

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REGÜLER VE SİNGÜLER DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN
İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

DOKTORA TEZİ
Keziban TAŞ

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

ŞUBAT-2010

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince, değerli zamanlarımı ayırarak bilgi ve deneyimlerini paylaşan değerli danışman hocam Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Keziban TAŞ

ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SİMGELER LİSTESİ.....	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	6
2.1. Diferensiyel Operatörlerin Spektral Teorisinde Kullanılan Önemli Kavramlar	6
3. STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ	11
3.1. Özdeğer ve Özfonksiyonlar için Asimptotik Formüller	13
3.2. Sturm-Liouville Operatörü İçin Dönüşüm Operatörü.....	18
3.3. İki Spektruma Göre Ters Sturm-Liouville Problemi	21
4. DIRAC OPERATÖRÜ.....	28
4.1. Bir Boyutlu Dirac Sistemi	28
4.2. Kanonik Dirac Operatörü İçin Matris Dönüşüm Operatörü	34
4.3. II. Kanonik Formda Dirac Operatörü İçin Ters Problem	42
5. DİFÜZYON OPERATÖRÜ.....	49
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde, spektral veriler kullanılarak potansiyel fonksiyonun bulunması problemi ters problem olarak adlandırılır. Eğer bu ters problemin spektral karakteristikleri, aralarındaki fark yeterince küçük olacak şekilde, değiştirildiğinde potansiyellerinin farkı da yeterince küçük kalıyorsa bu problem karardır denir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; Sturm-Liouville, Dirac ve difüzyon operatörlerinin spektral teorisinin tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümde; diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde ve sunulan tezde sık sık kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Sturm-Liouville operatörü için özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik formülleri, özfonksiyonların ortogonallığı, özdeğerlerin reel olduğu ve dönüşüm operatörü gösterilmiştir. Ayrıca potansiyeller farkı için formül verilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümde; sırasıyla Dirac ve difüzyon operatörü için ters problemin kararlılığını araştırılmış, potansiyel farkları için bazı formüller bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Spektrum, Ters Sturm-Liouville problemi, Dirac operatörü, Difüzyon operatörü, Kararlılık.

SUMMARY

Inverse Problem With Respect To Two Spectra For Regular And Singular Differential Operators

In the spectral theory of differential operators, the problem of finding potential function by using spectral data is called inverse problem. In an inverse problem, if the potential difference becomes sufficiently small when the difference between the characteristics was changed as sufficiently small, this problem is called as stable (wellposed).

This study consists of five chapters.

In the first chapter, the history of spectral theory and Sturm-Liouville, Dirac and diffusion operators are presented.

In the second chapter some fundamental definitions and theorems, often used in spectral theory of differential operators, are given.

In the third chapter, the asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions, the orthogonality of the eigenfunctions, the reality of the eigenvalues and transformation operator for Sturm-Liouville operator are shown. In particular the formula is given for difference of potentials.

In the fourth and fifth chapters, we investigated the stability of inverse problem for Dirac and diffusion operators, respectively. We obtained some formulas for potential difference.

Keywords: Spectrum, Inverse Sturm-Liouville Problem, Dirac Operator, Diffusion Operator, Stability (Wellposedness).

SİMGELER LİSTESİ

$W(f, g)$	: Wronski determinantı
$L_2[a, b]$	: Karesi integrallenbilen fonksiyonlar uzayı
W_2^1	: Sobolev Uzayı
φ_n	: Özfonksiyonlar
λ_n	: Özdeğerler
$K(x, y)$	: Çekirdek fonksiyonu
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyon
$\rho(\lambda)$	: Spektral fonksiyon
ρ_n	: Normlaştırıcı sayılar

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekanığın çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir. Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı, daha sonraları ise genel Hilbert uzayı tanımlanmıştır.

Matematikte l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H da lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX.-XX. asırlarda birçok matematikçiler sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur. Ayrıca, spektral teorisinin tamamında önemli bir yere sahip olan açılım teoremi ispatlanmıştır. Belirli diferensiyel ve fark operatörleri için spektral açılımın uygun denklem çözümleri vasıtasıyla ifade edildiği araştırılmıştır.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferensiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sınırlı ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatörlere regüler, tanım bölgesi sınırsız veya katsayıları(bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan(veya her ikisi sağlanacak biçimde) diferensiyel operatörlere ise singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferensiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı özellikle Kuantum mekaniği için çok ilginçtir. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Rietsz, J. Fon-Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer mate-

matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Hatırlatalım ki, simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapılmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında E. C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan(artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre sık sık bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferensiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferensiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotigine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M.V. Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Lineer diferensiyel operatörler teorisinde spektral analizin ters problemleri önemli bir yere sahiptir. Diferensiyel operatörler için ters problem aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak (veya yapısını oluşturmak) mümkündür?
2. Spektral verilere göre operatörü birebir olarak tanımlamak mümkün mü?
3. Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması yöntemlerinin bulunması.

Ters problemlerle ilgili ilk sonuç V. A. Ambartsumyan[3] tarafından elde edilmiştir. Bu çalışmada Sturm-Liouville operatörleri için ters probleme ait aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 1. $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (1.1)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

probleminin özdeğerleri $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$ olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ ($n = 0, 1, \dots$) ise $q(x) = 0$ dır.

Bu sonuca ilk önce dikkati çeken İsveç matematikçi G. Borg[6] olmuştur. Borg, genel durumda Sturm-Liouville operatörünün bir spektrumla tanımlanmadığını göstermiştir. Ayrıca farklı sınır şartları sağlanacak şekilde iki spektruma göre Sturm-Liouville operatörünün birebir olarak tanımlandığını göstermiştir. Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2. $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ ler (1) diferensiyel denklemi ve

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) &= 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$ ler ise (1) denklemi ve

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) &= 0 \quad (H \neq H_1) \\ y'(\pi) + H_1y(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, ($n = 0, 1, \dots$) dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve sonlu h, H, H_1 sayılarını tek olarak belirtir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığını N. Levinson[35], [36] ispatlamıştır. Buna ilaveten, Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan dönüşüm operatörü kavramıdır. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte, J. Lions[8], [9] ve B.M. Levitan[34] tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner[51] çalışmalarında göstermiştir.

Daha sonra ikinci mertebeden lineer diferensiyel operatörler için ters problemler teorisinde teklik problemiyle ilgili en önemli çalışmalar A. N. Tichonov[60] ve V. A. Marchenko[41] tarafından yapılmıştır. Marchenko bu çalışmasında teklik problemlerinin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (1.1) diferensiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h \quad (1.4)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin özfonksiyonları olsun. Bu takdirde

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx \quad (1.5)$$

verilen operatörün normlaştırıcı sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere Marchenko yukarıda bahsedilen çalışmada Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımı ile vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonunun, Sturm-Liouville tipinde bir diferensiyel operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart verilmiştir. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı anda M. G. Krein[25], [26] çalışmalarında, Sturm-Liouville tipindeki bir diferensiyel operatörü $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, ($n = 0, 1, \dots$) dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem verilmiştir. Fakat bu çalışmalarda verilen gerek ve yeter şart, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerden kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

Spektral analizin ters problemler teorisinde temel çalışma I.M. Gelfand ve B. M. Levitan[16] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşullar tanımlanmış olup, Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için önemli bir yöntem verilmiştir.

Sturm-Liouville operatörü için ters problemin iki spektruma göre tam çözümü 1964 yılında B. M. Levitan ve M. G. Gasimov[30] tarafından yapılan bir çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerek ve yeter koşullar tanımlanmıştır.

Sturm-Liouville operatörünü inceleme sürecinde özellikle XX. asrın ikinci yarısında kullanılan yöntemler sürekli artmıştır. 1967 yılında bir grup Amerikan fizikçi ve matematikçi G. S. Gardner, J. M. Greene, M.D. Kruskal, R. M. Miura[7] ve P.Lax[28] tarafından bazı kısmi türevli nonlinear evalusyon denklemleri ile Sturm-Liouville operatörünün spektral teorisi arasındaki bağlantılar bulunmuştur. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulamaları olan singüler Sturm-Liouville operatörü için kuantum teorisini ters saçılma problemleri halen yoğun bir şekilde fizik ve matematikçiler tarafından

araştırılmaktadır. Kuantum saçılma teorisinin ters problemleri ile ilgili tarihçe detaylı bir şekilde L.D. Faddeev'in[11] çalışmasında verilmiştir.

Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar fizikçiler F. Prats, J. Toll[52], H. E. Moses[45] ve diğerleri tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0, \infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasimov ve B. M. Levitan[13] tarafından çözülmüştür. İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi M. G. Gasymov ve C. Dzhabiev[14] tarafından yapılan çalışmada verilmiştir. Dirac operatörü için özvektör fonksiyonlarının tamlığı, Cauchy probleminin çözümü, self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülerize izin hesaplanması, periyodik ve anti periyodik problemler, açılım teoremleri, özvektör fonksiyonlarının asimptotiği, $2n$ -mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi, kısmen çakışmayan iki spekturuma göre ters problem sırası ile [1, 10, 15, 18, 22, 38, 43, 48, 53-57] çalışmalarında incelenmiştir.

Daha sonraki yıllarda H. Hochtadt[19], B. M. Levitan[33] ve E. S. Penahov[49] kısmen çakışmayan iki spektruma göre farklı yöntemlerle Sturm-Liouville ve Dirac operatörleri için ters problemi incelemişlerdir. Dirac operatörü için kısmen çakışmayan iki spekturuma göre ters problem, singüler Sturm-Liouville operatörü için ters problem, periyodik durumda ters problem sırasıyla [4, 5, 21, 23] çalışmalarında incelenmiştir.

Dalga denkleminin bir çok yönü ile farklı olan difüzyon denklemi kuantum fizikinde önemli yere sahiptir. Bu sebeple bir boyutlu difüzyon denkleminin spektral teorisi de detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu denklemler için saçılma problemleri ilk olarak Fransız matematikçileri M. Jaulent, C. Jean ve P. Sabatier tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalara ait kaynaklar [55] verilmiştir. Sonlu aralıkta iki spektruma göre difüzyon operatörü için ters problem M. Gasymov ve G.Sh. Guseinov[12] tarafından çözülmüştür. Doğru ekseninde saçılma şatları sağlanacak biçimde ters problem ise F.G. Maksudov ve G. Sh. Guseinov [39] tarafından incelenmiştir.

Daha sonra difüzyon denklemi için farklı şekilde tanımlanmış ters problemler, teklik teoremleri V. Yurko[65], G.Sh. Guseinov, E.S. Panakhov ve H. Koyunbakan[24] ve diğer matematikçiler tarafından araştırılmıştır.

Bu çalışmada, Dirac ve difüzyon operatörleri için iki spektruma göre ters problem incelenmiştir. Özel olarak özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar için belirli şartlar sağlanmak üzere potansiyel farkı ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Diferensiyel Operatörlerin Spektral Teorisinde Kullanılan Önemli Kavramlar

Bu bölümde, sunulan tezde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (İç Çarpım Uzayı) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanmış bir H lineer vektör uzayını gözönüne alalım. H daki her vektör çiftine bir sayı karşılık getiren $(,) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyoneli aşağıdaki kuralları sağladığı takdirde bir iç çarpım adını alır:

- i) Her $u, v \in H$ için, $(u, v) = \overline{(v, u)}$
- ii) Her $u, v \in H$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $(\alpha u, v) = \alpha (u, v)$
- iii) Her $u, v, w \in H$ için $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$
- iv) Her $u \in H, u \neq 0$ için $(u, u) > 0$

Bir iç çarpımla donatılmış bir lineer vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v, u - v)}$$

metriğine göre tam bir iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir[59].

Tanım 2.1.2. $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L^2[a, b]$ karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı

$$L^2[a, b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde, bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır[27] .

Tanım 2.1.3. Tanım ve değer cümlesi vektör uzayı olan dönüşüme operatör denir.

Tanım 2.1.4. E_x ve E_y herhangi iki vektör uzayı olmak üzere

$$1. \ x_1, x_2 \in E_x \text{ için } L(x_1 + x_2) = Lx_1 + Lx_2$$

$$2. \ x \in E_x, \lambda \in \mathbf{R} \text{ için } L(\lambda x) = \lambda Lx$$

şartlarını sağlayan $L : E_x \longrightarrow E_y$ operatörüne lineer operatör denir [46].

Tanım 2.1.5. X ve Y normlu uzaylar ve $D(L) \subset X$ olmak üzere $L : D(L) \longrightarrow Y$ bir operatör olsun.

$$\|Lx\| \leq c \cdot \|x\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir[46].

Tanım 2.1.6. $L - \lambda I$ operatörünün sınırlı $(L - \lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ 'lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir [46].

Tanım 2.1.7. Herhangi λ için $L - \lambda I$ operatörünün tersi mevcut olacak şekilde $R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$ operatörüne $(L - \lambda I)x = y$ denkleminin rezolvent operatörü denir.

Tanım 2.1.8. L operatörü $D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna ise λ 'ya karşılık gelen özfonksiyon denir[32].

Tanım 2.1.9. Eğer $x \longrightarrow 0$ (veya $x \longrightarrow \infty$) iken $\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde, $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ sınırlı ise $f(x) = O(g(x))$ şeklinde gösterilir[47].

Tanım 2.1.10. $[a, b]$, $\mathbb{R}$ 'nin kapalı sınırlı bir aralığı ve $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ 'ler $[a, b]$ de açık aralıklar olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır ki

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$$

iken

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

oluyorsa $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $[a, b]$ de mutlak süreklidir denir.

Tanım 2.1.11. Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında diferensiyellenebiliyorsa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 2.1.13. $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ 'e tam fonksiyon denir.

Tanım 2.1.14. $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli, diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$W_x \{f, g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanan determinanta Wronski determinantı denir.

Tanım 2.1.15.(Parseval Eşitliği) $f(x), g(x) \in L^2(a, b)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(u) g(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \left(\int_a^b f(u) \phi(u, \lambda_n) du \right) \left(\int_a^b g(u) \phi(u, \lambda_n) du \right)$$

dir.

Tanım 2.1.16. (Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$ (veya $\mathbf{C}^n$) için

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}$$

şeklindeki eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.17. (Cauchy-Bunjakowski Eşitsizliği) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$|< x, y >| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

dir.

Tanım 2.1.18. (Bessel Eşitsizliği) $(X, < \cdot, \cdot >)$ bir iç çarpım uzayı ve (x_n) de X 'de bir ortonormal dizi olmak üzere $x \in X$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |< x, x_k >|^2 \leq \|x\|^2$$

dir.

Tanım 2.1.19. (a, b) aralığında tanımlı, $(k - 1)$. mertebeden türevleri mutlak sürekli olan ve $f, f'', f''', \dots, f^{(k)} \in L_2[a, b]$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W_2^k(a, b)$ ile gösterilir[2].

