

**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**(DOKTORA TEZİ)**

**TAYLOR SERİLERİNE DAYANAN YAKLAŞIK  
YÖNTEMLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

**Eda YÜLÜKLÜ**

Matematik Anabilim Dalı  
Bilim Dalı Kodu: 403.06.01  
Tezin Sunulduğu Tarih: 13.02.2009

**Tez Danışmanı:  
Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ**

Bornova-İZMİR



Sayın **Eda YÜLÜKLÜ** tarafından doktora tezi olarak sunulan “ **Taylor Serilerine Dayanan Yaklaşık Yöntemler Üzerine Bir Çalışma**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş değer bulunmuş ve 13.02.2009 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

**Jüri Üyeleri:****İmza****Jüri Başkanı : Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ**

.....

**Üye : Prof. Dr. Şennur SOMALI**

.....

**Üye : Doç. Dr. Emine MISIRLI**

.....

**Üye : Prof. Dr. Pınar DÜNDAR**

.....

**Üye : Doç.Dr. Halil ORUÇ**

.....



**ÖZET****TAYLOR SERİLERİNE DAYANAN YAKLAŞIK YÖNTEMLER  
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

YÜLÜKLÜ, Eda

Doktora Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ

Şubat 2009, 67 sayfa

Genel olarak matematik, mühendislik, fizik ve diğer uygulamalı bilim dallarında, lineer olmayan problemlerin yaklaşık/tam çözümlerini elde etmek, problemin analizini doğru yapabilmek için oldukça yararlıdır. Klasik olarak bu tip problemlerin çözümleri perturbasyon yöntemleri ile yapılıyordu, ancak nonlineerliğin kuvvetli olması durumlarda bu yöntemler yetersiz kalmaktadır. Son yıllarda, bu yüzden Taylor serisine dayanan ve yaklaşık/tam çözümleri veren, Adomian ayrışım yöntemi, Homotopi analiz yöntemi, homotopi perturbasyon yöntemi, diferansiyel dönüşüm yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi, v.s. gibi analitik yöntemler geliştirilmiştir. Bu tezde, yukarıda bahsedilen yöntemlerin bazı lineer olmayan problemlere uygulanması yapılmış ve yöntemlerin güçlü ve zayıf noktaları hem teorik hem de uygulamalı olarak verilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Adomian ayrıştırma yöntemi, Homotopi analiz yöntemi, homotopi perturbasyon yöntemi, diferansiyel dönüşüm yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi.



**ABSTRACT****A STUDY ON APPROXIMATION METHODS BASED ON TAYLOR  
SERIES**

YÜLÜKLÜ, Eda

Ph. D in Mathematics Department

Supervisors : Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ

February 2009, 67 pages

In general, to obtain approximate solutions of non-linear problems are vital important to make the analysis of the problems correctly in mathematics, engineering, physics and other applied sciences. The classical solutions of these problems used to obtained by perturbation methods in general. But, perturbation methods are not sufficient enough for the nonlinear problems with strong nonlinearity. Recently, many new methods based on Taylor expansions are introduced, i.e. Adomian decomposition method, Homotopy analysis method, homotopy perturbation method, differential transformation method and variational iteration method, etc. in the literature. In this thesis, above mentioned methods are compared and their strong and weak sides are determined theoretically as well as various applications.

**Key words:** Adomian decomposition method, Homotopy analysis method, homotopy perturbation method, differential transformation method and variational iteration method



## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma sűresince deęerli gűrűŐlerinden yararlandıęım, bana her zaman destek ve yardımını esirgemeyen Sayın hocam Ege Ŭniversitesi Matematik Bűlűmű űęretim űyesi Prof. Dr. Turgut ŬZiŐ' e, bana her zaman destek olan, esirgemedięi yardımlarına her zaman ihtiyaç duyacaęım Sayın hocam Kastamonu Ŭniversitesi űęretim űyesi Prof. Dr. Ferhat NASİBOV' a, bugűne kadar hep yanımda olan ve hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen çok deęerli aileme, en derin saygılarımı ve minnet duygularımı iletmeyi bir borç bilirim.



## İÇİNDEKİLER

	<b><u>Sayfa</u></b>
ÖZET .....	v
ABSTRACT .....	vii
TEŞEKKÜR.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	xiii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	xv
1.GİRİŞ.....	1
2. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ .....	3
2.1 Diferansiyel Dönüşüm Yöntemin Matematiksel Yapısı. ....	8
2.1.1 Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm .....	8
2.1.2 İki boyutlu diferansiyel dönüşüm .....	13
2.1.3 n- boyutlu diferansiyel dönüşüm .....	20
3. TAYLOR SERİLERİNE DAYANAN DİĞER YÖNTEMLER .....	27
3.1 Adomian Ayrışım Yöntemi.....	27
3.1.1 Adomian $A_n$ polinomların hesaplanmasına örnekler .....	31

**İÇİNDEKİLER (devam)**

	<b><u>Sayfa</u></b>
3.2 Homotopi Analiz Yöntemi.....	32
4. UYGULAMALAR .....	35
5. MAPLE 10 PROGRAM KODLARI.....	56
6. SONUÇ .....	60
KAYNAKLAR DİZİNİ .....	63
ÖZGEÇMİŞ.....	67

**ŞEKİLLER DİZİNİ**

<b><u>Sekil</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
4.1 ADM ve DTM'nin yaklaşık çözümü.....	37
4.2 Sine-Gordon denkleminin DTM ve tam çözümü .....	41
4.3 Sine-Gordon denkleminin $x = 0, \dots, 1$ ve $t = 0, \dots, 1$ için DTM ve tam çözümü .....	41
4.4 (a) tam çözüm ve (b) 4-terim diferansiyel dönüşüm yöntemi .....	44



## TABLOLAR DİZİNİ

<b><u>Tablo</u></b>		<b><u>Sayfa</u></b>
4.1	DTM ve ADM'ne göre değerler .....	37
4.2	DTM ile tam çözüm değerleri .....	42
4.3	DTM ile tam çözüm değerleri .....	43
4.4	$x=0.01$ için tam çözüm ve 5-terim MADM, 2-adım VIM, 3-terim HPM ve 4-terim DTM arasındaki mutlak hatalar .....	43
4.5	$x=0.1$ için tam çözüm ve 5-terim MADM, 2-adım VIM, 3-terim HPM ve 4-terim DTM arasındaki mutlak hatalar .....	44
4.6	$t = 0.1$ için 5-terim ADM, 4 - adım VIM ve 4 - terim DTM çözüm .....	46
4.7	$t = 0.2$ için 5-terim ADM, 4-adım VIM ve 4-terim DTM çözüm değerleri .....	47
4.8	$t = 0.3$ için 5-terim ADM, 4-adım VIM ve 4-terim DTM çözüm değerleri .....	47



## 1.GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, Diferansiyel dönüşüm metodu(Differential Transform Method, DTM) kullanılarak, özel bir diferansiyel denklem olan Sine-Gordon, Klein-Gordon ve  $K(m,n)$  denklemlerinin nümerik ve analitik çözümünün bulunması amaçlanmıştır. Genel olarak, çeşitli mühendislik bilimleri, doğa bilimleri (fizik, kimya v.b), ekonomi problemleri ve matematik ana bilim dalında araştırılan problemlerin matematiksel modellemelerinde karşılaşılan problemlerin çözümlenebilmesi için; diferansiyel denklemler ve problemin doğasına uygun olarak verilen şartlar altındaki çeşitli türlerinin çözülmesi problemi ile karşılaşılmaktadır.

Herhangi bir diferansiyel denklemin çözümünün yapılabilmesi için birçok farklı yöntem geliştirildiği bilinmektedir. Bununla birlikte problemin çözümünün varlık ve teklifi ile çözümlerinin davranışları için verilen teoremler yardımıyla kolaylıkla bulunabilir. Son yıllarda bu tür problemlerin teorik çözümlerinin bulunmasına ilaveten, bu çözümlerin teknolojide kullanılabilir olması çok daha büyük bir önem kazanmıştır. Bu ise diferansiyel denklem problemlerinin çözümünün; aşikâr formunda bulunması problemini ortaya çıkarmıştır. Yukarıda anlatıldığı gibi zincirleme biçimde birbirlerini etkileyen yeni gereksinimler, problemlerin çözülebilmesi için nümerik ve yaklaşık çözüm yöntemlerinin geliştirilmesinin gerekliliği kaçınılmaz biçimde ortaya çıkmıştır.

Son yıllarda çeşitli bilim dallarında araştırılan problemlerin matematiksel modellemelerinde; problemlerin daha doğru kurulabilmeleri için lineer(doğrusal) problemlerden ziyade lineer olmayan problemler olarak kurulması gerekliliği sonucuna varılmıştır. Bu ise; bu şekilde kurulan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin analitik biçimde verilmesini daha da zorlaştırmaktadır. Bu sorun

nümerik ve yaklaşık çözüm yöntemlerinin geliştirilmesini daha da önemli kılmaktadır.

Nümerik yöntemler son zamanlarda teorinin pratikte uygulanabilirliği bakımından çok önemli rol oynamaktadır. Hızlı bilgisayarların varlığı, mühendislik dallarında ortaya çıkan karmaşık problemlerin nümerik yöntemlerle daha hızlı ve daha iyi tamlığa sahip olacak şekilde çözülmesine imkan vermektedir. Bugüne kadar birbirlerinden farklı birçok nümerik metod kurulmuştur. Son dönemlerde daha çok; basit, kolay bir şekilde algoritması oluşturulabilen ve dolayısıyla da programlanabilen, çok daha hızlı sonuçlanan, hem lineer hem de lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanılabilen metotlara ihtiyaç duyulmaktadır. Son dönemlerde bu tür özellikleri taşıyan ve en çok çalışılan yöntemlerden bazıları şu şekilde sıralanabilir: Adomian ayrışım metodu(ADM), Homotopi Analiz Metodu(HAM), Varyasyonel İterasyon Metodu(VIM) ve Diferansiyel Dönüşüm Metodu (Differential Transformation Method: DTM).

Hazırlanan bu tez çalışmasında yukarıda adı geçen metotlardan, Diferansiyel Dönüşüm metodu ile özel bir tip diferansiyel denklem olan Sine-Gordon, Klein-Gordon ve  $K(m,n)$  denklemlerinin çözümü elde edilmiş ve analitik çözüm ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması yapılmıştır.

Hızla gelişen bilgisayar dünyasının ve yeni dönem teknolojilerinin daha basit algoritmalarla daha hızlı ve daha az bir hata miktarı ile sonuca ulaşan çözüm yöntemlerine ihtiyaç duyduğu göz önüne alınırsa yukarıda bahsettiğimiz özelliklerdeki yöntemlerin hangilerinin diğerlerine göre iyi yaklaşım verdiğini incelemek yerinde olacaktır. Biz bu çalışmada, DTM'nin bilgisayar ortamında diğer seri yöntemlerine göre daha kolay ve hızlı sonuca ulaşabildiğini düşünmekteyiz, dolayısıyla bu yöntem ve diğer bahsettiğimiz yöntemler aynı örnekler üzerinde incelenip sonuç oluşturulmaya çalışılacaktır.

## 2. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

İlk olarak Zhou (1986) tarafından ortaya sürülen diferansiyel dönüşüm yönteminin en önemli avantajlarından birisi, verilen bir adi veya kısmi diferansiyel denklemi sade ve basit bir dönüşüm yardımıyla cebirsel bir denkleme dönüştürüyor olmasıdır. Bu dönüşümle elde edilen cebirsel denklem yalnızca türev ifadelerini içerdiğinden algoritmasında hem daha hızlı sonuç vermekte hem de çok daha basit hesaplamalar gerektirmektedir. Bununla birlikte geriye sadece cebirsel denklem çözümü yapmak kalmaktadır. Yöntemin en büyük avantajlarından bir diğeri ise, lineer veya lineer olmayan problemlere rahatlıkla uygulanabilmesinde yatmaktadır. Bu yöntemin çeşitli uygulamaları aşağıda tanıtılmıştır.

Zhou (1986) çalışmasında ilk olarak bu yöntemi, elektrik devre analizlerinde ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için ortaya koymuştur.

Chen, C.K., Ho, S.H.,; Application of differential transformation to eigenvalue problems. Applied Mathematics and Computation; 79, 179–188, 1996. Bu çalışmada, diferansiyel dönüşüm yöntemi(DTM) özdeğer problemlerine uygulanmıştır. Özdeğerlerin ve özfonksiyonların bulunmasında kullanılan en çok bilinen yöntemler olan Ritz ve Galerkin yöntemlerinde,  $i \geq 2$  için  $i$ . Özdeğerin bulunması oldukça güç olup Chen ve Ho yaptıkları çalışmada diferensiyel dönüşüm (DT) metodu ile özdeğerleri ve özfonksiyonları elde etmişlerdir.

Jang, M.J., Chen, C.L.; Analysis of the response of a strongly nonlinear damped using a differential taransform method. Applied Mathematics and Computation; 88, 137–151, 1997. Bu çalışmada, güçlü lineer olmayan sönümlü bir sistemin tepkisinin analizinde diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılmış olup elde edilen sonuçlarla, sistemin Runge-Kutta yöntemi ile çözülmesiyle elde

edilen sonuçlar karşılaştırılarak diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen sonuçların daha hassas olduğu ifade edilmiştir.

Yu, L.T., Chen, C-K.; The solution of the basius equation by the differential transform method. *Math. Comput. Modelling.* 28, 101–111, 1998. Bu çalışmada, Blasius diferansiyel denklemi olarak bilinen ve üçüncü mertebeden lineer olmayan bir adi türevli diferansiyel denklem olan denklemin diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözümü yapılmıştır.

Chen, C.L., Liu, Y.C.; Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems, *Applied Mathematics and Computation*; 95, 155-164, 1998. Bu çalışmada, diferansiyel dönüşüm yardımıyla lineer olmayan ısı konduksiyon problemlerinin çözümü ile birlikte analitik çözümün spektrumunun elde edilebilmesi için bir prosedür geliştirilmiş olup çözüm Taylor serileri yardımıyla ifade edilmiştir.

Chen, C.K., Ho, S.H.; Transverse vibration of a rotating twisted timonshenko beams under axial loading using differential transform. *Intenational Journal of Mechanical Science*; 41(11), 1339–1356, 1999. Bu çalışmada, dönerek bükülmüş Timoshenko kirişinin serbest vibrasyon problemini çözmek için diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılmış, çözümler ise analitik formda ifade edilmiştir.

