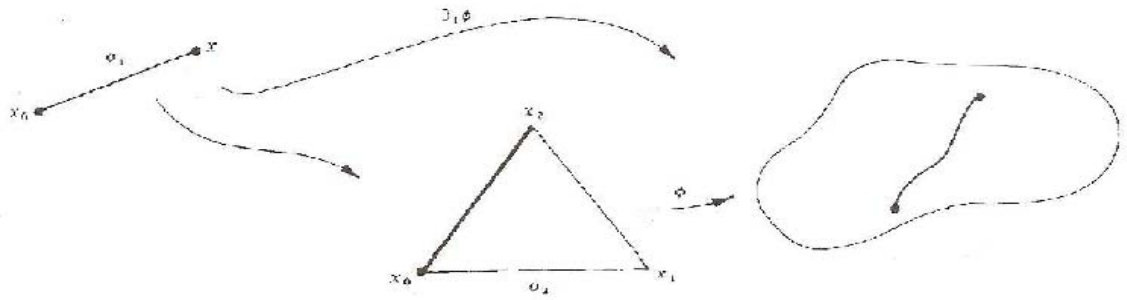
y s de bir nokta olsun. O zaman y s nin bir köşesidir. Ancak ve ancak y s de uzanan herhangi bir bölümün iç noktası değildir.

Eğer s nin köşeleri kesin bir sıra ile verilirse o zaman s bir sıralı simplekstir. Böylece s $x_0, x_1, \dots, x_p$ köşeleri ile bir sıralı simpleks olsun. Her bir i için $t_i \geq 0$ ve $\sum t_i = 1$ ile $(t_0, t_1, \dots, t_p) \in R^{p+1}$ tüm noktaların kümesi olan σ_p yi tanımlayalım. Eğer $f: \sigma_p \rightarrow s$ bir fonksiyon $f(t_0, t_1, \dots, t_p) = \sum t_i x_i$ ile verilirse o zaman f süreklidir. Buna ek olarak gösterimlerin tekliğinden aslında σ_p kompakt hausdorff uzaylarıdır ki buda f bir homeomorfizim demektir. Bu yüzden her bir sıralı p -simpleksi σ_p nin doğal bir homeomorfik görüntüsü olur. $x_0' = (1, 0, \dots, 0)$, $x_1' = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $x_p' = (0, 0, \dots, 1)$ tepe noktaları ile σ_p bir p -simpleks olduğu belirtilmelidir. σ_p doğal sıralanışı ile standart p -simpleks olarak adlandırılır.

X bir topolojik uzay olsun. X de bir singüler p -simpleks $\Phi: \sigma_p \rightarrow X$ bir sürekli fonksiyon olur.



ŞEKİL 1.1



ŞEKİL 1.2

Singular 0-simpleks X in noktaları ile belirlenmiş olduğu belirtilmelidir. Singular 1-simpleks X in yolu ile. Ve diğerleri de buna benzer şekildedir.

Eğer Φ singüler $1p$ -simpleks ve i $0 \leq i \leq p$ aralığında bir tamsayı $\partial_i(\Phi)$ X de bir singüler $(p-1)$ -simpleks $\partial\Phi(t_0, \dots, t_{p-1}) = \Phi(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1})$, şeklinde tanımlayalım. $\partial_i(\Phi)$ Φ nin i 'nci görüntüsü olsun.

Örneğin X de singüler bir 2-simpleks olsun. (Şekil 1.1) O zaman $\partial_1(\Phi)$ şekil 1.2 de bileşke gösterimi ile verildi. Yani $\partial_i(\Phi)$ hesaplamak için köşe noktalarının genel sıralanışı kullanılan ve Φ vasıtasıyla X içine giden i 'nci köşeye karşı σ_p içine σ_{p-1} i gömdük.

Eğer $f: X \rightarrow Y$ ye bir sürekli fonksiyon ve Φ X de $f_{\#}(\Phi) = f_o \Phi$ ile Y de $f_{\#}(\Phi)$ bir singüler p -simpleks tanımlar. Eğer $g: Y \rightarrow W$ ya sürekli ve $id: X \rightarrow X$ e özdeşlik (birim) dönüşüm olsun. $(gof)_{\#}(\Phi) = g_{\#}(f_{\#}(\Phi))$ ve $(id)_{\#}(\Phi) = \Phi$ dir.

G keyfi bir abel grubu eğer $A \subseteq G$ olacak şekilde bir alt kümesi var. Öyle ki her bir $g \in G$ $g = \sum_{x \in A} n_x \cdot x$ olacak şekilde bir tek gösterime sahiptir. Burada n_x bir tamsayı ve A da çoğu sonlu x için 0 a eşit ama tümü değil. A kümesi G için bir taban olur.

Verilen keyfi bir A kümesinden biz aşağıdaki yöntemlerle A tabanı ile serbest bir abel grup inşa edebiliriz. $F(A)$ A dan tamsayılar içine tüm f fonksiyonlarının kümesi olsun. Öyle ki $f(x) \neq 0$ yalnız A nın elemanlarının sonlu sayısı için. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ile $F(A)$ da bir işlem tanımlayalım. O zaman $F(A)$ bir abel grup olur. Herhangi bir $a \in A$ için $F(A)$ da bir f_a fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer $x=a$ ise $f_a(x)=1$, aksi durumlarda sıfır. O zaman $\{f_a | a \in A\}$ serbest bir abel grup olarak $F(A)$ için bir taban olur. f_a ile belirlenmiş a , yapıyı tamamlar.

Örneğin $G = \{(n_1, n_2, \dots) | n_i \text{ bir tamsayı, nihayet sıfır}\}$, o zaman G koordinat yönünde toplama altında bir abel gruptur. Ve buna ek olarak $(1, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots$ tabanı ile serbesttir. Eğer $G = 0$ ise o halde G boş taban ile serbest bir abel grup olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz.

G A tabanı ile bir serbest abel grup ve H bir abel grup ise o zaman her $f: A \rightarrow H$ fonksiyonunu bir homeomorfizim genişletilmiş olduğu belirtilmelidir.

Eğer X bir topolojik uzay $S_n(X)$ ile serbest abel grubun tabanı olan X in tüm singüler n simplekslerinin kümesini tanımlayalım. $S_n(X)$ in bir elemanı X in singüler n - zinciri olarak adlandırılır ve n_{ϕ} bir tamsayı Φ nin sonlu elemanlı tümü sıfıra eşit olabilmek şartıyla $\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \Phi$. Φ formuna sahiptir.

∂_i i 'nci dönüşüm operatörü singüler n simplekslerin kümesinden singüler $(n-1)$ simplekslerin kümesine bir fonksiyon olduğundan dolayı $\partial_i(\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \Phi) = \sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \partial_i \Phi$

ile verilen $\partial_i: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ bir homeomorfizim için tek bir genişlemesi vardır. $\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 + \dots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$ ile verilen $\partial: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ homeomorfizimi ile sınır operatörü tanımlayalım.

3.1.3. Önerme: $S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X) \rightarrow S_{n-2}(X)$ de $\partial \circ \partial$ bileşkesi sıfırdır.

Geometrik olarak bu ifade yalnızca herhangi bir n - zincirin sınırı $(n-1)$ - zincirin sınırına sahip olmadığını söyler. Bu temel özellik homoloji gruplarının tanımında bize yol gösterecek. $C \in S_n(X)$ elemanı bir n - devir olur. eğer $\partial(C) = 0$ ise $d \in S_n(X)$ elemanı bir n sınırdır. Eğer $d = \partial(e)$ bazı $e \in S_n + I(X)$ için. ∂ bir homeomorfizim olduğundan dolayı onun çekirdeği tüm n - devirlerin kümesi $Z_n(X)$ ile ifade edilen $S_n(X)$ de ∂ nın görüntüsü tüm n - sınırların $B_n(X)$ alt grubu olur.

Önerme 1.3. de $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$ in bir alt grup olduğu anlamına geldiği belirtilmelidir.

$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ bölüm grubu X in n ' inci singüler homoloji grubu olur. Bu cebirsel yapı için geometrik olarak yorumlanabileceği açıktır. Biz topolojik uzaylarda devir çalışmayı arzu ediyoruz. Ama kullanılan singüler devirler, antolojisinin tümünde etkin bir şekilde çalışılmış olması çok muazzam olur. Doğal yöntem, eğer bir boyut yüksekliğinin bir zincirinin sınırının uyuşmayan biçimleri ise, iki devirin denk olduğu ilişki altında devirlerin denklik sınıfları için dikkatimizi sınırlamak olur.

Bu cebirsel teknik homolojik cebir içinde standart bir yapı olur. Bir G sınıflanmış abel grubu tamamı üzerinde işlem ile tamsayılar ile indekslenmiş $\{G_i\}$ abel gruplarının koleksiyonudur. Eğer G ve G' sınıflandırılmış abel gruplar ise $f: G \rightarrow G'$ homeomorfizimi bazı r sabit tamsayıları için $f_i: G_i \rightarrow G'_{i+r}$ $\{f_i\}$ homeomorfizimlerinin bir koleksiyonu olur. r f in derecesi olarak adlandırılır. Sınıflandırılmış bir abel grubunun bir $H \subseteq G$ alt grubu bir $\{H_i\}$ sınıflandırılmış grubu olur burada $H_i \subseteq G_i$ nin bir alt grubudur. G/H bölüm grubu $\{G_i/H_i\}$ nin sınıflandırılmış grubudur.

Abel gruplarının bir dizisi olan bir zincir kompleksi ve her bir n için $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ bileşkesi olacak şekilde

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

Homeomorfizimler olur. Benzer şekilde bir zincir kompleksi $\partial: C \rightarrow C$ homeomorfizimi ile birlikte derecesi -1 olan $C = \{C_i\}$ bir sınıflandırılmış gruptur öyle ki $\partial \circ \partial = 0$ dır. Eğer C ve C' ∂ ve ∂' sınır operatörleri ile zincir kompleksleri ise C den C' ye bir zincir dönüşümü $\Phi: C \rightarrow C'$ sıfırıncı dereceden bir homeomorfizim olur öyle ki her bir n için $\partial' \circ \Phi_n = \Phi_{n-1} \circ \partial$ dır. (Φ nin derecesinin sıfır olması şart değildir, bu özelliğin tüm zincir dönüşümleri için kolaylıkla söylenebileceği burada belirtildi.) $Z_*(C)$ ve $B_*(C)$ ile ifade edilen ∂ nın görüntüsü ve çekirdeği sırasıyla C nin homolojileri $H_*(C) = Z_*(C)/B_*(C)$ sınıflandırılmış grubudur. Eğer Φ bir zincir dönüşümü ise $\Phi(Z_*(C)) \subseteq Z_*(C')$ ve $\Phi(B_*(C)) \subseteq B_*(C')$ olur. bu yüzden $\Phi_*: H_*(C) \rightarrow H_*(C')$ homoloji grupları üzerinde bir homeomorfizim meydana getirir.

Bu anlamda $S_*(X) = \{S_i(X)\}$ sınıflandırılmış grubu ∂ sınır operatörü altında bir zincir kompleksi olur. öyle ki X in homoloji grupları bu zincir kompleksinin homolojisi olur. Eğer $f: X \rightarrow Y$ bir sürekli fonksiyon ve Φ X de bir singüler n -simpleks ise Y de $f_\#(\Phi) = f \circ \Phi$ singular n -simpleksi vardır. Her bir n için $f_\#: S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ homeomorfizimi için bu tek genişleme olur. $f_\# S_*(X)$ den $S_*(Y)$ ye bir zincir dönüşümü olduğunu göstermek için aşağıdaki dikdörtgen şema kontrol edilmelidir.

$$\begin{array}{ccc} & f_\# & \\ S_n(X) & \longrightarrow & S_n(Y) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ & f_\# & \\ S_{n-1}(X) & \longrightarrow & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

ilk olarak singüler Φ n simpleksler üzerinde bunun doğru olduğunu kontrol etmek yeterli olur ve

ikinci olarakta $\partial f_{\#}(\Phi) = f_{\#}\partial_i(\Phi)$ olduğunu göstermek için yeterli gözlem yapılmalıdır. Şimdi

$$\partial f_{\#}(\Phi)(t_0, \dots, t_{p-1}) = f(\Phi(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1})) \text{ ve}$$

$$\partial f_{\#}(\Phi)(t_0, \dots, t_{p-1}) = f_{\#}(\Phi)(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1})$$

$$= f(\Phi(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1})).$$

Bu yüzden $f_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ bir zincir dönüşümü olur ve $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ sıfırıncı dereceden bir homeomorfizmini meydana getirir. Bu uygun bir funktorsal anlam içinde $g: Y \rightarrow W$ bir sürekli fonksiyonu için ve $id: X \rightarrow X$ birim, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ ve id_* birim (özdeşlik) homeomorfizimidir.

İlk örnek olarak X i tek nokta olarak alalım o zaman her bir $p \geq 0$ için $\Phi_p: \sigma_p \rightarrow X$ singüler p - simpleksi tek olarak var olmalı öyle ki $p > 0$ için $\partial_i \Phi_p = \Phi_{p-1}$ dir. Öyleyse

$$\dots \rightarrow S_2(pt) \rightarrow S_1(pt) \rightarrow S_0(pt) \rightarrow 0$$

zincir kompleksini düşünelim. Her bir $S_n(pt)$ Φ_n ile üretilmiş sonsuz devirli bir gruptur. Sınır operatörü $\partial \Phi_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \Phi_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \Phi_{n-1}$ ile verildi. Bu yüzden $n > 0$ için $\partial \Phi_{2n} = \Phi_{2n-1}$ ve $\Phi_{2n-1} = 0$ dır. Uygulanan bu zincir kompleksinde $n > 0$ için $Z_n(pt) = B_n(pt)$ olduğu açıktır. Ama $Z_0(pt) = S_0(pt)$ sonsuz devirli olur. oysa $B_0(pt) = 0$ dır. Böylece biz bir noktanın homoloji gruplarının

$$H_n(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{eğer } n = 0 \\ 0 & \text{eğer } n > 0 \end{cases}$$

verildiği sonucunu çıkartabiliriz.

X bir yol bağlantılı uzay olsun. $x, y \in X$ ve $\Psi: [0, 1] \rightarrow X$ $\Psi(0) = x$ ve $\Psi(1) = y$ olacak şekilde bir sürekli fonksiyon var ise σ_i i $[0, 1]$ yerine kullanabiliriz.

X in bir yol bağlantılı uzay olduğunu varsayalım. Ve $S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X) \rightarrow 0$ ile verilen X in singüler zincir kompleksinin bölümünü düşünelim. Şimdi $S_0(X) = Z_0(X)$ öyle ki X in noktaları ile üretilmiş serbest abel grupları olarak değerlendirelim. Yani $Z_0(X) = F(X)$. Dolayısıyla $Z_0(X)$ in bir y elemanı $y = \sum_{x \in X} n_x \cdot x$ formuna sahiptir. Burada n_x bir tamsayı bazıları sıfıra eşit olabilir ama hepsi değil.

Diğer bir taraftan $S_1(X)$ X deki tüm yolların kümesi ile üretilen serbest abel grup olarak değerlendirilebilir. Eğer σ_1 in köşeleri v_0 ve v_1 ve ϕ X de singüler 1-simpleks ise o zaman $\partial\phi = \phi(v_1) - \phi(v_0) \in Z_0(X)$ dir.

$\alpha(\sum n_x \cdot x) = \sum n_x$ ile $\alpha: S_0(X) \rightarrow Z$ ye bir homeomorfizm tanımlayalım. Eğer X boştan farklı ise o zaman α bir epimorfizm olur. X de ϕ bazı singüler 1-simpleksler için $\alpha(\partial\phi) = \alpha(\phi(v_1) - \phi(v_0)) = 0$ olduğundan dolayı $B_0(X)$ in α nın çekirdeğinde içerildiği sonucu çıkarılabilir.

Tersine , $\sum n_i = 0$ ile $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k \in Z_0(X)$ olduğunu varsayalım. $x \in X$ herhangi bir noktasını seçelim ve her bir i için $\partial_1(\phi_i) = x$ ve $\partial_0(\phi_i) = x_i$ olacak şekilde $\phi_i: \sigma_1 \rightarrow X$ singüler 1-simpleks var olsun. $S_1(X)$ de alınan $\sum n_i \phi_i$ singüler 1-zincirinde $\partial(\sum n_i \phi_i) = \sum n_i x_i - (\sum n_i)x = \sum n_i x_i$ özelliğine sahibiz. Böylece α nın çekirdeği $B_0(X)$ de içerilir. Bu α nın çekirdeğinin $B_0(X)$ e eşit olduğunu ispatlar. Ve biz aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

3.1.4.Önerme: Eğer X boştan farklı yol bağlantılı grup ise o zaman $H_0(X) \approx Z$ dir.