Tanım 2.1.20. $K(x, y)$ karesel bir bölgede tanımlı sürekli bir çekirdek fonksiyonu olmak üzere,

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) \phi(y) dy$$

integral denkleminde $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyonuna göre ikinci tür Volterra integral denklemi denir[62].

Tanım 2.1.21. E lineer topolojik uzay, A ve B de $A : E \rightarrow E$, $B : E \rightarrow E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 'den E_2 'ye dönüşüm yapan ve tersi lineer olan X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında sürekli,dir,

ii) $AX = XB$

şartlarını sağlıyorsa, A ve B operatör çifti için dönüşüm operatörü adını alır[31].

Teorem 2.1.1. (Green Teoremi) Ω , xoy düzleminde bir bölge ve Γ da bu bölgeyi çevreleyen pozitif yönde yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları Ω üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

dir.

Teorem 2.1.2. (Leibnitz Formülü) Sürekli $f(x, t)$ fonksiyonu,

$\{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ dikdörtgenini kapsayan bir bölgede sürekli $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. Bu takdirde $c \leq t \leq d$ için

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

dir.

Bu teoremin sonucu olarak; $a(t)$ ve $b(t)$, (c, d) aralığında sürekli türevlere sahip

fonksiyonlar ise

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + f(b(t), t) b'(t) - f(a(t), t) a'(t)$$

dir.

Teorem 2.1.3. (Hochstadt)

$$Lu = -u'' + q(x)u = \lambda u \quad (2.1)$$

$$u(0) \cos \alpha + u'(0) \sin \alpha = 0 \quad (2.2)$$

$$u(1) \cos \beta + u'(1) \sin \beta = 0 \quad (2.3)$$

probleminin spektrumu $\{\lambda_i\}$, (2.3) yerine

$$u(1) \cos \gamma + u'(1) \sin \gamma = 0 \quad (2.4)$$

alınmasıyla elde edilen yeni problemin spektrumu ise $\{\lambda'_i\}$ olsun. Diğer taraftan

$$Lu = -u'' + \tilde{q}(x)u = \lambda u \quad (2.5)$$

$$u(0) \cos \alpha + u'(0) \sin \alpha = 0 \quad (2.6)$$

$$u(1) \cos \beta + u'(1) \sin \beta = 0 \quad (2.7)$$

probleminin spektrumu $\{\tilde{\lambda}_i\}$, (2.5)-(2.6), (2.4) probleminin spektrumu ise $\{\tilde{\lambda}'_i\}$ olsun.

Ayrıca Λ_0 , $\tilde{\lambda}_i \neq \lambda_i$ şartını sağlayan sonlu i lerin cümlesi, Λ ise $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$ şartını sağlayan sonsuz i lerin cümlesi olsun. Bu durumda

$$q - \tilde{q} = \sum_{\Lambda_0} (\tilde{y}_n w_n)'$$

dir. Ayrıca Λ_0 boş ise $q = \tilde{q}$ dir.

3. STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

L lineer operatör, $q(x)$ de $[a, b]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$Ly = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y, \quad (3.1)$$

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0 \quad (3.2)$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

şeklinde tanımlanan (3.1)-(3.2) sınır-değer problemi Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır. λ 'ya (3.1)-(3.2) probleminin özdeğeri; $y(x, \lambda)$ ya ise λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir.

λ_1 değeri için (3.1)-(3.2) sınır-değer probleminin $y(x, \lambda_1) \neq 0$ aşıkâr olmayan bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda λ_1 özdeğer olarak adlandırılır ve $y(x, \lambda_1)$, (3.1)-(3.2) sınır-değer probleminin özfonksiyonudur.

Lemma 3.1.[32] Farklı özdeğerlere karşılık gelen $y(x, \lambda_1)$ ve $y(x, \lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir, yani

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0$$

dır.

İspat. $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli, ikinci mertebeden türevleri mevcut fonksiyonlar olmak üzere

$$Lf = f''(x) - q(x)f(x)$$

olsun. $\int_0^\pi Lf \cdot g(x) dx - \int_0^\pi f(x) \cdot Lg dx$ ifadesi hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Lf \cdot g(x) dx - \int_0^\pi f(x) \cdot Lg dx &= \int_0^\pi [f''(x) - q(x)f(x)] \cdot g(x) dx \\ &\quad - \int_0^\pi f(x) \cdot [g''(x) - q(x)g(x)] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} f''(x) \cdot g(x) dx - \int_0^{\pi} q(x) f(x) g(x) dx \\
&\quad - \int_0^{\pi} f(x) \cdot g''(x) dx + \int_0^{\pi} q(x) f(x) g(x) dx \\
&= \int_0^{\pi} f''(x) \cdot g(x) dx - \int_0^{\pi} f(x) \cdot g''(x) dx
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafında bulunan ifadelere kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} Lf \cdot g(x) dx - \int_0^{\pi} f(x) \cdot Lg dx &= f'(x) g(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cdot g'(x) dx \\
&\quad - f(x) g'(x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x) \cdot g'(x) dx \\
&= f'(\pi) g(\pi) - f'(0) g(0) - f(\pi) g'(\pi) + f(0) g'(0) \\
&= W_0 \{f, g\} - W_{\pi} \{f, g\} \\
\int_0^{\pi} Lf \cdot g(x) dx &= W_0 \{f, g\} - W_{\pi} \{f, g\} + \int_0^{\pi} f(x) \cdot Lg dx \tag{3.3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$W_x \{f, g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

dir. (3.2) sınır şartlarından

$$\begin{aligned}
f(0) \cos \alpha + f'(0) \sin \alpha &= 0 \\
g(0) \cos \alpha + g'(0) \sin \alpha &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada birinci denklem $g(0)$, ikinci denklem $f(0)$ ile çarpılıp ikinci eşitlikten birinci eşitlik taraf tarafa çıkartılırsa;

$$f(0) g'(0) - f'(0) g(0) = 0$$

bulunur. Bu da $W_0 \{f, g\} = 0$ olması demektir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
f(\pi) \cos \beta + f'(\pi) \sin \beta &= 0 \\
g(\pi) \cos \beta + g'(\pi) \sin \beta &= 0
\end{aligned}$$

olup buradan da

$$W_0 \{f, g\} = W_\pi \{f, g\} = 0$$

elde edilir. (3.3) denkleminde $f(x)$ yerine $y(x, \lambda_1)$ ve $g(x)$ yerine de $y(x, \lambda_2)$ yazılırsa

$$\int_0^\pi Ly(x, \lambda_1) \cdot y(x, \lambda_2) dx - \int_0^\pi y(x, \lambda_1) \cdot Ly(x, \lambda_2) dx = 0$$

elde edilir. $Ly(x, \lambda_1) = \lambda_1 y$ ve $Ly(x, \lambda_2) = \lambda_2 y$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi Ly(x, \lambda_1) \cdot y(x, \lambda_2) dx - \int_0^\pi y(x, \lambda_1) \cdot Ly(x, \lambda_2) dx \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi y(x, \lambda_1) \cdot y(x, \lambda_2) dx = 0 \end{aligned}$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) \cdot y(x, \lambda_2) dx = 0$$

elde edilir ki bu da lemmayı ispatlar.

Lemma 3.2. (3.1)-(3.2) sınır-değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat. $\lambda_1 = u + iv$ kompleks özdeğer olsun. $q(x)$ reel bir fonksiyon ve α, β sayıları da reel olduğundan $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ de $\overline{y}(x, \lambda_1)$ özfonksiyonuna karşılık gelen bir özdeğer olur. Lemma 3.1 den

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) \cdot \overline{y}(x, \lambda_1) dx = \int_0^\pi |y(x, \lambda_1)|^2 dx = 0$$

elde edilir. Buradan $y(x, \lambda_1) \equiv 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla özdeğerler reeldir.

3.1. Özdeğer ve Özfonksiyonlar İçin Asimptotik Formüller

(3.2) sınır şartları

$$\cot \alpha = -h, \quad \cot \beta = H$$

olmak üzere,

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{3.4}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

formunda yazılabilir. (3.1) denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h \quad (3.5)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$ ve aynı denklemin

$$\psi(0, \lambda) = 0, \quad \psi'(0, \lambda) = 1 \quad (3.6)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü de $\psi(x, \lambda)$ olsun.

Lemma 3.1.1. $\lambda = s^2$ olsun. Bu takdirde

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin \{s(x - \tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau, \quad (3.7)$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s} \int_0^x \sin \{s(x - \tau)\} q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau \quad (3.8)$$

dir.

İspat. (3.7) denklemini ispatlayalım. $\varphi(x, \lambda)$ (3.1) denklemini sağladığından (3.7) denkleminde $q(\tau) \varphi(\tau, \lambda)$ ifadesi yerine $\varphi''(\tau, \lambda) + \lambda \varphi(\tau, \lambda)$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin \{s(x - \tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau &= \int_0^x \sin \{s(x - \tau)\} (\varphi''(\tau, \lambda) + \lambda \varphi(\tau, \lambda)) d\tau \\ &= \int_0^x \sin \{s(x - \tau)\} \varphi''(\tau, \lambda) d\tau \\ &\quad + s^2 \int_0^x \sin \{s(x - \tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafında bulunan ilk integrale iki kez kısmi integrasyon uygulanır

ve (3.5) şartları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin \{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau &= \sin \{s(x-\tau)\} \varphi'(\tau, \lambda)|_0^x \\
&+ s \int_0^x \cos \{s(x-\tau)\} \varphi'(\tau, \lambda) d\tau \\
&+ s^2 \int_0^x \sin \{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\
&= -\sin sx \cdot \varphi'(0, \lambda) + s \cos \{s(x-\tau)\} \varphi'(\tau, \lambda)|_0^x \\
&- s^2 \int_0^x \sin \{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\
&+ s^2 \int_0^x \sin \{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\
&= -h \sin sx + s \varphi(x, \lambda) - s \cos sx
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı s 'e bölünerek

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin \{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.8) denklemini ispatlayalım. $\psi(x, \lambda)$, (3.1) denklemini sağladığından (3.8) denkleminde $q(\tau) \psi(\tau, \lambda)$ ifadesi yerine $\psi''(\tau, \lambda) + \lambda \psi(\tau, \lambda)$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin \{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau &= \int_0^x \sin \{s(x-\tau)\} (\psi''(\tau, \lambda) + \lambda \psi(\tau, \lambda)) d\tau \\
&= \int_0^x \sin \{s(x-\tau)\} \psi''(\tau, \lambda) d\tau \\
&+ s^2 \int_0^x \sin \{s(x-\tau)\} \psi(\tau, \lambda) d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında bulunan ilk integrale iki kez kısmi integrasyon uygulanır ve (3.6) şartları yerine yazılırsa

$$\int_0^x \sin \{s(x-\tau)\} q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau = s \psi(x, \lambda) - \sin sx$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı s 'e bölünürse

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s} \int_0^x \sin \{s(x - \tau)\} q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau$$

elde edilir.

Lemma 3.1.2. $q(x) \in C(0, \pi)$ ve sınırlı türevelere sahip olmak üzere (3.1)-(3.4) probleminin özdeğerleri

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.9)$$

formundadır.

İspat. $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun x 'e göre türevini hesaplayalım:

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin \{s(x - \tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi'(x, \lambda) &= -s \sin sx + h \cos sx + \int_0^x \cos \{s(x - \tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\ &= -s \sin sx + h \cos sx + \int_0^x [\cos sx \cdot \cos \tau q + \sin sx \cdot \sin s\tau] q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. x yerine π yazılırsa

$$\varphi'(\pi, \lambda) = -s \sin s\pi + h \cos s\pi + \int_0^\pi [\cos s\pi \cdot \cos \tau q + \sin s\pi \cdot \sin s\tau] q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

bulunur.

(3.1) denkleminde bulunan $q(x)$ fonksiyonu sınırlı türevelere sahip olsun. Bu durumda (3.7) eşitliği ve $\varphi(x, \lambda)$ 'nin x 'e göre türevi (3.4) sınır şartlarının ikincisinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} A &= h + H + \int_0^\pi \left\{ \cos s\tau + \frac{H}{s} \sin s\tau \right\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau, \\ B &= \frac{hH}{s} + \int_0^\pi \left\{ \sin s\tau + \frac{H}{s} \right\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \end{aligned}$$

olmak üzere

$$(-s + B) \sin s\pi + A \cos s\pi = 0 \quad (3.10)$$

elde edilir. A ve B eşitliklerinde $\varphi(\tau, \lambda)$ yerine $\cos s\tau + O\left(\frac{1}{s}\right)$ ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned} A &= h + H + \int_0^\pi \left\{ \cos s\tau + \frac{H}{s} \sin s\tau \right\} \left\{ \cos s\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) \right\} q(\tau) d\tau \\ &= h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) \cos 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right), \\ B &= \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) \sin 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden $q(x)$ sınırlı türevelere sahip olduğundan kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned} \int_0^\pi q(\tau) \cos 2s\tau d\tau &= \frac{1}{2s} q(\tau) \sin 2s\tau \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2s} q'(\tau) \sin 2s\tau d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right) \\ \int_0^\pi q(\tau) \sin 2s\tau d\tau &= -\frac{1}{2s} q(\tau) \cos 2s\tau \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{2s} q'(\tau) \cos 2s\tau d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} A &= h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right), \quad h_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau, \\ B &= O\left(\frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (3.10) denklemi

$$\tan s\pi = \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)}{s + O\left(\frac{1}{s}\right)}$$

olup $s_n = n + \delta_n$ ve $\tan x$ in seri açılımından dolayı

$$\begin{aligned} \tan \pi \delta_n &= \frac{h + H + h_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \delta_n &= \frac{h + H + h_1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

olur. $c = \frac{1}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau \right)$ olmak üzere son ifade

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

formuna dönüşür.

3.2. Sturm-Liouville Operatörü İçin Dönüşüm Operatörü

E , lineer topolojik uzay ve $A, B : E \rightarrow E$ lineer operatörler olmak üzere E_1 ve $E_2 \subset E$ kapalı alt uzayları olsun.

Tanım 3.2.1. $X : E_1 \rightarrow E_2$ lineer sürekli operatör olmak üzere

1. $AX = BA_2$

2. X^{-1} mevcut ve sürekli olması şartlarının sağlanması halinde X operatörüne A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir.

Lemma 3.2.1. λ özdeğerine karşılık gelen B operatörünün özfonksiyonu $\varphi_\lambda \in E_1$, yani

$$B\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$$

olmak üzere, aynı λ özdeğerine karşılık gelen $\psi_\lambda = X\varphi_\lambda$, A operatörünün özfonksiyonudur. Dolayısıyla

$$A\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

dır.