Chen, C.K., Ho, S.H.; Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method. *Applied Mathematics and Computations*; 106, 171–179, 1999. Bu çalışmaya kadar yalnızca adi türevli diferansiyel denklemler için uygulanabilen diferansiyel dönüşüm metodu, bu çalışmayla birlikte ilk olarak kısmi türevli diferansiyel denklemlere genişletilmiş olup bunun için iki boyutlu diferansiyel dönüşüm tanımlanmıştır.

Jang, m.j., Chen, C.L.,Liu, Y.C.; On the solving initial value problems using the differential transform method. *Applied Mathematics and Computation*;

115, 145–160, 2000. Bu çalışmada, ilk olarak lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri gridler yardımıyla diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Nümerik yöntemlerde sıklıkla gridlerden faydalanılmasına rağmen ilk olarak bu çalışmada dikkate alınmış olmakla birlikte hem daha iyi sonuçlar elde edilmiş hem de çözümün global hatası kontrol altına alınmıştır.

Abdel-Halim Hassan, I.H.; On solving eigenvalue problem by using a differential transformation. *Applied Mathematics and Computation*; 127, 1–22, 2002. Bu çalışmada, diferansiyel dönüşüm yöntemi yardımıyla, Sturm-Liouville özdeğer problemi için özdeğer ve normalleştirilmiş özdeğer fonksiyonu elde edilmiştir. Bunun birlikte özdeğerlerin yakınsaklığı incelenmiş ve bilinen analitik sonuçlar ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Abdel-Halim Hassan, I.H. “Different Applications for the differential transformation in differential equations”, *Applied Mathematics and Computation*; 129, 183-221, 2002. Bu çalışmada ise yazar, bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini ikinci ve dördüncü mertebe diferansiyel denklemlerin özdeğer ve normalleştirilmiş öz fonksiyonlarının bulunmasında kullanmıştır. Bununla birlikte iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yardımıyla sabit katsayı birinci ve ikinci mertebe kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilmiş elde edilen sonuçlar, aynı problemlerin fark denklemleri yardımıyla elde edilen sonuçları ve analitik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Ayaz, F., “On the two dimensional differential transform method”, *Applied Mathematics and Computation*; 143, 361-374, 2003. Bu çalışmada, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm için bazı teoremler verilmiş ve bunun birlikte lineer ve lineer olmayan kısmi türevli başlangıç değer problemleri çözülmüştür.

Ayaz, F., “Applications of differential transform methods to differential algebraic equations”, *Applied Mathematics and Computation*; 152, 649-657, 2004. Bu çalışmada, lineer cebirsel-diferansiyel denklemlerin çözümü diferansiyel

dönüşüm yöntemi ile incelenerek konuyla ilgili örneklerden elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Arikoğlu, A., Özkol I. “ Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method” , Applied Mathematics and Computation; 168(2), 1145-1158, 2005. Bu çalışmada integral denklemleri için diferansiyel dönüşüm teorisi verilerek nadiren analitik çözümleri bulunabilen bu denklemler için analitik çözümleri bilinen bir takım lineer ve lineer olmayan integro-diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılmış, aynı zamanda literatürde değişik çalışmalarda wavelet-galerkin ve Adomian ayrışım yöntemleri ile çözülen bu örnekler için karşılaştırma yapma olanağı sağlanmıştır.

Kurnaz A., Oturanç, G. “The differential tranform approximation for the system of ordinary differential equation” , International Jornal of Computer Mathematics; 82(6), 709-719, 2005. Bu çalışmada; diferansiyel dönüşüm yöntemi çözümün arandığı aralıktaki çözüm fonksiyonu gridlere bölünerek sistemlere uygulanmış böylece çözüm fonksiyonu her bir alt aralık için bulunarak çözüme yaklaşılmıştır. Bununla birlikte hata kontrolü yapılarak hata için sisteme girilen üst sınıra bağlı olarak alınması gereken minimum grid sayısı tespit edilmiştir.

Bildik, N., Konuralp, A., Bek, F.O., Küçükarslan, S., “Solution of different type of partial differential equation by differential transform method and Adomian’s decomposition method”, Applied Mathematics and Computation; in pres 172(1), 551-567, 2006. Bu çalışmada, farklı türlerdeki kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü hem diferansiyel dönüşüm yöntemi ile hem de Adomian ayrışım yöntemi ile yapılmış olup elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Kurnaz A., Oturanç G., Kiriş M.E. “n dimensional differential transformation method for solving PDE’s”, International Journal of Computer Mathematics; 82(3), 369-380, 2005. Bu çalışmada kısmi türevli diferansiyel

denklemlerin çözümü için genelleştirme yapılmış ve  $n$  boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi tanımlanmıştır. Sonuçlar bazı lineer ve lineer olmaya kısmi türevli diferansiyel denklemler çözülerek test edilmiştir.

Yang X., Liu Y., Bai S. “A numerical solution of second order partial differential equation by differential transform”, *Applied Mathematics and Computation.*, 2005. Bu çalışmada, ikinci mertebeden kısmi türevli lineer diferansiyel denklemlerin diferansiyel dönüşüm yöntemi yardımıyla çözümlere yer verilmiştir.

Özkan O., Keskin Y. “An application of the differential Method to the boundary value problems of the system of integro differential equations”, *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 6, 43-53, 2005. Bu çalışmada, integro-diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri belirli sınır şartları için incelenmiştir.

Jafari H., Daftardar-Geriji V. “Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 196(2), 644-651, 2006. Bu çalışma lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Adomian ayrışım yöntemi kullanılmıştır.

Momani S., Odibat Z. “Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order” *Chaos, Solitons& Fractals*. 31(5), 1248–1255, 2007. Bu çalışmada lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için kesirli fark yöntemi, Adomian ayrışım yöntemi ve varyasyonel iterasyon teknikleri kullanılarak farklı tip problemler için çözümler elde edilerek elde edilen sonuçlar ile analitik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Şimdi bu yöntemin matematiksel yapısını detaylı olarak verelim.

## 2.1. Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Matematiksel Yapısı

Bu bölümde, Diferansiyel Dönüşüm yönteminin (*DTM*) tanımı ve genel özellikleri ifade edilecektir. Daha önce de belirtildiği gibi yöntem diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemlere dönüştürülerek çözülmesini içermektedir. Yine önceki bölümlerde ifade edildiği gibi, diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürerek çözen diferansiyel dönüşüm yönteminden başka yöntemler de mevcut olmakla birlikte çalışmalar göstermiştir ki diferansiyel dönüşüm bu yöntemlere nazaran çok daha iyi sonuçlar üretmektedir. İlk olarak, Zhou (1986) tarafından ortaya konulan diferansiyel dönüşüm yöntemi, diferansiyel denklemin içerdiği bağımsız değişken sayısına göre şekillenmektedir. Daha iyi anlaşılabilmesi için bu bölümde verilecek olan özellikler öncelikle  $n = 1$  ve  $n = 2$  için sırasıyla bir ve iki boyutlu uzaylar için bir boyutlu ve iki boyutlu diferansiyel dönüşümlere ait özellikler ispatsız olarak daha sonra da bu teoremlerin  $n$ -boyutlu uzaydaki karşılıkları ispatlı olarak verilecektir.

Burada yer verilen teoremlerin ispatları, literatürde ayrıntılı bir şekilde verildiği için ayrıca ispatları yapılmayacaktır.

### 2.1.1. Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm

Bir  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  analitik fonksiyonu dikkate alındığında, analitik fonksiyon tanımından herhangi bir  $x_0 \in I$  noktası için  $u(x)$  fonksiyonu  $x_0$  noktası civarında

$$u(x) = \sum_k C_k (x - x_0)^k \quad (2.1.1.)$$

biçiminde kuvvet serisine açılabilir. Bu serinin  $x_0$  noktası civarında düzgün yakınsak olduğu söylenebilir. Analitik bir fonksiyon sonsuz diferansiyellenebilir olması ve Taylor serilerinin diferansiyellenebilmesi teoreminden  $C_k$  katsayıları,

$$C_k = \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (2.1.2)$$

olarak elde edilir. Bu  $C_k$  değerleri (2.1.1) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad (2.1.3)$$

bulunur. Bununla birlikte,  $K$ , negatif olmayan tamsayıların bir kümesi ve  $k \in K$  olmak üzere,

$$U(x_0, k) = \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{(u^{(k)}(x)) \Big|_{x=x_0}}{k!} \quad (2.1.4)$$

biçiminde seçilir ve (2.1.4) eşitliği (2.1.3)'de yerine yazılırsa,

$$u(x) = \sum_k U(x_0, k) \frac{(x-x_0)^k}{k!} \quad (2.1.5)$$

elde edilir. Buradan elde edilen sonuçla birlikte analitik fonksiyonların yalnız bir şekilde seriye açılabilmesinden dolayı, herhangi bir analitik  $u(x)$  fonksiyonu için,  $x_0$  noktası civarında  $u(x) \leftrightarrow \{U(x_0, k)\}_{k=0}^{\infty}$  biçiminde birebir bir eşlemenin olduğu söylenebilir.

Genel olarak,  $M(k)$ ,  $k$ 'ya bağlı bir reel sayı ve  $q(x) \neq 0$  olmak üzere  $q(x)$ ,  $I$  da tanımlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$U(x_0, k) = M(k) (q(x).u(x))^{(k)} \Big|_{x=x_0}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.6)$$

biçiminde kabul edilirse,  $u(x)$  analitik fonksiyonu;

$$u(x) = \frac{1}{q(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U(x_0, k)}{M(k)} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \quad (2.1.7)$$

yazılabilir. Burada  $q(x) = 1$ ,  $M(k) = \frac{1}{k!}$  olarak seçilirse,

$$u(x) = \sum_k^{\infty} U(x_0, k)(x - x_0)^k \quad (2.1.8)$$

bulunur.

**Tanım 2.1.1.1.**  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  analitik fonksiyonu dikkate alındığında,  $\{U(x_0, k)\}_{k=0}^{\infty}$  kümesine  $u(x)$  fonksiyonunun  $x = x_0$  noktasındaki *spektrumu* denir. Yani; analitik bir  $u(x)$  fonksiyonunun seri açılımında karşılaşılan ve (3.3)'deki gibi tanımlanan  $\{U(x_0, k)\}_{k=0}^{\infty}$  katsayılarına  $u(x)$  fonksiyonunun *spektrumu* olarak adlandırılmaktadır. Buradaki spektrum tanımı ile Fonksiyonel Analizdeki spektrum tanımı karıştırılmamalıdır. Ayrıca  $\{U(x_0, k)\}_{k=0}^{\infty}$  ailesinin her bir elemanına da *spektra* adı verilir.

**Tanım 2.1.1.2.**  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  analitik fonksiyonunun  $\{U(x_0, k)\}_{k=0}^{\infty}$  spektrum ayrışımına *Diferansiyel Dönüşüm (DT)* denir. Burada  $u(x)$  orijinal fonksiyon,  $\{U(x_0, k)\}_{k=0}^{\infty}$  fonksiyonu ise *dönüştürmüş fonksiyon* olarak tanımlanır.

**Tanım 2.1.1.3.**  $\{U(x_0, k)\}_{k=0}^{\infty}$  fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşümü, (2.1.8) ile verilen

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(x_0, k)(x - x_0)^k$$

biçiminde tanımlanır.

Herhangi bir  $u(x)$  analitik fonksiyonu için,

$$R_N(x) = \frac{1}{q(x)} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{U(x_0, k)}{M(k)} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \quad (2.1.9)$$

olarak alınırsa diferansiyel dönüşüm tanımı ve Taylor seriye açılımından söylenebilir ki,

$$u(x) = \frac{1}{q(x)} \sum_{k=0}^N \frac{U(x_0, k)}{M(k)} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \quad (2.1.10)$$

dir.

Tek boyutlu ters diferansiyel dönüşüm;

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2.1.11)$$

ve (2.1.8) analitik fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x-x_0)^k \left[ \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2.1.12)$$

elde edilir.

Buradan da açıkça görülmektedir ki diferansiyel dönüşüm tanımı Taylor seriye açılımından çıkarılmaktadır.

**Teorem 2.1.1.1.**  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere, bir  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı tek değişkenli  $u$  ve  $y$  analitik fonksiyonları dikkate alalım. Eğer,  $y(x) = \alpha u(x)$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda  $y$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = \alpha U(x_0, k) \quad (2.1.13)$$

biçimindedir (Chen and Ho, 1996).

**Teorem 2.1.1.2.** Bir  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı tek değişkenli  $u, v$  ve  $y$  analitik fonksiyonları dikkate alındığında,  $y(x) = u(x) \pm v(x)$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda sırasıyla  $u, v$ , fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümleri  $U$  ve  $V$  ile gösterilmek üzere,  $y$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = U(x_0, k) \pm V(x_0, k) \quad (2.1.14)$$

biçimindedir (Chen and Ho, 1996).

**Teorem 2.1.1.3.** Bir  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı tek değişkenli  $u$  ve  $y$  analitik fonksiyonları dikkate alalım. Eğer,  $y(x) = \frac{du(x)}{dx}$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda  $y$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = (k+1)U(x_0, k+1) \quad (2.1.15)$$

biçimindedir (Chen and Ho, 1996).

**Teorem 2.1.1.4.** Bir  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı tek değişkenli  $u$  ve  $y$  analitik fonksiyonları dikkate alalım. Eğer,  $y(x) = \frac{d^m u(x)}{dx^m}$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda  $y$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = \prod_{j=1}^m (k+j) U(x_0, k+m) \quad (2.1.16)$$

biçimindedir (Jang and Chen, 1997).

(2.1.14) ifadesinde  $n=1$  ve  $m=2$  alınırsa,

$$y(x) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \Rightarrow Y(x_0, k) = (k+1).(k+2).U(x_0, k+2)$$

olarak bulunabilir.

**Teorem 2.1.1.5.** Bir  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı tek değişkenli  $u$  ve  $y$  analitik fonksiyonları dikkate alalım. Eğer,  $y(x) = 1$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda  $y$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = \delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.1.17)$$

biçimindedir(Chen and Ho, 1996).

**Teorem 2.1.1.6.** Bir  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı tek değişkenli  $u$  ve  $y$  analitik fonksiyonları dikkate alalım. Eğer,  $y(x) = u^m(x)$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda  $y$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = \sum_{\ell=0}^k U^{m-1}(x_0, \ell) U(x_0, k - \ell) \quad (2.1.18)$$

biçimindedir(Chen and Ho, 1997).