A bir küme ve her bir $\alpha \in A$ için G_α bir abel grubu verilmiş olsun. $\sum_{\alpha \in A} G_\alpha$ bir abel grubunu aşağıdaki gibi tanımlayalım. Elemanları $f: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ şeklindeki tüm fonksiyonlar olsun öyle ki $f(\alpha) \in G_\alpha$ her bir α için ve $\alpha \in A$ bazı elemanları fakat sonlu sayıda $f(\alpha) = 0$ dir, buradaki işlem $(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$ ile tanımlandı. Verilen $g(\alpha) = f(\alpha) \in G_\alpha$ yı biz $f = (g_\alpha : \alpha \in A)$

şeklinde yazarız ve g_α ları f in bileşenleri olarak adlandırırız. $\sum G_\alpha$ grubu G_α ların direkt kuvvet toplamları veya direkt kuvvet çarpımları olur ve $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ ile ifade edilir.

Eğer G bir abel grup ve $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ G nin alt gruplarının bir ailesi öyle ki $g \in G$ $g_\alpha \in G_\alpha$ ile $g = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha$ şeklinde tek bir gösterime sahip ve burada α ların tümü için ama çoğu sonlu $g_\alpha = 0$ ise o zaman $G \cong \sum_{\alpha \in A} G_\alpha$ ya izomorfik olduğu belirtilmelidir. Şimdi her bir $\alpha \in A$ için bir C^α zincir kompleksine sahip olduğumuzu varsayalım.

$$\dots \xrightarrow{\partial^\alpha} C_p^\alpha \xrightarrow{\partial^\alpha} C_{p-1}^\alpha \xrightarrow{\partial^\alpha} \dots$$

$\sum_{\alpha \in A} C^\alpha$ bir zincir kompleksi tanımlayalım, burada $(\sum C^\alpha)_p = \sum C_p^\alpha$ kabul edildi ve $\partial(c_\alpha; \alpha \in A) = (\partial^\alpha C_\alpha; \alpha \in A)$ ile verildi.

3.1.5. Lema: $H_k(\sum C^\alpha) \approx \sum_\alpha H_k(C^\alpha)$ dır.

İspat: $\sum C^\alpha$ zincir kompleksinin tanımı ile biz $Z_k(\sum C^\alpha) = \sum(Z_k(C^\alpha))$ ve $B_k(\sum C^\alpha) = \sum(B_k(C^\alpha))$ ya sahibiz. Böylece $H_k(\sum C^\alpha) = Z_k(\sum C^\alpha) / B_k(\sum C^\alpha) = \sum(Z_k(C^\alpha)) / \sum(B_k(C^\alpha))$

$$\approx \sum(Z_k(C^\alpha) / B_k(C^\alpha)) = \sum H_k(C^\alpha) \text{ dır.}$$

X bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ için $x \sim y$ küme, eğer X de x den y ye bir yol var ise $\sim$ nın bir denklik bağıntısı olduğu açıktır, yani X deki tüm x, y, z noktaları için

- (1) $x \sim x$
- (2) $x \sim y$ ve $y \sim z$ ise $x \sim z$ anlamına gelir
- (3) $x \sim y$ ise $y \sim x$ anlamına gelir.

Böyle bir bağıntı X in alt kümelerinin bir koleksiyonu şeklinde X i denklik sınıflarına ayırır. Burada x ve y aynı denklik sınıfındadır ancak ve ancak $x \sim y$ dir. X de bu kesin bağıntı için denklik sınıfları X in yol bileşenleri olarak adlandırılır. Eğer $x \in X$ x i içeren X in yol bileşeni x i içeren X in maksimal yol bağlantılı alt kümesi olur.

3.1.6.Önerme: Eğer X bir uzay, ve $\{ X_\alpha: \alpha \in A \}$ X in yol bileşenleri ise o zaman $H_k(X) \approx \sum_{\alpha \in A} H_k(X_\alpha)$ dır.

İspat: $\Psi((\sum_{\phi} n \phi, \alpha))$. $\Phi_\alpha: \alpha \in A \rightarrow \sum_{\phi \in A} (\sum_{\phi} n \phi, \alpha \Phi_\alpha)$ ile verilen $\Psi: \sum_{\alpha \in A} S_k(X_\alpha) \rightarrow S_k(X)$ doğal bir homeomorfizim vardır. Yer alan gruplar serbest abel gruplar olduğu için Ψ bir monomorfizm olmalı. Ψ nin aynı zamanda bir epimorfizm olduğu yorumunda bulunmak için ilk olarak dikkat edilmesi gereken eğer $\Phi: \sigma_k \rightarrow X$ bir singüler k -simpleks ise o zaman $\Phi(\sigma_k)$ bazı X_α larda içerilir çünkü σ_k yol bağlantılıdır. Dolayısıyla herhangi bir böyle Φ için bağdaştırılan $\Psi(\Phi_\alpha) = \Phi$ ile $\Phi_\alpha \in S_k(X_\alpha)$ bir tek olmalı. Bu yüzden Ψ herhangi bir k için bir izomorfizmdir. Ayrıca Ψ zincir kompleksleri arasında bir zincir dönüşümüdür öyle ki $H_k(X) \approx H_k(\sum_{\alpha \in A} S_*(X_\alpha))$ dır. Sonuç olarak lema 3,1.5 den $H_k(\sum_{\alpha \in A} S_*(X_\alpha)) \approx H_k(X)$ ile ispatın tamamlandığı anlamına gelir.

Bu önerme singüler homoloji teoreminin özünde var olan toplama özelliğini oluşturur. Bir uzayın homolojik özellikleri onun yol bileşenleri ile tam olarak kararlı olduğu ve herhangi bir yol bileşenin homolojik özellikleri diğer herhangi bir yol bileşenin özelliklerinden bağımsız olduğu için biz dikkatimizi yol bağlantılı uzayların çalışması ile sınırlayabiliriz.

Önerme 3.1.6 ve 3.1.4 den X in yol bileşenleri ile birebir eşleşmesinde $H_0(X)$ abel grubunun bir tabanı olduğu anlamına geldiğine dikkat edilmelidir.

3.1.7.Teorem: Eğer $f: X \rightarrow Y$ bir homeomorfizim ise o zaman $f_*: H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$ her bir p için izomorfizmdir.

Aslında bu terem, singüler homoloji gruplarının topoloji değişmezliğini, singüler homoloji teori kullanımının büyük avantajlarından biri olduğu kolayca görülebilir.

3.1.8.Teorem: Eğer $X \subset \mathbb{R}^n$ in konveks bir alt kümesi ise o zaman $p > 0$ için $H_p(X) = 0$ dır.

İspat: $X \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım ve $x \in X$ $p \geq 0$ için $\Phi: \sigma_p \rightarrow X$ bir p -simpleks olsun o zaman aşağıdaki gibi $\theta: \sigma_{p+1} \rightarrow X$ bir singüler $(p+1)$ -simpleks tanımlayalım.

$= (1-t_0) \cdot \Phi(t_1/(1-t_0), \dots, t_{p+1}/(1-t_0)) + t_0 x$. Bu yüzden $1 \leq i \leq k+1$ için $\partial_i T\Phi = T(\partial_{i-1}\Phi)$ dir.

Şimdi Φ herhangi bir k -simpleks olsun.

$$\partial T\Phi = \partial_0 T\Phi + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \partial_i T(\Phi)$$

$$= \partial_0 T\Phi + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \partial_i T(\Phi) - [\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \partial_{i-1}(\Phi) + \sum_{j=0}^k (-1)^j T\partial_j \Phi] = \Phi - T\partial\Phi.$$

Bu yüzden her zaman $k \geq 1$ için $S_k(X)$ üzerinde $\partial T + T\partial$ birim homeomorfizimi olduğu özelliği ile $T: S_k(X) \rightarrow S_{k+1}(X)$ bir homeomorfizim yapısına sahibiz.

Şimdi $z \in Z_p(X)$ in bir elemanı olsun. yukarda sözü edilenden $p > 0$ için $(\partial T + T\partial)z = z$ dir.

Şimdi z bir devir olduğu için $T\partial z = 0$ dir. Bu yüzden $z = \partial(Tz)$ ve $z \in B_p(X)$ de olur. bu tüm $p > 0$ için $H_p(X) = 0$ olduğu anlamına gelir.

Teorem 3.1.8 in ispatında kullanılan yapı zincir kompleksleri arasındaki zincir homotopisinin özel bir durumudur. $C = \{C_i, \partial\}$ ve $C' = \{C'_i, \partial'\}$ zincir kompleksleri ve $T: C \rightarrow C'$ birinci dereceden derecelendirilmiş grupların bir homeomorfizimi olsun(ama illede bir zincir dönüşümü olmayabilir). O zaman $\partial'T + T\partial: C \rightarrow C'$ sıfırıncı dereceden homeomorfik olarak düşünelim. Bu bir zincir dönüşümü olacaktır çünkü $\partial'(\partial'T + T\partial)$

$$= \partial'\partial'T + \partial'T\partial = \partial'T\partial = \partial'T\partial + T\partial\partial = (\partial'T + T\partial)\partial \text{ dir.}$$

Bu $(\partial'T + T\partial)$ zincir dönüşümü her bir p için $(\partial'T + T\partial)_*: H_p(C) \rightarrow H_p(C')$ homolojisine bir homeomorfizim meydana getirir. Şimdi eğer $z \in Z_p(C)$, $B_p(C)$ de $(\partial'T + T\partial)(z) = \partial'T(z)$ olur. Bu yüzden $(\partial'T + T\partial)_*$ her bir p için sıfır homeomorfizim olur.

f ve $g: C \rightarrow C'$ verilen zincir dönüşümleri f ve g zincir homotopileri olur eğer

$\partial'T + T\partial = f - g$ ile derecesi bir olan $T: C \rightarrow C'$ homeomorfizimi var ise.

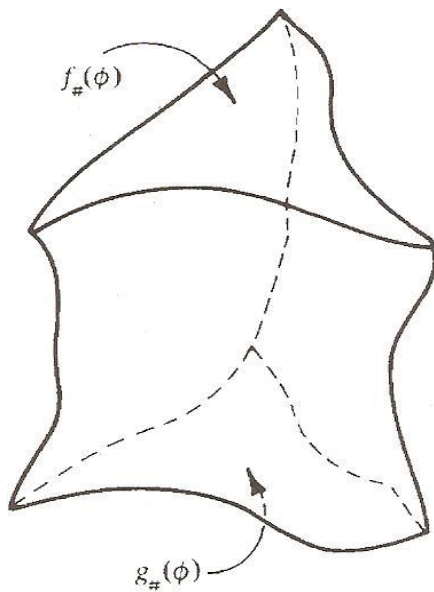
3.1.9.Önerme: Eğer f ve $g: C \rightarrow C'$ zincir homotopilerinin zincir dönüşümleri ise o zaman

$f_* = g_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$ ne homeomorfizimler olur.

İspat: Eğer $T: C \rightarrow C'$ f ve g arasında zincir homotopisi ise o zaman $0 = (\partial'T + T\partial)_* = (f-g)_* = f_* - g_*$ olduğu için doğrudan doğruya bu sonuç çıkar. Bir özel durum olarak $f_\#$ ve $g_\#: S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ f ve $g: X \rightarrow Y$ dönüşümleri olduğunu kabul edelim. Eğer $T: f_\#$ ve $g_\#$ arasında bir zincir homotopisi ise o zaman T aşağıdaki yol içinde geometrik olarak yorumlanabilir.

$\Phi \in X$ de bir singüler n -simpleks olsun. o zaman $T(\Phi)$ $f_\#(\Phi)$ nin $g_\#(\Phi)$ içine sürekli bir şekil korumayan dönüşümü olarak değerlendirilebilir. Şekil 1.4 den $T(\Phi)$ $T(\partial\Phi)$ kenarları ve $f_\#(\Phi)$ ve $g_\#(\Phi)$ uçları ile bir prizma gibi görünür. Bu yüzden T nin bir zincir homotopisi olması için cebirsel koşul $\partial T(\Phi) = f_\#(\partial\Phi) - g_\#(\partial\Phi)$ ifadesidir.

Eğer $c = \sum m_i \Phi_i$ zinciri X de bir n döngü ise o zaman $f_\#(c)$ ve $g_\#(c)$ Y de n döngüler olurlar. $T(c)$ böyle prizmaların integral katlarının koleksiyonu olur ve $\partial c = 0$ olduğu için kenarların cebirsel toplamı sıfır olmalıdır. Bu yüzden $T(c)$ nin sınırları $f_\#(c) - g_\#(c)$ şeklindeki prizmaların uçlarının cebirsel toplamı olur burada $f_\#(c)$ ve $g_\#(c)$ Y de homolog döngülerdir.



Şekil 1.4

Verilen X ve Y uzaylarında $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ iki dönüşüm homotopik olurlar, eğer X deki tüm x ler için $F(x, 0) = f_0(x)$ ve $F(x, 1) = f_1(x)$ ile $F: X \times I \rightarrow Y, I = [0, 1]$ bir dönüşümü var ise. F dönüşümü f_0 ve f_1 arasında homotopidir. Benzer şekilde t ile sürekli olarak değişiklik gösteren X den Y ye $\{f_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ dönüşümlerinin bir ailesi homotopi olur. Homotopi bağıntısının X den Y ye tüm dönüşümlerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. Dönüşümlerin homotopi sınıflarının kümesi genellikle $[X, Y]$ ile ifade edilecektir.

3.1.10. Teorem: Eğer $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ homotopik dönüşümler ise o zaman $H_*(X)$ den $H_*(Y)$ ye homeomorfizimler olarak $f_0_* = f_{1*}$ dır.

İspat: İspatın amacı oldukça basittir: Eğer $z \in X$ de bir devir ise o zaman f_0 ve f_1 altında z nin görüntüsü Y de devirler olacaktır. f_0, f_1 içine sürekli olacak şekilde şekil korumayan bir dönüşümü olacağından f_0 altında z nin görüntüsünü f_1 altında z nin görüntüsü içine benzer sürekli bir şekil korumayan dönüşümü kabul edeceğiz. Bu iki görüntünün homolog devirler olduğu anlamına gelir. Biz şimdi yaygın cebir temelleri içine bu geometrik düşünceleri koymaya devam edeceğiz.

Önerme 3.1.9 göz önüne alınarak $f_0, f_1: S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ zincir dönüşümlerinin zincir homotopileri olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $F: X \times I \rightarrow Y$ f_0 ve f_1 arasında bir homotopi olsun. $g_0(x) = (x, 0)$ ve $g_1(x) = (x, 1)$ ile $g_0, g_1: X \rightarrow X \times I$ görüntülerini tanımlayalım. O zaman aşağıdaki çizerek her bir üçgen değişmelidir, yani $f_0 = F \circ g_0$ ve $f_1 = F \circ g_1$ dir.

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 g_0 \downarrow & \forall f_0 & \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & Y \\
 g_1 \downarrow & \nearrow f_1 & \\
 X & &
 \end{array}$$

Şimdi $g_{0\#}$ ve $g_{1\#}$ nin $S_*(X)$ den $S_*(XxI)$ ya zincir dönüşümleri olarak zincir homotopileri olduğunu varsayalım. Bu $\partial T + T\partial = g_{0\#} - g_{1\#}$ ile derecesi bir olan

$T: S_*(X) \rightarrow S_*(XxI)$ bir homeomorfizim var olduğu anlamına geldi. İki tarafada $F_{\#}$ uygularsak $F_{\#}(\partial T + T\partial) = F_{\#}(g_{0\#} - g_{1\#})$ veya $\partial(F_{\#}T) + (F_{\#}T)\partial = f_{0\#} - f_{1\#}$ yi verir. O zaman $F_{\#}T f_{0\#}$ ve $f_{1\#}$ arasında bir zincir homotopisi ve birinci dereceden $S_*(X)$ den $S_*(Y)$ ye bir homeomorfizim olur. Bu yüzden $g_{0\#}$ ve $g_{1\#}$ nin zincir homotopileri olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

σ_n standart n -simpleksi için birim dönüşüm ile simgelenen elemanlar $\tau_n \in S_n(\sigma_n)$ ile ifade edilir. Eğer $\Phi: \sigma_n \rightarrow X$ X de her hangi bir n -simpleks ise o zaman $\Phi_{\#}: S_n(\sigma_n) \rightarrow S_n(X)$ meydana getirilen homeomorfizim $\Phi_{\#}(\tau_n) = \Phi$ sahip olduğu belirtilmelidir. X de singüler her simpleksin bu tarzda τ_n in görüntüsü olarak sergilenebileceği açıktır. İspatımızın yönteminden gerekli τ_n yapısı ilk olarak verilecek ve yukarıdaki yaklaşım ile $S_n(X)$ in tümü için genişletilecek.