İspat. $AX = XB$ olduğundan

$$A\psi_\lambda = AX\varphi_\lambda = XB\varphi_\lambda = X(\lambda\varphi_\lambda) = \lambda X\varphi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.2.2. Lineer topolojik E uzayında A_1, A_2 ve A_3 lineer operatörleri ve E_1, E_2, E_3 kapalı alt uzayları verilmiş olsun. A_1 ve A_2 operatörler çifti için X_{A_1, A_2} dönüşüm operatörü

$$X_{A_1, A_2} : E_2 \rightarrow E_3$$

şeklinde, A_2 ve A_3 operatörler çifti için X_{A_2, A_3} dönüşüm operatörü ise

$$X_{A_2, A_3} : E_1 \rightarrow E_2$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda A_1 ve A_3 operatörler çifti için X_{A_1, A_3} dönüşüm operatörü,

$$X_{A_1, A_3} : E_1 \rightarrow E_3$$

şeklinde olmak üzere

$$X_{A_1, A_3} = X_{A_1, A_2} X_{A_2, A_3}$$

formülü ile ifade edilir.

İspat. Dönüşüm operatörünün tanımından dolayı

$$A_1 X_{A_1, A_2} = X_{A_1, A_2} A_2$$

$$A_2 X_{A_2, A_3} = X_{A_2, A_3} A_3$$

şeklinde olup, ikinci denklemden $A_2 = X_{A_2, A_3} A_3 X_{A_2, A_3}^{-1}$ elde edilir. Bu eşitlik birinci denklemden yerine yazılırsa

$$A_1 X_{A_1, A_2} = X_{A_1, A_2} X_{A_2, A_3} A_3 X_{A_2, A_3}^{-1}$$

veya

$$A_1 X_{A_1, A_2} X_{A_2, A_3} = X_{A_1, A_2} X_{A_2, A_3} A_3$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

E kompleks değerli $0 \leq x < \infty$ aralığında sürekli ve birinci mertebeden türevleri sürekli fonksiyonlar uzayı olsun. $q(x), r(x)$ $0 \leq x < \infty$ aralığında kompleks değerli, sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad B = -\frac{d^2}{dx^2} + r(x)$$

olsun. $E_1, E_2 \subset E$ ve h_1, h_2 keyfi kompleks sayılar olmak üzere E_1 deki fonksiyonlar için

$$h_1 f'(0) = h_1 f(0) \quad (3.11)$$

şartı, E_2 deki fonksiyonlar için de

$$h_2 f'(0) = h_2 f(0) \quad (3.12)$$

şartı sağlansın.

Teorem 3.2.1. $X_{A, B} : E_1 \rightarrow E_2$ dönüşüm operatörünün görüntüsü

$$Xf = f(x) + \int_0^x K(x, t) f(t) dt \quad (3.13)$$

şeklindedir. Burada $K(x, t)$ çekirdeği

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - q(x) K(x, t) = \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} - r(t) K(x, t) \quad (3.14)$$

diferensiyel denkleminin

$$K(x, x) = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \int_0^x [q(s) - r(s)] ds, \quad (3.15)$$

$$\left[\frac{\partial K}{\partial x} - h_1 K \right]_{t=0} = 0 \quad (3.16)$$

şartlarını sağlayan çözüm fonksiyonudur.

İspat. (3.13) bağıntısı x 'e göre diferensiyellenirse

$$(Xf)' = f'(x) + K(x, x)f(x) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} f(t) dt \quad (3.17)$$

olur. $Xf(x) \in E_2$ olduğundan (3.17) de $x = 0$ yazılırsa

$$\begin{aligned} (Xf')_{x=0} &= f'(0) + K(0, 0)f(0) \\ h_2 f(0) &= h_1 f(0) + K(0, 0)f(0) \\ (h_2 - h_1)f(0) &= K(0, 0)f(0) \\ K(0, 0) &= h_2 - h_1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir.

$$(Xf)'' = f''(x) + K'(x, x)f(x) + K(x, x)f'(x) + \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} f(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} f(t) dt$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} A(Xf) &= -(Xf)'' + q(x)(Xf) \\ &= -f'' - \frac{\partial K(x, x)}{\partial x} \Big|_{t=x} f(x) - \frac{dK(x, x)}{dx} f(x) \\ &\quad - K(x, x)f'(x) - \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} f(t) dt \\ &\quad + q(x)f(x) + \int_0^x K(x, t)f(t)q(x) dt \\ &= -f'' - \left(\frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} + \frac{dK(x, x)}{dx} - q(x) \right) f(x) \\ &\quad - K(x, x)f'(x) - \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - q(x)K \right] f(t) dt \end{aligned} \quad (3.19)$$

olur.

Şimdi $X(Bf)$ 'i hesaplayalım:

$$\begin{aligned} X(Bf) &= Bf + \int_0^x K(x, t)(Bf)dt, \quad (Bf = -f''(x) + r(x)f(x)) \\ &= -f''(x) + r(x)f(x) + \int_0^x K(x, t) [-f''(x) + r(x)f(x)] dt \end{aligned}$$

eşitlikteki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned} X(Bf) &= -f''(x) + r(x)f(x) - K(x, x)f'(x) + K(x, 0)f'(0) \\ &\quad + \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=x} f(x) - \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=0} f(0) - \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - r(t)K \right] f(t)dt \quad (3.20) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.19) ve (3.20) eşitlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - q(x)K(x, t) &= \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} - r(t)K(x, t) \\ \left[\frac{\partial K}{\partial x} - h_1 K \right]_{t=0} &= 0 \\ 2 \frac{dK(x, x)}{dx} &= q(x) - r(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3. İki Spektruma Göre Ters Sturm-Liouville Problemi

$p(x)$ ve $q(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, h ve H reel sayılar olmak üzere

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 < x < \pi \quad (3.21)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (3.22)$$

$$y'' + (\mu - p(x))y = 0, \quad 0 < x < \pi \quad (3.23)$$

şeklindeki iki Sturm-Liouville problemini gözönüne alalım.

(3.21)-(3.22) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve (3.23)-(3.22) probleminin özdeğerleri de $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ olsun. (3.21)-(3.2) probleminin özfonksiyonu $\phi(x, \lambda_n)$, (3.23)-(3.22)

probleminin özfonksiyonu da $\phi(x, \mu_n)$ olsun. (3.21)-(3.22) probleminin normlaştırıcı sayıları

$$\rho_n = \int_0^\pi \phi^2(x, \lambda_n) dx$$

olacak şekilde özdeğer ve normlaştırıcı sayıları için asimptotik formüller

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (3.24)$$

$$\rho_n = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.25)$$

formundadır. Ayrıca $\phi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonları

$$\phi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (3.26)$$

formundadır. Benzer şekilde (3.23)-(3.22) problemi için de asimptotik formüller

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a'_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\sigma_n = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklindedir.

Spektral verilere göre $q(x)$ potansiyelinin, h ve H sayılarının bulunmasına ters Sturm-Liouville problemi denir. Bu spektral veriler Sturm-Liouville operatörünün spektrumu, normlaştırıcı sayıları, spektral fonksiyonu, nodal noktaları olabilir.

$q(x) \in C^1[0, \pi]$ reel değerli bir fonksiyon, h ve H 'ın bilinen reel sayılar olduğunu kabul edelim. Ayrıca (3.21)-(3.22) probleminin spektral karakteristikleri $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^\infty$ 'ler de verilsin. $p(x) \in C^1[0, \pi]$ bilinmeyeniyle (3.23)-(3.22) probleminin $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^\infty$ farklı spektral karakteristiklerinin verildiğini kabul edelim.

Lemma 3.2.1. $\lambda \geq 1$ ve $0 \leq x \leq \pi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |\phi(x, \lambda)| + \frac{|\phi'(x, \lambda)|}{\sqrt{\lambda}} &\leq M, \\ \sqrt{\lambda} |\dot{\phi}(x, \lambda)| + |\dot{\phi}'(x, \lambda)| &\leq M \end{aligned} \quad (3.27)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır.

İspat. $\lambda \geq 1$ olduğundan

$$\phi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

alınabilir. (3.26) eşitliğinin x 'e ve λ 'ya göre kısmi türevleri alınırsa

$$\phi'(x, \lambda) = \phi_x(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + h \cos \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x, \lambda) = \phi_\lambda(x, \lambda) &= -\frac{x}{2\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x + \frac{hx}{2\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \\ &\quad - \frac{h}{2\sqrt{\lambda}\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}'(x, \lambda) &= -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x - \frac{x}{2} \cos \sqrt{\lambda}x \\ &\quad + \frac{h}{2\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x - \frac{hx}{2\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $-1 \leq \cos \sqrt{\lambda}x \leq 1$, $-1 \leq \sin \sqrt{\lambda}x \leq 1$, $0 \leq x \leq \pi$ eşitsizlikleri gözönüne alınarak ve yukarıda elde edilen eşitlikler (3.27) de yazılarak

$$\begin{aligned} |\phi(x, \lambda)| + |\phi'(x, \lambda)| / \sqrt{\lambda} &\leq M, \\ \sqrt{\lambda} |\dot{\phi}(x, \lambda)| + |\dot{\phi}'(x, \lambda)| &\leq M \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1. Eğer $A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n|$ yeterince küçük ise

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |p(x) - q(x)| \leq C.A$$

dır. Burada C ; h , H ve $q(x)$ 'e bağlı pozitif bir sabittir.

İspat.

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right] \quad (3.28)$$

olmak üzere $F(x, s)$ fonksiyonu $0 \leq x, s \leq \pi$ de sürekli, iki defa diferensiyellenebilirdir.

$$K(x, s) + \int_0^x K(x, t) F(t, s) dt + F(x, s) = 0, \quad 0 \leq s \leq x \leq \pi \quad (3.29)$$

esas integral denklemi ikinci tür Volterra integral denklemidir ve her sabit x için bir tek sürekli $K(x, s)$ çözümüne sahiptir. Ayrıca $K(x, s)$ çözümü $0 \leq s \leq x \leq \pi$ aralığında ikinci mertebeden sürekli diferensiyellenebilirdir. Ayrıca

$$K_{xx} - p(x) K = K_{ss} - q(s) K, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3.30)$$

diferensiyel denkleminin

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x (p(t) - q(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3.31)$$

$$K_s(x, 0) - hK(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (3.32)$$

sınır şartlarını sağlayan bir tek $K(x, s)$ çözüm fonksiyonu vardır[58].

(3.29) integral denklemi ardışık yaklaşımlar yöntemiyle çözelim. Bu denklemde $F(x, s)$ fonksiyonu bilinen bir fonksiyon olup $K(x, s)$ çözümü bulunacaktır.

Önce $F(s, t)$ 'i ele alalım ve aşağıdaki gibi $F^{(n)}(s, t; x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) fonksiyonlarını oluşturalım:

$$\begin{aligned} F^{(1)}(s, t; x) &= F(s, t), \\ F^{(n+1)}(s, t; x) &= \int_0^x F(s, u) F^{(n)}(u, t; x) du, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |F(s, t)|^2 ds dt < 1 \quad (3.34)$$

olmak üzere $K(x, s)$ çözümü

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F^{(n)}(x, s) \quad 0 \leq s \leq x \leq \pi \quad (3.35)$$

dir. (3.31) eşitliğinin x 'e göre diferensiyeli alınarak

$$\frac{1}{2} (q(x) - p(x)) = -\frac{d}{dx} K(x, x) \quad (3.36)$$

bulunur. (3.36) ifadesi (3.35) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (q(x) - p(x)) &= -\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F^{(n)}(x, x; x) \right) \\ &= \frac{d}{dx} F(x, x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{d}{dx} F^{(n+1)}(x, x; x) \end{aligned} \quad (3.37)$$

elde edilir. $\frac{d}{dx} F^{(n+1)}(x, x; x)$ 'i hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} F^{(n+1)}(x, x; x) &= \left\{ F_s^{(n+1)} + F_t^{(n+1)} + F_x^{(n+1)} \right\}_{s=x, t=x} \\
&= \int_0^x F_s(s, u) F^{(n)}(u, t; x) du \\
&\quad + \int_0^x F_t(u, t) F^{(n)}(s, u; x) du + F_x^{(n+1)}(s, t; x)_{s=x, t=x} \\
&= 2 \int_0^x F_x(x, u) F^{(n)}(x, u; x) du + \sum_{k=1}^n F^{(k)}(x, x; x) F^{(n+1-k)}(x, x; x)
\end{aligned}$$

olup bu eşitlik (3.37) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (q(x) - p(x)) &= \frac{d}{dx} F(x, x) + 2 \int_0^x F_x(x, u) K(x, u) du \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=1}^n F^{(k)}(x, x; x) F^{(n+1-k)}(x, x; x) \\
&= \frac{d}{dx} F(x, x) - K^2(x, x) + 2 \int_0^x F_x(x, u) K(x, u) du \quad (3.38)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$A_0 = \frac{1}{2} \inf_n \rho_n$$

alalım.

$\rho_n = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ asimptotik formülünden A_0 ın pozitif olduğu bulunur.

$$A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right] \leq A_0 \quad (3.39)$$

olsun. Bu taktirde her bir n için

$$\rho_n \geq 2A_0, \quad \sigma_n \geq A_0 \quad (3.40)$$

elde edilir.

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right]$$

eşitliğinin sağ tarafı x ' e göre diferensiyellenirse

$$F_x(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right]$$

olur. Bu ifadeye $\frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\sigma_n}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
F_x(x, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\sigma_n} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sigma_n} (\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n) - \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)) \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\phi'(x, \lambda) \phi(s, \lambda))' d\lambda \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\dot{\phi}'(x, \lambda) \phi(s, \lambda) + \phi'(x, \lambda) \dot{\phi}(s, \lambda)) d\lambda \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
|F_x(x, s)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{\sigma_n - \rho_n}{\sigma_n \rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) \right| \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\dot{\phi}'(x, \lambda) \phi(s, \lambda) + \phi'(x, \lambda) \dot{\phi}(s, \lambda)) d\lambda \right|
\end{aligned}$$

olup (3.39), (3.40) ve lemma 3.2.1 den

$$|F_x(x, s)| \leq C' \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right] \equiv C' A$$

elde edilir. Buradan da

$$\left| \frac{d}{dx} F(x, x) \right| \leq 2C' A \quad (3.41)$$

olur. Benzer şekilde

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right]$$

olup bu eşitliğe $\frac{\phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\sigma_n}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\phi(x, \lambda) \phi(s, \lambda))' d\lambda \right]$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
|F(x, s)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) \right| \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\phi(x, \lambda) \phi(s, \lambda))' d\lambda \right| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) \right| \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \left(\dot{\phi}(x, \lambda) \phi(s, \lambda) + \dot{\phi}(s, \lambda) \phi(x, \lambda) \right) d\lambda \right| \\
|F(x, s)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\sigma_n - \rho_n| + \left| \sqrt{\mu_n} - \sqrt{\lambda_n} \right| \right] \leq C'' A \tag{3.42}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada C' ve C'' sadece $q(x)$, h ve H 'a bağılı sabitlerdir.

