İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CAUCHY PROBLEMİ İÇİN LYAPUNOV KARARLILIK, LAGRANGE KARARLILIK VE İKİ ÖLÇÜ CİNSİNDEN SINIRLILIK

Ufuk METİN
Matematik Anabilim Dalı

I. Danışman
Prof.Dr. Bedriye M. ZEREN
II. Danışman
Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR

İSTANBUL

Bu çalışma 15/07/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Tez Jürisi</u>

Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. İ. Müfit GİRESUNLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Erhan GÜZEL
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Fatma SENYÜCEL
M. S. G. S. Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI
Maltepe Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

ÖNSÖZ

Bu tezin ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından dolayı çok değerli danışmanlarım, Sayın Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN ve Sayın Yrd. Doç Dr. Coşkun YAKAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmam sırasında bana yardımcı olan eşim Pınar METİN'e ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen anne ve babama teşekkür ederim.

Temmuz, 2009 **Ufuk METİN**

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$(\boldsymbol{h_0}, \boldsymbol{h})$	: İki ölçü.
$\boldsymbol{R}$	: Reel sayı
$\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n$	: Pozitif reel sayılar kartezyen çarpım n-boyutlu reel değerli uzay
$\Vert . \Vert$	: R^n de Öklit Normu
$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}, .)$	: Lyapunov fonksiyonu
$\boldsymbol{D}^+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}, .)$	: V fonksiyonun Dini-Türevi
$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\rho})$	: ρ yarıçaplı h ölçülü açık yuvar
$\boldsymbol{S}^c(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\rho})$	: ρ yarıçaplı h ölçülü açık yuvarın tümleyeni

ÖZET

CAUCHY PROBLEMİ İÇİN LYAPUNOV KARARLILIK , LAGRANGE KARARLILIK VE İKİ ÖLÇÜ CİNSİNDEN SINIRLILIK

Bu tezde iki ölçü cinsinden Lyapunov kararlılığı ve uygulamaları, Lagrange kararlılık kriteri, iki ölçü cinsinden sınırlılık kriterleri ele alınıp bunlar için yeter koşullar kullanılarak bu konularla ilgili teoremler yapılıp uygulamaları ele alınmıştır. Lyapunov fonksiyonlar yardımıyla lineer olmayan denklem sistemlerini skaler diferansiyel denklemlere dönüştürüp bu denklemlerin karakteristiği ile orjinal denklemlerin karakteristiğinin birebir örtüştüğü gösterilmiştir.

SUMMARY

LYAPUNOV STABILITY, LAGRANGE STABILITY AND BOUNDEDNESS IN TERMS OF TWO MEASURES FOR CAUCHY PROBLEMS

In this thesis, applications of Lyapunov stability, Lagrange stability criteria and boundedness criteria in terms of two measures have been investigated and we have used sufficient conditions and constructed related theorems. Lyapunov functions have been used to find relation between the nonlinear systems of differential equation and scalar differential equation.

1. GİRİŞ

Lyapunov kararlılık kavramları, uygulamada önemli olan bazı yeni gelişmelere sebep olmuştur. Bu alanlardan bazıları kısmi kararlılık, koşullu kararlılık, ileride kararlılık ve sınırlılıktır. Bilinen kararlılık ve sınırlılık kavramlarını geliştirmek için iki farklı ölçü ve bu ölçülere dayalı bir kriter bulmak yeterlidir. Lyapunov fonksiyon kavramı, dinamik sistemlerin nitelik ve nicelik özellikleri araştırmalarının geniş bir yelpazesinde yıllardır başarıyla ele alınmaktadır.

Cauchy Başlangıç Değer Problemlerini ele alalım.

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), x(t_0) = x_0, t \geq t_0 \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = F(t,y), y(\tau_0) = y_0, t \geq \tau_0 \tag{1.2}$$

Burada $f, F \in C[R^+ \times R^n, R^n]$, f ve F fonksiyonları (1.1) ve (1.2) denklemlerinin $x(t) = x(t, t_0, x_0),\ t \geq t_0$ ve $y(t) = y(t, \tau_0,\ y_0),\ t \geq \tau_0$ çözümleri mevcut, tek ve başlangıç zaman pozisyonlarına göre sürekli bağımlılığı sağlayan yeterince düzgün birer fonksiyon olsunlar. $R \in C[R^+ \times R^n, R^n]$ olmak üzere; $F(t,y) = f(t,y) + R(t,y)$ biçiminde ifade edilirse

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) + R(t,y), y(\tau_0) = y_0, t \geq \tau_0.$$

olur. Burada (1.1) denklem sistemine saptırılmamış (unpurterbed) denklem, (1.2) denklemine de (1.1) denkleminin saptırılmış (purterbed) denklemi denir ve $R(t,y)$ terimine de saptırma (perturb) terimi denir [1].

Bu tezde (1.1) denkleminin çözümü için temel Lyapunov teori, karşılaştırma metodu, Karşıt teorem, Sınırlılık ve Lagrange Kararlılık kavramları incelenecek, ortaya çıkacak sonuçlar iki ölçü cinsinden genelleştirilecek ve bu sonuçlar kullanılarak,

(1.2) denkleminin başlangıç zaman farklı iki ölçü cinsinden sınırlılık kriterleri (1.1) denklemine bağlı olarak incelenecektir.

Bu çalışmada ilk olarak, literatürde ki bazı bilinen iki farklı ölçüye dayalı kararlılık kavramlarını tanımlıyoruz. İkinci olarak Lyapunov'un orijinal teoreminin sonuçlarını ele alacağız. Üçüncü olarak, genel karşılaştırma prensiplerini kullanarak elde ettiğimiz kararlılık kriterini, iki ölçü çerçevesinde elde edeceğiz. Dördüncü olarak, düzgün asimptotik kararlılığın karşıt teoremini, iki ölçü cinsinden Massera'nın iyi bilinen teoremine paralel olarak elde edeceğiz. Daha sonra sınırlılık ve Lagrange kararlılık kavramlarını inceleyeceğiz. Son olarak, iki ölçü cinsinden başlangıç zaman farklı sınırlılık ve genelleştirilmiş parametrelerin değişimi yöntemini, Lyapunov-tipli fonksiyonlarla birleştirerek bir değişimli karşılaştırma sonucu elde edip, sonuç bölümüyle çalışmayı bitireceğiz.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. İKİ ÖLÇÜ CİNSİNDEN LYAPUNOV KARARLILIK

2.1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Aşağıda verilen lineer olmayan diferansiyel denklem sistemini ele alalım.

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0\,, \quad t \geq t_0 \geq 0 \tag{2.1.1.1}$$

burada $f \in C[R_+ \times R^n, R^n]$ olmak üzere
f fonksiyonu (2.1.1.1) denkleminin $x(t) = (t, t_0, x_0\,)$ çözümünün varlığını, tekliğini ve sürekliliğini garanti altına alan yeterince düzgün bir fonksiyondur.

Şimdi aşağıda verilen fonksiyon sınıflarını ileride ki kullanımlar için tanımlayalım.

$\mathcal{K}$=$\{a \in C[R_+, R_+]$: $a(u)$, u'da kesin artan ve $a(0) = 0\}$

$\mathcal{L} = \{\sigma \in C[R_+, R_+]$: $\sigma(u)$, u'da kesin azalan ve $lim_{u\to\infty}\,\sigma(u) = 0\}$

$\mathcal{KL}$=$\{a \in C[R_+^2, R_+]$: $a(t,s) \in \mathcal{K}$, öyle ki $\forall\, t$ için, s ve $a(t,s) \in \mathcal{L}\}$

C$\mathcal{K}$=$\{a \in C[R_+^2, R_+]$: $\forall\, t$ için $a(t,s) \in \mathcal{K}\}$

Γ=$\{h \in C[R_+ \times R^n, R_+]$: $inf_{(t,x)}h(t,x) = 0\}$

Γ_0=$\{h \in \Gamma$: $inf_x h(t,x) = 0, \forall\, t$ için $t \in R_+\}$

Ayrıca (2.1.1.1) sistemi için çeşitli kararlılık kavramlarını iki ölçü cinsinden tanımlayalım.$\big((h_0, h) \in \Gamma$ olduğunda$\big)$

Tanım 2.1.1.1: (2.1.1.1) diferansiyel denklem sisteminden hareketle,

(S_1): $\forall\, \varepsilon > 0,\ t_0 \in R_+$ için $\delta=\delta(t_0, \varepsilon)$ t_0 da sürekli pozitif fonksiyonu vardır, öyle ki, her bir ε için, $h_0(t_0, x_0) < \delta$ olduğunda $h(t, x(t)) < \varepsilon,\ t \geq t_0$ olur. Buradan $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ (2.1.1.1) sisteminin herhangi bir çözümü iken (h_0, h)-eş-kararlıdır.

(S_2): Eğer (S_1)'deki $\delta,\ t_0$'dan bağımsız seçilebiliyorsa, $(h_0, h) -$ düzgün kararlıdır.

(S_3): $\forall$ ε > 0 için, ve $t_0 \in R_+$ iken $\delta_0 = \delta(t_0)$ ve $T = T(t_0, \varepsilon)$ olacak şekilde pozitif sabitler vardır, öyle ki $h_0(t_0, x_0) < \delta_0$ için $h(t, x(t)) <$ ε ve $t \geq t_0 + T$ oluyorsa (h_0, h)-eş-atraktifdir.

(S_4): (S_3) deki δ_0 ve T , t_0'dan bağımsız olduğunda (h_0, h)-düzgün atraktifdir.

(S_5): (S_1) ve (S_3) aynı anda sağlandığında (h_0, h)- eş-asimptotik kararlı olur.

(S_6): (S_2) ve (S_4) birbirlerini doğruluyorsa (h_0, h)- düzgün asimptotik kararlı olur.

(S_7): $\forall\ \varepsilon > 0, \alpha > 0$ *ve* $t_0 \in R_+$ için T=$T(t_0, \varepsilon, \alpha)$ olacak şekilde bir pozitif sayı vardır öyle ki, $h_0(t_0, x_0) < \alpha$, olduğunda $h(t, x(t)) < \varepsilon,\ t \geq t_0 + T$ ve (h_0, h)- daha büyük bir bölgede eş atraktif 'dir denir.

(S_8): (S_7)'deki T sabiti, t_0'dan bağımsız ise (h_0, h)- daha büyük bir bölgede düzgün eş-atraktif 'dir denir.

(S_9): (S_1) doğrulanmıyorsa, (h_0, h)-kararlı değildir.

Uyarı 2.1.1.1: Atraktiflik notasyonu (S_7) ve (S_8)'de ki kararlılık kavramlarında bazen evrensel bir karakter gösterebilir.(h_0, h) iki ölçüsünün bazı seçimlerinde Tanım 2.1.1.1' in genelliği gösterilebilir. Bunlara ek olarak (h_0, h) iki ölçüsü cinsinden yazılan kavramlar, literatürde çeşitli kararlılık notasyonlarını birleştirmemize olanak tanır.

Tanım 2.1.1.1' den kolaylıkla görülebileceği gibi,

(1) Eğer $h(t,x)= h_0(t,x) = \|x\|$, olarak tanımlanırsa, (2.1.1.1) sisteminin $x(t) = 0$ aşikar çözümünün iyi bilinen kararlılığı ya da buna eş anlamda çözüm, değişmez küme $\{0\}$ olur.

(2) Eğer $h(t,x) = h_0(t,x) = \|x - x_0(t)\|$, olursa (2.1.1.1) sisteminin $x_0(t)$ saptanmış hareketinin karalılığını verir.

(3) $h(t,x) = |x|_s$, $1 \leq s < n$ ve $h_0(t,x) = \|x\|$ olduğunda, (2.1.1.1)'in aşikar çözümünün kısmi karalılığını verir.

(4) Eğer $h(t,x) = h_0(t,x) = \|x\| + \sigma(t)$, $\sigma \in \mathcal{L}$ iken değişmez küme $\{0\}$ asimptotik kararlıdır.

(5) Eğer $h(t,x) = h_0(t,x) = d(x,A), A \subset R^n$, olmak üzere değişmez A kümesinin kararlılığını verir.

(6) Eğer $h(t,x) = d(x,B), h_0(t,x) = d(x,A)$ olduğunda, $A \subset B \subset R^n$, olmak üzere A' ya karşılık bulunabilecek, A' ya bağlı bir B kümesinin kararlılığını verir.

(7) Eğer $h_0(t,x) = \|x\| + d(x,M)$ olursa ($M\!: k -$ boyutlu, orjini de içeren manifolt), (2.1.1.1)'in aşikar çözümünün şartlı kararlılığını verir.

(8) Eğer $h(t,x) = h_0(t,x) = d(x,C)$ (C: faz uzayında kapalı yörünge), olursa (2.1.1.1)'in periyodik çözümünün yörüngesel karalılığını verir.

Sonuç olarak, $\{0\}$ kümesinin (2.1.1.1)'e asimptotik değişmez bağımlı olduğunu söyleriz.

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alındığında bir $\tau(\varepsilon) > 0$ bulabiliriz öyle ki $x_0 = 0$ olduğunda $t \geq t_0 \geq \tau(\varepsilon)$ için $\|x(t, t_0, 0)\| < \varepsilon$ olur.
Eğer verilen $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in R_+$ için, bir $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ vardır ki, $x_0 \in \{x: \|x\| < \delta\} \cap M$ olduğunda $x(t) \in \{x: \|x\| < \varepsilon\},\ t \geq t_0$ oluyorsa $x = 0$ şartlı- kararlı olur. (4)'te verilen notasyon şunu gösterir ; t_0 başlangıç zamanının R_+' nın bir alt kümesine kısıtlanması gereklidir. Bu ise ancak, $h_0\,(t_0, x_0) < \delta$ olduğunda mümkündür.

Benzer şekilde (7)'deki kavramı tanımlamak istersek, M manifoltunda olan bir x_0 başlangıç konumu seçilebilir öyle ki, $S(h_0,\ \delta)$=$\{x \in R^n: h_0 = \|x\| + d(x, M) < \delta\}$ iken $h_0\,(t_0, x_0) < \delta$ olduğunda $x_0 \in S(h_0,\ \delta) \cap M'$ dir.

(1) den (8)' e kadar verilen kavramların (h_0, h) için çeşitli kombinasyonları bulunabilir.

Tanım 2.1.1.2: $\boldsymbol{h_0}, h \in \boldsymbol{\Gamma}$ olmak üzere

(i) $\rho > 0$ ve $\varphi \in C\mathcal{K}$ fonksiyonu için
$h_0(t, x) < \rho$ olduğunda $h(t, x) \leq \varphi\big(t, h_0(t, x)\big)$ ise h_0, h'dan daha iyidir.
(ii) (i) de ki φ; t' den bağımsız ise h_0, h' dan düzgün olarak daha iyidir.
(iii) $\rho > 0$ ve $\varphi \in \mathcal{K}\,\mathcal{L}$ fonksiyonu için
$h_0(t, x) < \rho$ olduğunda $h(t, x) \leq \varphi\,(h_0(t, x), t)$ ise h_0, h' dan asimptotik olarak daha iyidir.

Tanım 2.1.1.3 : $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{C}[\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{R}_+^{\boldsymbol{N}}]$

$$\boldsymbol{N} \geq \mathbf{1}\,, \qquad \boldsymbol{V_o}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{V_i}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$$

V için söyleyebiliriz ki,

(i) $\rho > 0$ ve $b \in \mathcal{K}$ olacak şekilde bir fonksiyonu mevcut iken
$h(t, x) < \rho$ olduğunda $b\big(h(t, x)\big) \leq V_o(t, x)$ ise h fonksiyonuna pozitif tanımlıdır denir.

(ii) $\rho > 0$ ve $a \in \mathcal{K}$ olacak şekilde bir fonksiyon mevcut iken,
$h(t,x) < \rho$ olduğunda $V_0(t,x) \leq a(h(t,x))$ ise h azalandır.

(iii) $\rho > 0$ ve $a \in C\mathcal{K}$ olacak şekilde bir fonksiyon mevcut iken
$h(t,x) < \rho$ olduğunda $V_o(t,x) \leq a\big(t, h(t,x)\big)$ ise h-zayıf azalandır.
(iv) $\rho > 0$ ve $a \in \mathcal{KL}$ olacak şekilde bir fonksiyon mevcut iken
$h(t,x) < \rho$ olduğunda $V_o(t,x) \leq a(h(t,x),t)$ ise h- asimptotik azalandır.

Not: Tanım 2.1.1.3 de ölçü olarak;

$$V_o(t,x) = \sum_{i=1}^{N} V_i(t,x)'i$$

kullanmalıyız ve kullanıma uygun diğer ölçüler olarak;
$V_o(t,x) = \max_{1\leq i\leq N} V_i(t,x)$;

$$V_o(t,x) = \sum_{i=1}^{N} d_i V_i(t,x), d_i > 0, \ \ i = 1,2,\ldots,N$$

veya $Q \in C[R_+^N, \ R_+]$, $Q(u)$; u içinde azalmayan ve $Q(0) = 0$ olmak üzere
$V_o(t,x) = Q(V(t,x))$ biçiminde tanımlanırsa, $N = 1$ olduğunda
$V_o(t,x) = V(t,x)$ olduğu anlaşılır.

Herhangi bir *V* fonksiyonu için, $V \in \ C[R_+ \ \times \ R^n, \ R_+]$ olacak şekilde,

$$D^+ V(t,x) = \lim_{\delta\to o^+} sup \frac{1}{\delta} \left[V\big(t+\delta, x+\delta f(t,x)\big) - V(t,x)\right] \qquad (2.1.1.2)$$

$(t,x) \in \ R_+ \times R^n$ için fonksiyonu tanımlanabilir, (2.1.1.2)'deki $D^+V(t,x)$ Dini-türevi (2.1.1.1)' deki tanımı vurgular. Genelleştirilmiş türevler kullanılarak örneğin;

$$D\_V(t,x) = \lim_{\delta\to o^-} inf \frac{1}{\delta} \left[V\big(t+\delta, x+\delta f(t,x)\big) - V(t,x)\right] \qquad (2.1.1.3)$$

dır.Eğer burada, $V \in \ C^1[R_+ \ \times \ R^n, R_+ \ ]$ olduğu dikkate alınırsa, buradan
$D^+ V(t,x) = D\_V(t,x) = V'(t,x)$ olur ki, böylece
$V'(t,x) = \ V_t(t,x) + \ V_x(t,x) \ f(t,x)$ eşitliği sağlanır.

