EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

ÇARPIMSAL
ANALİZ VE UYGULAMALARI

Ali ÖZYAPICI

Matematik Ana Bilim Dalı
Bilim Dalı Kodu: 619.003.03
Tezin Sunulduğu Tarih: 13.02.2009

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Emine MISIRLI

Bornova – İZMİR

Ali ÖZYAPICI tarafından doktora tezi olarak sunulan "Non-Newtonian (Multiplikatif) Analiz ve Uygulamaları" başlıklı bu çalışma E. Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 13.02.2009 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği / oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri	**:**		**İmza**
Jüri Başkanı	**:**	**Doç. Dr. Emine MISIRLI**	....
Üye	**:**	**Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ**	....
Üye	**:**	**Prof. Dr. Şennur SOMALI**	....
Üye	**:**	**Prof. Dr. Agamirza BASHİROV**	....
Üye	**:**	**Doç. Dr. Alpay Kırlangıç**	....

ÖZET

ÇARPIMSAL
ANALİZ VE UYGULAMALARI

ÖZYAPICI, Ali
Doktora Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Emine MISIRLI
Şubat 2009, 105 Sayfa

Çarpımsal Analiz, Newton ve Lipchitz'in yaratmış olduğu klasik analizden farklı olup, bilim ve mühendislikteki birçok problemin matematiksel çözümüne farklı bir bakış açısı sunmaktadır.

Bu tez çalışmasında çarpımsal analizin temel kavramları ortaya konulmuş ve bazı uygulama alanları örnekler ile açıklanmıştır. Bunların yanında çarpımsal diferansiyel denklemler ve uygulamaları ile bazı çarpımsal sayısal yaklaşımlar ortaya konulmuştur.

Anahtar Sözcükler : Non- Newtonian, Geometrik analiz, Çarpımsal Analiz, Gompertz eğrisi, Çarpımsal Sonlu Fark, Çarpımsal Yaklaşım, Çarpımsal Diferansiyel Denklem.

MULTIPLICATIVE
CALCULUS AND ITS APLICATIONS

ÖZYAPICI, Ali
Ph. D Thesis, Mathematics Department
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emine MISIRLI
February 2009, 105 Pages

Multiplicative calculus is considerably different from the ordinary calculus created by Newton and Lipchitz and it provides a different perspective as a mathematical tool for many applications in science and engineering.

The main concepts of multiplicative calculus are exhibited in this thesis and some application areas of multiplicative calculus are explained by considering some examples. Moreover multiplicative differential equations with some applications and some multiplicative approximations are given within this thesis.

Keywords: Non-Newtonian, Geometric Calculus, Multiplicative Calculus, Gompertz Curve, Multiplicative Finite Difference, Multiplicative Approximation, Multiplicative Differential Equation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince düşünce ve önerilerinden yararlandığım, her konuda yardım ve desteğini esirgemeyen hocam sayın Doç. Dr. Emine MISIRLI’ya sonsuz teşekkür ederim. Bunun yanında bana her zaman destek olan eşim Emel KAVAZ’a ve tüm aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (Devam)

İÇİNDEKİLER (Devam)

Sayfa

1.GİRİŞ

1.1 Çarpımsal Analizin Kısa Tarihçesi

Diferansiyel ve integral analizin temelleri ünlü matematikçiler Gottfried Leibnitz ve Isaac Newton tarafından 17. yüzyılın ikinci yarısında atılmıştır. Günümüzde bu analiz, en çok kullanılan matematiksel teoridir. Bu analizin en önemli kavramları olan türev ve integral, toplama ve onun tersi olan çıkarma aritmetik işlemlerinin son derece küçük versiyonlarından oluşmaktadır. Bu analizde toplama işleminin en temel işlem olduğu düşünülerek, bu analiz *toplamsal* (*klasik*) analiz olarak ta adlandırılabilir.

Toplamsal analiz göz önünde bulundurularak, temelini farklı aritmetik işlemlerin oluşturduğu farklı analizler geliştirilebilir. Buna ilk örnek olarak 1887 yılında ünlü bilimci Vito Volterra tarafından geliştirilen analiz gösterilebilir (Volterra and Hostinsky, 1938). Bu yeni analiz Volterra tarafından simultane diferansiyel denklemlerin çözümleri için geliştirilmiştir. Bu analizde çarpma işleminin en temel işlem olduğu göz önünde bulundurularak, bu analize *çarpımsal analiz* (*multiplicative calculus*) denilmiştir. Bu analizin ortaya konulması eski tarihlere dayanmasına rağmen bu analize matematikçiler tarafından uzun süre yeteri kadar önem verilmemiştir. Son yıllarda ise Volterra analizinin hangi alanlarda etkin bir şekilde kullanılabileceği daha iyi anlaşılmıştır. Buna bağlı olarak Volterra çarpımsal analizinin kullanıldığı ve uygulandığı bazı çalışmalar ortaya konulmuştur (Aniszewska, 2007; Kasprzak et. al., 2004; Rybaczuk et. al.., 2001).

Volterra analizinin ortaya konulmasından sonra, buna benzer bazı çalışmalar 1967 ve 1970 yılları arasında Michael Grossman ve Robert Katz tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu konuda yapılan ilk çalışmada klasik analizden farklı, *geometrik (geometric)* analiz, *bigeometrik* analiz ve *anageometrik* analiz gibi *Non-Newtonian analiz (Non-Newtonian Calculi)* olarak adlandırılan bazı analizlerin nasıl elde edilebileceği ortaya konulmuştur (Grossman and Katz, 1972). Böylece, bu çalışma farklı analizlerin nasıl ortaya konulacağı konusunda da temel bir kaynak oluşturmuştur. Non-Newtonian analiz ile ilgili ilk uygulama olasılık teorisinde yapılmıştır (Meginniss, 1980). Daha sonra Non- Newtonian analizlerinden biri olan bigeometrik analiz ve bu analizin bilim ve mühendislik alanındaki bazı uygulamaları Grossman tarafından ortaya konulmuştur (Grossman, 1983). Bigeometrik analiz esas olarak Volterra tarafından geliştirilmiş olan bir analiz idi. Böylece Volterra analizi de Non-Newtonian analizleri içerisinde ayrı olarak geliştirilmiş ve kullanılmıştır. Bununla birlikte Volterra analizi, Cordova-Lepe tarafından *proportional calculus* ismi verilerek ayrıca geliştirilmiş ve bu analiz ile ilgili bazı uygulamalar yapılmıştır (Cordova-Lepe, 2004, 2006).

Grossman ve Katz tarafından ortaya konulan Non- Newtonian analizleri içinde bir diğer önemli analiz ise geometrik analizdir. Geometrik analiz ilk kez Dick Stanley tarafından tekrar ele alınmış ve bu analizin bazı uygulamaları ve avantajları ortaya konulmuştur (Stanley, 1999). Toplama ve çıkarma işlemlerinin klasik analizdeki rolünü, geometrik analizde çarpma ve bölme işlemleri almıştır. Bu nedenle Dick Stanley tarafından geometrik analiz çarpımsal analiz *(multiplicative calculus)* olarak adlandırılmıştır. Daha sonra çarpımsal analiz ile ilgili bazı çalışmalar Duff Campell tarafından gerçekleştirilmiştir (Campbel, 1999). Bundan sonra yapılan çalışmada çarpımsal analizin temel kavramları ayrıntılı bir şekilde ortaya konmuş ve çarpımsal analizin bazı önemli uygulamaları gösterilmiştir (Bashirov et. al., 2008).

Bu tez çalışmasında, bilim ve mühendislik alanındaki hangi problemlerin çarpımsal analiz kullanılarak daha kolay ve etkin bir şekilde ifade edilebileceği ve çözümlerinin bulunabileceği ortaya konulmuştur. Ayrıca çarpımsal analizin bazı problemlere uygulama kolaylığı getirdiği görülmüş ve bazı durumlarda klasik analizden daha avantajlı olduğu da gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde çarpımsal analiz ile ilgili yeni tanımlar ortaya konulmuş; çarpımsal analizin temel kavramları ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Ayrıca, çarpımsal analizin klasik analizdeki bazı problemlere uygulaması yapılmıştır.

Üçüncü bölümde ise çarpımsal diferansiyel denklemler tanımlanmış ve uygulama alanları örneklerle açıklanmıştır Çarpımsal analizin temel kavramlarından biri olan türevin tanımının ekonomi ve finanstaki bazı problemlerden elde edilebileceği de gösterilmiştir. Bundan dolayı bu analizin özellikle ekonomi ve finastaki birçok problem için kullanılabileceği vurgulanmıştır. Bunun yanında oransal büyüme ile ilgili problemlerin çarpımsal diferansiyel denklemlerle daha iyi bir şekilde ifade edilebileceği ve çözülebileceği gösterilmiştir. Üçüncü bölümde yer alan önemli uygulamalardan bir tanesi de bilim ve mühendislikte kullanılan ancak deneysel olarak elde edilmiş olan Gompertz eğrisinin (Gompertz, 1825) çarpımsal diferansiyel denklemler kullanılarak analitik olarak bulunmasıdır.

Genellikle matematik, mühendislik ve uygulamalı bilim dallarındaki problemlerin analitik çözümlerini elde etmek her zaman kolay olmayabilir.

Bu tür problemlerin çözümleri için yaklaşık çözüm yöntemlerine gereksinim vardır. Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde bazı nümeriksel yaklaşımlar ele alınmıştır. Bu yaklaşımlardan yaygın olarak kullanılan klasik interpolasyona alternatif *çarpımsal üstel yöntemler (multiplicative exponential methods)* geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin klasik yöntemlerden hangi durumlarda daha iyi sonuç verdiği ortaya konmuştur. Bu bölümde ayrıca klasik sonlu fark yaklaşımlarına benzer olarak *çarpımsal sonlu fark yöntemleri (multiplicative finite difference methods)* geliştirilmiş ve uygulamaları ile birlikte verilmiştir. Bu yaklaşımlar özellikle analitik çözümünün bulunması zor olan yada analitik çözümü bulunsa bile sayısal çözümün daha avantajlı olduğu problemler için kullanılabilir.

1.2. Üstel Aritmetik ve Çarpımsal Analiz

Klasik analiz bir boyutlu uygulamalar için son derece uygundur. Ancak çok boyutlu duruma geçme bazı güçlüklere neden olur. Örnek olarak $x = \langle x_1, \dots x_n \rangle$ vektörünün uzunluğu

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \tag{1.1}$$

ile bulunur. (1.1) formülü kök fonksiyonu ve bu fonksiyonun tersi ile kare fonksiyonu gerektirmektedir. Eğer kare-toplam adında

$$a +_r b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

olarak yeni bir işlem tanımlanırsa, (1.1) formülü

$$\|x\| = x_1 +_r \cdots +_r x_n$$

şeklinde daha kolay bir formüle dönüşür. Buradan yola çıkılarak çalışma alanına uygun, kendi temel toplama işlemi ile yeni bir aritmetik tanımlanması fikri ortaya çıkabilir. Daha sonra temelini bu yeni aritmetiğin oluşturacağı yeni bir analiz ile bu analizin temel işlemleri olacak türev ve integral tanımı geliştirilebilir. Böylece çarpımsal analizinden önce, bu analizin temelini oluşturduğu üstel aritmetiğin ortaya konulması önemlidir. Üstel aritmetiğin temel toplama işlemi klasik çarpma işlemi olmalıdır. Bu yüzden üstel toplama

$$a +_{\exp} b = \exp\left(\ln a + \ln b\right)$$

şeklinde tanımlanmalıdır. Buradan üstel farkın

$$a -_{\exp} b = \exp\left(\ln a - \ln b\right)$$

şeklinde olduğu görülür. Not olarak klasik çarpma ve bölme işlemleri olan üstel toplama ve çıkartma işlemleri pozitif sayılara uygulanabilirler. Her bir a pozitif gerçek sayısı ile n pozitik tamsayısı için klasik çarpmaya benzer olarak

$$a \cdot_{\exp} b = \underbrace{a +_{\exp} a +_{\exp} \cdots +_{\exp} a}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n} = a^n$$

üstel çarpma işlemi elde edilir. Daha sonra üstel bölme işleminin ise

$$a /_{\exp} n = a^{1/n}$$

olduğu kolayca görülebilir. Bunlaar ek olarak sırabağımlı üstel çarpma

$$a \times_{\exp} b = a^b \neq b^a = b \times_{\exp} a$$

tanımlanır. Böylece üstel aritmetiğin temelini oluşturduğu analiz çarpımsal analizdir. Çarpımsal türev

$$f^*(x) = e^{(\ln f(x))'}$$

üstel fonksiyonun sonsuz küçük sürümü olarak (infinitesimal version) tanımlanır. Burada f^*, f fonksiyonunun çarpımsal türevini ve f' ise f fonksiyonunun klasik türevini belirtir.

Çarpımsal türev geometrik olarak da yorumlanabilir. Bunun için önce çarpımsal eğimin ortaya konması gerekmektedir. Klasik anlamda doğrusal bir fonksiyonun eğimine benzer olarak, $\mathbb{R}^+$'da üstel bir $p(x) = cm^x$ fonksiyonunun çarpımsal eğimi tanımlanabilir. Burada c ve m pozitif sabitlerdir. Üstel p fonksiyonunun *çarpımsal eğimi*

$$p(b)/p(a)$$

olan pozitif bir sayıdır ve burada $b - a = 1$ olacak şekilde a ve b herhangi iki sayıdır. Böylece, üstel $p(x) = cm^x$ fonksiyonunun çarpımsal eğimi m'e eşit olur. Sonuç olarak, pozitif bir f fonksiyonunun, eğer varsa, a noktasındaki çarpımsal türevi, f fonksiyonuna $(a, f(a))$ noktasında teğet olan tek üstel p fonksiyonunun çarpımsal eğimine eşittir.

2. ÇARPIMSAL ANALİZDE BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çarpımsal analizin en temel konularından çarpımsal türev ve çarpımsal integral ile ilgili tanımlar ortaya konulmuş, bazı önemli kavramları örnekler ile verilmiştir. Ayrıca bazı çarpımsal teoremler ifade edilmiş ve bunların uygulamaları gösterilmiştir.

2.1. Çarpımsal Türevin Tanımı

Çarpımsal türevin tanımından önce klasik türevin tanımını hatırlayalım. Böylece klasik türev ile çarpımsal türev arasında ne gibi yapısal farklılıklar veya benzerlikler olduğunu daha kolay anlayabiliriz. t değişkeni için tanımlanan f fonksiyonunu limite bağlı klasik türevi

$$f^{'}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \tag{2.1}$$

olarak yazılabilir. (2.1) denkleminde $f(t+h)-f(t)$ farkının yerine $f(t+h)/f(t)$ oranı yazılıp bölüm durumundaki h değerinin çarpma işlemine göre tersi olan $1/h$ ifadesi de kuvvet olarak yerine konulursa türev formülü

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(t+h)}{f(t)}\right)^{1/h} \tag{2.2}$$

olarak elde edilir.

2.1.1. Tanım: Eğer (2.2) denklemi tanımlı ise f fonksiyonunun t değişkenine bağlı *çarpımsal* (*multiplicative*) *türevi* olarak adlandırılır ve $f^*(t)$ simgesi ile gösterilir. Eğer $A \subseteq \mathrm{R}$ açık kümelerindeki tüm t değerleri için $f^*(t)$ varsa bu fonksiyon $f^*: A \to \mathrm{R}$ şeklinde tanımlanır. f^* fonksiyonunu kendisi $f^*: A \to \mathrm{R}$ çarpımsal türevi ile ifade edilir. f 'in pozitif bir fonksiyon olduğu varsayılarak ve klasik türevin tüm özellikleri kullanılarak çarpımsal türev

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(t+h)}{f(t)} \right)^{1/h} \\ &= \lim_{h \to 0} e^{\ln\left(\frac{f(t+h)}{f(t)} \right)^{1/h}} \\ &= \lim_{h \to 0} e^{\frac{\ln(f(t+h)) - \ln(f(t))}{h}} . \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece çarpımsal türev klasik türeve bağlı olarak

$$\begin{aligned} f^*(t) &= e^{\lim_{h \to 0} \frac{\ln(f(t+h)) - \ln(f(t))}{h}} \\ &= e^{\frac{d}{dt} \ln(f(t))} \\ &= e^{(\ln \circ f)'(t)} \left(= e^{\frac{f'(t)}{f(t)}} \right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\ln \circ f$ fonksiyonu, logaritmik fonksiyon ile f fonksiyonunun bir birleşimidir.

2.1.2. Teorem: f pozitif bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu, ancak ve ancak, x_0 noktasında klasik diferansiyellenebilirse yine aynı noktada çarpımsal diferansiyellenebilirdir.

İspat: x_0 noktasında çarpımsal anlamda diferansiyellenebilen pozitif bir f fonksiyonu ele alalım. (2.3) denkleminden $\ln\circ f$, x_0 noktasında klasik anlamda diferansiyellenebilirdir. Böylece f fonksiyonu da x_0 noktasında klasik anlamda diferansiyellenebilirdir. Diğer taraftan, eğer f, x_0 noktasında klasik anlamda diferansiyellenebilir ise $\ln\circ f$ 'te x_0 noktasında klasik diferansiyellenebilirdir. Bu durumda $e^{(\ln\circ f)'(x_0)}$ vardır ve (2.3) denkleminden f çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

2.1.3. Önerme: Eğer f, x_0 noktasında çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu, x_0 noktasında süreklidir.

İspat: f fonksiyonunun x_0 noktasında çarpımsal anlamda diferansiyellenebildiğini varsayalım. Böylece, Teorem.2.1.2. den f fonksiyonunun pozitif ve x_0 noktasında klasik anlamda diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğu görülür. x_0 noktasında klasik diferansiyellenebilen her fonksiyon da süreklidir. Böylece f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Hatırlatma: Çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon süreklidir. Ancak bu durumun tersi her zaman doğru olmayabilir. Böylelikle, klasik analizde olduğu gibi çarpımsal analizde de bazı diferansiyellenemeyen fonksiyonlar sürekli olabilir.

2.1.4. Örnek:.

$$f\left(t\right)=\begin{cases} t+1 & \text{for } -1\leq t\leq 0 \\ 1-t^{2} & \text{for } \quad 0<t<1. \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyonun sürekli ancak çarpımsal diferansiyellenemediğini gösterelim. Bu durumda limit,

$$\lim_{h\to 0^{+}} f\left(h\right)=\lim_{h\to 0^{-}} f\left(h\right)=f\left(0\right)=1$$

olur. Böylece, f fonksiyonu $x_0=0$ noktasında süreklidir.