$0 \leq x \leq \pi$ olduğundan (3.33) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
|F^{(2)}(s, t; x)| &= \left| \int_0^x F(s, u) F^{(1)}(u, t; x) du \right| \leq \int_0^x (C'' A)^2 du \leq (C'' A)^2 \pi \\
|F^{(3)}(s, t; x)| &= \left| \int_0^x F(s, u) F^{(2)}(u, t; x) du \right| \leq \int_0^x (C'' A)^3 du \leq (C'' A)^3 \pi^2 \\
&\vdots = \vdots \\
|F^{(n)}(s, t; x)| &= \left| \int_0^x F(s, u) F^{(n-1)}(u, t; x) du \right| \leq \int_0^x (C'' A)^n du \\
&\leq \frac{1}{\pi} (C'' A \pi)^n \tag{3.43}
\end{aligned}$$

bulunur.

Eğer $\pi C'' A$ yeteri kadar küçük ise yani $\pi C'' A < \frac{1}{2}$ ise, bu durumda (3.43) eşitsizliğinden

$$|K(x, s)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F^{(n)}(x, s; x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} (\pi C'' A)^n \leq 2C'' A \tag{3.44}$$

olur. $A \leq \min \{A_0, (2\pi C'')^{-1}\}$ olmak üzere (3.41), (3.42) ve (3.44) eşitsizlikleri (3.38) denkleminde yerine yazılırsa

$$|p(x) - q(x)| \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right]$$

elde edilir.

4. DIRAC OPERATÖRÜ

4.1. Bir Boyutlu Dirac Sistemi

$p_{ik}(x)$, $(i, k = 1, 2)$, $[0, \pi]$ aralığında tanımlı ve sürekli reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$L = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{12}(x) = p_{21}(x) \quad (4.1)$$

bir matris operatörü olsun. $y(x)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(B \frac{d}{dx} + L(x) - \lambda I \right) y = 0 \quad (4.2)$$

denklemini iki tane birinci mertebeden adi diferensiyel denklemden oluşan

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} + p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 &= \lambda y_1 \\ -\frac{dy_1}{dx} + p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 &= \lambda y_2 \end{aligned} \quad (4.2')$$

denklemler sistemine denktir.

Bu durumda $V(x)$ – potansiyel fonksiyon, m – zerreciğin kütlesi olacak biçimde $p_{12}(x) = p_{21}(x) \equiv 0$, $p_{11}(x) = V(x) + m$ ve $p_{22}(x) = V(x) - m$ olurken relativistik kuantum teorisinde (4.2) sistemi bir boyutlu stasyonere Dirac sistemi olarak bilinmektedir.

2-boyutlu uzayın her düzgün ortogonal dönüşümü

$$H(x) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & -\sin \varphi(x) \\ \sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile tanımlanır[32]. Ayrıca

$$BH = HB$$

olduğu kolayca görülür. Gerçekten

$$\begin{aligned} BH &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & -\sin \varphi(x) \\ \sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \\ -\cos \varphi(x) & \sin \varphi(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} HB &= \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & -\sin \varphi(x) \\ \sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \\ -\cos \varphi(x) & \sin \varphi(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olup $BH = HB$ dir.

$y = Hz$ olacak şekilde (4.2) denkleminin her iki tarafını soldan H^{-1} ile çarparsak,

$$H^{-1}B \frac{d}{dx} (Hz) + H^{-1}LHz = \lambda H^{-1}Hz$$

veya

$$B \frac{dz}{dx} + \left(H^{-1}B \frac{d}{dx} H + H^{-1}LH \right) z = \lambda z \quad (4.3)$$

elde ederiz.

$$Q = H^{-1}B \frac{d}{dx} H + H^{-1}LH$$

olmak üzere Q matrisini hesaplayalım. Bu taktirde

$$\begin{aligned} H^{-1}(x) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & \sin \varphi(x) \\ -\sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix}, \\ H^{-1}(x) &= \frac{1}{\det H(x)} \begin{pmatrix} H_{22}(x) & -H_{12}(x) \\ -H_{21}(x) & H_{11}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}H = \begin{pmatrix} -\varphi'(x) \sin \varphi(x) & -\varphi'(x) \cos \varphi(x) \\ \varphi'(x) \cos \varphi(x) & -\varphi'(x) \sin \varphi(x) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} H^{-1}B\frac{d}{dx}H &= \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & \sin \varphi(x) \\ -\sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi'(x) \sin \varphi(x) & -\varphi'(x) \cos \varphi(x) \\ \varphi'(x) \cos \varphi(x) & -\varphi'(x) \sin \varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \\ -\cos \varphi(x) & -\sin \varphi(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi'(x) \sin \varphi(x) & -\varphi'(x) \cos \varphi(x) \\ \varphi'(x) \cos \varphi(x) & -\varphi'(x) \sin \varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{-1}LH &= \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & \sin \varphi(x) \\ -\sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & -\sin \varphi(x) \\ \sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) p_{11}(x) + \sin \varphi(x) p_{21}(x) & \cos \varphi(x) p_{12}(x) + \sin \varphi(x) p_{22}(x) \\ -\sin \varphi(x) p_{11}(x) + \cos \varphi(x) p_{21}(x) & -\sin \varphi(x) p_{12}(x) + \cos \varphi(x) p_{22}(x) \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & -\sin \varphi(x) \\ \sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11} \cos^2 \varphi + p_{12} \sin 2\varphi + p_{22} \sin^2 \varphi & p_{12} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} (p_{22} - p_{11}) \sin 2\varphi \\ p_{12} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} (p_{22} - p_{11}) \sin 2\varphi & p_{11} \sin^2 \varphi - p_{12} \sin 2\varphi + p_{22} \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde ederiz. Son iki eşitlikten,

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(x) + p_{11} \cos^2 \varphi + p_{12} \sin 2\varphi + p_{22} \sin^2 \varphi & p_{12} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} (p_{22} - p_{11}) \sin 2\varphi \\ p_{12} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} (p_{22} - p_{11}) \sin 2\varphi & \varphi'(x) + p_{11} \sin^2 \varphi - p_{12} \sin 2\varphi + p_{22} \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde ederiz. $q_{12}(x) = 0$ olmak üzere $\varphi(x)$ fonksiyonunu seçelim. Bu takdirde

$$p_{12} \cos 2\varphi(x) + \frac{1}{2} \{p_{22}(x) - p_{11}(x)\} \sin 2\varphi(x) = 0$$

dir. Buradan

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x) - p_{22}(x)}$$

elde edilir. $Q(x)$ matrisinin görüntüsü

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buna göre (4.3) denklemi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin I. kanonik formu denir.

Şimdi $IzQ(x) = q_{11}(x) + q_{22}(x) = 0$ olmak üzere bir $\varphi(x)$ fonksiyonu seçelim. Yani

$$2\varphi'(x) + p_{11}(x) + p_{22}(x) = 0$$

dır. Buradan

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \{p_{11}(z) + p_{22}(z)\} dz$$

elde edilir. Buna göre (4.3) denklemini

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \quad (4.5)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denkleme Dirac denkleminin II. kanonik formu denir. (4.4) ve (4.5) denklemlerine (4.2) sisteminin kanonik formları da denir. (4.2) denklem sisteminin spektral teorisinin çeşitli sorularını incelerken bu veya diğer kanonik formlardan faydalanmak kolaylık sağlar. Örneğin, özdeğerlerin ve özvektör fonksiyonlarının asimptotik davranışı araştırılırken ve keyfi vektör fonksiyonunun (0 ve π noktalarında homojen sınır şartları sağlandığında) (4.2) denklem sisteminin özvektör fonksiyonlarına göre açılımı incelenirken (4.4) kanonik denkleminde faydalanmak kolaylık sağlar. Sonsuz

aralıkta verilmiş (4.2) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve ters problem incelenirken de (4.5) kanonik denklemi kolaylık sağlar.

(4.4) kanonik denklem sistemi için $p(x)$ ve $r(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y_2' + \{p(x) - \lambda\} y_1 = 0 \quad , \quad y_1' - \{r(x) - \lambda\} y_2 = 0 \quad (4.6)$$

$$y_2(0) \cos \alpha + y_1(0) \sin \alpha = 0 \quad (4.7)$$

$$y_2(\pi) \cos \alpha + y_1(\pi) \sin \alpha = 0 \quad (4.8)$$

sınırdeğer problemini gözönüne alalım. Herhangi bir λ_1 değeri için bu problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x, \lambda_1) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda_1) \\ y_2(x, \lambda_1) \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda λ_1 'e özdeğer, buna karşılık gelen $y(x, \lambda_1)$ 'e de özvektör fonksiyonu denir.

Lemma 4.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x, \lambda_1)$ ve $z(x, \lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonaldır, yani,

$$\int_0^\pi \{y_1(x, \lambda_1) z_1(x, \lambda_2) + y_2(x, \lambda_1) z_2(x, \lambda_2)\} dx = 0$$

dir.

İspat: $y(x, \lambda_1)$ ve $z(x, \lambda_2)$ özvektör fonksiyonları (4.6) sisteminin çözümleri olduğundan ,

$$y_2'(x, \lambda_1) + \{p(x) - \lambda_1\} y_1(x, \lambda_1) = 0$$

$$y_1'(x, \lambda_1) - \{r(x) - \lambda_1\} y_2(x, \lambda_1) = 0$$

$$z_2'(x, \lambda_2) + \{p(x) - \lambda_2\} z_1(x, \lambda_2) = 0$$

$$z_1'(x, \lambda_2) - \{r(x) - \lambda_2\} z_2(x, \lambda_2) = 0$$

dir. Bu denklemleri sırası ile $z_1(x, \lambda_2)$, $-z_2(x, \lambda_2)$, $-y_1(x, \lambda_1)$ ve $y_2(x, \lambda_1)$ ile çarpar ve sonuçları toplarsak,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \{y_1(x, \lambda_1) z_2(x, \lambda_2) - y_2(x, \lambda_1) z_1(x, \lambda_2)\} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \{y_1(x, \lambda_1) z_1(x, \lambda_2) + y_2(x, \lambda_1) z_2(x, \lambda_2)\} = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu son eşitliği x 'e göre 0 'dan π ' ye integrallersek

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi \{y_1(x, \lambda_1) z_1(x, \lambda_2) + y_2(x, \lambda_1) z_2(x, \lambda_2)\} dx \\ &= \{y_1(x, \lambda_1) z_2(x, \lambda_2) - y_2(x, \lambda_1) z_1(x, \lambda_2)\} \Big|_0^\pi \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ olduğundan

$$\int_0^\pi \{y_1(x, \lambda_1) z_1(x, \lambda_2) + y_2(x, \lambda_1) z_2(x, \lambda_2)\} dx = 0$$

veya

$$\int_0^\pi y^T(x, \lambda_1) z(x, \lambda_2) dx = 0$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.1.2. (4.6)-(4.8) sınırdeğer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: Aksini varsayalım. Yani $\lambda_1 = u + iv$ kompleks özdeğer olsun. $p(x)$ ve $r(x)$ reel değerli fonksiyonlar ve α, β sayıları reel olduğundan Dirac operatörünün genel denkleminde eşleniği alınırsa, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısı da bir özdeğerdir. λ_2 ' ye karşılık gelen $\overline{y}(x, \lambda_2)$ özvektör fonksiyonudur. Bu taktirde lemma 4.1.1 den dolayı

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^\pi \{y_1(x, \lambda_1) \overline{y_1}(x, \lambda_2) + y_2(x, \lambda_1) \overline{y_2}(x, \lambda_2)\} dx = 0$$

ve

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^\pi \{|y_1(x, \lambda_1)|^2 + |y_2(x, \lambda_1)|^2\} dx = 0$$

olur. $\lambda \neq \overline{\lambda}$ olduğundan $y_1(x, \lambda_1) = 0$ ve $y_2(x, \lambda_1) = 0$ olurki bu özvektör fonksiyonlarının sıfır olmaması gerçeği ile çelişir. O halde özdeğerler kompleks olamaz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2. Kanonik Dirac Operatörü İçin Matris Dönüşüm Operatörü

$p_i(x)$ ve $r_i(x)$, $(i = 1, 2)$, her sonlu aralıkta $(0 \leq x \leq b < \infty)$ integrallenebilir reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} p_1(x) & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix} \\ &= B \frac{d}{dx} + Q_1(x) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} p_2(x) & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_2(x) & 0 \\ 0 & r_2(x) \end{pmatrix} \\ &= B \frac{d}{dx} + Q_2(x) \end{aligned} \quad (4.10)$$

operatörlerini gözönüne alalım. Keyfi sonlu reel h_1 reel sayısı için

$$f_2(0) - h_1 f_1(0) = 0 \quad (4.11)$$

sınır şartını sağlayan, $[0, b)$ aralığında tanımlı, sürekli, diferensiyellenebilen

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_1 olsun. Keyfi sonlu reel h_2 sayısı için

$$g_2(0) - h_2 g_1(0) = 0 \quad (4.12)$$

sınır şartını sağlayan, $[0, b)$ aralığında tanımlı, sürekli, diferensiyellenebilen

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_2 olsun. X operatör matrisi, $f(x) \in E_1$ için

$$X \{f(x)\} = R(x) f(x) + \int_0^x K(x, s) f(s) ds \quad (4.13)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $R(x)$ ve $K(x, s)$ iki sonlu boyutlu veya 2x2 boyutlu kare matrislerdir.

(4.9) ve (4.13) den,

$$\begin{aligned}
A_1 X \{f(x)\} &= BR'(x) f(x) + BR(x) f'(x) \\
&+ Q_1(x) R(x) f(x) + BK(x, x) f(x) \\
&+ \int_0^x \{BK'_x(x, s) + Q_1(x) K(x, s)\} f(s) ds
\end{aligned} \tag{4.14}$$

dir. Diğer taraftan (4.10) ve (4.13) den dolayı

$$\begin{aligned}
A_2 X \{f'(x)\} &= R(x) B f'(x) + R(x) Q_2(x) f(x) \\
&+ \int_0^x K(x, s) \{B f'(s) + Q_2(s) f(s)\} ds
\end{aligned}$$

dir. Son denklemde kısmi integrasyondan faydalanılarak

$$\begin{aligned}
X A_2 \{f'(x)\} &= R(x) B f'(x) + R(x) Q_2(x) f(x) \\
&+ K(x, x) B f(x) - K(x, 0) B f(0) \\
&+ \int_0^x \{K(x, s) Q_2(s) - K'_s(x, s) B\} f(s) ds
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. $f(x)$, E_1 uzayında keyfi vektör fonksiyonu olduğu için $A_1 X = X A_2$ den dolayı $f(x)$ ve $f'(x)$ in katsayıları ve (4.14), (4.15) nin integral altındaki ifadelerinin eşit olması gerekir. Bu sebeple $f'(x)$ lerin katsayıları için

$$BR(x) = R(x) B \tag{4.16}$$

elde edilir. Eğer

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde alınırsa (4.16) dan

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\delta(x) = \alpha(x), \quad \gamma(x) = -\beta(x)$$

bulunur, yani $R(x)$ matrisinin görüntüsü

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

olur.