Farzedelim ki, (2.1.1.1)' in bir çözümü $x(t)$, $[t_o, \infty)$ aralığında var olsun ve $V(t,x)$ x'e göre yerel Lipschitz koşulunu sağlasın. $t \geq t_o$ verildiğinde $(t, x(t))$' nın U komşuluğunda olan ve öyle bir $L > 0$ vardır ki, $|V(\tau, \zeta) - V(\tau, \eta)| \leq L \, \|\zeta - \eta\|$, eşitsizliği $(\tau, \zeta), (\tau, \eta) \in U$ için sağlanır.

$\delta > 0$ yeterince küçük seçersek, $(t + \delta, \; x(t+\delta)) \in U$ ve $(t + \delta, x(t) + \delta f(t, x(t))) \in U$ olduğu görülür. Buradan ε; δ ile $0'$a yaklaşırken $V\big(t + \delta, \; x(t + \delta)\big) - V\big(t, x(t)\big) = V(t + \delta, x(t) + \delta f(t, x(t)) + \delta\varepsilon) - V(t, x(t)) \leq V(t + \delta, x(t) + \delta f(t, x(t))) + L\delta|\varepsilon| - V(t, x(t))$ olur. Bunu;

$\lim_{\delta \to o^+} sup \frac{1}{\delta} \, [V(t + \delta, x(t + \delta)) - V(t, x(t))] \leq \lim_{\delta \to o^+} sup \frac{1}{\delta} \, [V(t + \delta, x(t) + \delta f(t,x(t))) - V(t,x(t))$ izler. Diğer yandan elimizde,

$V(t + \delta, x(t + \delta)) - V(t, x(t)) \geq V(t + \delta, x(t) + \delta f(t, x(t))) - L\delta|\varepsilon| - V(t, x(t))$ eşitsizliği vardır ve buradan anlarız ki,

$\lim_{\delta \to o^+} sup \frac{1}{\delta} \, [V(t + \delta, x(t + \delta)) - V(t, x(t))] \geq \lim_{\delta \to o^+} sup \frac{1}{\delta} \, \big[V(t + \delta, x(t) + \delta f t,xt - V t,xt$,

olur. Böylece,

$$\lim_{\delta \to o^+} sup \frac{1}{\delta} \, [V(t + \delta, x(t + \delta)) - V(t, x(t))] = \lim_{\delta \to o^+} sup \frac{1}{\delta} \, \big[V(t + \delta, x(t) + \delta f t,xt) - V t,xt \qquad (2.1.1.4)$$

elde edebiliriz. Benzer şekilde gösterilebilir ki,

$$\lim_{\delta \to o^+} inf \frac{1}{\delta} \, [V(t + \delta, x(t + \delta)) - V(t, x(t))] = \lim_{\delta \to o^+} inf \frac{1}{\delta} \, \big[V(t + \delta, x(t) + \delta f(t, x(t))) - V\big(t, x(t)\big)\big] \qquad (2.1.1.5)$$

eşitliği sağlanır. Şuna da dikkat edecek olursak:

$V(t,x)$ fonksiyonu x'e göre yerel Lipschitz' i sağlamadığında $x(t)$ çözümü tek çözüm olsa bile yukarıda verilen bağıntılar sağlanmaz. Örneğin; $V = \sqrt{x}, \; x \geq 0$, fonksiyonunu düşünürsek $x' = 2t, \; t \geq 0$ olur. O zaman, $D^+V(0,0) = 0$ eşitliği açıkça görülebilir. Fakat $x(t) = t^2$ çözümü $(0, 0)$' dan geçmektedir. Bu yüzden

$\lim_{\delta \to o^+} sup \frac{1}{\delta} \, [V(\delta, x(\delta)) - V(0, 0)] = 1$ bulunur.

Lemma 2.1.1.1: $\boldsymbol{m(t)}$ fonksiyonu $\boldsymbol{(a,b)}$ aralığında sürekli olsun.

$\boldsymbol{m(t)}$, $\boldsymbol{(a,b)}$ aralığında azalmayan (artmayan) ancak ve ancak $\boldsymbol{D^{+}m(t) \geq 0 (\leq 0)}$,

$\forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{(a,b)}$ iken $\boldsymbol{D^{+}m(t)}=\boldsymbol{\lim_{\delta \to 0^{+}} sup \frac{1}{\delta}[m(t+\delta)-m(t)]}$ eşitliğinin sağlanması ile mümkündür.

İspat: Durumun gerekliliği açıktır, bunun yeterliliğini ispatlayalım.
Varsayalım ki, öncelikle (a,b) aralığında $D^{+}\ m(t)$ > 0 olsun. Eğer burada $\alpha,\beta\ \in (a,b)$, $\alpha < \beta$ olacak şekilde öyle iki nokta vardır ki $m(\alpha) > m(\beta)$ olur. Buradan da bir μ, $m(\alpha) > \mu > m(\beta)$ biçiminde tanımlansın ve $t \in [\alpha,\beta]$ olmak üzere $m(t) > \mu$ bulunabilsin.$\zeta = \ sup\{t;\ m(t) > \mu,\ \ t \in [\alpha,\beta]\}$
yukarıda ki tanımdan açıkça görülebilir ki, $\zeta \in (\alpha,\beta)$ ve $m(\zeta)= \mu$ dır.
Bu yüzden $\forall\ t\ \in (\ \zeta, \beta)$ için,

$$\frac{m(t)-m(\zeta)}{t-\zeta} < 0$$

ise D^{+} m(ζ)≤ 0 olur. Bu bir çelişkidir. Farz edelim ki, (a,b) aralığında $D^{+}\ m(t) \geq 0$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $D^{+}[m(t)+\ \varepsilon t]$ = $D^{+}\ m(t)+\ \varepsilon > 0$ elde edilir.
Bunun sonucu olarak, $(a,\ b)$ aralığında $m(t)$ + εt azalmayandır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m(t)$ azalmayandır. Benzer şekilde $m(t)$'nin $D^{+}\ m(t)\ \leq 0$ olduğunda artmayan olduğu ispatlanabilir. Böylece, bu Lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.

2.1.2. TEMEL LYAPUNOV TEOREMİ

Lyapunov'un iyi bilinen ikinci metodunun özü, kararlılık kriteri ile ilgilidir. Metodun temel karakteristiği bir fonksiyonun tanımlanmasıdır. Bu fonksiyon Lyapunov fonksiyonu olarak bilinir. Lyapunov fonksiyonları hareket uzayının orijine olan uzaklığı olarak da tanımlanabilir [2,3].

Bir Lyapunov fonksiyonunun birinci mertebeden sürekli kısmi türevleri mevcuttur. İlk bölümünde anlattığımız notasyonları kullanarak, temel Lyapunov teoremini daha geniş bir çerçevede düşünüp, geliştirebiliriz.

Teorem 2.1.2.1:

(i) $V \in C\ [R_+ \times R^n,\ R_+]$, $h \in \Gamma$, $V(t,x), x$*'e* göre yerel Lipschitz ve h pozitif tanımlı;

(ii) $S(h,\rho) = \{(t,x) \in R_+ \times R^n;\ h(t,x) < \rho,\ \rho > 0\}$ olduğunda

$\forall (t,x) \in S(h,\rho)$ için $D^+ V(t,x) \leq 0$ olsun.

O halde,

(A) Eğer bunlara ek olarak $h_0 \in \Gamma$, h_0 , h' dan daha iyi , $V(t,x), h_0$ zayıf azalan ise (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)- eş-kararlı olur.

(B) Eğer bunlara ek olarak $h_0 \in \Gamma$, h_0 düzgün olarak h'dan daha iyi, $V(t,x)$, h_0 azalan ise (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)- düzgün kararlı olur.

İspat: öncelikle A'yı ispatlayalım,

$V(t,x), h_0$ zayıf azalan olduğunda, $t_0 \in R_+$, $x_0 \in R^n$ için, $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ sabiti mevcut ve öyle bir $a \in C\mathcal{K}$ fonksiyonu vardır ki,

$$h_0(t_0,x_0) < \delta_0 \text{ olduğunda } V(t_0,x_0) \leq a\big(t_0, h_0(t_0,x_0)\big) \tag{2.1.2.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

$V(t,x)$'in h pozitif tanımlı olması durumunda anlarız ki, $\rho_0 \in (0,\rho)$ sabiti ve öyle bir $b \in \mathcal{K}$ fonksiyonu vardır ki

$$h(t,x) \leq \rho_0 \text{ olduğunda } b(h(t,x)) \leq V(t,x) \tag{2.1.2.2}$$

farzedelim ki, h_0 , h' dan daha iyi , $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ sabiti ve $\varphi \in C\mathcal{K}$ fonksiyonu olsun. $h_0(t_0,x_0) < \delta_1$ olduğunda δ_1, $\varphi(t_0,\delta_1) < \rho_0$ olacak şekilde seçilirse

$$h(t_0,x_0) \leq \varphi(t_0,h_0(t_0,x_0)) \tag{2.1.2.3}$$

olur.

$\varepsilon \in (0,\rho_0)$ ve $t_0 \in R_+$ verilmiş olsun, a için varsayalım ki, $\delta_2 = \delta_2(t_0, \varepsilon) > 0$ t_0'da sürekli öyle ki,

$$a(t_0,\delta_2) < b(\varepsilon) \tag{2.1.2.4}$$

elde ederiz. $\delta(t_0) = \min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$ seçelim, o halde $h_0(t_0,x_0) < \delta$' den dolayı ve (2.1.2.1) ve (2.1.2.4)' den $b\big(h(t_0,x_0)\big) \leq V(t_0,x_0) \leq a\big(t_0,h_0(t_0,x_0)\big) < b(\varepsilon)$ eşitsizliği $h(t_0,x_0) < \varepsilon$ olmasını gerektirir. Buradan şunu söyleyebiliriz ki, (2.1.1.1)'in $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ her çözümü için, $h_0(t_0,x_0) < \delta$ ile birlikte

$$h(t,x(t)) < \varepsilon, \quad t \geq t_0 \tag{2.1.2.5}$$

bağıntısını elde ederiz.

Eğer bu doğru değilse, o zaman öyle bir $t_1 \geq t_0$ vardır ki, (2.1.1.1) sisteminin $x(t,t_0,x_0)$ çözümleri,

$$h\big(t_1,x(t_1)\big) = \varepsilon \text{ ve } h\big(t,x(t)\big) < \varepsilon, \ t \in [t_0, t_1) \tag{2.1.2.6}$$

olacak şekilde bulunabilir.

$m(t) = V\big(t,x(t)\big), t \in [t_0, t_1]$ olacak şekilde alalım. $V(t,x), x$'e göre yerel Lipschitz olduğunda bunu (2.1.2.4) ve (ii) varsayımı izler. $D^+m(t) \leq 0$'dan anlaşılır ki, Lemma 2.1.1.1 ile $m(t)$, $[t_0, t_1]$ aralığında artmayandır. Bu yüzden (2.1.2.2) ve (2.1.2.4)'den $b(\varepsilon) = b(h\big(t_1,x(t_1)\big)) \leq V(t_1,x(t_1)) \leq V(t_0,x_0) < b(\varepsilon)$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Bu yüzden (2.1.2.5) doğrudur ve (2.1.1.1) sistemi (h_0,h)-eş-kararlıdır.

B' yi ispatlarsak; eğer $V(t,x)$, h_0 azalan ve h_0 düzgün olarak h' dan daha iyi ise, o zaman a ve φ fonksiyonları t'den bağımsızdır. Sonuç olarak, kolaylıkla görülebilir ki, δ sabiti t_0'dan bağımsız seçilebilir, böylece sistem (2.1.1.1), (h_0,h)- düzgün kararlı olur.

Şimdi (h_0,h)-düzgün asimptotik kararlılığın bir sonucunu teorem olarak verip ispatlayalım.

Teorem 2.1.2.2:

(i) h_0, $h \in \Gamma$ ve h_0, h' dan düzgün olarak daha iyi;

$(ii)V \in C\ [R_+ \times R^n,\ R_+]$, $V(t,x)$ x'e göre yerel Lipschitz ,h pozitif tanımlı, h_0 azalan ve $D^+V(t,x) \leq\ -C\big(h_0(t,x)\big)$, $\quad (t,x) \in S(h,\rho)$, $C \in \mathcal{K}$ olsun.

O halde (2.1.1.1) sistemi (h_0,h)- düzgün asimptotik kararlı olur.

İspat: Kabul edelim ki 0 < $\rho_0 \leq\ \rho$, 0 < δ_0 sabitleri ve a, $b\in \mathcal{K}$ fonksiyonları mevcut olsun öyle ki,

$$b(h(t,x)) \leq V(t,x),\ (t,x) \in S(h,\rho_0) \tag{2.1.2.7}$$

ve

$$h_0(t,x) < \delta_0 \text{ iken } V(t,x) \leq a(h_0(t,x)), \tag{2.1.2.8}$$

oluyorsa $V(t,x)$, h pozitif tanımlı ve h_0 azalandır. Böylece sistem (2.1.1.1) (h_0,h)- düzgün kararlı olur. Buradan $\varepsilon =\ \rho_0$ alalım. $\delta_1 =\ \delta_1\,(\rho) > 0$ olacak şekilde, $h_0(t_0,x_0) <\ \delta_1$ için $h(t,x(t))\ < \rho_0,$ $\quad t \geq t_0$ olur. Burada $x(t)$ =$x(t,t_0,x_0)$ (2.1.1.1)' in herhangi bir çözümüdür. $0 < \varepsilon < \rho_0$ ve $\delta =\ \delta(\varepsilon)$, Tanım 2.1.1.1' deki δ ile aynı olacak şekilde (h_0,h)- düzgün kararlı seçelim. Varsayalım ki, $h_0(t_0,x_0) < \delta^*\ = min\{\delta_0,\ \delta_1\}$, $T = T(\varepsilon) = \frac{a(\delta^*)}{C(\delta)} + 1$ olsun.

(h_0,h)' ın düzgün asimptotik kararlılığını göstermek için $h_0(t^*,x(t^*\ ))< \delta$ olacak şekilde bir $t^* \in\ [t_0,t_0 +\ T]$ varlığını göstermek yeterlidir.

Eğer bu doğru değilse, o zaman (2.1.1.1)' in bir çözümü olan $x(t)$=(t,t_0,x_0) ile

$$h_0(t_0,x_0) < \delta^* \text{ olması } \ h_0(t,x(t)) \geq \delta, \ \ t \in [t_0, t_0+T] \qquad (2.1.2.9)$$

eşitsizliğini gerektirir. $m(t)$=$V(t,x(t))$ alıp ve (ii) durumunu göz önünde tutarsak; $D^+ \, m(t) \ \leq -C(\ h_0(t, \ x(t)))$, $\ t \geq t_0$ olur.

Bundan anlaşılır ki (2.1.2.8)'den

$$\int_{t_0}^{t_0+T} C(h_0(s,x(s)))ds \ \leq \ m(t_0) \ < a(\delta^*)$$

dir. Diğer taraftan (2.1.2.9)' dan

$$\int_{t_o}^{t_o+T} C(\ h_0(s,x(s)))ds \geq C(\delta)T > a(\delta^*)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece ispat biter.

Yukarıdaki uygulamaların sonuçlarını aşağıdaki örneklerle tartışalım.

Örnek:2.1.2.1 Aşağıda verilen lineer olmayan diferansiyel denklem sistemini ele alalım.

$$\begin{aligned} x_1{}' &= -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2{}' &= -\, e^t x_1 \\ x_3{}' &= (x_2 - x_3)^2 e^t \end{aligned} \qquad (2.1.2.10)$$

Bu diferansiyel denklem sistemi için; $V(t,x) = \ x_1^2 e^t$+$(x_2 - x_3)^2$, $\ h(t,x) = |x_1|$

ve $h_0(t,x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ olsun.

O halde $(h(t,x))^2 \leq \ V(t,x) \leq 2e^t(h_0(t,x))^2, \ (t,x) \in \ R_+ \ \times R^3$ ve

$D^+ \, V(t,x) = -2 \, e^t(x_2 - x_3)^2 \leq 0, \ \ (t,x) \in \ R_+ \ \times \ R^3$ olur.

Teorem 2.1.2.1'e göre (2.1.2.10) sisteminin (h_0, h)-eş-kararlı olduğu sonucuna varırız.

Şunu da belirtmeliyiz ki; yukarıdaki örnekte kastedilen (h_0, h)- kararlılığı, h ve h_0 ın seçilmesine ve, (2.1.2.10) Diferansiyel denklem sisteminin aşikar çözümü x_1' e göre kısmi kararlı olur.

Örnek:2.1.2.2 Aşağıda verilen lineer olmayan diferansiyel denklem sistemini ele alalım.

$$x' = -y + (1 - x^2 - y^2)\, x\, e^{-t} \qquad (2.1.2.11)$$
$$y' = x + (1 - x^2 - y^2)\, y \sin x^2$$

Diferansiyel denklem sistemine göre:
$V(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$, $h_0 = h = |x^2 + y^2 - 1|$ alalım.
Böylece; $h^2(x, y) \leq V(x, y) \leq h_0^2(x, y)$, $(x, y) \in R^2$ ve
$D^+ V(x, y) = -4(x^2 + y^2 - 1)^2(x^2 e^{-t} + y^2 \sin x^2) \leq 0$, $(t, x, y) \in R_+ \times R^2$
olduğunu görürüz. Bu yüzden Teorem 2.1.2.1' den (h_0, h)- düzgün kararlı olur, ve (2.1.2.11) diferansiyel denklem sisteminin periyodik çözümünün $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ olarak seçildiğinde düzgün yörüngesel kararlı olduğu kolaylıkla görülebilir.