Bununla birlikte,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^{+}}\left(\frac{f\left(0+h\right)}{f\left(0\right)}\right)^{\frac{1}{h}} &= e^{\lim\limits_{h\to 0^{+}}\left[\frac{(\ln\circ f)(h)-(\ln\circ f)(0)}{h}\right]} \\
&= e^{\lim\limits_{h\to 0^{+}}\left(\frac{(\ln\circ f)(h)}{h}\right)} \\
&= e^{\lim\limits_{h\to 0^{+}}\left(\frac{\ln\left(1-h^{2}\right)}{h}\right)} \\
&= e^{0}=1
\end{aligned}$$

hesaplanır. Diğer yandan,

$$\lim_{h\to 0^-}\left(\frac{f(0+h)}{f(0)}\right)^{\frac{1}{h}} = e^{\lim\limits_{h\to 0^-}\left[\frac{(\ln\circ f)(h)-(\ln\circ f)(0)}{h}\right]}$$
$$= e^{\lim\limits_{h\to 0^-}\left(\frac{(\ln\circ f)(h)}{h}\right)}$$
$$= e^{\lim\limits_{h\to 0^-}\left(\frac{\ln(1+h)}{h}\right)}$$
$$= e$$

şeklinde hesaplanır. Bu nedenle, $f^*(0)$ yoktur.

2.1.5. Tanım: f^* fonksiyonunun çarpımsal türevi eğer varsa, f fonksiyonunun ikinci çarpımsal türevi olarak adlandırılır ve f^{**} ile gösterilir. Benzer şekilde $f^{*(n)}$ gösterimi f fonksiyonunun $n.$ mertebeden çarpımsal türevi olarak tanımlanabilir.

Ayrıca, eğer f fonksiyonunun t noktasında ikinci mertebeden klasik türevi var ise kolay bir şekilde

$$f^{**}(t) = e^{\left(\ln\circ f^*\right)'(t)} = e^{(\ln\circ f)''(t)}.$$

formülü elde edilebilir. Burada, $f''(t)$ var olduğu için $(\ln\circ f)''$ de vardır. Bu yaklaşımı n kez tekrarlayarak eğer f pozitif bir fonksiyon ve f ’nin t noktasında $n.$ mertebeden klasik türevi de varsa, $f^{*(n)}(t)$ ’de vardır ve

$$f^{*(n)}(t) = e^{(\ln\circ f)^{(n)}(t)}. \tag{2.4}$$

şeklinde elde edilebilir.

(2.4) bağıntısından, eğer f fonksiyonu pozitif ve A kümesi üzerinde t noktasında klasik diferansiyellenebilir ise yine A kümesi üzerinde $f: A \to R$ fonksiyonunun t noktasında çarpımsal diferansiyellenebilen bir fonksiyon olduğu söylenebilir. Eğer f fonksiyonunun pozitif olma koşulunun yerine negatif olma koşulu konulursa $f'(t)$'nin varlığı altında $f^*(t)$'nin hala varlığı açıktır. Ancak her durumda, $f^*(t) > 0$ ve $f^{**}(t)$'ı hesaplamak için pozitif f^* fonksiyonundan başlanmalıdır. Ayrıca, eğer f fonksiyonu pozitif ise (2.4) formülüne benzer şekilde

$$f(t) = e^{(\ln \circ f)(t)}$$

olarak hesaplanır. Böylece, çarpımsal analiz pozitif fonksiyonlar üzerinden geliştirilir.

2.1.6. Örnek: $f(t) = 3e^t$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun çarpımsal türevi

$$\begin{aligned} f^*(t) &= e^{\left(\ln\left(3e^t\right)\right)'} \\ &= e^{(\ln 3 + t)'} \\ &= e^1 = e \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

2.1.7. Teorem: Eğer pozitif bir f fonksiyonu t noktasında çarpımsal diferansiyellenebiliyor ise klasik anlamda diferansiyellenebilirdir ve

$$f'(t) = f(t)\ln f^*(t)$$

olarak yazılabilir.

İspat: f çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f^*(t) \neq 0$ ise (2.3) denkleminden

$$f^*(t) = e^{(\ln\circ f)'(t)}$$

olur. Böylece

$$\ln f^*(t) = (\ln\circ f)'(t)$$

elde edilir. Buradan

$$(\ln\circ f)'(t) = f'(t)/f(t)$$

olduğu için

$$f'(t) = f(t)\ln f^*(t)$$

bağıntısı elde edilir.

2.1.8. Örnek:

$$\left[e^{f(t)}\right]^* = \left[f^*(t)\right]^{f(t)}$$

bağıntısının doğruluğunu ispatlayalım. Teorem.2.1.7 den

$$\left[e^{f(t)}\right]^{*} = e^{\left(\ln e^{f(t)}\right)'}$$

$$= e^{\left(\frac{\left(e^{f(t)}\right)'}{e^{f(t)}}\right)}$$

$$= e^{f'(t)}.$$

Buradan da

$$\left[e^{f(t)}\right]^{*} = \left[e^{\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)}\right]^{f(t)}$$

$$= \left[e^{(\ln\circ f)'(t)}\right]^{f(t)}$$

$$= \left[f^{*}(t)\right]^{f(t)}$$

olarak elde edilir.

2.1.9. Tanım: Pozitif bir y gerçek sayısı ele alalım. y ’nin çarpımsal mutlak değeri $|y|^{*}$ simgesi ile gösterilir ve

$$|y|^{*} = \begin{cases} \mathrm{y} & \text{if } y \geq 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{y}} & \text{if } y < 1. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin, $\left|3\right|^{*}=3,\ \left|\frac{1}{2}\right|^{*}=2,\ \left|1\right|^{*}=1.$

Çarpımsal mutlak değerin aşağıdaki özellikleri tanımdan kolayca verilebilir:

1. $1\le\left|y\right|^{*}$,
2. $\left|x\cdot y\right|^{*}\le\left|x\right|^{*}\cdot\left|y\right|^{*}$,
3. Eğer $a\ge1$ için $a^{-1}\le y\le a$ ise $\left|y\right|^{*}\le a$.

2.1.10. Tanım: $A\subset R^{+}$ ve $f:A\to R^{+}$ olsun. Eğer her $\varepsilon>1$ için

$$x\in A \text{ ve } \left|\frac{x}{a}\right|^{*}<\delta \text{ iken } \left|\frac{f(x)}{f(a)}\right|^{*}<\varepsilon$$

olacak şekilde $\delta>1$ varsa f fonksiyonunun $a\in A$ noktasında *çarpımsal sürekli* olduğu söylenir.

Eğer f, A'nın her noktasında çarpımsal sürekli ise A kümesi üzerinde de çarpımsal sürekli olduğu söylenir.

2.1.11. Örnek: $f:R^{+}\to R^{+}$ ve $f\left(x\right)=x^{2}$ olsun. O zaman f fonksiyonu her $x_0\in R^{+}$ noktasında çarpımsal süreklidir. Bunu göstermek için $\varepsilon>1$ ve $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ olduğunu düşünürsek tüm $x_0\in R^{+}$'ler için

$$\left|\frac{x}{x_0}\right|^{*}<\delta \text{ iken } \left|\frac{x^{2}}{x^{2}{}_{0}}\right|^{*}<\varepsilon$$

sağlanır.

2.2. Çarpımsal Türevin Temel Özellikleri

Bu bölümde, çarpımsal türevin bazı özelliklerini inceleyeceğiz. İlk olarak klasik türevin üç temel özelliğini ele alalım:

1. Doğrusal bir fonksiyonun türevi sabite eşittir.
2. Doğrusal bir f fonksiyonu

   $$f(t+1) = f(t) + f'(t)$$

   denklemini sağlar.
3. Eğer herhangi iki diferansiyellenebilen f ve g fonksiyonları toplamsal bir sabitle farklılık gösteriyorsa $f'(t) = g'(t)$ olur.

Üçüncü özellik doğrusal olmayan fonksiyonlar için sağlanırken ilk iki özellik ek olarak doğrusal fonksiyon ve klasik türev arasındaki özel bağıntıyı göstermektedir. Şimdi üstteki 1. ve 3. özelliğe benzer olan çarpımsal türev özelliklerini inceleyelim.

2.2.1. Önerme: Üstel bir fonksiyonun çarpımsal türevi sabit sayıya eşittir.

İspat: $b > 0$ iken $f(t) = Ab^t$ olsun. (2.2) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(t+h)}{f(t)}\right)^{1/h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{Ab^{t+h}}{Ab^t}\right)^{1/h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[b^h\right]^{1/h} = b \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

2.2.2. Önerme: $f(t) = Ab^t$ üstel fonksiyonu

$$f(t+1) = f^*(t) \cdot f(t)$$

denklemini sağlar.

İspat: 2.2.1 önermesinden $f(t) = Ab^t$ olduğundan $f^*(t) = b$ olur. Böylece, tüm t'ler için

$$f(t+1) = Ab^{t+1} = Ab^t b = f(t) \cdot f^*(t)$$

gösterilmiş olur.

2.2.3. Örnek: $f(t) = 3e^t$ olsun. f üstel bir fonksiyon olduğu için Önerme.2.2.2 ve Örnek.2.1.6 dan

$$f(t+1) = f^*(t).f(t) = e^1 \cdot 3e^t = e^{1+t}$$

elde edilir.

2.2.4. Önerme: Eğer pozitif bir fonksiyon diğer bir fonksiyonun bir sabit değer ile çarpımına eşit ise yani $f(t) = Cg(t)$ ise bu fonksiyonlar aynı çarpımsal türeve sahiptir.

İspat: f ve g fonksiyonları $f(t) = Cg(t)$ olacak şekilde alınsın**.** Bu durumda $f^*(t) = g^*(t)$ olduğunu göstermeliyiz. (2.2) denkleminden

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(t+h)}{f(t)}\right)^{1/h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{Cg(t+h)}{Cg(t)}\right)^{1/h} \\ &= g^*(t) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2.2.5. Örnek: $f(t)=3t^2$ ve $g(t)=5t^2$ fonksiyonlarını ele alarak çarpımsal türevlerinin aynı olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} f^*(t) &= e^{\left(\ln\left(3t^2\right)\right)'} \\ &= e^{\left(\ln 3+\ln t^2\right)'} \\ &= e^{2/t} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g^*(t) &= e^{\left(\ln\left(5t^2\right)\right)'} \\ &= e^{\left(\ln 5+\ln t^2\right)'} \\ &= e^{2/t} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $f^*(t)=g^*(t)$.

2.3. Çarpımsal Türev Alma Kuralları

Bu bölümde, çarpımsal türev alma ile ilgili temel kurallar ortaya konulacaktır. Bu kurallardan bazılarının klasik türev alma kurallarından daha basit olduğu görülebilir. Bu kurallardan çarpımsal türev almaya en uygun olanları çarpma ve üstel olarak yazma işlemlerini içerir.

2.3.1. Teorem: f ve g gibi çarpımsal diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. cf, $f\cdot g$, $f+g$, f/g, f^{g} fonksiyonları da çarpımsal diferansiyellenebilir ve bu fonksiyonların çarpımsal türevleri

1. $(cf)^{*}(t)=f^{*}(t)$,
2. $(f\cdot g)^{*}(t)=f^{*}(t)g^{*}(t)$,
3. $(f+g)^{*}(t)=f^{*}(t)^{\frac{f(t)}{f(t)+g(t)}}\cdot g^{*}(t)^{\frac{g(t)}{f(t)+g(t)}}$,
4. $(f/g)^{*}(t)=f^{*}(t)/g^{*}(t)$,
5. $\left(f^{g}\right)^{*}(t)=f^{*}(t)^{g(x)}\cdot f(t)^{g'(x)}$.

olarak hesaplanır. Burada c bir sabittir.

İspat:

1. c bir sabit ve f çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(cf)^{*}(t)&=e^{(\ln\circ(cf))'(t)}\\&=e^{(\ln c)'(t)+(\ln\circ f)'(t)}\\&=\mathrm{e}^{0}\cdot e^{(\ln\circ f)'(t)}\\&=f^{*}(t)\end{aligned}$$

bulunur.

2. f ve g çarpımsal diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)^{*}(t) &= e^{(\ln\circ(f \cdot g))'(t)} \\
&= e^{(\ln\circ f + \ln\circ g)'(t)} \\
&= e^{(\ln\circ f)'(t) + (\ln\circ g)'(t)} \\
&= e^{(\ln\circ f)'(t)} \cdot e^{(\ln\circ g)'(t)} \\
&= f^{*}(t) g^{*}(t)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

3. f ve g çarpımsal diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
(f + g)^{*}(t) &= e^{(\ln\circ(f + g))'(t)} \\
&= e^{\frac{(f+g)'(t)}{(f+g)}} \\
&= e^{\frac{f'(t)+g'(t)}{f(t)+g(t)}} \\
&= f^{*}(t)^{\frac{f(t)}{f(t)+g(t)}} \cdot g^{*}(t)^{\frac{g(t)}{f(t)+g(t)}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

4. f ve g çarpımsal diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda $g(t) > 0$ kabul edilerek

$$
\begin{aligned}
\left(f/g\right)^{*}(t) &= e^{\left(\ln\circ(f/g)\right)'(t)} \\
&= e^{\left(\ln\circ f\right)'(t)-\left(\ln\circ g\right)'(t)} \\
&= e^{\left(\ln\circ f\right)'(t)}\cdot e^{-\left(\ln\circ g\right)'(t)} \\
&= f^{*}(t)\big/g^{*}(t)
\end{aligned}
$$

olur.

5. f ve g çarpımsal diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\left(f^{g}\right)^{*}(t) &= e^{\left(\mathrm{g}\cdot\ln\circ(f)\right)'(t)} \\
&= e^{\left(g'\cdot(\ln\circ f)+g\cdot(\ln\circ f)'\right)(t)} \\
&= e^{g'(t)\cdot(\ln\circ f)(t)+g(t)\cdot(\ln\circ f)'(t)} \\
&= e^{g'(t)\cdot(\ln\circ f)(t)}\cdot e^{g(t)\cdot(\ln\circ f)'(t)} \\
&= f^{*}(t)^{g(x)}\cdot f(t)^{g'(x)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem.2.3.1. in üçüncü kısmındaki formülün yanısıra $\left(f-g\right)^{*}(t)$ için formülün çarpımsal analizde zorlaştırıldığı söylenebilir. Bunun sebebi daha önce belirtildiği gibi çarpımsal analizin temel işlemlerinin çarpma ve onun ters işlemi bölme olmasıdır.

2.3.2. Örnek : k ve m iki sabit ve $h(t)=mt+k$ olsun. $h(t)=f(t)+g(t)$ olduğunu düşünürsek burada $f(t)=mt$ ve $g(t)=k$ olur. O zaman Teorem.2.3.1. den

$$f^{*}(t)=e^{\frac{f'(t)+g'(t)}{f(t)+g(t)}}=e^{\frac{m}{mt+k}}$$

şeklinde elde edilir.

2.3.3. Örnek: Çarpımsal diferansiyellenebilen $g(t)$ fonksiyonu ve $f(t)=\dfrac{1}{g(t)}$ bağıntısını ele alalım. Teorem.2.3.1. den

$$f^{*}(t)=\frac{(1)^{*}}{g^{*}(t)}=\frac{1}{g^{*}(t)}$$

elde edilir.

2.3.4. Örnek: $f(t)=\dfrac{1}{t^2}$ fonksiyonunun çarpımsal türevini bulalım. $g(t)=t^2$ fonksiyonu ele alalım ve Örnek.2.3.3. den

$$\begin{aligned} f^{*}(t) &= \frac{1}{g^{*}(t)} \\ &= \frac{1}{e^{(\ln(g(t)))'}} \end{aligned}$$

elde edilebilir. Buradan

$$f^*(t) = \frac{1}{e^{\left(\ln t^2\right)'}}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot e^{\frac{2t}{t^2}}}$$

$$= e^{-2/t}$$

bulunur.

2.3.5. Önerme: $f(t) = C > 0$ her $t \in (a,b)$ için ancak ve ancak $f^*(t) = 1$ olduğunda (a,b) açık aralığında sabit bir fonksiyon olur.

İspat: $f(t) = C > 0$**,** (a,b) aralığında sabit bir fonksiyon ele alalım. Böylece

$$f^*(t) = e^{(\ln C)'} = e^0 = 1, \quad t \in (a,b)$$

olarak bulunur.

Tersine olarak, eğer her $t \in (a,b)$ için

$$f^*(t) = 1$$

ise

$$f^*(t) = e^{(\ln \circ f)'(t)} = 1.$$

Buradan, $t \in (a,b)$ için $f(t) = C > 0$ olduğu kolaylıkla hesaplanabilir.

2.3.6. Önerme : C pozitif bir sabit olsun.

a) Eğer $f(t) = Ct$ ise $f^*(t) = e^{1/t}$ bulunur.

b) Eğer $f(t) = Ct^k$ ise $f^*(t) = e^{k/t}$ hesaplanır.

İspat:

a) Eğer $f(t) = Ct$ ise o zaman

$$\begin{aligned} f^*(t) &= e^{(\ln(Ct))'} \\ &= e^{(\ln C + \ln t)'} \\ &= 1.e^{1/t} \\ &= e^{1/t} \end{aligned}$$

olduğu bulunur.

b) Eğer $f(t) = Ct^k$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} f^*(t) &= e^{(\ln(Ct^k))'} \\ &= e^{(\ln C + k \ln t)'} \\ &= 1.e^{k.1/t} \\ &= e^{k/t} \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3.7. Önerme: g çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun**.** O zaman

a) Eğer $f(t)=Ce^{kt}$ ise $f^{*}(t)=e^{k}$,

b) Eğer $f(t)=Ce^{g(t)}$ ise $f^{*}(t)=\left[g^{*}(t)\right]^{g(t)}$.

olarak yazılabilir. Burada C bir sabittir.