Şimdi $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonlarını hesaplayalım. Bunun için (4.14) ve (4.15) de $f(x)$ in katsayıları eşitlenirse $R(x)$ matrisinin tanımlanması için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$BR'(x) + Q_1(x)R(x) - R(x)Q_2(x) = K(x, x)B - BK(x, x). \quad (4.18)$$

$$K(x, s) = \begin{pmatrix} K_{11}(x, s) & K_{12}(x, s) \\ K_{21}(x, s) & K_{22}(x, s) \end{pmatrix}$$

olmak üzere $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $R(x)$ ve B matrislerinin görüntülerinden faydalanılarak (4.18) denklemi

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x) & p_1(x)\beta(x) \\ -r_1(x)\beta(x) & r_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x) & r_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & r_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -K_{12}(x, x) & K_{11}(x, x) \\ -K_{22}(x, x) & K_{21}(x, x) \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} K_{21}(x, x) & K_{22}(x, x) \\ -K_{11}(x, x) & -K_{12}(x, x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\beta'(x) + [p_1(x) - p_2(x)]\alpha(x) & \alpha'(x) + [p_1(x) - r_2(x)]\beta(x) \\ -\alpha'(x) + [p_2(x) - r_1(x)]\beta(x) & -\beta'(x) + [r_1(x) - r_2(x)]\alpha(x) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -[K_{12}(x, x) + K_{21}(x, x)] & K_{11}(x, x) - K_{22}(x, x) \\ K_{11}(x, x) - K_{22}(x, x) & K_{12}(x, x) + K_{21}(x, x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris içinde sağlanmalıdır. Bu sebeple

(4.19) denkleminde

$$\begin{aligned}\alpha'(x) + [p_1(x) - r_2(x)] \beta(x) &= -\alpha'(x) + [p_2(x) - r_1(x)] \beta(x) \\ \beta'(x) - [p_1(x) - p_2(x)] \alpha(x) &= -\beta'(x) + [r_1(x) - r_2(x)] \alpha(x)\end{aligned}$$

bulunur, yani

$$\left. \begin{aligned}2\alpha'(x) + q(x) \beta(x) &= 0 \\ -2\beta'(x) + q(x) \alpha(x) &= 0\end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

dir. Burada

$$q(x) = p_1(x) - p_2(x) + r_1(x) - r_2(x) \quad (4.21)$$

dir. (4.20) sisteminde bulunan birinci eşitlik $\alpha(x)$ ile ikinci eşitlik de $\beta(x)$ ile çarpılıp, birinciden ikinci çıkartılarak

$$2\alpha(x) \alpha'(x) + 2\beta(x) \beta'(x) = 0,$$

yani

$$(\alpha^2(x) + \beta^2(x))' = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha^2(x) + \beta^2(x) = \alpha^2(0) + \beta^2(0) \quad (4.22)$$

bulunur.

$$f_1(0) = 1, \quad f_2(0) = h_1 \quad (4.23)$$

şartları sağlanmak üzere $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu sürekli, diferensiyelenebilir olsun. Bu takdirde $f(x)$ in (4.11) sınır koşulunu sağladığı açıktır ve bu sebeple $f(x) \in E_1$ dir. Yine kabul edelim ki, $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu, E_2 uzayının elemanı, dolayısıyla (4.12) sınır şartı sağlanacak şekilde

$$X \{f(x)\} = g(x) \quad (4.24)$$

olsun. Bu taktirde $x = 0$ için (4.24) eşitliğinden ve X matris operatörünün tanımından dolayı, yani (4.13) ve (4.17) bağıntılarına göre

$$X \{f(0)\} = g(0) = R(0)f(0)$$

veya

$$\begin{aligned} g_1(0) &= \alpha(0)f_1(0) + \beta(0)f_2(0) \\ g_2(0) &= -\beta(0)f_1(0) + \alpha(0)f_2(0) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerden (4.12) sınır şartı ve (4.23) şartları gözönüne alınmak üzere son eşitliklerin birincisi h_2 sayısı ile çarpılıp, daha sonra ikinciden çıkarılırsa

$$\beta(0) = \frac{h_1 - h_2}{1 + h_1 h_2} \alpha(0)$$

elde edilir.

$$\alpha(0) = 1 \quad (4.25)$$

alınırsa,

$$\beta(0) = \frac{h_1 - h_2}{1 + h_1 h_2} \quad (4.26)$$

olur. Buna göre,

$$\alpha^2(0) + \beta^2(0) = \frac{(1 + h_1^2)^2 (1 + h_2^2)^2}{(1 + h_1 h_2)^2} = \chi^2 \quad (4.27)$$

olur. Şimdi (4.22), (4.25)-(4.27) eşitliklerinden faydalanarak (4.20) sistemini çözelim. Eğer,

$$\alpha(x) = \chi \sin k(x), \quad \beta(x) = \cos k(x) \quad (4.27')$$

olarak alınırsa,

$$\alpha'(x) = k'(x)\chi \cos k(x), \quad \beta'(x) = -k'(x) \sin k(x)$$

bulunur. Bu değerler (4.20) de yerine yazılıp elde edilen denklemlerden birincisi $\cos k(x)$ ile ikincisi de $\sin k(x)$ ile çarpılıp, elde edilen denklemler toplanırsa

$$k(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x q(z) dz + \arcsin \frac{1}{\chi}$$

bulunur. Bu değerler (4.27') de yerine yazılırsa, $q(z)$ fonksiyonu (4.21) formülü, χ sayısı ise (4.26) formülü ile tanımlanacak şekilde $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları için

$$\alpha(x) = \chi \sin \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x q(z) dz + \arcsin \frac{1}{\chi} \right\} \quad (4.28)$$

$$\beta(x) = \chi \cos \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x q(z) dz + \arcsin \frac{1}{\chi} \right\} \quad (4.29)$$

ifadeleri bulunur. Şimdi (4.14) ve (4.15) de integral altındaki ifadeler eşitlenirse, $K(x, s)$ matris çekirdeği için,

$$K_s(x, s)B + BK_x(x, s) = K(x, s)Q_2(s) - Q_1(s)K(x, s) \quad (4.30)$$

matris denklemi veya

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial s} & \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} & \frac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} K_{11}(x, s) & K_{12}(x, s) \\ K_{21}(x, s) & K_{22}(x, s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(s) & 0 \\ 0 & r_2(s) \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11}(x, s) & K_{12}(x, s) \\ K_{21}(x, s) & K_{22}(x, s) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} (p_2(s) - p_1(x))K_{11}(x, s) & (r_2(s) - p_1(x))K_{12}(x, s) \\ (p_2(s) - r_1(x))K_{21}(x, s) & (r_2(s) - r_1(x))K_{22}(x, s) \end{pmatrix} \\ & \left. \begin{aligned} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= (p_2(s) - p_1(x))K_{11}(x, s) \\ \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= (r_2(s) - p_1(x))K_{12}(x, s) \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= (p_2(s) - r_1(x))K_{21}(x, s) \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= (r_2(s) - r_1(x))K_{22}(x, s) \end{aligned} \right\} \quad (4.30') \end{aligned}$$

denklemler sistemi elde edilir. Sonuç olarak (4.15) ifadesinde $f(0)$ ı içeren terim sıfıra eşit olur. Böylece,

$$K(x, 0)Bf(0) = 0$$

yani,

$$\begin{pmatrix} -K_{12}(x, 0) & K_{11}(x, 0) \\ -K_{22}(x, 0) & K_{21}(x, 0) \end{pmatrix} f(0) = 0$$

olur. Bu ise

$$K_{12}(x, 0)f_1(0) = K_{11}(x, 0)f_2(0)$$

$$K_{22}(x, 0)f_1(0) = K_{21}(x, 0)f_2(0)$$

denklemler sistemine eşdeğerdir. (4.11) sınır koşulundan dolayı

$$K_{12}(x, 0) = h_1 K_{11}(x, 0), \quad K_{22}(x, 0) = h_1 K_{21}(x, 0) \quad (4.31)$$

elde edilir. $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ keyfi diferensiyellenebilir sürekli fonksiyonlar olacak biçimde,

$$K_{11}(x, 0) = \varphi(x), \quad K_{21}(x, 0) = \psi(x) \quad (4.32)$$

ele alınırsa (4.31) ve (4.32) şartları, $K(x, s)$ matris çekirdeği için

$$K(x, s)|_{s=0} = \begin{pmatrix} \varphi(x) & h_1 \varphi(x) \\ \psi(x) & h_1 \psi(x) \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

şartını tanımlar. Burada (4.33) şartı (4.30) denklemi ile birlikte Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir[57].

Benzer şekilde Dirac operatörünün II. Kanonik formu için

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} p_1(x) & \frac{d}{dx} + q_1(x) \\ -\frac{d}{dx} + q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix} \\ &= B \frac{d}{dx} + Q_1(x) \\ A_2 &= \begin{pmatrix} p_2(x) & \frac{d}{dx} + q_2(x) \\ -\frac{d}{dx} + q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix} \\ &= B \frac{d}{dx} + Q_2(x) \end{aligned}$$

olmak üzere (4.46) denklemini

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x) - q_1(x)\beta(x) & p_1(x)\beta(x) + q_1(x)\alpha(x) \\ q_1(x)\alpha(x) + p_1(x)\beta(x) & q_1(x)\beta(x) + p_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x) + q_2(x)\beta(x) & q_2(x)\alpha(x) - p_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & -q_2(x)\beta(x) - p_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -K_{12}(x, x) & K_{11}(x, x) \\ -K_{22}(x, x) & K_{21}(x, x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}(x, x) & K_{22}(x, x) \\ -K_{11}(x, x) & -K_{12}(x, x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{pmatrix}
-\beta'(x) + [p_1(x) - p_2(x)] \alpha(x) - [q_1(x) + q_2(x)] \beta(x) \\
-\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)] \alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)] \beta(x) \\
\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)] \alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)] \beta(x) \\
-\beta'(x) + [p_2(x) - p_1(x)] \alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)] \beta(x)
\end{pmatrix}
= \begin{pmatrix}
-[K_{12}(x, x) + K_{21}(x, x)] & K_{11}(x, x) - K_{22}(x, x) \\
K_{11}(x, x) - K_{22}(x, x) & K_{12}(x, x) + K_{21}(x, x)
\end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris içinde sağlanmalıdır. Bu sebeple

$$\begin{aligned}
& \alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)] \alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)] \beta(x) \\
= & -\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)] \alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)] \beta(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta'(x) - [p_1(x) - p_2(x)] \alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)] \beta(x) \\
= & -\beta'(x) + [p_2(x) - p_1(x)] \alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)] \beta(x)
\end{aligned}$$

bulunur, yani

$$2\alpha'(x) = 0, \quad 2\beta'(x) = 0$$

dır. Buradan c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere

$$\alpha(x) = c_1, \quad \beta(x) = c_2$$

bulunur. Ayrıca (4.30) denklemi

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial s} & \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} & \frac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} K_{11}(x, s) & K_{12}(x, s) \\ K_{21}(x, s) & K_{22}(x, s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(s) & q_2(s) \\ q_2(s) & -p_2(s) \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11}(x, s) & K_{12}(x, s) \\ K_{21}(x, s) & K_{22}(x, s) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (p_2(x) - p_1(x)) K_{11}(x, s) + q_2(s) K_{12}(x, s) - q_1(x) K_{22}(x, s) \\ -q_1(x) K_{11}(x, s) + p_2(s) K_{21}(x, s) + (p_1(x) + p_2(s)) K_{22}(x, s) \\ q_2(s) K_{11}(x, s) - (p_1(x) + p_2(x)) K_{12}(x, s) - q_1(x) K_{22}(x, s) \\ -q_1(x) K_{12}(x, s) + q_2(s) K_{21}(x, s) + (p_1(x) + p_2(s)) K_{22}(x, s) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde. Bu durumda aşağıdaki

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= (p_2(x) - p_1(x)) K_{11}(x, s) + q_2(s) K_{12}(x, s) - q_1(x) K_{22}(x, s) \\ \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= q_2(s) K_{11}(x, s) - (p_1(x) + p_2(x)) K_{12}(x, s) - q_1(x) K_{22}(x, s) \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= -q_1(x) K_{11}(x, s) + p_2(s) K_{21}(x, s) + (p_1(x) + p_2(s)) K_{22}(x, s) \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= -q_1(x) K_{12}(x, s) + q_2(s) K_{21}(x, s) + (p_1(x) + p_2(s)) K_{22}(x, s) \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

denklemler sistemi elde edilir. burada (4.33) şartı (4.34) denklemini ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilir.

4.3. II. Kanonik Formda Dirac Operatörü İçin Ters Problem

$p_i(x)$ ve $q_i(x)$ ($i = 1, 2$), $[0, \pi]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olacak biçimde

$$Q_1(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{bmatrix}, \quad Q_2(x) = \begin{bmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{bmatrix}$$

olsun.

$$By' + Q_1(x)y = \lambda y, \quad (4.34)$$

$$y_2(0) - hy_1(0) = 0$$

$$y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0$$

$$By' + Q_2(x)y = \mu y, \quad (4.35)$$

$$y_2(0) - hy_1(0) = 0$$

$$y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0$$

problemlerini ele alalım. (4.35) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}$, (4.36) probleminin özdeğerleri ise $\{\mu_n\}$ olarak verilsin. (4.35)'in normlaştırmacı sayıları, çözüm fonksiyonu $\varphi(x, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x, \lambda_n) \\ \varphi_2(x, \lambda_n) \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$a_n = \int_0^\pi [\varphi_1^2(x, \lambda_n) + \varphi_2^2(x, \lambda_n)] dx$$

şeklindedir. (4.36)'in normlaştırmacı sayıları ise çözüm fonksiyonu $\varphi(x, \mu_n) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x, \mu_n) \\ \varphi_2(x, \mu_n) \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$b_n = \int_0^\pi [\varphi_1^2(x, \mu_n) + \varphi_2^2(x, \mu_n)] dx$$

dir. Ayrıca

$$F(x, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{b_n} \varphi(x, \mu_n) \varphi^T(s, \mu_n) - \frac{1}{a_n} \varphi(x, \lambda_n) \varphi^T(s, \lambda_n) \right\} \quad (4.36)$$

olmak üzere

$$K(x, s) + F(x, s) + \int_0^x K(x, t) F(t, s) dt = 0 \quad (0 \leq s \leq x \leq \pi)$$

esas integral denklemi sağlayan bir tek. $K(x, t)$ matris fonksiyonu vardır. $K(x, t)$ fonksiyonu

$$B \frac{\partial K}{\partial x} + Q_2(x) K(x, s) = -\frac{\partial K}{\partial s} B + Q_1(s) K(x, s)$$

diferensiyel denklemini ve

$$BK(x, x) - K(x, x)B = Q_2(x) - Q_1(x) \quad (4.37)$$

$$K_{21}(x, 0) = K_{11}(x, 0) = 0$$

koşullarını sağlar. Ayrıca $\varphi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonu için asimptotik formül

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda) &= \cos \{\lambda x - \alpha\} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ \varphi_2(x, \lambda) &= \sin \{\lambda x - \alpha\} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

şeklindedir.