Örnek:2.1.2.3 Aşağıda verilen lineer olmayan diferansiyel denklem sistemini ele alalım.

$$x_1' = -x_1(1 + sin^2 x_3) - 2x_2 e^{-t},$$
$$x_2' = 2x_1 - x_2 e^t , \qquad (2.1.2.12)$$
$$x_3' = -x_1 e^{-t} + x_2 \cos t + x_3 \sin t$$

Diferansiyel denklem sistemine göre;

$V(t,x) = \ x_1{}^2 + x_2^2\, e^{-t}$, $h(t,x) \ = \ d(x,B)$ ve $h_0(t,x) = \ d(x,A)$

A={$(x_1, x_2, x_3\ ) \in R^3|\ x_1 = x_2 = 0\}$, B= $\{(x_1, x_2, x_3\ ) \in R^3|\ x_1 = 0\}$

Açıkça görülebilir ki; $A \subset B$, $h^2(t,x) \leq V(t,x) \leq h_0{}^2(t,x)$ ve

$D^+\, V(t,x) \leq -2\ h_0{}^2(t,x)$ dır.

Bu yüzden Teorem 2.1.2.2' den sistem (2.1.2.12) 'in (h_0, h)- düzgün asimptotik kararlı olduğunu söyleriz.

Aşağıda verilen teorem Marachkov' un $(\, h_0, h)$-eş-asimptotik kararlılığını veren teoremdir [2,3].

Teorem 2.1.2.3:

(i) h_0,$h \in \Gamma$ ve h_0 , h'dan daha iyi;

(ii) $V \in C[R_+\ \times\ R^n\ , R_+\ ]$ olmak üzere

$V(t,x)$; x'e göre yerel Lipschitz, h pozitif tanımlı, h_0 zayıf azalan ve

$D^+\, V(t,x) \leq -C(h(t,x))$, $(t,x) \in S(h,\rho)$, $C \in \mathcal{K}$;

$(iii) h \in C^1[R_+\ \times\ R^n, R_+\ ]$, $(t,x) \in\ S(h,\rho)$ ve $M > 0$ için $|h'(t,x)| \leq M$ ve

$h'(t,x) = h_t(t,x) + h_x\ (t,x)\, f(t,x)$ olsun.

O halde sistem (2.1.1.1) (h_0, h)-eş-asimptotik kararlı olur.

İspat: (i) ve (ii) varsayımları Teorem 2.1.2.1' den, (2.1.1.1) sisteminin (h_0, h)-eş-kararlı olduğunu söyler. Bu yüzden bir $\varepsilon = \rho$ alalım ve $t_0 \in\ R_+$ verilsin. δ_0 = $\delta_0\ (t_0, \rho) > 0$ olacak şekilde δ_0 vardır ki;

$$h_0(t_0,x_0) < \delta_0 \text{ olduğunda } h(t, x(t)) < \rho = \varepsilon\ , t \geq t_0 \qquad (2.1.2.13)$$

olur. Burada $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ (2.1.1.1) 'in herhangi bir çözümüdür.

Kabul edelim ki; (2.1.1.1) sistemi $(\, h_0, h)$-eş-asimptotik kararlı olmasın. O halde $\exists \varepsilon > 0$ için , $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ gibi bir çözüm ile, $h_0(t_0,x_0) < \delta_0$ vardır ve $\{t_k\}$ ıraksak dizi öyle ki; $h(t_k, x(t_k)) \geq \varepsilon$, $k = 1,2, ...$ sağlanır.

(iii) varsayımını takip ederek $t_k - \frac{\varepsilon}{2M} \leq t \leq t_k + \frac{\varepsilon}{2M}$ $k = 1,2, ...$

aralığında $h(t,x(t)) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ buluruz. Varsayalım ki bu aralıklar ayrık olsun ve eğer gerekli ise $\{t_k\}$ ‘ nın alt dizisinden t_1- $\frac{\varepsilon}{2M} >$ t_0 alınabilsin. O halde, (ii) varsayımı ile birlikte $V(t_k+\frac{\varepsilon}{2M}, x(t_k+\frac{\varepsilon}{2M})) \leq V(t_0,x_0) - C(\frac{\varepsilon}{2})\frac{\varepsilon}{M}$, k$\rightarrow -\infty$ ve k$\rightarrow \infty$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Buradan (2.1.1.1) sisteminin(h_0, h)-eş-asimptotik kararlı olduğu anlaşılır.

Uyarı 2.1.2.1: Eğer $\boldsymbol{h_0} = h = \|\boldsymbol{x}\|$ olarak alınırsa, Teorem 2.1.2.3 Marachkov’un

iyi bilinen sonucu olan [2], (2.1.1.1) sisteminin aşikar çözümü asimptotic kararlılığına indirgenir.

Uyarı 2.1.2.2: Eğer Teorem 2.1.2.3’ ün $(\boldsymbol{iii})$ durumu çıkarılırsa o zaman sistem (2.1.1.1), sahip olduğu $(\boldsymbol{h_0}, \boldsymbol{h})$-eş-asimptotik kararlılık özelliğini, hala $(\boldsymbol{h_0}, \boldsymbol{h})$-eş-kararlı olduğu halde kaybedebilir.

Teorem 2.1.2.4: Eğer Teorem 2.1.2.3‘ deki $\boldsymbol{h}$’ın pozitifliği zayıflarsa yani $\boldsymbol{h}$,$\boldsymbol{V}$’nin pozitif yarı tanımlı olması halinde $\boldsymbol{V(t,x)} \geq 0$, $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\rho})$ olur. O halde Teorem 2.1.2.3’ ün sonucu halen geçerlidir.

İspat: Kabul edelim ki; $V(t,x) \geq 0$, h_0 zayıf azalan ve h_0, h’dan daha iyi olsun.
O zaman (2.1.2.1) ve (2.1.2.3) bağıntıları sağlanır. $\forall\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in R_+$ alalım. O halde (2.1.2.3) deki φ ve (2.1.2.1) deki a tanımlarından öyle bir $\delta_2=\delta_2(t_0)>0$ sabiti vardır ki

$$\varphi(t_0, \delta_2) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } a(t_0, \delta_2) < C(\frac{\varepsilon}{2})\frac{\varepsilon}{2M}, \tag{2.1.2.14}$$

olur. Buradan $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ seçilsin.$h_0(t_0, x_0) < \delta$ ve (2.1.1.1)’ in çözümü olan $x(t) = x(t, t_0, x_0)$’ ı alalım, varsayalım ki $t_2 > t_1 > t_0$ olsun öyle ki;

$$\begin{cases} h\big(t_1, x(t_1)\big) = \frac{\varepsilon}{2}\ , h(t_2, x(t_2)) = \varepsilon, h(t,x(t)) \geq \frac{\varepsilon}{2}, t \in [t_1, t_2], \\ \qquad ve\ h\big(t, x(t)\big) < \varepsilon,\ \ t \in [t_0, t_2) \end{cases} \tag{2.1.2.15}$$

bağıntıları vardır. $V(t,x)$ x ’e göre yerel Lipschitz olduğunda ve
$D^+ V(t,x) \leq -C(h(t,x))$ sağlandığında bunu (2.1.2.14) ve (2.1.2.15) izler .öyle ki;
$0 \leq V(x_2, x(t_2)) \leq V(t_0, x_0) + V(t_2, x(t_2)) - V(t_1, x(t_1))$

$\leq a(t_0, h_0(t_0\,, x_0)\,) - C(\frac{\varepsilon}{2})\;(t_2 - t_1)$

$\leq a(t_0, \delta) - C(\frac{\varepsilon}{2})\;\frac{\varepsilon}{2M}$

< 0

olur. Bu bir çelişkidir.

Buradan (2.1.1.1) sisteminin $(\,h_0, h)$-eş-kararlı olduğu anlaşılır. İspatın kalan kısmı Teorem 2.1.2.3' e benzer, böylece teorem ispatlanmış olur.

Lyapunov fonksiyonu, verilen bir kararlılık özelliğini ispatlamak için, bu fonksiyonunun parametrelerin her seçiminin yerine kullanıldığı farzedilir. Sonuç olarak, eğer bir Lyapunov fonksiyonu yerine ailesi kullanıldığında ailenin her üyesinin daha zayıf koşulları sağlamasını beklemek doğaldır.

Bu düşünceyi göstermek için Teorem 2.1.2.1 ve Teorem 2.1.2.2' nin geliştirilmiş halleri olan iki sonucu verelim.

Teorem 2.1.2.5 :

(i) $h_0, h \in \Gamma$ ve h_0 düzgün olarak h'dan daha iyi;

(ii) $\forall\, \eta > 0$ için,öyle bir $V_\eta \in C[S(h,\rho) \cap S^C(h_0,\eta), R_+]$ fonksiyonu vardır ki $V_\eta(t,x), x$'e göre yerel Lipschitz ;

$b(h(t,x)) \leq V(t,x) \leq a(h_0(t,x))$, $(t,x) \in S(h,\rho) \cap S^C(h_0,\eta)$ için eşitsizliği sağlansın. $(a, b \in \mathcal{K})$

(iii) $(t,x) \in S(h,\rho) \cap S^C(h_0,\eta)$ için $D^+ V(t,x) \leq 0$ olsun.

O halde (2.1.1.1) sistemi $(\,h_0, h)$-düzgün kararlı olur.

İspat: (i) varsayımından, $\delta_0 > 0$ sabitinin varlığı ve $\varphi \in \mathcal{K}$ fonksiyonu mevcut, öyle ki

$$h_0(t,x) \leq \delta_0 \text{ ise } h(t,x) \leq \varphi(h_0(t,x)), \tag{2.1.2.16}$$

olur. $\varepsilon \in (0,\rho)$ ve $t_0 \in R_+$ alalım. δ=. $\delta(\varepsilon)$>0, $\delta < \delta_1$ seçilirse,

$$\varphi(\delta) < \varepsilon \text{ ve } a(\delta) < b(\varepsilon) \tag{2.1.2.17}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $h_0(t_0, x_0) < \delta$ ve (2.1.1.1)'in herhangi bir çözümü olan $x(t) = x(t, t_0, x_0)$' ı alalım. O halde (2.1.2.16) ve (2.1.2.17)' den $h(t_0, x(t_0)) < \varepsilon$ olduğunu görürüz. Şunu söyleyebiliriz ki; $h(t, x(t)) < \varepsilon$, $t \geq t_0$ ve $h_0(t_0, x_0) < \delta$ olmak koşuluyla $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, (2.1.1.1)'in herhangi bir çözümüdür.

Eğer bu doğru değilse, o zaman (2.1.1.1)'in bir çözümü $x(t)$ vardır . $t_1, t_2 > t_0$ olacak şekilde, $h_0(t_1, x(t_1)) = \delta$, $h_0(t_2, x(t_2)) = \varepsilon$, ve

$$(t, x(t)) \in S(h, \varepsilon) \cap S^C(h_0, \delta), t \in [t_1, t_2] \text{ için} \qquad (2.1.2.18)$$

olsun.Buradan η=δ alınırsa ve (ii) koşulu sağlanırsa (ii) ve (iii) varsayımlarını sağlayacak bir $V_\eta(t, x)$ bulunabilir öyle ki

$b(\varepsilon)$= $b(h(t_2, x(t_2))) \leq V(t_2, x(t_2)) \leq V(t_1, x(t_1)) \leq a(h_0(t_1, x(t_1))) = a(\delta) < b(\varepsilon)$

olur. Bu bir çelişkidir, bu yüzden (2.1.1.1) sistemi(h_0, h)- düzgün kararlı olur.

Teorem 2.1.2.6: Teorem 2.1.2.5' in varsayımlarını kabul ederek, $(\boldsymbol{iii})$ koşulunu güçlendirirsek

$(iii)^*$ $D^+ V(t, x) \leq -C(h_0(t, x))$, $(t, x) \in S(h, \rho) \cap S^C(h_0, \eta)$, $C \in \mathcal{K}$ için

O halde (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-düzgün asimptotik kararlı olur.

Teorem 2.1.2.5 ve Teorem 2.1.2.2 ' nin ispatlarını kullanarak Teorem 2.1.2.6' ın ispatını yapabiliriz.

Daha sonra göreceğimiz atraksiyonun daha büyük bir tanım kümesini varsaymadıkça (h_0, h)-düzgün asimptotik kararlılığın, bir düzgün karşıt teoremini bulmak, iki farklı ölçüye dayalı olarak mümkün değildir.

Bu demektir ki (h_0, h)-düzgün asimptotik kararlılıktan, daha güçlü bir kavrama ihtiyacımız vardır. Bundan sonraki sonuç bu kavramı açıklayacağımız teoremdir.

Teorem 2.1.2.7:

(i) h_0,$h \in \Gamma$ ve h_0 düzgün olarak h'dan daha iyi;

(ii) $V \in C[R_+ \times R^n, R_+]$ olmak üzere

$V(t, x)$; x' e göre yerel Lipschitz, h pozitif tanımlı, h_0 azalan ve

$D^+ V(t, x) \leq 0$, $(t, x) \in S(h, \rho)$;

(iii) $W \in C[R_+ \times R^n, R_+]$, $W(t,x)$, x' e göre yerel Lipschitz, $C \in \mathcal{K}$ ve $(t,x) \in S(h,\rho)$ için $W(t,x) \leq N$ ve $D^+ W(t,x) \leq -C\big(V(t,x)\big)$;

(iv) Bir γ pozitif sabiti bulunabilir öyle ki; $\gamma \leq \rho$ ve $h(t,x)=\gamma$ iken $D_-h(t,x) <0$ ve $h(t,x), \forall t$ için x' e göre yerel Lipschitz olsun.

O halde (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-düzgün kararlı olup, (h,h)' da düzgün atraktiftir.

İspat: (i) ve (ii) varsayımlarından (h_0, h)-düzgün kararlılığı elde edilir.
(h,h)-düzgün atraktifliği ispatlamak için (t_0, x_0)' ı $h(t_0, x_0) < \gamma \leq \rho$ olacak şekilde $W(t_0, x_0) \leq N$ iken seçelim. Varsayalım ki (2.1.1.1)'in bir çözümü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ olsun. $h(t_0, x_0) < \delta$ ve $t_1 > t_o$ iken öyle ki $h(t_1, x(t_1)) = \gamma$ ve $h(t, x(t)) < \gamma$, $t \in [t_o, t_1)$ olur.O zaman

$$D_-h(t_1, x(t_1)) = \lim_{\delta \to o^-} sup \frac{1}{\delta} \, [h(t_1 + \delta, x(t_1 + \delta)) - h(t_1, x(t_1))] \geq 0$$

elde edilir. Bu durum (iv) varsayımıyla çelişir. Bu yüzden $S(h,\gamma)$ kümesi, (2.1.1.1) sisteminin pozitif değişmez bir kümesidir.

Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin. $T = \frac{N}{C(b(\varepsilon))} + 1$ olacak şekilde bir T seçildiğinde (2.1.1.1)'in herhangi bir çözümü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ için diyebiliriz ki $h(t_0, x_0) < \gamma$ olduğunda bir $t^* \in [t_0, t_0 + T]$ vardır, öyle ki $V(t^*, x(t^*)) < b(\varepsilon)$ eşitsizliği sağlanır.
Şayet bu doğru değilse (2.1.1.1) 'in bir çözümü $x(t)$, $h(t_0, x_0) < \gamma$ olacak şekilde bulunabilir öyle ki, $V(t, x(t)) \geq b(\varepsilon)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ olur. Bu (iii) koşulunu izlerse

$$W(t_0 + T, x(t_0 + T)) \leq W(t_0, x_0) - \int_{t_o}^{t_o+T} C(\mathrm{V}(\mathrm{s}, x(\mathrm{s})))\mathrm{ds} \leq N - C(b(\varepsilon))T < 0$$

olur bu da bizi çelişkiye götürür. (ii). koşuldan anlarız ki $V(t, x(t))$ artmayandır ve $V(t, x(t)) < b(\varepsilon)$, $t \geq t_0 + T$ eşitsizliğini sağlar. $V(t,x)$, h pozitif tanımlı olduğu zaman bunu (2.1.1.1) sisteminin (h,h)- düzgün atraktif olması izler. Bu da ispatı tamamlar.

Önceki sonuç gösteriyor ki kararlılık ve atraktiflik farklı kümelerle ilişkili olabilir , bu da şunu gösterir, farklı ölçüler doğal olarak, bilinenlerden daha farklı bir yöntem gerektirir.

2.2. KARŞILAŞTIRMA METODU

Lyapunov fonksiyonları kavramı, diferansiyel eşitsizliklerle beraber daha az kısıtlanmış varsayımlar altında genel bir karşılaştırma prensibi sağlar. [3]

Diferansiyel denklemi Lyapunov fonksiyonu ile verilen komplike bir diferansiyel sistemin daha basit skaler diferansiyel denklemlere dönüşümünü sağlar.

Aşağıda verilen skaler diferansiyel denklemini düşünelim.

$$u' = g(t,u), \;\; u(t_0) = u_0 \, \geq 0 \qquad (2.2.1)$$

burada $g \in C[R_+ \times R, R]$ ve $g(t,0) \equiv 0$ dır.

Tanım 2.2.1: $\boldsymbol{\gamma(t)}$ fonksiyonu (2.2.1) denkleminin $\boldsymbol{J}$=$[\boldsymbol{t_0}, \; \boldsymbol{t_0}+ \boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{0} < \alpha \leq +\infty$ aralığında bir çözümü olsun. Bu durumda

$$u(t) \leq \; \gamma(t) \; , t \in J \qquad (2.2.2)$$

eşitsizliğini sağlayan J üzerindeki her $u(t) = u(t, t_0, u_0\,)$ çözümü için $\gamma(t)$ ‘ ye maksimal çözüm denir. (2.2.2) eşitsizliğin ters çevrilmesiyle yukardakine benzer şekilde minimal çözüm tanımlanır.

Lakshmikantham ve Leela’nın ispatladıklarının sonucunu inceleyelim [4,5].

Lemma 2.2.1: $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}[\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}]$ ve $\boldsymbol{\gamma(t)} = \boldsymbol{\gamma(t, \; t_0, u_0)}$, (2.2.1)’ in $\boldsymbol{J}$’de maksimal bir çözümü olsun. Kabul edelim ki; $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{C}[\boldsymbol{R}_+ , \boldsymbol{R}_+]$ ve $\boldsymbol{Dm(t)} \leq \boldsymbol{g\big(t, m(t)\big), t} \in \boldsymbol{J}$ olsun. $\boldsymbol{D}$ ise herhangi bir Dini-türevini belirtsin.