İspat:

a) Eğer $f(t)=Ce^{kt}$ ise

$$f^{*}(t)=e^{\left(\ln\left(Ce^{kt}\right)\right)'}=e^{(\ln C)'}\cdot e^{(kt)'}=e^{k}$$

bulunur.

b) Eğer $f(t)=Ce^{g(t)}$ ise

$$\begin{aligned} f^{*}(t) &= e^{\left(\ln\left(Ce^{g(t)}\right)\right)'} \\ &= e^{(\ln C)'}\cdot e^{\frac{\left(e^{g(t)}\right)'}{e^{g(t)}}} \\ &= 1\cdot e^{\frac{g'(t)\cdot e^{g(t)}}{e^{g(t)}}} \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan,

$$f^*(t) = e^{g'(t)}$$

$$= \left[e^{\frac{g'(t)}{g(t)}} \right]^{g(t)}$$

$$= \left[g^*(t) \right]^{g(t)}$$

hesaplanır.

2.3.8. Önerme: g çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Böylece sabit bir C sayısı için,

a) Eğer $f(t) = C \ln t$ ise $f^*(t) = e^{1/t \ln t}$ bulunur.

b) Eğer $f(t) = C \ln\big(g(t)\big)$ ise $f^*(t) = \left[g^*(t) \right]^{1/(\ln g(t))}$ hesaplanır.

İspat:

a) Eğer $f(t) = C \ln t$ ise

$$f^*(t) = e^{(\ln(C \ln t))'}$$

$$= e^{(\ln C)'} \cdot e^{\frac{(\ln t)'}{\ln t}}$$

$$= e^{\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\ln t}}$$

bulunur.

b) Eğer $f(t) = C \ln\big(g(t)\big)$ ise

$$f^*(t) = e^{\left(\ln\left(C \ln\left(g(t)\right)\right)\right)'}$$

$$= e^{(\ln C)'} \cdot e^{\frac{\ln\left(g(t)\right)'}{\ln\left(g(t)\right)}}$$

bulunur ve buradan

$$f^*(t) = e^{\frac{\left(\frac{g'(t)}{g(t)}\right)}{\ln(g(t))}}$$

$$= \left[e^{\frac{g'(t)}{g(t)}} \right]^{1/\ln(g(t))}$$

$$= g^*(t)^{1/\ln(g(t))}$$

elde edilir.

2.3.9. Önerme: g çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f(t) = g(t)^k$ ise bu durumda

$$f^*(t) = \left[g^*(t)\right]^k$$

şeklinde hesaplanabilir.

İspat: $f(t) = g(t)^k$ olduğundan ve g çarpımsal diferansiyellenebildiğinden

$$f^*(t) = e^{\left(\ln\circ g(t)^k\right)'(t)}$$

$$= e^{\frac{kg(t)^{k-1}g(t)'}{g(t)^k}}$$

$$= e^{\frac{kg(t)'}{g(t)}}$$

$$= e^{\left(\left(\ln\circ g(t)\right)'\right)^k}$$

$$= \left[g^*(t)\right]^k$$

şeklinde yazılabilir.

2.3.10. Önerme: g çarpımsal diferansiyellenebilir ve h klasik diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer

$$f(t)=(g\circ h)(t)$$

ise o zaman

$$f^*(t)=\left[g^*\left(h(t)\right)\right]^{h'(t)}$$

olarak bulunur.

İspat: g fonksiyonu çarpımsal diferansiyellenebilir, h fonksiyonu da klasik diferansiyellenebilir ve $f(t)=(g\circ h)(t)$ olduğundan

$$\begin{aligned} f^*(t) &= e^{(\ln\circ f)'(t)} \\ &= e^{\frac{f'(t)}{f(t)}} \\ &= e^{\frac{g'(h(t))\cdot h'(t)}{(g\circ h)(t)}} \\ &= \left[e^{\frac{g'(h(t))}{g(h(t))}}\right]^{h'(t)} \\ &= \left[g^*\left(h(t)\right)\right]^{h'(t)} \end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir.

2.4. Çarpımsal Ortalama Değer Teoremi

Bu bölümde çarpımsal türev için ortalama değer teoremini ifade edeceğiz. Bu teorem birçok matematiksel problemin çözümünde önemli bir rol oynar. 1 sayısının çarpımsal türevdeki rolünün 0 sayısının klasik türevdeki rolüyle aynı olduğu söylenebilir.

2.4.1. Önerme: Eğer f pozitif bir fonksiyon olduğunda, ancak ve ancak, $f^{*}(t)=1$ ise $f'(t)=0$ olur.

İspat : Eğer $f'(t)=0$ ise (1.3) denkleminden

$$f^{*}(t)=e^{\frac{f'(t)}{f(t)}}=e^{0}=1$$

yazılabilir.

Tersine olarak, eğer $f^{*}(t)=1$ ise $f'(t)=0$ ’ı veren

$$e^{\frac{f'(t)}{f(t)}}=e^{0}$$

eşitliği elde edilebilir.

2.4.2. Teorem [*-Rolle's Teoremi]: Eğer f fonksiyonu (a,b) aralığında çarpımsal diferansiyellenebilir ve $[a,b]$ aralığında sürekli pozitif bir fonksiyon ve $f(a)=f(b)$ ise

$$f^{*}(t)=1$$

olacak şekilde (a,b) aralığında bir c sayısı vardır.

İspat: $[a,b]$ aralığında sürekli ve pozitif bir f fonksiyonu verilsin. Rolle teoreminden, f (a,b) aralığında klasik diferansiyellenebildiğinden ve $f(a)=f(b)$ olduğundan $f'(c)=0$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ vardır. O zaman, Önerme.2.4.1 den

$$f^{*}(c)=1$$

olarak bulunur.

2.4.3. Teorem [*-Ortalama Değer Teoremi]: Eğer f, $[a,b]$ aralığında sürekli, pozitif ve (a,b) aralığında çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise (a,b) aralığında öyle bir c sayısı vardır ki

$$f^{*}(c)=\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{b-a}}$$

bağıntısı elde edilir.

İspat: Eğer F fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlarsak

$$F(t)=f(a)\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]^{\frac{t-a}{b-a}}$$

$F(a)=f(a)$ ve $F(b)=f(b)$ olur. Eğer $G(t)=\dfrac{F(t)}{f(t)}$ şeklinde tanımlarsak $G(a)=G(b)=1$ olur. *-Rolle’s Teoreminden $G^{*}(c)=1$ olacak şekilde (a,b) aralığında bir c sabiti vardır. Sonuç olarak, Teorem.2.3.1. den

$$G^{*}(c)=\frac{F^{*}(c)}{f^{*}(c)}=1$$

elde edilir. Buradan $f^{*}(c)=F^{*}(c)$ bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
f^{*}(c)&=F^{*}(c)\\
&=e^{\left(\ln\left(\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]^{\frac{t-a}{b-a}}\right)\right)'}\\
&=1\cdot e^{\frac{1}{b-a}\left(\ln\frac{f(b)}{f(a)}\right)}\\
&=e^{\left(\ln\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{b-a}}}\\
&=\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{b-a}}
\end{aligned}$$

gösterilmiş olur.

2.4.4. Teorem: f ve g $[a,b]$ aralığında sürekli ve pozitif, (a,b) aralığında da çarpımsal diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun.Bu durumda

$$\left[g^{*}(c)\right]^{\ln\frac{f(b)}{f(a)}}=\left[f^{*}(c)\right]^{\ln\frac{g(b)}{g(a)}} \tag{2.5}$$

olacak şekilde $c\in(a,b)$ vardır.

İspat: f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında pozitif ve sürekli olsun. Klasik Cauchy Teoreminden, f (a,b) aralığında klasik diferansiyellenebildiği için

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ vardır. Buradan $f\to\ln\circ f$ ve $g\to\ln\circ g$ alınarak

$$(\ln\circ g)'(c)\cdot\ln\frac{f(b)}{f(a)}=(\ln\circ f)'(c)\cdot\ln\frac{g(b)}{g(a)}$$

elde edilebilir. Böylece

$$\frac{\ln f(b)-\ln f(a)}{\ln g(b)-\ln g(a)}=\frac{(\ln\circ f)'(c)}{(\ln\circ g)'(c)}.$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\left[e^{\ln\frac{f(b)}{f(a)}}\right]^{(\ln\circ g)'(c)}=\left[e^{\ln\frac{g(b)}{g(a)}}\right]^{(\ln\circ f)'(c)}$$

ve buradan da ancak ve ancak

$$\left[e^{(\ln\circ g)'(t)}\right]^{\ln\frac{f(b)}{f(a)}}=\left[e^{(\ln\circ f)'(t)}\right]^{\ln\frac{g(b)}{g(a)}}$$

olması durumunda

$$\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]^{(\ln\circ g)'(c)}=\left[\frac{g(b)}{g(a)}\right]^{(\ln\circ f)'(c)}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\left[g^{*}(c)\right]^{\ln\frac{f(b)}{f(a)}}=\left[f^{*}(c)\right]^{\ln\frac{g(b)}{g(a)}}$$

gösterilmiş olur.

Teorem.2.4.4 çarpımsal durumda $g(t)=e^{t}$ bağıntısını sağlayan *Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi* olarak adlandırılır.

2.4.5. Örnek: Tüm $0<a<b$ değerleri için

$$\frac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\frac{b-a}{a}$$

olduğunu gösterelim. $[a,b]$ aralığında $f(t)=t$'nin tanımlandığını varsayalım. O zaman, f $[a,b]$ aralığında süreklidir ve $f^{*}(t)=e^{\frac{1}{t}}$ olur. *-Ortalama Değer Teoreminden

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{b-a}} = e^{\frac{1}{c}}$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ sayısı vardır. $a < c < b$ olduğundan

$$e^{\frac{1}{b}} < \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{b-a}} < e^{\frac{1}{a}}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$e^{\frac{b-a}{b}} < \frac{b}{a} < e^{\frac{b-a}{a}}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$$

yazılabilir.

2.4.6. Önerme: $f:(a,b) \to \mathrm{R}$ çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman

a) Her $t \in (a,b)$ için eğer $f^{*}(t) > 1$ ise f artan bir fonksiyondur.

b) Her $t \in (a,b)$ için eğer $f^{*}(t) \geq 1$ ise f monoton artan bir fonksiyondur.

c) Her $t \in (a,b)$ için eğer $f^{*}(t) < 1$ ise f azalan bir fonksiyondur.

d) Her $t \in (a,b)$ için eğer $f^{*}(t) \leq 1$ ise f monoton azalan bir fonksiyondur.

İspat: $f:(a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun çarpımsal diferansiyellenebildiğini varsayalım.

a) $a < x_1 < x_2 < b$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in (a,b)$ seçilsin. Ayrıca, f (x_1, x_2) aralığında sürekli ve $[x_1, x_2]$ aralığında çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. *-Ortalama değer teoreminden bazı $c \in (x_1, x_2)$ için

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = f^*(c)^{x_2 - x_1}$$

olarak bulunabilir. $f^*(c) > 1$ olduğundan

$$\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} > 1$$

elde edilebilir ve buradan

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} > 1$$

olur. Bu nedenle,

$$f(x_2) > f(x_1)$$

elde edilir.

b) $a < x_1 < x_2 < b$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in (a,b)$ seçilsin. Ayrıca, f (x_1, x_2) aralığında sürekli ve $[x_1, x_2]$ aralığında çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. a) kısmındaki ispattan

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} \geq 1$$

olur. Böylece,

$$f(x_2) \geq f(x_1)$$

elde edilebilir.

c) $a < x_1 < x_2 < b$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in (a,b)$ seçilsin. Ayrıca, f (x_1, x_2) aralığında sürekli ve $[x_1, x_2]$ aralığında çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. *-Ortalama değer teoreminden bazı $c \in (x_1, x_2)$ için

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \left(f^*(c)\right)^{x_2 - x_1}$$

yazılabilir. Böylece, $f^*(c) > 1$ olduğundan

$$\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} < 1$$

elde edilebilir. Buradan

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} < 1$$

olarak yazılabilir. Böylece,

$$f(x_2) < f(x_1)$$

olduğu gösterilebilir.

d) $a < x_1 < x_2 < b$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in (a,b)$ seçilsin. Ayrıca, f (x_1, x_2) aralığında sürekli ve $[x_1, x_2]$ aralığında çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. c) kısmındaki ispattan,

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} \leq 1$$

olur. Böylece,

$$f(x_2) \leq f(x_1)$$

elde edilir.

2.4.7. Örnek: Her $t>0$ için $f(t)=(1+t)^t$ fonksiyonunu ele alalım. O zaman

$$f^*(t)=e^{(t\ln(1+t))'}>1$$

olur ve buradan da, her $t>0$ için

$$(t\ln(1+t))'=\ln(1+t)+\frac{t}{1+t}>0$$

elde edilebilir. Bu nedenle Önerme.2.4.6 ile $t>0$ için f fonksiyonu artan olduğu gösterilmiş olur.

2.4.8. Önerme: $f:(a,b)\to \mathrm{R}$ çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f(c)>0$ olacak şekilde $c\in(a,b)$ olsun.

a) Eğer $f^*(c)=1$ ve $f^{**}(c)>1$ ise f, fonksiyonu c noktasında yerel minimum değerine sahiptir.

b) Eğer $f^*(c)=1$ ve $f^{**}(c)<1$ ise f, fonksiyonu c noktasında yerel maksimum değerine sahiptir.

İspat: $f:(a,b)\to \mathrm{R}$ çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $c\in(a,b)$ ve $f(c)>0$ olduğunu varsayalım.

a) $f^*(c)=1$ olacak şekilde $c\in(a,b)$ olsun. O zaman,

$$f^*(c)=e^{(\ln\circ f)'(c)}=1$$

yazılabilir. Bu ifadeden

$$(\ln\circ f)'(t)=0$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{f'(c)}{f(c)}=0$$

ve buradan da, $f'(c)=0$ elde edilir. Buna ek olarak, $f^{**}(c)>1$ olduğundan

$$e^{(\ln\circ f)''(c)}>1$$

bağıntısı sağlanır. Buradan

$$(\ln\circ f)''(c)=\frac{f''(c)\cdot f(c)-\left(f'(c)\right)^2}{\left(f(c)\right)^2}>0$$

elde edilir. Böylece de, $f'(c)=0$ olduğundan

$$f''(c)\cdot f(c)>\left(f'(c)\right)^2=0$$

ifadesi yazılabilir. Sonuç olarak, f pozitif bir fonksiyon olduğundan $f''(c)>0$ bağıntısı elde edilir. Böylece, c noktasında yerel minimum değeri için gerekli ve yeterli koşullar ($f'(c)=0,\ f''(c)>0$) sağlanmış olur.

b) $f^{*}(c)=1$ olacak şekilde $c\in(a,b)$ alınsın. Ardından a) kısmındaki ispattan

$$f'(c)=0$$

ve

$$f''(c)<1$$

elde edilebilir. Bu durumda gerekli ve yeterli koşullar ($f'(c)=0,\ f''(c)>0$) sağlandığı için f fonksiyonu c noktasında yerel maksimum değeri içermektedir.

2.4.9. Teorem (Volkov, 1986): $a \in \mathrm{R}$ ve $h > 0$ olsun. $f : [a, a+nh] \to \mathrm{R}$ $[a, a+nh]$ aralığında sürekli olan ve $(a, a+nh)$ aralığında n. mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(a+kh) = h^n f^{(n)}(c)$$

olacak şekilde $c \in (a, a+nh)$ vardır.

2.4.10. Örnek: 2.4.9 teoreminden elde edilen

$$\frac{f(n)\left[f(n+2)\right]^{C_n^2}\left[f(n+4)\right]^{C_n^4}\cdots}{\left[f(n+1)\right]^{C_n^1}\left[f(n+3)\right]^{C_n^3}\cdots} = f^*(c)$$

formülünü kullanarak bazı limit değerlerini hesaplayabiliriz.

$f = t,\ h = 1$ ve $a = 2k,$ n=4k+1 alınarak $2k < c < 6k+1$ için

$$\left(\frac{2k}{6k+1}\right)^{C_{4k+1}^{0}} \left(\frac{6k}{2k+1}\right)^{C_{4n+1}^{1}} \left(\frac{2k+2}{6k-1}\right)^{C_{4k+1}^{2}} \cdots \left(\frac{4k}{4k+1}\right)^{C_{4k+1}^{2k}} = e^{\frac{(4k)!}{c^{4k+1}}} \tag{2.6}$$

elde edilebilir. (2.6) denkleminin limiti alınırsa, $2k < c < 6k+1$ olduğundan

$$\left(2k\right)^{4k+1} < c^{4k+1} < \left(6k+1\right)^{4k+1}$$

ve buradan

$$\frac{\left(4k\right)!}{\left(2k\right)^{4k+1}} > \frac{\left(4k\right)!}{c^{4k+1}} > \frac{\left(4k\right)!}{\left(6k+1\right)^{4k+1}} > 0$$

yazılabilir. Bundan sonra

$$a_k = \frac{\left(4k\right)!}{\left(2k\right)^{4k+1}} \to 0$$

olduğunu gösterelim. Oran testi uygulanarak

$$\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{\left(4k+4\right)!}{\left(2k+2\right)^{4k+5}} \cdot \frac{\left(2k\right)^{4k+1}}{\left(4k\right)!} \\
&= \frac{\left(4k+1\right)\left(4k+2\right)\left(4k+3\right)\left(4k+4\right)}{\left(2k+2\right)^4} \cdot \left(\frac{2k}{2k+2}\right)^{4k+1} \\
&= \frac{\left(4+1/k\right)\left(4+2/k\right)\left(4+3/k\right)\left(1+4/k\right)}{2^4\left(1+2/k\right)^4} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^{4k+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\left(4+1/k\right)\left(4+2/k\right)\left(4+3/k\right)\left(1+4/k\right)}{2^4\left(1+2/k\right)^4} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^{4k+1}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=2^4\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left[\left(1+1/k\right)^k\right]^{\frac{4k+1}{k}}}=\left(\frac{2}{e}\right)^4<1$$

bulunur ve $a_k\to 0$ elde edilebilir. Böylece, sıkıştırma (Squeeze) Teoremi kullanılarak

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(4k)!}{c^{4k+1}}=0$$

ve

$$\lim_{k\to\infty}e^{\frac{(4k)!}{c^{4k+1}}}=1$$

bulunur. Buradan,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k}{6k+1}\right)^{C_{4k+1}^{0}}\left(\frac{6k}{2k+1}\right)^{C_{4n+1}^{1}}\left(\frac{2k+2}{6k-1}\right)^{C_{4k+1}^{2}}\cdots\left(\frac{4k}{4k+1}\right)^{C_{4k+1}^{2k}}=1$$

elde edilir.