Biz zincir gruplarının boyutları üzerinde tüme varım yöntemiyle $g_{0\#}$ ve $g_{1\#}$ arasında bir T zincir homotopisini inşa ettik. Tümevarım yapmak için ilk adım $n > 0$ ve tüm X uzayları için $i < n$ tamsayıları $T: S_i(X) \rightarrow S_{i+1}(XxI)$ bir homeomorfizimi var öyle ki

$\partial T + T\partial = g_{0\#} - g_{1\#}$ olduğunu varsayalım. Daha ilerisi uzayların $h: X \rightarrow W$ verilen herhangi bir dönüşümünün var olduğunu var saydık ki bu olağandır. Tüm $i < n$ için diyagramda değişmeliliğe sahip olduğunu varsayalım.

$$\begin{array}{ccc} T: S_i(X) & \xrightarrow{T_X} & S_{i+1}(XxI) \\ \downarrow h_{\#} & & \downarrow (hxid)_{\#} \\ T: S_i(W) & \xrightarrow{T_W} & S_{i+1}(WxI) \end{array}$$

X in n zincirleri üzerinde T tanımlamak için singüler n simpleksler üzerinde T tanımlamak yeterli olur. Bu yüzden $\Phi: \sigma_n \rightarrow X$ singüler n simpleks olsun ve $\Phi_{\#}(\tau_n) = \Phi$ olduğunu hatırlayalım. Böylelikle $T_{\sigma_n}: S_n(\sigma_n) \rightarrow S_{n+1}(\sigma_n x I)$ ile tanımlanan yapının doğallığı $T_x(\Phi) = T_x(\Phi_{\#}(\tau_n)) = (\Phi x id)_{\#}(T_{\sigma_n}(\tau_n))$ olmasını gerektirecek. Bu yüzden T_x tanımı için $S_n(\sigma_n)$ de T_{σ_n} tanımlamak yeterli olur.

$d \in \sigma_n$ içinde bir singüler n -simpleks olsun ve $S_{n-1}(\sigma_n)$ de olan ∂d için tümevarım hipotezi ile tanımlanan $c = g_{0\#}(d) - g_{1\#}(d) - T_{\sigma_n}(\partial d)$, ile verilen $S_n(\sigma_n \times I)$ deki zinciri düşünelim. Önden gelen tartışmadan σ_n deki belli bir prizmanın sınırlarına karşılık gelen c belirtilmelidir. O zaman $\partial c = \partial g_{0\#}(d) - \partial g_{1\#}(d) - \partial T_{\sigma_n}(\partial d) = g_{0\#}(\partial d) - g_{1\#}(\partial d) - [g_{0\#}(\partial d) - g_{1\#}(\partial d) - T_{\sigma_n} \partial(\partial d)] = 0$. Böylece c $\sigma_n \times I$ konveks kümesinde n boyutlu bir devir olur. Teorem 4.8 den c nin aynı zamanda bir sınır olduğu sonucu çıkarılabilir. Bu yüzden $\partial b = c$ ile $b \in S_{n+1}(\sigma_n \times I)$ olsun. Geometrik olarak b sınırı c olan içi dolu prizmadır. O zaman $T_{\sigma_n}(d) = b$ yi tanımlayalım ve $\partial T(d) + T \partial(d) = g_{0\#}(d) - g_{1\#}(d)$ olduğunu gözlemleyelim.

Şimdi herhangi bir $\Phi: \sigma_n \rightarrow X$ singüler n simpleksini tanımlamak için ilk olarak

$T_x(\Phi) = (\Phi x id)_{\#}(T_{\sigma_n}(\tau_n))$ tanımlayalım. Böylelikle üreteç üzerinde tanımlanan

$T_x: S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)$ bir homeomorfizim için bir tek genişleme vardır. Bu tümevarımsal yapı sıfır zincirler üzerinde T için uygun tanımı gösterir. σ_0 ın bir nokta olduğunu hatırlatalım ve $c = g_{0\#}(\tau_0) - g_{1\#}(\tau_0)$ ile verilen $S_0(\sigma_0 \times I)$ deki c zincirini düşünelim. $T_{\sigma_0}(\tau_0) = b$ tanımlayalım ve $g_{0\#}(\tau_0) - g_{1\#}(\tau_0)$ sınırı ile $\sigma_0 \times I$ da singüler bir b 1-simpleksini alalım. Bu aynı teknik ile 0-zincirler üzerinde T tanımlar.

Sonuç olarak X in n -zincirleri üzerinde T_x için verilen tanımda $\partial T_x + T_x \partial = g_{0\#} - g_{1\#}$ ve $h: X \rightarrow W$ dönüşümleri ile ilgili olarak uygun doğal yapı olduğu belirtilmelidir. Eğer $\Phi: \sigma_n$ de singüler bir n -simpleks ise $g_{0\#}(\Phi) = g_{0\#} \Phi_{\#}(\tau_n) = (\Phi x id)_{\#}(g_{0\#}(\tau_n))$ ve benzer şekilde $g_{1\#}(\Phi) = g_{1\#} \Phi_{\#}(\tau_n) = (\Phi x id)_{\#}(g_{1\#}(\tau_n))$ olduğu belirtilmelidir. Şimdi

$$\partial T(\Phi) + T \partial(\Phi) = \partial T \Phi_{\#}(\tau_n) + T \partial \Phi_{\#}(\tau_n) = \partial(\Phi x id)_{\#} T(\tau_n) + T \Phi_{\#} \partial(\tau_n)$$

$= (\Phi x id)_{\#} \partial T(\tau_n) + (\Phi x id)_{\#} T \partial(\tau_n) = (\Phi x id)_{\#} (g_{0\#}(\tau_n) - g_{1\#}(\tau_n)) = g_{0\#}(\Phi) - g_{1\#}(\Phi)$. Doğal olarak benzer sonuçlar çıkarılır. Böylece T_x $g_{0\#}$ ve $g_{1\#}$ arasında bir zincir homotopisi verir ve biz $f_{0*} = f_{1*}$ olduğunun ispatını tamamlamış olduk.

Bunun teorem4.8 deki yönteme genelleştirildiği belirtilmelidir. Orada biz X konveks olduğu için birim dönüşümün x noktasının içine X in tüm gönderimlerinin homotopik olduğu gerçeğini kullandık. Bu nedenle pozitif boyutlarda birim homeomorfizm ve trivial(aşıkâr) homeomorfizm ile çakışır ve X in pozitif boyutlu homolojisi trivial(aşıkâr) dır.

$f:X \rightarrow Y$ ve $g:Y \rightarrow X$ topolojik uzayların dönüşümleri olsun. Eğer $f \circ g$ ve $g \circ f$ bileşkeleri kendi birim dönüşümüne her biri homotopik olursa o zaman f ve g birbirinin homotopi tersleri olurlar. $f:X \rightarrow Y$ bir homotopi özdeşlik dönüşümü eğer f bir homotopi tersine sahipse bu durumda X ve Y nin aynı homotopi tipine sahip olduğu söylenir.

3.1.11.Önerme: Eğer $f:X \rightarrow Y$ ye bir homotopi özdeşliği ise o zaman $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ her bir n için bir izomorfizmdir.

 spat: Eğer g f için bir homotopi ters ise o zaman teorem3.1.10 ile $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = \text{birim}$ ve $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \text{birim}$ öyle ki $g_* = f_*^{-1}$ ve f_* bir izomorfizmdir.

$i:A \rightarrow X$ X in A alt uzayının içerme gönderimi olduğunu varsayalım. $g:X \rightarrow A$ bir dönüşüm öyle ki A da birim olan $g \circ i$ X in A üstüne bir geri gönderimi olur. Eğer  stelik $i \circ g:X \rightarrow X$ bileşkesi birime homotopik ise o zaman g şekil korumayan geri gönderimi olur ve A , X in şekil korumayan bir geri g nderimidir. Bu durumda i nin bir homotopi özdeşliği olduğu belirtilmelidir.

3.1.12.Sonuç: Eğer $i:A \rightarrow X$, X in A geri gönderiminin kapsaması ise o zaman

$i_*: H_*(A) \rightarrow H_*(X)$ bir direkt toplam üzerinde bir monomorfizmdir. Eğer A , X in şekil korumayan geri dönüşümü ise o zaman i_* bir izomorfizmdir.

 spat: İkinci ifade önerme 3.11 den doğrudan doğruya gösterilebilir. İlkini ispatı için $g:X \rightarrow A$ bir geri gönderim olsun o zaman $H_*(A)$ üzerinde $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = \text{birim}$ dir. Dolayısıyla i_* monomorfizmdir.

$G_1 = i_*$ ın görüntüsü $G_2 = \text{çekirdek } g_*$ ile $H_*(X)$ in alt gruplarını tanımlayalım. $\alpha \in G_1 \cap G_2$ olsun öyle ki $\alpha = i_*(\beta)$ bazı $\beta \in H_*(A)$ için $g_*(\alpha) = 0$.

$0 = g_*(\alpha) = g_*i_*(\beta) = \beta$ öyle ki $i_*(\beta) = \alpha$ sıfır olmalı. Diğer taraftan $\gamma \in H_*(X)$ olsun. o zaman $\gamma = i_*g_*(\gamma) + (\gamma - i_*g_*(\gamma))$ G_1 içindeki bir eleman ve G_2 içindeki bir elemanın toplamı olarak γ yi ifade ettik. Bu yüzden $H_*(X) \approx G_1 \oplus G_2$ ve ispat tamamlanmış oldu.

$$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \text{ abel grubunun bir üçlüsü ve kesin homeomorfizm olurlar eğer}$$

görüntü $f = \text{çekirdek } g$ ise .

$$\dots \rightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} \dots$$

Abel gruplarının bir dizisi ve homeomorfizimler kesindir eğer her bir üçlü kesin ise.

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$$

bir tam dizi kısa tam olarak adlandırılır. Bu $h: G_1 \rightarrow G_1$ bir izomorfizmdir ancak ve ancak

$$0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{h} G_2 \rightarrow 0 \text{ tam olduğu anlayışı içinde izomorfizm kavramının bir genelleştirmesi olur.}$$

Yukarıda kısa bir tam dizi içinde $C' \subseteq D$ alt grup ile C özdeşleştirildiği ve f in bir monomorfizm olduğunu belirtelim. Hem de C' çekirdeği ile g bir epimorfizmdir. Bu yüzden

$$\text{izomorfizme kadar dizi henüz } 0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} D \xrightarrow{\pi} D/C' \rightarrow 0 \text{ dır.}$$

Şimdi $C = \{C_n\}$, $D = \{D_n\}$ ve $E = \{E_n\}$ zincir kompleksleri olduğunu ve $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ nin f ve g sıfırıncı dereceden zincir dönüşümleri olmak üzere bir kısa tam dizi olduğunu varsayalım. Dolayısıyla, her bir p için homoloji gruplarının bir eşlenik üçlüsü $H_p(C) \xrightarrow{f_*} H_p(D) \xrightarrow{g_*} H_p(E)$ vardır. Biz şimdi kısa tam olan bu bölünmenin nasıl olduğunu tam olarak incelemek istiyoruz.

Bu yüzden biz satırları kısa tam diziler olan ve her bir karesi değişmeli olan sonsuz bir diyagrama sahip olduğumuzu varsayalım.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f} & D_n & \xrightarrow{g} & E_n \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & \\
 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f} & D_{n-1} & \xrightarrow{g} & E_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

$z \in Z_n(E)$ olsun, yani $z \in E_n$ ve $\partial z = 0$ dır. g bir epimorfizm olduğu için $g(d) = z$ ile $d \in D_n$ bir elemanı vardır. g nin bir zincir dönüşümü olduğu gerçeğinden biz $g(\partial d) = \partial(g(d)) = \partial z = 0$ a sahibiz. Tamlık f in görüntüsü içinde ∂d olduğu böylece $f(c) = \partial d$ ile $c \in C_{n-1}$ olduğu anlamına gelir. $c \in Z_{n-1}(C)$ ve ∂c sıfır olmalı, f bir monomorfizm olduğu için ve $f(\partial c) = \partial f(c) = \partial(\partial d) = 0$ olduğunu belirtelim.

$Z_n(E)$ nin $Z_{n-1}(C)$ içine $z \rightarrow c$ gönderimi yapı içindeki mümkün seçenekler sayılar olduğu için devirlerden devirlere iyi tanımlı bir fonksiyon değildir. Ama, biz şimdi homoloji grupları üzerinde eşlenik gönderiminin iyi tanımlı bir homeomorfizm olduğunu göstereceğiz.

$z, z' \in Z_n(E)$ nin homolojik devirleri olsun. Böylece $\partial(e) = z - z'$ ile $e \in E_{n+1}$ elemanı vardır. $g(d) = z, g(d') = z'$ ile $d, d' \in D_n$ ve $f(c') = \partial d', f(c) = \partial d$ ile $c, c' \in C_{n-1}$ olsun. Biz c ve c' nün homolog döngüler olduğunu göstermeliyiz.

$g(a)=e$ ile $a \in D_{n+1}$ olacak şekilde bir elemanı vardır. Değişme özelliği ile $g(\partial a) = \partial g(a) = \partial e = z - z'$, böylece biz $(d-d') - \partial a$ nın g nin çekirdeğinde olduğunu dolayısıyla hem de f in görüntüsünde olduğunu gözleyelim. $F(b) = (d-d') - \partial a$ ile $b \in C_n$ olsun. Şimdi biz $f(\partial b) = \partial f(b) = \partial((d-d') - \partial a) = \partial d - \partial d' = f(c) - f(c') = f(c - c')$ ye sahibiz. f birebir olduğu için $c - c' = \partial b$ ve c ve c' homolog devirler olduğu anlamına gelir. Böylece, homoloji grupları üzerinde meydana getirilen gönderim iyi tanımlanmış oldu ve açık bir şekilde homeomorfizm olmalıdır.

Bu homeomorfizm $\mathbf{A}: H_n(E) \rightarrow H_{n-1}(C)$ ile ifade edildi ve $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$

Kısa tam dizisi için bağlantı homeomorfizmi olarak adlandırılır.

3.1.13. Teorem: Eğer $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ zincir komplekslerinin bir kısa tam dizisi ve zincir dönüşümlerinin derecesi sıfır ise o zaman

$$\dots \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_*} \dots$$

Uzun tam dizisi tamdır.

Bağlantı homeomorfizminin uygun doğal yapısının belirtilmesi önemlidir, yani

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Eğer zincir kompleksinin bir diyagramı olan ve satırlar tam, dikdörtgenler değişmeli derecesi sıfır olan zincir dönüşümleri ise o zaman özdeşlik diyagramının her bir dikdörtgeninde değişme özelliği geçerlidir.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \longrightarrow & H_n(D) & \xrightarrow{g_*} & H_n(E) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \longrightarrow \dots \\ & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* \\ \dots \longrightarrow & H_n(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(E') & \xrightarrow{\Delta'} & H_{n-1}(C') & \xrightarrow{f'_*} H_{n-1}(D') \longrightarrow \dots \end{array}$$

X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ bir alt uzayı olsun. A nın içi ($Int A$) A da ihtiva edilen X in tüm açık alt kümelerinin birleşimi olur veya benzer şekilde X de açık olan A nın maksimal alt kümesidir. X in alt kümelerinin $\mathcal{U}$ koleksiyonu X in bir örtümü olur eğer $X \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ verilen bir $\mathcal{U}$ koleksiyonunda $Int \mathcal{U}$ $\mathcal{U}$ nun elemanlarının içlerinin koleksiyonu olsun. Biz bu $\mathcal{U}$ lar içinde X in bir örtümü olan $Int \mathcal{U}$ ile ilgileneceğiz.