O halde $m(t_0) \; \leq u_0$ olduğunda $m(t) \leq \; \gamma(t)$ olur.

Lemma 2.2.2: $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}[\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}]$ ve $\boldsymbol{\rho(t)} = \boldsymbol{\rho(t, \; t_0, u_0)}$ (2.2.1)' **in** $\boldsymbol{J}$’de minimal bir çözümü olsun. Kabul edelim ki,

$m \in C[R_+ , R_+]$ ve $Dm(t) \geq g\big(t, m(t)\big), t \in J$ olsun. O halde $m(t_0) \; \geq u_0$ eşitsizliği $m(t) \; \geq \rho(t), \, t \in J$ olduğunu belirtir.

Şimdi temel karşılaştırma sonucunu V Lyapunov fonksiyonu cinsinden formülize edelim.

Teorem 2.2.1: $\boldsymbol{V} \in [\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}_+]$ ve $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}), \forall\, \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{R}_+$ **için** $\boldsymbol{x}$' e göre yerel Lipschitz olsun. Buna ilave olarak $\boldsymbol{D}^+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ fonksiyonu

$$D^+V(t,x) \ \leq g(t, V(t,x)), (t,x) \in R_+ \times R^n \tag{2.2.3}$$

için sağlanır ve burada $g \in C[R_+ \times R, R]$ dır. $\gamma(t) = \gamma(t,\ t_0, u_0)$ J' de (2.2.1)'in maksimal çözümü olsun. O halde (2.1.1.1)' in J'deki herhangi bir çözümü $x(t) \ = \ x(t, t_0, x_0)$ iken $V(t_0, x_0) \leq \ u_0$ olursa;

$$V(t, x(t)) \ \leq \ \gamma(t)\ , t \in J \tag{2.2.4}$$

olur.

İspat: $m(t) = \ V(t, x(t))$ alalım. (2.1.1.1)'in bir çözümü olarak $x(t) = \ x(t,\ t_0, x_0)$' ı alalım, öyle ki $V(t_0, x_0) < \ u_0$ olsun. $V(t,x)$ x'e göre yerel Lipschitz olduğunda (2.1.1.4) ve (2.2.3)' den $D^+\ m(t) \leq g\big(t, m(t)\big)$, $\ m(t_0) \leq u_0, m(t_0) \leq u_0, t \in J$ diferansiyel eşitsizliğini ve Lemma 2.2.1' den istenen (2.2.4) sonucunu elde ederiz.

Sonuç 2.2.1: Kabul edelim ki Teorem 2.2.1' den $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}) \equiv \boldsymbol{0}$, o zaman $\boldsymbol{V}\big(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\big)$ $\boldsymbol{t}'$ ye göre artmayan ve $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})) \ \leq \boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{J}$ eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.1.1.1'e benzer olarak, (2.2.1) karşılaştırma denkleminin aşikar çözümü için, bir kararlılık tanımına ihtiyacımız vardır. Bu tanımlardan sadece bir tanesini ifade edelim.

Tanım 2.2.2: Eğer herhangi bir $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ ve $\boldsymbol{t}_0 \in \boldsymbol{R}_+$ için bir $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{\varepsilon}) \geq \boldsymbol{0}$, $\forall \boldsymbol{\varepsilon}$ için $\boldsymbol{t}_0$'da sürekli olacak şekilde vardır ki $\boldsymbol{u}_0 < \delta$ için $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{u}_0) < \varepsilon$, $\ \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t}_0$ olur. Burada $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{u}_0)$, (2.2.1)' in herhangi bir çözümü olmak üzere, (2.2.1)' in $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) \equiv \boldsymbol{0}$ aşikar çözümüne eş-kararlıdır denir.

Şimdi (2.1.1.1) diferansiyel sisteminin $(h_0,\, h)$-kararlılık özelliklerinin, yeter koşullarını inceleyelim.

Teorem 2.2.2:

(A_0) $h_0, h \in \Gamma$ ve h_0 ,h' dan düzgün olarak daha iyi;

(A_1) $V \in C[\,R_+ \times\, R^n, R_+],$ $V(t,x)$ x'e göre yerel Lipschitz, V, h pozitif tanımlı, h_0 azalan;

(A_2) $g \in C[R_+ \times R, R]$ ve $g(t,0) \equiv 0$;

(A_3) $D^+V\,(t,x) \leq g(t, V(t,x)),$ $(t,x) \in S(h,\rho)$ olsun.

O halde (2.2.1)'in aşikar çözümünün kararlılık özelliklerinin, (2.1.1.1) sisteminin (h_0, h)- kararlılık özellikleri ile örtüştüğü yani özdeş olduğu söylenir.

İspat: (2.1.1.1) sisteminin sadece $(\,h_0, h)$-eş-asimptotik kararlılığını ispatlayalım.

Bu amaçla öncelikle $(\,h_0, h)$-eş-kararlılığını ispatlayalım.

V, h pozitif tanımlı olduğunda bir $\lambda \in (0, \rho\,)$ ve öyle bir $b \in \mathcal{K}$ vardır ki

$$b(h(t,x)) \leq V(t,x),\ (t,x) \in\ S(h,\lambda) \tag{2.2.5}$$

için sağlanır. $0 <\ \varepsilon <\ \lambda$ ve $t_0 \in\ R_+$ verilsin ve varsayalım ki, (2.2.1)' in aşikar çözümü eş-kararlı olsun. O halde verilen $b(\varepsilon) > 0$ ve $t_0 \in R_+$ için öyle bir δ_1=$\delta_1(t_0, \varepsilon)$ fonksiyonu vardır ki, $u_0 < \delta_1$ olduğunda

$$u(t,\, t_0, u_0) < b(\varepsilon),\, t \geq t_0 \tag{2.2.6}$$

olur. Buradan (2.2.1)' in herhangi bir çözümünün $u(t,\, t_0, u_0)$ olduğu anlaşılır.

$u_0 = V(t_0, x_0)$ olacak şekilde bir u_0 seçebiliriz. V, h_0 azalan ve h_0 düzgün olarak h'dan daha iyi olduğunda, bir $\lambda_0 > 0$ ve bir $a \in \mathcal{K}$ fonksiyonu bulunabilir, öyle ki, $(t_0, x_0)\ \in S(h_0, \lambda_0)$ için,

$$h(t_0, x_0) < \lambda \text{ ve } V(t_0, x_0) \leq a(h_0(t_0, x_0)) \tag{2.2.7}$$

olur.

(2.2.5)'den anlaşıldığı gibi,

$$b(h(t_0,x_0)) \leq V(t_0,x_0) \leq a(h_0(t_0,x_0)) \ ,(t_0,x_0) \in S(h_0,\lambda_0) \tag{2.2.8}$$

eşitsizliği sağlanır. $\delta = \delta(t_0,\varepsilon)$ seçilirse, öyle ki $\delta \in (0,\ \lambda_0]$, $a(\delta) < \delta_1$ ve $h_0(t_0,x_0) < \delta$ alalım. O halde (2.2.8) den, $h(t_0,x_0) < \varepsilon$ olduğunda $\delta_1 < b(\varepsilon)$ olduğu anlaşılır. Buradan $h_0(t_0,x_0) < \delta$ olduğunda $h(t,x(t)) < \varepsilon,\ t \geq t_0$ eşitsizliği sağlanır. Bu yüzden $x(t)$=$x(t,\ t_0,x_0)$, (2.1.1.1) sisteminin herhangi bir çözümüdür. Şayet bu doğru değilse, o zaman bir $t_1 > t_0$ ve (2.1.1.1)'in bir $x(t)$ çözümü bulunabilir. Öyle ki,

$$h(t_1,x(t_1)) = \varepsilon \text{ ve } h(t,x(t)) < \varepsilon, \qquad t_0 \leq t < t_1 \tag{2.2.9}$$

göz önünde bulundurularak $h_0(t_0,x_0) < \delta$ olduğu görülür.

Bu demektir ki, $[t_0,t_1]$ için $(t,x(t)) \in S(h,\lambda)$ olur ve Teorem 2.2.1' den (2.2.1)' in maksimal çözümü $r(t,\ t_0,u_0\ )$ olduğunda

$$V(t,x(t)) \leq r(t,t_0,u_0),\ \ t_0 \leq t < t_1 \tag{2.2.10}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (2.2.5), (2.2.6), (2.2.9) ve (2.2.10) bağıntılarından, $b(\varepsilon) \leq V(t_1,x(t_1)) \leq r(t_1,t_0,u_0) < b(\varepsilon)$ olduğu anlaşılır. Bu bir çelişkidir, böylece (2.1.1.1) sisteminin (h_0,h)- kararlılığı ispatlanmış olur.

Varsayalım ki, (2.2.1) sisteminin aşikar çözümü eş-atraktif olsun. (h_0,h) kararlılığından $\varepsilon = \lambda$ olarak belirleyelim öyle ki, $\hat{\delta}_0 = \delta(t_0,\ \lambda)$ sağlansın . Şimdi $0< \eta < \lambda$ alalım ayrıca (2.2.1)' in eş-atraktif olmasından, verilen $b(\eta) > 0$ ve $t_0 \in R_+$ pozitif sayılar $\delta_1^* = \delta_1^*(t_0)$ ve $T = T(t_0,\eta) > 0$ vardır öyle ki, $u_0 < \delta_1^*$ olduğunda

$$u(t,t_0,u_0) < b(\eta), \qquad t \geq t_0 + T \tag{2.2.11}$$

eşitsizliği sağlanır. Önceki gibi $u_0 = V(t_0, x_0)$ seçelim, bir $\delta_0^* = \delta_0^*(t_0) > 0$ bulabiliriz ki $\delta_a^* \in (0, \lambda_0]$ ve $a(\delta_0^*) < \delta_1^*$ olur. $\delta_0 = \min(\delta_0^*, \hat{\delta}_0)$ ve $h_0(t_0, x_0) < \delta_0$ alalım. Bütün $t \geq t_0$ değerleri için ; $h(t, x(t)) < \lambda$, $t \geq t_0$ ve bunun sonucu olarak (2.2.10) bağıntısı görülebilir.

Varsayalım ki, bir $\{t_k\}$ dizisi, $t_k \geq t_0 + T$ olacak şekilde $k \to \infty$ için $t_k \to \infty$ olsun. $\eta \leq h(t_k, x(t_k))$ iken $x(t)$, (2.1.1.1) sisteminin herhangi bir çözümü olur. Bu yüzden $h_0(t_0, x_0) < \delta_0$ sağlanır. Bunun, $b(\eta) \leq V(t_k, x(t_k)) \leq r(t_k, t_0, u_0) < b(\eta)$, (2.2.10) ve (2.2.11)'den dolayı çelişki olduğu açıktır.

Dolayısıyla (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-eş-asimptotik kararlıdır ve ispat biter.

Sonuç 2.2.2: Teorem 2.2.2' den

(i) $g(t, u) \equiv 0$, (h_0, h)-düzgün kararlı olduğunu kabul edelim.

(ii) $g(t, u) = \lambda(t)u$, $\lambda \in C[R_+, R]$ doğru olduğu kabul edilebilir ki,

(a) $\forall t_0 \geq 0$ için $\int_{t_0}^{\infty} \lambda(s)ds < \infty$, oluyorsa (h_0, h)- eş-kararlıdır.

(b) $\forall t_0 \geq 0$ için $\int_{t_0}^{\infty} \lambda(s)ds = -\infty$, oluyorsa (h_0, h)- eş-asimptotik kararlıdır.

(iii) $g(t, u) = -\varphi(u), \varphi \in \mathcal{K}$ doğruluğu kabul edilebilir ki, (h_0, h)- düzgün asimptotik kararlıdır.

İspat:(i)'nin ispatı hemen görülebilir. (ii)' ye göre (2.2.1)' in $u(t,\ t_0,\ u_0)$ çözümleri $u(t,\ t_0,\ u_0) = u_0 exp\ (\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds)$, $t \geq t_0$ biçiminde verilsin. (a)' ya baktığımızda $N(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \lambda(s)ds$ alınırsa, $u(t,\ t_0,\ u_0) \leq u_0\ exp(N(t_0))$ buluruz.

Sonuç olarak, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\delta(t_0) < \varepsilon\, exp(-N(t_0))$, $u(t,\ t_0,\ u_0) < \varepsilon$, $t \geq t_0$ seçilebilir. Dolayısıyla (2.2.1)' in sıfır çözümü eş-kararlı olur. Bu da demektir ki, sistem (2.1.1.1) (h_0, h)- eş-kararlıdır.

Durum (b)'ye baktığımızda, bütün $t \geq t_0$ değerleri için $exp\ (\int_{t_0}^{\infty} \lambda(s)ds)$ sınırlıdır. Bunu (2.2.1)' in aşikar çözümünün eş- kararlılığından anlarız.

$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(s)ds = -\infty$ olduğunda $\lim_{t\to\infty} u(t,\ t_0,\ u_0) = u_0 \lim_{t\to\infty} exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right) = 0$ elde edilir. Bu yüzden (2.2.1)' in u=0 aşikar çözümü eş-asimptotik kararlıdır. Bu demektir ki, Teorem 2.2.2'den (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)- eş-asimptotik kararlı olur.

İspat (iii)'e baktığımızda (2.2.1)' in aşikar çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğunu göstermek yeterlidir. (2.2.1)'in aşikar çözümünün, düzgün kararlı olduğunu kabul edelim. Bunun için

$\varepsilon > 0$ verilsin, $J(u) = \int_0^u \frac{ds}{\varphi(s)} < \infty$ oluyorsa ve $\int_0^u \frac{ds}{\varphi(s)} = \infty$ ise $J(u) = \int_\delta^u \frac{ds}{\varphi(s)}$ bazı küçük sabitler için $\delta > 0$ dır. ayrıca (2.2.1)'in $u(t,\ t_0,\ u_0)$ çözümlerinin, J^{-1}, J'nin ters fonksiyonu iken , $u(t,\ t_0,\ u_0) = J^{-1}[\,J(u_0) - (t - t_0)]$, $t \geq t_0$ olduğunu görürüz. $u(t,\ t_0,\ u_0)$'ı (2.2.1)' in çözümleri olarak alalım. $u_0 < \alpha,\ \alpha > 0$ ve $T > 0$ seçilirse, öyle ki, $T > J(\alpha) - J(\varepsilon)$ olur. Bunu , $u(t,\ t_0,\ u_0) < \varepsilon,\ t \geq t_0 + T$ eşitsizliği izler.
Bu yüzden (2.2.1)'in u=0 aşikar çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.
Teorem 2.2.2' de varsayılan $V,\ h,\ h_0$ üzerine konulmuş güçlü koşullar ile bütün kararlılık kriterlerini tek bir teorem altında birleştirir. Bu da gösteriyor ki, (2.2.1) karşılaştırma denklemine çok iş düşmektedir. Ne var ki, düzgün olmayan kararlılık kriterini elde ederken, Teorem 2.2.2'nin varsayımları, bir sonraki sonuçta görülebileceği gibi zayıf kalmaktadır [6]. İspatın detayları önemsenmeyecektir.

Teorem 2.2.3: $(\boldsymbol{A_0}) - (\boldsymbol{A_3})$ durumları aşağıdaki değişiklikleri doğrulasın**.**

(i) $h_0, h \in \Gamma_0$ ve h_0, h'dan daha iyi;

(ii) $V(t,x),\ h_0$ zayıf azalan;

olsun. O halde (2.2.1)' in aşikar çözümlerinin düzgün ve düzgün olmayan kararlılık özelliklerinden anlaşılır ki, (2.1.1.1) sisteminin düzgün olmayan (h_0, h)-kararlılık özelliklerine karşılık gelir.
Daha önce İspatladığımız Teorem 2.1.2.5' e tekrar dönersek (h_0, h)-düzgün kararlılığı, daha zayıf şartlar altında, tek parametreli Lyapunov fonksiyonlar ailesini kullanarak ispatı yapabiliriz.

Şimdi vereceğimiz genel sonuç (h_0, h)-düzgün kararlığı üzerine karşılaştırma prensibinde kullanılmakta ve Teorem 2.1.2.5' i çağrıştırmaktadır.

Teorem 2.2.4:

(i) $h_0, h \in \Gamma$ ve h_0 düzgün olarak h'dan daha iyi;

(ii) $\forall\eta > 0$ için bir $V_\eta \in C[S(h,\rho) \cap S^c(h_0,\ \eta), R_+]$ olacak şekilde V_η fonksiyonu vardır ki, $V_\eta(t,x)$, x'e göre yerel Lipschitz ve

$$b(h(t,x)) \le V_\eta(t,x) \le a(h_0(t,x)) \ \ (t,x) \in S(h,\rho) \cap S^c(h_0,\ \eta) \qquad (2.2.12)$$
$$(\ a, b \ \in \mathcal{K}\ )$$

eşitsizliğini sağlar ve

$$D^+V_\eta(t,x) \le g\left(t, V_\eta(t,x)\right),\ (t,x) \in S(h,\rho) \cap S^c(h_0,\ \eta) \qquad (2.2.13)$$

eşitsizliği $g \in C[R_+ \times R_+, R]$ ve $g(t,0) \equiv 0$ iken sağlansın. O halde (2.2.1)' in aşikar çözümünün düzgün kararlılığı ile, (2.1.1.1) sisteminin (h_0, h)-düzgün kararlılığı özdeştir.

İspat: Sadece (h_0, h) düzgün kararlığını ispatlayacağız. Diğer (h_0, h)-düzgün kararlılık özellikleri benzer şekilde ispatlanabilir.

h_0 düzgün olarak h'dan daha iyi olduğunda $\varphi \in \mathcal{K}$ fonksiyonu ve $\delta_0 > 0$ sabiti vardır.

$$h_0(t,x) \ \le \delta_0 \ \text{ iken } \ h(t,x) \le \varphi\big(h_0(t,x)\big) \qquad (2.2.14)$$

eşitsizliği sağlanır. $0 < \varepsilon < \rho$ verilsin ve varsayalım ki, (2.2.1)' in aşikar çözümü düzgün kararlı olsun. O zaman $b(\varepsilon) > 0$ için öyle bir $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ sabiti vardır ki $u_0 \le \delta_1$ olacak şekilde

$$u(t,\ t_0,\ u_0) < \ b(\varepsilon),\ t \ge t_0 \qquad (2.2.15)$$

eşitsizliği (2.2.1)' in herhangi bir çözümü $u(t,\ t_0,\ u_0)$ iken sağlanır. φ ve a'nın varsayımlarından bir $\delta \in (0, \delta_0]$ sabiti bulabiliriz öyle ki,

$$\varphi(\delta) < \varepsilon \text{ ve } a(\delta) < \delta_1 \tag{2.2.16}$$

olur. Şimdi $h_0(t_0, x_0) \leq \delta$ alalım ve (2.1.1.1) sisteminin herhangi bir çözümü $x(t) = x(t,\ t_0,\ x_0)$ olsun.