Çarpımsal türev kullanılarak klasik anlamda ispatı zor olan bir problem daha kolay bir şekilde yapılabilir. Bununla ilgili bir örnek verelim.

2.4.11. Örnek :

$$f(t)=\begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{if t} \neq 0,\\ 0 & \text{if t} = 0\end{cases}$$

ele alalım. f fonksiyonunun R üzerinde sonsuz kez diferansiyellenebilir olduğunu gösterelim. Bunu göstermek $t\neq 0$ için oldukça kolaydır. Ancak $t=0$ için doğruluğunu göstermek o kadar da kolay değildir. Çarpımsal analiz, her $n=0,1,2,...$ için $f^{(n)}(0)=0$ ’ın doğru olduğunun gösterilmesinde de kullanılabilir. Bunun için $t>0$ ele alalım ve f fonksiyonunun *n.* mertebeden türevinin, $f^{*(n)}$

$$f^{*(n)}(t)=e^{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{t^{n+2}}},\quad n=0,1,2,... \tag{2.7}$$

doğruluğunu gösterelim. $n=0$ için (2.7) formülü doğrudur. Bu ifadenin n için doğru olduğu varsayılarak f fonksiyonunun $(n+1)$. mertebeden çarpımsal türevini hesaplayalım:

$$f^{*(n+1)}(t)=\lim_{h\to 0} e^{\left(\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(t+h)^{n+2}}-\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{t^{n+2}}\right)\cdot\frac{1}{h}}.$$

Binom formülü ile

$$\ln f^{*(n+1)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{(-1)^{n+2}(n+1)!\cdot\left((t+h)^{n+2}-t^{n+2}\right)}{ht^{n+2}(t+h)^{n+2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-1)^{n+2}(n+1)!\cdot\left((n+2)ht^{n+1}+\cdots+h^{n+2}\right)}{ht^{n+2}(t+h)^{n+2}}$$

yazılabilir. Buradan

$$\ln f^{*(n+1)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{(-1)^{n+2}(n+1)!\cdot\left((n+2)t^{n+1}+\cdots+h^{n+1}\right)}{t^{n+2}(t+h)^{n+2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+2}(n+2)!\cdot t^{n+1}}{t^{2n+4}}=\frac{(-1)^{n+2}(n+2)!}{t^{n+3}}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$f^{*(n+1)}(t)=e^{\frac{(-1)^{n+2}(n+2)!}{t^{n+3}}}$$

olur. Tümevarımdan, (2.7) denklemi her $n=0,1,2,...$ değeri için sağlanmıştır. (2.4) denkleminden

$$f^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}f^{(k)}(t)\left(\ln\circ f^{*(n-k)}\right)(t). \qquad (2.8)$$

kolayca ifade edilebilir. (2.8) formülü kullanılarak

$$f^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}(n-1)!(n-k+1)!\cdot f^{(k)}(t)}{t^{n-k+2}\cdot k!(n-k-1)!},\quad n=1,2,3,\ldots .$$

elde edilebilir. Bu formülden

$$\frac{f^{n}(t)}{t}=f(t)\sum_{m=4}^{N_n}\frac{M_{n,m}}{t^m},\quad n=1,2,3,\ldots,$$

bulunur. Burada $M_{n,m}\in \mathrm{Z}$, $N_n\in \mathrm{N}$ ve $N_n\geq 4$. Sonuç olarak, $z=1/t^2$ için

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t^m}=\lim_{t\to 0+}\frac{e^{-1/t^2}}{t^m}=\lim_{t\to 0+}\frac{\left(1/t^2\right)^{\frac{m}{2}}}{e^{1/t^2}}=\lim_{z\to\infty}\frac{z^{m/2}}{e^t}=0$$

olarak hesaplanabilir. Böylece,

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f^{n}(t)}{t} = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

elde edilir. Buradan $f^{(n)}(0+) = 0$ olduğundan $f^{(n+1)}(0+) = 0$ olduğu sonucuna varılır. $f(0)=0$ olduğundan tüm $n=0,1,\ldots$ değerleri için tümevarımla $f^{(n)}(0+) = 0$ olduğu sonucuna ulaşılabilir. $t<0$ olduğunu kabul edelim. f çift bir fonksiyon olduğundan tüm $n=0,1,\ldots$ değerleri için $f^{(n)}(0-) = 0$ olduğu kolayca gösterilebilir. Bu durumda, tüm $n=0,1,\ldots$ değerleri için $f^{(n)}(0)=0$ elde edilebilir.

2.5. Çarpımsal İntegral

Bu bölümde, çarpımsal terstürev tanımlanarak çarpımsal ve klasik terstürev arasındaki bağıntı verilecektir. Daha sonra çarpımsal belirli integral tanımlanacaktır. Bununla birlikte çarpımsal integralin bazı önemli kuralları ve özellikleri verilecektir. Türevde olduğu gibi çarpımsal integraller için de bu kurallar klasik integral kurallarından daha basittir.

2.5.1. Tanım: Eğer her $t\in(a,b)$ için $g^{*}(t) = f(t)$ ise $g:(a,b)\to\mathrm{R}$ fonksiyonunun, $f:(a,b)\to\mathrm{R}$ fonksiyonunun bir çarpımsal terstürevi olduğu söylenebilir. Bu kavram için bilinen gösterime (notasyon) benzer olan

$$*\!\int f(t)^{dt} = g(t)$$

gösterimi kullanılacaktır.

Diferansiyel "dt" gösteriminin çarpım durumunda değil üstel biçimde olduğuna dikkat edilmelidir. Klasik terstürevin daima toplanan keyfi bir sabite sahip olduğu gibi çarpımsal terstürev de daima keyfi bir sabit çarpana sahiptir. Sonuç olarak

$$e^{(\ln\circ g)'(t)} = f(t)$$

bağıntısından çarpımsal integral

$$*\int f(t)^{dt} = e^{\int \ln f(t)dt} \tag{2.9}$$

olarak tanımlanabilir.

Böylece, $\int \ln f(t)dt$ ve $\int f(t)^{dt}$ arasında $\ln\circ f$ fonksiyonun herhangi bir h terstürevinin, f fonksiyonunun çarpımsal terstürevi

$$g(t) = e^{h(t)},\ a \le t \le b$$

şeklinde ifade edilir.

Özellikle, eğer g_1 ve g_2, f 'nin iki çarpımsal terstürevi ise, h_1 ve h_2, sırasıyla g_1 ve g_2 'ye uygun $\ln\circ f$ 'in klasik terstürevleri olduğu için $h_1(t) = h_2(t) + c,\ a \le t \le b,\ c \in R$ 'den

$k = e^c$ için

$$g_1(t) = kg_2(t),\ a \le t \le b,\ k > 0$$

olduğu kolayca ortaya çıkarılabilir. Bu durumda, f 'nin tüm çarpımsal terstürevleri pozitif sabitlerle çarpılarak herhangi bir terstürevinden elde edilebilir.

2.5.2. Örnek: $f(t) = e^{kt^n}$ 'nin çarpımsal terstürevini bulalım. (2.9) denkleminden

$$*\int \left(e^{kt^n}\right)^{dt} = e^{\int \ln e^{kt^n} dt} = e^{\int kt^n dt} = Ce^{\frac{kt^{n+1}}{n+1}}$$

bulunur.

Şimdi çarpımsal belirli integrali tanımlayalım. f $[a,b]$ aralığında bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ aralığının $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ bölüntülerini düşünelim. Herhangi bir $t_i < c_i < t_{i+1},\ i = 0,1,...,n-1$ eşitsizliğini alalım. $[a,b]$ aralığında f 'nin Riemann integral tanımından integral toplamı

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta t_i \tag{2.10}$$

şeklindedir. Burada $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ olarak alınmıştır.

$[a,b]$ aralığında f 'nin çarpımsal integralini tanımlamak için (2.10)'deki toplamı çarpım ile çarpımı ise kuvvet olarak yazıp düzenlenir ise

$$P_n = \prod_{i=0}^{n-1} f(c_i)^{\Delta t_i} \tag{2.11}$$

elde edilir. Eğer $\Delta = \max_{i=0,\ldots,n-1} \Delta t_i$ 0 (sıfır)'a gittiği zaman (2.11) ile tanımlandığı için P_n limiti varsa ve bu limit, c_i sayıları ve bölmelerin dizisinin özel seçiminden bağımsız ise, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki *çarpımsal integral*'i olarak adlandırılacaktır. Böylece belirli çarpımsal integral

$$*\int_a^b f(t)^{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \prod_{i=0}^{n-1} f(c_i)^{\Delta t_i}$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.5.3. Önerme: Eğer f, fonksiyonu $[a,b]$ aralığında pozitif ve sürekli ise (a,b) aralığında çarpımsal olarak integrallenebilir ve

$$*\int_a^b f(t)^{dt} = e^{\int_a^b \ln f(t) dt}$$

şeklinde gösterilir.

İspat: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında pozitif ve sürekli olsun. O halde,

$$*\int_a^b f(t)^{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \prod_{i=0}^{n-1} f(c_i)^{\Delta t_i}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} e^{\sum_{i=0}^{n-1} \ln f(c_i) \Delta t_i}$$

$$= e^{\int_a^b \ln f(t) dt}$$

bulunur.

2.5.4. Teorem: f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında çarpımsal olarak integrallenebilir ve (a,b) aralığında pozitif ve sürekli olsunlar. O zaman f^k, $f\cdot g$, f/g, diferansiyellenebilir ve

1. $$*\int_a^b \left(f(t)^k\right)^{dt} = \left(*\int_a^b \left(f(t)\right)^{dt}\right)^k,$$

2. $$*\int_a^b \left(f(t)g(t)\right)^{dt} = *\int_a^b \left(f(t)\right)^{dt} \cdot *\int_a^b \left(g(t)\right)^{dt},$$

3. $$*\int_a^b \left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)^{dt} = \frac{*\int_a^b \left(f(t)\right)^{dt}}{*\int_a^b \left(f(t)\right)^{dt}},$$

4. $$*\int_a^b f(t)^{dt} = *\int_a^c f(t)^{dt} \cdot *\int_c^b f(t)^{dt}$$

şeklinde verilebilir. Burada $k \in \mathrm{R}$, $a \le c \le b$ olarak alınır.

İspat:

1. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında çarpımsal olarak integrallenebilir olsun. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında pozitif ve sürekli olduğundan ve tüm $k \in R$ için 2.5.3 önermesinden

$$*\int_a^b \left(f(t)^k\right)^{dt} = e^{\int_a^b \left(\ln\left(f(t)\right)^k\right)dt}$$

$$= e^{k\int_a^b \left(\ln\left(f(t)\right)\right)dt}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
{}^{*}\int_a^b \left(f(t)^k \right)^{dt} &= \left[e^{\int_a^b \left(\ln\left(f(t)\right)\right)dt} \right]^k \\
&= \left({}^{*}\int_a^b \left(f(t) \right)^{dt} \right)^k
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2. f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında çarpımsal olarak integrallenebilir olsunlar. Bu durumda Önerme.2.5.3. ten

$$
\begin{aligned}
{}^{*}\int_a^b \left(f(t)\,g(t) \right)^{dt} &= e^{\int_a^b \ln\left(f(t)\cdot g(t)\right)dt} \\
&= e^{\int_a^b \left(\ln f(t) + \ln g(t)\right)dt} \\
&= e^{\int_a^b \ln f(t)dt + \int_a^b \ln g(t)dt} \\
&= {}^{*}\int_a^b \left(f(t) \right)^{dt} \cdot {}^{*}\int_a^b \left(g(t) \right)^{dt}
\end{aligned}
$$

bağıntısı elde edilebilir.

3. f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında çarpımsal olarak integrallenebilir olsunlar. Bu durumda

$$*\int_a^b \left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = e^{\int_a^b \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)dt}$$

$$= e^{\int_a^b (\ln f(t) - \ln g(t))dt}$$

$$= e^{\int_a^b \ln f(t)dt - \int_a^b \ln g(t)dt}$$

bağıntısı elde edilir. Buradan,

$$*\int_a^b \left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{*\int_a^b f(t)^{dt}}{\int_a^b g(t)^{dt}}$$

olduğu gösterilmiş olur.

4. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında çarpımsal olarak integrallenebilir olsun. $a \le c \le b$ olacak şekilde bir c sabiti alınır ise Önerme 2.5.3 ten

$$*\int_a^b f(t)^{dt} = e^{\int_a^b \ln f(t)dt}$$

$$= e^{\int_a^c \ln f(t)dt + \int_c^b \ln f(t)dt}$$

$$= e^{\int_a^c \ln f(t)dt} \cdot e^{\int_c^b \ln f(t)dt}$$

$$= *\int_a^c f(t)^{dt} \cdot *\int_c^b f(t)^{dt}$$

elde edilir.

2.5.5. Önerme: f , $[a,b]$ aralığında çarpımsal olarak tersi alınabilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda

a) $\quad {}^*\!\int_a^b f(t)^{dt} = \left({}^*\!\int_b^a f(t)^{dt} \right)^{-1}$,

b) $\quad {}^*\!\int_a^a f(t)^{dt} = 1$

olarak hesaplanabilir.

İspat:

a) f , $[a,b]$ aralığında çarpımsal olarak tersi alınabilen bir fonksiyon olsun. O halde,

$$\int_a^b f(t)^{dt} = e^{\int_a^b \ln f(t)dt} = e^{-\int_b^a \ln f(t)dt} = \left(\int_b^a f(t)^{dt} \right)^{-1}$$

elde edilebilir.

b) f , $[a,b]$ aralığında çarpımsal olarak tersi alınabilen bir fonksiyon olsun. Öyleyse

$$\int_a^a f(t)^{dt} = e^{\int_a^a \ln f(t)dt} = e^0 = 1$$

bulunur.

2.5.6. Teorem: f , $[a,b]$ aralığında pozitif ve sürekli bir fonksiyon olsun.

$$*\int_a^b f(t)^{dt} = f(c)^{b-a}$$

olacak şekilde bir $c \in [a,b]$ vardır.

İspat: f , $[a,b]$ aralığında pozitif ve sürekli bir fonksiyon olsun. Öyleyse

$$*\int_a^b f(t)^{dt} = e^{\int_a^b \ln f(t)dt}$$

şeklinde yazılabilir. Klasik integraller için ortalama değer teoreminden,

$$\int_a^b \ln f(t)dt = (b-a)(\ln\circ f)(c)$$

bulunur. Böylece

$$*\int_a^b f(t)^{dt} = e^{\int_a^b \ln f(t)dt} = e^{(b-a)(\ln\circ f)(c)}$$

elde edilir. Buradan da

$$*\int_a^b f(t)^{dt} = \left[e^{\ln(f(c))}\right]^{b-a} = f(c)^{b-a}$$

formülüne ulaşılabilir.

Teorem. 2.5.6 çarpımsal integral için O*rtalama Değer Teoremi* olarak adlandırılır.

2.5.7. Teorem [Çarpımsal Analiz'in Temel Teoremi]: f , $[a,b]$ aralığında pozitif ve sürekli bir fonksiyon olsun. F fonksiyonu

$$F(t) = *\int_a^t f(t)^{dt}, \ \mathrm{a \le t \le b}$$

olacak şekilde $[a,b]$ aralığında tanımlanmış olsun. Öyleyse F , f 'nin çarpımsal terstürevlerinden biri olur. Bunun yanında, eğer $G(t)$, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında herhangi bir terstürevi ise

$$*\int_a^b f(t)^{dt} = \frac{G(b)}{G(a)}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: Çarpımsal türev tanımı kullanılarak

$$F'(t) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{F(t+h)}{F(t)} \right]^{\frac{1}{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{e^{\int_a^{t+h} \ln f(x) dx}}{e^{\int_a^t \ln f(x) dx}} \right]^{\frac{1}{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[e^{\int_a^{t+h} \ln f(x)dx - \int_a^{t} \ln f(x)dx} \right]^{\frac{1}{h}}$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradan,

$$F'(t) = e^{\lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{t+h} \ln f(x)dx - \int_a^{t} \ln f(x)dx}{h}}$$

$$= e^{\frac{d}{dy}\left(\int_a^{y} \ln f(x)dx\right)\Big|_{y=t}}$$

$$= e^{\ln f(t)}$$

$$= f(t)$$

elde edilir. Eğer $G'(t) = f(t)$ ise $F(t) = CG(t)$ olur. Burada C, $[a,b]$ aralığında bir sabittir. Böylece,

$$*\int_a^{t} f(t)^{dt} = F(t) = CG(t)$$

yazılabilir. $t = a$ alırsak $1 = CG(t)$ elde edilir ve sonuç olarak

$$C = (G(a))^{-1}$$

yazılır. Şimdi ise $t = b$ alırsak

$$*\int_a^b f(t)^{dt} = CG(b) = \frac{G(b)}{G(a)}$$

teoremi ispatlanmış olur.

Teorem. 2.5.7 *çarpımsal analizin temel teoremi* olarak adlandırılır.

2.5.8. Teorem [Çarpımsal Kısmi İntegral]: $f:[a,b] \to R^+$ ve $g:[a,b] \to R^+$ çarpımsal diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Böylece f^g de çarpımsal diferansiyellenebilir ve

$$*\int_a^b \left(f^*(t)^{g(t)} \right)^{dt} = \frac{f(b)^{g(b)}}{f(a)^{g(a)}} \cdot \frac{1}{\int_a^b \left(f(t)^{g'(t)} \right)^{dt}}$$

bağıntısı yazılabilir.

İspat: f ve g, $[a,b]$ aralığında pozitif ve diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Böylece Teorem. 2.5.7 ile Teorem.2.3.1 kullanılarak

$$*\int_a^b \left(f^*(t)^{g(t)} \right)^{dt} = *\int_a^b \left(\frac{\left(f^g\right)^*(t)}{f(t)^{g'(t)}} \right)^{dt}$$

yazılabilir. Buradan

$$*\int_a^b \left(f^*(t)^{g(t)} \right)^{dt} = \frac{*\int_a^b \left(\left(f^g \right)^* (t) \right)^{dt}}{*\int_a^b \left(f(t)^{g'(t)} \right)^{dt}}$$
$$= \frac{f(b)^{g(b)}}{f(a)^{g(a)}} \cdot \frac{1}{\int_a^b \left(f(t)^{g'(t)} \right)^{dt}}$$

formülü elde edilebilir.