Teorem 4.4.1. Eğer $A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} [|b_n - a_n| + |\mu_n - \lambda_n|]$ yeterince küçük ise

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq \pi} |p_2(x) - p_1(x)| &\leq C' . A \\ \max_{0 \leq x \leq \pi} |q_2(x) - q_1(x)| &\leq C'' . A \end{aligned}$$

dir. Burada $C' > 0$ ve $C'' > 0$ sabitlerdir.

İspat.

$$K(x, s) + F(x, s) + \int_0^x K(x, t) F(t, s) dt = 0 \quad (0 \leq s \leq x \leq \pi)$$

integral denklemini gözönüne alalım. Burada $F(x, s)$ bilinen fonksiyondur. Bu denklemin çözümü:

$$F^{(1)}(x, s) = F(x, s)$$

olmak üzere

$$F^{(n)}(s, t; x) = \int_0^x F(s, u) F^{(n)}(u, t; x) du \quad n \geq 1. \quad (4.39)$$

itere fonksiyonlarını yazılabilir. Buradan $K(x, s)$ matris fonksiyonu

$$K(s, t; x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F^{(n)}(s, t; x) \quad (4.40)$$

dir. $F(x, s)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(x, s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{b_n} \varphi(x, \mu_n) \varphi^T(s, \mu_n) - \frac{1}{a_n} \varphi(x, \lambda_n) \varphi^T(s, \lambda_n) \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{b_n} \begin{bmatrix} \varphi_1(x, \mu_n) \\ \varphi_2(x, \mu_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(s, \mu_n) & \varphi_2(s, \mu_n) \end{bmatrix} - \frac{1}{a_n} \begin{bmatrix} \varphi_1(x, \lambda_n) \\ \varphi_2(x, \lambda_n) \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(s, \lambda_n) & \varphi_2(s, \lambda_n) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\varphi_1(x, \mu_n) \varphi_1(s, \mu_n)}{b_n} - \frac{\varphi_1(x, \lambda_n) \varphi_1(s, \lambda_n)}{a_n} & \frac{\varphi_1(x, \mu_n) \varphi_2(s, \mu_n)}{b_n} - \frac{\varphi_1(x, \lambda_n) \varphi_2(s, \lambda_n)}{a_n} \\ \frac{\varphi_2(x, \mu_n) \varphi_1(s, \mu_n)}{b_n} - \frac{\varphi_2(x, \lambda_n) \varphi_1(s, \lambda_n)}{a_n} & \frac{\varphi_2(x, \mu_n) \varphi_2(s, \mu_n)}{b_n} - \frac{\varphi_2(x, \lambda_n) \varphi_2(s, \lambda_n)}{a_n} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.41)$$

olur.

$$F(x, s) = \begin{bmatrix} F_{11}(x, s) & F_{12}(x, s) \\ F_{21}(x, s) & F_{22}(x, s) \end{bmatrix}$$

alalım. (4.42) den

$$F_{11}(x, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varphi_1(x, \mu_n) \varphi_1(s, \mu_n)}{b_n} - \frac{\varphi_1(x, \lambda_n) \varphi_1(s, \lambda_n)}{a_n} \right]$$

$$\begin{aligned}
F_{12}(x, s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varphi_1(x, \mu_n) \varphi_2(s, \mu_n)}{b_n} - \frac{\varphi_1(x, \lambda_n) \varphi_2(s, \lambda_n)}{a_n} \right] \\
F_{21}(x, s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varphi_2(x, \mu_n) \varphi_1(s, \mu_n)}{b_n} - \frac{\varphi_2(x, \lambda_n) \varphi_1(s, \lambda_n)}{a_n} \right] \\
F_{22}(x, s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varphi_2(x, \mu_n) \varphi_2(s, \mu_n)}{b_n} - \frac{\varphi_2(x, \lambda_n) \varphi_2(s, \lambda_n)}{a_n} \right]
\end{aligned} \tag{4.42}$$

yazılır. $f_{11}(x, s)$ 'i hesaplayalım. (4.43) un sağ tarafına $\frac{\varphi_1(x, \mu_n) \varphi_1(s, \mu_n)}{a_n}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa:

$$\begin{aligned}
F_{11}(x, s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varphi_1(x, \mu_n) \varphi_1(s, \mu_n)}{b_n} - \frac{\varphi_1(x, \mu_n) \varphi_1(s, \mu_n)}{a_n} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varphi_1(x, \mu_n) \varphi_1(s, \mu_n)}{a_n} - \frac{\varphi_1(x, \lambda_n) \varphi_1(s, \lambda_n)}{a_n} \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n} \right) \varphi_1(x, \mu_n) \varphi_1(s, \mu_n) + \frac{1}{a_n} (\varphi_1(x, \mu_n) \varphi_1(s, \mu_n) - \varphi_1(x, \lambda_n) \varphi_1(s, \lambda_n)) \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - b_n}{a_n b_n} \right) \varphi_1(x, \mu_n) \varphi_1(s, \mu_n) + \frac{1}{a_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\varphi_1(x, \lambda) \varphi_1(s, \lambda))' d\lambda \right]
\end{aligned}$$

olup buradan

$$|F_{11}(x, x)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{a_n - b_n}{a_n b_n} \right) \varphi_1^2(x, \mu_n) \right| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\varphi_1^2(x, \lambda))' d\lambda \right|$$

elde edilir. (4.39) eşitliği, $-1 \leq \cos \leq 1$, $-1 \leq \sin \leq 1$ ve $0 \leq x \leq \pi$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|F_{11}(x, x)| &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left| \left(\frac{a_n - b_n}{a_n b_n} \right) c_1 \right| + \left| \frac{1}{a_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} c_2 d\lambda \right| \right\} \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ |(b_n - a_n) c_1| + \left| \int_{\lambda_n}^{\mu_n} c_2 d\lambda \right| \right\} \\
|F_{11}(x, x)| &\leq C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{|b_n - a_n| + |\mu_n - \lambda_n|\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $A \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{|b_n - a_n| + |\mu_n - \lambda_n|\}$ denirse

$$|F_{11}(x, x)| \leq C_1 \cdot A \tag{4.43}$$

olur. (4.40) den

$$F_{11}^{(n+1)}(s, t; x) = \int_0^x F_{11}(s, u) F_{11}^{(n)}(u, t; x) du$$

olup buradan

$$F_{11}^{(2)}(s, t; x) = \int_0^x F_{11}(s, u) F_{11}(u, t; x) du \leq \int_0^x (C_1.A)^2 du$$

bulunur. $0 \leq x \leq \pi$ olduğundan

$$F_{11}^{(2)}(s, t; x) \leq (C_1.A)^2 . \pi$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\begin{aligned} F_{11}^{(3)}(s, t; x) &= \int_0^x F_{11}(s, u) F_{11}^{(2)}(u, t; x) du \leq \int_0^x (C_1.A)^3 \pi du \leq (C_1.A)^3 . \pi^2 (4.44) \\ \vdots &= \vdots \\ F_{11}^{(n)}(s, t; x) &\leq \frac{(C_1.A.\pi)^n}{\pi} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.41) eşitliğiden

$$K_{11}(s, t; x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F_{11}^{(n)}(s, t; x) \quad (4.45)$$

yazılabilir. (4.45) eşitliği gözönüne alınırsa

$$|K_{11}(x, x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{(C_1.A.\pi)^n}{\pi} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(C_1.A.\pi)^n}{\pi} \right|$$

olur. $C_1.A.\pi \leq \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} |K_{11}(x, x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(C_1.A.\pi)^n}{\pi} = C_1.A + \pi (C_1.A)^2 + \pi^2 (C_1.A)^3 + \dots \\ &\leq C_1.A + \pi \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 + \pi^2 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 + \dots \\ |K_{11}(x, x)| &\leq 2C_1.A \end{aligned} \quad (4.46)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|F_{12}(x, s)| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\varphi_1(x, \mu_n) \varphi_2(s, \mu_n)}{b_n} - \frac{\varphi_1(x, \lambda_n) \varphi_2(s, \lambda_n)}{a_n} \right| \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n} \right) \varphi_1(x, \mu_n) \varphi_2(s, \mu_n) + \frac{1}{a_n} (\varphi_1(x, \mu_n) \varphi_2(s, \mu_n) - \varphi_1(x, \lambda_n) \varphi_2(s, \lambda_n)) \right| \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{a_n - b_n}{a_n b_n} \right) \varphi_1(x, \mu_n) \varphi_2(s, \mu_n) + \frac{1}{a_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(s, \lambda))' d\lambda \right| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left| \left(\frac{a_n - b_n}{a_n b_n} \right) \varphi_1(x, \mu_n) \varphi_2(s, \mu_n) \right| + \left| \frac{1}{a_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(s, \lambda))' d\lambda \right| \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{a_n - b_n}{a_n b_n} \right) \varphi_1(x, \mu_n) \varphi_2(s, \mu_n) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{a_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\dot{\varphi}_1(x, \lambda) \varphi_2(s, \lambda) + \varphi_1(x, \lambda) \dot{\varphi}_2(s, \lambda)) d\lambda \right|
\end{aligned}$$

olup (4.39) eşitlikleri, $-1 \leq \cos \leq 1$, $-1 \leq \sin \leq 1$ ve $0 \leq x \leq \pi$ olduğu gözönüne alınırsa

$$|F_{12}(x, x)| \leq C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{|b_n - a_n| + |\mu_n - \lambda_n|\} \equiv C_1.A \quad (4.76)$$

(4.39),(4.40) ve (4.46) dan

$$|K_{12}(x, x)| \leq 2C_2.A \quad (4.47)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|K_{21}(x, x)| &\leq 2C_2.A \\
|K_{22}(x, x)| &\leq 2C_1.A
\end{aligned} \quad (4.48)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
BK(x, x) - K(x, x)B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} K_{21} & K_{22} \\ -K_{11} & -K_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -K_{12} & K_{11} \\ -K_{22} & K_{21} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} K_{12} + K_{21} & K_{22} - K_{11} \\ K_{22} - K_{11} & -K_{12} - K_{21} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olup (4.37) denkleminden

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_{12} + K_{21} & K_{22} - K_{11} \\ K_{22} - K_{11} & -K_{12} - K_{21} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_2(x) - p_1(x) & q_2(x) - q_1(x) \\ q_2(x) - q_1(x) & p_1(x) - p_2(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olup buradan da

$$p_2(x) - p_1(x) = K_{12} + K_{21} \quad (4.49)$$

$$q_2(x) - q_1(x) = K_{22} - K_{11} \quad (4.50)$$

bulunur. (4.49), (4.50) denklemleri ve (4.46)-(4.48) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} |p_2(x) - p_1(x)| &\leq C' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{|b_n - a_n| + |\mu_n - \lambda_n|\} \equiv C' A \\ |q_2(x) - q_1(x)| &\leq C'' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{|b_n - a_n| + |\mu_n - \lambda_n|\} \equiv C'' A \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler $[0, \pi]$ aralığında bulunan tüm x değerleri için sağlandığından

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq \pi} |p_2(x) - p_1(x)| &\leq C' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{|b_n - a_n| + |\mu_n - \lambda_n|\} \equiv C' A \\ \max_{0 \leq x \leq \pi} |q_2(x) - q_1(x)| &\leq C'' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{|b_n - a_n| + |\mu_n - \lambda_n|\} \equiv C'' A \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece Dirac operatörü için ters problemde; spektral karakteristikler arasındaki fark azaldıkça potansiyel farkında küçüldüğü görülür.

Bu teorem $(0, \infty)$ yarı eksenini için de benzer şekilde ispatlanabilir.

5. DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

$q(x)$ ve $p(x)$ reel değerli fonksiyonlar ve $q(x) \in W_2^m[0, \pi]$, $p(x) \in W_2^{m+1}[0, \pi]$ ($m \geq 0$), h, H reel sayılar olmak üzere (5.1) difüzyon denklemini gözönüne alalım.

$$-y'' + [2\lambda p(x) + q(x)]y = \lambda^2 y \quad (5.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (5.2)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (5.3)$$

(5.1)-(5.3) ün özdeğerleri (5.3) ikinci sınır şartının kökleridir. $\{\lambda_n\}$ spektrumu için asimptotik formül

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx, \quad \sum |c_{1,n}|^2 < \infty, \quad (5.4)$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi [q(x) + p^2(x)] dx \right), \quad (5.5)$$

olmak üzere

$$\lambda_n = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_{1,n}}{n}, \quad (5.6)$$

formundadır. (5.1)-(5.3) probleminin normlaştırmacı sayıları

$$a_n = \int_0^\pi \varphi_n^2(x) dx - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi p(x) \varphi_n^2(x) dx,$$

olup asimptotik formu

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{2} p(0), \quad \sum |\alpha_{1,n}|^2 < \infty.$$

olmak üzere

$$a_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_{1,n}}{n}, \quad (5.7)$$

şeklindedir. (5.1)-(5.2) denkleminin çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. Bu taktirde

$$\varphi(x, \lambda) = \cos[\lambda x - \alpha(x)] + \int_0^x A(x, t) \cos \lambda t dt + \int_0^x B(x, t) \sin \lambda t dt, \quad (5.8)$$

$$\alpha(x) = xp(0) + 2 \int_0^x \{A(\xi, \xi) \sin \alpha(\xi) - B(\xi, \xi) \cos \alpha(\xi)\} d\xi. \quad (5.9)$$

$$q(x) = -p^2(x) + 2 \frac{d}{dx} \{A(x, x) \cos \alpha(x) + B(x, x) \sin \alpha(x)\} \quad (5.10)$$

$$A(0, 0) = h, \quad \left. \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad B(x, 0) = 0 \quad (5.11)$$

$$A(x, -t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.12)$$

$$B(x, t) = 0, \quad t > x$$

$$\alpha(x) = \int_0^x p(t) dt \quad (5.13)$$

olmak üzere x ve t değişkenlerine göre $(m+1)$. mertebeden karesi integrallenebilir türevlere sahip $A(x, t)$ ve $B(x, t)$ fonksiyonları mevcuttur ve

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} - 2p(x) \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} - q(x) A(x, t) &= \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} + 2p(x) \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} - q(x) B(x, t) &= \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

dir. Tersine eğer $A(x, t)$ ve $B(x, t)$ fonksiyonları, (5.14) denklemler sistemini ve (5.9)-(5.11) koşullarını sağlayan ikinci mertebeden karesi integrallenebilir fonksiyonlar ise (5.8) ile tanımlı $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (5.2)-(5.3) şartlarını sağlayan (5.1) denkleminin çözümüdür.