(2.2.14) ve (2.2.16)'dan kolaylıkla görülebilir ki, $h\big(t_0, x(t_0)\big) < \ \varepsilon$ 'dır.

Eğer, (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-düzgün kararlı olmazsa, o zaman (2.1.1.1) sisteminin bir çözümü olan $x(t) = x(t,\ t_0,\ x_0)$ vardır. $t_1 > t_2 > t_0$ olacak şekilde $h_0\big(t_1, x(t_1)\big) = \ \delta,\ \ h\big(t_2, x(t_2)\big) = \ \varepsilon$ ve

$$(t, x(t)) \in S(h, \varepsilon) \cap \ S^c(h_0, \delta), \quad t \in [t_1, t_2] \tag{2.2.17}$$

için sağlanır. Dolayısıyla, $\eta = \delta$ ve Teorem 2.2.1 kullanıldığında, $V_\eta\big(t, x(t)\big) \leq \ \gamma(t, t_1, u_0),\ t \in [t_1, t_2]$ eşitsizliğini elde ederiz ki, (2.2.1)' in maksimal çözümü $\gamma(t, t_1, u_0)$,($t_1, u_0)$ ve $u_0 = V_\eta(t_1, x(t_1)) \leq a(h_0\big(t_1, x(t_1)\big) < \delta_1$ arasında olacak şekildedir. Bunu (2.2.12), (2.2.15) ve (2.2.17) izler. Buradan, $b(\varepsilon) = b(h\big(t_2, x(t_2)\big) \leq \ V_\eta\big(t_2, x(t_2)\big) \leq \ \gamma(t_2, t_1, u_0) < \ b(\varepsilon)$ ifadesi bulunur ki, bu bir çelişkidir. Bu yüzden (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-düzgün kararlıdır, ispat tamamlanır.

Uyarı 2.2.1: $\boldsymbol{g(t, u) \equiv 0}$ fonksiyonunun Teorem 2.2.4' de olduğu gibi, $(\boldsymbol{h_0, h})$-düzgün kararlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 2.2.4 , Teorem 2.1.2.5' e indirgenir.

Karşılaştırma prensibini kullanmak, iyi bir yaklaşım ve bazı kararlılık sonuçlarını genelleyen bir yapı oluşturur.. Bununla birlikte, karşılaştırma denkleminin sağ tarafında analiz yapmak, bazen etkili sonuçlara neden olur. Bunu sıradaki teoremde görebiliriz.

Teorem 2.2.5:

(i) $h_0, h \in \Gamma_0$ ve h_0 düzgün olarak h'dan daha iyi;

(ii) $V \in [R_+ \times R^n, R_+ \,]$ ve $g \in C[R_+ \times R, R]$ olmak üzere; $V(t, x)$ h pozitif tanımlı h_0 azalan, x'e göre yerel Lipschitz ve $D^+V(t, x)) \leq g\big(t, V(t, x)\big),\ (t, x) \in S(h, \rho)$;

(iii) $\forall\ \alpha, \beta$ sayı çifti için $0 < \alpha \leq \beta,\ g(t, u) < 0,\ \alpha \leq u \leq \beta,\ t \geq \theta$ eşitsizliklerini sağlayan $\theta = \theta(\alpha, \beta) \geq 0$ sabiti mevcut;

(iv) $h_0 \in C^1[R_+ \times R^n, R_+]$ ve bazı λ fonksiyonları için, $\lambda \in C[R_+, R_+]$ olmak üzere,

$\frac{\partial}{\partial t} h_0(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} h_0(t,x) f(t,x) \leq \lambda(t) h_0(t,x),$ $(t,x) \in S(h,q)$ olsun.
O halde (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)- düzgün kararlı olur.

İspat:(i) koşulunda σ_0 sabiti ve öyle bir $\varphi \in \mathcal{K}$ fonksiyonu vardır ki,

$$h_0(t,x) < \sigma_0 \text{ ise } h(t,x) \leq \varphi(h_0(t,x)) \tag{2.2.19}$$

sağlanır. $V(t,x), h$ pozitif tanımlı ve h_0 azalan olduğunda $\rho_0 \leq \rho$ ve $\sigma_1 \leq \sigma_0$ pozitif sabitler ve $a, b \in \mathcal{K}$ fonksiyonları için,

$$h_0(t,x) < \sigma_1 \text{ ise } V(t,x) \leq a(h_0(t,x)) \tag{2.2.20}$$

$$h(t,x) < \rho_0 \text{ ise } V(t,x) \geq b(h(t,x)) \tag{2.2.21}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $0 < \varepsilon < \rho$ verilip, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) < \sigma_1$ seçilirse

$$a(\delta_1) < b(\varepsilon) \text{ ve } \varphi(\delta_1) < \varepsilon \tag{2.2.22}$$

olur. $\theta = \theta(a(\delta_1), b(\varepsilon))$ ve $N = N(\theta) = sup_{0 \leq t \leq \theta} \lambda(t)$ olacak şekilde alalım.
$\delta = \delta_1 e^{-N\theta}$ seçilsin, $(t_0, x_0) \in S(h,\rho)$ için $h_0(t_0, x_0) < \delta$ olur. (2.1.1.1) sisteminin herhangi bir çözümünü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ alalım. O zaman (2.2.19) ve (2.2.22)'den anlaşılır ki, $h\big(t_0, x(t_0)\big) < \varepsilon$'dır.
$m(t) = h_0(t, x(t))$ olacak şekilde tanımlanırsa (iv) şartından $m'(t) \leq \lambda(t) m(t)$ olur. Buradan, $h\big(t, x(t)\big) < \rho$ olduğunda , Gronwall's eşitsizliğide [7] kullanılarak

$$h_0\big(t, x(t)\big) \leq h_0(t_0, x_0) exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(s) ds\right) \tag{2.2.23}$$

olduğu anlaşılır.

δ'nın tanımından ve (2.2.23)' den $h_0(t_0, x_0) < \delta$ ise, $h_0\big(t, x(t)\big) < \delta_1,\ t_0 \leq t \leq \theta$ olduğunu görebiliriz. Bu demektir ki, (2.2.21)'den $V\big(t, x(t)\big) < a(\delta_1),\ \ t_0 \leq t \leq \theta$ dır. Eğer bu doğru değilse $t_2 > t_1 \geq \theta$ olacak şekilde, t_1, t_2 değerleri vardır.
$V\big(t_1, x(t_1)\big) = a(\delta_1),\ V\big(t_2, x(t_2)\big) = b(\varepsilon)$ eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$a(\delta_1)\ \leq\ V\big(t, x(t)\big) \leq b(\varepsilon),\ t \in [t_1, t_2] \tag{2.2.24}$$

olur. Dolayısıyla, $t = t_1$ olduğunda

$$D^+V(t_1, x(t_1)) \geq 0 \tag{2.2.25}$$

sonucu bulunur. Diğer taraftan $t_1 \geq \theta$ oldukça ve (2.2.24) sağlandıkça, (iii) koşulundan elde ederiz ki, $D^+V(t_1, x(t_1)) \leq g\big(t_1, V\big(t_1, x(t_1)\big) < 0$ eşitsizliği (2.2.25) ile çelişir. Bu kanıtlar ki, $t \geq \theta$ için $V\big(t, x(t)\big) < b(\varepsilon)$ olur. Şayet $h_0(t_0, x_0) < \delta$ oluyorsa, $V\big(t, x(t)\big) < b(\varepsilon), \quad t \geq t_0$ elde edilir. Sonuç olarak (2.2.21)'de gördüğümüz üzere (2.1.1.1) sisteminin (h_0, h)- düzgün kararlılığı kanıtlanmış olur.

2.3. KARŞIT TEOREM

Saptırılmış (Perturbed) diferansiyel denklemlerinin stabilite özelliklerinin araştırılmasında düzgün asimptotik kararlılığının önemi gözardı edilemez. Massera'nın karşıt teoreminden, orjinin düzgün asimptotik bir sonucu olarak saptırma (perturbation) teorisinde, geniş olarak faydalanılmaktadır.

İki ölçü cinsinden düzgün asimptotik kararlılık için, iki ölçünün arasında karşılıklı etkileşim zor gözükmektedir ve dolayısıyla zahmet çekmeden düzgün bir Lyapunov fonksiyonu kurmak mümkün değildir.

Böyle bir Massera tipi karşıt teorem gösterip ve kabul edip, bu zorluğun üstesinden gelmeye çalışalım. Massera'nın sonucunun değiştirilmiş halini anımsarsak, bu bizim aşağıdaki açıklamalarımız için faydalı olacaktır [8].

Lemma 2.3.1: Kabul edelim ki $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$ ve $\boldsymbol{\mu} > 0$ olsun. O zaman öyle bir $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ fonksiyonu vardır ki $\boldsymbol{a}\big(\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{s})\big) < exp(-\boldsymbol{\mu s})$, $\boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$ için eşitsizliğini sağlar. Buna ek olarak $\boldsymbol{h_0}, \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{\Gamma}$, h_0, h dan daha iyi ve $(\boldsymbol{h_0}, \boldsymbol{h})$ iki ölçü olsun. Bunun anlamını hatırlarsak bir $\boldsymbol{\lambda} > 0$ ve $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ için $\boldsymbol{h_0}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) < \lambda$ olacak şekilde $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h_0}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}))$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.3.1: L ve M pozitif sabitler olmak üzere

(i) $|h(t,x) - h(t,y)| \leq L\|x - y\|$ ve $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq M\|x - y\|$

$(t,x), (t,y) \in R_+ \times R^n$;

(ii) (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-düzgün kararlı ve (h, h)-düzgün atraktif olsun.

O halde sabit bir $\rho > 0$ için $U, W \in C[S(h,\rho), R_+]$ olmak üzere iki fonksiyon vardır ve bunlar x'e göre yerel Lipschitz'dirler, öyle ki

$(a) a, b \in \mathcal{K}$ iken ve $\rho_0 \in (0, \rho)$ sabiti ile $\varphi(\rho_0) < \rho$ olacak şekilde

$(t,x) \in S(h,\rho)$ için $U(t,x) \geq b\big(h(t,x)\big)$ ve $(t,x) \in S(h_0,\rho_0)$ için

$U(t,x) \leq a\big(h_0(t,x)\big)$ eşitsizlikleri sağlansın;

(b) $(t,x) \in S(h,\rho)$ için $D^+U(t,x) \leq 0$;

(c) $(t,x) \in S(h,\rho)$ için $N > 0$ sabit olmak üzere $W(t,x) \leq N$ ve

$(t,x) \in S(h_0,\rho_0)$ için $b_1 \in \mathcal{K}$ iken $W(t,x) \leq b_1(h_0(t,x))$;

(d) $(t,x) \in S(h,\rho)$ için $C \in \mathcal{K}$ iken $D^+W(t,x) \leq -C(U(t,x))$; olur.

İspat: $\rho > 0$ sabit ve herhangi bir $\nu > 0$ olmak üzere; $T = T(\nu) > 0$ seçelim. Bunlar birbirine (h,h)-düzgün-atraktif ile (ii)' de varsayıldığı gibi bağlıdırlar. Açıkça görülebilir ki T fonksiyonu azalandır.$(t,x) \in S(h,\rho)$ için ve $j = 1,2, ...$ olmak üzere

$$U_j(t,x) = sup\left\{G_j\left(h\big(t+\theta, x(t+\theta,t,x)\big)\right) : \theta \geq 0\right\} exp[-MT(j^{-1})] \qquad (2.3.1)$$

biçiminde tanımlanır.

$u \geq j^{-1}$ için $G_j(u) = u - j^{-1}$ olur ve $0 \leq u < j^{-1}$ olduğunda ise $G_j(u) = 0$ olur.

Açıkça $\forall\, u, \nu \geq 0$ için $\left|G_j(u) - G_j(\nu)\right| \leq |u - \nu|$ eşitsizliği sağlanır.

(h,h)-düzgün-atraktifliğinden ve G_j'nin sürekliliğinden dolayı ve h, U_j, (2.3.1)'de iyi tanımlı olup, $S(h,\rho)$ ' dan R_+ ya olan bir dönüşüme sahiptir.

$$U_j(t,x) = sup\left\{G_j\left(h\big(t+\theta, x(t+\theta,t,x)\big)\right): 0 \le \theta \le T(j^{-1})\right\} exp[-MT(j^{-1})] \quad (2.3.2)$$

Yukarıdaki bağıntıdan kolaylıkla görülebilir ki;

U_j, t' de süreklidir, üstelik (2.3.2)'den ve Gronwall's eşitsizliğinden

$$\left|U_j(t,x) - U_j(t,y)\right| \le sup\{\left|h\big(t+\theta, x(t+\theta,t,x)\big) - h\big(t+\theta, x(t+$$

θ,t,y: 0≤ θ≤T(j−1) exp−MT(j−1) (2.3.3)

$\le Lsup\{\|x(t+\theta,t,x) - x(t+\theta,t,y)\|: 0 \le \theta \le T(j^{-1})\}\ exp[-MT(j^{-1})]$,

$\le L\|x-y\|$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece $U_j \in C[S(h,\rho), R_+]$ olduğu görülür.

Şimdi $(t,x) \in S(h,\rho)$ için,

$$U(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\, U_j(t,x) \quad (2.3.4)$$

alalım. $T(\nu)$'nin azalan karakteri gözönünde tutulursa

$U_j(t,x) \le sup\{h(t+\theta, x(t+\theta,t,x)): 0 \le \theta \le T(j^{-1})\}$

$\le 1 + sup\{h(t+\theta, x(t+\theta,t,x)): 0 \le \theta \le T(1)\}, \qquad j = 1,2,\ldots,$

olur. Bu eşitsizlikten anlaşılır ki, $S(h,\rho)$' nun herhangi bir yoğun alt kümesi içinde, (2.3.4) serisi düzgün yakınsaktır. O halde $U \in C[S(h,\rho), R_+]$ dır.

$$|U(t,x) - U(t,y)| \le L\|x-y\| \quad (2.3.5)$$

eşitsizliğini (2.3.3)' den elde ederiz. (2.3.1) ve (2.3.4)' ün bir sonucu olarak görebiliriz ki, U (2.1.1.1) sisteminin çözümleri boyunca azalır. Bundan ve (2.3.5)' den $(t,x) \in S(h,\rho)$ için $D^+U(t,x) \le 0$ eşitsizliğini standart argümanlar izler. Şimdi $\alpha \in (0,\rho)$ verilsin. $j^{-1} < \alpha$ olacak şekilde $j \ge 1$ seçilirse,

$(t,x) \in S(h,\rho) \setminus S(h,\alpha)$ için $\beta = 2^{-j}(\alpha - j^{-1}) exp\ [-MT(j^{-1})]$ iken,

$U(t,x) \geq \ 2^{-j}U_j(t,x) \geq 2^{-j}[h(t,x)-j^{-1}]exp\,[-MT(j^{-1})] \geq \beta > 0$

olduğunu kabul edelim. Buradan şu sonuç çıkar; öyle bir $a \in \mathcal{K}$ fonksiyonu vardır ki $U(t,x) \geq a\big(h(t,x)\big)$, $(t,x) \in S(h,\rho)$ için sağlanır.