X in her hangi bir $\mathcal{U}$ örtümü için $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ ile bazı $U \in \mathcal{U}$ de içerilen $\Phi(\sigma_n)(\phi: \sigma_n \rightarrow X)$ singüler n -simpleksleri ile üretilen $S_n(X)$ in alt grubunu ifade edeceğiz. O zaman her bir i için

$$\text{görüntü } \partial_i \phi \subseteq \text{görüntü } \phi$$

yani tam sınırlı

$$\partial: S_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$$

böylece X in herhangi bir $\mathcal{U}$ örtümü ile özdeşleşen $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ bir zincir kompleksi var ve doğal kapsamı $i: S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*(X)$ bir zincir dönüşümüdür. Eğer $\mathcal{V}$ V uzayının bir örtümü ise $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm öyle ki her bir $U \in \mathcal{U}$ için $f(U)$ $\mathcal{V}$ nin en az bir V kümesinde içeriliyorsa o zaman $f_{\#}: S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*^{\mathcal{V}}(Y)$ bir zincir dönüşümü var ve $f_{\#} \circ i_x = i_y \circ f_{\#}$ olduğunu dikkat edilmelidir.

Biz şimdi uzayların homoloji gruplarının içinde çalışılan asıl hesaplamasal aletler olarak teoremi sunmaya hazırız.

3.1.14. Teorem: Eğer $\mathcal{U}$ X in alt kümelerinin bir ailesi öyle ki $Int \mathcal{U}$ X in bir örtümü ise o zaman $i_*: H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \rightarrow H_n(X)$ her bir n için izomorfizmdir.

İspat makalenin uzun süren kesintisinden kaçınmak için ek'e bırakıldı. Bu ispatın, konu dışı veya ilgi çekici olmadığı anlamına geldiği varsayılmamalıdır. Aslında bu tez homotopi teori ve homoloji teori arasındaki temel farkın ayırt edici özelliği olmaktadır. Sezgisel olarak bu teoremin ispatının yöntemi açıktır. X de verilen bir c zincirinden biz X den bir c' zincirini inşa

etmeliyiz. öyle ki c' i'nin görüntüsündedir ve $\partial c = \partial c'$ dür. Ayrıca eğer c bir devir ise bir c' nün c ye homolog olmasını isteyeceğiz. Bu sonuçlanan zincir istenen c' oluncaya kadar c zincirinin tekrar tekrar “alt bölünmesi” ile yapılır. Alt bölünme tekniği homoloji teoride mümkündür. Çünkü bir n -simpleks daha küçük n simplekslerin bir koleksiyonuna bölünmüş olabilir. Ama kürenin alt bölümü daha küçük kürelerin bir koleksiyonu sonucunda elde edilemez. Böyle bir yapının yokluğu bir küre olarak basit şekilde uzaylar için homotopi gruplarını hesaplamasını son derece zor yapar.

$Int \mathcal{U}$ nun X i kapsamasının gerekli olduğu koşulu görmek için $X=S^l$, $x_0 \in S^l$ ve $\mathcal{U}=\{\{x_0\}, S^l-\{x_0\}\}$ olsun o zaman $S_1^{\mathcal{U}}(S^l)$ de herhangi bir c zinciri $S^l-\{x_0\}$ da bir c_2 zinciri ve $\{x_0\}$ da c_1 zincirinin toplamı olarak tek olarak yazılabilmeli. Ayrıca c_2 nin görüntüsü

$S^l-\{x_0\}$ in kompakt bir alt kümesinde içerildiği için c bir devir olacaktır. Ancak ve ancak c_1 ve c_2 her biri devirler olmalıdır. Şimdi hem c_1 hem de c_2 aynı zamanda sınırlı olacağından dolayısıyla $H_1(S_*^{\mathcal{U}}(S^l))=0$ olur. Ama o $H_1(S^l) \approx \mathbb{Z}$ olduğunu hemen göstermiş olacak.

Teorem 3.14 ün ilk uygulaması X in bir $\mathcal{U}$ örtüsünün parçalarının homoloji bakımından bir X uzayının homolojisini çalışmak için bir tekniğin geliştirilmesi olacak. Aşikâr olmayan en basit durumda $\mathcal{U}$ örtümü $Int U \cup Int V = X$ olacak şekilde U ve V iki alt kümesini içermektedir. Kolaylık için U deki tüm singüler n simplekslerin kümesi A' , V deki tüm n simplekslerinin kümesi de A'' olsun. O zaman $S_n(U)=F(A')$, $S_n(V)=F(A'')$ dür. $h(a_i', a_j'')=a_i'+s_j''$ ile verilen $h:F(A') \oplus F(A'') \rightarrow F(A' \cup A'')$ doğal bir homeomorfizm var olduğu belirtilmektedir. h in bir epimorfizm olduğunu görmek zor değildir. Diğer yandan $g(b_i) = (b_i, -b_i)$ ile verilen $g:F(A' \cap A'') \rightarrow F(A') \oplus F(A'')$ $hog=0$ ve g nin bir monomorfizm olduğu hemen çıkarılabilir. Şimdi $h(\mathcal{Z}n_i a_i, \mathcal{Z}m_j a_j'')=0$ olduğunu varsayalım.

Yani $\mathcal{Z}n_i a_i + \mathcal{Z}m_j a_j''=0$ dır.

Bunlar serbest abel grupları olduğu için n_i lerin her biri sıfırdan farklı olduğu için en az bir tane j için $a_i' = a_j''$ ve ayrıca $m_j = -n_i$ olur.

Sıfırdan farklı tüm m_j katsayıları bu tarzda görünmeli. Bu tüm a_i' lerin $A' \cap A''$ de olduğu anlamına gelir ve eğer $x = \mathcal{L}h_i a_i$, ise o zaman $\mathcal{L}m_j a_j'' = -x$ dir. Dolayısıyla $x \in F(A' \cap A'')$ ve $g(x) = (\mathcal{L}h_i a_i, \mathcal{L}m_j a_j'')$ dür. Bu h' ın çekirdeğinin g nin görüntüsü tarafından içerildiğinin ispatı olur ve zincir grupları bakımından yorumlanan bu gerçekler her bir n için bir kısa tam bir dizi verir.

$$0 \longrightarrow S_n(U \cap V) \xrightarrow{g_{\#}} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h_{\#}} S_n^U(X) \longrightarrow 0$$

$(S_*(U) \oplus S_*(V))_n = S_n(U) \oplus S_n(V)$ de oturan ve sınır operatörleri her bir bileşeni üzerinde olağan sınırlar olan $S_*(U) \oplus S_*(V)$ zincir kompleksini tanımlayalım.

Yukarıdaki diziden zincir komplekslerinin kısa tam bir dizisi olur ve zincir dönüşümlerinin dereceleri sıfır olur.

Teorem 3.1.13 den homoloji gruplarının uzun tam bir dizisi eşleniği vardır.

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \xrightarrow{h_*} H_n(S_*^U(X)) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

zincir kompleksinin tanımından $H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \approx H_n(U) \oplus H_n(V)$, olduğu açıktır ve

teorem 3.1.14 ile biz $H_n(S_*^U(X)) \approx H_n(X)$ eşitliğine sahibiz. Uzun tam dizi içine dâhil edilen bu izomorfizmlerle biz aşağıdaki Mayer-Vietoris dizisini kuruyoruz.

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

Eğer bir kendi içirme gönderimlerini

$$\begin{array}{ccc}
& U & \\
i \nearrow & & \searrow k \\
U \cap V & & U \cup V = X \\
j \searrow & & \nearrow l \\
& V &
\end{array}$$

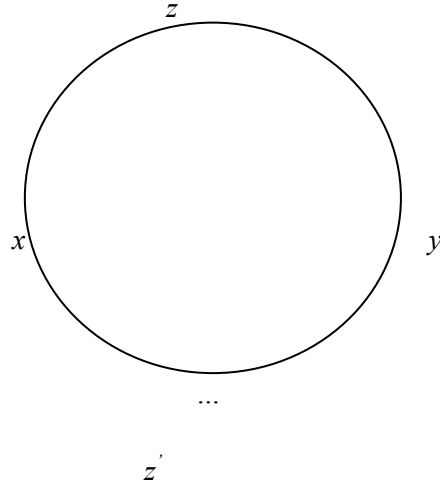
İle tanımlarsak o zaman $g_*(x) = (i_*(x), -j_*(x))$ ve $h_*(y, z) = k_*(y) + l_*(z)$ olduğunu belirtmeliyiz. Δ bağlantı homeomorfizimi geometrik olarak aşağıdaki gibi yorumlanabilir. $H_n(X)$ de herhangi bir w homoloji sınıfı c U da bir zincir d de V de bir zincir olmak üzere $c+d$ deviri ile sunulabilir. (bu teorem 3.1.14 den çıkartılabilir) o zaman $\Delta(w)$ $U \cap V$ de V de ∂c deviri ile sunuldu.

Mayer- Vietoris dizisinin yapısında eğer X' bir uzay $Int U' \cup Int V' = X'$ ile U' ve V' alt kümeler ve $f: X \rightarrow X'$ $f(U) \subseteq U'$ ve $f(V) \subseteq V'$ olacak şekilde bir dönüşüm ise o zaman diyagramın her bir dikdörtgeni içinde değişmeli olduğu doğal bir durumdur.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\Delta} & H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_*} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_*} & H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \oplus f_* & & \downarrow f_* \\
\cdots & \xrightarrow{\Delta'} & H_n(U' \cap V') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(U') \oplus H_n(V') & \xrightarrow{h'_*} & H_n(X') \xrightarrow{\Delta'} H_{n-1}(U' \cap V') \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

3.1.15.Örnek: $X = S^l$ olsun ve z ve z' ile sırasıyla kuzey ve güney kutupları ifade edilsin. x, y ekvator üzerindeki noktalar olsun. (Şekil 1.5) $U = S^l - \{z'\}$ ve $V = S^l - \{z\}$ olsun. O zaman Mayer – Vietoris dizisinde bu örtüme eşdeğer olarak biz

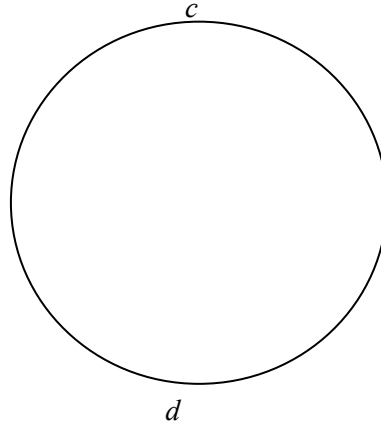
$$H_l(U) \oplus H_l(V) \xrightarrow{h_*} H_1(S^l) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_0(U) \oplus H_0(V) \text{ ye sahibiz.}$$



Şekil 1.5

İlk terim U ve V kısıtlanabilir olduğundan sıfırdır. Bu yüzden Δ bir monomorfizmdir ve $H_1(S^1)$ g_* in çekirdeği $=\Delta$ in görüntüsüne izomorfik olacaktır. $H_0(U \cap V) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nin bir elemanı a ve b tam sayılar olmak üzere $ax + by$ formunda yazılabilir.

Şimdi $g_*(ax+by) = (i_*(ax+by), -j_*(ax+by))$ dir. U ve V yol bağlantılı olduğu için $i_*(ax+by) = 0$ Ancak ve ancak $a = -b$ ve j_* içinde aynı şekildedir. Böylece g_* in çekirdeği $ax - ay$ formunun tüm elemanlarının içerildiği $H_0(U \cap V)$ nin alt grubu olur. Bu $x-y$ ile üretilen sonsuz devirli bir alt grup olur. Bu yüzden biz $H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$ olduğu sonucuna varırız. Bu grup için bir w üreticini geometrik olarak vermek için $\partial(c) = x - y = -\partial d$ ve $d \in V$ de $c \in U$ da $c + d$ iki zincirinin toplamı ile w yi sunmalıyız



Şekil 1.6

c ve d zincirleri Şekil 1.6 da gösterildiği gibi seçilmiş olduğu için $n > 1$ herhangi bir tam sayısı için Mayer-Vietoris dizisinin bölümünde iki uçtaki terimler sıfıra eşit olduğundan dolayısıyla $H_n(S^1) = 0$ dır.

$$H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V)$$

Bu S^1 homolojisinin belirlenmesini sağlar. Biz şimdi her bir n için S^n in homolojisini tümevarım ile hesaplayarak ilerleyeceğiz.

$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ olduğunu hatırlayalım. $(x_1, \dots, x_n, 0)$ formunun tüm noktaları olarak genel moda içinde $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ düşünelim. Bu $S^{n-1} \subseteq S^n$ kapsamı altında “ekvator” olarak $z = (0, \dots, 0, 1)$ ve $z' = (0, \dots, 0, -1)$ ile S^n in kuzey ve güney kutuplarını ifade edelim. O zaman $S^n - \{z\}$ stereoğrafik izdüşümü $\mathbb{R}^n$ e homeomorfiktir.

$S^n - \{z'\}$ içinde benzer şekildedir. Bu yüzden $S^n - \{z, z'\} \subseteq \mathbb{R}^n - \{\text{orijin}\}$ e homeomorfiktir.

S^{n-1} in $\mathbb{R}^n - \{\text{orijin}\}$ şekil korumayan geri dönüşümü olduğu açıktır.

Şimdi $U = S^n - \{z\}$ $V = S^n - \{z'\}$ öyle ki $U \cap V = S^n - \{z, z'\}$ olsun, o zaman yukarıdaki alıştırmalar ve yorumlar ile bu örtüm için Mayer-Vietoris dizisi

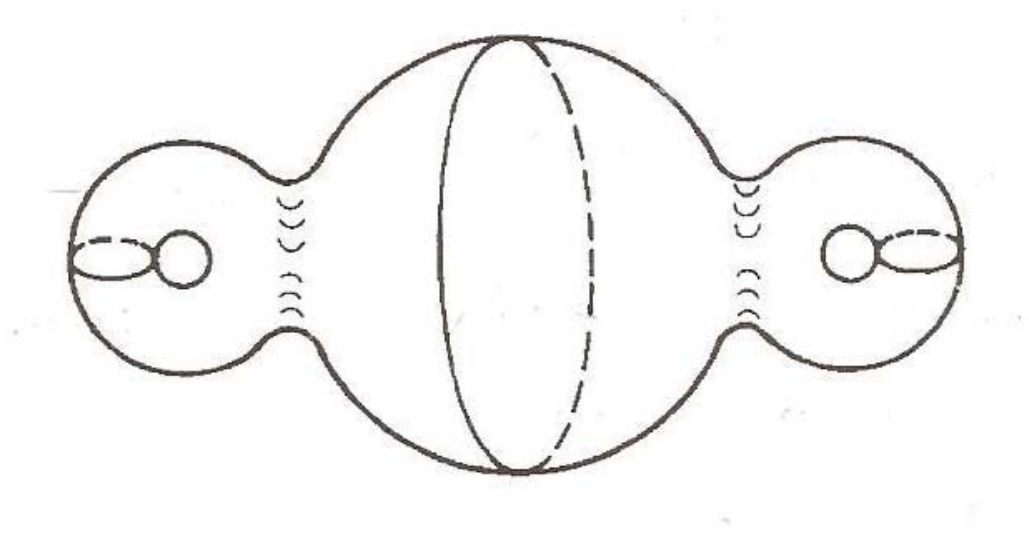
$$H_m(\mathbb{R}^n) \oplus H_m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{h_*} H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{g_*} H_{m-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{m-1}(\mathbb{R}^n)$$

Olur. $m > 1$ için uçtaki terimler sıfır öyle ki Δ bir izomorfizmdir. $m = 1$ ve $n > 1$ için g_* ve Δ ikisi de monomorfizm olmalıdır, öyle ki $H_1(S^n) = 0$ dır. Bu aşağıdaki ispatta tümevarım adımını oluşturur.

3.1.16. Teorem: $n \geq 0$ her hangi bir tamsayısı için $H_*(S^n)$ iki üreteçli bir serbest abel gruptur ve biri sıfır boyutlu biri n boyutludur.

3.1.17. Sonuç: $n \neq m$ için S^n ve S^m aynı homotopi tipine sahip değildir.

Sadece bizim geliştirdiğimiz aletleri kullanarak (Şekil 1.7) deki iki kulpu ile iki kürenin homolojisini hesaplanabilir.



Şekil.1.7

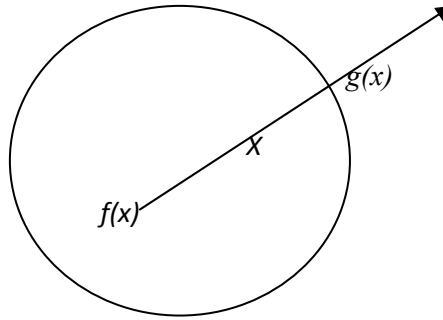
$D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq 1\}$ olması için $\mathbb{R}^n$ de n disk tanımlayalım. $S^{n-1} \subseteq D^n$ onun sınırı olduğu belirtilmelidir.