Difüzyon operatörü için ters problemin temel denklemi $0 \leq t \leq x$ olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} &F_{11}(x, t) \cos \alpha(x) + F_{12}(x, t) \sin \alpha(x) + A(x, t) \\ &+ \int_0^x A(x, \xi) F_{11}(\xi, t) d\xi + \int_0^x B(x, \xi) F_{12}(\xi, t) d\xi = 0 \\ &F_{21}(x, t) \cos \alpha(x) + F_{22}(x, t) \sin \alpha(x) + B(x, t) \\ &+ \int_0^x A(x, \xi) F_{21}(\xi, t) d\xi + \int_0^x B(x, \xi) F_{22}(\xi, t) d\xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned}
F_{11}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \cos c_0 x \cos c_0 t \\
&+ \sum_n \left\{ \frac{1}{2a_n} \cos \lambda_n x \cos \lambda_n t - \frac{1}{\pi} \cos(n + c_0) x \cos(n + c_0) t \right\} \\
F_{12}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \sin c_0 x \cos c_0 t \\
&+ \sum_n \left\{ \frac{1}{2a_n} \sin \lambda_n x \cos \lambda_n t - \frac{1}{\pi} \sin(n + c_0) x \cos(n + c_0) t \right\} \\
F_{21}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \cos c_0 x \sin c_0 t \\
&+ \sum_n \left\{ \frac{1}{2a_n} \cos \lambda_n x \sin \lambda_n t - \frac{1}{\pi} \cos(n + c_0) x \sin(n + c_0) t \right\} \\
F_{22}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \sin c_0 x \sin c_0 t \\
&+ \sum_n \left\{ \frac{1}{2a_n} \sin \lambda_n x \sin \lambda_n t - \frac{1}{\pi} \sin(n + c_0) x \sin(n + c_0) t \right\}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

dir.

Her sürekli $\alpha(x)$ fonksiyonu için (5.15) denklemler sistemi $A(x, t)$ ve $B(x, t)$ 'ye göre tek çözüme sahiptir. Bu çözüm

$$\begin{aligned}
A(x, t) &= A_0(x, t) \cos \alpha(x) + A_1(x, t) \sin \alpha(x) \\
B(x, t) &= B_0(x, t) \cos \alpha(x) + B_1(x, t) \sin \alpha(x)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Burada (5.15) sisteminde $\alpha(x) = 0$ olacak biçimde bu sistemin çözümleri $A_0(x, t)$, $B(x, t)$ dir. $\alpha(x) = \frac{\pi}{2}$ olacak biçimde ise $A_1(x, t)$, $B_1(x, t)$ dir.

Şimdi $\tilde{q}(x)$ ve $p(x)$ reel değerli, $\tilde{q}(x) \in W_2^m[0, \pi]$, $p(x) \in W_2^{m+1}[0, \pi]$ ($m \geq 0$) olacak şekilde

$$\begin{aligned}
-y'' + [2\lambda p(x) + q(x)] y &= \lambda^2 y \\
y'(0) - hy(0) &= 0, \\
y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
-y'' + [2\mu p(x) + \tilde{q}(x)] y &= \mu^2 y \\
y'(0) - hy(0) &= 0, \\
y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0
\end{aligned} \tag{5.19}$$

problemlerini ele alalım. (5.18) probleminin spektrumu $\{\lambda_n, a_n\}$, (5.19) probleminin $\{\mu_n, \tilde{a}_n\}$ ve (5.19) un çözüm fonksiyonu

$$\tilde{\varphi}(x, \mu) = \cos[\mu x - \tilde{\alpha}(x)] + \int_0^x \tilde{A}(x, t) \cos \mu t dt + \int_0^x \tilde{B}(x, t) \sin \mu t dt.$$

olsun.

Teorem 5.1. Eğer $M \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \{|a_n \mu_n - \tilde{a}_n \lambda_n| + |\mu_n - \lambda_n| + |\tilde{a}_n - a_n|\}$ yeterince küçük ise

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |\tilde{q}(x) - q(x)| \leq C.M$$

dir. Burada $M > 0$; $h, H, q(x)$ ve $p(x)$ 'e bağlı bir sabittir.

İspat. (5.19) problemi için

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{11}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \cos c_0 x \cos c_0 t \\ &+ \sum_n \left\{ \frac{1}{2\tilde{a}_n} \cos \mu_n x \cos \mu_n t - \frac{1}{\pi} \cos(n + c_0) x \cos(n + c_0) t \right\} \\ \tilde{F}_{12}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \sin c_0 x \cos c_0 t \\ &+ \sum_n \left\{ \frac{1}{2\tilde{a}_n} \sin \mu_n x \cos \mu_n t - \frac{1}{\pi} \sin(n + c_0) x \cos(n + c_0) t \right\} \\ \tilde{F}_{21}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \cos c_0 x \sin c_0 t \\ &+ \sum_n \left\{ \frac{1}{2\tilde{a}_n} \cos \mu_n x \sin \mu_n t - \frac{1}{\pi} \cos(n + c_0) x \sin(n + c_0) t \right\} \\ \tilde{F}_{22}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \sin c_0 x \sin c_0 t \\ &+ \sum_n \left\{ \frac{1}{2\tilde{a}_n} \sin \mu_n x \sin \mu_n t - \frac{1}{\pi} \sin(n + c_0) x \sin(n + c_0) t \right\} \end{aligned} \tag{5.20}$$

olmak üzere esas integral denklemi

$$\left. \begin{aligned} &\tilde{F}_{11}(x, t) \cos \alpha(x) + \tilde{F}_{12}(x, t) \sin \alpha(x) + \tilde{A}(x, t) \\ &+ \int_0^x \tilde{A}(x, \xi) \tilde{F}_{11}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \tilde{B}(x, \xi) \tilde{F}_{12}(\xi, t) d\xi = 0 \\ &\tilde{F}_{21}(x, t) \cos \alpha(x) + \tilde{F}_{22}(x, t) \sin \alpha(x) + \tilde{B}(x, t) \\ &+ \int_0^x \tilde{A}(x, \xi) \tilde{F}_{21}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \tilde{B}(x, \xi) \tilde{F}_{22}(\xi, t) d\xi = 0 \end{aligned} \right\} \tag{5.21}$$

şeklindedir. (5.10) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\tilde{q}(x) - q(x) &= p^2(x) - \tilde{p}^2(x) + 2 \frac{d}{dx} \left[\tilde{A}(x, x) \cos \alpha(x) + \tilde{B}(x, x) \sin \alpha(x) \right] \\
&\quad - 2 \frac{d}{dx} [(A(x, x) \cos \alpha(x) + B(x, x) \sin \alpha(x))] \\
&= 2 \left[\frac{d}{dx} \tilde{A}(x, x) \cos \alpha(x) - \alpha'(x) \sin \alpha(x) \tilde{A}(x, x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{d}{dx} \tilde{B}(x, x) \sin \alpha(x) + \alpha'(x) \cos \alpha(x) \tilde{B}(x, x) \right] \\
&\quad - 2 \left[\frac{d}{dx} A(x, x) \cos \alpha(x) - \alpha'(x) \sin \alpha(x) A(x, x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{d}{dx} B(x, x) \sin \alpha(x) + \alpha'(x) \cos \alpha(x) B(x, x) \right] \\
&= 2 \left\{ \frac{d}{dx} (\tilde{A}(x, x) - A(x, x)) \cos \alpha(x) - \alpha'(x) \sin \alpha(x) (\tilde{A}(x, x) - A(x, x)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{d}{dx} (\tilde{B}(x, x) - B(x, x)) \sin \alpha(x) + \alpha'(x) \cos \alpha(x) (\tilde{B}(x, x) - B(x, x)) \right\}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

olur. Burada (5.17) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(x, x) - A(x, x) &= [\tilde{A}_0(x, x) - A_0(x, x)] \cos \alpha(x) \\
&\quad + [\tilde{A}_1(x, x) - A_1(x, x)] \sin \alpha(x) \\
\tilde{B}(x, x) - B(x, x) &= [\tilde{B}_0(x, x) - B_0(x, x)] \cos \alpha(x) \\
&\quad + [\tilde{B}_1(x, x) - B_1(x, x)] \sin \alpha(x) \\
\frac{d}{dx} (\tilde{A}(x, x) - A(x, x)) &= \frac{d}{dx} [\tilde{A}_0(x, x) - A_0(x, x)] \cos \alpha(x) \\
&\quad - \alpha'(x) \sin \alpha(x) [\tilde{A}_0(x, x) - A_0(x, x)] \\
&\quad + \frac{d}{dx} [\tilde{A}_1(x, x) - A_1(x, x)] \cdot \sin \alpha(x) \\
&\quad + \alpha'(x) \cos \alpha(x) [\tilde{A}_1(x, x) - A_1(x, x)] \\
\frac{d}{dx} (\tilde{B}(x, x) - B(x, x)) &= \frac{d}{dx} [\tilde{B}_0(x, x) - B_0(x, x)] \cdot \cos \alpha(x) \\
&\quad - \alpha'(x) \sin \alpha(x) [\tilde{B}_0(x, x) - B_0(x, x)] \\
&\quad + \frac{d}{dx} [\tilde{B}_1(x, x) - B_1(x, x)] \cdot \sin \alpha(x) \\
&\quad + \alpha'(x) \cos \alpha(x) [\tilde{B}_1(x, x) - B_1(x, x)]
\end{aligned} \tag{5.23}$$

elde edilir. (5.15) integral denkleminin çözümü

$$F_{11}^{(1)}(s, t; x) = F_{11}(s, t), \quad (5.24)$$

$$F_{11}^{(n+1)}(s, t; x) = \int_0^x F_{11}(s, u) F_{11}^{(n)}(u, t; x) du, \quad (n \geq 1) \quad (1)$$

itere çekirdekler olmak üzere

$$\begin{aligned} S(s, t; x) &= \sum_n (-1)^n F_{11}^{(n)}(s, t; x), \\ \int_0^x \int_0^x |F_{11}(s, t)|^2 ds dt &< 1, \\ A_0(x, s) &= S(x, x; x) = \sum_{n=1} (-1)^n F_{11}^{(n)}(x, s; x) \end{aligned} \quad (5.25)$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{11}^{(1)}(s, t; x) &= \tilde{F}_{11}(s, t), \\ \tilde{F}_{11}^{(n+1)}(s, t; x) &= \int_0^x \tilde{F}_{11}(s, u) \tilde{F}_{11}^{(n)}(u, t; x) du, \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^x |\tilde{F}_{11}(s, t)|^2 ds dt &< 1, \\ \tilde{A}_0(x, s) &= \sum_{n=1} (-1)^n \tilde{F}_{11}^{(n)}(x, s; x) \end{aligned} \quad (5.27)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} A_0(x, x) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_n (-1)^n F_{11}^{(n)}(x, x; x) \right) \\ &= -\frac{d}{dx} F_{11}(x, x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F_{11}^{(n+1)}(x, x; x) \end{aligned} \quad (5.28)$$

olup

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_{11}^{(n+1)}(x, x; x) &= \left\{ F_s^{(n+1)} + F_t^{(n+1)} + F_x^{(n+1)} \right\}_{s=x, t=x} \\ &= \int_0^x F_{11s}(s, u) F_{11}^{(n)}(u, t; x) du \\ &\quad + \int_0^x F_{11t}(u, t) F_{11}^{(n)}(s, u; x) du + F_x^{(n+1)}(s, t; x)_{s=x, t=x} \\ &= 2 \int_0^x F_{11x}(x, u) F_{11}^{(n)}(x, u; x) du + \sum_{k=1}^{\infty} F_{11}^{(k)}(x, x; x) F_{11}^{(n+1-k)}(x, x; x) \end{aligned}$$

eşitliği (5.28) de yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} A_0(x, x) &= -\frac{d}{dx} F_{11}(x, x) + 2 \int_0^x F_{11x}(x, u) A_0(x, u) du \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} F_{11}^{(k)}(x, x; x) F_{11}^{(n+1-k)}(x, x; x) \\
&= -\frac{d}{dx} F_{11}(x, x) + 2 \int_0^x F_{11x}(x, u) A_0(x, u) du - A_0(x, x)^2 \quad (5.29)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $\widetilde{A}_0(x, x) - A_0(x, x)$ ifadesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\left| \widetilde{F}_{11}(x, t) - F_{11}(x, t) \right| &= \left| \frac{1}{\pi} \cos c_0 x \cos c_0 t \right. \\
&\quad + \sum_n \left\{ \frac{1}{2\tilde{a}_n} \cos \mu_n x \cos \mu_n t - \frac{1}{\pi} \cos(n + c_0) x \cos(n + c_0) t \right\} \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \cos c_0 x \cos c_0 t \\
&\quad \left. - \sum_n \left\{ \frac{1}{2a_n} \cos \lambda_n x \cos \lambda_n t - \frac{1}{\pi} \cos(n + c_0) x \cos(n + c_0) t \right\} \right| \\
&= \sum_n \left| \frac{1}{2\tilde{a}_n} \cos \mu_n x \cos \mu_n t - \frac{1}{2a_n} \cos \lambda_n x \cos \lambda_n t \right| \\
&= \sum_n \left| \left(\frac{1}{2\tilde{a}_n} - \frac{1}{2a_n} \right) \cos \mu_n x \cos \mu_n t \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2a_n} \cos \mu_n x \cos \mu_n t - \frac{1}{2a_n} \cos \lambda_n x \cos \lambda_n t \right| \\
&\leq \sum_n \left| \left(\frac{1}{2\tilde{a}_n} - \frac{1}{2a_n} \right) \cos \mu_n x \cos \mu_n t \right| \\
&\quad + \sum_n \left| \frac{1}{2a_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\cos \lambda x \cos \lambda t) d\lambda \right| \\
&\leq C_1 \sum_n [|\tilde{a}_n - a_n| + |\mu_n - \lambda_n|]
\end{aligned}$$