$\varepsilon \in (0,\rho)$ alalım, $j = 1,2,\ldots$, olduğunda ve $(t,x) \in S(h,\rho)$ olmak üzere,

$$U_j(t,x) \leq sup\{h(t+\theta, x(t+\theta,t,x)) \colon \theta \geq 0\} \tag{2.3.6}$$

olur. O halde (2.1.1.1) sisteminin (h_0,h)-düzgün kararlılığından bir $\delta(\varepsilon) > 0$ varlığı anlaşılabilir. Öyle ki $h_0(t,x) < \delta(\varepsilon)$ olduğunda $U(t,x) \leq \varepsilon$ olur. Bu ifade şuna denktir; $\varphi(\rho_0) < \rho$ olacak şekilde bir $\rho_0 \in (0,\rho)$ sabiti ve $(t,x) \in S(h_0,\rho_0)$ için $U(t,x) \leq a\big(h_0(t,x)\big)$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in \mathcal{K}$ fonksiyonu vardır. Bu yüzden U, (a) şartını sağlar. Bundan sonra, $C \in \mathcal{K}$ olacak şekilde , $W \colon S(h,\rho) \to R_+$ fonksiyonu

$$W(t,x) = \int_t^{\infty} C\big(U(\theta, x(\theta,t,x))\big)d\theta \tag{2.3.7}$$

olarak seçilir. (2.1.1.1) sisteminin $(h_0,U) -$ düzgün asimptotik kararlı olduğu ve (h,U)-kuasi düzgün asimptotik kararlı olduğunu (2.3.4), (2.3.6) ve (ii) varsayımından açıkça anlarız. O halde $p \in \mathcal{K}\ \ ve\ \ q \in \mathcal{L}$ iken

$$U(\theta, x(\theta,t,x)) \leq p\big(h_0(t,x)\big)q(\theta-t),\ \ (t,x) \in S(h_0,\widetilde{\rho_0}) \tag{2.3.8}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\widetilde{\rho_0} \in (0,\rho_0]$ sabiti vardır. Aynı zamanda

$$U(\theta, x(\theta,t,x)) \leq \beta(\theta-t),\ \ \theta \geq t \text{ ve } (t,x) \in S(h,\rho) \text{ için} \tag{2.3.9}$$

eşitsizliğini sağlayan $\beta \in \mathcal{L}$ fonksiyonu vardır. $\rho_0 = \widetilde{\rho_0}$ olsun, $C \in \mathcal{K}$ seçilirse öyle ki,

$$\int_0^{\infty} C(\beta(\theta)d\theta)\ \ ve\ \ \int_0^{\infty} \sqrt{C(p(\rho_0)q(\theta))}\,d\theta \tag{2.3.10}$$

integralleri yakınsaktır ve $C' \in \mathcal{K}$ olmak üzere;

$$C'\big(\beta(\theta)\big) \leq exp\,(-\mu\theta), \tag{2.3.11}$$

eşitsizliği $\mu \geq M+1$ iken sağlanır. Böyle bir seçim ancak Massera' nın (2.3.1) Lemması ile mümkündür. (2.3.9) ve (2.3.10)' un sonucundan, W iyi tanımlı ve $S(h,\rho)$' da sınırlıdır. $(t,x),(t,y) \in S(h,\rho)$ için
$U\big(\theta,x(\theta,t,x)\big) \leq \xi \leq U\big(\theta,x(\theta,t,y)\big)$ yada $U\big(\theta,x(\theta,t,y)\big) \leq \xi \leq U\big(\theta,x(\theta,t,x)\big)$
iken,

$$|W(t,x)-W(t,y)| \leq \int_t^\infty \left|C\left(U\big(\theta,x(\theta,t,x)\big)\right) - C\left(U\big(\theta,x(\theta,t,y)\big)\right)\right| d\theta$$

$$= \int_t^\infty \left[C'(\xi)\left|U\big(\theta,x(\theta,t,x)\big) - U\big(\theta,x(\theta,t,y)\big)\right|\right] d\theta$$

olur.
$C' \in \mathcal{K}$ ve U' nun x ‘ e göre Lipschitz olması kullanılarak,

$$|W(t,x)-W(t,y)| \leq L\int_t^\infty C'\,(\beta(\theta-t))\|x(\theta,t,x)-x(\theta,t,y)\|d\theta$$

$$\leq L\|x-y\|\int_t^\infty exp[(\theta-t)(M-\mu)]\,d\theta$$

$$\leq L\|x-y\|\int_0^\infty exp[(M-\mu)\theta]\,d\theta$$

İntegral eşitsizliklerini elde ederiz. Böylece,

$$|W(t,x)-W(t,y)| \leq L\|x-y\| \tag{2.3.12}$$

sağlanır. Buradan Gronwall’s eşitsizliği [7] kullanılırsa (2.3.9), (2.3.11) bağıntıları ve $\mu \geq M+1$ seçilirse, W t’de sürekli olur, bu durumda (2.3.12) ile birlikte $W \in C[S(h,\rho),R_+]$ olduğu ispatlanır .(2.3.8) ve (2.3.10)’ den dolayı $(t,x) \in S(h_0,\rho_0)$ için,

$$W(t,x) \leq \int_t^\infty C(p(\,h_0(t,x))q(\theta-t))d\theta$$

$$\leq [C(p(h_0(t,x)q(0))]^{1/2}\int_0^{\infty}[C(p(\rho_0)q(\theta))]^{1/2} \equiv b_1\big(h_0(t,x)\big),$$

olur.

Şimdi, (2.3.12) kullanılarak $(t,x) \in S\ (h,\rho)$ için $D^{+}W(t,x) = -C(U(t,x))$ olduğunu gösterelim. U ve W fonksiyonları istenen özellikleri sağladığından ispat tamamlanmış olur.

Diğer taraftan (2.1.1.1) sisteminin, şayet aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (h_0,h)-düzgün kararlı ve (h,h)- kuasi düzgün asimptotik kararlı olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

(i) h_0 düzgün olarak h‘ dan daha iyi;

(ii) $\forall\rho > 0$ için $\forall x(t,t_0,x_0)$ çözümü $h(t_0,x_0) < \rho$ ile $\forall\ t \geq t_0$ için vardır;

(iii) $U,W \in C[S(h,\rho),R_{+}]$ fonksiyonları vardır ki, bunlar x’ e göre yerel Lipschitz ve Teorem 2.3.1’ in $(a),(b),(c),(d)$ şartlarını sağlarlar.

Sonuç 2.3.1: Teorem 2.3.1’ in $(\boldsymbol{i})$ ve $(\boldsymbol{ii})$ şartlarını kabul edelim. O halde $\boldsymbol{\rho} > 0$ sabiti için öyle bir $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{C}[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\rho}),\boldsymbol{R}_{+}]$ fonksiyonu vardır ki bu bir sabit için $\boldsymbol{x}$’ e göre Lipschitz’dir.

(a) $a,b\ \in \mathcal{K}$ iken, $(t,x) \in S\ (h,\rho)$ için $V(t,x) \geq b(h(t,x))$ ve $(t,x) \in S\ (h_0,\rho_0)$ için $V(t,x) \leq a(h_0(t,x))$’ dır. $\varphi(\rho_0) < \rho,\ \ \rho_0 \in (0,\rho)$ bir sabittir.

(b) $\gamma\ \in \mathcal{K}$ iken, $(t,x) \in S\ (h,\rho)$ için $D^{+}V(t,x) \leq -\gamma(h(t,x))$

gerçekten, eğer U ve V fonksiyonları Teorem 2.3.1 de elde edilmişse $V = U + W$ fonksiyonu $a = b + b_1, \gamma = c$ olacak şekilde istenilen özellikleri sağlar.

Eğer $h(t,x) = h_0(t,x)$ oluyorsa Teorem 2.3.1 ve onun sonucu, iki denk önermedir. Bu yüzden $h(t,x) = h_0(t,x) = \|x\|$ olduğu zaman, Teorem 2.3.1 düzgün asimptotik kararlılığını, V’nin düzgünlüğü hakkında daha fazla iddia öne süren Massera’nın iyi bilinen karşıt teoremine [8] indirger. Eğer $h(t,x) = \|x\|_s$ ve $h_0(t,x) = \|x\|$ iken, $\|.\|$ öklit normu ve $\|x\|_s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots .x_s^2}$ $(s < n)$ olarak tanımlanırsa, Teorem 2.3.1 kısmi düzgün asimptotik kararlılığı için karşıt teorem haline gelir. Açıkça görülüyor ki, h ve h_0’ ın farklı seçimleri mümkündür ve bu yüzden Teorem 2.3.1 çeşitli uygulamalarda kullanılabilecek kadar, esnek bir sonuç verir.

Eğer Massera'nın teoreminin ispatını dikkatlice incelersek atraksiyonun tanım kümesi düzgün bir Lyapunov fonksiyonun elde edilmesinde önemli bir rol oynar. Sonuç olarak iki ölçü uygulandığında bu özellik gösterir ki, Teorem 2.3.1' in ispatı kabul edilebilir ve doğaldır.

2.4. SINIRLILIK VE LAGRANGE KARARLILIK

Kararlılık notasyonlarının farklı tiplerine karşılık gelen farklı tipte sınırlılık kavramları vardır. Şimdi onları tanımlayalım.

Tanım 2.4.1: $\boldsymbol{h_0}, h \in \boldsymbol{\Gamma}$ alalım. O halde (2.1.1.1) diferansiyel denklem sistemi için söyleyebiliriz ki,

(B_1) $\forall \alpha > 0,\ t_0 \in\ R_+$ için t_0' da sürekli $\beta = \beta(t_0, \alpha)$, pozitif fonksiyon olsun.Her bir α için $h_0(t_0, x_0) \leq \alpha$ olduğunda $h(t, x(t)) < \beta, t \geq t_0$ oluyorsa (2.1.1.1)'in herhangi bir çözümü $x(t) = (t, t_0, x_0)$ iken (h_0, h)-eş-sınırlıdır.

(B_2) Eğer, (B_1)' de ki β, t_0' dan bağımsız ise, (h_0, h)- düzgün sınırlıdır.

(B_3) $\forall \alpha \geq 0$ ve $t_0 \in R_+$ için N ve $T = T(t_0, \alpha)$ pozitif sayıları mevcut olsun.$\forall \alpha\ için\ h_0(t_0, x_0) \leq \alpha$ olduğunda $h\big(t, x(t)\big) < N,\ \ t \geq t_0 + T$ sağlanır ise (h_0, h)-kuasi eş-ileride (ultimately) sınırlıdır denir.

(B_4) Eğer (B_3)'deki T, t_0'dan bağımsız ise (h_0, h)-kuasi-düzgün-ileride (ultimately) sınırlıdır.

(B_5) Eğer (B_1) ve (B_3) birlikte sağlanıyorsa, (h_0, h)- eş-ileride(ultimately) sınırlıdır.

(B_6) Eğer (B_2) ve (B_4) birlikte sağlanıyorsa, (h_0, h)-düzgün-ileride (ultimately) sınırlıdır.

(B_7) (B_1) ve (S_7) birlikte sağlanıyorsa (h_0, h)-eş-Lagrange kararlıdır.

(B_8) (B_2) ve (S_8) birlikte sağlanıyorsa (h_0, h)-düzgün Lagrange kararlı olur.

Tanım 2.4.1' e karşılık gelen (2.2.1) karşılaştırma denklemi için sınırlılık tanımına ihtiyacımız vardır.

(B_1^*) herhangi bir $\alpha > 0$ ve $t_0 \in R_+$ için, öyle bir $\beta(t_0, \alpha) > 0$ vardır ki, $u_0 \leq \alpha$ için $u(t, t_0, u_0) < \beta$, $t \geq t_0$ olur. Buradan (2.2.1)' in herhangi bir çözümü $u(t, t_0, u_0)$ iken (2.2.1) karşılaştırma denklemine eş-sınırlı [9] denilebilir.

Şayet (B_1)' deki β' ya dikkat edecek olursak $\beta(t_0, .) \in \mathcal{K}$ olmak üzere, (h_0, h)-sınırlılığından (h_0, h)-kararlılığı anlaşılır. $\varepsilon > 0$ verildiğinde, bazı ε' lar için t_0'da sürekli öyle bir $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ vardır ki, $\alpha \leq \delta$ iken $\beta(t_0, \alpha) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.
Şimdi eş-sınırlılık ile ilgili bir sonucun ispatını verelim.

Teorem 2.4.1:

(i) $h_0, h \in \Gamma$ ve $h(t,x) \leq \varphi\big(t, h_0(t,x)\big)$, $\varphi \in C\mathcal{K}$;

(ii) $V \in C[R_+ \times R^n, R_+]$, $V(t,x)$, x' e göre yerel Lipschitz, $a \in \mathcal{K}$ ve

$p \in C[R_+ \times R_+, R_+]$ fonksiyonları için

$$a(h(t,x)) \leq V(t,x) \leq p\big(t, h_0(t,x)\big), (t,x) \in R_+ \times R^n \tag{2.4.1}$$

dır ve $\gamma \to \infty$ olduğunda $a(\gamma) \to \infty$ sağlansın.
(iii) $D^+V(t,x) \leq 0, (t,x) \in R_+ \times R^n$ olsun.

O halde (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-eş-sınırlı olur.

İspat: $\alpha > 0$ ve $t_0 \in R_+$ verilsin ve $x(t) = (t, t_0, x_0)$ (2.1.1.1) sisteminin herhangi bir çözümü $h_0(t_0, x_0) \leq \alpha$ iken sağlansın. $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$ seçelim, öyle ki,

$$\beta > max\{\varphi(t_0, \alpha) a^{-1}(p(t_0, \alpha))\} \tag{2.4.2}$$

dır. (2.4.1) ve (2.4.2)'den kolaylıkla görülebilir ki, $h(t_0, x_0) < \beta$ olur. Buradan

$$h(t, x(t)) < \beta, t \geq t_0 \tag{2.4.3}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim.

Eğer bu yanlış ise o zaman bir $t_1 > t_0$ olmalıydı öyle ki $h(t_1,\ x(t_1)) = \beta$ sağlansın. (ii) ve (iii) varsayımlarında ki, $V(t, x(t))$ artmayan olduğunda (2.4.1)'den $a(\beta) \leq V(t_1, x(t_1)) \leq V(t_0, x_0) \leq p(t_0, \alpha)$ eşitsizliği elde edilir. Bu da (2.4.2) ile çelişir. Bu yüzden, (2.4.3) doğru ve (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-eş sınırlı olur.

Teorem 2.4.2:

(i) $h_0, h\ \in \Gamma$ ve $h(t,x) \leq \varphi\big(h_0(t,x)\big),\ \varphi \in \mathcal{K}$;

(ii) $V \in C[S^c(h_0, \rho), R_+], V(t,x)\ \ x$' e göre yerel Lipschitz $a \in \mathcal{K}$ ve $q \in C[R_+, R_+]$ fonksiyonları için

$$a(h(t,x)) \leq V(t,x) \leq q(h_0(t,x)),\ (t,x) \in S^c(h_0, \rho) \tag{2.4.4}$$

dır. Ayrıca $\gamma \to \infty$ olduğunda $a(\gamma) \to \infty$ sağlansın;

(iii) $D^+V(t,x) \leq 0, (t,x)) \in S^c(h_0, \rho)$ olsun.

O halde (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-düzgün sınırlıdır.

İspat: Herhangi bir $\alpha > 0$ için $\beta = \beta(\alpha) > 0$ seçilirse

$$\alpha(\beta) > max\,\{q(\alpha), q(\rho), a^{-1}\big(\varphi(\alpha)\big), a^{-1}\big(\varphi(\rho)\big)\} \tag{2.4.5}$$

$t_0 \in R_+$ ve $h_0(t_0, x_0) < \alpha$ alalım. Şimdi varsayalım ki, (2.1.1.1) sisteminin bazı çözümleri $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ için ve t^*, $h(t^*, x(t^*)) \geq \beta$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde tanımlansın. O halde $t_0 \leq t_1 < t_2 \leq t^*$ olacak şekilde öyle t_1 ve t_2 sayıları vardır ki

$h_0\big(t_1, x(t_1)\big) = max\{\alpha, \rho\}$, $h(\,t_2, x(\,t_2)) = \beta$ iken

$$\big(t, x(t)\big) \in S(h, \beta) \cap S^c(h_0, max\{\alpha, \rho\}),\ t \in [t_1,\ t_2) \tag{2.4.6}$$

olur. (2.4.4)'den $V(t_1, x(t_1)) \leq q(h_0(t_1, x(t_1)) = max\{q(\alpha), q(\rho)\}$ ve $V(t_2, x(t_2)) \geq a(h(t_2, x(t_2)) = a(\beta)$ olduğu anlaşılır. Diğer taraftan elimizde (iii) varsayımından $V(t_2, x(t_2)) \leq V(t_1, x(t_1))$ eşitsizliği vardır. Bu yüzden $a(\beta) \leq max\{q(\alpha), q(\rho)\}$ eşitsizliği (2.4.5) ile çelişir. Dolayısıyla $h_0(t_0, x_0) \leq \alpha$ olduğunda $h(t, x(t)) < \beta,\ t \geq t_0$ olur ve bu nedenle (2.1.1.1) sistemi(h_0, h)-düzgün sınırlıdır.

Teorem 2.4.3: Teorem 2.4.2 $(\boldsymbol{i})$ ve $(\boldsymbol{ii})$ şartlarını sağlasın. Buna ek olarak, farzedelim ki,

$(iii)^*$ $D^+V(t, x) \leq -C(h_0(t, x)),\ (t, x) \in S^c(h_0, \rho),\ C \in \mathcal{K}$ olsun. O halde (2.4.1) sistemi(h_0, h)-düzgün-ileride(ultimately) sınırlı olur.

İspat: Kabul edelim ki, (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-düzgün sınırlı olsun, o zaman bir N pozitif tam sayısı vardır öyle ki,
$h_0(t_0, x_0) < \rho$ olduğunda,

$$h(t, x(t)) < N, t \geq t_0 \tag{2.4.7}$$

olur. Şimdi (2.1.1.1)'in $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümlerini düşünelim $h_0(t_0, x_0) < \alpha$ ile birlikte α keyfi bir sabit iken $\alpha > \rho$ olur. O halde öyle bir $\beta = \beta(\alpha)$ sayısı vardır ki, $t \geq t_0$ olacak şekilde $h(t, x(t)) < \beta$ eşitsizliğini sağlar.
$T = \frac{q(\alpha)+1}{C(\rho)}$ olacak şekilde öyle bir $t^* \in [t_0, t_0 + T]$ vardır ki $h_0(t^*, x(t^*)) < \rho$ olur.
Eğer bu doğru değilse $h_0(t, x(t)) \geq \rho,\ t \in [t_0, t_0 + T]$ olduğunu kabul edelim.
$(iii)^*$ varsayımından,

$$V(t_0 + T, x(t_0 + T)) \leq V(t_0, x_0) - C(\rho)T \tag{2.4.8}$$

olur ki, bu bizi (2.4.4) ile birlikte, $0 \leq q(\alpha) - C(\rho)\frac{q(\alpha)+1}{C(\rho)} < 0$ çelişkisine götürür.

Bu yüzden, 2.4.7'den görüleceği üzere, $t \geq t_0 + T$ iken, $h_0(t_0, x_0) < \alpha$ olduğunda $h(t, x(t)) < N$ olduğu anlaşılır ki, T sadece α'ya bağlıdır. Bu yüzden (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-düzgün ileride(ultimately) sınırlı olur.

Teorem 2.4.4: Kabul edelim ki, Teorem 2.4.1' in $(\boldsymbol{i})$ ve $(\boldsymbol{ii})$ şartları gerçekleşmiş olsun. Bunlara ek olarak,

$(iii)^*$ $D^+V(t,x) \leq -C(h(t,x)),\ (t,x) \in R_+ \times R^n$;

(iv) $h \in C^1[R_+ \times R^n, R_+]$ ve herhangi bir $\rho > 0$ için $h'(t,x),\ S(h,\rho)$'da sınırlı olsun.

O halde (2.1.1.1) sistemi (h_0, h)-eş-Lagrange kararlı olur.

İspat: (h_0, h)-eş-sınırlılığı, Teorem 2.4.1' i izler ve (h_0, h)-atraktifliği Teorem 2.1.2.3' ün ispatına benzer argumanlar kullanılarak ispatlanabilir.

Sonuç olarak, bazı özel durumları içeren karşılaştırma prensibini kullanarak genel bir sonuç ispatlamış olduk.