**Teorem 2.1.1.7.** Bir  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı tek değişkenli  $u$  ve  $y$  fonksiyonunu dikkate alalım.  $y(x) = \int_{x_0}^x u(s) ds$  biçiminde tanımlanmışsa bu fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = \frac{U(x_0, k-1)}{k} \quad (2.1.19)$$

biçimindedir(Jang and Chen, 1996).

## 2.1.2. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm

**Tanım 2.1.2.1.** İki bileşenli  $u(x, y)$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $U(k, h)$  olmak üzere  $u(x, y)$ 'nin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (2.1.20)$$

olarak tanımlanır(Zhou,1986)

**Tanım 2.1.2.2.**  $U(k, h)$  dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k y^h \quad (2.1.21)$$

biçiminde tanımlanır. (2.1.20) ve (2.1.21) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz(Zhou,1986).

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} x^k y^h \quad (2.1.22)$$

(2.1.20) ve (2.1.21) denklemleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla iki boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

**Teorem 2.1.2.1.** İki bileşenli  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  fonksiyonlarını alalım. Eğer,  $w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$  ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$  ve  $V(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h) \quad (2.1.23)$$

eşitliği sağlanır(Zhou,1986).

**Teorem 2.1.2.2.** İki bileşenli  $w(x, y)$  ve  $u(x, y)$  fonksiyonlarını alalım.  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $w(x, y) = cu(x, y)$  ise sırasıyla  $W(k, h)$  ve  $U(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşümü olmak üzere

$$W(k, h) = cU(k, h) \quad (2.1.24)$$

eşitliği sağlanır(Zhou, 1986).

**Teorem 2.1.2.3.**  $a$  bir sabit olmak üzere,  $n = 2$  için bir  $D \subset \mathbb{R}^2$  üzerinde tanımlı iki değişkenli  $u$  ve  $w$  analitik fonksiyonları dikkate alalım. Eğer,  $w(x, y) = au(x, y)$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda  $w$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$W((x_0, y_0), (k, h)) = a.U((x_0, y_0), (k, h)) \quad (2.1.25)$$

biçimindedir(Chen and Ho,1999).

**Teorem 2.1.2.4.**  $a$  bir sabit olmak üzere, bir  $D \subset \mathbb{R}^2$  üzerinde tanımlı  $u$  ve  $w$  analitik fonksiyonları dikkate alalım. Eğer,  $w(x, y) = au(x, y)$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda  $w$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$W(x_0, k) = a.U(x_0, k) \quad (2.1.26)$$

biçimindedir(Chen-Ho, 1999)

**İspat.**  $u$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  üzerinde tanımlı analitik fonksiyon olduğundan,

$$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{|k|=0}^{\infty} U(x_0, k) \prod_{i=0}^n (x_i - x_i^0)^{k_i}$$

yazılabilir. Bu ifadeler,  $W(x) = a.U(x)$  eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$W(x) = a.U(x) = a. \sum_{|k|=0}^{\infty} U(x_0, k) \prod_{i=0}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} = \sum_{|k|=0}^{\infty} a(U(x_0, k)) \prod_{i=0}^n (x_i - x_i^0)^{k_i}$$

$$\Rightarrow W(x_0, k) = aU(x_0, k)$$

elde edilir. Bu teorem Kurnaz, Oturanç ve Kiriş (2005) tarafından ispatsız olarak verilmiştir.

**Teorem 2.1.2.5.** İki bileşenli  $w(x, y)$  ve  $u(x, y)$  fonksiyonlarını alalım. Eğer,

$$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \text{ ise sırasıyla } W(k, h) \text{ ve } U(k, h) \text{ verilen fonksiyonların}$$

diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere,

$$W(k, h) = (k+1)U(k+1, h) \quad (2.1.27)$$

eşitliği sağlanır(Zhou, 1986).

**Teorem 2.1.2.6.** İki bileşenli  $w(x, y)$  ve  $u(x, y)$  fonksiyonlarını alalım.  $r, s \in \mathbb{N}$

olmak üzere, eğer

$$w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \quad (2.1.28)$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$  ve  $U(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere,

$$W(k, h) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r, h+s) \quad (2.1.29)$$

eşitliği sağlanır(Chen and Ho, 1999)

**Teorem 2.1.2.7.** İki bileşenli  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  fonksiyonlarını alalım.

Eğer,  $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$  ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$  ve  $V(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$w(x, y) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h V(r, h-s)U(k-r, s) \quad (2.1.30)$$

eşitliği sağlanır(Ayaz, 2003).

**Teorem 2.1.2.8.**  $n = 2$  için bir  $D \subset \mathbb{R}^2$  üzerinde tanımlı iki değişkenli  $u$  ve  $w$  analitik fonksiyonları dikkate alalım.

a) Eğer,  $w(x, y) = \frac{du(x, y)}{dx}$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda  $w$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$W((x_0, y_0), (k, h)) = (k+1)U((x_0, y_0), (k+1, h)) \quad (2.1.31)$$

b) Eğer,  $w(x, y) = \frac{du(x, y)}{dy}$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda  $w$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$W((x_0, y_0), (k, h)) = (h+1)U((x_0, y_0), (k, h+1)) \quad (2.1.32)$$

biçimindedir (Chen and Ho, 1999).

**Teorem 2.1.2.9.** Bir  $D \subset \mathbb{R}^2$  üzerinde tanımlı  $u$  ve  $w$  analitik fonksiyonları dikkate alalım. Eğer,  $w(x) = \frac{du(x)}{dx_j}$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda

$w$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$W(x_0, k) = (k_j + 1)U(x_0, (k_1, k_2, \dots, k_{j-1}, k_j + 1, k_{j+1}, \dots, k_n)), \quad 1 \leq j \leq n \quad (2.1.33)$$

biçimindedir.

**İspat:**  $u$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  üzerinde tanımlı analitik fonksiyon olduğundan,

$$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{|k|=0}^{\infty} U(x_0, k) \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i}$$

yazılabilir. Bu ifadeler, teoremin ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
w(x) &= \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{|k|=0}^{\infty} U(x_0, k) \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \right) \\
&= \sum_{|k|=0}^{\infty} (U(x_0, k)) \frac{\partial}{\partial x_j} \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \\
&= \sum_{|k|=0}^{\infty} (U(x_0, k)) \frac{\partial (x_j - x_j^0)^{k_j}}{\partial x_j} \prod_{i=1}^{j-1} (x_i - x_i^0)^{k_i} \prod_{i=j+1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \\
&= \sum_{\substack{k_2 + \dots + k_{j-1} + k_{j+1} + \dots + k_n = 0 \\ k_j = 1}}^{\infty} (U(x_0, k)) k_j (x_j - x_j^0)^{k_j - 1} \prod_{i=1}^{j-1} (x_i - x_i^0)^{k_i} \prod_{i=j+1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i}
\end{aligned} \tag{2.1.34}$$

elde edilir. Burada  $k_j = 0$  alarak ifade  $1 \leq j \leq n$  için düzenlenirse,

$$w(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} U(x_0, (k_1, k_2, \dots, k_{j-1}, k_j + 1, k_{j+1}, \dots, k_n)) (k_j + 1) \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \tag{2.1.35}$$

elde edilir. Diferansiyel dönüşüm tanımından,

$$W(x_0, k) = (k_j + 1) U(x_0, (k_1, k_2, \dots, k_{j-1}, k_j + 1, k_{j+1}, \dots, k_n)), \quad 1 \leq j \leq n \tag{2.1.36}$$

bulunur (Kurnaz vd., 2005).

**Teorem 2.1.2.10.** İki bileşenli  $w(x, y)$  fonksiyonunu alalım.  $m \in \mathbb{Z}$  olmak üzere eğer  $w(x, y) = x^m y^n$  ise sırasıyla  $W(k)$  verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere,

$$W(k, h) = \delta(k - m, h - n) = \begin{cases} 1, & k = m \text{ ve } h = n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \tag{2.1.37}$$

eşitliği sağlanır (Ayaz, 2003).

**Teorem 2.1.2.11.** İki bileşenli  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  fonksiyonlarını alalım. Eğer  $w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2}$  ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$  ve

$V(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$w(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+2)(k-r+1)U(r, h-s)V(k-r+2, s) \quad (2.1.38)$$

eşitliği sağlanır(Ayaz, 2003).

**Teorem 2.1.2.12.** İki bileşenli  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  fonksiyonlarını alalım. Eğer  $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$  ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$  ve

$V(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$w(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s) \quad (2.1.39)$$

eşitliği sağlanır(Ayaz, 2003).

**Teorem 2.1.2.13.** İki bileşenli  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  fonksiyonlarını alalım. Eğer  $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$  ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$  ve

$V(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$w(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1) \quad (2.1.40)$$

eşitliği sağlanır(Ayaz, 2003).

**Teorem 2.1.2.14.** İki bileşenli  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  ve  $s(x, y)$  fonksiyonlarını alalım. Eğer,  $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)s(x, y)$  ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$ ,  $V(k, h)$  ve  $S(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)S(k-r-1, p) \quad (2.1.41)$$

eşitliği sağlanır(Ayaz, 2003).

**Teorem 2.1.2.15.** İki bileşenli  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  ve  $s(x, y)$  fonksiyonlarını alalım. Eğer  $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)\frac{\partial^2 s(x, y)}{\partial x^2}$  ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$ ,  $V(k, h)$  ve  $S(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+2)U(r, h-s-p)V(t, s)S(k-r-t+2, p) \quad (2.1.42)$$

eşitliği sağlanır(Ayaz, 2003).

### 2.1.3. n-boyutlu diferansiyel dönüşüm

Burada  $n$  değişkenli fonksiyonlar için  $n$ -boyutlu diferansiyel dönüşümü tanımlanacaktır. Bu genelleştirmede  $n=2$  ve  $n=3$  alınacak olursa, sırasıyla iki ve üç değişkenli fonksiyonlar için iki ve üç boyutlu dönüşümler elde edilebilir.

Genel olarak,  $M(k)$ ,  $k$ 'ya bağılı bir reel sayı ve  $q(x) \neq 0$  olmak üzere  $q(x)$ ,  $D$ 'de tanımlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$U(x_0, k) = M(k) \left( \frac{\partial^k (q(x) \cdot u(x))}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \Big|_{x=x_0} \right) \quad (2.1.43)$$

biçiminde kabul edilirse,  $u(x)$  analitik fonksiyonu;

$$u(x) = \frac{1}{q(x)} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{U(x_0, k)}{M(k)} \left( \prod_{i=1}^n \frac{(x_i - x_i^0)^{k_i}}{k_i!} \right) \quad (2.1.44)$$

yazılabilir. Burada,  $x_0$  noktası civarında  $q(x) = 1$ ,  $M(k) = \frac{1}{k_1! \cdot k_2! \dots k_n!}$  olarak

seçilirse,

$$u(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} U(x_0, k) \left( \prod_{i=1}^n (x - x_0)^{k_i} \right) \quad (2.1.45)$$

elde edilir.

**Tanım 2.1.3.1.**  $D$  bölgesi üzerinde tanımlı  $u(x)$  bir analitik fonksiyon olmak üzere  $\{U(x_0, k)\}_{|k|=0}^{\infty}$  gösterimine  $u(x)$  fonksiyonunun  $n$ -boyutlu spektrumu denir.

**Tanım 2.1.3.2.**  $D$  bölgesi üzerinde analitik herhangi bir  $u(x)$  fonksiyonunun  $n$ -boyutlu spektrum ayrışımına  $n$ -boyutlu diferansiyel dönüşüm olarak adlandırılır. Burada  $u(x)$  orijinal fonksiyon,  $\{U(x_0, k)\}_{|k|=0}^{\infty}$  ise dönüşmüş fonksiyon olarak tanımlanır.

**Tanım 2.1.3.3.**  $\{U(x_0, k)\}_{|k|=0}^{\infty}$ , dönüşmüş fonksiyonunun *ters diferansiyel dönüşümü*,

$$u(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \left( U(x_0, k) \left( \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \right) \right) \quad (2.1.46)$$

biçiminde tanımlanır.

Şimdi Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile ilgili bazı teorem ve sonuçları vermeden önce verilecek özelliklerde genelleme olması için  $D \subset \mathbb{R}^n$  'de tanımlı fonksiyonlar dikkate alınacağı ve aksi söylenmedikçe küçük harflerle orijinal fonksiyonların, büyük harflerle de dönüşmüş fonksiyonların gösterileceği ifade edilmelidir.

**Teorem 2.1.3.1.** Bir  $D \subset \mathbb{R}^n$  üzerinde tanımlı  $u$  ve  $w$  analitik fonksiyonları

dikkate alalım. Eğer,  $w(x) = \frac{\partial^n u(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$ , biçiminde ifade edilebiliyor ise bu

durumda,  $w$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$W(x_0, k) = \prod_{i=1}^n (k_i + 1) U(x_0, (k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_n + 1)) \quad (2.1.47)$$

biçimindedir.

**İspat.**  $u$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  üzerinde tanımlı analitik fonksiyon olduğundan,

$$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{|k|=0}^{\infty} U(x_0, k) \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \quad (2.1.48)$$

yazılabilir. Bu ifadeler, teoremin ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
w(x) &= \frac{\partial^n u(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \left( \sum_{|k|=0}^{\infty} U(x_0, k) \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \right) \\
&= \sum_{|k|=0}^{\infty} (U(x_0, k)) \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \\
&= \sum_{|k|=0}^{\infty} (U(x_0, k)) \prod_{i=1}^n \frac{\partial^n (x_i - x_i^0)^{k_i}}{\partial x_i} \\
&= \sum_{k_1=1, i=1, n}^{\infty} U(x_0, k) \prod_{i=1}^n k_i (x_i - x_i^0)^{k_i}
\end{aligned} \tag{2.1.49}$$

elde edilir. Buradan  $w(x)$ 'in diferansiyel dönüşümü,

$$W(x_0, k) = \prod_{i=1}^n (k_i + 1) U(x_0, (k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_n + 1)) \tag{2.1.50}$$

bulunur (Özkan, 2005).

**Teorem 2.1.3.2.** Bir  $D \subset \mathbb{R}^n$  üzerinde tanımlı  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  ve  $w = w(x, y)$  analitik fonksiyonları dikkate alalım. Eğer,

$$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \tag{2.1.51}$$

biçiminde ifade edilebiliyorsa ise bu durumda,  $w$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$W((x_0, y_0), (k, h)) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1) U(r+1, h-s) V(k-r+1, s) \tag{2.1.52}$$

biçimindedir (Ayaz, 2003).