olur. Burada $A \equiv \sum_n [|\tilde{a}_n - a_n| + |\mu_n - \lambda_n|]$ denirse

$$\left| \widetilde{F}_{11}(x, t) - F_{11}(x, t) \right| \leq C_1 \sum_n [|\tilde{a}_n - a_n| + |\mu_n - \lambda_n|] = C_1 A \quad (5.29)$$

olur. Diğer taraftan (5.20) da x 'e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \widetilde{F}_{11}(x, t) &= \frac{-c_0}{\pi} \sin c_0 x \cos c_0 t \\
&\quad + \sum_n \left\{ \frac{-\mu_n}{2\tilde{a}_n} \sin \mu_n x \cos \mu_n t + \frac{(n + c_0)}{\pi} \sin(n + c_0) x \cos(n + c_0) t \right\}
\end{aligned} \quad (5.30)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{d}{dx} \tilde{F}_{11}(x, t) - \frac{d}{dx} F_{11}(x, t) \right| \\
&= \sum_n \left| \frac{-\mu_n}{2\tilde{a}_n} \sin \mu_n x \cos \mu_n t - \frac{-\lambda_n}{2a_n} \sin \lambda_n x \cos \lambda_n t \right| \\
&\leq C_2 \sum_n [|\mu_n a_n - \lambda_n \tilde{a}_n| + |\mu_n - \lambda_n|] \equiv C_2 B
\end{aligned} \tag{5.31}$$

elde edilir. (5.24) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \tilde{F}_{11}^{(2)}(x, x) - F_{11}^{(2)}(x, x) \right| \\
&= \left| \int_0^x \left(\tilde{F}_{11}(x, x) - F_{11}(x, x) \right) \left(\tilde{F}_{11}^{(1)}(u, t; x) - F_{11}^{(1)}(u, t; x) \right) du \right| \leq (C_1 A)^2 \pi
\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\left| \tilde{F}_{11}^{(n)}(x, x) - F_{11}^{(n)}(x, x) \right| \leq \frac{1}{\pi} (C_1 A \pi)^n \tag{5.33}$$

olur buradan $C_1 A \pi < \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$\left| \widetilde{A}_0(x, x) - A_0(x, x) \right| \leq \sum_n \left| \frac{1}{\pi} (C_1 A \pi)^n \right| \leq 2C_1 A \tag{5.34}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{d}{dx} \tilde{F}_{11}^{(2)}(x, x) - \frac{d}{dx} F_{11}^{(2)}(x, x) \right| \\
&= \left| \int_0^x \left(\frac{d}{dx} \tilde{F}_{11}(x, x) - \frac{d}{dx} F_{11}(x, x) \right) \left(\frac{d}{dx} \tilde{F}_{11}^{(1)}(u, t; x) - \frac{d}{dx} F_{11}^{(1)}(u, t; x) \right) du \right| \\
&\leq (C_2 B)^2 \pi \\
& \left| \frac{d}{dx} \tilde{F}_{11}^{(n)}(x, x) - \frac{d}{dx} F_{11}^{(n)}(x, x) \right| \leq \frac{1}{\pi} (C_2 B \pi)^n
\end{aligned} \tag{5.35}$$

elde edilir.

$$\left| \frac{d}{dx} \left[\widetilde{A}_0(x, x) - A_0(x, x) \right] \right| \leq \sum_n \left| \frac{1}{\pi} (C_2 B \pi)^n \right| \leq 2C_2 B \tag{5.36}$$

Benzer yöntemle

$$\begin{aligned}
\left| \widetilde{B}_0(x, x) - B_0(x, x) \right| &\leq 2C_3A \\
\left| \frac{d}{dx} \left[\widetilde{B}_0(x, x) - B_0(x, x) \right] \right| &\leq 2C_4B \\
\frac{d}{dx} \left[\widetilde{A}_1(x, x) - A_1(x, x) \right] &\leq 2C_5B \\
\left| \widetilde{A}_1(x, x) - A_1(x, x) \right| &\leq 2C_6A \\
\frac{d}{dx} \left[\widetilde{B}_1(x, x) - B_1(x, x) \right] &\leq 2C_7B \\
\left| \widetilde{B}_1(x, x) - B_1(x, x) \right| &\leq 2C_8A
\end{aligned} \tag{5.37}$$

bulunur. (5.34)-(5.37) eşitsizlikleri (5.23) te yerine yazılırsa ve elde edilen son eşitsizlikte (5.22) denkleminde yazılırsa

$$|\widetilde{q}(x) - q(x)| \leq M. \sum_n |a_n \mu_n - \widetilde{a}_n \lambda_n| + |\mu_n - \lambda_n| + |\widetilde{a}_n - a_n|$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $x \in [0, \pi]$ için sağlandığından

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |\widetilde{q}(x) - q(x)| \leq M. \sum_n |a_n \mu_n - \widetilde{a}_n \lambda_n| + |\mu_n - \lambda_n| + |\widetilde{a}_n - a_n|$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

1. **Abdukadyrov, E.**, 1967, Computation of the Regularized Trace for a Dirac System, Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh., 22, (4), 17-24.
2. **Adams, R.A.**, 1978, Sobolev Space, AcademicPress, New York
3. **Ambartsumyan, V.A.**, 1929, Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik, 53, 690-695.
4. **Aydın, M.**, 2007, Hill denkleminin spektral teorisinin düz ve ters problemleri üzerine, Doktora Tezi, Fırat Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
5. **Baş, E.**, 2006, Spektral ve potansiyel teorisinin ters problemleri, *Doktora Tezi*, Fırat Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
6. **Borg, G.**, 1945, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilischen Eigenwertaufgabe, Acta Math., 78, 1-96
7. **Cardner, G., Green, J., Kruskal, M. and Miura, M.**, 1967, A Method for Solving the Korteweg-De Vries Equation, Phys.Rev. Lett., v. 19, 1095-1098.
8. **Delsarte, J.**, 1938b, Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relativites Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partielles du Second Ordre, C. R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182.
9. **Delsarte, J.**, and **Lions, J.**, 1957, Transmutations Doperateurs Differentials Dans Le Domaine Complexe, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128.
10. **Evans, W.D. and Harris, B.J.**, 1980, Bounds for The Point Spectra of Separated Dirac Operators, Proc. Roy. Soc. Edinburg, 88 a, 341-366.
11. **Faddeev, L.D.**, 1964, Properties of the S-Matrix of the One-Dimensional Schrödinger Equation, Trudy Mat. Inst. Steklow, 73, 314-336.
12. **Gasymov, M.G., Guseniov, G. Sh.**, 1981, Determination of Diffusion Operator on Spectral Data 1, Dokl. Akad. nauk Azerb. SSR, 37, 19-23.

13. **Gasymov, M.G. and Levitan, B.M.**, 1966, The Inverse Problem for the Dirac System, Dokl. Akad. Nauk. SSR, 167, 967-970.
14. **Gasymov, M.G. and Dzhabiev, T.T.**, 1975, On The Determination of The Dirac System from Two Spektra, Transactions of The Summer School on Spectral Theory Operator, Baku/ELM., 46-71.
15. **Gasymov, M.G.**, 1967, The Inverse Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order $2n$, Soviet Phys. Dokl. 11, 676-678.
16. **Gel'fand, I.M. and Levitan, B.M.**, 1951, On the Determination of a Differential Equation by Its Spectral Function, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math., 15, 309-360.
17. **Grosse, H. and Martin, A.**, 1979, Theory of Inverse Problem for Confining Potentials, Nuclear Phys., B 14, 413-432.
18. **Harris, B. J.**, 1983, Bounds for The Eigenvalues of Separated Dirac Operators, Proc. of the Royal Society of Edinburg, 95 a, 341-366.
19. **Hochstadt, H.**, 1973, The Inverse Sturm-Liouville Problem, Comm. On Pure and Applied Mathematics, vol. XXVI, 715-729.
20. **Hochstadt, H.**, 1977, On the Wellposedness of the inverse Sturm-Liouville problems, J. Differential Equations, 23, 402-413.
21. **İç, Ü.**, 2003, Kanonik Dirac operatörü için kısmen çakışmayan iki Spektruma göre ters problem, *Doktora Tezi*, Fırat Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
22. **Khasanov, A. B.**, 1994, On Eigenvalues of the Dirac Operator Located on the Continuous Spectrum, Theory and Math. Phys., v. 99, 1, 20-26.
23. **Koyunbakan, H.**, 2002, Singüler Sturm-Liouville operatörünün spektral teorisi, *Doktora Tezi*, Fırat Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
24. **Koyunbakan, H., Panakhov, E.S.**, 2007, Half-inverse problem for diffusion operators on the finite interval, J. Math. Anal., 326, 1024-1030.

25. **Krein, M.G.**, 1951, Solution of Inverse Sturm-Liouville Problem, dokl. akad. nauk. SSSR, 76, 21-24.
26. **Krein, M.G.**, 1954, On a Method of the Effective Solution of an Inverse Boundary Value Problem, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 95, 767-770.
27. **Kreyszing, E.**, 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, New York.
28. **Lax, P.**, 1968, Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, Comm. Pure and Math., 21, 467-490.
29. **Levitan, B.M. and Gasymov, M.G.**, 1964, Determination of a Differential Equations by two of its Spectra, Russian Math. Surveys, 19, 1-63.
30. **Levitan, B.M. and Gasymov, M.G.**, 1964, Determination of a Differential Equations by two of its Spectra, Russian Math. Surveys, 19, 1-63.
31. **Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S.**, 1990, Sturm-Liouville and Dirac Operators, Netherlands.
32. **Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S.**, 1970, Introduction to Spectral Theory, Moscow, Nauk.
33. **Levitan, B.M.**, 1978, On the determination of Sturm-Liouville Operator from One and Two Spectra, Math. USSR, v. XII, 179-193.
34. **Levitan, B.M.**, 1964, Generalized Translation Operators and Some of its Applications, Jerusalem.
35. **Levinson, N.**, 1949, Criteria for the Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators, Casopis. Pest. Mat. Fys. 74, 17-20
36. **Levinson, N.**, 1949, The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B, pp. 25-30.
37. **Liusternik, L.A. and Sobolev, V.J.**, 1961, Elements of Functional Analysis, Frederick Ungar Publishing Company, New York.

38. **Maksudov, F.G. and Veliev, S.G.**, 1975, The Inverse Scattering Problem for the Nonself-Adjoint Dirac Operators on the Whole Axis, Soviet Math. Dokl., v. 16, 6, 1629-1633.
39. **Maksudov, F.G. and Guseinov, G. SH.**, 1987., On Solution of The Inverse Scattering Problem for A Quadratic pencil of One-dimensional Schrödinger Operators on the Whole Axis, Soviet Math. Dokl., Vol. 34, No. 1.
40. **Marchenko, V.A.**, 1977, Sturm-Liouville Operators and Their Applications, Kiev.
41. **Marchenko, V.A.**, 1950, Some Problems in the Theory of Second-order Differential Operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 72, 457-560.
42. **Markushevich, A.I.**, 1977, Introduction to Analytic Functions Theory I, II, Moskow.
43. **Martynov, V.V.**, 1965, Conditions of Discreteness and Countinuity of the Spectrum in the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Differential Equations, dokl. akad. nauk. SSSR, 165, 996-999.
44. **Mizutani, A.**, 1984, On The Inverse Sturm-Liouville Problem, Jour. Of the Fac. of. Sci. Univ. of Tokyo, 319-350.
45. **Moses, H.E.**, 1957, Calculation of The Scattering Potential for One -Dimentional Dirac Eguation from Reflection Coefficient and Point Eigenvalues, Bull. Amer. Phys. Soc., 4, 240
46. **Naimark, M.A.**, 1968, Linear Differential Operators, Frederik Ungar Publishing Co. Inc., London.
47. **Olver, F.W.J.**, 1974, Introduction to Asymptotics and Special Functions.
48. **Otelbayev, M.O.**, 1973, Distribution of the Eigenvalues of the Dirac Operators, Mat. Zametki, 14, 843-852.
49. **Penahov, E.S.** ,1985, The defining of Dirac System in two incompletely set collection of eigenvalues, DAN Az SSR, v. XLI, no:5, 8-12.

50. **Petrovsky, I.G.**, 1975, Lectures on the Theory of Integral Equations, Moscow.
51. **Povzner, A.V.**, 1948, On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis, Mat. Sb., 23.
52. **Prats, F., Toll, J.**, 1959, Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States, Pys. Rev., 113, (1), 363-370
53. **Quigg, C., Rosner, J.L. and Thacker, H.B.**, 1978, Inverse scattering Problem for Quarkonium System, I and II Phys. Rev., d 18, 1, 274-295.
54. **Roos, B.W. and Sangren, W. C.**, 1961, Spectra for a Pair Singular First-Order Differential Equations, Proc. Amer. Math. Soc., 12, 468-476.
55. **Sabatier, P.C., Chadan, K.**, 1977, Inverse Problems in Quantum Scattering Theory, Springer-Verlang NewYork Heidelberg, Berlin.
56. **Sargsjan, I. S.**, 1966a, A Theorem of the Completeness of the Eigenfunctions of the Generalized Dirac System, Dokl. Akad. Nauk Arm. SSSR, 42, (2), 77-82.
57. **Sargsjan, I.S.**, 1966d, Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional Dirac System, Izv. Akad. Nauk Arm. SSSR ser. Mat., 1, (6), 392-436.
58. **Suzuki, T.**, 1983, Uniqueness and nonuniqueness in an inverse problem for the parabolic equation, J. Differential Equations, 47, 296-316.
59. **Şuhubi, E. S.**, 2001, Fonksiyonel Analiz, İ.T.Ü, İstanbul.
60. **Tichknof, A.N.**, 1949, Jeofizik Problemleri için Teklik Teoremleri, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, vol. 69, 4, 797-800.
61. **Titchmarsh, E.C.**, 1946, Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations I, II.
62. **Tricomi, F.G.**, Integral Equations, 1967, Interscience publishers, INC., Newyork.
63. **Veliev, S.G.**, 1972, Inverse Problem for Dirac System a the Whole Axis, DEP. VINITI, 4917-4972.

- 64. **Yosida, K.**, 1978, Theory of Integral Equations, 2nd ed.(Japanese), Iwanami.
- 65. **Yurko, V.**, 2008, Recovering Differential pencils on Compact Graphs, J. Differential Equations, 244, 431-443.

ÖZGEÇMİŞ

1981 Elazığ doğumlu öğrenci ilk, orta ve lise öğrenimini Elazığ'da tamamladı. 2000 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünde başladığı üniversite öğrenimini 2004 yılında tamamlayarak aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında tezli yüksek lisans programına başladı. Şubat 2007 'de aynı anabilim dalında doktora programına başladı.

Keziban TAŞ