Teorem 2.4.5:

(i) $h_0, h \in \Gamma$ ve $h(t,x) \leq \varphi(h_0(t,x)),\ \varphi \in \mathcal{K}$;

(ii) $V \in C[R_+ \times R^n, R_+],\ V(t,x)$ x' e göre yerel Lipschitz, h pozitif tanımlı ve h_0-azalan, $b \in \mathcal{K}$ fonksiyonu ile beraber Tanım 2.1.1.3' de $u \to \infty$ olduğunda $b(u) \to \infty$;

(iii) $g \in C[R_+ \times R, R]$ ve $(t,x) \in R_+ \times R^n$ için $D^+V(t,x) \leq g(t, V(t,x))$ olsun.

O halde sınırlılık ve (2.2.1)'in Lagrange kararlılık özelliklerinin, (h_0, h) sınırlılığı ve (2.1.1.1)'in Lagrange kararlılık özelliklerine özdeş olduğu anlaşılır.

İspat: Diğer kavramların ispatı benzer olduğu için, (2.1.1.1)'in (h_0, h) sınırlılığının ispatını göstermek yeterlidir. (ii) varsayımından görüldüğü üzere (2.2.5) ve (2.2.7) bağıntıları $\lambda_0 = \varphi^{-1}(\lambda)$' yı sağlasın. $0 < \alpha \leq \lambda_0$ ve $t_0 \in R_+$ alalım. $\alpha_1 = a(\alpha)$ ve varsayalım ki, (2.2.1) sınırlı olsun. O halde verilen $\alpha_1 > 0$ ve $t_0 \in R_+$ için öyle bir $\beta_1 = \beta_1(t_0, \alpha)$ vardır ki, $u(t, t_0, u_0)$ (2.2.1)' in herhangi bir çözümü iken $u_0 < \alpha_1$ olduğunda

$$u(t, t_0, u_0) < \beta_1, \ t \geq t_0 \tag{2.4.9}$$

olur.

Öyle bir $\beta = \beta(t_0, \alpha)$ seçelim ki $b(\beta) \geq \beta_1$ eşitsizliğini sağlasın ve $h_0(t_0, x_0) < \alpha$ alalım. O zaman (2.2.7)'den $h(t_0, x_0) < \beta$ olduğu anlaşılır.

Eğer mümkün olursa, (2.1.1.1)'in $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümü mevcut olsun ve $t_1 > t_0$ olacak şekilde

$$h\big(t_1, x(t_1)\big) = \beta \text{ ve } h\big(t, x(t)\big) \leq \beta, t \in [t_0, t_1] \tag{2.4.10}$$

dır. O halde Teorem 2.2.1' den $u_0 = V(t_0, x_0)$ alınırsa, $\gamma(t, t_0, u_0)$ (2.2.1)' in maksimal çözümü iken,

$$V(t, x(t)) \leq \gamma(t, t_0, u_0), \ t \in [t_0, t_1] \tag{2.4.11}$$

elde edilir. Buradan (2.2.5), (2.4.9) ve (2.4.10) bağıntıları bizi

$b(\beta) \leq V\big(t_1, x(t_1)\big) \leq \gamma(t_1, t_0, u_0) < b(\beta)$ çelişkisine götürür ki, böylece ispat biter.

3. BULGULAR

Sınırlılık teorisindeki, Lyapunov'un ikinci metodunun uygulanmasında çözümlerin gerekmemesi bir avantaj sağlar [5].

Sınırlılıkta kullanılan parametre teknikleri çeşitlerinin geniş uygulamaları bulunmaktadır. İki ölçü cinsinden sınırlılık teorisi, sınırlılığın bilinen kavramlarının çeşitlerini içerir ve bunları birleştirir [10]. Bu bölümde etkili sonuç veren teknikleri, Lyapunov benzeri fonksiyonlarla ve başlangıç zaman farkıyla, lineer olmayan diferansiyel denklem sistemler için bir sınırlılık kriteri elde ederek uygulayacağız.

Bir saptırılmış (purterbed) diferansiyel sistemine karşılık bir saptırılmamış (unperturbed) diferansiyel sistemine göre, iki ölçü cinsinden hem başlangıç zamanını, hemde başlangıç durumu farklı alarak, sınırlılığı başlangıç zaman farklı, değişimli karşılaştırma sonuçları uygulayarak vereceğiz [9].

3.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Aşağıda verilen lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerini ele alalım.

$$x' = f(t,x), x(t_0) = x_0 \qquad t \geq t_0 \geq 0,\ t_0 \in R_+ \text{ için} \tag{3.1.1}$$

$$x' = f(t,x), x(\tau_0) = y_0 \qquad t \geq \tau_0 \geq 0 \quad \text{için} \tag{3.1.2}$$

Yukarıdaki diferansiyel denklem sistemine göre ve

$$y' = F(t,y), y(\tau_0) = y_0 \qquad t \geq \tau_0 \quad \text{için} \tag{3.1.3}$$

$$w' = H(t,w), w(\tau_0) = y_0 - x_0 \qquad t \geq \tau_0 \quad \text{için} \tag{3.1.4}$$

Saptırılmış (Perturbed) sistemleri,

$f, F, H \in C[R_+ \times R^n, R^n]$ olduğunda, $R_+ \times S(\rho)$ kümesinde yerel Lipschitz koşulunu sağlasın ve burada $S(\rho) = \{x \in R^n : \|x\| < \rho < \infty\}$ olsun.

Yukarıdaki varsayımlar, (t_0, x_0) ve (τ_0, y_0)' dan geçen çözümlerin varlığını ve tekliğini garanti altına alır.

Tanım 3.1.1: Eğer $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{C}[(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\rho}),\boldsymbol{R}_+]$, $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ ve $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r}$' de kesin monoton artan ise $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r})$, $\mathcal{K}$ sınıfına ait fonksiyondur.

Tanım 3.1.2: Eğer $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}[\boldsymbol{R}_+^2, \boldsymbol{R}_+]$ ve $\forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{R}_+$ **için** $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ ise $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})$ fonksiyonu $\boldsymbol{C\mathcal{K}}$ sınıfına aittir.

Tanım 3.1.3: Eğer $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}[\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{R}_+]$, $\boldsymbol{inf}_{(t,x)}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$

$\forall (t,x) \in R_+ \times R^n$ için sağlanıyorsa, $h(t,x)$ fonksiyonu Γ sınıfına aittir.

Tanım 3.1.4: Eğer $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{\Gamma}$, $sup_{t\in R_+}h(t,x)$, $x \in R^n$ için varsa $h(t,x)$ fonksiyonu $\boldsymbol{\Gamma}_0$ sınıfına aittir.

Tanım 3.1.5: Eğer bir $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}) \in \mathcal{K}$ fonksiyonu, $\boldsymbol{\phi}(\|\boldsymbol{x}\|) \leq \boldsymbol{V}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$,

$(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) \leq -\boldsymbol{\phi}(\|\boldsymbol{x}\|))$ bağıntısını $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\rho})$ için sağlar ve

bir reel değerli $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ fonksiyonu $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\rho})$ kümesinde tanımlanırsa $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ olduğunda, $\boldsymbol{t} > 0$ pozitif tanımlı olur. Eğer $-\boldsymbol{V}$ pozitif tanımlı ise $\boldsymbol{V}$'ye negatif tanımlıdır denir.Öyle bir $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ fonksiyonu vardır ki, $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\rho})$ için

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{\psi}(\|\boldsymbol{x}\|)$ bağıntısını sağladığında $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ fonksiyonu azalan olur.

Tanım 3.1.6: Bir reel değerli $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{C}[\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{R}_+]$ fonksiyonu için genelleştirilmiş türevleri(Dini-tipli türevler)

$$D_*^+V(t,s,x) = \lim_{h\to 0^+} sup \frac{1}{h}\left[V(s+h, y\big(t, s+h, x+hf(s,x)\big) - V(s, y(t,s,x))\right]$$

$$D_{*-}V(t,s,x) = \lim_{h\to 0^-} inf \frac{1}{h}\left[V(s+h, y\big(t, s+h, x+hf(s,x)\big) - V(s, y(t,s,x))\right]$$

olarak tanımlayabiliriz.

Tanım 3.1.7: (3.1.3) sisteminin $y(t,\tau_0,y_0)$ çözümü için başlangıç zaman farklı (h_0,h) sınırlılığı $x(t-\eta,t_0,x_0)$ çözümüne karşılık söylenebilir. $x(t,t_0,x_0)$ (3.1.3) sisteminin herhangi bir çözümü iken $t \geq \tau_0 \geq 0$, $t_0 \in R_+$ için ve $\eta = \tau_0 - t_0$ ancak ve ancak herhangi bir $\alpha > 0$ ve $\tau_0 \in R_+$ verilirse $\beta = \beta(\alpha, \tau_0) > 0$ olur. Öyle ki,

$h_0(\tau_0, y_0 - x_0) \leq \alpha$ olduğunda $t \geq \tau_0$ için $h(t, y(t,\tau_0,y_0) - x(t-\eta,t_0,x_0)) < \beta$ olur.

3.2 İKİ ÖLÇÜ CİNSİNDEN BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI SINIRLILIK

Bu bölümün esas sonucu, Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 deki Lyapunov tipli fonksiyonlar cinsinden, yeni bir başlangıç zaman farklı karşılaştırma sonucu bulmaktır. Bir sonraki bölümde iki ölçü cinsinden başlangıç zaman farklı sınırlılık sonucu elde edebiliriz [11].

Teorem 3.2.1:

(i) $V \in C[R_{+} \times R^{n}, R_{+}^{N}]$, her bir (t,s) için, z' e göre $V(t,z)$ ve $\|w(t,s,z)\|$ yerel Lipschitz koşulunu sağlarken, $w(t) = w(t,\ \tau_0, y_0 - x_0)$ (3.1.4)'ün bir çözümü ve $t \geq s \geq\ \tau_0$ için $\tilde{x}(t) = x(t-\eta, t_0, x_0)$ olduğunda $x(t, t_0, x_0)$ (3.1.1) sisteminin çözümü ve $z(t) = y(t) - \tilde{x}(t)$ olduğunda $y(t) = y(t,\ \tau_0, y_0)$ (3.1.3) sisteminin çözümü olsun.

(ii) $D_{*-}V(t,s,z) = \lim_{h\to 0^-} inf\, \frac{1}{h}\left[T(t,s,h,w,F-\widetilde{f}\,)\right]$ iken

$T = V(s+h, w\left(t, s+h, z+h\left(F(s,y) - \tilde{f}(s,\tilde{x})\right)\right) - V(s, w(t,s,z))$

$$D_{*-}V(t,s,z) \leq g(t,s,V\big(s,w(t,s,z)\big)) \tag{3.2.1}$$

dır.

(iii) $g \in C[R_{+}^{2} \times R_{+}^{N}, R^{N}]$, $g(t,s,u)$ her bir (t,s) için u' da kuasi monoton azalmayan ve $r(t,s,\ \tau_0, y_0)$,

$$\frac{du(s)}{ds} = g\big(t,s,u(s)\big),\ u(\ \tau_0) = u_0 \geq 0 \tag{3.2.2}$$

denkleminin maksimum çözümü $\tau_0 \leq s \leq t < \infty$ için mevcuttur.

O halde $V(\ \tau_0, w(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0)) = u_0$ olduğu zaman

$$V(t, z(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0)) \leq r_0(t,\ \tau_0,\ V(\ \tau_0, w(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0))) \tag{3.2.3}$$

eşitsizliği $r_0\big(t,\ \tau_{0,}\ u_0\big) = r(t,t,\ \tau_0\ , u_0)$ iken sağlanır.

İspat: $m(t,s) = V(s, w(t,s,z(s)))$ alalım. O zaman (i) ve (ii) varsayımları kullanılarak $\tau_0 \le s \le t$ için $D_{*-}m(t,s) \le g(t,s,m(t,s))$ diferansiyel eşitsizliği elde edilir. Bu da bizi $\tau_0 \le s \le t$ için $m(t,s) \le r(t,s,\ \tau_0\ , V\ (\tau_0, w(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0)))$ karşılaştırma sonucuna götürür [5].

Eğer $s = t$ seçilirse, (3.2.3)' deki bağıntı hemen hemen ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.2: $\boldsymbol{N = 1}$ ile Teorem 3.2.1' in varsayımları altında ve $\boldsymbol{g(t,s,u) \equiv 0}$ iken $V(t, z(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0)) \le\ V\ (\tau_0, w(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0)),\ t \ge\ \tau_0$ olsun. Buna ek olarak varsayalım ki,

(i) $c \in \mathcal{K} = \{\phi \in C[R_+, R_+]$ öyle ki, $\phi(0) = 0$ ve $\phi(s)$ s' e göre artan $\}$ iken,

$D_{*-}V(t,s,z) \le -c\left(h_1(s, w(t,s,z))\right),\ \tau_0 \le s \le t < \infty$ ve $h_1 \in C[R_+ \times R^n, R_+]$ dır.

O halde $t \ge s \ge\ \tau_0$ için,

$$V(t, z(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0)) \le V\ (\tau_0, w(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0)) - \int_{\tau_0}^{t} c\left(h_1\left(s, w(t,s,z(s))\right)\right) ds \tag{3.2.4}$$

olsun.

İspat: $W\left(s, w(t,s,z(s))\right) \equiv V\left(s, w(t,s,z(s))\right) + \int_{\tau_0}^{t} c\left(h_1\left(s, w(t,s,z(s))\right)\right) ds$

alınıp, Dini- türevinin iki yanı ve (i) varsayımı kullanılırsa

$D_{*-}W(s, z(s)) \le D_{*-}V(t,s,z(s)) +\ c\left(h_1\left(s, y(t,s,z(s))\right)\right) \le 0$ eşitsizliği bulunur.

O halde $t \ge \tau_0$ için, $W(t, z(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0)) \le W(\tau_0, w(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0))$ vardır. Bu demektir ki, W tanımı $t \ge \tau_0$ için,

$V(t, z(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0)) + \int_{\tau_0}^{t} c\left(h_1\left(s, w(t,s,z(s))\right)\right) ds \le V(\tau_0, w(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0))$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Esas sonuç, Teorem 3.2.2 kullanılarak iki ölçü cinsinden başlangıç zaman farklı bir sınırlılık kriteri oluşturulmasıdır. Eğer (3.1.3) sisteminin $y(t,\ \tau_0, y_0)$ çözümü, başlangıç zaman farklı (h_0, h_0) sınırlı $x(t-\eta, t_0,\ x_0)$ çözümüne karşılık gelecek şekilde alınırsa o zaman, (3.1.3) sisteminin $y(t,\ \tau_0, y_0)$ çözümü $x(t-\eta, t_0,\ x_0)$ çözümüne karşılık gelen başlangıç zaman farklı sınırlılığı verir.

Teorem 3.2.3:

$(i)\ V \in C[R_+ \times R^n, R_+]$, $V(t,z)$ ve $\|w(t,s,z)\|$ her bir (t,s) için z'e göre yerel Lipschitz ve $w(t) = w(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0)$ iken (3.1.4) çözümü ve $t \geq \tau_0$ için,
$z(t,\ \tau_0, y_0 -\ x_0) = y(t) - \tilde{x}(t)$;
$(ii)\ \ D_{*-}V(t,s,z) = \lim_{h\to 0^-} inf \frac{1}{h}\left[T(t,s,h,w,F-\tilde{f})\right]$
$S(h,\rho) = \{(t,z): h(t,z) < \rho, \exists h \in \Gamma$ için ve $\rho > 0\}$ olmak üzere $D_{*-}V(t,s,z) \leq 0$;
$(iii)\ b \in \mathcal{K}$ ve $a_1, a_0 \in C\mathcal{K}$ iken ve $S(h,\rho)$'a göre $b\big(h(t,z)\big) \leq V(t,z)$
$S(h_1,\rho) \cap\ S(h_2,\rho)$'a göre $V(t,z) \leq a_1\big(t, h_1(t,z)\big) +\ a_0(t, h_0(t,z))$;
$(iv)\ h_0$, h'dan daha iyi olsun. Bu demektir ki öyle bir $\phi \in \mathcal{K}$ fonksiyonu vardır ki,
$h_0(t,z) \leq \rho_0$ olduğu zaman $\phi(\rho_0) < \rho$ olacak şekilde $\exists\ \rho_0$ değerleri için
$h_1(t,z) \leq \phi(h_0(t,z))$ olmasıdır;
(v) (3.1.3) sisteminin $y(t,\ \tau_0, y_0)$ çözümü, $x(t-\eta, t_0,\ x_0)$ çözümüne karşılık gelecek şekilde başlangıç zaman farklı (h_0, h_0) sınırlılığı olsun.
O halde (3.1.3) sisteminin $y(t,\ \tau_0, y_0)$ çözümü, $x(t-\eta, t_0,\ x_0)$ çözümüne karşılık gelecek şekilde başlangıç zaman farklı (h_0, h) sınırlıdır.