3.1.18. sonuç: D^n in S^{n-1} üzerine geri dönüşümü yoktur.

İspat: $n = 1$ için D^1 bağlantılı ve S^0 olmadığı için bu açıktır. $n > 1$ ve $f: D^n \rightarrow S^{n-1}$ bir dönüşüm öyle ki $f \circ i = \text{birim}$, burada $i: S^{n-1}$ in D^n içine kapsaması olduğunu varsayalım. Bu meydana getirilen homeomorfizmlerin değişmeli olduğu ve homoloji gruplarının aşağıdaki diyagramı anlamına gelir.

$$\begin{array}{ccc}
 H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\text{id}} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\
 & \searrow i_* & \nearrow f_* \\
 & H_{n-1}(D^n) &
 \end{array}$$

Ama bu sonsuz devirli bir grup boyunca sıfır olması mümkün olmayan birimin bir çarpanlamasını verir. Bu yüzden böyle bir f geri dönüşümü yoktur.



Şekil.1.8

3.1.19.Sonuç:(Brouwer Sabit Nokta Teoremi) $f:D^n \rightarrow D^n$ verilen bir dönüşümde $f(x)=x$ olacak şekilde D^n de bir x vardır.

İspat: $f:D^n \rightarrow D^n$ sabit noktaların olmadığını varsayalım. $g:D^n \rightarrow S^{n-1}$ e aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlayalım. $x \in D^n$ için $f(x)$ de başlayan ve x den geçen iyi tanımlanmış bir ışın vardır. bu ışının S^{n-1} i kestiği yer olacak şekilde $g(x)$ noktasını tanımlayalım (şekil 1.8). O zaman $g:D^n \rightarrow S^{n-1}$ süreklidir ve S^{n-1} de tüm x ler için $g(x)=x$ dir. Ama böyle bir g dönüşümünün varlığı sonuç 3.17 ile çelişir. Böylece f sabit bir noktaya sahip olmalıdır.

Sonuç 3.1.18 ; Sonuç 3.1.17 ile aynı anlama gelir.

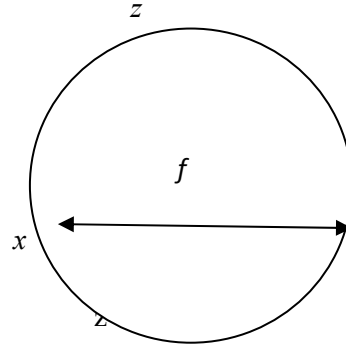
$n \geq 1$ ve $f: S^n \rightarrow S^n$ bir dönüşüm olduğunu varsayalım. $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$ nin bir α üreticini seçelim ve $H_n(S^n)$ üzerinde f ile meydana getirilen homeomorfizimin en az bir tane m tamsayısı için $f_*(\alpha) = m \cdot \alpha$ özelliğine sahip olduğunu belirtelim. Bu tamsayı

$f_*(-\alpha) = -f_*(\alpha) = -m \cdot \alpha = m \cdot (-\alpha)$ olduğu için üreticin seçiminden bağımsız olur. m tamsayısı f in derecesi olur ve $d(f)$ ile gösterilir. Bu sık L.E.J.Brouwer in çalışmasının sonuçları olarak Brouwer derecesi olarak söz ediliyor. Bir dönüşümün derecesi devirden, sıfırdan farklı kompleks sayılar içine bir dönüşüm ile eşlenik “winding sayısı”nın direkt genelleştirilmesi olur.

bir dönüşümün derecesinin aşağıdaki temel özellikleri bir önceki sonuçların acil sonuçları olur.

- (a) $d(\text{birim}) = 1$
- (b) eğer f ve $g: S^n \rightarrow S^n$ dönüşümler ise, $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$
- (c) $d(\text{sabit dönüşüm}) = 0$
- (d) Eğer f ve g homotopik ise o zaman $d(f) = d(g)$
- (e) Eğer f bir homotopi denkliği ise o zaman $d(f) = \pm 1$ dir.

Azıcık daha az açık özellik (gelecek alıştırma) $n > 0$ olduğunda her zaman S^n üzerinde herhangi bir integral derecesinin dönüşümlerinin var olduğudur. Tüm bu özellikler homoloji teoremin sonuçlarıdır ve aslında kolayca elde edilebilir. Daha çok fazla karmaşık özellik (d) özelliğinin karşıtı olan Hopf un homotopi teoritik sonuçlarıdır. Eğer $d(f) = d(g)$ ise o zaman f ve g homotopik olur. Bu yüzden, derece S^n den S^n e dönüşümlerin, çalışılan homotopi sınıfları için tam bir cebirsel sabit olur.



Şekil 1.9

3.1.20.Önerme: $n > 0$ olsun ve $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ ile $f: S^n \rightarrow S^n$ tanımlansın. O zaman $d(f) = 1$ dir.

İspat: ilk olarak $n=1$ durumunu düşünelim (şekil 1.9). öncelikli olarak $z=(0,1)$ $z'=(0,-1)$ ve $x=(-1,0)$ $y=(1,0)$ olsun. $U=S^1-\{z'\}$ ve $V=S^1-\{z\}$ örtümleri $f(U) \subseteq U$ ve $f(V) \subseteq V$ özelliğine sahiptir.

Böylece Mayer-Vietoris dizisinin doğal yapısından diyagram

$$\begin{array}{ccc}
 0 \longrightarrow H_1(S^1) & \xrightarrow{\Delta} & H_0(U \cap V) \\
 \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
 0 \longrightarrow H_1(S^1) & \xrightarrow{\Delta} & H_0(U \cap V)
 \end{array}$$

tam satırlara sahip ve dikdörtgen değişmeli burada f_* , f in geri gönderimi olur.

$\partial c = x - y = -\partial d$ olmak üzere $c+d$ deviri ile sunulan $H_1(S^1)$ in α üreticini adlandıracağız. Ve $\Delta(\alpha)$ $x-y$ ile sunulacak. Şimdi $\Delta f_*(\alpha) = f_{3*} \alpha(x) = f_{3*}(x-y) = y-x = -\Delta(\alpha) = \Delta(-\alpha)$ dır. Δ bir monomorfizm olduğu için $d(f) = 1$ dir.

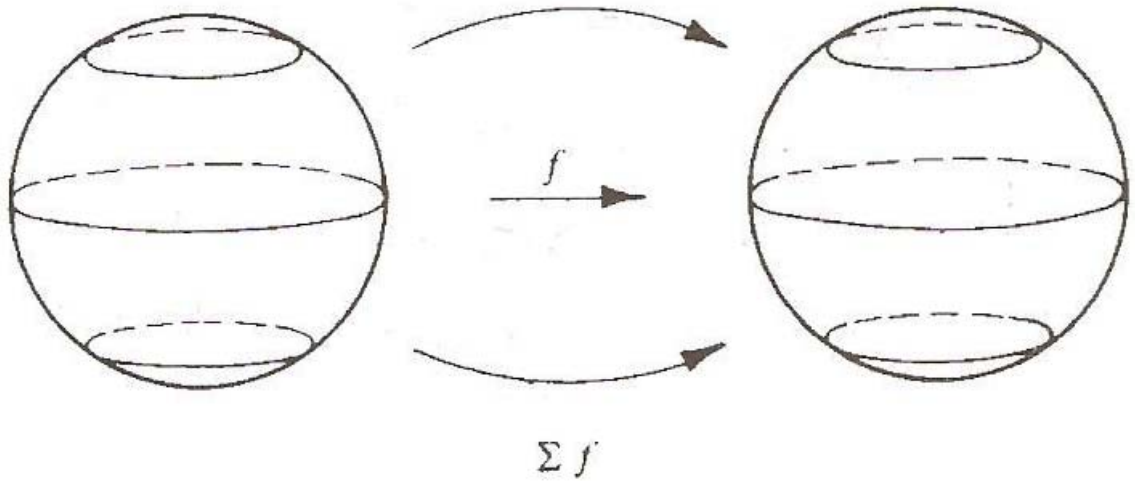
Şimdi sonucun $n-1 \geq 1$ boyutu içinde doğru olduğunu varsayalım, ve ilk olarak

$S^{n-1} \subseteq S^n$ düşünelim. S^n de alınan U ve V sırasıyla güney ve kuzey kutuplarının tümleyenleri olduğu için $i: S^{n-1} \rightarrow U \cap V$ içermesi bir homotopi denkliğidir. $n \geq 2$ olduğu için Mayer-Vietoris dizisinin bağlantı homeomorfizimi bir izomorfizmdir. Bu yüzden diyagramda her bir dikdörtgen

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(S^n) & \xrightarrow[\approx]{\Delta} & H_{n-1}(U \cap V) & \xleftarrow[\approx]{i_*} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\
\downarrow f_* & & \downarrow f_{3*} & & \downarrow f_* \\
H_n(S^n) & \xrightarrow[\approx]{\Delta} & H_{n-1}(U \cap V) & \xleftarrow[\approx]{i_*} & H_{n-1}(S^{n-1})
\end{array}$$

Değişmeli ve yatay homeomorfizimler izomorfizmdir. Eğer α , $H_n(S^n)$ in bir üretici ise

$f_*(\alpha) = \Delta^{-1} f_{3*} \Delta(\alpha) = \Delta^{-1} i_* f_* i_*^{-1} \Delta(\alpha) = -\Delta^{-1} i_* i_*^{-1} \Delta(\alpha) = -\alpha$ olur. bu tümevarımsal adımı verir ve ispat tamamlanır.



Şekil 1.10

$n \geq 0$ için $f: S^n \rightarrow S^n$ verilen bir dönüşüm için $g: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ eşlenik olan bir dönüşüm vardır, ve f in askıya alınmış olarak adlandırılır. Ve $\mathcal{J}$ ile ifade edilir. Sezgisel olarak amaç S^{n+1} deki ekvatora (S^n) geri dönüşümünün f olması gerektiği ve ekvatora paralel S^{n+1} deki her bir dilimin f ile istenilen Şekilde tekabül eden dilim içine haritalanması gerektiğidir (Şekil 1.10). özel olarak $S^{n+1} \subseteq R^{n+2} \subseteq R^{n+1} \times R$ öyle ki S^{n+1} in noktaları $x \in R^{n+1}$ $t \in R$ ve $\|x\|^2 + |t|^2 = 1$ olmak üzere (x, t) formunun olduğunu düşünelim. O zaman

$$\mathcal{J}(x, t) = \begin{cases} (x, t) & \text{eğer } x = 0 \\ (\|x\| \cdot f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), t) & \text{eğer } x \neq 0 \end{cases}$$

Tanımlayalım. $\mathcal{J}f$ sürekli olduğunu ve istenilen karakteristiğe sahip olduğunu görmek zor değildir. Önerme 3.1.19 un ispatında kullanılan teknik aşağıdaki ispatı için uygulanabilir.

3.1.21.Önerme: eğer $n \geq 1$ için $f: S^n \rightarrow S^n$ bir dönüşüm o zaman $d(\mathcal{J}f) = d(f)$ dir.

Eğer $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ ve $g(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$ ise o zaman $g = \mathcal{J}f$ ve 3.1.19 önerme 3.1.20 önermenin özel bir durumu olduğu belirtilmelidir.

3.1.22.Sonuç: Eğer $f: S^n \rightarrow S^n$ $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_n, x_{n+1})$ ile verilirse o zaman $d(f) = 1$ dir.

İspat: $h: S^n \rightarrow S^n$ i. koordinat ve 1. koordinatın değiştiği bir dönüşüm olsun. O zaman h bir homeomorfizmdir ($h^{-1} = h$). Böylece $d(h) = \pm 1$ dir. $g(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ öyle ki $d(g) = -1$ olsun. o zaman $d(f) = d(hogoh) = d(h)^2 d(g) = (\pm 1)^2 (-1) = -1$ olur.

3.1.23.Sonuç: $A(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$ ile tanımlanan $A: S^n \rightarrow S^n$ antipodal dönüşüm

$d(A) = (-1)^{n+1}$ özelliğine sahiptir.

İspat: Sonuç 3.1.21 den A , tümünün derecesi -1 olan $(n+1)$ dönüşümlerin bileşkesidir.

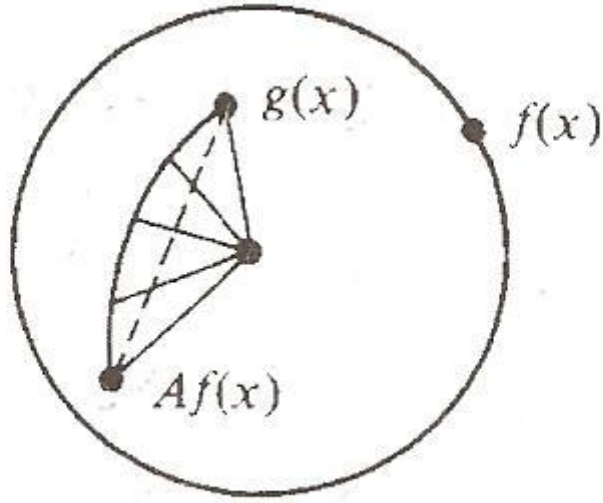
$n > 0$ için ve her hangi bir tamsayısı için derecesi m olan $f: S^n \rightarrow S^n$ dönüşümü vardır.

3.1.24.Önerme: Eğer $f, g: S^n \rightarrow S^n$ S^n deki tüm x ler için $f(x) \neq g(x)$ ile dönüşümler ise o zaman g $A \circ f$ e homotopiktir.

İspat: Grafıksel olarak fikir aşağıdaki gibidir: $f(x) \neq g(x)$ olduğu için $Af(x)$ den $g(x)$ e R^{n+1} de bölüm orijin boyunca geçmez. Bu yüzden $Af(x)$ ve $g(x)$ arasında S^n de orijin dışından yansıyan küre alanı üzerinde bir yoldur. İstenen homotopiyi üreten yollar bunlardır. Özellikle biz açıkça homotopi veren

$$F(x, t) = \frac{(1-t)Af(x) + t.g(x)}{\|(1-t)Af(x) + t.g(x)\|}$$

İle $F: S^n \times I \rightarrow S^n$ bir fonksiyon tanımlayacağız.



Şekil 1.11

3.1.25.Sonuç: Eğer $f:S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ bir dönüşüm ise o zaman $f(x)=x$ ile S^{2n} de bir x veya $f(y)=-y$ ile S^{2n} de bir y vardır.

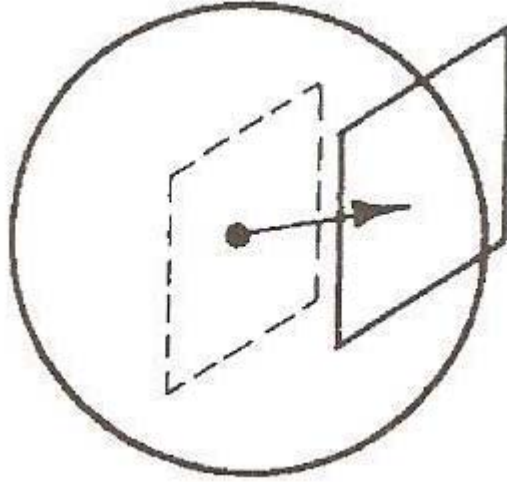
İspat:Eğer tüm x ler için $f(x) \neq x$ ise o zaman önerme 3.1.23 ile f A ya homotopiktir. Diğer yandan eğer tüm x ler için $f(x) \neq -x=A(x)$ ise o zaman $f \circ A =$ birim e homotopiktir.

Bu iki şart birlikte ele alındığında $d(A)=d(f)=d(\text{birim})$ elde ederiz. Ama, $d(A)=(-1)^{2n+1}=-1$ ve $d(\text{birim})=-1$, iki koşulda aynı zamanda gerçekleşmeyebilir.

3.1.26. Sonuç: Tüm x ler için $f(x)$ ortogonal olmak şartıyla $f:S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ sürekli bir dönüşüm yoktur.