2.5.9. Örnek: Kısmi çarpımsal integralin kullanımına örnek olarak

$$*\int_1^2 \left(2^x \right)^{dt}$$

ele alınsın. Teorem. 2.5.8 den

$$*\int_1^2 \left(2^t \right)^{dt} = \frac{e^{4\ln 2}}{e^{\ln 1}} \cdot \frac{1}{\left(*\int_1^2 e^{\ln 2 \cdot t} \right)^{dt}}$$
$$= e^{4\ln 2} \cdot \frac{e^{\frac{\ln 2}{2}}}{e^{2\ln 2}}$$
$$= e^{\frac{5\ln 2}{2}}$$

şeklinde hesaplanabilir.

2.6. Çarpımsal Varyasyonel Analiz

Çarpımsal analizin, klasik varyasyonel metodların kullanıldığı bazı problemlerin çözümleri için de kullanılabileceği gösterilmiştir (Bashirov et all 2008). Bu çalışmaya dayanılarak, bu bölümde çarpımsal varyasyonel analize kısa bir giriş yapılacak ve bir fonksiyonelin minimizasyonu problemi ele alınacaktır. Sonuç olarak bu varyasyonel problem alternatif olarak çarpımsal kavramlar kullanılarak çözülecektir.

Probleme ve onun varyasyonel çözümüne geçmeden önce çarpımsal kısmi türevin ortaya konulması gerekmektedir. İki değişkene bağlı $f(x, y)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2(=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$'ın bazı açık alt kümeleri üzerinde tanımlandığını varsayalım. Böylece y sabit düşünülerek f fonksiyonunun x'te çarpımsal kismi türevi tanımlanabilir ve f_x^* şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde f fonksiyonunun y' de çarpımsal kismi türevi tanımlanabilir ve f_y^* şeklinde ifade edilir. Böylece yüksek mertebeden çarpımsal kismi türev kolayca tanımlanabilir. Bundan sonra *genelleştirilmiş çarpımsal zincir kuralı* ile *iki değişkenli çarpımsal Taylor* teoremi verilebilir. Bu teoremlerin ispatları klasik analizdeki ilgili teoremlere $\ln\circ f$ uygulanarak ispatlanabilir.

2.6.1. Teorem: f sürekli çarpımsal kısmi türevleri ile y ve z'ye bağlı bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $x\in(a,b)$ için $f\left(y(x),z(x)\right)$ tanımlı olacak şekilde y ve z fonksiyonları (a,b) aralığında klasik diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise

$$\frac{d^* f\left(y(x),z(x)\right)}{dx} = f_y^*\left(y(x),z(x)\right)^{y'(x)}\ f_z^*\left(y(x),z(x)\right)^{z'(x)}$$

şeklinde hesaplanabilir.

2.6.2. Teorem: *A*, $\mathbb{R}^2$'in açık bir alt kümesi olsun. $f:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun *A* üzerinde *n*+1. mertebeden tüm çarpımsal kısmi türevleri içerdiği varsayılsın. Öyleyse, her (x,y), $(x+h,y+k)\in A$ için

$$f(x+h,y+k)=\prod_{m=0}^{n}\prod_{i=0}^{m} f^{*(m)}_{x^i y^{m-i}}(x,y)^{\frac{h^i k^{m-i}}{i!(m-i)!}} \prod_{i=0}^{n+1} f^{*(n+1)}_{x^i y^{n+1-i}}(x+\xi,y+\xi)^{\frac{h^i k^{m-i}}{i!(m-i)!}}$$

olacak şekilde tek bir $\xi\in(0,1)$ sayısı vardır.

Şimdi

$$J(y)=*\int_a^b f(y(x),y'(x))^{dx} \tag{2.12}$$

olan fonksiyonelin minimizasyonu problemini ele alalım. Burada *y*(*x*), $y(a)=y_1$ ve $y(b)=y_2$ sabit bitiş noktaları ile $[a,b]$ üzerinde sürekli klasik diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. Çarpımsal integral ile klasik integral arasındaki bağıntıdan bu problem, klasik anlamda

$$J_0(y)=J(y)=\int_a^b \ln f(y(x),y'(x))\,dx$$

olarak ifade edilebilir ve klasik varyasyonel yöntemlerle çözülebilir. Ancak burada problem çarpımsal yöntemler kullanılarak çözülecektir. Bu nedenle önce varyasyonel analizin temel önermesinin çarpımsal anlamda nasıl ifade edildiğini inceleyelim.

2.6.3. Önerme: Eğer sonsuz defa klasik diferansiyellenebilen $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$*\int_a^b \left(f(x)^{h(x)} \right)^{dx} = 1$$

olacak şekilde $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pozitif sürekli bir fonksiyon var ise her $a\le x\le b$ için $f(x)=1$ olur.

İspat: (2.9) bağıntısından

$$*\int_a^b \left(f(x)^{h(x)} \right)^{dx} = e^{\int_a^b h(x)\ln f(x)dx} = 1$$

yazılabilir. Buradan

$$\int_a^b h(x)\ln f(x)\, dx = 0$$

elde edilir. Böylece, varyasyonel analizin temel önermesinden her $a\le x\le b$ için $\ln f(x)=0$ veya $f(x)=1$ elde edilir.

(2.12) fonksiyoneli göz önüne alınarak $f(y,y')$ fonksiyonunun y ve y''da ikinci mertebeden sürekli çarpımsal kısmi türeve sahip olduğu varsayılsın. $h(x)$, $h(a)=h(b)=0$ sağlayan $[a,b]$'de herhangi bir sürekli klasik diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bunun yanında $\varepsilon \in \mathbb{R}$ olsun. Bundan sonra

$$1 \le \frac{J\left(y+\varepsilon h\right)}{J\left(y\right)} = \frac{*\int_a^b f\left(y(x)+\varepsilon h(x), y'(x)+\varepsilon h'(x)\right)^{dx}}{*\int_a^b f\left(y(x), y'(x)\right)^{dx}}$$

$$= *\int_a^b \left(\frac{f\left(y(x)+\varepsilon h(x), y'(x)+\varepsilon h'(x)\right)}{f\left(y(x), y'(x)\right)} \right)^{dx}$$

$$= o^*(\varepsilon) \int_a^b \left(f_y^*\left(y(x), y'(x)\right)^{\varepsilon h(x)} \; f_{y'}^*\left(y(x), y'(x)\right)^{\varepsilon h'(x)} \right)^{dx}$$

$$= o^*(\varepsilon) \left(\int_a^b \left(f_y^*\left(y(x), y'(x)\right)^{h(x)} \; f_{y'}^*\left(y(x), y'(x)\right)^{h'(x)} \right)^{dx} \right)^{\varepsilon}$$

yazılabilir. Burada eğer $\varepsilon \to 0$ ise $o^*(\varepsilon)^{1/\varepsilon} \to 1$ olur. Daha sonra elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının $1/\varepsilon$ kuvveti alınıp, ε , $0+$ve $0-$’ye götürülür ise

$$\int_a^b \left(f_y^*\left(y(x), y'(x)\right)^{h(x)} \; f_{y'}^*\left(y(x), y'(x)\right)^{h'(x)} \right)^{dx} = 1$$

veya

$$\int_a^b \left(f_y^*\left(y(x), y'(x)\right)^{h(x)} \right)^{dx} \; \int_a^b \left(f_{y'}^*\left(y(x), y'(x)\right)^{h'(x)} \right)^{dx} = 1$$

elde edilir. Buradan Teorem.2.5.8 kullanılarak

$$\frac{\int_a^b \left(f_y^*\left(y(x), y'(x)\right)^{h(x)} \right)^{dx}}{\int_a^b \left(\frac{d^*}{dx} f_{y'}^*\left(y(x), y'(x)\right)^{h(x)} \right)^{dx}} = 1$$

veya

$$*\int_a^b \left(\left(\frac{f_y^*\left(y(x), y'(x)\right)}{\frac{d^*}{dx} f_{y'}^*\left(y(x), y'(x)\right)} \right)^{h(x)} \right)^{dx} = 1$$

bulunur. Önerme. 2.6.3 ten

$$\frac{f_y^*\left(y(x), y'(x)\right)}{\frac{d^*}{dx} f_{y'}^*\left(y(x), y'(x)\right)} = 1$$

veya

$$f_y^*\left(y(x), y'(x)\right) = \frac{d^*}{dx} f_{y'}^*\left(y(x), y'(x)\right) \tag{2.13}$$

elde edilir. Böylece *Euler-Lagrange denkleminin çarpımsal formu* elde edilmiş olur.

2.6.4. Örnek: $y,\ y(0)=\lambda$ ve $y(1)=\mu$ koşullarını sağlayan $[0,1]$üzerinde tüm sürekli klasik diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsun. (2.13) formülü kullanılarak

$$J(y)=*\int_0^1 \left(y'(x)^2\right)^{dx}$$

fonksiyonelini minimize etme problemini düşünelim. Böylece

$$f_y^*(y,y')=1 \text{ ve } f_{y'}^*(y,y')=e^{\frac{2}{y'}}$$

olur. Buradan

$$\frac{d^*}{dx} f_{y'}^*(y,y')=e^{\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{y'}\right)}=e^{-\frac{2y''}{(y')^2}}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$2y''+(y')^2=0$$

denklemi elde edilir ve bu denklem kolayca Riccati denklemine dönüşür. Böylece

$$y(x)=2c_1\ln(2+c_1x)+c_2$$

sonucu bulunur. Daha sonra çözümün sabit terimleri

$$\begin{cases} 2c_1 \ln 2 + c_2 = \lambda \\ 2c_1 \ln\left(2 + c_1\right) + c_2 = \mu \end{cases}$$

sisteminden karar verilerek problem çözülebilir.

2.7. Çarpımsal Uzaylara Giriş

Çarpımsal türev ile çarpımsal integralin tanımlanmasından sonra, matematiğin diğer önemli bir konusu olan matematiksel uzayların çarpımsal anlamda nasıl oluşturulabileceği düşünülebilir. Bu bölümde klasik uzaylara alternatif olabilecek çarpımsal uzayların nasıl geliştirileceğini daha iyi anlamak için çarpımsal uzaylara kısa bir giriş yapılacaktır.

Tanım.2.1.9. dan daha önce çarpımsal mutlak değer fonksiyonu ifade edilmiş idi. Çarpımsal mutlak değer fonksiyonu kullanılarak çarpımsal uzunluk

$$d^*\left(x, y\right) = \left|\frac{x}{y}\right|^*$$

olarak tanımlanabilir. Böylece çarpımsal uzunluk açık olarak

a) Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $d^*\left(x, y\right) \geq 1$,

b) $d^*\left(x, y\right) = 1$ ancak ve ancak $x = y$,

c) Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $d^*\left(x, y\right) = d^*\left(y, x\right)$,

d) Her $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için $d^*\left(x, z\right) \leq d^*\left(x, y\right) d^*\left(y, z\right)$

özelliklerini sağlar. Çarpımsal uzunluğun tanımından sonra, klasik metrik uzaya alternatif olarak çarpımsal metrik uzay tanımlanabilir. Örnek olarak $\mathbb{R}^+$ bir çarpımsal metrik uzayıdır. Şimdi, bu uzayın önemli bir tanımını görelim.

2.7.1. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 1$ için

$$d^*\left(x_n, x\right) < \varepsilon$$

sağlanacak şekilde her $n > N$ için tek bir $N \in \mathbb{N}$ varsa, $\mathbb{R}^+$'da $\{x_n\}$ dizisi $x \in \mathbb{R}^+$'e yakınsar ($\{x_n\} \overset{*}{\to} x$).

Diğer bir çarpımsal metrik uzay, $(n \times n)$ pozitif M_n^+ matrisleri şeklinde tanımlanabilir. Her $n-$vektörlü x için $x^T Ax > 0$ ise $(n \times n)$ A matrisi pozitiftir. Burada x^T, x'in devriğidir (transpose). Eğer pozitif $(n \times n)$ olan A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ise bu özdeğerler pozitif sayılardır. Buradan A'nın çarpımsal normu

$$\|A\|^* = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|^*$$

olarak tanımlanır ve A ile B arasındaki çarpımsal uzaklık

$$d^*\left(A, B\right) = \left\|AB^{-1}\right\|^*$$

olur.

3. ÇARPIMSAL DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bilim ve mühendislikte birçok önemli problemin matematiksel modellemesinde klasik türevlere bağlı diferansiyel denklemler kullanılır. Bu diferansiyel denklemler, çözülmek istenen bilimsel problemin matematiksel bir ifadesidir. Böylece bu denklemleri sağlayan fonksiyonlar, aynı zamanda bu problemlerin de matematiksel çözümleridir. Bu durumda her bir bilimsel problemin matematiksel çözümüne yönelik klasik diferansiyel denklemin yazılması ilk ve en önemli adımdır. Ancak bilim ve mühendislikte birçok bilimsel problemin klasik diferansiyel denklemler kullanılarak ifade edilmesi kolay değildir. Böyle durumlarda alternatif olarak çarpımsal diferansiyel denklemler kullanılabilir. Klasik türev ile çarpımsal türevin arasındaki farklılıklar, klasik diferansiyel denklemler ile çarpımsal diferansiyel denklemlerin kullanılmasında bazı farklılıkları da yaratmışlardır. Bu bölümde öncelikle çarpımsal diferansiyel denklemler ile ilgili bazı önemli kavramlar verilmiştir. Daha sonra çarpımsal diferansiyel denklemlerin kullanımına yönelik bazı örnekler incelenmiştir. Bu örnekler çarpımsal diferansiyel denklemler kullanılarak bilimsel problemlerin nasıl matematiksel modellemesinin yapılacağını ortaya koymuştur.

3.1. Çarpımsal Diferansiyel Denklemlerin Tanımı

Bilim, mühendislik ve uygulamalı bilim dallarındaki pek çok olayın matematiksel modellemesi, bu olayların evrimsel tanımlamasına dayalıdır. Bundan dolayı diferansiyel analiz yoluyla bu gibi olayları modellemek doğaldır. Bilim ve mühendislikteki pek çok problem bilimsel kanunlar dikkate alınarak matematiksel olarak formüle edilebilir. Bu yasalar bir veya daha fazla çokluğun çeşitli çarpımsal değişim oranını içerebilir. Böyle değişim oranları çarpımsal türev ile kolayca açıklanabilir.

3.1.1. Tanım: Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre çarpımsal türevlerini içeren bir diferansiyel denklem *çarpımsal diferansiyel denklem* olarak adlandırılır.

3.1.2. Örnek: y 'nin çarpımsal türevini içeren

$$y^*(t) = f\left(t, y(t)\right)$$

diferansiyel denklemi, çarpımsal diferansiyel denklem olarak tanımlanır.

3.1.3. Örnek: Çarpımsal diferansiyel denklemlere diğer örnekler

$$y^{**}(t) = y(t),$$

$$y^{**}(t) = 1,$$

$$y^{**}(t) = \left(y^*(t)\right)^2$$

olarak verilebilir.

3.1.4. Tanım: Bir diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden türevin mertebesi diferansiyel denklemin *mertebesi* olarak adlandırılır.

3.2. Çarpımsal Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Çarpımsal diferansiyel denklemlerin tanımının ardından, bu denklemlerin çözümleri büyük önem kazanmıştır. Aşağıdaki tanım n. mertebeden çarpımsal diferansiyel denklemin çözümü için verilebilir.

3.2.1. Tanım: n. mertebeden bir çarpımsal diferansiyel denklem

$$G\left(t, y, y^{*}, \ldots, y^{*(n-1)}, y^{*(n)}(t)\right)=1, \quad (t, y) \in R \times R^{+} \tag{3.1}$$

şeklindeki bir çarpımsal diferansiyel denklemi ele alalım. Burada G pozitif bir gerçel fonksiyondur. f, bir I gerçek aralığında tüm t değerleri için tanımlı n defa çarpımsal diferansiyellenebilir pozitif gerçel bir fonksiyon olsun. Eğer tüm $t \in I$ değerleri için, $G\left(t, f, f^{*}, \ldots, f^{*(n-1)}, f^{*(n)}\right)$ tanımlanmış ve $G\left(t, f, f^{*}, \ldots, f^{*(n-1)}, f^{*(n)}\right)=1$ ise, f fonksiyonu (3.1) çarpımsal diferansiyel denkleminin bir *explicit çözümü* olarak adlandırılır. Ayrıca, (3.1) denkleminin bir *implicit çözümü* de (3.1) denkleminin bir explicit çözümü olan en az bir gerçel f fonksiyonunu tanımlayan $g(t, y)=1$ formuna sahiptir.

3.2.2. Örnek : t değişkenine bağlı

$$y(t)=e^{be^{ct}}$$

şeklinde tanımlı her fonksiyon

$$y^{**} y^{*}=y$$

çarpımsal diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Burada *b* ve *c* sabit değerlerdir.

y'nin *- türevini içeren

$$y^{*} = f\left(t, y(t)\right) \tag{3.2}$$

çarpımsal diferansiyel denklemi ele alalım. Eğer f, $R \times R^{+}$'nin bazı alt kümeleri G üzerinde tanımlı pozitif bir fonksiyon ise (3.2) denklemi anlamlıdır. Bu denklemin çözümünün

$$y(t_0) = y_0 \tag{3.3}$$

koşulunu sağlayan varlık ve teklik teoremini sağlayabilmesi için çarpımsal bağlamda klasik Lipschitz koşuluna benzer bir koşula ihtiyaç vardır. Böylece çarpımsal durumda Lipschitz koşulunun benzeri yazılabilir. Çarpımsal ortalama değer teoreminden f fonksiyonu için

$$\forall (t, y),\ (t, z) \in G,\ \left|\frac{f(t, y)}{f(t, z)}\right|^{*} \leq L^{|y-z|} \tag{3.4}$$

formundaki koşul yazılabilir. Burada $L > 1$ bir Lipschitz sabitidir.