**Teorem 2.1.3.4.** Bir  $D \subset \mathbb{R}^n$  üzerinde tanımlı  $w = w(x)$  analitik fonksiyonunu dikkate alalım. Eğer,  $w(x) = x_i^m$ ,  $1 < i < n$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda,  $w = w(x)$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$W(x_0, k) = \delta(k_1, k_2, \dots, k_i - m, \dots, k_n) \quad (2.1.53)$$

$$= \begin{cases} 1, & k_1 = 0, \dots, k_{i-1} = 0, k_i = m, k_{i+1} = 0, \dots, k_n = 0 \\ 0, & \text{Farklı Durumlarda} \end{cases}$$

biçimindedir (Ayaz, 2003).

**İspat.**  $w(x) = x_i^m$ ,  $1 < i < n$  fonksiyonunun

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(x_0, k) \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \quad (2.1.54)$$

biçimindeki Taylor serisi açılımından sadece  $W(x_0, k_i) = 1$  olup diğer tüm katsayılar sıfırdır. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Sonuç 2.1.3.1.** Bir  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı tek değişkenli  $u$  ve  $y$  analitik fonksiyonları dikkate alalım.  $y(x) = x^m$  biçiminde tanımlanmışsa bu fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = \delta(k - m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (2.1.55)$$

biçimindedir. Özel olarak  $m = 1$  için  $y(x) = x$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = \delta(k - 1) = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases} \quad (2.1.56)$$

bulunur (Chen and Ho, 1996).

**Teorem 2.1.3.5.** Bir  $D \subset \mathbb{R}^n$  üzerinde tanımlı  $u, v$  ve  $w$  analitik fonksiyonları dikkate alındığında,  $w(x) = u(x) \pm v(x)$  biçiminde ifade edilebiliyor ise bu durumda sırasıyla  $u, v$ , fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümleri  $U$  ve  $V$  ile gösterilmek üzere,  $w$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$W(x_0, k) = U(x_0, k) \pm V(x_0, k) \quad (2.1.57)$$

biçimindedir(Chen and Ho, 1999).

**İspat.**  $u$  ve  $v$   $D \subset \mathbb{R}^n$  üzerinde tanımlı analitik fonksiyonlar olduklarından,

$$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{\partial^k u(x_0)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \prod_{i=1}^n \frac{(x_i - x_i^0)^{k_i}}{k_i!} = \sum_{|k|=0}^{\infty} U(x_0, k) \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \quad (2.1.58)$$

$$v(x) = v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{\partial^k v(x_0)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \prod_{i=1}^n \frac{(x_i - x_i^0)^{k_i}}{k_i!} = \sum_{|k|=0}^{\infty} V(x_0, k) \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \quad (2.1.59)$$

yazılabilir. Bu ifadeler,  $w(x) = u(x) \pm v(x)$  eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} w(x) = u(x) \pm v(x) &= \sum_{|k|=0}^{\infty} U(x_0, k) \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \pm \sum_{|k|=0}^{\infty} V(x_0, k) \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \\ &= \sum_{|k|=0}^{\infty} (U(x_0, k) \pm V(x_0, k)) \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^{k_i} \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

$$\Rightarrow W(x_0, k) = U(x_0, k) \pm V(x_0, k)$$

elde edilir. Bu teorem Kurnaz, Oturaç ve Kiriş(2005) tarafından ispatsız olarak verilmiştir.

Diferansiyel dönüşüm metodu, görüldüğü gibi Taylor serisine özel bir algoritma uygulanarak çözüm üretmektedir. Literatürde benzer şekilde Taylor serisini farklı algoritmalarla çözen yöntemlerde vardır. Bunların kısa özeti bir sonraki bölümde verilip çözdüğümüz problemlerin karşılaştırması yapılacaktır.

### 3. TAYLOR SERİSİNE DAYANAN DİĞER YÖNTEMLER

Bu çalışmada, bizim amacımız Diferansiyel Dönüşüm yöntemine benzer şekilde Taylor serisine dayanan diğer yöntemlerle bir karşılaştırma yapmak ve bu yöntemlerin olumlu ve olumsuz yanlarını örnekleyerek açıklamaktır. Bu yöntemler arasında: Adomian ayrışım metodu, Homotopi analiz metodu verilecektir. Ayrıca Picard seri çözümüne dayanan Varyasyonel iterasyon metodu da bazı karşılaştırmalarda kullanılacaktır.

#### 3.1. Adomian Ayrışım Yöntemi

G.A. Adomian(1981) tarafından ortaya konulan literatürde Adomian polinomları olarak adlandırılan polinomların kullanılmasıyla geliştirilen ayrışım metodu, seri formunda bilinmeyen fonksiyonların bulunmasına dayanır. Bu yöntem, bir çok fiziksel problemler dahil olmak üzere, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlere, integral, fark denklemlerine, integro-diferansiyel denklemlere ve sistemlere uygulanarak analitik/tam/ yaklaşık çözümler elde edilmiştir(Adomian and Rach, 1992; Wazwaz, 2002).

Analitik bir metotla lineer olmayan denklemlerin çözülebilmesi önemlidir. Çünkü lineerleşme, perturbasyon, nümerik yöntemler incelenecek problem yerine, çeşitli şekilde yaklaştırması yapılan problemin çözümüne götürür ve elde edilen sonuçların kararlılık ve yakınsaklıklarının incelenmesini gerektirir. Bu durum, eğer lineer olmayan denklemlerle uğraşılıyorsa oldukça zordur. Ayrışım metodunun temel prensibi, öğeleri tekrarlanan bir şekilde hesaplanmış bir seri içinde lineer olmayan operatörün ayrışmasına dayanır.

**Tanım 3.1.1. (Adomian, 1994)** Bir değişkenli skaler bir fonksiyon için Adomian polinomu aşağıdaki gibidir.  $f$  fonksiyonu  $n$ -defa türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere Adomian polinomları

$$A_n = \frac{1}{n!} f \left( \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \Big|_{\lambda=0} \quad (3.1.1)$$

formülü ile tanımlanır.

Genel formülü aşağıdaki gibi basitleştirilebilir. Kabul edelim ki,  $F(u)$  lineer olmayan fonksiyondur. Böylece (3.1.1) kullanılarak, Adomian polinomu

$$\begin{aligned} A_0 &= F(u_0) \\ A_1 &= u_1 F'(u_0) \\ A_2 &= u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) \\ A_3 &= u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0) \\ A_4 &= u_4 F'(u_0) + \left( \frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) F''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 F'''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 F^{(iv)}(u_0) \\ A_5 &= u_5 F'(u_0) + (u_2 u_3 + u_1 u_4) F''(u_0) + \left( \frac{1}{2!} u_1 u_2^2 + \frac{1}{2!} u_1^2 u_3 \right) F'''(u_0) \\ &\quad + \frac{1}{3!} u_1^3 u_2 F^{(iv)}(u_0) + \frac{1}{5!} u_1^5 F^{(v)}(u_0) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

elde edilir. Diğer polinomlar benzer şekilde genelleştirilebilir.  $A_0$ , sadece  $u_0$ 'a,  $A_1$ ,  $u_0$  ve  $u_1$ 'e,  $A_2$ ,  $u_0$ ,  $u_1$  ve  $u_2$ 'e bağlıdır.

$F(u)$  lineer olmayan terimi  $A_n$  Adomian polinomlarının aşağıdaki şekilde sonsuz seriyle ifade edilir:

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (3.1.3)$$

$A_0, A_1, \dots, A_5$ 'ler (3.1.3)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
F(u) &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots \\
&= F(u_0) + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) F'(u_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!} (u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + u_2^2 + \dots) F''(u_0) \\
&\quad + \frac{1}{3!} (u_1^3 + 3u_1^2u_2 + 3u_1^2u_3 + 6u_1u_2u_3 + \dots) F'''(u_0) + \dots \\
&= F(u_0) + (u - u_0) F'(u_0) + \frac{1}{2!} (u - u_0)^2 F''(u_0) + \dots
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Son yaklaşım  $A_n$  polinomlu serilerin bir  $u_0$  fonksiyonuna göre bir Taylor serisi olduğu gerçeğini doğurur.

G.Adomian (1981)'in yaptığı gibi önce yöntemi yapısal olarak tanıtalım. Bunun içinde

$$F[u(t)] = g(t) \tag{3.1.5}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada  $u(t)$  bilinmeyen fonksiyon ve  $g(t)$  sürekli bir fonksiyon olup  $F$  ise lineer ve lineer olmayan terimleri içeren lineer olmayan bir diferansiyel operatörü gösterebiliriz. Lineer terim  $L+R$  şeklinde ayrıştırılır.  $R$  lineer operatörün geri kalan kısmıdır.  $L$  yüksek mertebeden ve tersi alınabilen bir diferansiyel operatör olsun. O zaman (3.1.5) denklemini

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{3.1.6}$$

şeklinde verebiliriz. Burada  $N$  lineer olmayan operatör ve  $L$  de tersi alınabilen bir operatör olduğundan, (3.1.6)'nin her iki tarafına  $L^{-1}$  ters operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.1.7}$$

bulunur. Ayrıştırım metodu,  $u(t)$ 'nin çözümünü

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{3.1.8}$$

şeklinde seri formunda hesaplar ve lineer olmayan  $Nu$  terimlerini de

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.1.9)$$

biçiminde ayrıştırır. Burada  $A_n$ 'ler  $u_0, u_1, \dots, u_n$ 'lere bağlı olan ve Adomian polinomları olarak adlandırılan polinomlardır.  $u$  ve  $Nu$ 'lar, sırası ile,

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i, \quad (3.1.10)$$

$$N(u) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i$$

olarak elde edilir. Burada  $\lambda$  uygunluk için alınan bir parametredir.  $A_n$ 'ler (3.1.10)'dan

$$n!A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[ N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n\right) \right]_{\lambda=0} \quad (3.1.11)$$

ifadesi bulunur.

(3.1.8) ve (3.1.9) ifadelerini (3.1.6)'de yerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \theta + L^{-1}g - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \quad (3.1.12)$$

elde ederiz. Burada  $\theta = 0$  dır. Burada  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  serisinin terimleri indirgeme formülü

ile

$$\begin{aligned} u_0 &= \theta + L^{-1}g \\ u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

şeklinde yazılır. Böylece (3.1.5) ifadesinin doğru çözümü seri formunda belirtilmiş olur. Fakat uygulamada  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  serisinin bütün terimlerini hesaplamak zordur. Bu nedenle kesme serisinden başlayarak yaklaşık çözümü;

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \quad (3.1.14)$$

veya

$$\begin{aligned} \phi_1 &= u_0 \\ \phi_2 &= u_0 + u_1 \\ \phi_3 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \phi_{n+1} &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

şeklinde buluruz.

$A_n$ 'lerin hesabında, Rach (1984), Adomian (1984), Gabet (1992), Guellal ve Cherruault (1994) çeşitli metotlar geliştirmişlerdir. Ancak bu metotlar, karmaşık olmaları ve ortaya konmasının imkânsızlığı nedeni ile pek kullanışlı değildirler.

### 3.1.1. Adomian $A_n$ polinomlarını hesaplanmasına örnekler:

**Örnek 3.1.**  $F(u) = u^2$

Polinomlar aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$A_0 = F(u_0) = u_0^2$$

$$A_1 = u_1 F'(u_0) = 2u_0 u_1$$

$$A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) = 2u_0 u_2 + u_1^2$$

$$A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0) = 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2$$

**Örnek 3.2.**  $F(u) = u^3$

Polinomlar aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$A_0 = F(u_0) = u_0^3$$

$$A_1 = u_1 F'(u_0) = 3u_0^2 u_1$$

$$A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) = 3u_0^3 u_2 + 3u_0 u_1^2$$

$$A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0) = 3u_0^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + u_1^3$$

şeklinde elde edilir.

Standart baz fonksiyonlarının Adomian katsayılarının hesaplanması basit olmasına rağmen bu fonksiyonların dışındaki fonksiyonların Adomian katsayılarının hesaplanmasında nümerik integrasyon gerekebileceğinden yöntemin bu açıdan zayıf olduğu söylenebilir(Wazwaz, 2002).

### 3.2. Homotopi Analiz Metodu

Homotopi Analiz Metodu(Liao, 2008) da yukarıda verilen Adomian ayrıştırma yöntemi gibi, lineer olmayan denklemlerin çeşitli tipteki(cebirsel denklemler, adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, diferansiyel-integral denklemler, diferansiyel-fark denklemleri ve onlara bağlı denklemler) seri çözümlerini elde etmek için genel analitik bir yaklaşımdır.

Homotopi Analiz Metodu (HAM), topoloji ve diferansiyel geometride temel bir kavram olan homotopi temeline dayanır. HAM yardımıyla, ele alınan denklemlerin tam çözümü için tahmini bir başlangıç yaklaşımın sürekli bir dönüşüm oluşturulur. Sürekli dönüşüm oluşturmak için yardımcı bir lineer operatör, ve yardımcı bir parametre oluşturulur ve çözüm serisinin yakınsaklığını sağlamak için kullanılır. Metodun uygulanmasında başlangıç tahmini değerleri secimi ve yardımcı lineer operatörlerin oluşturulması probleme bağlıdır. Bu

durum, lineer olmayan bir problemi daha basit, teorik olarak sonsuz sayıdaki lineer ve birbiriyle ardışık alt problemlere dönüştürülebilir(Liao and Tan, 2007). Bunu göstermek için, aşağıdaki diferansiyel denklemi ele alalım:

$$N[u(x,t)] = 0 \quad (3.2.1)$$

Burada,  $N$  bir lineer olmayan operatör,  $x$  ve  $t$  bağımsız değişkenleri ve  $u$  bilinmeyen fonksiyondur. (3.2.1) denklemi için, ilk olarak 0. mertebeden deformasyon denklemini oluşturalım:

$$(1-p)L[\phi(x,t;q) - u_0(x,t)] = qhN[\phi(x,t;q)] \quad (3.2.2)$$

Burada  $q \in (0,1)$  yerleştirme parametresi,  $h \neq 0$  bir yardımcı parametre,  $L$  bir yardımcı lineer operatör,  $\phi(x,t;q)$  bilinmeyen bir fonksiyon,  $u_0(x,t)$ ,  $u(x,t)$ 'nin tahmini bir başlangıcıdır. Yerleştirme(embedding) parametresi  $q = 0$  ve  $q = 1$  olduğunda, (3.2.2) denklemini sırasıyla;  $\phi(x,t;0) = u_0(x,t)$  ve  $\phi(x,t;1) = u(x,t)$  olur. Böylece  $q$ , 0'dan 1'e artarken,  $\phi(x,t;q)$  çözümü,  $u_0(x,t)$ 'dan  $u(x,t)$  çözümüne dönüşür.  $q$ 'a göre  $\phi(x,t;q)$  Taylor serisine açtığımızda,

$$\phi(x,t;q) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x,t) q^m \quad (3.2.3)$$

$$\text{elde edilir. Burada, } u_m(x,t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x,t;q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (3.2.4)$$

dir. (3.2.3) seri çözümü diferansiyel dönüşüm yöntemindeki seri çözümü (2.1.3)'e denktir. Dolayısıyla  $U(k,h)$  (2.1.8) ters diferansiyel dönüşümü, (3.2.3)'deki  $u_m(x,t)$ 'e denktir. Fakat buradaki yakınsama koşullu yakınsamadır ve  $h$  parametresine bağlıdır. Eğer bu seri,  $q = 1$ 'de yakınsak ise,

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t) \quad (3.2.5)$$

olur(Liaou, 2004).Bu da diferansiyel dönüşüm yönteminin seri çözümüne çıkarılır.