İspat: $0 < \alpha < \rho$ ve $\phi(\rho_0) < \rho$ olacak bir ρ_0 verilsin. $\rho_0 > \eta(\ \tau_0, \alpha) > 0$ seçilirse o zaman $h_0\big(t, z(t)\big) < \eta,\ t \geq \tau_0$ olduğunda, $a_0(t, h_0(t, z(t))) < \frac{b(\alpha)}{2}$ sağlanır. (v) hipotezinden öyle bir $\beta_1 = \beta_1(\ \tau_0, \eta)$ vardır ki, $h_0(\ \tau_0, y_0 -\ x_0) < \beta_1$ olmak şartıyla $h_0\big(t, z(t)\big) < \eta$ sağlanır. Bu yüzden $t \geq \tau_0$ için,

$$a_0(t, h_0(t, z(t))) < \frac{b(\alpha)}{2} \text{ olduğu zaman, } h_0(\ \tau_0, y_0 -\ x_0) < \beta_1 \tag{3.2.5}$$

dır. Benzer şekilde $\rho_0 > \sigma(\ \tau_0, \alpha) > 0$ seçilirse öyle ki, $h\big(t, w(t)\big) <\ \sigma$ olduğunda $t \geq \tau_0$ için, $a_1(t, h_1(t, z(t))) < \frac{b(\alpha)}{2}$ olduğunu anlarız.
$\beta_2 = \beta_2(\ \tau_0, \sigma)$ olacak şekilde tanımlanırsa h_0 h'dan daha iyi iken $h_0(\ \tau_0, y_0 -\ x_0) < \beta_2$ olduğunda $h_0\big(t, z(t)\big) < \phi^{-1}(\sigma)$ olur. Buradan $h_1\big(t, z(t)\big) \leq \phi\left(h_0\big(t, z(t)\big)\right) < \sigma$ elde ederiz. O halde $t \geq \tau_0$ için,

$$h_0(\,\tau_0, y_0 - \,x_0) < \beta_2 \text{ olmak şartıyla } a_1(t, h_1(t, z(t))) < \tfrac{b(\alpha)}{2} \tag{3.2.6}$$

sağlanır. (3.1.3) sisteminin $y(t,\,\tau_0, y_0)$ çözümü $x(t-\eta, t_0,\,x_0)$ çözümüne karşılık gelen başlangıç zaman farklı (h_0, h) sınırlı olduğunu gösterebiliriz.
$t \geq \tau_0$ için,

$$h_0(\,\tau_0, y_0 - \,x_0) < \beta \text{ olduğunda } \beta = \min\{\beta_1\,,\,\beta_2\} \text{ iken } h\big(t, z(t)\big) < \alpha \tag{3.2.7}$$

olur ve (3.2.5) ile (3.2.6) ve (iii) hipotezinden görülebilir ki,

$$\begin{aligned} b\Big(h\big(t, z(t)\big)\Big) &\leq V\big(t, z(t)\big) \\ &\leq \,a_1\Big(t, h_1\big(t, z(t)\big)\Big) + \,a_0\big(t, h_0\big(t, z(t)\big) \\ &< b(\beta) \end{aligned}$$

dır. $h_0(\,\tau_0, y_0 - \,x_0) < \beta$ olduğunda $h\big(t, z(t)\big) < \alpha$ olduğu anlaşılır. Bu yüzden (3.1.3) sisteminin $y(t,\,\tau_0, y_0)$ çözümü $x(t-\eta, t_0,\,x_0)$ çözümüne karşılık başlangıç zaman farklı (h_0, h) sınırlıdır.
Eğer (3.2.7) doğru değilse o zaman, $\tilde{x}(t) = x(t-\eta, t_0,\,x_0)$ ve (3.1.1) ve (3.1.3)'ün $y(t) = y(t,\,\tau_0, y_0)$ çözümleri , $\forall t \in [\,\tau_0, t_1]$ için $t_1 \geq \tau_0$ öyle ki $z(t) = y(t) - \tilde{x}(t)$ iken, $h_0(\,\tau_0, y_0 - \,x_0) < \beta,\; h\big(t_1, z(t_1)\big) = \alpha$ ve $h\big(t, z(t)\big) \leq \alpha$ olur. Teorem 3.2.2' nin uygulamasından, $V(t, z(t)) \leq V(\tau_0, w(t,\,\tau_0, y_0 - \,x_0)), t \in [\tau_0, t_1]$ olduğu görülür.
$t = t_1$ iken,

$$\begin{aligned} b(\alpha) \leq V(t_1, z(t_1)) &\leq V(\tau_0, w(t_1,\,\tau_0, y_0 - \,x_0)) \\ &\leq a_1(\,\tau_0, h_1(\tau_0, w(t_1,\,\tau_0, y_0 - \,x_0))) \\ &\quad + a_0(\,\tau_0, h_0(\tau_0, w(t_1,\,\tau_0, y_0 - \,x_0))) \\ &< b(\alpha) \end{aligned}$$

eşitsizliği varsayım (iii), (3.2.5) ve (3.2.6)'dan elde edilir. Bu (3.1.3) sisteminin (τ_0, y_0) dan geçen $y(t,\,\tau_0, y_0)$ çözümünün $x(t-\eta, t_0,\,x_0)$ çözümüne karşılık gelen başlangıç zaman farklı (h_0, h) sınırlılığı için bir çelişki olur.

3.3 KARŞILAŞTIRMA DENKLEMLERİ İLE İLİŞKİLİ BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI İKİ ÖLÇÜ CİNSİNDEN $(\boldsymbol{h_0}, \boldsymbol{h})$ SINIRLILIĞI

Önceki çalışmalarda [3,12,13] Sınırlılığın klasik notasyonları arasındaki farklılıklar ve başlangıç zaman farklı sınırlılığın sıfır çözümünün davranışını, başlangıç zaman farklı sınırlılık içinde kullanmamıza izin verilmiyordu. Esas sonuç gösterir ki, bu bölümde bütün bu zorlukların yeni yaklaşımlarla çözümünü karşılaştırma denkleminin sıfır çözümünün sınırlılığını kullanmamızda, $\tilde{x}(t) = x(t-\eta, t_0, x_0)$ ‘a karşılık gelen (3.1.3) çözümünün sınırlılık özelliklerini tahmin etmemize, $x(t, t_0, x_0)$ (3.1.1) sisteminin herhangi bir çözümü iken izin verir.

Bu sonucu elde etmek için, aşağıda verilen iki Lemma’ yı kullanacağız.

Lemma 3.3.1: $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{F} \in \boldsymbol{C}[\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n]$ ve

$$G(t,r) = \max_{\tilde{x},y\in\bar{B}(x_0;r)} \left\| F(t,y) - \tilde{f}(t,\tilde{x}) \right\| \tag{3.3.1}$$

ve $\bar{B}$’ nin, merkezi x_0 ve yarıçapı r olan bir kapalı yuvarını alalım, varsayalım ki, $r^*(t, \tau_0, \|y_0 - x_0\|)$ fonksiyonu $(\tau_0, \|y_0 - x_0\|)$ noktasından geçen $u' = G(t,u)$, $u(\tau_0) = \|y_0 - x_0\|$ başlanğıç değer probleminin bir maksimal çözümü olsun. Burada $\tilde{x}(t, \tau_0, x_0) = x(t-\eta, t_0, x_0)$ iken $x(t, t_0, x_0)$ (3.1.1) sisteminin herhangi bir çözümü ve $y(t, \tau_0, y_0)$, (3.1.3) sisteminin bir çözümü olup $t \geq \tau_0 \geq 0$, $t_0 \in R_+$ ve $\eta = \tau_0 - t_0$ dır.

O halde $t \geq \tau_0$ için $\|y(t, \tau_0, y_0) - x(t-\eta, t_0, x_0)\| \leq r^*(t, \tau_0, \|y_0 - x_0\|)$ olur.

Lemma 3.3.2: $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{x}}) \in \boldsymbol{C}[\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}_+]$ ve $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{x}})$, $\tilde{\boldsymbol{x}}$’e göre yerel Lipschitz olsun. Varsayalım ki $\boldsymbol{D}_*^+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{x}})$ fonksiyonu

$$D_*^+V(t, y-\tilde{x}) = \lim_{h\to 0^+} sup \frac{1}{h}[V\left(t+h, y-\tilde{x}+h\left(F(t,y)-\tilde{f}(t,\tilde{x})\right)\right) - V(t, y-\tilde{x})] \tag{3.3.2}$$

$(t,\tilde{x}), (t,y) \in R_+ \times R^n$ ile $G(t,u) \in C[R_+ \times R_+, R]$ iken

$D_*^+V(t, y-\tilde{x}) \leq G(t, V(t, y-\tilde{x}))$ eşitsizliğini sağlasın. $t \geq \tau_0$ için

$u' = G(t,u), u(\tau_0) = u_0 \geq 0$ skaler diferansiyel denkleminin maksimal çözümü $r(t) = r(t, \tau_0, u_0)$'ı alalım. Eğer $\tilde{x}(t) = x(t-\eta, t_0, x_0)$ iken $t \geq \tau_0 \geq 0, t_0 \in R_+$ve $\eta = \tau_0 - t_0$ için $x(t, t_0, x_0)$ (3.1.1) sisteminin herhangi bir çözümü ve $t \geq \tau_0$ için $y(t) = y(t, \tau_0, y_0)$ (3.1.3)'ün herhangi bir çözümü olduğunda $V(\tau_0, y_0 - x_0) \leq u_0$ ve $t \geq \tau_0$ için $V(t, y(t) - \tilde{x}(t)) \leq r(t)$ eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.1:

(i) Her bir $(t,w) \in R_+ \times R^n$ ve $\varphi \in \mathcal{K}$ için, $h_0, h \in \Gamma$, $h(t,w) \leq \varphi(h_0(t,w))$;

(ii) $V(t,x) \in C[R_+ \times R^n, R_+]$ ve $V(t,w)$ w'a göre yerel Lipschitz ve V, h pozitif tanımlı ve h_0 azalan;

(iii) $G \in C[R_+ \times R, R_+]$ ve $G(t,0) \equiv 0, (t,x) \in S(h,\rho)$

$\forall s,\ \tau_0 \leq s \leq t$ için, $D^+V(t,w) \leq G(t, V(t,w))$;

olsun.

O halde karşılaştırma denkleminin sınırlılık özellikleri (3.1.3) sisteminin $y(t, \tau_0, y_0)$ çözümünün $x(t-\eta, t_0, x_0)$ sisteminin çözümüne göre başlangıç zaman farklı (h_0, h)-sınırlılık özelliklerini gerektirir [14]. Burada $x(t, t_0, x_0)$, (3.1.1)'in herhangi bir çözümüdür.

İspat: Sadece karşılaştırma denkleminin (h_0, h) −eş sınırlılığını gösterelim. Bu amaçla, $y(t, \tau_0, y_0)$'ın (h_0, h)-eş-sınırlılığını $x(t-\eta, t_0, x_0)$ sisteminin çözümüne karşılık gelen başlangıç zaman farklılığı ile ispatlayalım.

V, h pozitif tanımlı olduğunda bir $\lambda \in (0, \rho]$ ve öyle bir $b \in \mathcal{K}$ fonksiyonu vardır ki,

$$b\big(h(t,w)\big) \leq V(t,w), (t,w) \in S(h,\lambda) \tag{3.3.3}$$

dır. $0 < \alpha < \lambda$ alalım ve $\tau_0 \in R_+$ verilsin ve farzedelim ki, karşılaştırma denkleminin çözümü eş sınırlı olsun, o halde, verilen $b(\alpha) > 0$ ve $\tau_0 \in R_+$ için, öyle bir $\beta_1 = \beta_1(\tau_0, \alpha)$ fonksiyonu vardır ki,

$$u_0 < \beta_1 \text{ den, } \forall t \geq \tau_0 \text{ için } u(t, \tau_0, u_0) < b(\alpha) \tag{3.3.4}$$

olur. Buradan $u(t, \tau_0, u_0)$ karşılaştırma denkleminin herhangi bir çözümüdür.

$u_0 = V(\tau_0, y_0 - x_0)$ seçelim. V, h_0 azalan ve h_0 düzgün olarak h'dan daha iyi olduğunda bir $\lambda_0 > 0$ ve $a \in \mathcal{K}$ fonksiyonu vardır.
$(\tau_0, y_0 - x_0) \in S(h_0, \lambda_0)$ için,

$$h(\tau_0, y_0 - x_0) < \lambda \text{ ve } V(\tau_0, y_0 - x_0) \leq a(h_0, (\tau_0, y_0 - x_0)) \qquad (3.3.5)$$

olur. Buradan devam edilerek, (3.3.3)'den, $(\tau_0, y_0 - x_0) \in S(h_0, \lambda_0)$ için,
$b(h(\tau_0, y_0 - x_0) \leq V(\tau_0, y_0 - x_0) \leq a(h_0, (\tau_0, y_0 - x_0))$ olduğu anlaşılır.
$\beta(\tau_0, \alpha)$, $\beta \in (0, \lambda_0]$, $a(\beta) < \beta_1$ ve $h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \beta$ olacak şekilde seçilsin.
O halde (3.3.5)'den görülebilir ki, $\beta_1 < b(\alpha)$ olduğunda $h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \alpha$ olur.
Bu yüzden, $t \geq \tau_0$ için, $h_0\big(\tau_0, y(\tau_0) - \tilde{x}(\tau_0)\big) < \beta$ olduğu zaman $h\big(t, y(t) - \tilde{x}(t)\big)$ (3.1.4)'ün herhangi bir çözümü $y(t) - \tilde{x}(t)$ iken $h_0\big(\tau_0, y(\tau_0) - \tilde{x}(\tau_0)\big) < \beta$ olacak şekilde sağlanır.Eğer bu doğru değilse, o zaman bir $t_1 \geq \tau_0$ ve (3.1.4)'ün herhangi bir çözümü $y(t) - \tilde{x}(t)$ vardır öyle ki, $\tau_0 \leq t \leq t_1$ için

$$h\big(t_1, y(t_1) - \tilde{x}(t_1)\big) = \alpha \text{ ve } h\big(t, y(t) - \tilde{x}(t)\big) < \alpha \qquad (3.3.6)$$

dır. Buradan görülebilir ki,
$h\big(\tau_0, y(\tau_0) - \tilde{x}(\tau_0)\big) < \alpha$ olduğu zaman $h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \beta$ 'dır. Böylece
$t \in [\tau_0, t_1]$ için $(t, w(t)) \in S(h, \lambda)$ ve Lemma 3.3.2' den

$$V\big(t, y(t) - x(t)\big) \leq r(t, \tau_0, u_0), \;\; \tau_0 \leq t \leq t_1 \qquad (3.3.7)$$

eşitsizliği sağlandığında $r(t) = r(t, \tau_0, u_0)$, $t \geq \tau_0$ için, $u' = G(t, u), u(\tau_0) = u_0 \geq 0$ skaler diferansiyel denkleminin maksimal çözümü olur. (3.3.3), (3.3.4), (3.3.6), (3.3.7) bağıntılarından anlaşılır ki $r(t, \tau_0, u_0) < b(\alpha)$ ve
$\beta_1 < b(\alpha) \leq V(\big(t_1, y(t_1) - \tilde{x}(t_1)\big) \leq r(t_1, \tau_0,, u_0) < b(\alpha)$ olur. Bu bir çelişkidir, çünkü $h_0(\tau_0, y_0 - x_0) \leq \alpha$'dan anlaşılır ki, $\beta = \beta(\alpha) > 0$,
her $t \geq \tau_0$ için $h\big(t, y(t) - \tilde{x}(t)\big) < \beta$ ve $y(t, \tau_0, y_0)$, $x(t - \eta, t_0, x_0)$'a karşılık olarak $t \geq \tau_0$ için (h_0, h)-eş sınırlı olur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Cauchy probleminin çözümleri için yeter koşullar konularak çözümün varlığı ve tekliği garanti altına alınıp, bu sistem için Lyapunov fonksiyonları elde edilmiş ve sistemin çözümünün karakteristiği incelenmiştir.

Bu çalışmada Cauchy problemi için iki ölçü cinsinden Lyapunov kararlılığa ait Temel tanımlar ve teoremler verilip Lyapunov teoremi incelenmiştir. Karşılaştırma metodu kullanılarak lineer olmayan sistemler Lyapunov fonksiyonları yardımı ile basit skaler lineer olmayan diferansiyel denklemlere dönüştürülüp, bu denklemlerin karekteristiklerinin özdeş oldukları görülmüştür.

Karşıt teorem verilip, sistem kararlı olduğunda buna karşılık gelen Lyapunov fonksiyonlarının varlığı teorik olarak ortaya konulmuş fakat pratikte bunların mevcut olduğunu bulmanın zorluğu görülmüştür. İki ölçü cinsinden Sınırlılık ve Lagrange Kararlılık için yeter koşullar verilmiş ve bunlarla ilgili sonuçlar bulunmuştur.

Bu elde edilen sonuçlar iki ölçü cinsinden genelleştirilip başlangıç zaman farklı sınırlılık kriterleri elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Yakar, C. and S.G., Deo., 2006, *Variation of Parameters Formulae with Initial Time Difference for Linear Integrodifferential Equations*, Journal of Applicable Analysis Taylor & Francis Vol. 85, No. 4, 333-343.

[2] Lakshmikantham, V. and Liu, X., 1992, *Stability Analysis in Terms of Two Measures*, World Scientific, Singapore.

[3] Deo, S. G., Lakshmikantham, V. And Raghavendra, V., 1997, *Textbook of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi.

[4] Lakshmikantham, V. and Leela, S., 1981, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergaman Press Inc., New York.

[5] Lakshmikantham, V. and Leela, S., 1969, *Differential and Integral Inequalities Vol. 1 and Vol. 2,* Academic Press, New York.

[6] Yakar C. and Shaw, M.D., n.d., *Initial Time Difference Stability in Terms of Two Measures and Variational Comparison Result*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems

[7] Lakshmikantham, V. and Vatsala, A.S., 1999, *Differential Inequalities with Time Difference and Application*, Journal of Inequalities and Application 3, 233-244.

[8] K.Khalil H., 1996, *Nonlinear Systems Second Edition*, Prentica Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458

[9] Liu, X and Shaw, M.D., 2001, *Boundedness in Terms of Two Measures for perturbed Systems by Generalized Variation of Parameters*, Communications in Applied Analysis 5, 435-444.

[10] Lakshmikantham, V. And Deo, S. G., 1998, *Method of Variation of Parameters for Dynamic Systems.Gordon and Breach Science Publishers*, Amsterdam, The Netherlands.

[11] Yakar, C., 2007, *Boundedness Criteria with Initial Time Difference in Terms of Two Measures*, Gebze Instute of Technology Department of Mathematics, Kocaeli.

[12] Lakshmikantham, V., Matrosov, V.M. and Sivasundaram, S., 1991, *Vector Lyapunov functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht / Boston / London.

[13] Shaw, M.D. and Yakar, C., 2005, *A Comparison Result and Lyapunov Stability Criteria with Initial Time Difference. Dynamic of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*. A Mathematical Analysis. Volume 12, Sayı 6, 731-741.

[14] Yakar, C., 2000, *Stability Analysis of Nonlinear Differential Systems with İnitial Time Difference,* Ph.D. Dissertation, Florida Institute of Technology.

ÖZGEÇMİŞ

Ufuk METİN, 11.10.1980 yılında İstanbul’ da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul’da tamamladıktan sonra, Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünde lisans eğitimini tamamladı. Halen İstanbul’da özel bir kurumda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.