3.2.3. Teorem [Çarpımsal Diferansiyel Denklem]: f , $R \times R^{+}$ içinde sınırlı ve açık G bölgesinden (a, b) aralığına sürekli bir fonksiyon olsun. Burada $0 < a < b < \infty$ şeklindedir. f fonksiyonunun (3.4)'te verilen Lipschitz koşulunun çarpımsal benzerini sağladığını varsayalım ve $(t_0, y_0) \in G$ ele alalım. Bu durumda (3.2) denklemi $\varepsilon > 0$ olacak şekilde (3.3) koşulunu sağlayan

$$y : \left(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon\right) \to \mathbb{R}^+$$

şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

İspat: (3.2) çarpımsal diferansiyel denklemi

$$y'\left(t\right) = y\left(t\right) \ln f\left(t, y\left(t\right)\right).$$

şeklindeki klasik diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. $\left(t, y\right) \in G$ için $F\left(t, y\right) = y \ln f\left(t, y\right)$ fonksiyonunun

$$\begin{aligned}
\left|F\left(t,y\right) - F\left(t,z\right)\right| &\leq \left|y \ln f\left(t,y\right) - y \ln f\left(t,z\right)\right| + \left|y \ln f\left(t,y\right) - z \ln f\left(t,z\right)\right| \\
&\leq \left|y \frac{\ln f\left(t,y\right)}{\ln f\left(t,z\right)}\right| + \left|\ln f\left(t,z\right)\right| \cdot \left|y - z\right| \\
&= y \ln \left|\frac{f\left(t,y\right)}{f\left(t,z\right)}\right|^{*} + \left|\ln f\left(t,z\right)\right| \cdot \left|y - z\right| \\
&\leq \left(y \ln L + \left|\ln f\left(t,z\right)\right|\right) \cdot \left|y - z\right|
\end{aligned}$$

şeklinde y deki Lipschitz şartını sağladığı gösterilebilir. Burada, f çarpımsal anlamda sınırlı olduğundan $\ln \circ f$ fonksiyonu sınırlıdır. Ayrıca, y sınırlı bir kümede değişir. Böylece F, y ‘deki klasik Lipschitz koşulunu sağlar. Böylece (3.2) denkleminin (3.3) koşulunu sağlayan tek bir çözümünün olduğu sonucuna varılır.

3.2.4. Tanım : $f_1,\ f_2,\ldots,\ f_m$ şeklinde m tane pozitif fonksiyon olsun. $c_1,\ c_2,\ldots,\ c_m$, m tane sabit değer ise

$$f_1^{c_1}\cdot f_2^{c_2}\cdots\cdots f_m^{c_m}$$

ifadesi $f_1,\ f_2,\ldots,\ f_m$ fonksiyonlarının çarpımsal kombinasyonu olarak tanımlanır.

$j=1,2,\ldots n$ için $e^{e^{m_j x}}$ üstel fonksiyonları için çarpımsal türeve göre sabit (invariant) fonksiyonlardır. Böylece, invariant fonksiyonlar ve bunların çarpımsal kombinasyonları pek çok çarpımsal diferansiyel denklemin çözümünü belirlemede kullanılabilir.

3.2.5. Örnek: a bir sabit olarak birinci mertebeden

$$y^*(t)=y^a(t)$$

çarpımsal diferansiyel denklemi ve

$$y(t_0)=y_0,\ y_0>0$$

koşulunu ele alalım. İnvariant fonksiyona göre çarpımsal diferansiyel denklemin çözümü

$$y(t)=e^{b.e^{at}}$$

şeklinde hesaplanır. Burada b bir sabittir. Başlangıç koşulu uygulanır ise

$$y_0 = e^{b.e^{at_0}} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\ln y_0}{e^{a.t_0}}$$

elde edilir. Böylece

$$y(t) = y_0^{e^{a(t-t_0)}}$$

çözümü bulunur.

3.3. Çarpımsal Diferansiyel Denklemlerin Bazı Uygulamaları

Klasik diferansiyel denklemler, değişimlerin en iyi farklarla ifade edildiği problemler için kolayca kullanılabilir iken çarpımsal diferansiyel denklemler değişimlerin en iyi oranlarla ifade edildiği problemler için kolayca kullanılabilmektedir. Örneğin vücuttaki bir organın büyümesinin diğer bir organın büyümesine bağlı olduğu bir problem, büyüme ile ilgili değişimler en iyi oranlarla ölçüldüğü için matematiksel anlamda çarpımsal diferansiyel denklemler kullanılarak daha kolay formüle edilebilir. Gerçekten de çarpımsal diferansiyel denklemler bilim ve mühendislikteki pek çok problemin çözümü için oldukça pratik ve kullanışlı bir yöntemdir.

3.3.1. Örnek: Uygun koşullar altında verilen bir türün popülasyonunun bir yılda $\% n$ oranında büyüdüğü düşünülsün. Eğer y_0, verilen türün başlangıç popülasyon büyüklüğünü ve y de belirli bir yıldan sonra popülasyondaki birey sayısını ifade ediyorsa, t başlama anındaki popülasyon ne olacaktır? Problemin matematiksel ifadesi, birinci mertebeden

$$y^{*}(t)=\frac{100+n}{100} \tag{3.5}$$

çarpımsal diferansiyel denklemi ile kolayca ifade edilebilir. (3.5) denklemi, t zamanındaki bireylerin sayısının kaç kat değiştiğini belirtir. Daha sonra (3.5) denklemine göre problemin matematiksel çözümü kolayca

$$y(t)=y_0\left(\frac{100+n}{100}\right)^{t-t_0}$$

şeklinde bulunur. Burada t_0 başlangıç zamanını ifade etmektedir.

3.3.2. Örnek: Bir banka hesabına $\$a$ yatırıldığı ve bu miktarın bir yıl sonra $\$b$ olduğu düşünülsün. Böylece başlangıç miktarı ${}^{b}\!/_{a}$ kat değişmiş olur. Acaba yatırılan miktar bir ayda ne kadar değişmektedir? Bunun için, aylık miktarın p kat değiştiğini varsayalım. Öyleyse bir yıl sonunda toplam miktarı $b=ap^{12}$ olacaktır. Şimdi p, $b=\left({}^{b}\!/_{a}\right)^{1/12}$ olacak şekilde hesaplanabilir. Bankaya yatırılan miktarın her saat, her dakika, her saniye v.s olarak günlük değiştiğini varsayalım. Eğer f farklı zamanlarda yatırımın değerini ifade eden fonksiyon ise t zamandaki anlık artış oranını bulmak için

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(t+h)}{f(t)}\right)^{1/h}$$

limiti hesaplanabilir. Kolayca görüleceği gibi üstteki limit $f^{*}(x)$ çarpımsal türeve eşittir. Böylece yukarıdaki açıklamadan dolayı çarpımsal türevin finanstaki birçok problemin matematiksel ifadesi için uygun bir yaklaşım olduğu düşünülebilir.

3.3.3. Örnek: Bir bankanın farklı anlık $T(t)$ zamanlarında farklı artış oranları sağladığını varsayalım. x_0 başlangıç miktarı olarak kabul edildiğinde, t zamanında bankada biriken miktar ne olur? Eğer $x(t)$, t zamanda bankadaki yatırımın değerini ifade ederse, problemin çözümü çarpımsal türevin finansal açıklamasını kullanarak

$$x^{*}(t) = T(t),\ x(0) = x_0$$

şeklinde diferansiyel denklemi ile kolayca elde edilir.
Diğer yandan, bu denklemin bir diğer çözümü de

$$x'(t) = c(t)x(t)$$

klasik diferansiyel denklemi ile verilebilir. Burada $c(t) = \ln T(t)$ olur. Görüldüğü gibi klasik denklemde yer alan logaritma fonksiyonu göz önünde bulundurulduğunda, çarpımsal diferansiyel denklemin daha kolay elde edilebileceği söylenebilir.

3.3.4. Örnek: Uygulamalı karşılaşılan

$$y(t) = ae^{-be^{-ct}} \tag{3.6}$$

formundaki bir fonksiyon Gombertz fonksiyonu olarak adlandırılır.

Bu fonksiyon (eğri), Gompertz tarafından (Gompertz, 1825) yapılmış olan çalışmada, belli bir t zamanında yaşayanların sayısını ifade eden demografik bir model olarak önerilmiştirç. (3.6) fonksiyonu $c>0$ esas büyüme oranı, $a>0$ bir denge içerisinde yaşayanların sayısı, $b>0$ ise $b=\ln\left(a/t_0\right)$ olacak şekilde başlangıç değeri $y(0)=y_0$ ile ilgilidir.

Gompertz eğrisi aktuel bilimde (sigorta şirketleri tarafından hayat sigortası fiyatlarının belirlenmesinde kullanılır) olduğu gibi özellikle büyüme olayları ile ilgili biyoloji ve ekonomideki problemlerinin çözümünde de geniş bir kullanım alanına sahiptir. İlk olarak Gompertz ölüm oranları analizlerini içeren çok geniş tablolar inceleyerek gerçekten çok zor bir çalışma gerçekleştirmiş ve kısa zaman dilimleri içerisinde olan yerel ölüm sebeblerini gözlemlemiştir. Bu çalışmalar sonucunda (3.6) fonksiyonunu (eğrisini) görgüsel (deneysel) olarak elde etmiştir. Daha sonra istatistiksel olarak Gompertz eğrisinin gerçeğe yeterli bir yaklaşım olduğu bulunmuştur. Ancak (3.6) fonksiyonunu (eğrisini) bilmeden, bu fonksiyonun matematiksel ifadesini ortaya koymak genel olarak kolay değildir. Diğer yandan, çarpımsal diferansiyel denklemler kullanılarak foksiyonun matematiksel ifadesini çok daha kolay bir şekilde yazmak mümkündür.

(3.6) fonksiyonunun klasik türevleri ile çarpımsal türevleri incelenirse,

$$y(0)=ae^{-b}$$

sınır koşulu ile bu fonksiyonun çözümü olduğu klasik diferansiyel denklem

$$y'(t)=cy(t)\ln\frac{a}{y(t)}$$

ile çarpımsal diferansiyel denklem

$$y^{*}(t)=\left(\frac{a}{y(t)}\right)^{c}$$

olarak bulunur. Burada $y(t)$, kısa t zamanında yaşayanların bağıl sayısını, dengede yaşayanlarının sayısıyla karşılaştırarak gösterir. Burada hangi diferansiyel denklem yaşayanların sayısını daha açık bir şekilde ifade eder? Problemle ilişkili olan klasik diferansiyel denklem toplamsal değişim oranı y fonksiyonuna bağlı zor (komplike) bir fonksiyona bağlıdır. Ancak her iki diferansiyel denklemin sol tarafı aynı oranı belirtmektedir. Bu durumda (3.6) fonksiyonunun matematiksel formülasyonu çarpımsal olarak kolay bir şekilde ifade edilebilir.

3.3.5. Örnek: Klasik türevin çarpımsal türevler ile ifadesini gösteren

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}f^{(k)}(x)\left(\ln\circ f^{*(n-k)}\right)(x) \qquad (3.7)$$

formülünü ele alalım. Klasik diferansiyel denklemler, çözümün pozitif olduğu varsayımı ile (3.7) formülü kullanılarak çarpımsal diferansiyel denklemlere dönüştürülebilir. Gerçekten birinci mertebeden pekçok doğrusal olmayan klasik diferansiyel denklemler, çözümün pozitif olduğu varsayımı ile kolayca çarpımsal diferansiyel denklemlere dönüştürülebilir. Böylece bu denklemlerin çözümleri de çarpımsal anlamda bulunabilir. Örneğin, Bernoulli denklemini

$$y'(x)-p(x)y(x)=-q(x)y^{n}(x),\; n=2,3,\ldots. \qquad (3.8)$$

inceleyelim. Bu denklemin çözümünün pozitif olduğunu varsayalım. Böylece (3.7) formülünden

$$\left(\ln\circ y^{*}\right)(x)=p(x)-q(x)\,y^{n-1}(x) \tag{3.9}$$

çarpımsal diferansiyel denklemi bulunur. (3.9) çarpımsal denklemi (3.8) klasik denkleminin farklı bir ifadesidir. (3.9) denkleminden

$$y^{*}(x)=e^{p(x)-q(x)y^{n-1}(x)}$$

elde edilir. Bu durumda, (3.8) Bernoulli denklemi çarpımsal anlamda çözülebilir. Bundan sonra,

$$y(x)={*}\int\left(e^{p(x)}\right)^{dx}\cdot z(x),$$

dönüşümü kullanılarak

$$z^{*}(x)=e^{-q(x)\left[{*}\int\left(e^{p(x)}\right)^{dx}\cdot z(x)\right]^{n-1}}$$

elde edilir. Buradan

$$\left[z^{*}(x)\right]^{\frac{-1}{z(x)^{n-1}}}=e^{q(x)\left[{*}\int\left(e^{p(x)}\right)^{dx}\right]^{n-1}}$$

bulunur. Buradan

$$\left[e^{\frac{1}{(n-1)z(x)^{n-1}}} \right]^{*} = e^{q(x)\left[*\int \left(e^{p(x)} \right)^{dx} \right]^{n-1}}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak,

$$z(x) = \left[\frac{1}{(n-1)\ln\left(c \cdot *\int \left(e^{q(x)\left[*\int \left(e^{p(x)} \right)^{dx} \right]^{n-1}} \right)^{dx} \right)} \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

olur. Burada c bir sabittir. Böylece,

$$y(x) = \left[\frac{\left[*\int \left(e^{p(x)} \right)^{dx} \right]^{n-1}}{(n-1)\ln\left(c \cdot *\int \left(e^{q(x)\left[*\int \left(e^{p(x)} \right)^{dx} \right]^{n-1}} \right)^{dx} \right)} \right]^{\frac{1}{n-1}} . \quad (3.10)$$

çözümüne ulaşılabilir.

Bu durumda, *-integral klasik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin açıklaması için çok önemli bir uygulamadır. Gerçekten de (3.8) klasik diferansiyel denkleminin çözümünü bulmak, klasik anlamda belli bir dönüşüm kullanmadan kolay değildir. Diğer yandan (3.7) formülü ile sadece

türevin özellikleri kullanılarak, (3.8) klasik diferansiyel denkleminin çarpımsal anlamda çözümünü bulmak zor değildir.
Çözümünün pozitif olduğu varsayılarak

$$y'(x)+y(x)=xy^3(x)$$

şeklindeki Bernoulli diferansiyel denklemini ele alalım. Burada $n=3$ olur. Burada Bernoulli denkleminin çözümünü bulabilmek için (3.10) denklemini kullanabiliriz. Buradan, $p(x)=-1$, $q(x)=-x$ ve c, keyfi bir sabit olsun. Böylece

$$y(x)=\left[\frac{\left[*\int\left(e^{-1}\right)^{dx}\right]^2}{2\ln\left(e^{\frac{c}{2}}\cdot *\int\left(e^{-x\left[*\int\left(e^{-1}\right)^{dx}\right]^2}\right)^{dx}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

yazılabilir. Buradan

$$*\int\left(e^{-1}\right)^{dx}=e^{-x}$$

ve

$$*\int\left(e^{-xe^{-2x}}\right)^{dx}=e^{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{-2x}}$$

düşünülürse,

$$y(x)=\sqrt{\frac{1}{ce^{2x}+x+1/2}}$$

çözüm fonksiyonu elde edilir.

4. ÇARPIMSAL ANALİZDE BAZI NÜMERİK SONUÇLAR

Çarpımsal analiz birçok matematik dalında olduğu gibi, sayısal analiz dalında da etkin bir şekilde kullanılabilir. Özellikle çarpımsal Taylor teoreminin ortaya konulmasından sonra, temelini bu teoremin oluşturduğu birçok sayısal yöntemler geliştirilebilir ve bu çarpımsal yöntemler klasik yöntemlere göre daha iyi sonuçlar verebilir. Örnek olarak bu bölümde ortaya konulacak çarpımsal interpolasyon yöntemleri birçok problemde klasik yöntemlere göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Böylece bu yaklaşımlar klasik metotlara alternatif olarak düşünülebilmektedir.

Çarpımsal diferansiyel denklemlerin matematiksel modellemede etkin bir şekilde kullanılabileceği düşünülürse, bu denklemlerin çözümleri oldukça önem kazanır. Bu nedenle çarpımsal diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerine yönelik çarpımsal yöntemler geliştirilebilir. Bu bölümde klasik sonlu fark yöntemi göz önünde bulundurularak, çarpımsal diferansiyel denklemler için çarpımsal sonlu fark yöntemi geliştirilecektir. Bu yöntem, özellikle analitik çözümü bulunamayan ve bulunması zor olan birçok çarpımsal diferansiyel denklemin sayısal çözümünde hızlı ve etkin bir şekilde kullanılacaktır.

4.1. Çarpımsal Üstel İnterpolasyon

Çarpımsal Taylor teoremi kullanılarak pekçok fonksiyon çarpımsal türev içeren sonsuz çarpım ile gösterilebilir. Buradan yola çıkarak, fonksiyonlar için üstel yaklaşımlar elde etme fikri oluşabilir. Örnek olarak uygun tabanlı üstel fonksiyonlar kullanılarak ara değerler hesaplanabilir. Nümerik analizde yaygın olarak kullanılan interpolasyon (ara değer hesaplama) ve yaklaştırma yöntemleri, polinom, rasyonel fonksiyon, trigonometrik veya üstel fonksiyon yöntemleri kullanılarak uygulanabilir. Bu bölümde uygun problemler için farklı bir bakış açısı sunacak üstel fonksiyon yöntemleri geliştirilecektir. Üstel fonksiyonlar kullanıldığından, bu yöntemler sadece pozitif fonksiyonlar üzerinden uygulanabilirler. Ancak bu dezavantaj, üstel fonksiyonların birçok uygulamada daha iyi sonuçlar vermesiyle dengelenebilir. Özellikle uygulamada ele alınacak değerler bir üstel fonksiyon ile ilgili ise üstel yaklaşım yöntemleri çok iyi yaklaşımlar verecektir.

4.1.1 Çarpımsal Lagrange Yöntemi

Eğer $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ ve $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ gibi iki veri noktasını ele alırsak, bu iki nokta üzerinden geçen $E_1\left(x\right)$ üstel fonksiyonu

$$E_1\left(x\right)=\left[f\left(x_0\right)\right]^{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}}\cdot\left[f\left(x_1\right)\right]^{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}$$

şeklinde tanımlanabilir. Böylece, $x=x_0$ olduğunda $E_1\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$ eşitliği ile $x=x_1$ olduğunda $E_1\left(x_1\right)=f\left(x_1\right)$ eşitliği sağlanmış olur. Genel olarak, $\left(n+1\right)$ veri noktası

$$\left(x_0, f\left(x_0\right)\right),\left(x_1, f\left(x_1\right)\right),\ldots,\left(x_n, f\left(x_n\right)\right)$$

şeklinde verildiğinde, çarpımsal Lagrange interpolasyon fonksiyonu

$$E_n(x) = \left[f(x_0) \right]^{L_{n,0}(x)} \cdot \ \cdots \ \cdot \left[f(x_n) \right]^{L_{n,n}(x)} = \prod_{k=0}^{n} \left[f(x_k) \right]^{L_{n,k}(x)}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada her bir $k = 0,1,\ldots,n$ için

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

olarak hesaplanır.