Hesaplanması elle mümkün olmayacağı için ancak MAPLE, MATLAB,.. gibi programlar yardımıyla yüksek mertebeli deformasyonlar hesaplanabilir. Bu da Homotopi analiz yönteminin Diferansiyel dönüşüm yöntemine göre zor tarafını oluşturmaktadır.

Diğer yandan Homotopi perturbasyon yöntemi ile Homotopi analiz yöntemi karşılaştırıldığında Homotopi perturbasyon yönteminin Homotopi analiz yönteminin özel bir hali olduğu yani Homotopi analiz yöntemide  $h = -1$  seçilmesi durumunda Homotopi perturbasyon yöntemine indirgendiği gösterilmiştir(Liao, 2004). Dolayısıyla bu yöntem çözüm olarak Taylor serisine dayanmasına rağmen Homotopi analiz yönteminin özel bir hali olduğu için ayrıca detaylı olarak verilmemektedir.

#### 4.UYGULAMALAR

Bu bölümde lineer olmayan, farklı başlangıç koşulları verilmiş üç tane denkleminin çözümünde diferansiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrışım yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi uygulanmıştır. Bu uygulamaların hesaplanmasında Maple 10 bilgisayar paket programından yararlanılmıştır.

**Örnek 4.1:**  $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$  lineer olmayan Sine-Gordon denkleminin

$$u(x, 0) = \frac{\pi}{2} \quad (4.1.1)$$

ve

$$u_t(x, 0) = 0 \quad (4.1.2)$$

başlangıç şartlarına uyan çözümünü diferansiyel dönüşüm metoduyla çözelim.

#### Çözüm

$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots$  serisinin ilk iki terimini alalım. Diferansiyel

dönüşüm operatörlerini denklemden yerine yazalım.

$$(h+1)(h+2)U(k, h+2) - (k+1)(k+2)U(k+2, h) = U(k, h) - \frac{1}{6} \left( \sum_{r=0}^k \left( \sum_{t=0}^{k-r} \left( \sum_{s=0}^h \left( \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p) U(t, s) U(k-r-t, p) \right) \right) \right) \right) \quad (4.1.3)$$

(4.1.1) koşulundan

$$\left. \begin{aligned} U(0,0) &= \frac{\pi}{2} \\ U(1,0) &= 0 \\ U(2,0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.4)$$

(4.1.2) koşulundan  $U(0,1) = 0, U(1,1) = 0, U(2,1) = 0, \dots, U(i,1) = 0$  elde edilir.

$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k,h) x^k t^h$  denklemini içinde tüm  $U(k,h)$ 'ı toplarsak seri

çözümünü aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$u(x,t) = 0.5000000000\pi + 0.4624161147t^2 - 0.009005575050t^4 - 0.005527867713t^6 - 0.0001544012065t^8 + 0.00005500492296t^{10} \quad (4.1.5)$$

Sine-Gordon denkleminin (aynı sınır koşulları ile) Adomian yöntemiyle seri çözümü aşağıdaki şekildedir.

$$u_0(x,t) = f(x) + tg(t) \quad (4.1.6)$$

$$u_{k+1}(x,t) = c^2 L_t^{-1} (u_{k_{xx}}(x,t)) - \alpha L_t^{-1} (A_k), \quad k \geq 0$$

ile tanımlı rekürsif bağıntıyı kullanarak,

$$u_0(x,t) = \frac{\pi}{2} \quad (4.1.7)$$

$$u_{k+1}(x,t) = L_t^{-1} (u_{k_{xx}}(x,t)) - L_t^{-1} (A_k), \quad k \geq 0$$

elde edilir. Sin  $u$  için ilk birkaç Adomian polinomları aşağıdaki şekilde verilir:

$$A_0 = \sin u_0$$

$$A_1 = u_1 \cos u_0$$

$$A_2 = u_2 \cos u_0 - \frac{1}{2!} u_1^2 \sin u_0 \quad (4.1.8)$$

$$A_3 = u_3 \cos u_0 - u_2 u_1 \sin u_0 - \frac{1}{3!} u_1^3 \cos u_0$$

(4.1.7) ve (4.1.8)'i birleştirirsek,

$$u_0(x,t) = \frac{\pi}{2}, \quad u_1(x,t) = \frac{1}{2}t^2, \quad u_2(x,t) = 0, \quad u_3(x,t) = -\frac{1}{240}t^6, \quad u_4(x,t) = 0, \quad (4.1.9)$$

$$u_5(x,t) = \frac{1}{172800}t^{10}$$

olur. Seri çözümü;

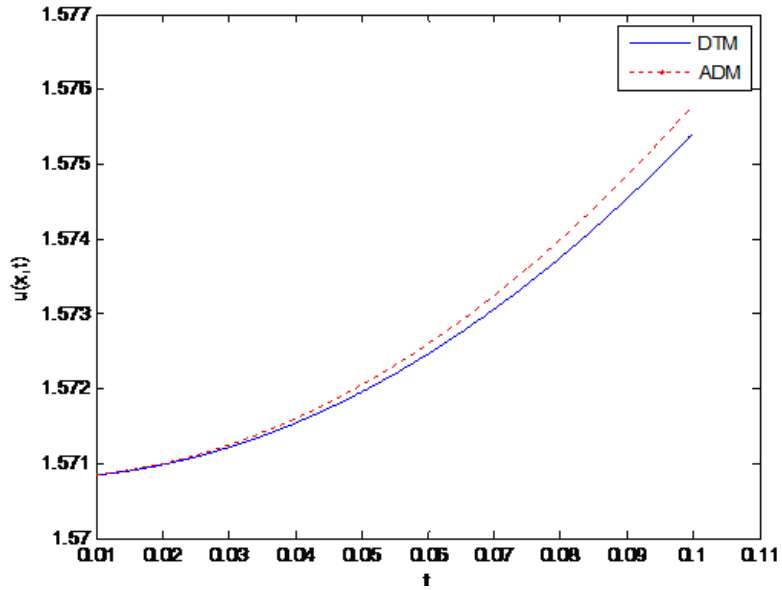
$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{240}t^6 + \frac{1}{172800}t^{10} + \dots \quad (4.1.10)$$

elde edilir.

Tablo 4.1: DTM ve ADM'ne göre değerler.

T	DTM	ADM
0.01	1.570842569	1.570846327
0.02	1.570981292	1.570996327
0.03	1.571212494	1.571246327
0.04	1.571536170	1.571596327
0.05	1.571952311	1.572046327
0.06	1.572460908	1.572596327
0.07	1.573061949	1.573246327
0.08	1.573755420	1.573996326
0.09	1.574541304	1.574846325
0.1	1.575419582	1.575796323

Şekil 4.1: ADM ve DTM'nin yaklaşık çözümü.



**Örnek 4.2:**  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$  lineer olmayan Sine-Gordon denkleminin

$$u(x, 0) = 0 \quad (4.2.1)$$

ve

$$u_t(x, 0) = 4 \operatorname{sech}(x) \quad (4.2.2)$$

başlangıç şartlarına uyan çözümünü diferansiyel dönüşüm metoduyla çözelim.

### Çözüm

$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots$  serisinin ilk iki terimini alalım. Diferansiyel dönüşüm

operatörlerini denklemden yerine yazalım.

$$(h+1)(h+2)U(k, h+2) - (k+1)(k+2)U(k+2, h) = U(k, h) - \frac{1}{6} \left( \sum_{r=0}^k \left( \sum_{t=0}^{k-r} \left( \sum_{s=0}^{h-t} \left( \sum_{p=0}^{h-s-t} U(r, h-s-p) U(t, s) U(k-r-t, p) \right) \right) \right) \right) \quad (4.2.3)$$

(4.2.1) koşulundan  $U(k, 0) = 0$  ve (4.2.2) koşulundan  $U(k, 1) = 4 \operatorname{sech}(x)$  elde edilir.

$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h$  denkleminde tüm  $U(k, h)$ 'ı toplarsak seri

çözümünü aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & 4t - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{5}t^5 - \frac{116}{315}t^7 - 2x^2t + 2x^2t^3 - 2x^2t^5 + \frac{97}{63}x^2t^7 + \frac{5}{6}x^4t - \frac{11}{6}x^4t^3 \\ & + \frac{17}{6}x^4t^5 - \frac{1177}{378}x^4t^7 - \frac{61}{180}x^6t + \frac{241}{180}x^6t^3 - \frac{541}{180}x^6t^5 + \frac{51887}{11340}x^6t^7 + \frac{277}{2016}x^8t \\ & - \frac{8651}{10080}x^8t^3 + \frac{26837}{10080}x^8t^5 - \frac{3412537}{635040}x^8t^7 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Bu çözümü  $t$ ,  $t^3$ ,  $t^5$  ve  $t^7$  parantezine alalım.

$$\begin{aligned}
u_1 &= \left( 4 - 2x^2 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{61}{180}x^6 + \frac{277}{2016}x^8 \right) t \\
u_2 &= \left( -\frac{4}{3} + 2x^2 - \frac{11}{6}x^4 + \frac{241}{180}x^6 - \frac{8651}{10080}x^8 \right) t^3 \\
u_3 &= \left( \frac{4}{5} - 2x^2 + \frac{17}{6}x^4 - \frac{541}{180}x^6 + \frac{26837}{10080}x^8 \right) t^5 \\
u_4 &= \left( -\frac{116}{315} + \frac{94}{63}x^2 - \frac{1177}{378}x^4 + \frac{51887}{11340}x^6 - \frac{3412537}{635040}x^8 \right) t^7
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Yukarıdaki çözüm  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$  şeklindedir. Sine-Gordon denkleminin aynı koşullara sahip tam çözümü;

$$v(x, t) = 4 \arctan(t \operatorname{sech}(x)) \tag{4.2.6}$$

dir (Jin, 2009). Bu tam çözümün seriye açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
4 \arctan(t \operatorname{sech}(x)) &= 4 \operatorname{sech}(x)t - \frac{4}{3} \operatorname{sech}(x)^3 t^3 \\
&\quad + \frac{4}{5} \operatorname{sech}(x)^5 t^5 - \frac{4}{7} \operatorname{sech}(x)^7 t^7 + O(t^8)
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

$$4 \operatorname{sech}(x) = 4 - 2x^2 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{61}{180}x^6 + \frac{277}{2016}x^8 + O(x^{10}) \tag{4.2.8}$$

$$-\frac{4}{3} \operatorname{sech}(x)^3 = -\frac{4}{3} + 2x^2 - \frac{11}{6}x^4 + \frac{241}{180}x^6 - \frac{8651}{10080}x^8 + O(x^{10}) \tag{4.2.9}$$

$$\frac{4}{5} \operatorname{sech}(x)^5 = \frac{4}{5} - 2x^2 + \frac{17}{6}x^4 - \frac{541}{180}x^6 + \frac{26837}{10080}x^8 + O(x^{10}) \tag{4.2.10}$$

$$-\frac{4}{7} \operatorname{sech}(x)^7 = -\frac{4}{7} + 2x^2 - \frac{23}{6}x^4 + \frac{961}{180}x^6 - \frac{60983}{10080}x^8 + O(x^{10}) \tag{4.2.11}$$

Yani bizim  $u_1 + u_2 + u_3$  çözümümüz tam çözümü veriyor. Fakat  $u_4$  'de bozulmalar

başlıyor. Çünkü,  $\sin(u) = u - \frac{u^3}{6}$  da kestik.  $\sin(u) = u$  alırsak  $u_3$  'de bozulmalar

başlıyor. Açık ki

$\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120}$  alırsak  $u_5$  'de bozulacaktır. Yani  $\sin(u)$  'yu çok terim

aldıkça tam çözüme o kadar çok yaklaşıcağız.

$\sin(u)$  'u iki terim aldığımızda(yani  $\frac{u^3}{3!}$  'e kadar),

Hata terimi;

$$-\frac{116}{315} + \frac{94}{63}x^2 - \frac{1177}{378}x^4 + \frac{51887}{11340}x^6 - \frac{3412537}{635040}x^8 - \left( -\frac{4}{7} + 2x^2 - \frac{23}{6}x^4 + \frac{961}{180}x^6 - \frac{60983}{10080}x^8 \right) =$$

$$\frac{64}{315} - \frac{32}{63}x^2 + \frac{136}{189}x^4 - \frac{2164}{2835}x^6 + \frac{26837}{39690}x^8$$

(4.2.12)

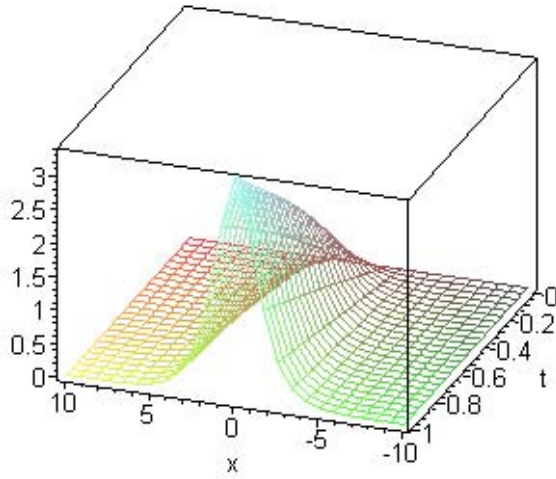
olacaktır( $x = 0, \dots, 10$  için).