Bu fikirlerin tanımlanmış olmamasına rağmen S^n n boyutlu bir manifolddur. Yani S^n bulunduğu bölgede R^n e homeomorfiktir. Aslında S^n S^n deki her bir x noktasında

$T(S^n, x)$ bir tanjant uzayına sahiptir. S^n ile özdeşleştirilen R^{n+1} deki birim küre ile $T(S^n, x)$ x de S^n e teğet olan R^{n+1} de n boyutlu bir hiper yüzey olur. (şekil 1.12)



Şekil 1.12

Biz x vektörüne ortogonal n boyutlu alt uzayların olduğu orijine bu hiper yüzeyi taşıyacağız. Elbette S^n üzerinde x farklılaşarak, bu alt uzaylar ona göre değişecek. S^n üzerinde bir vektör alanı, karşılık gelen lineer alt uzayda bir vektör S^n de her bir x e sürekli bir fonksiyon atayacak. Eğer S^n de her bir x için $\Phi(x)=0$ ise o zaman Φ vektör alanı sıfırdan farklı olur.

3.1.27.Sonuç: S^{2n} üzerinde sıfırdan farklı vektör alanı yoktur.

İspat:Eğer S^{2n} de sıfır olmayan bir vektör alanı var ise o zaman S^{2n} de sıfır olmayan bir vektör alanı var ise o zaman $\psi(x)=\frac{\Phi(x)}{\|\Phi(x)\|}$ birim uzunluklu S^{2n} üzerinde bir vektör alanı olur. bu yüzden $\psi:S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ her bir x için x e ortogonal olan $\psi(x)$ dönüşümü olur. Ama bu sonuç 3.1.25 den mümkün değildir. Dolayısıyla böyle bir vektör alanı yoktur.

Sıfırdan farklı vektör alanları tek boyutlu küreler üzerinde daima vardır. eğer S^n de her bir x için $\Phi_1(x), \dots, \Phi_k(x)$ vektörleri lineer bağımsız ise, S^n üzerinde $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ vektör alanlarının koleksiyonu lineer bağımsız olur. Matematikte ki meşhur problem n in her bir değeri için S^{2n+1} üzerinde var olan lineer bağımsız vektör alanlarının maksimum sayısının belirlenmesidir. Hurwitz ve Radonun çalışması (Eckmann 1942 ye bakınız) güçlü olumlu bir sonuç verdi. Yani, lineer bağımsız vektör alanlarının kesin sayısı (kürenin boyutları ile değişen) var olduğu

gösterildi. Problemin çözümü Adams tarafından [1962] bu olumlu sonuçların mümkün olan en iyi sonuçlar olduğunun gösterilmesi ile tanımlandı.

Daha ileri uygulama ile devam etmeden önce biz bazı gerekli cebirsel fikirleri sunmak için konu dışına çıkacağız. Yönlendirilmiş bir $\mathcal{A}$ kümesi $\leq$ bir kısmi sıralama bağıntısı olan bir kümedir öyle ki $\mathcal{A}$ de verilen a ve b elemanları için $a \leq c$ ve $b \leq c$ olacak şekilde $\mathcal{A}$ de bir c elemanı var olmalı. Kümelerin bir direkt sistemi $\{X_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ kümelerin bir ailesidir, burada $\mathcal{A}$ bir yönlü küme ve her zaman $a \leq b$ olmak üzere $f_a^b: X_a \rightarrow X_b$ aşağıdaki şartları yerine getiren fonksiyonlardır.

(i) X_a üzerinde her bir $a \in \mathcal{A}$ için $f_a^a = (\text{birim})$ dir.

(ii) Eğer $a \leq b \leq c$ ise o zaman $f_a^c = f_b^c \circ f_a^b$ dir.

Bizi ilgilendiren özel durum X_a ların abel grupları olduğu ve f_a^b lerin homeomorfizimler olduğudur. Bu yüzden $\{X_a, f_a^b\}$ abel gruplarının ve homeomorfizmlerin direkt sistemi olsun. Aşağıdaki gibi $\mathcal{L}_a X_a$ nın bir R alt grubunu tanımlayalım.

$R = \{\sum_{i=1}^n X_{a_i} \mid \text{tüm } i \text{ ler için } c \geq a_i, a, c \in \mathcal{A} \text{ var ve } \sum_{i=1}^n f_{a_i}^c(X_{a_i}) = 0\}$ o zaman $\{X_a, f_a^b\}$ sisteminin direkt limiti $\lim_a X_a = \sum_a X_a / R$ gruptur.

Eğer $x_a \in X_a$ dır ve $x_b \in X_b$ de ise o zaman onların direkt limitleri de eşit olacaktır. Eğer $\mathcal{A}$ de bazı c ler için $c \geq a$ ve $c \geq b$ ve $f_a^c(X_a) = f_b^c(X_b)$ ise.

3.1.28. Lema : X bir uzay olsun ve $\{X_a\}$ ile X in kısmi sıralama içermesi ile homeomorfizmlerde $\{H_*(X_a)\}$ formlarının bir direkt sistemi grupların ailesi kapsama dönüşümleri ile üretilir o zaman $\lim_a H_*(X_a) \approx H_*(X)$ dir.

İspat: her bir X_a için $g_a^*: H_*(X_a) \rightarrow H_*(X)$ homeomorfizimi kapsama dönüşümü ile üretilmiş olsun. O zaman $g = \sum_a g_a^*: \sum_a H_*(X_a) \rightarrow H_*(X)$ i koyalım.

Şimdi R de olduğunu varsayalım. Yani $X_b \subseteq X$ bir kompakt alt kümesi var öyle ki her bir i için $\subseteq X_b$ ve $H_*(X_b)$ de $()=0$ dır. O zaman diyagram değişmeli olduğundan $g()=0$ olduğu ve R nin g nin çekirdeği içerisinde içerildiği çıkarılabilir.

$$\begin{array}{ccc} H_*(X_b) & & \\ \nearrow & \forall g_b^* & \\ & & H_*(X) \end{array}$$

Böylece $g: H_*(X_a)/R \rightarrow H_*(X)$ bir homeomorfizim meydana getirir.

$H_n(X)$ de her hangi bir x homoloji sınıfı için $n_j \Phi_j$ deviri ile x i sunalım. n kompakt olduğu için her bir j için X de $\Phi_j(n)$ kompakttır. O zaman $n_j \Phi_j$ zinciri toplamı sonlu olduğu için kompakt olan $\cup_j \Phi_j(n)$ kümesi üzerinde “desteklenmiş” olur. Bu yüzden $\cup_j \Phi_j(n) = X_a$ (bazı a lar için) ve $n_j \Phi_j H_n(X_a)$ da x_a en az bir homoloji sınıfı sunulmalıdır. Ayrıca $g_a^*(x_a) = x$ olduğu açıktır. Dolayısıyla x g^- nün görüntüsü içindedir ve g^- bir epimorfizmdir.

n in $g()=0$ ile $\sum_{a_i} H_n(X_a)$ içinde olduğunu varsayalım. her bir X_{a_i} içinde $n_j \Phi_j$ deviri ile x de sunuldu. Bu devirin sınırları olduğunu varsaydığımız için $(m_k)_k = \cup_{ij} \Phi_{ij}$ ile X de $(m_k)_k$ bir $(n+1)$ zincir vardır. Yine

$X_b = \cup_k \Phi_k(n+1) \cup \dots \cup \dots$ i de X in bir alt kümesini tanımlayalım ve X_b nin kompakt olduğunu belirtelim. $(m_k)_k = \cup_{ij} \Phi_{ij}$ ile X_b de bir $(n+1)$ zincir olduğu için

$(\cup_{ij} \Phi_{ij}) S_n(X_b)$ içinde bir sınır olduğunu ve $H_n(X_b)$ de $()=0$ olduğu anlamına gelir. Böylece R de dir. $R=g$ nin çekirdeği ve g^- bir izomorfizmdir.

3.1.29. Lema : Eğer $A \subseteq S^n$ bir alt küme ile I^k ya homeomorfiktir, $0 \leq k \leq n$ ise o zaman

$$H_j(S^n - A) \approx$$

dir.

İspat: k üzerinde tümevarımla ilerlersek eğer $k=0$ ise o zaman A bir noktadır ve S^n-A nın R^n e homeomorfik olduğu sonucu çıkar. $k < m$ için sonucun doğru olduğunu varsayalım. ve $h:A \rightarrow I^m$ bir homeomorfizim olsun. I^m m küpü $I^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in I^m \mid x_1 \geq 0\}$ ve

$I^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in I^m \mid x_1 \leq 0\}$ koyulacak şekilde iki yarıya ayıralım. Böylece $I^+ \cap I^-$, I^{m-1} e homeomorfik olur. A nın ayrışımına karşılık geldiği için $A^+ = h^{-1}(I^+)$ ve $A^- = h^{-1}(I^-)$ ile ifade edeceğiz. $S^n-(A^+ \cap A^-)$ kümesi Mayer-Vietoris dizisinin tatmin edici koşulları

$(S^n-(A^+)) \cup (S^n-(A^-))$ iki kümenin birleşimi olarak yazılabilir. Bu yüzden

$$H_{j+1}(S^n-(A^+ \cap A^-)) \rightarrow H_j(S^n-A) \rightarrow H_j(S^n-A^+) \oplus H_j(S^n-A^-) \rightarrow H_j(S^n-(A^+ \cap A^-))$$

bir tam dizisi vardır. Tümevarım hipotezi ile $j > 0$ için uç terimlerin ikisi de sıfırdır. Bu alanlar ikisi de bir izomorfizmdir

$$H_j(S^n-A) \xrightarrow{i_*^+ \oplus i_*^-} H_j(S^n-A^+) \oplus H_j(S^n-A^-).$$

Bu yüzden eğer $x \in H_j(S^n-A)$ ve $x \neq 0$ ise o zaman ya $i_*^+(x) \neq 0$ veya $i_*^-(x) \neq 0$ dir. $i_*^+(x) \neq 0$ olduğunu varsayalım. şimdi A^+ ayrılması ile iki parçanın kesişiminin I^{m-1} e homeomorfik olduğu prosedürünü hatırlayalım. Bu tavır içinde S^n in alt kümelerinin bir dizisi

$S^n-A \subseteq S^n-A^k$ kapsaması $H_j(S^n-A_k)$ nın sıfırdan farklı bir elemanı içine alınan x homolojisi üzerine bir homeomorfizim meydana getirdiği ve ayrıca $\cap_i A_i$ I^{m-1} e homeomorfik olduğu

$A = A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ sahip olunan özelliği inşasını yapabilir.

Şimdi $(S^n - \cap_i A_i)$ nin bir kompakt alt kümesi en az bir (S^n-A_k) içinde içerilecek. Bu yüzden lema 3.1.27 nin izomorfizm etkenleri boyunca direkt limit

$$\lim_{\rightarrow k} H_j(S^n-A_k)$$

Öyle ki bu direkt limit $H_j(S^n - \cap_i A_i)$ ye izomorfik de olmalıdır. x ile sunulan bu direkt limitin eleman yapısı ile sıfırdan farklıdır. Ama tümevarım hipoteziyle $H_j(S^n - \cap_i A_i)$ grubu sıfıra eşit olur. Bu çelişki böyle bir x elemanının var olmadığı ve $H_j(S^n-A) = 0$ olduğu anlamına gelir.

$j=0$ durumu için Mayer-Vietoris dizisi alanları bir monomorfizmden daha ziyade bir izomorfizmdir. Eğer $H_0(S^n-A)$ da $(x-y) \neq 0$ ile S^n-A da x ve y noktaları ise o zaman üst sav $H_0(S^n - \bigcap_i A_i)$ de $(x-y)$ sıfırdan farklı olması anlamına geleceği için aynısı tekrar edilir. Bu bir çelişkidir.

3.1.30.Sonuç : Eğer $B \subseteq S^n$ bir alt kümesi S^k ya homeomorfik ise ($0 \leq k \leq n-1$ için) o zaman $H_*(S^n-B)$ iki üretici ile bir serbest abel gruptur, biri sıfır boyut içinde biride $n-k-1$ boyut içindedir.

İspat: k üzerinde yeniden tümevarım ile $k=0$ için S^k nın iki nokta olduğunu ve S^n-B S^{n-1} in homotopi tipine sahip olduğunu belirtelim. $H_*(S^{n-1})$ tanımı yeterli olduğu için $k=0$ için sonuç doğrudur. Sonucun $k-1$ için doğru olduğunu varsayalım ve $B = B^+ \cup B^-$ yazalım. Burada B^+ ve B^- S^k içinde kapalı yarı kümelerle homeomorfiktirler ve $B^+ \cap B^-$, S^{k-1} e homeomorfiktir. $S^n-(B^+ \cap B^-) = (S^n-B^+) \cup (S^n-B^-)$ örtümünün Mayer-Vietoris dizisi

$$H_{j+1}(S^n-B^+) \oplus H_{j+1}(S^n-B^-) \rightarrow H_{j+1}(S^n-(B^+ \cap B^-)) \rightarrow H_j(S^n-B) \rightarrow H_j(S^n-B^+) \oplus H_j(S^n-B^-)$$

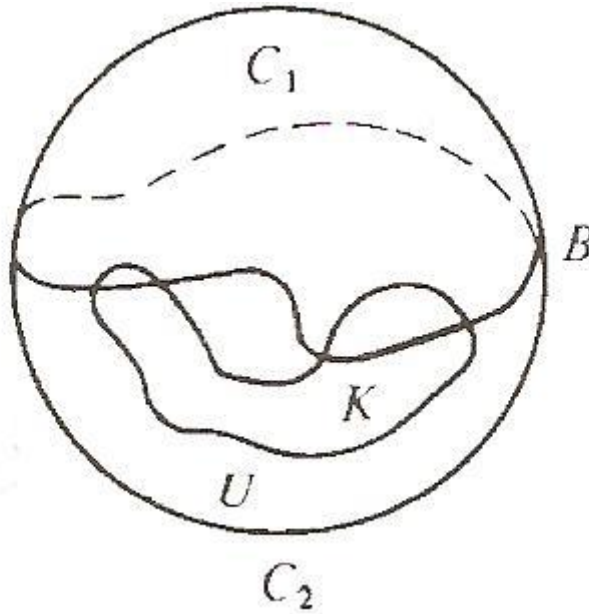
Formuna sahiptir. $j > 0$ için lema 3.1.28 den uçlardaki terimlerin her ikisi de sıfır olur. Sonuç izomorfizminde gerekli tümevarım adımları sıralanarak ispat tamamlanır.

Bu sonuç aşağıdaki meşhur teoremin ispatı için uygulanacak.

3.1.31.Teorem(Jordan-Brouwer Ayırma Teoremi): S^n içinde gömülmüş bir $(n-1)$ küre S^n i iki bölüme ayırır ve o her bir bölümün sınıridir.

İspat: $B \subseteq S^n$ S^{n-1} in gömülmüş kopyası olsun. O zaman sonuç 3.1.29 ile $H_*(S^n-B)$ iki temel elemanı ile serbest abel olur. Boyutların ikisi de sıfırdır. Bu yüzden S^n-B iki yol bileşenine sahiptir. B kapalıdır böylece S^n-B açıktır ve dolayısıyla bulunduğu bölgede yol bağlantılıdır. Bu yol bileşenlerinin bileşenleri olduğu anlamına gelir. C_1 ve C_2 S^n-B nin bölümleri olsun $C_1 \cup B$ kapalı olduğu için C_1 in sınırı B de içerilir. (Burada biz C_1 in sınırı ile $\partial C_1 = \overline{C_1} - C_1$ in içi kümesini kastettik) $B \subseteq \partial C_1$ olduğunu gösterdiğimiz zaman ispat tamamlanacak

$x \in B$ ve S^n de Ux in komşuluğu olsun. B S^{n-1} in gömülmüş bir kopyası olduğu için $x \in K$ ile $U \cap B$ nin bir K alt kümesi var ve $B-K$, D^{n-1} e homeomorfiktir (şekil 1.13).



Şekil 1.13

Şimdi lema 3.1.28 ile $H_*(S^n - (B-K)) \approx \mathbb{Z}$ sıfır boyutlu üretici ile. Böylece $S^n - (B-K)$ bir yol bileşenine sahiptir. $p_1 \in C_1$ $p_2 \in C_2$ ve γ p_1 ve p_2 arasında $S^n - (B-K)$ da bir yol olsun. C_1 ve C_2 $S^n - B$ de farklı yol bileşenleri olduğu için γ yolu K yı kesmeli. Sonuç olarak K $\overline{C_1}$ ve $\overline{C_2}$ nin noktalarını içerir.

Biz x in keyfi bir komşuluğunun hem $\overline{C_1}$ hem de $\overline{C_2}$ nin noktalarını içerdiğini gösterdik. Dolayısıyla x C_1 in sınırları içersindedir ve ispat tamamlanır.

Bir bitirme uygulaması domainlerin değişmezliği üzerinde Brouwer teoremidir.