İnterpolasyon için kullanılan sayısal değerler üstel bir fonksiyon ifade edecek biçimde değişiyor ise çarpımsal Lagrange yöntemi, Lagrange interpolasyon yöntemine göre çok daha hızlı yakınsar. Bunun yanında ardışık düğüm noktaları arasındaki farkın daha büyük olduğu durumlarda da çarpımsal Lagrange yöntemi çok daha iyi sonuçlar verir.

f , $[a,b]$ aralığında $(n+1)$ kez çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise çarpımsal Lagrange yöntemi için hata formülü

$$E(x) = \left[f^{*(n+1)}(\xi) \right]^{\prod_{i=0}^{n} \frac{(x_i - x_k)}{(n+1)!}} \tag{4.1}$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada $a < \xi < b$ olur.

Gerçekten f, a^x gibi bir üstel fonksiyon olduğunda, (4.1) hata formülü bire eşit olur. Böylece, çarpımsal Lagrange yöntemi sayısal yaklaşımı yapılan değerin kendisini verir.

Bundan sonra klasik Lagrange yöntemi ile çarpımsal Lagrange yönteminin karşılaştırılacağı bir örnek verelim.

4.1.1. Örnek: $f\left(x\right)=x^{x}$ fonksiyonunun $x=0.75$ noktasındaki değeri için klasik ve çarpımsal interpolasyon yöntemleri düşünülsün. Böylece ondalık kısmın ilk beş rakamı düşünülerek $f\left(x\right)=0.80593$ değeri elde edilmeye çalışılacaktır. Bundan sonra $x_0=0.5,\ x_1=1.0$ ve $x_2=1.5$ olacak şekilde üç veri seçilirse, verilen fonksiyonun değerleri sıra ile

$$f\left(x_0\right)\cong 0.70710 \quad f\left(x_1\right)\cong 1.00000 \quad f\left(x_2\right)\cong 1.83711$$

şeklinde hesaplanır. Buradan

$$L_1\left(0.75\right)=0.70710\times 0.5+1.00000\times 0.5=0.85355$$

olarak birinci mertebe klasik Lagrange polinom değeri hesaplanabilir. Diğer yandan

$$E_1\left(0.75\right)=\left(0.70710\right)^{0.5}\times\left(1.00000\right)^{0.5}\cong 0.84089$$

olarak birinci mertebe çarpımsal Lagrange üstel değeri hesaplanabilir. İkinci Lagrange polinom değeri ise

$$L_2\left(0.75\right)=0.70710\times 0.375+1.00000\times 0.75\text{-}1.83711\times 0.125=0.78552$$

olarak bulunabilir. Bunun yanında, ikinci mertebe çarpımsal Lagrange üstel değeri de

$$L_2\left(0.75\right)=\left(0.70710\right)^{0.375}\times\left(1.00000\right)^{0.75}\times\left(1.83711\right)^{-0.125}\cong 0.81383$$

şeklinde elde edilir. Bu problem için çarpımsal Lagrange yönteminin daha iyi sonuç verdiği kolayca görülebilir. Sonuç olarak bu gibi birçok problemde gerekli çarpımsal anlamda gerekli sayısal yöntemler geliştirilerek daha iyi sonuçlar elde edilebilir.

4.1.2. Çarpımsal Sonlu Bölüm Analizi

Veri noktalarının eşit aralıklı olduğu durumda üstel interpolasyon fonksiyonlarını elde etmek için sonlu bölüme dayalı formüller kullanılabilir. Burada üstel fonksiyonların nasıl elde edileceği gösterilecektir. Öncelikle ileri bölüm operatörü Δ^*

$$\Delta^* f_i = \left(f_{i+1} / f_i \right)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $i = 0,1,2,\ldots$ ve $f_i = f\left(x_i\right)$ olarak alınır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \Delta^{*(2)} f_i &= \Delta^* \left(\Delta^* f_i \right) = \left(f_{i+2} \cdot f_i \right) / \left(f_{i+1} \right)^2 , \\ &\vdots \\ \Delta^{*(n)} f_i &= \Delta^* \left(\Delta^{*(n-1)} f_i \right), \quad i = 0,1,2,\ldots. \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Δ^* ileri bölüm operatörünün tanımından aşağıdaki özellikler kolayca gösterilebilir.

4.1.2. Önerme: f ve g iki fonksiyon olsun. Bölüm operatörü Δ^*

1) $\Delta^* \left(\left(c_1 f_i \right) \cdot \left(c_2 g_i \right) \right) = \Delta^* f_i \cdot \Delta^* g_i ,$

2) $\Delta^* \left(\dfrac{c_1 f_i}{c_2 g_i} \right) = \dfrac{\Delta^* f_i}{\Delta^* g_i} ,$

3) Eğer f bir sabit fonksiyon ise $\Delta^* f_i = 1$,

4) Bir kuvvet fonksiyonunun bölümü $\Delta^* \left(c_1{}^x\right)_i = c_1{}^{x_{i+1}-x_i}$

özelliklerini sağlar.

Bunun yanında, bölüm operatörleri, bazı ara değerler kullanılarak aynı mertebeden çarpımsal türev ile ifade edilebilir. Örnek olarak,

$$\Delta^* f(x) = f(x+h)/f(x) = \left[f^*(\xi)\right]^h$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $x < \xi < x+h$ ve $h > 0$ olur. Benzer olarak,

$$\Delta^{*(2)} f(x) = \left[f^{*(2)}(\xi)\right]^{h^2}$$

şeklinde yazılabilir ve $x < \xi < x+2h$ alınır. En üst mertebeden sonlu bölümün gösterimi ise

$$\Delta^{*(n)} f(x) = \left[f^{*(n)}(\xi)\right]^{h^n} \tag{4.2}$$

olarak elde edilir. Burada $x < \xi < x+nh$ alınır.

4.1.3. Teorem:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

n .dereceden bir polinom olsun. Böylece

$$\Delta^{*(n)} f(x) = \left[b^{P_n(x)}\right] = b^{n! \cdot a_n \cdot h^n}$$

şeklinde bulunur. Burada $b > 0$ olarak alınır. Sonuç olarak

$$\Delta^{*(n+1)}\left[b^{P_n(x)}\right]=1$$

elde edilir.

İspat: (4.2) bağıntısı ile $\left[b^{P_n(x)}\right]^{*(n)}=e^{n!\cdot a_n}$ kullanılarak ispat kolayca yapılabilir.

h adım uzunluğu ile eşit olarak bölünmüş $x_0, x_1, \ldots, x_n$ veri noktaları aracılığı ile $f(x)$ fonksiyonunun değerleri ileri bölüm operatörlerine bağlı üstel interpolasyon yaklaşımı ile

$$E_n(x)=\exp\left[\ln f_0+\binom{s}{1}\ln\left(\Delta^{*}f_0\right)+\binom{s}{2}\ln\left(\Delta^{*(2)}f_0\right)+\cdots+\binom{s}{n}\ln\left(\Delta^{*(n)}f_0\right)\right], \qquad (4.3)$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $f_0=f(x_0)$ ve $s=(x-x_0)/h$ ile ifade edilir ve her bir pozitif k tamsayısı için $\binom{s}{k}=\dfrac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{s!}$ olarak tanımlanır.

(4.3) formülünden, $(n+1)$. terim

$$\binom{s}{n+1}\Delta^{*(n+1)}f_0 \qquad (4.4)$$

olarak hesaplanır ve sonuç olarak (4.3) ara değer yaklaşımı için hata formülü

$$E(x)=\left[f^{*(n+1)}(\xi)\right]^{\binom{s}{n+1}h^{n+1}}$$

olacak şeklinde (4.2) bağıntısı kullanılarak (4.4)'ten elde edilebilir. Burada $h > 0$ ve $x < \xi < x + (n+1)h$ olarak alınır.

Eğer Δ^* ileri bölüm operatörüne benzer olarak ∇^* geri bölüm operatörü

$$\nabla^* f_{i+1} = f_{i+1} / f_i, \qquad i = 0,1,\ldots$$

şeklinde tanımlanır ve $x_{-n},\ldots,x_{-1},x_0$ veri noktaları indisleri $-n$'den 0'a gidecek biçimde sıralanırsa, geri bölüm operatörüne bağlı üstel interpolasyon yaklaşımı

$$E_n(x) = \exp\left[\ln f_0 + \binom{s}{1}\ln\left(\nabla^* f_0\right) + \cdots + \binom{s+n-1}{n}\ln\left(\nabla^{*(n)} f_0\right)\right] \tag{4.5}$$

olarak yazılabilir. Burada $f_0 = f(x_0)$ ve $s = (x - x_0)/h$ ile ifade edilir ve her bir pozitif i ve j tamsayıları için

$$\binom{s+j}{i} = \frac{(s+j)\left((s+j)-1\right)\cdots\cdots s \cdots\cdots\left((s+j)-(i-1)\right)}{i!}$$

olarak tanımlanır.

İleri bölüm interpolasyon yaklaşımına benzer şekilde, geri bölüm interpolasyon hata formülü

$$E(x)=\left[f^{*(n+1)}(\xi)\right]^{\binom{s+n}{n+1}h^{n+1}}$$

olarak bulunabilir.

4.2. Çarpımsal Kuvvet-Bölüm Formülü

$f(x)$ fonksiyonunun, x'in $(n+1)$ tane değeri olan $x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktalarındaki değerlerinin verildiğini varsayalım ve

$$f\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}\right]=\left[f\left(x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}\right)/f\left(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}\right)\right]^{\frac{1}{x_{i+j}-x_i}} \tag{4.6}$$

rekürsif formülünü düşünelim. Buradan da

$$g^*_{ij} = f\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}\right]$$

rekürsif formülünü ele alabiliriz. Burada i ve j pozitif tamsayılar ve $g^*_{00} = f(x_0)$ kabul edilmiştir. Örnek olarak, x_0, x_1, x_2 için

x	f	g^*_{01}	g^*_{02}
x_0	$\underline{f(x_0)}$		
		$\underline{f(x_0, x_1)}$	
x_1	$f(x_1)$		$\underline{f(x_0, x_1, x_2)}$
		$f(x_1, x_2)$	
x_2	$f(x_2)$		

değerleri elde edilebilir. Burada her bir $i = 0,1$ için

$$f\left(x_i, x_{i+1}\right) = \left[f\left(x_{i+1}\right) / f\left(x_i\right) \right]^{1/\left(x_{i+1} - x_i\right)}$$

ve

$$f\left(x_0, x_1, x_2\right) = \left[f\left(x_1, x_2\right) / f\left(x_0, x_1\right) \right]^{1/\left(x_2 - x_0\right)}$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç olarak, g^*_{ij} ’ye bağlı üstel interpolasyon yaklaşımı

$$E_n\left(x\right) = \left[\prod_{i=0}^{n} g^*_{0i} \right]^{\prod_{j=0}^{i-1}\left(x - x_j\right)} \tag{4.7}$$

olarak elde edilebilir. (4.7) formülü aslında (4.6) formülüne bağlıdır ve (4.6) formülü ile çarpımsal türev arasında bir ilişki vardır. Şimdi bu ilşkiyi gösteren teoremi görelim.

4.2.1. Teorem: f , $\left(a,b\right)$ aralığında n kez çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları $\left[a,b\right]$aralığında ayrık noktalar olsun. Buradan

$$f\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right) = \left[f^{*(n)}\left(\xi\right) \right]^{1/n!} \tag{4.8}$$

olacak şekilde tek bir $\xi \in \left(a,b\right)$ noktası vardır.

İspat: (4.1) ve (4.7) formülleri birleştirilerek kolayca (4.8) bağıntısını elde edilebilir.

Şimdi (4.7) formülü kullanılarak bazı ara değer yaklaşımları hesaplansın.

4.2.2. Örnek: $f(x)=x^3+x^2+x+1$ fonksiyonu ele alınsın. Buradan $f(1)=4,\ f(2)=15,\ f(3)=40$ verileri için (4.3) ve (4.7) formülleri kullanılarak f fonksiyonunun $x=1.5$ noktasındaki ara değer yaklaşımı hesaplansın. Böylece

$$\Delta^* f_0 = 3.75 \quad \text{ve} \quad \Delta^{*(2)} f_0 = 0.7111\ldots$$

değerleri kolayca bulunnabilir ve (4.3) formülünden

$$E_2(x)=\exp\left[\ln 4+\binom{x-1}{1}\ln(3.75)+\binom{x-1}{2}\ln(0.7111)\right]$$

üstel yaklaşımı elde edilir. Buradan $f(1.5)\cong E_2(1.5)=8.0832\ldots$şeklinde yaklaştırılabilir. Diğer yandan,

$$g^*_{01}=3.75 \quad \text{ile} \quad g^*_{02}=0.8432\ldots$$

değerleri hesaplanırsa, (4.7) fomülünden

$$E_2(x)=4\times(3.75)^{(x-1)}\times(0.8432)^{(x-1)(x-2)}.$$

üstel yaklaşımı bulunabilir. Buradan $f(1.5)\cong E_2(1.5)=8.0833\ldots$ olarak yaklaştırılabilir. Klasik "Newton ve Bölünmüş Fark Polinom Yöntemleri" (Kincaid and Cheney, 1990) kullanılarak $f(1.5)$

$$f(1.5)\cong P(1.5)=7.75$$

olarak yaklaştırılabilir. İstenen noktanın gerçek değeri $f(1.5)=8.125$ olarak bulunabilir. Böylece elde edilen verilere göre klasik polinom yöntemleri istenen noktayı interpole etmek için çok uygun değildir. Diğer yandan, foksiyon bir polinom olmasına rağmen üstel yaklaşım yöntemleri beklenmedik bir şekilde daha iyi yaklaşımlar vermektedir. Ancak bu durum her zaman doğru olmayabilir. Daha önce belirtildiği gibi ardışık değerler arasında daha büyük farkların olduğu birçok sayısal problemde üstel yaklaşımlar daha iyi sonuç vermektedir.

4.3. Çarpımsal Sonlu Fark Yöntemi

Çarpımsal analizin geliştirilmesinden sonra, bilim ve mühendislikteki birçok problemin matematiksel modellemesinde çarpımsal diferansiyel denklemlerin kullanılabileceği sonucuna kolayca ulaşılabilir. Gerçekten de çarpımsal analiz kullanılarak büyüme oranları ile ilgili problemlerin daha etkin bir biçimde ifade edilebileceği gösterilmiştir (Bashirov et all 2008). Çarpımsal diferansiyel denklemlerin kullanılmasından sonra, bu denklemlerin analitik çözümlerini bulmak önemlidir. Ancak çarpımsal diferansiyel denklemlerin her zaman analitik çözümlerinin elde edilemeyeceği düşünülürse, bu denklemlerin sayısal çözümlerine yönelik bazı yöntemler geliştirilebilir.

Klasik diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde olduğu gibi, çarpımsal diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde de çarpımsal sonlu fark yöntemi geliştirilip kullanılabilir. Çarpımsal Taylor teoremi çarpımsal sonlu fark yöntemi için önemli bir başlangıçtır. 2.6.2. teoreminden *çarpımsal Taylor teoremi* kolayca verilebilir.

4.3.1. Teorem: f, (a,b) aralığında $(n+1)$ defa çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $x_0 \in [a,b]$ olduğunu varsayalım. O halde

$$f(x) = f(x_0) \bullet \prod_{k=1}^{n} \left(f^{*(k)}(x_0) \right)^{\frac{(x-x_0)^k}{k!}} \bullet \left(\left(f^{*(n+1)}(x_1) \right)^{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}} \right)$$

olacak şekilde $[a,b]$ aralığında tüm x değerleri için $x \neq x_0$ olacak şekilde x ve x_0 arasında tek bir x_1 noktası vardır.

$f(x+h)$ fonksiyonun çarpımsal Taylor Açılımı

$$f(x+h) = \prod_{n=0}^{\infty} \left[f^{*(n)}(x) \right]^{\frac{h^n}{n!}} \tag{4.9}$$

olarak verilebilir. (4.9) açılımından ileri(+) ve geri(-) açılımların ilk dört terimi sırasıyla

$$f(x+h) = f(x)\left[f^{*}(t) \right]^{h} \left[f^{**}(t) \right]^{\frac{h^2}{2}} \left[f^{*(3)}(t) \right]^{\frac{h^3}{3!}} \cdot \ldots \tag{4.10}$$

ve

$$f(x-h) = f(x)\left[f^{*}(t) \right]^{-h} \left[f^{**}(t) \right]^{\frac{h^2}{2}} \left[f^{*(3)}(t) \right]^{-\frac{h^3}{3!}} \cdot \ldots \tag{4.11}$$

olur.

Birinci mertebeden türevin yaklaşımı, ileri açılımın geri açılıma bölünmesiyle elde edilebilir. Böylece birinci mertebe türev için yaklaşım

$$f^{*}(x) = \left(\frac{f(x+h)}{f(x-h)} \right)^{\frac{1}{h}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[f^{*(2n+1)}(x) \right]^{-\frac{2h^{2n}}{(2n+1)!}} \tag{4.12}$$

şeklinde bulunur.

Benzer olarak ileri ve geri fark terimlerini çarparak ikinci mertebe çarpımsal türev yaklaşımı

$$f^{**}(x)=\left(\frac{f(x+h)\,f(x-h)}{f(x)^2}\right)^{\frac{1}{h^2}}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left[f^{*(2n+2)}(x)\right]^{-\frac{2h^{2n}}{(2n+2)!}} \qquad (4.13)$$

elde edilir.

(4.12) ve (4.13)'ün kalan terimleri çıkartılarak

$$f^{**}(x)=g\left(x,f,f^{*}\right),\ f(a)=\alpha \text{ ve } f(b)=\beta \qquad (4.14)$$

ikinci mertebe çarpımsal diferansiyel denklemi için çarpımsal sonlu fark yöntemi elde edilebilir.

$\left[a,b\right]$ aralığı $a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}=b$ noktaları ile bölünsün. Bölünmenin eşit aralıklar halinde yapılması zorunlu değildir. Ancak noktalar kolaylık için

$$x_i=a+ih$$

şeklinde eşit aralıklarla seçilebilir. Burada $0\le i\le n+1$ ve $h=\dfrac{b-a}{n+1}$ alınır.