Dolayısıyla diferansiyel dönüşüm metoduyla çözüm:

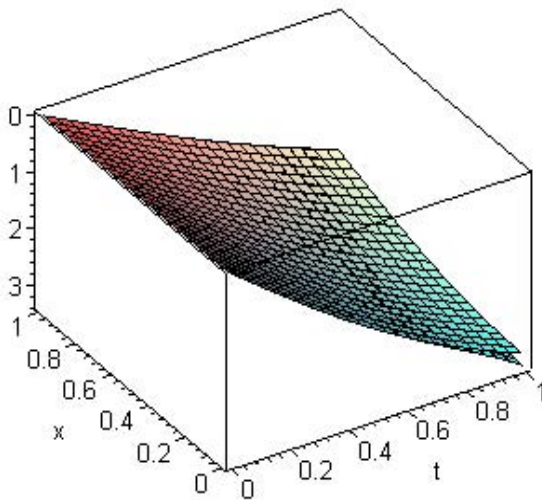
$$u(x, t) = 4 \arctan(t \operatorname{sech}(x)) + \frac{64}{315} \operatorname{sech}(x)^5 t^7 \quad (4.2.13)$$

olacaktır.

Şekil 4.2. Sine-Gordon denkleminin DTM ve tam çözümü.



Şekil 4.3. Sine-Gordon denkleminin  $x = 0, \dots, 1$  ve  $t = 0, \dots, 1$  için DTM ve tam çözümü.



Tablo 4.2. DTM ile tam çözüm değerleri.

(x,t)	DTM	Tam Çözüm	Hata( $ Tam - DTM $ )
(0.01,0.01)	0.04000466495	0.03999666703	$0.799792 \cdot 10^{-5}$
(0.01,0.02)	0.07998533765	0.07998533765	0
(0.01,0.03)	0.1199580250	0.1199580250	0
(0.01,0.04)	0.1599067616	0.1599067616	0
(0.01,0.05)	0.1998236084	0.1998236082	$0.2 \cdot 10^{-9}$
(0.01,0.06)	0.2397006646	0.2397006640	$0.6 \cdot 10^{-9}$
(0.01,0.07)	0.2795300771	0.2795303754	$0.17 \cdot 10^{-8}$
(0.01,0.08)	0.3193040494	0.3193040451	$0.43 \cdot 10^{-8}$
(0.01,0.09)	0.3590148516	0.3590148419	$0.97 \cdot 10^{-8}$
(0.01,0.1)	0.3986548286	0.3986548083	$0.203 \cdot 10^{-7}$

$\sin(u)$ 'u üç terim aldığımızda (yani  $\frac{u5}{5!}$  'e kadar), diferansiyel dönüşüm metoduyla çözüm:

$$u(x,t) = 4 \arctan(t \operatorname{sech}(x)) - \frac{128}{2835} \operatorname{sech}(x)^7 t^9 \quad (4.2.14)$$

olacaktır.

Tablo 4.3. DTM ile tam çözüm değerleri

(x,t)	DTM	Tam Çözüm	Hata( $ Tam - DTM $ )
(0.01,0.01)	0.03999666703	0.03999666703	0
(0.01,0.02)	0.07998533765	0.07998533765	0
(0.01,0.03)	0.1199580250	0.1199580250	0
(0.01,0.04)	0.1599067616	0.1599067616	0
(0.01,0.05)	0.1998236082	0.1998236082	0
(0.01,0.06)	0.2397006640	0.2397006640	0
(0.01,0.07)	0.2795300754	0.2795303754	0
(0.01,0.08)	0.3193040451	0.3193040451	0
(0.01,0.09)	0.3590148519	0.3590148419	0
(0.01,0.1)	0.3986548083	0.3986548083	0

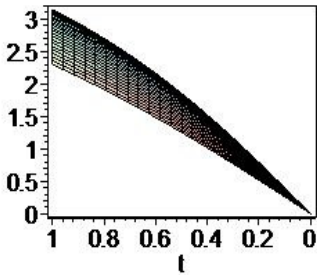
Tablo 4.4.  $x=0.01$  için tam çözüm ve 5-terim MADM, 2-adım VIM, 3-terim HPM ve 4-terim DTM arasındaki mutlak hatalar

$t$	$ Tam - MADM $	$ Tam - VIM $	$ Tam - HPM $	$ Tam - DTM $
0.01	1.320E-6	4.999E-7	6.000E-16	6.564E-25
0.02	1.045E-5	3.997E-6	8.110E-14	1.344E-21
0.03	3.491E-5	1.348E-5	1.384E-12	1.162E-19
0.04	8.191E-5	3.192E-5	1.035E-12	2.753E-18
0.05	1.583E-4	6.226E-5	4.922E-11	3.205E-17
0.06	2.707E-4	1.074E-4	1.759E-10	2.382E-16
0.07	4.253E-4	1.702E-4	5.155E-10	1.297E-15
0.08	6.280E-4	2.535E-4	1.307E-9	5.638E-15
0.09	8.844E-4	3.600E-4	2.969E-9	2.059E-14
0.1	1.200E-3	4.924E-4	6.175E-9	6.564E-14

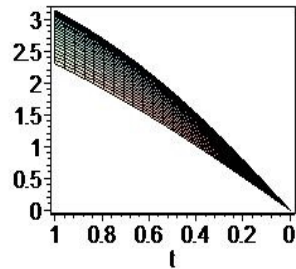
Table 4.5.  $x=0.1$  için tam çözüm ve 5-terim MADM, 2-adım VIM, 3-terim HPM ve 4-terim DTM arasındaki mutlak hatalar

$t$	$ Tam - MADM $	$ Tam - VIM $	$ Tam - HPM $	$ Tam - DTM $
0.01	1.925E-4	4.974E-7	5.000E-16	6.278E-25
0.02	3.926E-4	3.998E-6	7.330E-14	1.285E-21
0.03	6.079E-4	1.341E-5	1.252E-12	1.112E-19
0.04	8.453E-4	3.176E-5	9.360E-12	2.633E-18
0.05	1.112E-3	6.195E-5	4.452E-11	3.065E-17
0.06	1.413E-3	1.069E-4	1.590E-10	2.277E-16
0.07	1.757E-3	1.694E-4	4.661E-10	1.241E-15
0.08	2.147E-3	2.523E-4	1.182E-9	5.393E-15
0.09	2.591E-3	3.583E-4	2.683E-9	1.970E-14
0.1	3.092E-3	4.901E-4	5.581E-9	6.278E-14

Şekil 4.4. (a) tam çözüm ve (b) 4-terim diferansiyel dönüşüm yöntemi.



(a)



(b)

**Örnek 4.3:**  $u_{tt} - u_{xx} + u^2 = 0$  lineer olmayan Klein-Gordon denklemini

$$u(x, 0) = 1 + \sin x \quad (4.3.1)$$

ve

$$u_t(x, 0) = 0 \quad (4.3.2)$$

başlangıç şartlarına uyan çözümünü diferansiyel dönüşüm yöntemiyle bulalım.

### Çözüm

Diferansiyel dönüşüm operatörlerini denklemden yerine yazarsak,

$$(h+1)(h+2)U(k, h+2) - (k+1)(k+2)U(k+2, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)U(k-r, s) = 0 \quad (4.3.3)$$

ve başlangıç şartları;

$$U(k, 0) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{1}{k!}, & k = 1, 5, \dots \\ -\frac{1}{k!}, & k = 3, 7, \dots \\ 0, & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (4.3.4)$$

ve

$U(k, 1) = 0$  olur. (4.3.3) denkleminde bu koşullar yerine yazılırsa ( $k$  ve  $h$ 'ı 6 terim alınca),

$$\begin{aligned} u(x, t) = & 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{40}t^6 + x - \frac{3}{2}xt^2 + \frac{11}{24}xt^4 - \frac{19}{240}xt^6 - \frac{1}{2}x^2t^2 + \frac{1}{2}x^2t^4 \\ & - \frac{2}{9}x^2t^6 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^3t^2 + \frac{1}{144}x^3t^4 - \frac{29}{288}x^3t^6 + \frac{1}{6}x^4t^2 - \frac{1}{6}x^4t^4 \\ & + \frac{13}{216}x^4t^6 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{80}x^5t^2 - \frac{109}{2880}x^5t^4 + \frac{1621}{28800}x^5t^6 - \frac{1}{45}x^6t^2 \\ & + \frac{1}{45}x^6t^4 - \frac{1}{1620}x^6t^6 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

olur.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k,h) x^k t^h \\
&= 1 + \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) + \frac{t^2}{2!} \left( -1 - 3x - x^2 + \frac{3x^3}{3!} + \frac{x^4}{3} - \frac{3x^5}{5!} - \frac{2x^6}{45} + \dots \right) \\
&\quad + \frac{t^4}{4!} \left( 11x - 12x^2 - \frac{11x^3}{3!} - 4x^4 + \dots \right) + \dots
\end{aligned}
\tag{4.3.6}$$

çözümü elde edilir.

Tablo 4.6.  $t = 0.1$  için 5-terim ADM, 4-adım VIM ve 4-terim DTM çözümleri

$x$	ADM	VIM	DTM
0.0	0.994999986	0.995000024	0.995000000
0.1	1.093291134	1.093291179	1.093336821
0.2	1.190502988	1.190503087	1.190602734
0.3	1.285668610	1.285668848	1.285829872
0.4	1.377844211	1.377844710	1.378073322
0.5	1.466118315	1.466119219	1.466420573
0.6	1.549620480	1.549621939	1.550000812
0.7	1.627529538	1.627531694	1.627994045
0.8	1.699081273	1.6990842444	1.699640074
0.9	1.763575490	1.763579356	1.764245622
1.0	1.820382425	1.820387216	1.821201388

Klein-Gordon denkleminin bu başlangıç koşulları altında analitik çözümü olmadığından yalnızca elde edilen sonuçların karşılaştırılması verilebilmiştir. Görüldüğü gibi üç yöntem de aynı değerlere yakınsamaktadırlar.

Tablo 4.7.  $t = 0.2$  için 5-terim ADM, 4-adım VIM ve 4-terim DTM çözüm değerleri.

$x$	ADM	VIM	DTM
0.0	0.979999116	0.980001577	0.980000000
0.1	1.073723730	1.073726319	1.073725261
0.2	1.166134875	1.166138050	1.166138050
0.3	1.256326130	1.256331032	1.256328927
0.4	1.343423788	1.343432104	1.343427256
0.5	1.426594492	1.426608263	1.426598958
0.6	1.505052082	1.505073495	1.505058688
0.7	1.578063673	1.578094808	1.578075355
0.8	1.644954933	1.644997540	1.644678005
0.9	1.705144628	1.705169916	1.705161053
1.0	1.757998450	1.758066925	1.758088889

Tablo 4.8.  $t = 0.3$  için 5-terim ADM, 4-adım VIM ve 4-terim DTM çözüm değerleri.

$x$	ADM	VIM	DTM
0.0	0.959499001	0.955017653	0.955000000
0.1	1.041345652	1.041325485	1.041318399
0.2	1.125945576	1.125974851	1.125970235
0.3	1.20811407	1.208147932	1.208145667
0.4	1.287943874	1.287088824	1.287081794
0.5	1.362025218	1.362089477	1.362067708
0.6	1.432402521	1.432497282	1.432448098
0.7	1.497587424	1.497717706	1.497625423
0.8	1.557040327	1.557215916	1.557060645
0.9	1.610291023	1.610517519	1.610272513
1.0	1.656928567	1.57208637	1.656835416

**Örnek 4.4:**  $u_t + (u^2)_x + (u^2)_{xxx} = 0$   $K(m,n)$  denkleminin(lineer olmayan  $K(m,n)$ ) denklemini,  $u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0$ ,  $m, n > 1$ ), başlangıç değeri

$$u(x,0) = \frac{4}{3}c \sin^2\left(\frac{1}{4}x\right) \quad (4.4.1)$$

olmak üzere denklemin diferansiyel dönüşüm operatörlerini yerine yazarsak,

$$u(k, h+1) = \frac{\left( \begin{array}{l} -2 \left( \sum_{r=0}^k \left( \sum_{s=0}^h (k-r+1) u(r, h-s) u(k-r+1, s) \right) \right) \\ -6 \left( \sum_{r=0}^k \left( \sum_{s=0}^h (k-r+1)(k-r+2)(r+1) u(r+1, h-s) u(k-r+2, s) \right) \right) \\ -2 \left( \sum_{r=0}^k \left( \sum_{s=0}^h (k-r+1)(k-r+2)(k-r+3) u(r, h-s) u(k-r+3, s) \right) \right) \end{array} \right)}{(h+1)} \quad (4.4.2)$$

elde edilir.

Başlangıç değerini kullanırsak,

$$u(0,0) = 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (4.4.3)$$

$$u(2,0) = \frac{c}{12} \quad (4.4.4)$$

$$u(4,0) = -\frac{c}{576} \quad (4.4.5)$$

şeklinde elde edilir.

$K(m,n)$  denkleminin diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{1}{12}c^3t^2 - \frac{1}{576}c^5t^4 - \frac{1}{6}c^2xt + \frac{1}{144}c^4xt^3 - \frac{1}{11520}c^6xt^5 + \frac{1}{12}cx^2 \\
& - \frac{1}{96}c^3x^2t^2 + \frac{1}{4608}c^5x^2t^4 + \frac{1}{144}c^2x^3t - \frac{1}{3456}c^4x^3t^3 \\
& + \frac{1}{276480}c^6x^3t^5 - \frac{1}{576}cx^4 + \frac{1}{4608}c^3x^4t^2 - \frac{1}{221184}c^5x^4t^4 \\
& - \frac{1}{11520}c^2x^5t + \frac{1}{276480}c^4x^5t^3 - \frac{1}{22118400}c^6x^5t^5
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

$K(m,n)$  denkleminin tam çözümü;

$$v(x,t) = \frac{4}{3}c \sin^2\left(\frac{x-ct}{4}\right) \tag{4.4.7}$$

ile verilmektedir (Wazwaz, 2002).