3.1.32. Teorem : U_1 ve U_2 , S^n in alt kümeleri ve $h: U_1 \rightarrow U_2$ homeomorfizim olduğunu varsayalım. O zaman eğer U_1 açık ise U_2 de açıktır.

Not: Bunun aşikâr olmayan bir gerçek olduğu gözlemlenebilir. Tabi ki açık kapalı ile yer değiştirdiğinde veya homeomorfizimin S^n in tümü üzerinde tanımlanmış olduğu varsayıldığında doğruluğu açıktır. Bu genel olarak uzaylarda doğru olmayabilir. Örneğin $w_1 = (\frac{1}{2}, 1]$ ve $w_2 = (0, \frac{1}{2}]$ $[0, 1]$ in alt kümeleri olsun. Eğer $h: w_1 \rightarrow w_2$ $h(x) = x - \frac{1}{2}$ ile verildiğinde o zaman h bir

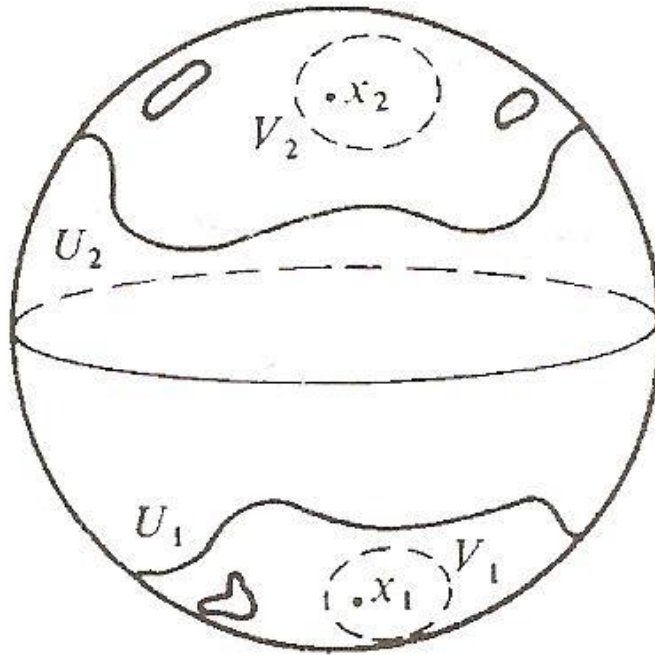
homeomorfizmdir. w_1 açıktır ama w_2 açık değildir. Kendi kendi üzerine $[0,1]$ in bir homeomorfizmi h in genişlemesinin olmadığı açıktır.

İspat : $x_2=h(x_1)$ U_2 de herhangi bir nokta olsun. V_1 S^{n-1} e homeomorfik ∂V_1 ve D^n e homeomorfik V_1 ile U_1 içinde x_1 in bir komşuluğu olsun $V_2=h(V_1)$ koyar ve $\partial V_2=h(\partial V_1)$ anlamına gelsin öyle ki ∂V_2 S^{n-1} e homeomorfik S^n in bir alt kümesidir (şekil 1.14).

O zaman lema 3.1.28 ile S^n - V_2 bağlantılıdır. Teorem 3.1.30 ile S^n - ∂V_2 iki bileşene sahiptir. Böylece S^n - ∂V_2 , S^n - V_2 ve V_2 - ∂V_2 nin ayrık bileşimidir. İkisi de bağlantılıdır.

Dolayısıyla onlar S^n - ∂V_2 nin bölümleridir. Bu V_2 - ∂V_2 nin açık, U_2 de bağlantılı ve

$x_2 \in V_2$ - ∂V_2 olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla U_2 açıktır.



Şekil 1.14

4.HOMOLOJİK CEBİR

4.1.Zincir yapıları ve dönüşümler:

Cebirsel topolojinin konusu cebirde yeni bir doğrultuda ilerlemeler sağlamıştır. X simplisel yapısını ele aldığımızda doğal olarak

$$\partial_{k-1}\partial_k = 0$$

Olacak şekilde gösterildiği gibi

$$C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Böylece bu ifadenin tamamen cebirsel parçasını özetleyebiliriz, ve her $k \geq 1$ için $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ olacak şekilde $\partial_k : A_k \longrightarrow A_{k-1}$ homeomorfizmleri ve A_k abelyan gruplarının dizisini düşünebiliriz.

$\partial_{k-1}\partial_k = 0$ da her zaman $k \geq 1$ olmak zorunda olmadığından her $k \in \mathbb{Z}$ için A_k gruplarının “çift sonsuz” dizilerini seçmek daha uygundur. Uygulamalarda genellikle $k < 0$ ve $k > n$ için $A_k = 0$ dır. Bu diziler ve bu dizilerin dönüşümleri üzerine çalışmalar homolojikel cebirin bir konusudur.

4.1.1.Tanım: Bir zincir yapısı denilen $\langle A, \partial \rangle$ $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ ve $\partial_k : A_k \longrightarrow A_{k-1}$ olacak şekilde homeomorfizmlerin $\partial = \{\partial_k | k \in \mathbb{Z}\}$ koleksiyonu ile birlikte A_k abelyan gruplarının

$$A = \{ \dots, A_2, A_1, A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots \}$$

Bir çift sonsuz dizidir.

Grup teorideki gösterimimize benzer olarak kolaylık sağlaması için şimdi bir önceki bölümümüzdeki yapılarımızı ve tanımlarımızı tamamen cebirsel yapılar için uygulayabiliriz.

4.1.2.Teorem: A bir zincir yapısı ise ∂_k altındaki görüntü ∂_{k-1} in çekirdeğinin bir alt grubudur.

İspat: $A_k \xrightarrow{\partial_k} A_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} A_{k-2}$ yi ele alalım.

A bir zincir yapısı olduğundan $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ dır. yani $\partial_{k-1}[\partial_k[A_k]] = 0$ dır. Bu da $\partial_k[A_k]$ nın ∂_{k-1} in çekirdeğinde olduğunu gösterir ki bu da istediğimiz ispattır.

4.1.3.Tanım: A bir zincir yapısı ise ∂_k nın çekirdeği $Z_k(A)$ k -devirlerinin grubudur, ve görüntü $B_k(A) = \partial_{k+1}[A_{k+1}]$ k -sınırlarının grubudur.

$H_k(A) = Z_k(A) / B_k(A)$ bölüm grubu A nın k . homoloji grubudur.

Son bölümde x ve Y simplisel yapıları için $H_k(X)$ den $H_k(Y)$ ye bir homeomorfizm üreten, X den Y ye bir f sürekli dönüşümü belirttik. Homoloji gruplarının dönüşümü sırada belirtilen yolla oluşturulur. X ve Y nin uygun üçgenleştirilmesi için f dönüşümü, önemli bir özellik olan ∂_k ile değişme yani $\partial_k f_k = f_{k-1} \partial_k$ özelliğine sahip $C_k(X)$ den $C_k(Y)$ ye f_k homeomorfizmini oluşturur.

Şimdi tamamen cebirsel duruma dönelim. Ve bunun homoloji gruplarının dönüşümünü nasıl ürettiğini görelim.

4.1.4.Teorem (Temel önerme): A ve A' , homeomorfizmlerin ∂ ve ∂' koleksiyonları ile birlikte zincir yapıları ve homeomorfizmlerin bir f koleksiyonu

$$f_k : A_k \longrightarrow A_{k-1}$$

şekilde gösterileceği gibi olsun;

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{k+2}} & A_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{\partial_k} & A_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial'_{k+2}} & A'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & A'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & A'_{k-1} \xrightarrow{\partial'_{k-1}} \dots \end{array}$$

Dahası her k için her kare değişmelidir, yani

$$f_{k-1} \partial_k = \partial'_k f_k \text{ dır.}$$

Bu durumda f_k bir doğal homeomorfizm olan

$$f_{*k} : H_k(A) \longrightarrow H_k(A')$$

yi oluşturur.

İspat: $z \in Z_k(A)$ olsun.

$$\partial'_k (f_k(z)) = f_{k-1}(\partial_k(z)) = f_{k-1}(0) = 0 \text{ dir.}$$

$$f_{*k}(z+B_k(A)) = f_k(z) + B_k(A') \dots\dots\dots (1) \quad \text{olacak şekilde}$$

$f_{*k} : H_k(A) \longrightarrow H_k(A')$ yi tanımlamaya çalışalım. Öncelikle f_{*k} nın iyi tanımlı olduğu yani $z+B_k(A)$ nın gösteriminin bizim seçimimizden bağımsız olduğunu göstermeliyiz.

$z_1 \in (z+B_k(A))$ olduğunu varsayalım. bu durumda $(z_1-z) \in B_k(A)$ dır, böylece $z_1-z = \partial_{k+1}(c)$ olacak şekilde $c \in A_{k+1}$ vardır.

Fakat buradan

$$f_{*k}(z_1) - f_{*k}(z) = f_k(z_1-z) = f_k(\partial_{k+1}(c)) = \partial'_{k+1}(f_{k+1}(c)) \text{ dir}$$

ve bu son terim $\partial'_{k+1}[A'_{k+1}] = B_k(A')$ nün bir elemanıdır. Böylece $f_{*k}(z_1) \in (f_{*k}(z) + B_k(A'))$ dir.

Böylece $H_k(A) = Z_k(A) / B_k(A)$ da ki aynı cosetin iki temsilcisi

$H_k(A') = Z_k(A') / B_k(A')$ da ki sadece bir cosetin temsilcilerine dönüştürüldüler. Bu da

$$f_{*k} : H_k(A) \longrightarrow H_k(A') \text{ nın (1) eşitliğiyle iyi tanımlanmış olduğunu gösterir.}$$

Şimdi cosetlerin temsilcileri için f_k yi alarak f_{*k} hesaplayacağız ve cosetlerin temsilcilerine orijinal grubun grup işlemini uygulayarak bir bölüm grubunun grup işlemini tanımlayacağız. f_k nın $Z_k(A)$ üzerine etkisi $Z_k(A)$ dan $Z_k(A')$ ne bir homeomorfizm olduğunda, $f_{*k} : H_k(A) \longrightarrow H_k(A')$ ne bir homeomorfizm olduğu elde edilir.

f , ∂ ve ∂' dönüşümlerinin koleksiyonu, Teorem 4.1.4 de verilen karelerin değişmeli olması özelliğini sağlıyorsa f ile değişmelidir.

Bir tane daha tanımdan sonra, Teorem 4.1.4 ün görünüşte aşıkâr olan ama oldukça önemli olan bir gösterimini vereceğiz.

4.1.5.Tanım: her k için A'_k A_k nın bir alt grubu ve her $c \in A'_k$ için $\partial'_k(c) = \partial_k(c)$ ise bir $\langle A', \partial' \rangle$ zincir yapısı $\langle A, \partial \rangle$ nın zincir yapısının bir alt yapısıdır.

Yani ∂'_k ve ∂_k , A_k nın A'_k alt grubunun elemanları üzerinde aynı etkiye sahiptir.

4.1.6.Örnek: A bir zincir yapısı ve A' , A nın bir alt yapısı olsun. her $c \in A'_k$ için $i_k(c) = c$ olacak şekilde $i_k: A'_k \longrightarrow A_k$ içine dönüşümlerin bir koleksiyonu i olsun, i nin ∂ ile değişmeli olduğu açıktır. Böylece

$i_{*k}: H_k(A') \longrightarrow H_k(A)$ homeomorfizmlerini oluşturduk. Doğal olarak i_{*k} nın $H_k(A')$ den $H_k(A)$ ya izomorfik bir dönüşüm olduğu düşünülebilir. Ama illaki böyle olması gerekmez.

Örneğin S^2 2-küreyi E^3 3-boyutun bir alt yapısı olarak ele alalım. Bu

$$i_2: C_2(S^2) \longrightarrow C_2(E^3) \text{ ve } i_{*2}: H_2(S^2) \longrightarrow H_2(E^3) \text{ yi oluşturur.}$$

Fakat $H_2(E^3) = 0$ olduğunda $H_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ olduğunu gördük. Bu yüzden i_{*2} nin izomorfik bir dönüşüm olması mümkün değildir.

4.2.Bağlı Homoloji

A' , A zincir yapısının bir alt yapısı olsun. Buradan ortaya çıkan topolojik durum bir X simplisel yapısının, bir Y simplisel alt yapısını ele almasıdır. Böylece doğal olarak, A_k nın bir A'_k alt grubunu ele aldığımızdaki cebirsel durumda olduğu gibi $C_k(X)$ in bir alt grubu $C_k(Y)$ yi ele alabiliriz. Buradan açıkça

$$\partial_k[C_k(Y)] = C_{k-1}(Y) \text{ elde ederiz.}$$

Şimdi cebirsel durumla ilgilenelim ve bunun her zaman topolojik duruma uygulanabileceğini hatırlayalım.

A' , A zincir yapısının bir alt yapısı olmak üzere A_k/A'_k bölüm gruplarının A/A' koleksiyonunu oluşturabiliriz. İddiamız şudur ki A/A' doğal bir yol ile bir zincir yapısı oluşturur ve $\partial'_{k-1}\partial'_k = 0$ olacak şekilde

$$\partial'_k: (A_k/A'_k) \longrightarrow (A_{k-1}/A'_{k-1})$$

homeomorfizmlerinin bir ∂' koleksiyonunu göstermeliyiz. Uğraşımız için ∂'_k nın tanımı açıktır. yani $c \in A_k$ için

$$\partial'_k(c + A'_k) = \partial_k(c) + A'_{k-1}$$

tanımlayalım. Üç şeyi göstermeliyiz; ∂'_k nın iyi tanımlı olduğunu , bir homeomorfizm olduğunu ve $\partial'_{k-1}\partial'_k = 0$ olduğunu.

İlk olarak ∂'_k nın iyi tanımlı olduğunu göstermek için $c_1 \in (c + A'_k)$ olsun , bu durumda

$$(c_1 - c) \in A'_k \text{ buradanda } \partial_k(c_1 - c) \in A'_{k-1} \text{ dır. ayrıca}$$

$$\partial_k(c_1) \in (\partial_k(c) + A'_{k-1}) \text{ dir.}$$

Buda ∂'_k nın iyi tanımlı olduğunu gösterir.

$$\partial'_k((c_1 + A'_k) + (c_2 + A'_k)) = \partial'_k((c_1 + c_2) + A'_k)$$

$$= \partial_k(c_1 + c_2) + A'_{k-1}$$

$$= (\partial_k(c_1) + \partial_k(c_2)) + A'_{k-1}$$

$$= \partial'_k(c_1 + A'_k) + \partial'_k(c_2 + A'_k)$$

eşitliği ∂'_k nın bir homeomorfizm olduğunu gösterir.

Son olarak;

$$\partial'_{k-1}(\partial'_k(c + A'_k)) = \partial'_{k-1}(\partial_k(c) + A'_{k-1})$$

$$= \partial_{k-1}(\partial_k(c)) + A'_{k-2}$$

$$= 0 + A'_{k-2}$$

Buradan da $\partial'_{k-1}\partial'_k = 0$ olduğunu buluruz.

Buraya kadar bahsedilen ifadeler homolojiksel cebirciler için; nasıl ki size tamsayılarda toplama ve çarpma rutin işlemlerse onlar içinde tipik rutin hesaplamalardır. Boyutu araştırmada biraz dikkatli olunmalıdır, yani çıkarımların araştırmasında dikkat edilmelidir.

Aslında, homolojiksel cebirde uzman olan birisi genellikle bu tanımların çoğunu yazmaz ama her zaman hangi gruplarla çalıştığını bilir. Biz bütün tanımları vereceğiz böylece hangi grupların ele alındığını takip edebilirsiniz. Yukarıdaki işlemleri bir teoremla özetleyebiliriz.

Teorem4.2.1: A' , A zincir yapısının bir alt yapısı olsun. her $c \in A_k$ için

$$\partial'_k(c + A'_k) = \partial_k(c) + A'_{k-1}$$

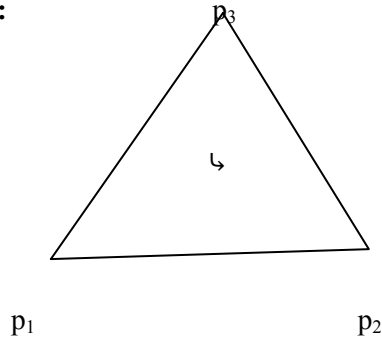
İle tanımlı ∂'_k homeomorfizmlerinin ∂' koleksiyonu ile birlikte A_k/A'_k bölüm gruplarının A/A' koleksiyonunda bir zincir yapısıdır.