Böylece (4.12) ve (4.13) yaklaşımlarının kalan terimleri çıkarılarak, (4.14) diferansiyel denklemi

$$\left[\frac{f_{i+1}f_{i-1}}{f_i^2}\right]^{\frac{1}{h^2}}=g\left[x_i,\,f_i,\left(\frac{f_{i+1}}{f_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2h}}\right] \qquad (4.15)$$

ve

$$f_0 = \alpha \text{ ve } f_{n+1} = \beta \tag{4.16}$$

olarak yazılabilir. (4.15) denklemi her iki tarafın doğal logaritması alınarak

$$\frac{1}{h^2}\left[k_{i+1} + k_{i-1} - 2k_i\right] = \phi\left[x_i, k_i, \frac{1}{2h}\left(k_{i+1} - k_{i-1}\right)\right]$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (4.16) sınır değerleri $k_0 = \ln\alpha$ ve $\mathrm{k}_{n+1} = \ln\beta$ olarak alınır. Ayrıca, $0 \le i \le n+1$ olacak şekilde $k_i = \ln f_i$

ve

$$\phi\left[x_i, k_i, \frac{1}{2h}\left(k_{i+1} - k_{i-1}\right)\right] = \ln\left[g\left(x_i, f_i, \left(\frac{f_{i+1}}{f_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2h}}\right)\right]$$

elde edilir.

Eğer birinci mertebe türev için hata yaklaşımı (4.12) yaklaşımında kalan terimlerin en düşük mertebeden türev içeren terimi olarak düşünülür ise, hata yaklaşımı

$$E\left(f^*(x)\right) \approx \left(\left|f^{*(3)}(x)\right|^*\right)^{\frac{-h^2}{3!}}$$

şeklinde verilebilir. Benzer şekilde ikinci mertebe türev için hata yaklaşımı

$$E\left(f^{**}(x)\right) \approx \left(\left|f^{*(4)}(x)\right|^*\right)^{-\frac{h^2}{12}}$$

olarak elde edilebilir. Burada $|\ .\ |^*$ çarpımsal mutlak değer fonksiyonudur.

Daha önce ifade edildiği gibi $f(x)$ pozitif bir fonksiyon olmalıdır. Böylece $f(x)$ fonksiyonunun üstel bir foksiyon olması mümkündür. $\exp(\exp(x))$ fonksiyonunun çarpımsal türeve göre sabit olduğu düşünülerek, sistemi basitleştirmede $f(x)=\exp(\exp(x))$ olarak tahmin edilebilir. Böylece çarpımsal türev ile klasik türev arasındaki ilşki göz önünde bulundurularak, f 'in çarpımsal türevleri kolayca

$$f^{*(n)}(x)=\exp\left\{\left(\ln\circ\exp(y(x))\right)^{(n)}(x)\right\}=\exp(y(x))^{(n)}.$$

olarak y'nin klasik türevleri şeklinde yazılabilir.

Bu tahmine bağlı olarak $f^{*}(x)$ ve $f^{**}(x)$ için hata yaklaşımları sıra ile

$$E\left(f^{*}(x)\right)\approx\left(f^{*(3)}(x)\right)^{\frac{-h^2}{3!}}=\exp[\frac{-h^2}{3!}y'''(x)]$$

ve

$$E\left(f^{**}(x)\right)\approx\left(f^{*(4)}(x)\right)^{\frac{-h^2}{12}}=\exp[\frac{-h^2}{12}y^{(4)}(x)]$$

olarak yazıloabilir.

Böylece eğer $y(x)$, $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ şeklinde n. dereceden bir polinom ise ilk çarpımsal türev yaklaşımında $n<3$ için ve ikinci çarpımsal türev yaklaşımında $n<4$ için tam sonuç elde edilir.

Bundan sonra yeni geliştirilen sonlu fark yönteminin uygulamasına yönelik bazı örnekler yer alacaktır. Bu örneklerdeki sayısal değerler Mathematica™ kullanılarak elde edilmiştir.

4.3.2. Örnek: Başlangıç olarak en basit biçimdeki çarpımsal diferansiyel denklemler düşünülebilir. En basit birinci mertebe çarpımsal diferansiyel denklem $c \in \mathbb{R}^+$ bir pozitif sabit olacak şekilde $y^*(x) = c$ diferansiyel denklemi olarak gösterilebilir. Bu denklem $y(x) = c^x$ formunda bir çözüme sahiptir. Bunun yanında

$$y^{**}(x) = e \tag{4.17}$$

ikinci mertebeden en basit çarpımsal diferansiyel denklemlerden biridir.
Çarpımsal türev ve klasik türev arasındaki bağıntı kullanılarak ikinci mertebe çarpımsal türev

$$y^{**}(x) = \exp\left(\frac{y''(x)\,y(x) - \left(y'(x)\right)^2}{y(x)^2} \right) \tag{4.18}$$

şeklinde yazılabilir. (4.18) bağıntısı (4.17) denkleminde yerine koyularak her iki tarafın doğal logaritması alınırsa

$$y''(x) - \frac{\left(y'(x)\right)^2}{y(x)} - y(x) = 0$$

biçimindeki klasik diferansiyel denklemi elde etmiş oluruz.
Bu diferansiyel denklemin tam çözümü $\alpha > 0,\ \beta$ sabit değerleri için

$$y(x) = \alpha \exp\left\{ \frac{x^2}{2} + \beta x \right\}$$

şeklinde hesaplanır. Sınır şartları $y(1) = \exp(3/2)$ ve $y(2) = \exp(4)$ alınarak çarpımsal sonlu fark yaklaşımı kullanılsın. y_{app} çarpımsal sonlu fark yaklaşım değerlerini ifade eder ve adım uzunluğu üç olursa ($h = 0.25$), ilk yaklaşım

$$y_{app}\left(1.25\right) = 7.62360991$$

elde edilir. Tam sonuç $y\left(1.25\right) = 7.62360991$ olduğundan bağıl hata (%) 3.5×10^{-13} şeklinde bulunur. Diğer iki yaklaşım ise sıra ile

$$y_{app}\left(1.5\right) = 13.80457418$$

ve

$$y_{app}\left(1.75\right) = 26.60913187$$

olarak hesaplanır. Bu sonuçlar gerçek değerler ile karşılaştırıldığında bağıl hatalar (%) yaklaşık 10^{-13} olarak elde edilir.

Adım uzunluğu (*n=3*) küçük olmasına rağmen yöntemin sonuçları neredeyse tam(kesin) sonuçlara eşittir. Elde edilen bu değerler yukarıda verilen hata analizleri ile uyuşmaktadır. İkinci mertebe türev için hata analizi dördüncü mertebe türev ile daha yüksek mertebeden türevlere bağlıdır. Bu problemde ikinci mertebeden daha yüksek mertebelerde tüm çarpımsal türevler bire eşittir. Bu da tam sonucun elde edileceğini gösterir.

4.3.3. Örnek:

$$y^{**} = \left(y^{*}\right)^{x}$$

çarpımsal diferansiyel denklemi ele alalım. Bu denklemin analitik çözümü

$$y\left(x\right) = \exp\left\{c_1 + c_2 \operatorname{erfi}\left(x/\sqrt{2}\right)\right\}$$

şeklinde hesaplanır. Burada c_1 ve c_2 değerleri sabittir. y_{app} çarpımsal sonlu fark yaklaşım değerlerini ifade edecektir. Sınır koşulları

$$y(1) = \exp(1.15) \text{ ve } y(2) = \exp(2)$$

olarak kabul edildiğinde ($c_1 \cong 0.862583$ ve $c_2 \cong 0.301452$) farklı adım uzunluğuna göre çarpımsal diferansiyel denklemin sayısal yaklaşımını inceleyelim. $n = 3$ için ilk yaklaşım

$$y_{app}(1.25) = 3.53916717$$

olarak elde edilir. Tam sonuç $y(1.25) = 3.53733174$ olduğundan bağıl hata (%) 5.2×10^{-2} olarak bulunur. Son değer yaklaşımı ise

$$y_{app}(1.75) = 5.19205181$$

olarak bulunur. Tam sonuç $y(1.75) = 5.18508358$ olduğundan bağıl hata (%) 1.3×10^{-1} elde edilir. Şimdi adım uzunluğu artırılarak $n = 24$ alınsın. Örnek olarak $x = 1.04$ ve $x = 1.92$ değerleri için

$$y_{app}(1.04) = 3.20972793$$

ve

$$y_{app}(1.92) = 6.47829584$$

yaklaşık değerleri bulunur. Bu sonuçlar gerçek değerleri ile karşılaştırıldığında bağıl hatalar (%) sıra ile

$$2.0 \times 10^{-4}$$

ve

$$1.9 \times 10^{-3}$$

elde edilir.

Ayrıca sonuçların doğal logaritması

$$k'' = xk'$$

klasik diferansiyel denkleminin yaklaşık sayısal çözümünü verir.

4.4 Üstel Fonksiyon Yaklaşımı

Fonksiyon yaklaşımları (function approximation) uygulamalı matematiğin birçok dalında ve bilgisayar bilimlerinde oldukça sık kullanılır. Genel olarak, fonksiyon yaklaşımındaki temel amaç, yaklaştırılan fonksiyona en yakın (uygun) iyi tanımlı sınıf içinden bir fonksiyon seçmektir. Foksiyon yaklaştırma yöntemleri iki ana gruba ayrılabilir. İlk grupta fonksiyona ait değerler varken fonksiyonun kendisi bilinmemektedir. Bu durumda klasik ara değer bulma (interpolasyon) veya dış değer bulma (ekstrapolasyon) gibi yöntemler kullanılabilir. Bu yöntemlere alternatif olarak bölüm 4.1. ve bölüm 4.2.'de geliştirilen çarpımsal ara değer bulma (interpolasyon) yöntemlerinin kullanılabileceği gösterilmiştir. İkinci grupta ise kesin olarak bilinen fonksiyonlar, belirli fonksiyon sınıfları (polinom veya rasyonel fonksiyonlar gibi) ile yaklaştırılırlar. Burada kullanılacak fonksiyon sınıfının hesaplamadaki kolaylığı yanında ortaya çıkacak hatanın küçüklüğü de son derece önemlidir. Bu yüzden ilk akla gelen fonksiyon sınıfı polinomlardır. Ancak polinom yaklaştırılmasında genellikle hatanın küçük olması için yüksek mertebeden polinomlar kullanılabilir ve/veya fonksiyonların tanım kümesi bazı ölçek (scale) formülleri (logaritmik ölçek gibi) kullanılarak daraltılabilir. Bu gibi durumlarda üstel fonksiyonlar gibi alternatif fonksiyon sınıfları kullanılabilir.

Bu bölümde çarpımsal Taylor Teoreminden elde edilecek üstel fonksiyonlar kullanılarak bazı çarpımsal fonksiyon yaklaştırma yöntemleri gösterilecektir. Üstel fonksiyonlar kullanıldığı için bu yöntemler pozitif tanımlı fonksiyonlar üzerinde uygulanabilecektir. Sonuç olarak bu yöntemler hem benzer klasik yöntemlerin alternatifleri olacaklar hem de farklı çarpımsal yöntemlerin geliştirilmesine katkı sağlayacaklardır.

Çarpımsal Taylor teoreminin ilk iki terimi kullanılarak birinci mertebeden üstel fonksiyon yaklaşımı

$$E_1(x) = f(x_0)\left[f^*(x_0)\right]^{(x-x_0)}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde ikinci mertebe üstel fonksiyon yaklaşımı

$$E_2(x) = f(x_0)\left[f^*(x_0)\right]^{(x-x_0)}\left[f^{**}(x_0)\right]^{\frac{(x-x\ )^2}{2}}$$

$$= E_1(x_0)\left[f^{**}(x_0)\right]^{\frac{(x-x_0)^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Böylece n. mertebeden üstel fonksiyon yaklaşımı

$$E_n(x) = E_{n-1}(x_0)\left[f^{*(n)}(x_0)\right]^{\frac{(x-a)^n}{n!}} \tag{4.19}$$

olarak yazılabilir. Şimdi (4.19) yaklaşım formülünün uygulandığı bir problemi inceleyelim.

4.4.1. Örnek: $f(x) = xe^x$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ noktası için (4.19) formülü kullanılarak ilk iki üstel yaklaşım

$$E_1(x) = f(x_0)\left[e^{\frac{1}{x_0}+1}\right]^{(x-2)} = 2e^{\frac{3x}{2}-1}$$

ve

$$E_2(x) = E_1(x_0)\left[e^{-\frac{1}{x_0^2}}\right]^{\frac{(x-2)^2}{2!}} = 2e^{\frac{-x^2+16x-12}{8}}$$

olarak elde edilir. Örnek olarak $x = 2.01$ alarak verilen fonksiyon için bulunan yaklaşımdaki bağıl hatalar $E_1(x)$ için 1.2×10^{-5} ve $E_2(x)$ için 4×10^{-8} bulunur. Yöntemin özellikle bazı uçdeğer problemler için kullanılabileceğini göstermek için problemdeki fonksiyonun ne üstel ne de polinom olmamasına dikkat edilmiştir. Daha sonra üstel yaklaşımlar kullanılarak fonksiyon verilen nokta etrafında çok iyi hata oranlarıyla yaklaştırılmıştır. Sadece birinci ve ikinci mertebeden üstel yaklaşım kullanılmasına rağmen çok küçük hatalar elde edilmiştir.

Üstel fonksiyonlar ile hesaplama polinomlara göre daha zor gözükse de özellikle bilgisayarların matematiksel hesaplamada yaygın olarak kullanılması bu durumun önemini kaybettirmiştir. Ancak üstel fonksiyon yöntemlerinin birçok problem için daha az hesaplama yaparak daha iyi sonuçlar vermesi son derece önemlidir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında klasik analize alternatif olarak çarpımsal analiz kavramı geliştirilmiş ve çarpımsal analizin bazı temel kavramları ortaya konulmuştur. Uygulamalı bilim dallarında karşılaşılan bazı problemlerin klasik analiz ile ifade edilmesi zor ya da çözümünün elde edilmesi karmaşık olabilir. Bu tür problemlerin çarpımsal analiz kullanılarak daha kolay ve etkin bir şekilde nasıl kullanılabildiği örnekler ile gösterilmiştir. Çarpımsal türev tanımının bazı ekonomi ve finans problemlerinden verilebileceği göz önüne alınırsa, bu yeni analizin özellikle uygulamalı bilim dallarındaki önemi daha da artmaktadır. Ancak çarpımsal analizin tüm avantajları yanında bazı dezavantajları da vardır. Buna örnek olarak bu yeni analizin sadece pozitif değerler için kullanılabileceği gösterilebilir. Ancak çarpımsal analiz kavramı genişletilerek sadece pozitif değerler için değil daha geniş kümeler (kompleks sayılar gibi) için de tanımlanabilir ve genelleştirilebilir.

Sonuç olarak klasik analize alternatif olan ve birçok bilimsel problemin matematiksel çözümünde kolayca kullanılabilen ve büyük avantajlar sağlayan çarpımsal analiz ile ilgili temel kavramlar ortaya konulmuştur. Çarpımsal analiz uygulamalı bilim dallarında karşılaşılan birçok problemin matematiksel modellemesinde farklı bir bakış açısı sağlayacak ve çözümlerini de kolaylaştıracaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aniszewska, D., 2007. Multiplicative Runge-Kutta method. Nonlinear Dynamics 50, 265-272.

Bashirov, A.E., 2008.Misirli, E., Ozyapici, A., Multiplicative calculus and its applications. Journal of Mathematical Analysis and Its 337, No. 1, 36-48.

Boyce, W. E., DiPrima R. C., 1986, Elementary Differntial Equations and Boundary Value Problems. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Campbel, Duff , 1999."Multiplicative calculus and student projects", Primus, vol 9, issue 4.

Cordova-Lepe, F., 2006.The multiplicative derivative as a measure of elasticity in economics, TEMAT-Theaeteto Atheniensi Mathematica 2(3), online.

Cordova-Lepe, F. 2004."From quotient operation toward a proportional calculus", Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra.

Gompertz, B., 1825. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. Philosophical Transactions of the Royal Society of London,115, 513-585.

Grossman, M., Katz, R., 1972.Non-Newtonian Calculus. Pigeon Cove, Lee Press, Mass.

Grossman, M., 1983. Bigeometric Calculus: A System with a Scale-Free

Derivative. Archimedes Foundation, Rockport, Mass.

Kasprzak, W., Lysik, B., Rybaczuk, M., 2004.Dimensions, Invariants Models and Fractals. Ukrainian Society on Fracture Mechanics, SPOLOM, Wroclaw-Lviv, Poland.

Kincaid D. and Cheney W., 1990. Numerical Analysis, Brooks/Cole Publishing Company.

Meginniss, J.R., 1980.Non-Newtonian calculus applied to probability, utility, and Bayesian analysis, Manuscript of the report for delivery at the 20th KDKR-KSF Seminar on Bayesian Inference in Econometrics, Purdue University, West Lafayette, Indiana, May 2-3.

Ross, L. S., 1974. Differentia Equations, John Wiley & Sons, Inc. New York.

Rybaczuk, M., Kedzia A., Zielinski, W., 2001. The concepts of physical and fractional dimensions II. The di®erential calculus in dimensional spaces. Chaos Solutions Fractals 12, 2537-2552.

Shone, R., Economics Dynamics, 2002, University Press, Cambridge, United Kingdom.

Stanley, D., 1999. A multiplicative calculus..Primus IX, No. 4, 310-326.

Volkov, E.A., 1986. Numerical Methods, Mir Publishers, Moskow.

Volterra, V., Hostinsky, B., 1938. Operations Infinitesimales Lineares. Herman, Paris.

ÖZGEÇMİŞ

25/06/1982 yılında KKTC'nin Gazimağusa kazasında doğdu. İlköğrenimini Şehit Zeki İlkokulunda tamamladıktan sonra 1993 yılında Gazi Mağusa Türk Maarif Koleji'ni kazanıp öğrenimine altı yıl süre ile burada devam etti. Lise eğitiminin ardından 1999 yılında Doğu Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünde üniversite eğitimine başladı. Üniversite eğitimi tamamladıktan sonra 2003 yılında yine aynı bölümde yüksek lisans öğrenimine başladı. Yüksek lisansın ardından 2005 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde doktora eğitimi almaya hak kazandı.