Tam çözümü  $t = 0,8$  seriye açarsak,

$$\begin{aligned}
v(x,t) = & \frac{4}{3}c \sin\left(\frac{1}{4}x\right)^2 - \frac{2}{3}c^2 \sin\left(\frac{1}{4}x\right) \cos\left(\frac{1}{4}x\right)t \\
& + \frac{4}{3}c \left( -\frac{1}{16} \sin\left(\frac{1}{4}x\right)^2 c^2 + \frac{1}{16} \cos\left(\frac{1}{4}x\right)^2 c^2 \right) t^2 \\
& + \frac{1}{36}c^4 \sin\left(\frac{1}{4}x\right) \cos\left(\frac{1}{4}x\right) t^3 \\
& + \frac{4}{3}c \left( \frac{1}{768} \sin\left(\frac{1}{4}x\right)^2 c^4 - \frac{1}{768} \cos\left(\frac{1}{4}x\right)^2 c^4 \right) t^4 \\
& - \frac{1}{2880}c^6 \sin\left(\frac{1}{4}x\right) \cos\left(\frac{1}{4}x\right) t^5 \\
& + \frac{4}{3}c \left( -\frac{1}{92160} \sin\left(\frac{1}{4}x\right)^2 c^6 + \frac{1}{92160} \cos\left(\frac{1}{4}x\right)^2 c^6 \right) t^6 \\
& + \frac{1}{483840}c^8 \cos\left(\frac{1}{4}x\right) \sin\left(\frac{1}{4}x\right) t^7 + O(t^8)
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

ve

$\frac{4}{3}c \sin^2\left(\frac{1}{4}x\right)$  terimini  $x$ 'i 0'dan 8'e kadar Taylor serisine açarsak,

$$a = \frac{1}{12}cx^2 - \frac{1}{576}cx^4 + \frac{1}{69120}cx^6 + O(x^8) \quad (4.4.9)$$

$-\frac{2}{3}c^2 \sin\left(\frac{1}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{4}x\right)$  terimini  $x$ 'i 0'dan 8'e kadar Taylor serisine açarsak,

$$b = -\frac{1}{6}c^2x + \frac{1}{144}c^2x^3 - \frac{1}{11520}c^2x^5 + \frac{1}{1935360}c^2x^7 + O(x^8) \quad (4.4.10)$$

$\frac{4}{3}c\left(-\frac{1}{16}\sin^2\left(\frac{1}{4}x\right)c^2 + \frac{1}{16}\cos^2\left(\frac{1}{4}x\right)c^2\right)$  terimini  $x$ 'i 0'dan 8'e kadar Taylor serisine açarsak,

$$c = \frac{1}{12}c^3 - \frac{1}{96}c^3x^2 + \frac{1}{4608}c^3x^4 - \frac{1}{552960}c^3x^6 + O(x^8) \quad (4.4.11)$$

$\frac{1}{36}c^4 \sin\left(\frac{1}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{4}x\right)$  terimini  $x$ 'i 0'dan 8'e kadar Taylor serisine açarsak,

$$d = \frac{1}{144}c^4x - \frac{1}{3456}c^4x^3 + \frac{1}{276480}c^4x^5 - \frac{1}{46448640}c^4x^7 + O(x^8) \quad (4.4.12)$$

Görüldüğü gibi analitik çözümün Taylor serisi ile bizim çözümümüz çakışmaktadır.

**Örnek 4.5:**  $u_t + (u^3)_x + (u^3)_{xxx} = 0$   $K(m,n)$  denkleminin başlangıç değeri

$$u(x,0) = \frac{\sqrt{6c}}{2} \sin\left(\frac{1}{3}x\right) \quad (4.5.1)$$

olmak üzere denklemin diferansiyel dönüşüm operatörlerini yerine yazarsak,

$$u(k, h+1) = \frac{\left( \begin{array}{l} -3 \left( \sum_{r=0}^k \left( \sum_{t=0}^{k-r} \left( \sum_{s=0}^h \left( \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+1) u(r, h-s-p) u(t, s) u(k-r-t+1, p) \right) \right) \right) \right) \\ -6 \left( \sum_{r=0}^k \left( \sum_{t=0}^{k-r} \left( \sum_{s=0}^h \left( \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+1)(r+1)(t+1) u(r+1, h-s-p) u(t+1, s) u(k-r-t+1, p) \right) \right) \right) \right) \\ -18 \left( \sum_{r=0}^k \left( \sum_{t=0}^{k-r} \left( \sum_{s=0}^h \left( \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+1)(k-r-t+2)(t+1) u(r, h-s-p) u(t+1, s) u(k-r-t+2, p) \right) \right) \right) \right) \\ -3 \left( \sum_{r=0}^k \left( \sum_{t=0}^{k-r} \left( \sum_{s=0}^h \left( \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+1)(k-r-t+2)(k-r-t+3) u(r, h-s-p) u(t, s) u(k-r-t+3, p) \right) \right) \right) \right) \end{array} \right)}{(h+1)} \quad (4.5.2)$$

elde edilir.

(4.5.1) başlangıç değerini kullanırsak,

$$u(0,0) = 0, \quad k = 0, 2, 4, \dots$$

Ters dönüşüm operatörleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$U(1,0) = \frac{\sqrt{6c}}{6} \quad (4.5.3)$$

$$U(3,0) = -\frac{\sqrt{6c}}{324} \quad (4.5.4)$$

$$U(0,1) = -\frac{\sqrt{6}}{6} c^{3/2} \quad (4.5.5)$$

$$U(0,3) = -\frac{\sqrt{6}}{324} c^{7/2} \quad (4.5.6)$$

$$U(1,2) = -\frac{\sqrt{6}}{108} c^{5/2} \quad (4.5.7)$$

$$U(3,2) = -\frac{\sqrt{6}}{5832} c^{5/2} \quad (4.5.8)$$

Örnek vermek gerekirse (4.5.3) ters dönüşüm operatörüne karşılık gelen  $u_1$

çözümü,  $u_1 = \frac{\sqrt{6c^3}}{6}t \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ , (4.5.4) ters dönüşüm operatörüne karşılık gelen

$u_2$  çözümü,  $u_2 = -\frac{\sqrt{6c^5}}{36}t^2 \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ , (4.5.5) ters dönüşüm operatörüne karşılık

gelen  $u_3$  çözümü,  $u_3 = -\frac{\sqrt{6c^7}}{324}t^3 \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$  olacaktır.

$K(m,n)$  denkleminin diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$u(x,t) = -\frac{1}{6}\sqrt{6c^{3/2}}t + \frac{1}{324}\sqrt{6c^{7/2}}t^3 + \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{cx} - \frac{1}{108}\sqrt{6c^{5/2}}xt^2 \\ + \frac{1}{108}\sqrt{6c^{3/2}}x^2t - \frac{1}{5832}\sqrt{6c^{7/2}}x^2t^3 - \frac{1}{324}\sqrt{6}\sqrt{cx^3} + \frac{1}{5832}\sqrt{6c^{5/2}}x^3t^2 \quad (4.5.9)$$

$K(m,n)$  denkleminin çözümü için Adomian ayrışım yöntemi kullanılırsa,

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{6c}}{2} \sin\left(\frac{1}{3}x\right) - L^{-1}\left(\left(u^3\right)_x + \left(u^3\right)_{xxx}\right) \quad (4.5.10)$$

elde edilir(Wazwaz, 2002).

$$u_0(x,t) = \frac{\sqrt{6c}}{2} \sin\left(\frac{1}{3}x\right) \text{ ve } u_{k+1}(x,t) = -L^{-1}(A_k + B_k), \quad k \geq 0 \quad (4.5.11)$$

rekürsif bağıntıyı yazarsak  $A_k$  ve  $B_k$  Adomian polinomları hesaplandıktan sonra (4.5.11)'de yerine yazılırsa,

$$u_0(x,t) = \frac{\sqrt{6c}}{2} \sin\left(\frac{1}{3}x\right) \\ u_1(x,t) = -L^{-1}(A_0 + B_0) \\ = -\frac{\sqrt{6c^3}}{6}t \cos\left(\frac{1}{3}x\right) \quad (4.5.12)$$

$$u_2(x,t) = -L^{-1}(A_1 + B_1) \\ = -\frac{\sqrt{6c^5}}{36}t^2 \sin\left(\frac{1}{3}x\right) \quad (4.5.13)$$

$$\begin{aligned}
u_3(x,t) &= -L^{-1}(A_2 + B_2) \\
&= -\frac{\sqrt{6c^7}}{324}t^3 \cos\left(\frac{1}{3}x\right)
\end{aligned} \tag{4.5.14}$$

Sonuç olarak çözüm serisi;

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{6c}}{2} \sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \frac{\sqrt{6c^3}}{6}t \cos\left(\frac{1}{3}x\right) - \frac{\sqrt{6c^5}}{36}t^2 \sin\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{\sqrt{6c^7}}{324}t^3 \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + \dots \tag{4.5.15}$$

elde edilir.

$K(m,n)$  denkleminin tam çözümü;

$$v(x,t) = \frac{\sqrt{6c}}{2} \sin\left(\frac{x-ct}{3}\right) \tag{4.5.16}$$

elde edilir(Wazwaz, 2002). Serinin bütünü için örneğin  $t = 0,8$  seriye açarsak,

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{2}\sqrt{6c} \sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \frac{1}{6}\sqrt{6c^{3/2}} \cos\left(\frac{1}{3}x\right)t - \frac{1}{36}\sqrt{6c^{5/2}} \sin\left(\frac{1}{3}x\right)t^2 \\
&\quad + \frac{1}{324}\sqrt{6c^{7/2}} \cos\left(\frac{1}{3}x\right)t^3 + \frac{1}{3888}\sqrt{6c^{9/2}} \sin\left(\frac{1}{3}x\right)t^4 \\
&\quad - \frac{1}{58320}\sqrt{6c^{11/2}} \cos\left(\frac{1}{3}x\right)t^5 - \frac{1}{1049760}\sqrt{6c^{13/2}} \sin\left(\frac{1}{3}x\right)t^6 \\
&\quad + \frac{1}{22044960}\sqrt{6c^{15/2}} \cos\left(\frac{1}{3}x\right)t^7 + O(t^8)
\end{aligned} \tag{4.5.17}$$

$\frac{1}{2}\sqrt{6c} \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$  terimini  $x$ 'i 0'dan 8'e kadar Taylor serisine açarsak,

$$a = \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{cx} - \frac{1}{324}\sqrt{6}\sqrt{cx^3} + \frac{1}{58320}\sqrt{6}\sqrt{cx^5} - \frac{1}{22044960}\sqrt{6}\sqrt{cx^7} + O(x^8) \tag{4.5.18}$$

$-\frac{1}{6}\sqrt{6c^{3/2}} \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$  terimini  $x$ 'i 0'dan 8'e kadar Taylor serisine açarsak,

$$b = -\frac{1}{6}\sqrt{6c^{3/2}} + \frac{1}{108}\sqrt{6c^{3/2}}x^2 - \frac{1}{11664}\sqrt{6c^{3/2}}x^4 + \frac{1}{3149280}\sqrt{6c^{3/2}}x^6 + O(x^8)$$

(4.5.19)

$-\frac{1}{36}\sqrt{6}c^{5/2}\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$  terimini  $x$ 'i 0'dan 8'e kadar Taylor serisine açarsak,

$$c = -\frac{1}{108}\sqrt{6}c^{5/2}x + \frac{1}{5832}\sqrt{6}c^{5/2}x^3 - \frac{1}{1049760}\sqrt{6}c^{5/2}x^5 + \frac{1}{396809280}\sqrt{6}c^{5/2}x^7 + O(x^8)$$

(4.5.20)

**Örnek 4.6:**  $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$   $K(m,n)$  denkleminin başlangıç değeri

$$u(x,0) = \left(\frac{x}{6}\right) \quad (4.6.1)$$

olmak üzere denklemin diferansiyel dönüşüm operatörlerini yerine yazarsak,

$$u(k, h+1) = \frac{\left(6 \left( \sum_{r=0}^k \left( \sum_{s=0}^h (k-r+1)u(r, h-s) \right) \right) - (k+1)(k+2)(k+3)u(k+3, h) \right)}{(h+1)} \quad (4.6.2)$$

$$u(1, h) = \begin{cases} \frac{xt^h}{6}, & \forall k \\ 0, & \text{diğer}(yani(2, h), (3, h), \dots) \end{cases} \quad (4.6.3)$$

$K(m,n)$  denkleminin diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$u(x, t) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}xt + \frac{1}{6}ct^2 + \frac{1}{6}xt^3 + \frac{1}{6}xt^4 + \frac{1}{6}xt^5 + \frac{1}{6}xt^6 \quad (4.6.4)$$

$K(m,n)$  denkleminin tam çözümü;

$$v(x,t) = \frac{x}{6(1-t)} \quad (4.6.5)$$

yani açık formda;

$$v(x,t) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}xt + \frac{1}{6}ct^2 + \frac{1}{6}xt^3 + \frac{1}{6}xt^4 + \frac{1}{6}xt^5 + \frac{1}{6}xt^6 + \dots$$

(4.6.6)

dır.

## 5. MAPLE 10 PROGRAM KODLARI

Bu bölümde 4. Bölümde verilen örneklerin sonuçlarının hesaplanmasında kullanılan ve MAPLE 10 paket programında hazırlanmış olan örneklere ait algoritmalar verilmiştir. Böylelikle problemlerin bilgisayar ortamında çözümünün oldukça basit algoritmalar yardımıyla yapılabildiği ve verilen algoritmalar yardımıyla farklı problemler için yeni algoritmalar üretilebileceği kolayca anlaşılabilir.