A/A' bir zincir yapısı olduğundan $H_k(A/A')$ homoloji gruplarını oluşturabiliriz.

4.2.2.Tanım: $H_k(A/A')$ homoloji grubu A' modül A nın k . bağlı homoloji grubudur.

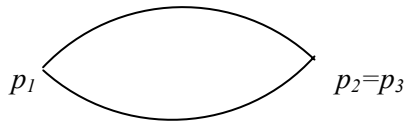
Y nin bir X simplisel yapısının alt yapısı olduğu topolojiksel durumumuzda, topolojistlerin genel gösterimine uymalıyız ve $C(X)$ zincir yapısının $C(Y)$ alt yapısında oluşturulan k . bağlı homoloji grubunu " $H_k(X, Y)$ " ile gösterelim. Y nin bütün zincirleri böylece $\{0\}$ tek noktalı kümesine eşittir. Geometrik olarak bu ifade Y nin bir noktaya çökmesidir.

4.2.3.Örnek:



şekildeki üçgenin kenarlarında (içi hariç) oluşan simplisel yapı ve Y de p_2p_3 kenarından oluşan alt yapı olsun $H_1(X) \simeq H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ olduğunu görmüştük.

p_2p_3 ü bir noktaya dönüştürmek



olduğundan üçgenin eğimli yapısı bozulmuş olur.

Sonuçta yine de S^1 ile topolojik olarak aynıdır. Böylece yine $H_1(X, Y) \simeq \mathbb{Z}$ olmasını umabiliriz.

$C_1(X)$ için üreteçler p_1p_2 , p_2p_3 , p_3p_1 dir. $p_2p_3 \in C_1(Y)$ olduğundan $C_1(X)/C_1(Y)$ nin üreteçlerinin $p_1p_2 + C_1(Y)$ ve $p_3p_1 + C_1(Y)$ olduğu görülür. $Z_1(X, Y)$ yi bulmak için $p_1, p_2, p_3 \in C_0(Y)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \partial'_1(n p_1p_2 + m p_3p_1 + C_1(Y)) &= \partial_1(n p_1p_2) + \partial_1(m p_3p_1) + C_0(Y) \\ &= n(p_2 - p_1) + m(p_1 - p_3) + C_0(Y) \\ &= (m - n)p_1 + C_0(Y) \end{aligned}$$

hesaplarız. Böylece bir çember için $m=n$ olmalıdır, buradan $Z_1(X, Y)$ nin bir üreteci

$(p_1p_2 + p_3p_1) + C_1(Y)$ dir.

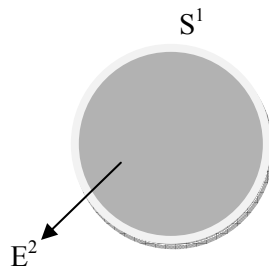
$B_1(X, Y) = 0$ olduğunda $H_1(X, Y) = \mathbb{Z}$ olduğunda görülür.

$p_1 + C_0(Y)$, $Z_0(X, Y)$ ürettiğinden ve

$\partial'_1(p_2p_1 + C_1(Y)) = (p_1 - p_0) + C_0(Y) = p_1 + C_0(Y)$ olduğundan $H_0(X, Y) = 0$ olduğunu görürüz.

Bu bağlantılı simplisel yapılar için 0 boyutlu bağlı homoloji gruplarının karakteristik özelliğidir.

4.2.4.Örnek: E^2 nin bir alt yapısı(sınırı) olarak S^1 i ele alalım. Ve $H_2(E^2, S^1)$ i hesaplayalım. E^2 nin bir dairesel disk olduğunu hatırlayalım. Böylece aşağıdaki gibi S^1 onun bir sınırı olarak da düşünülebilir.



S^1 in bir noktaya çökmesini canlandırmak için dairesel bir parça kumaşın etrafını bir ip ile çevreleyip ipi çekebiliriz böylece çemberin eğimli yüzü bir noktaya toplanır. Elde edilen uzay kapalı bir kese ya da S^2 dir. böylece $H_2(E^2) = 0$ olduğunda E^2 bağlantılı uzay olduğundan $H_2(E^2, S^1) = \mathbb{Z}$ olmasını umabiliriz.

Hesaplamanın amaçları için E^2 topolojik olarak yukarıdaki içi dolu $p_1p_2p_3$ üçgensel alanını ve S^1 i de üçgenin dairesel çerçevesi olarak kabul edebiliriz. Bu durumda

$C_2(E^2, S^1)$, $p_1p_2p_3 + C_2(S^1)$ ile üretilmiştir. Ve

$$\begin{aligned}\partial'_2(p_1p_2p_3 + C_2(S^1)) &= \partial'_2(p_1p_2p_3) + C_1(S^1) \\ &= (p_2p_3 - p_1p_3 + p_1p_2) + C_1(S^1)\end{aligned}$$

Fakat $(p_2p_3 - p_1p_3 + p_1p_2) \in C_1(S^1)$ dir , böylece

$\partial'_2(p_1p_2p_3 + C_2(S^1)) = 0$ elde ederiz. Buradan $p_1p_2p_3 + C_2(S^1)$, $Z_2(E^2, S^1)$ in bir elemanıdır.

$B_2(E^2, S^1) = 0$ olduğundan, beklediğimiz gibi $H_2(E^2, S^1) \simeq \mathbb{Z}$ elde ederiz.

4.3. Bir Çiftin Tam homoloji Dizisi

Şimdi bir çiftin tam homoloji sınıfını tanımlayıp bir örnek vereceğiz. Hesaplamaların bütün ayrıntılarını göstereceğiz, çünkü hesaplamalar açık ve doğrudandır. Önemli bütün tanımları verip konuyu bitireceğiz.

4.3.1.Önerme: A' bir zincir yapısı olan A nın bir alt yapısı olsun. J de

$$J_k : A_k \longrightarrow (A_k/A'_{k-1})$$

doğal homeomorfizmlerinin bir koleksiyonu olsun. bu durumda $J_{k-1}\partial_k = \partial'_k J_k$ dır, yani J ile ∂ değişmelidir.

4.3.2.Teorem: Yukarıdaki J_k dönüşümü bir doğal homeomorfizm olan

$$J_{*k} : H_k(A) \longrightarrow H_k(A/A') \text{ y1 üretir.}$$

İspat: önerme 3.11 ve teorem3.4 den kolayca elde edilir.

A' bir zincir yapısı olan A nın bir alt yapısı olsun. $h \in H_k(A/A')$ olmak üzere $z \in Z_k(A/A')$ için $h = z + B_k(A/A')$ dır ve herhangi bir $c \in A_k$ için $z = c + A'_{k-1}$ olur.

(dikkat edilirse gösterimlerin uygun iki seçimiyle birlikte h den c ye ulaştık.) Böylece $\partial'_k(z) = 0$ dır, bu da $\partial_k(c) \in A'_{k-1}$ olmasını gerektirir. Bu da $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ olmasıyla birlikte $\partial_k(c) \in Z_{k-1}(A')$ olduğunu gösterir.

$\partial_{*k}(h) = \partial_k(c) + B_{k-1}(A')$ olacak şekilde $\partial_{*k} : H_k(A/A') \longrightarrow H_{k-1}(A')$ y1 tanımlayalım. ∂_{*k} nın bu tanımı oldukça karmaşık gözükmemektedir. Bunu şu şekilde düşünelim $H_k(A/A')$ nın bir elemanıyla başlayalım. Böyle bir eleman bir bağlı k -devir A' modül ile gösterilir. Bunun bir bağlı k -devir A' modül olduğunu söylemek sınırının A'_{k-1} de olduğunu söylemek demektir. Bu elemanın sınırı A'_{k-1} de ve A_k de bir şeyin sınırı olduğu için bu sınır A'_{k-1} de bir $(k-1)$ -devir olmalıdır. böylece $h \in H_k(A/A')$ ile başlayarak $H_{k-1}(A')$ de bir homoloji sınıfını gösteren bir $(k-1)$ -devire ulaşmış olduk.

4.3.3.Önerme: şimdi tanımladığımız $\partial_{*k} : H_k(A/A') \longrightarrow H_{k-1}(A')$ dönüşümü iyi tanımlıdır ve $H_k(A/A')$ den $H_{k-1}(A')$ ne bir homeomorfizmdir.

$\tilde{I}_{*k}$ örnek 3.6 deki dönüşüm olsun. bu durumda aşağıdaki diyagramı oluştura biliriz.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{*k+1}} & H_k(A') & \xrightarrow{i_{*k}} & H_k(A) & \xrightarrow{j_{*k}} & H_k(A/A') \\ & & & & & & \\ & & \xrightarrow{\partial_{*k}} & H_{k-1}(A') & \xrightarrow{i_{*k-1}} & H_{k-1}(A) & \xrightarrow{j_{*k-1}} & H_{k-1}(A/A') & \xrightarrow{\partial_{*k-1}} & \dots \end{array} \quad (1)$$

4.3.4.Önerme: (1) diyagramındaki gruplar verilen dönüşümlerle birlikte bir zincir yapısı oluştururlar.

Bu önermenin ispatı için sadece ardışık iki dönüşümün dizisinin her zaman 0 olduğunu göstermek her zaman yeterlidir.

Yukarıda ki diyagram bir zincir yapısı oluşturduğundan bu zincir yapısının homoloji gruplarını araştırabilir miyiz? Bu sorudaki cevabın aslında oldukça kolay olduğunu biz biliyoruz. Bu zincir yapısındaki bütün homoloji grupları 0 dır. böyle bir zincir yapısının ilgi çekici olmadığını düşünebilirsiniz. Tam aksine bu tarz bir zincir yapısının özel bir adı dahi vardır.

4.3.5.Tanım: Bir zincir yapısı oluşturan A_k gruplarının ve ∂_k homeomorfizmlerinin bir dizisine , zincir yapısındaki bütün homoloji grupları 0 ise , yani her k için ∂_k altındaki görüntü ∂_{k-1} in çekirdeğine eşit oluyorsa bir tam dizi denir.

Tam dizilerin topolojide büyük önemi vardır. bunların bazı temel özelliklerini vereceğiz.

4.3.6.Teorem: (1) diyagramındaki zincir yapısının grupları ve dönüşümleri bir tam dizi oluştururlar.

4.3.7.Tanım: (1) diyagramındaki tam diziye (A, A') çiftinin tam homoloji dizisi denir.

4.3.8.Örnek: teorem 4.3.6 nın topoloji uygulamasına bir örnek verelim. İspatsız olarak, $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ ve $H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ dir fakat $k \neq 0, n$ olduğunda $H_k(S^n) \simeq 0$ olduğuna değinmiştik. Ayrıca E^n

bağlantılı olduğunda $k \neq 0$ için $H_k(E^n) \simeq 0$ olduğunda ispatsız olarak vermiştik. E^n için ele alalım S^n için sonuca varalım.

S^n , simplisel yapı olan E^{n+1} in bir alt yapısı olarak ele alabiliriz; örneğin E^{n+1} topolojik olarak bir $(n+1)$ -simpleks e denktir ve S^n topolojik olarak sınırına denktir. (E^{n+1}, S^n) çiftinin tam homoloji dizisini oluşturalım. $1 \leq k \leq n$ için

$$\underbrace{H_{n+1}(S^n)}_{=0} \xrightarrow{i_{*n+1}} \underbrace{H_{n+1}(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*n+1}} \underbrace{H_{n+1}(E^{n+1}, S^n)}_{\simeq \mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_{*n+1}} \dots$$

$$\underbrace{H_n(S^n)}_{=0} \xrightarrow{i_{*n}} \underbrace{H_n(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*n}} \underbrace{H_n(E^{n+1}, S^n)}_{=0} \xrightarrow{\partial_{*n}} \dots \xrightarrow{j_{*k+1}} \dots$$

$$\underbrace{H_{k+1}(E^{n+1}, S^n)}_{=0} \xrightarrow{\partial_{*k+1}} \underbrace{H_k(S^n)}_{=?} \xrightarrow{i_{*k}} \underbrace{H_k(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*k}} \dots \quad (2)$$

dir. E^{n+1} in bağlantılı olmasından $k \geq 1$ için $H_k(E^{n+1}) = 0$ elde edilir. Bunu diyagram (2) den elde ettik. E^{n+1} bir $(n+1)$ -simpleks ve S^n sınırı olmak kaydıyla $k \leq n$ için $H_k(E^{n+1}, S^n) = 0$ dir. bunu da yine diyagram (2) den elde ettik.

Örnek 4.3.8 de olduğu gibi bir üretilmiş homoloji sınıfı

$p_1 p_2 \dots p_{n+2} + C_{n+1}(S^n)$ temsilcisini içererek $H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) \simeq \mathbb{Z}$ olduğu gösterilebilir.

$1 \leq k < n$ için diyagram (2) nin son satırındaki tam diziden $H_k(S^n) = 0$ olduğunu ve $H_k(E^{n+1}) = 0$ dan (çekirdek i_{*k}) = $H_k(S^n)$ olduğunu görürüz. Fakat $H_{k+1}(E^{n+1}, S^n) = 0$ olduğunda (görüntü ∂_{*k+1}) = 0 olur. Tamlıktan dolayı (çekirdek i_{*k}) = (görüntü ∂_{*k+1}) dir böylece

$1 \leq k < n$ için $H_k(S^n) = 0$ dir.

Aşağıdaki zincir kurallarında $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ olmasını doğurur. Yukarıdaki diyagram (2) ile ilişkili olarak

1. $H_{n+1}(E^{n+1})=0$ olduğundan $(\text{görüntü } j_{*n+1}) = 0$ dır.
2. Tamlıktan dolayı $(\text{çekirdek } \partial_{*n+1}) = (\text{görüntü } j_{*n+1})=0$ olur yani ∂_{*n+1} bir izomorfik dönüşümdür.
3. Böylece $(\text{görüntü } \partial_{*n+1}) \simeq \mathbb{Z}$ dir.
4. $H_n(E^{n+1})=0$ olduğundan $(\text{çekirdek } i_{*n}) = H_n(S^n)$ dir.
5. Tamlıktan dolayı $(\text{çekirdek } i_{*n}) = (\text{görüntü } \partial_{*n+1})$ ve böylece $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ dir.

Böylece $1 \leq k < n$ için $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ ve $H_k(S^n)=0$ olduğunu gördük. S^n bağlantılı olduğundan $H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ dir. bu sonuca

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underbrace{H_1(E^{n+1}, S^n)} & \xrightarrow{\partial_{*1}} & H_0(S^n) & \xrightarrow{i_{*0}} & \underbrace{H_0(E^{n+1})} & \xrightarrow{j_{*0}} & \underbrace{H_0(E^{n+1}, S^n)} \\
 =0 & & & & \simeq \mathbb{Z} & & =0
 \end{array}$$

tam dizisinden de ulaşılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Adams, J.F. [1960]. On the nonexistence of elements of Hopf invariant one. Ann. Math.
- [2] Adams, J.F. [1962]. Vector fields on spheres. Ann. Math.
- [3] Adem, J. [1952]. The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology. Proc. Natl.
- [4] Birkhoff, G.D. [1913]. Proof of Poincaré's geometric theorem. Trans. Am. Math. Soc.
- [5] James W. Vick, Homology Theory . [1994] Brown, M. [1962].
- [6] Locally flat embeddings of topological manifolds. In "Topology of
- [7] 3-Manifolds and Related Topics" (M. K. Fort, Jr., ed.). Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [8] Brown, R. [-1968]. "Elements of Modern Topology." McGraw-Hill, New York.
- [9] Brown, R.F. [1971]. "The Lefschetz Fixed Point Theorem."
- [10] Brumfiel, G., Madsen, I., and Milgram, R. J. [1971]. PL characteristic classes.
- [11] Connelly, R. [1971]. A new proof of Brown's collaring theorem. Proc. Am. Math. Soc
- [12] Eilenberg, S., and Steenrod, N. [1952]. "Foundations of Algebraic Topology."
- [13] Gray, B. [1975]. "Homotopy Theory: An Introduction to Algebraic Topology."
- [14] Hu, S.T. [1959]. "Homotopy Theory." Academic Press, New York.
- [15] Kirby, R., and Siebenmann, L. [1969]. Foundations of Topology. Notices Am. Math.
- [16] T.Kaczynski, K.Mischaikow, M.Mrozek, [2000]. Algebraic Topology.
- [17] Dr. Saunders Mac Lane, [1963]. Homology Mac Lane Distinguished Service Professor