**Program 5.1.** Örnek 4.1'in Maple 10 program kodu aşağıdaki gibidir.

```
> restart:
for k from 0 to 20 do
u[k,0]:=coeftayl(Pi/2.,x=0,k):
u[k,1]:=coeftayl(0,x=0,k):
od:
for h from 0 to 18 do
for k from 0 to 18 do
u[k,h+2]:=simplify((u[k,h]-(sum(sum(sum(sum(u[r,h-s-
p]*u[t,s]*u[k-r-t,p],p=0..h-s),s=0..h),t=0..k-r),r=0..
k))/6+(k+1)*(k+2)*u[k+2,h])/(h+1)/(h+2)):
od:
od:f:=0:
for h from 0 to 10 do
for k from 0 to 10 do
f:=f+u[k,h]*x^k*t^h:
od:
od:
print(f);
```

**Program 5.2.** Örnek 4.2'in Maple 10 program kodu aşağıdaki gibidir.

```
> restart:
for k from 0 to 18 do
u[k,0]:=coeftayl(0,x=0,k):
u[k,1]:=coeftayl(4*sech(x),x=0,k):
od:
for h from 0 to 16 do
for k from 0 to 16 do
```

```

u[k,h+2]:=simplify((-u[k,h]+(sum(sum(sum(sum(u[r,h-s-
p]*u[t,s]*u[k-r-t,p],p=0..h-s),s=0..h),t=0..k-r),r=0..
k))/6+(k+1)*(k+2)*u[k+2,h])/(h+1)/(h+2)):
od:
od:f:=0:
for k from 0 to 8 do
for h from 0 to 8 do
f:=f+u[k,h]*x^k*t^h:
od:
od:
print(f);

```

**Program 5.3.** Örnek 4.3'in Maple 10 program kodu aşağıdaki gibidir.

```

> restart;
> for k from 0 to 16 do
u[k,0]:=coeftayl(1+sin(x),x=0,k):
u[k,1]:=coeftayl(0,x=0,k):
od:
for h from 0 to 14 do
for k from 0 to 14 do
u[k,h+2]:=(-(sum(sum(u[r,h-s]*u[k-
r,s],s=0..h),r=0..k)+(k+1)*(k+2)*u[k+2,h])/((h+1)*(h+
2))):
od:
od:
f:=0:
for k from 0 to 7 do
for h from 0 to 7 do
f:=f+u[k,h]*x^k*t^h:
od:
od:
print(f);

```

**Program 5.4.** Örnek 4.4'in Maple 10 program kodu aşağıdaki gibidir.

```

> restart:
for k from 0 to 12 do
u[k,0]:=coeftayl(4/3*c*sin(x/4)^2,x=0,k):
od:
for h from 0 to 10 do
for k from 0 to 10 do

```

```

u[k,h+1]:=(-2*(sum(sum((k-r+1)*u[r,h-s]*u[k-
r+1,s],s=0..h),r=0..k))-6*(sum(sum((k-r+1)*(k-
r+2)*(r+1)*u[r+1,h-s]*u[k-r+2,s],s=0..h),r=0..k))-
2*(sum(sum((k-r+1)*(k-r+2)*(k-r+3)*u[r,h-s]*u[k-
r+3,s],s=0..h),r=0..k)))/(h+1):
od:
od:f:=0:
for k from 0 to 5 do
for h from 0 to 5 do
f:=f+u[k,h]*x^k*t^h:
od:
od:
print(f);

```

**Program 5.5.** Örnek 4.5'in Maple 10 program kodu aşağıdaki gibidir.

```

> restart:
for k from 0 to 8 do
u[k,0]:=coeftayl(sqrt(6*c)/2*sin(x/3),x=0,k):
od:
for h from 0 to 6 do
for k from 0 to 6 do
u[k,h+1]:=(-3*(sum(sum(sum(sum((k-r-t+1)*u[r,h-s-
p]*u[t,s]*u[k-r-t+1,p],p=0..h-s),s=0..h),t=0..k-
r),r=0..k))-6*(sum(sum(sum(sum((k-r-
t+1)*(r+1)*(t+1)*u[r+1,h-s-p]*u[t+1,s]*u[k-r-
t+1,p],p=0..h-s),s=0..h),t=0..k-r),r=0..k))-
18*(sum(sum(sum(sum((k-r-t+1)*(k-r-t+2)*(t+1)*u[r,h-s-
p]*u[t+1,s]*u[k-r-t+2,p],p=0..h-s),s=0..h),t=0..k-
r),r=0..k))-3*(sum(sum(sum(sum((k-r-t+1)*(k-r-
t+2)*(k-r-t+3)*u[r,h-s-p]*u[t,s]*u[k-r-t+3,p],p=0..h-
s),s=0..h),t=0..k-r),r=0..k)))/(h+1):
od:
od:f:=0:
for k from 0 to 3 do
for h from 0 to 3 do
f:=f+u[k,h]*x^k*t^h:
od:
od:
print(f);

```

**Program 5.6.** Örnek 4.6'in Maple 10 program kodu aşağıdaki gibidir.

```
> restart:
for k from 0 to 24 do
u[k,0]:=coeftayl(x/6,x=0,k):
od:
for h from 0 to 22 do
for k from 0 to 22 do
u[k,h+1]:= (6*(sum(sum((k-r+1)*u[r,h-s]*u[k-
r+1,s],s=0..h),r=0..k))-
(k+1)*(k+2)*(k+3)*u[k+3,h])/(h+1):
od:
od:f:=0:
for k from 0 to 6 do
for h from 0 to 6 do
f:=f+u[k,h]*x^k*t^h:
od:
od:
print(f);
```

## 6. SONUÇ

Bu, tezde, Bölüm 2 de diferansiyel dönüşüm yöntemi tezimize esas olmak üzere detaylı bir şekilde verilmiş, ayrıca Taylor serisine dayanan diğer; Adomian ayrışım yöntemi, Homotopi analiz ve homotopi perturbasyon yöntemleri özet halinde verilmiş ve teorik bazda bu yöntemlerin kuvvetli ve zayıf yönleri verilmiştir.. Bölüm 3’de ise bu yöntemlerin uygulamalı olarak kuvvetli ve zayıf yönleri örneklerle açıklanmıştır.

Örnek 4.1’de analitik çözümü literatürde yer almayan Sine-Gordon denklemi (4.1.1) ve (4.1.2) koşulları altında Diferansiyel dönüşüm ve Adomian ayrışım yöntemleri kullanılarak altı terim için çözülmüş ve nümerik sonuçlar Tablo 4.1. ve Şekil 4.1.’de karşılaştırılmıştır. Şekil 4.1.’den de görüldüğü gibi, kısa zaman çözümleri  $t \leq 0.03$ ’e kadar olan çözümler her iki yöntemde de çakışmaktadır. Bu Taylor serilerinin doğal sonucudur. Fakat bu değer üzerindeki çözümler ayrışma göstermektedir. Bu farklılığın yöntemlerin hesaplama tekniklerinden oluştuğu aşikârdır. Bizim düşüncemiz, teorik olarak da belirtildiği gibi, Adomian katsayılarının hesaplanması nümerik olarak propogasyon hatası ürettiği düşünülmektedir. Buda çözümlerdeki farklılığa neden olabilir.

Örnek 4.2’de Sine-Gordon denklemi (4.2.1) ve (4.2.2) koşulları altında diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüş ve Tablo 4.2.’de analitik çözümler karşılaştırılmıştır. Görüldüğü gibi hata oranları sinüslü terimin  $\sin(u) = u - \frac{u^3}{6}$  olarak alınmasına rağmen oldukça düşüktür. Tablo 4.3.’deki sonuçlar sinüslü terim  $\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120}$  alınarak elde edilmiştir. Görüldüğü gibi sonuçlar, analitik çözümle çakışmaktadır. Bu da yöntemin hassasiyetinin beklenildiği gibi yüksek olduğunu göstermektedir. Bunu daha iyi görebilmek için Tablo 4.4. ve

4.5.'de farklı  $x$  değerleri için diğer yöntemlerle karşılaştırması verilmiştir. Bu tablolardan görüldüğü gibi, diferansiyel dönüşüm yöntemi diğer yöntemlere göre en küçük hatayı vermektedir.

Örnek 4.3'de Klein-Gordon denklemi (4.3.1) ve (4.3.2) koşulları altında diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüş, analitik çözümleri olmadığı için Tablo 4.6., 4.7. ve 4.8.'de farklı zaman değerleri için ADM ve VIM yöntemleri ile karşılaştırılmıştır. Tablolardan görüldüğü gibi çözümlerin uyum içinde olduğu görülebilir.

Örnek 4.4.'de  $K(m, n)$  denklemi (4.4.1) koşulu altında diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüş ve analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Görüldüğü gibi iki çözüm çakışmaktadır.

Örnek 4.5.'de  $K(m, n)$  denklemi (4.5.1) koşulu altında diferansiyel dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrışım yöntemiyle çözülmüş ve analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Görüldüğü gibi iki yöntemin çözüm serileri analitik çözüme yakınsamaktadır. Fakat Adomian ayrışım yöntemi her bir adımda ters operatör işlemini yaptığı için hesaplamak açısından karmaşıklık içerdiği aşikârdır.

Örnek 4.6.'da  $K(m, n)$  denklemi (4.6.1) koşulu altında diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüş ve analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Görüldüğü gibi iki çözüm çakışmaktadır.

Örneklerden elde edilen nümerik karşılaştırmalara göre diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal değerlerin diğer yöntemlere göre hassasiyetini daha yüksek olduğu tespiti yapılmıştır. Bu da bu yöntemin çözümünün doğrudan bir cebirsel sistemin çözümüne bağlı olduğu açıktır.

Seçilen örneklerin neticelerinden diferansiyel dönüşüm yönteminin diğerlerine göre daha iyi bir yöntem olduğunu söylemek mümkündür. Ancak kesin yargıya varmak için seçilen örnek sayısının yeterli olamayacağı da açıktır. Dolayısıyla

ilerde yapılacak çalışmalarla hangi yöntemin her yönden üstün olduğunu tespit etmek mümkün olabilecektir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abdel- Halim Hassan, I.H.**, 2002, Different Applications for the differential transformation in differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 129: 183-221pp.
- Abdel- Halim Hassan, I.H.**, 2008, Comparison differential transformation technique with Adomian decomposition method for linear and nonlinear initial value problems, *Chaos, Solitons and Fractals*, 36: 53-65pp.
- Ayaz, F.**, 2002, Solution of partial differential equations by using two dimensional differential transform method, *Third Intern. Symp. Math&Compt. Appl.*, September 4-6,
- Ayaz, F.**, 2003, On the two dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 143: 361-374pp.
- Ayaz, F. and Oturanç, G.**, 2004, An approximate solution of Burgers equation by differential transform method, *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 5: 15-24pp.
- Ayaz, F.**, 2004, Applications of differential transform method to differential-algebraic equations, *Applied Mathematics and Computation*, 152: 649-657pp.
- Batiha, B., Noorani, M.SM. and Hashim, I.**, 2007, Numerical solution of Sine-Gordon Equation by variational iteration method, *Physics Letters A*, 370: 437-440pp.
- Bildik, N., Konuralp, A. and Bek Orakçı, F.**, 2006, Küçükarslan S., Solution of different type of the partial differential equation by differential transform method and Adomian's decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 172: 551-567pp.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

- Bratsos, A.G.**, 2008, A modified explicit numerical scheme for the two-dimensional Sine-Gordon equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 85(2): 241-252pp.
- Chen, C.K. and Ho, S.H.**, 1999, Solving partial differential equations by two dimensional differetial transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 106: 171-179pp.
- Darania, P. and Ebadian, A.**, 2007, A method for the numerical solution of the integro-differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 188: 657-668pp.
- Ertürk, V.S.**, 2007: Application of differential transformation method to linear sixth-order boundary value problems, *Applied Mathematical Sciences*, 1: 51-58pp.
- Ertürk, V. S., Momani, S. and Odibat, Z.**, Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractional order, *Applied Mathematics and Computation*, Submitted.
- Eser, H.**, 2008, Gaz dinamik denklemlerine yeni bir yaklaşım: Diferansiyel transform metodunun bir uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 46s.
- Evans, L.C.**, 1998, Partial differential equations, *American Mathematical Society Providence*, 19: 1-2pp.
- Jang, M.J. and Chen, C.L.** 1997, Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 88: 137-151pp.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Jang, M.J., Chen, C.L. and Liy, Y.C.,** 2000, On solving the initial-value problems using the differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation*, 115: 145-160pp.
- Jang, M.J., Chen, C.L. and Liu, Y.C.,** 2001, On the solving initial value problems using partial differential equation, *Applied Mathematics and Computation*, 121: 261-270pp.
- Jin, L.,** 2009, Analytical approach to the sine-Gordon equation using homotopy perturbation method, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4(5): 225-231pp.
- Kangalgil, F. and Ayaz, F.,** 2007, Solution of linear and nonlinear heat equations by differential transform method, 8: 75-85pp.
- Keskin, Y.,** 2005, Diferansiyel Denklemlerin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile Çözümleri, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.
- Kurnaz A., Oturañç, G. and Kiriş, M.E.,** 2005, n-dimensional differential transformation method for solving PDE's, *International Journal of Computer Mathematics*, 82(3): 369-380pp.
- Liao, S.J.,** 2004, Beyond Perturbation Introduction to The Homotopy Analysis Method, *CRC Press Company*, NewYork.
- Liao, S.J. and Tan, Y.,** 2007, A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations, *Stud. Appl. Math.* , 119: 297-355pp.
- Liao, S.J.,** 2008, Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 14: 983-997pp.
- Lien-Tsai, Y. and Cha'o, K.C.,** 1998, The solution of the Blasius equation by the differential transformation, *Mathematical and Computer Modelling*, 28: 101-111pp.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

- Liu, S., Fu, Z. and Liu, S.**, 2006, Exact solutions to Sine-Gordon type equations, *Physics Letters A*, 351: 59-63pp.
- Momani, S. and Ertürk, V.S.**, 2007, Solutions of non-linear oscillators by the modified differential transform method, *Computers and Mathematics with Applications*.
- Wazwaz, A.M.**, 2001, Exact solutions to nonlinear diffusion equations obtained by the decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 123: 109-122pp.
- Wazwaz, A.M.**, 2002, New solitary-wave special solutions with compact support for the nonlinear dispersive K(m,n) equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 13:321-330pp.
- Wazwaz, A.M.**, 2002, Partial Differential Equations Methods and Applications, Saint Xavier University, USA, 459pp.
- Yücel, U.**, 2008, Homotopy analysis method for the Sine-Gordon equation with initial conditions, *Applied Mathematics and Computation*, 203: 387-395pp.

## ÖZGEÇMİŞ

22.10.1978 yılında Uşak'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Uşak'ta tamamladı. 1999 yılında Dumlupınar Üniversitesi Matematik Bölümü Lisans öğretim programından yüksek şeref öğrencisi olarak mezun oldu. 1999 yılında Dumlupınar Üniversitesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 1999–2001 yıllarında “ Kontrol Teoride Gözlemlenebilirlik” adlı yüksek lisans tezini tamamladı. 2003 yılından itibaren Ege Üniversitesi'nde doktora yapmaktadır.